

Il materiale contenuto in questo documento può essere riprodotto, in tutto o in parte, a scopi *non commerciali*, purché siano citati l'Autore e la fonte

Parole chiave: divisione di un segmento in parti uguali; costruzioni geometriche elementari; cenni sulle unità di misura usate a Cuneo; aree di poligoni regolari e non; problemi su circonferenza e cerchio; divisione di un cerchio in parti uguali; tracciatura di un ovale; misura dei volumi di corpi solidi; duplicazione della sfera; misura botti; misura cumuli di grano

Giovanni Francesco Peverone

Giovanni Francesco Peverone nacque a Cuneo nel 1509 e morì a Milano nel 1559.

Il suo trattato è diviso in due parti:

- * la parte iniziale, da p. 1 a p. 60, è dedicata all' "Arithmetica" e non è qui considerata;
- * la seconda parte, da p. 63 a p. 132, è riservata alla "Geometria", è divisa in *tre libri* ed è l'oggetto di questo articolo.

Note

- * Peverone usa espressioni come "8 2/3" oppure (8 e 2/3), senza scrivere alcun simbolo infisso come è "+": qui si è sempre scritto "8 + 2/3". Allo scopo di evitare errori o malintesi, i numeri misti come "8 + 2/3" sono spesso scritti racchiusi fra parentesi tonde e con il simbolo "+" infisso: (8 + 2/3).
- * Peverone non usa la *virgola decimale*.
- * Per semplificare la scrittura, il simbolo di frazione è reso con la barra "/", anziché con la barra orizzontale.
- * L'Autore usa per π il valore approssimato "3 + 1/7": in questo articolo è quasi sempre usata l'equivalente frazione "22/7".
- * La maggior parte delle figure è stata ridisegnata cercando di rispettare forme e proporzioni.
- * Alcuni argomenti sono ampliati con appositi riquadri graficamente evidenziati e contrassegnati con la dicitura APPROFONDIMENTO.

LIBRO PRIMO DI GEOMETRIA

=====

Che cosa è la Geometria

Peverone dà la seguente definizione di *Geometria*:

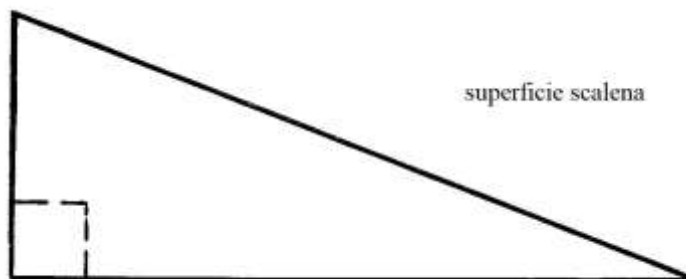
"Geometria ... è scienza e arte di misurare la terra, trovata dagli Egizi per saper, dopo che le inondazioni del Nilo avevano posto sottosopra i campi, dare ad ognuno quello che era suo prima".

L'Autore presenta poi gli enti geometrici elementari: dal punto alle linee rette e curve, agli angoli e alle figure piane e solide.

Le superfici

Una superficie possiede solo lunghezza e larghezza: essa è delimitata da linee (o segmenti).

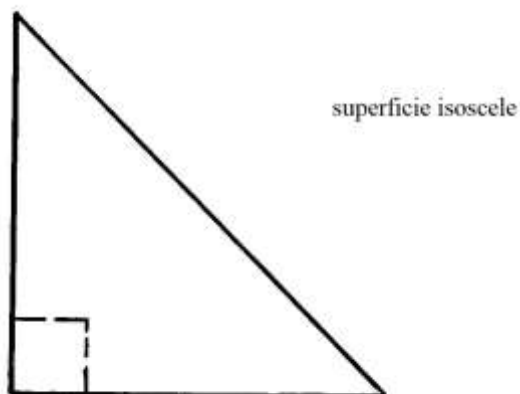
Una *superficie scalena* possiede almeno tre lati di differente lunghezza e un angolo retto, come nella figura:



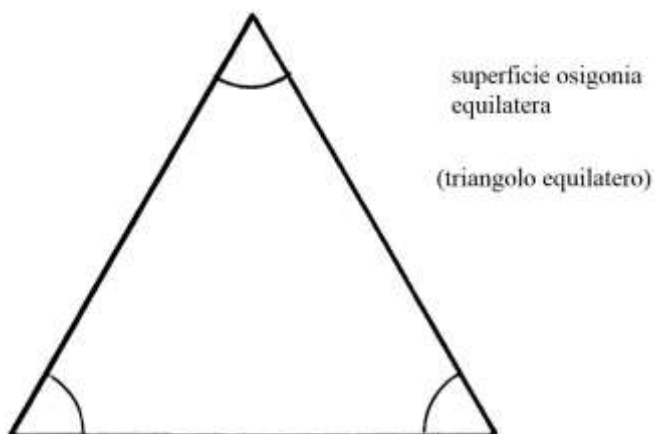
Si tratta di un triangolo rettangolo scaleno.

È da notare che Peverone non usa il termine “triangolo” ma l’espressione “superficie scalena”.

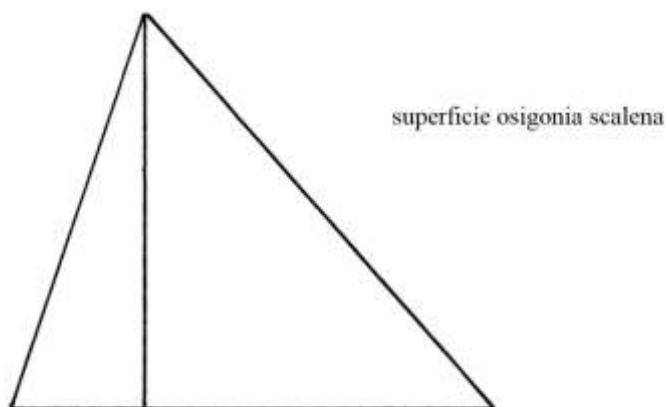
Una *superficie isoscele* è un triangolo rettangolo isoscele:



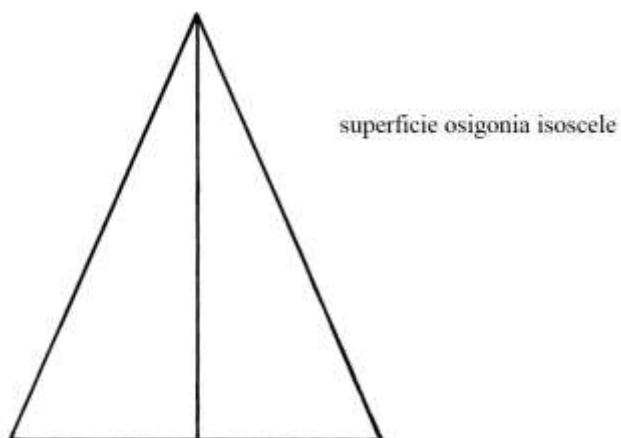
Un triangolo equilatero è definito come una *superficie osigonia equilatera*:



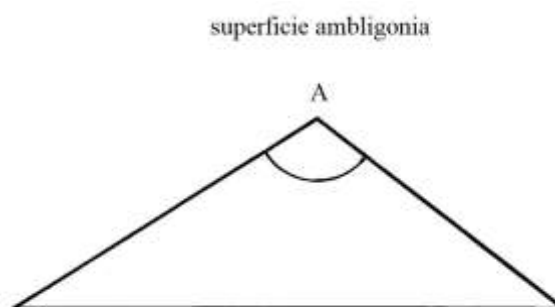
Un triangolo scaleno è chiamato *superficie osigonia scalena*:



Il triangolo isoscele è detto *superficie osigonia isoscele*:

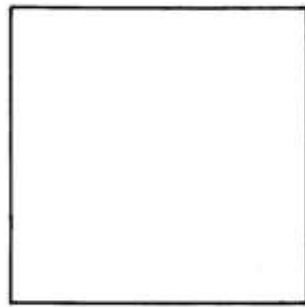


Infine, il triangolo ottusangolo, che possiede un angolo ottuso nel vertice A, è chiamato *superficie ambligonia*:



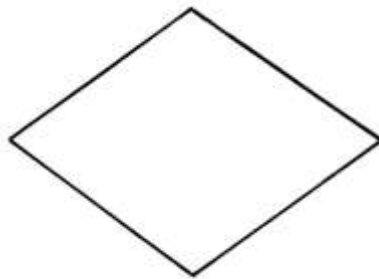
I quadrilateri

Un quadrato è detto *superficie quadrata*: esso è delimitato da quattro linee rette di uguali lunghezze e con quattro angoli retti:



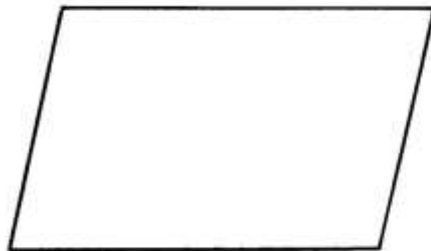
superficie quadrata

Il rombo, quadrilatero che possiede quattro lati di uguali lunghezze ma che è privo di angoli retti, è chiamato *superficie romba*:



superficie romba

Il nostro parallelogramma possiede quattro lati, con, con gli opposti paralleli, ma è privo di angoli retti: è una *superficie romboide*:



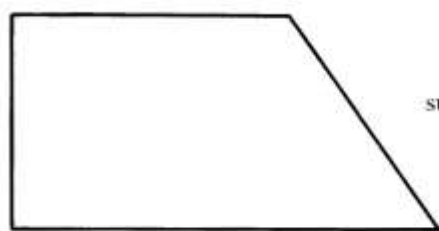
superficie romboide

Il rettangolo è una *superficie quadrangola* con angoli retti:



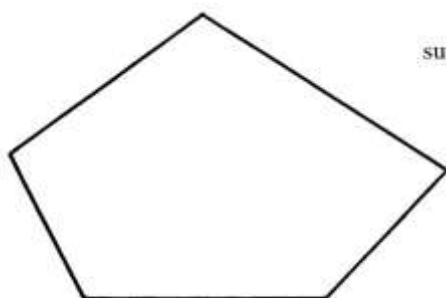
superficie quadrangola

Il trapezio è una *superficie trapezia*:



superficie trapezia

Infine, un pentagono non regolare è definito come una *superficie polygonia*:



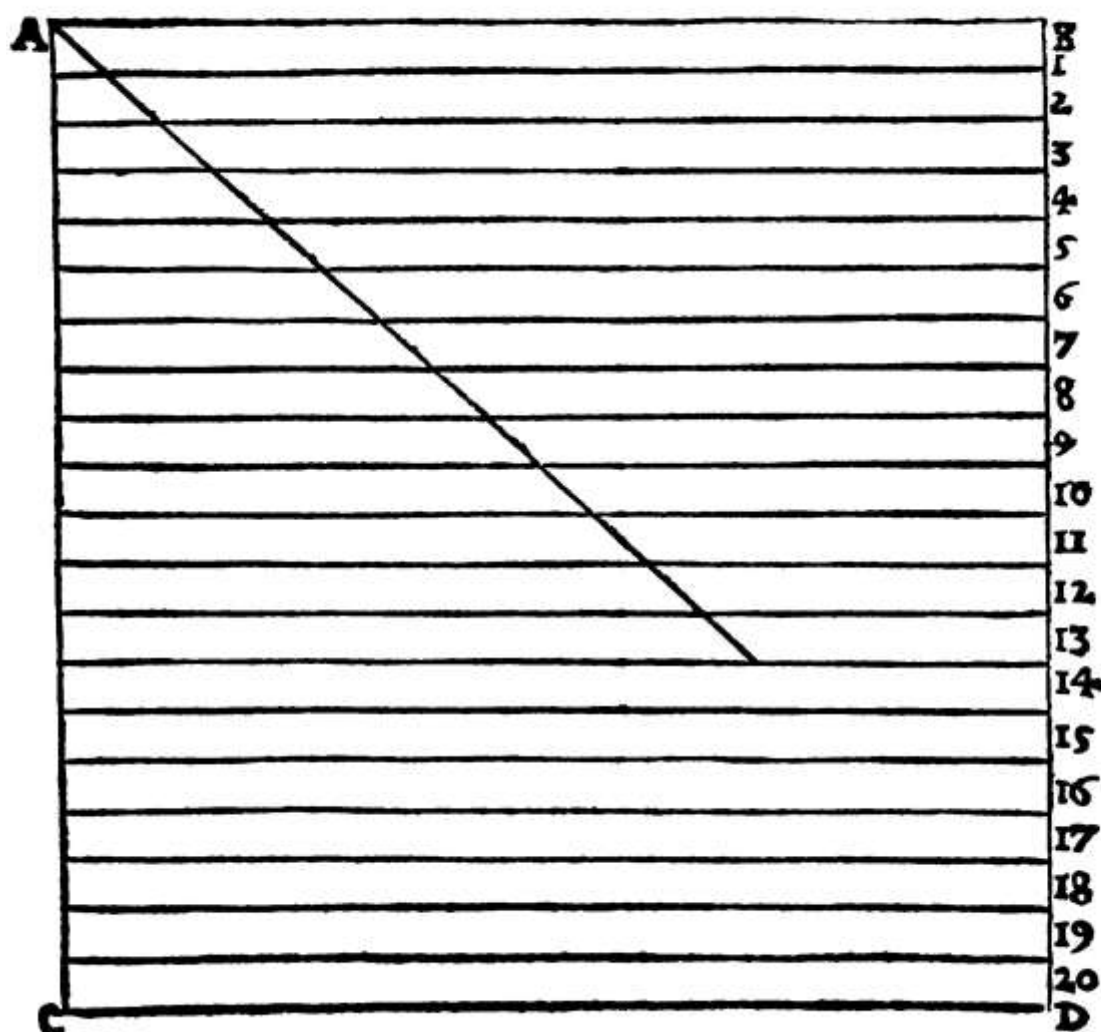
superficie polygonia

Divisione di un segmento in parti uguali

Peverone propone la costruzione di una griglia quadrata per la divisione in parti uguali di un segmento.

La griglia è divisa in 20 righe orizzontali di uguali larghezze.

L'estremo del segmento da dividere è poggiato sul vertice A: esso viene diviso in 13 parti uguali semplicemente posizionando l'altro suo estremo sulla riga che è a distanza 13 da AB.

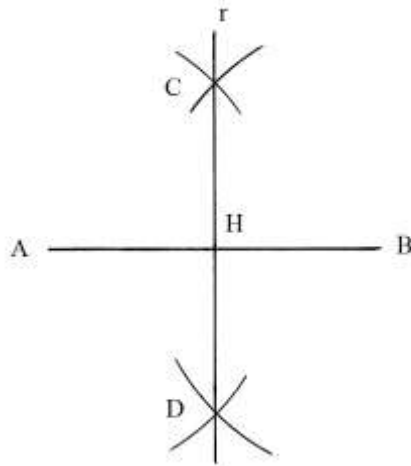


La soluzione ideata da Peverone fu utilizzata da Giovanni Pomodoro (1550-1599) nella sua *“Geometria Pratica”* e da Lorenzo Forestani (1585-1623) nel suo trattato *“Pratica d’Arithmetica e Geometria”*.

Asse di un segmento

AB è un segmento e deve essere disegnata una retta r che lo divide in due parti di uguale lunghezza.

Peverone non usa l’espressione *“asse di un segmento”* ma usa il seguente titolo:
“Il modo di ridurre due linee rette in squadra con prestezza”.



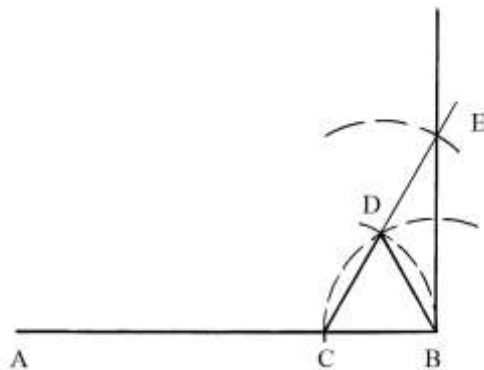
Con apertura a piacere, maggiore della metà della lunghezza di AB, fare centro in A e in B e disegnare quattro archi che si intersecano nei punti C e D.

Per questi ultimi passa la retta r che taglia perpendicolarmente AB nel suo punto medio H.

La retta r è l'asse del segmento AB.

Perpendicolare all'estremo di un segmento

AB è un segmento e per il suo estremo B deve essere disegnata una perpendicolare.



Fissare il punto C a distanza a piacere da B. Fare centro in B e in C con raggio BC e tracciare due archi di circonferenza che si intersecano nel punto D.

BCD è un triangolo equilatero: prolungare verso l'alto il lato CD. Con raggio BC fare centro in D e disegnare un arco che taglia il prolungamento di CD nel punto E.

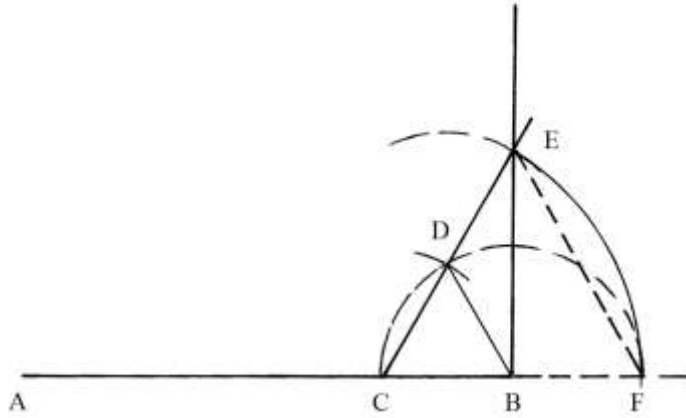
Per i punti B e E passa la perpendicolare al segmento AB.

----- APPROFONDIMENTO -----

La precedente costruzione può essere completa.

Con centro in B disegnare la semicirconferenza CDF.

Fare poi centro in C e con raggio CE tracciare un arco da E a F: CEF è un altro triangolo equilatero.

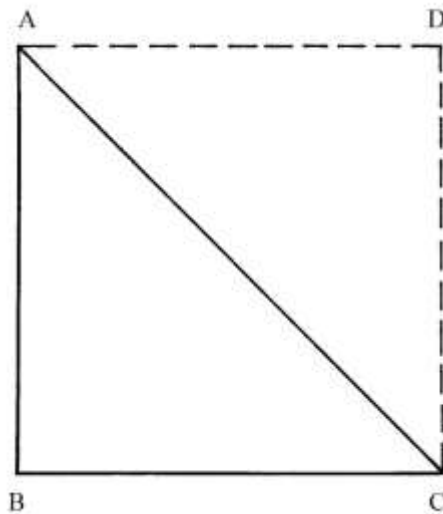


LIBRO SECONDO DE LE SUPERFICIE

=====

Area di un triangolo rettangolo

ABC è un triangolo isoscele che è ritagliato da un quadrato sezionato lungo la sua diagonale AC.



I cateti sono lunghi 8.

L'area è calcolata moltiplicando la lunghezza di un cateto per la metà di quella dell'altro:

$$S_{ABC} = AB * (BC/2) = (AB/2) * BC = 8 * 8/2 = 32.$$

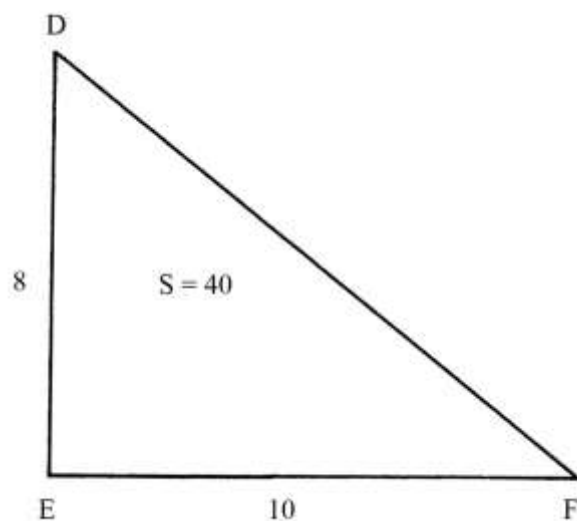
L'Autore non calcola la lunghezza dell'ipotenusa AC che è:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 8^2 + 8^2 = 64 + 64 = 128 \quad e$$

$$AC = \sqrt{128} = 8 * \sqrt{2}.$$

Area di un triangolo rettangolo

DEF è un triangolo rettangolo scaleno: i suoi cateti sono lunghi 8 e 10.



L'area S è:

$$S = DE * EF/2 = 8 * 10/2 = 40.$$

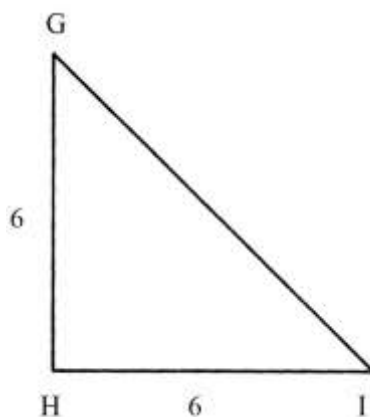
L'Autore non calcola la lunghezza dell'ipotenusa che è:

$$DF^2 = DE^2 + EF^2 = 8^2 + 10^2 = 64 + 100 = 164 \quad e$$

$$DF = \sqrt{164}.$$

Lunghezza dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo isoscele

GHI è un triangolo rettangolo isoscele con cateti lunghi 6.



È chiesta la lunghezza dell'ipotenusa (che Peverone chiama "il lato GF"):

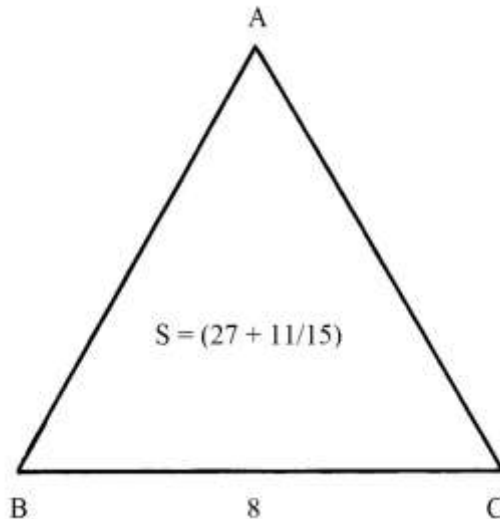
$$GI^2 = GH^2 + HI^2 = 6^2 + 6^2 = 36 + 36 = 72 \quad e$$

$$GI = \sqrt{72} \approx (8 + \frac{1}{2}).$$

I triangoli osigonij

Peverone definisce *triangoli osigonij* quelli che possiedono solo angoli acuti e in questo gruppo rientrano i triangoli *equilateri*, quelli *scaleni* e quelli *isosceli*.

ABC è un triangolo equilatero e i suoi lati sono lunghi 8:



L'area S del triangolo è calcolata con una procedura che contiene i seguenti passi:

- * moltiplicare la lunghezza di un lato per sé stessa: $8 * 8 = 64$;
- * moltiplicare per 13: $64 * 13 = 832$;
- * dividere per 30: $832/30 = (27 + 11/15)$, area del triangolo.

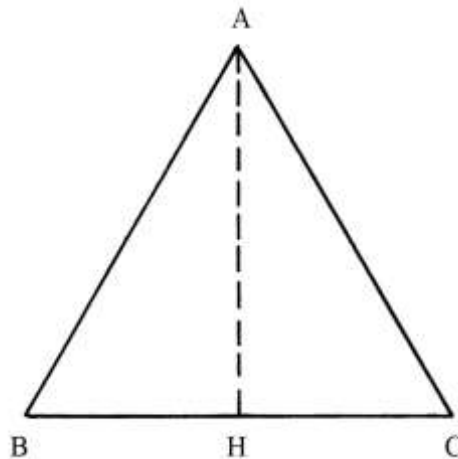
La procedura può essere riassunta in una formula:

$$S = AB^2 * 13/30.$$

----- APPROFONDIMENTO -----

La costante 13/30 fu introdotta nel I secolo d.C. dal matematico e ingegnere Erone di Alessandria.

Peverone usa la costante ma non cita la fonte. Approfondiamo la sua origine.



L'area del triangolo ABC è data da:

$$S = BC * AH/2.$$

Dobbiamo ricavare la lunghezza di AH, che è una delle tre altezze del triangolo.

ABH è un triangolo rettangolo e AH ne è un cateto.

Sia L la lunghezza dei lati di ABC. La lunghezza di AH è data da:

$$AH^2 = AB^2 - BH^2 = L^2 - (L/2)^2 = L^2 * 3/4 \quad e$$

$$AH = \sqrt{L^2 * 3/4} = L/2 * \sqrt{3}.$$

L'area di ABC è:

$$S = L * AH/2 = L * (L/2 * \sqrt{3})/2 = L^2 * (\sqrt{3})/4.$$

Calcoliamo il valore di $(\sqrt{3})/4$:

$$(\sqrt{3})/4 \approx 1,732/4 \approx 0,433.$$

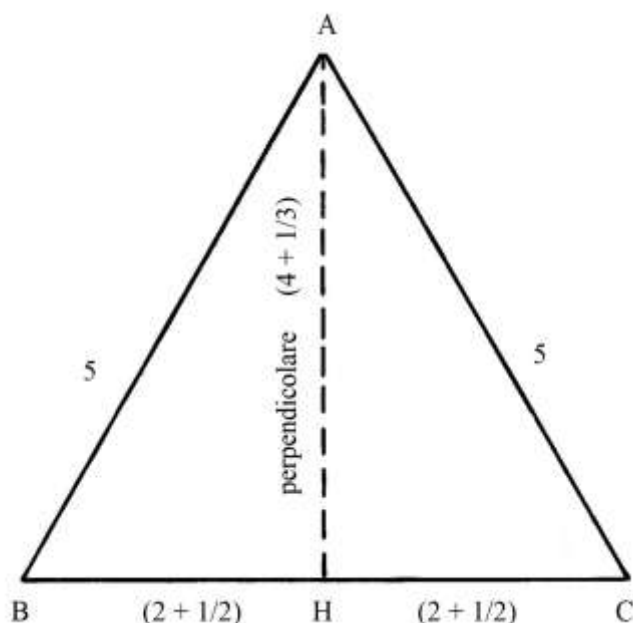
La costante 13/30 vale:

$$13/30 = 0,4(33), \text{ che è un numero periodico.}$$

In conclusione, il rapporto $(\sqrt{3})/4$ equivale con notevole precisione al valore della frazione 13/30 proposta da Erone di Alessandria.

Altezza di un triangolo equilatero

Il triangolo equilatero ABC ha lati lunghi 5.



L'Autore chiama *perpendicolare* l'altezza AH.

La sua lunghezza è ricavata con la seguente procedura:

- * moltiplicare la lunghezza di un lato per 13: $5 * 13 = 65$;
- * dividere per 15: $65/15 = 13/3 = (4 + 1/3)$, lunghezza di AH.

La lunghezza dei lati è espressa in *trabucchi* e lo è anche l'altezza:

$$AH = (4 + 1/3) \text{ trabucchi.}$$

L'area S del triangolo ABC è data da:

$$S = AH * (BC/2) = (4 + 1/3) * 5/2 = (4 + 1/3) * (2 + 1/2) = 65/6 = (10 + 5/6) \text{ trabucchi quadri} = 10 \text{ trabucchi quadri} + (8 + 1/3) \text{ piedi quadri.}$$

- APPROFONDIMENTO -

La costante 13/15 usata da Peverone per calcolare la lunghezza dell'altezza AH in rapporto a quella dei lati è il doppio della costante 13/30 impiegata per calcolare l'area del triangolo:

$$(13/15)/(13/30) = (13 * 30)/(13 * 15) = 2.$$

La costante 13/15 vale:

$$13/15 \approx 0,866 \approx (\sqrt{3})/2.$$

Se l'area S è calcolata con l'aiuto della costante 13/30 si ha:

$$S = L^2 * 13/30, \text{ con } L \text{ lunghezza di un lato.}$$

Conoscendo l'area S ricaviamo la lunghezza dell'altezza AH:

$$AH = 2 * S/L = 2 * (L^2 * 13/30)/L = L * 13/15.$$

Le unità di misura usate a Cuneo

Le unità di misura lineari usate a Cuneo e utilizzate da Peverone presentano una struttura in gran parte organizzata su base 12.

La tabella che segue presenta i rapporti numerici intercorrenti fra le *cinque* unità di misura lineari usate da Peverone.

Nelle colonne le unità sono posizionate in ordine decrescente da sinistra (*trabucco*) verso destra (*atomo*). Nelle righe le unità sono collocate in ordine crescente dall'alto (*atomo*) al basso (*trabucco*).

	Trabucchi	Piedi	Once	Punti	Atomi
Atomi					1
Punti				1	12
Once			1	12	144
Piedi		1	12	144	1728
Trabucchi	1	6	72	864	10368

Come visto qui sopra, l'area del triangolo equilatero ABC è calcolata in

$$S = (10 + 5/6) \text{ trabucchi quadri} = 10 \text{ trabucchi quadri} + (8 + 1/3) \text{ piedi quadri.}$$

Secondo l'Autore 5/6 di trabucco quadro equivalgono a (8 + 1/3) piedi quadri: se ne deduce il seguente rapporto:

$$1 \text{ trabucco quadro} = 10 \text{ piedi quadri.}$$

Fra le poche informazioni esistenti sulle unità di misura usate a Cuneo prima dell'introduzione del *sistema metrico decimale* (S.M.D.) rientrano le "Tavole di Raggiuglio" pubblicate a Roma nel 1877 e citate in Bibliografia. Alle pp. 267 – 280 vi sono elencate le unità di misura usate nella provincia di Cuneo e nei suoi Circondari.

Nell'immagine che segue è riprodotta la pagina 267: in essa sono distinte le antiche unità di misura anteriori e poi posteriori al 1818 e le loro equivalenze in unità appartenenti al S.M.D.

PROVINCIA DI CUNEO

CIRCONDARIO DI CUNEO

COMUNI	MISURE LOCALI		MISURE METRICHE	
	DENOMINAZIONE	VALORE in MISURE METRICHE	DENOMINAZIONE	VALORE in MISURE LOCALI
MISURE DI LUNGHEZZA				
<i>anteriamente al 1818.</i>				
TUTTI I COMUNI DEL CIRCONDARIO	Trabucco	3,082596	Metro	Trabucchi 0,324402
	Piede liprando	0,513766	Id.	Piedi liprandi 4,946414
	Piede manuale	0,342511	Id.	Piedi manuali 2,949614
	Piede legale	0,292561	Id.	Piedi legali 3,418088
	Raso	0,599394	Id.	Rasi 4,668352
	Tesa	4,712553	Id.	Tese 0,583922
<i>posteriormente al 1818.</i>				
TUTTI I COMUNI DEL CIRCONDARIO	Trabucco	3,086420	Metro	Trabucchi 0,324000
	Piede liprando	0,514403	Id.	Piedi liprandi 4,944000
	Piede manuale	0,342936	Id.	Piedi manuali 2,946000
	Piede legale	0,292924	Id.	Piedi legali 3,413854
	Raso	0,600137	Id.	Rasi 4,666286
	Tesa	4,714678	Id.	Tese 0,583200
<p>Il Piede liprando si divide in 12 Once, l'Oncia in 12 Punti, il Punto in 12 Atomi. 6 Piedi formano il Trabucco. 800 Trabucchi formano il Miglio, misura itineraria. Il Piede manuale si divide in 8 Once, l'Oncia in 12 Punti. 5 Piedi manuali, ossia 40 Once, formano la Tesa. Il Piede legale corrisponde ad Once 6 e Punti 10 del Piede liprando. Il Raso, misura mercantile, si divide in Metà, Terzi, Quarti, Sesti, Ottavi, Sedicesimi.</p>				
MISURE DI SUPERFICIE				
<i>anteriamente al 1818.</i>				
TUTTI I COMUNI DEL CIRCONDARIO	Trabucco quadrato	9,502400	Metro quadr.	Trab. quadrati 0,105237
	Piede quadrato	0,263956	Id.	Piedi quadrati 3,788547
	Giornata	38,009599	Ettara	Giornate 2,630914
	Tavola	38,009599	Ara	Tavole 2,630914

Nella pagina del Raguaglio sono elencate alcune equivalente fra le unità di superficie anteriori al 1818 e il metro quadrato:

* 1 trabucco quadrato equivale a 9,5024 m²;

* 1 piede quadrato equivale a 0,263956 m².

Il rapporto fra i due valori espressi in metri quadrati è:

$$9,5024/0,263956 = 35,99993938 \approx 36.$$

Nonostante il valore implicitamente attribuito da Peverone

1 trabucco quadro = 10 piedi quadri la tabella contenuta nella pagina 267 del Raguaglio indica un rapporto di 36 a 1 fra il trabucco quadrato e il piede quadrato, almeno anteriormente al 1818 e cioè all'epoca in cui Peverone scriveva.

Nelle pagine del Raguaglio le antiche unità superficiali di Cuneo sono accompagnate dall'aggettivo *quadrato/a*: al contrario, Peverone usa l'aggettivo *quadro/a*.

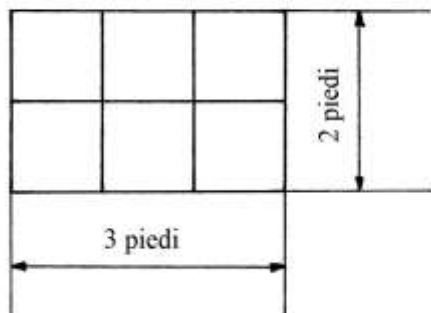
La figura che segue riproduce la p. 268 del citato Raguaglio.

COMUNI	MISURE LOCALI		MISURE METRICHE	
	DENOMINAZIONE	VALORE in MISURE METRICHE	DENOMINAZIONE	VALORE in MISURE LOCALI
<i>posteriormente al 1818.</i>				
TUTTI I COMUNI DEL CIRCONDARIO	Trabucco quadrato	9,525987 Metri quadrati	Metro quadr.	0,104976 Trab. quadrati
	Piede quadrato	0,264611 Ara	Id.	3,779436 Piedi quadrati
	Giornata	38,403948 Centiare	Ettara	2,624400 Giornate
	Tavola	38,403948	Ara	2,624400 Tavole
<p>Il Piede quadrato si divide in 12 Once di Piede quadrato, l'Oncia in 12 Punti, il Punto in 12 Atomi.</p> <p>Il Trabucco quadrato si divide in 6 Piedi di Trabucco quadrato, il Piede quadrato in 12 Once, l'Oncia in 12 Punti, il Punto in 12 Atomi.</p> <p>Quattro Trabucchi quadrati formano una Tavola che si divide in 12 Piedi di Tavola, il Piede in 12 Once, l'Oncia in 12 Punti, il Punto in 12 Atomi di Tavola.</p> <p>Dodici Tavole formano uno Staro. Cento Tavole formano la Giornata, l'unità più usata per le misure agrarie.</p>				
MISURE DI VOLUME				
<i>anteriamente al 1818.</i>				
TUTTI I COMUNI DEL CIRCONDARIO	Piede cubo	0,435644 Metri cubi	Metro cubo	7,374044 Piedi cubi
	Trabucco cubo	29,292062	Id.	0,034439 Trabucchi cubi
	Trabucco camerale	4,068342	Id.	0,245800 Trab. camerati
	Piede manuale cubo	0,040184	Id.	24,887288 Piedi manuali
	Tesa cuba	5,022644	Id.	0,499098 Tese cuba
	Tesa da pozzi	4,808452	Id.	0,553054 Tese da pozzi
	Carro di pietra	0,203447	Id.	4,946010 Carri di pietra
	Carro di sabbia	0,480815	Id.	5,530544 Carri di sabbia
Tesa da legna	4,048416	Id.	0,248873 Tese da legna	
<i>posteriormente al 1818.</i>				
TUTTI I COMUNI DEL CIRCONDARIO	Piede cubo	0,436417 Metri cubi	Metro cubo	7,346640 Piedi cubi
	Trabucco cubo	29,404494	Id.	0,034042 Trabucchi cubi
	Trabucco camerale	4,083499	Id.	0,244888 Trab. camerati
	Piede manuale cubo	0,040331	Id.	24,794823 Piedi man. cubi
	Tesa cuba	5,044357	Id.	0,498359 Tese cuba
	Tesa da pozzi	4,844887	Id.	0,550998 Tese da pozzi
	Carro di pietra	0,204475	Id.	4,897759 Carri di pietra
	Carro di sabbia	0,481489	Id.	5,509975 Carri di sabbia
Tesa da legna	4,033083	Id.	0,247949 Tese da legna	

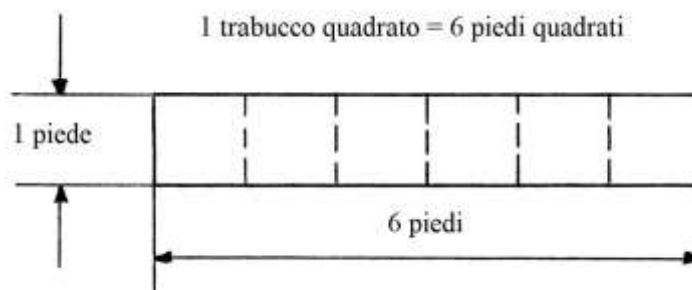
Le antiche unità di misura usate a Cuneo *dopo* il 1818 offrono due interessanti considerazioni.

Il nuovo trabucco quadrato era diviso in 6 piedi di trabucco quadrato, come evidenziato in A. Sono possibili due diverse articolazioni della struttura di questa unità di superficie: una griglia formata da $2 * 3$ quadrati di area 1 piede quadrato:

1 trabucco quadrato = 6 piedi quadrati



Oppure, una struttura lineare formata da un rettangolo largo 1 piede e lungo 6 piedi:



Se la seconda struttura risultasse la più logica, si avrebbe la comparsa a Cuneo del metodo geometrico delle “*linee larghe*”, studiato con grande accuratezza dallo storico della matematica danese Jens Høyrup a cui si deve l’articolo citato in Bibliografia.

Può darsi che l’interpretazione appena fornita sia errata: il testo può anche essere letto come: “Il Trabucco quadrato si divide in [quadrati di] 6 piedi di Trabucco quadrato: semplicemente, il testo del Ragguaglio è scritto in maniera non chiara e il Trabucco quadrato sarebbe l’area di un quadrato con lati lunghi 6 piedi lineari.

La seconda considerazione emerge da un dettaglio contenuto nella stessa pagina 268 e contrassegnato con B. L’area del trabucco quadrato espressa in m^2 è: 9,525987.

L’area di un piede quadrato equivale a: 0,264611 m^2 .

Calcoliamo il rapporto esistente fra le due espresse in m^2 :

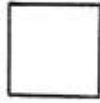
$$1 \text{ trabucco quadrato} / 1 \text{ piede quadrato} = 9,525987 / 0,26461 \approx 36.$$

Questo dato confermerebbe i dubbi espressi qui sopra.

Dopo il 1818 il rapporto fra le due unità superficiali era di 6 : 1 oppure di 36 : 1: dobbiamo propendere per il rapporto di 36 : 1.

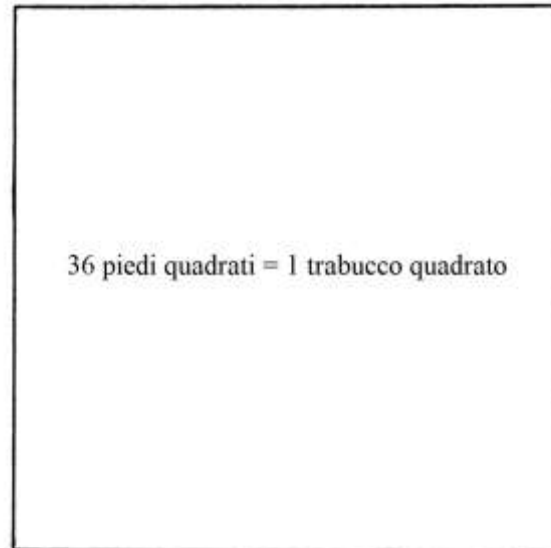


1 piede lineare



1 piede quadrato

6 piedi lineari



6 piedi lineari

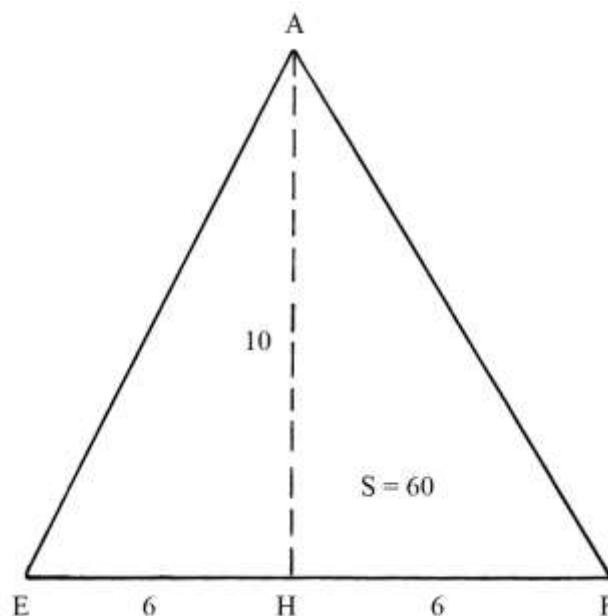
Le lettere ai vertici dei triangoli

Pare che l'Autore usi apporre le lettere ai vertici dei triangoli in successione. Così, ad esempio, se per un triangolo usa le maiuscole A, B e C, per il successivo poligono può impiegare la terna D, E e F.

Il terzo triangolo di questa serie può avere vertici contrassegnati con G, H e I.
Non sempre Peverone rispetta questa regola empirica.

Triangolo osigonio isoscele

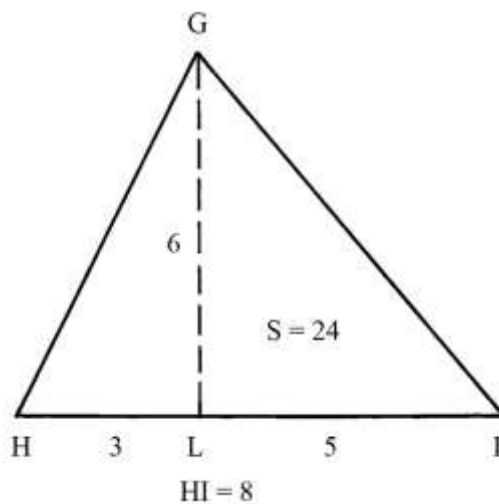
DEF è un triangolo isoscele che la base EF lunga 12 e l'altezza lunga 10.



L'area S è calcolata moltiplicando l'altezza DH per metà della lunghezza della base EF:
 $S = DH * EH = 10 * 6 = 60$.

Triangolo osigonio scaleno

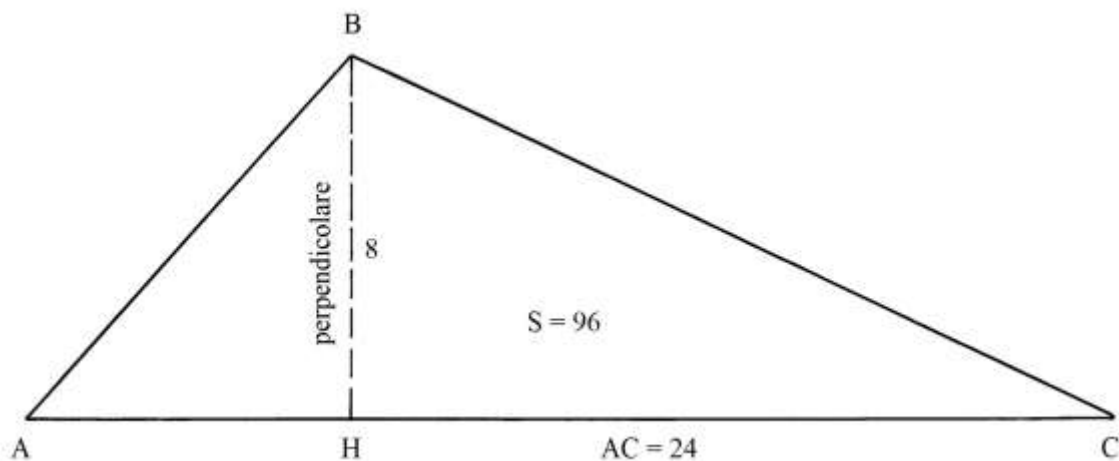
Anche il triangolo GHI possiede solo angoli acuti ed è scaleno.
 Le dimensioni riportate sulla figura sono espresse in *trabucchi*.



L'area S è:
 $S = GL * HI/2 = 6 * 8/2 = 24$ trabucchi quadri.

Area di un triangolo ambliigonio

Un triangolo ambliigonio è oggi chiamato *ottusangolo* perché possiede un angolo ottuso, come quello nel vertice B.



L'altezza BH è lunga 8 e il lato di base, AC, è 24.

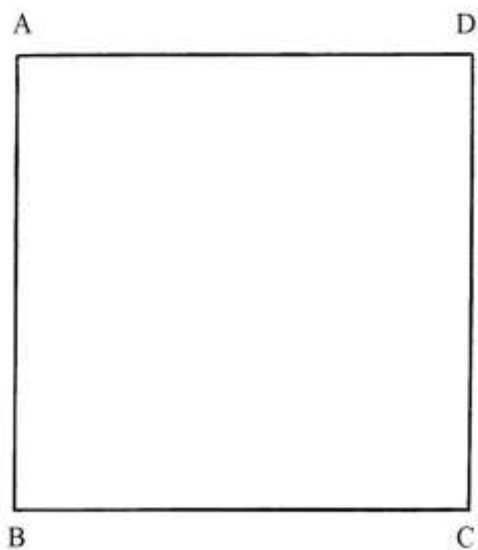
L'area del triangolo è:

$$S = AC * BH/2 = 24 * 8/2 = 96.$$

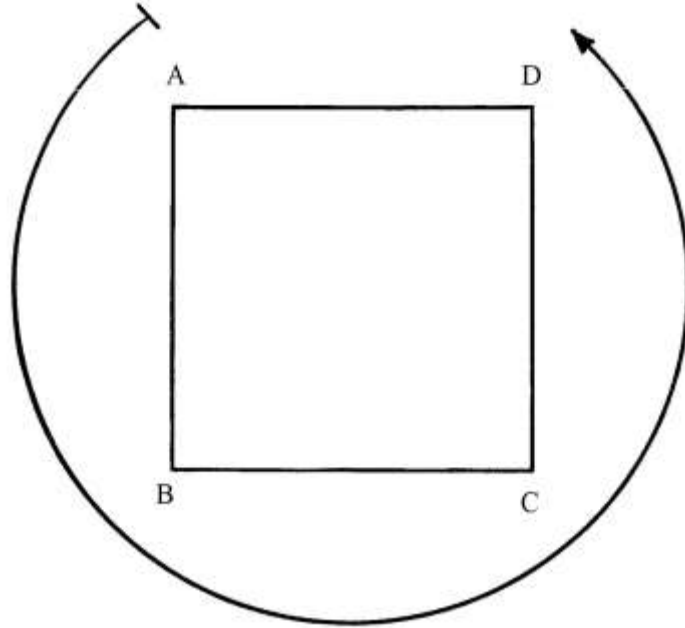
L'Autore non fornisce le lunghezze dei lati AB e BC e delle loro proiezioni AH e HC.

Area di un quadrato

Il quadrato ABCD ha lati lunghi (8 trabucchi + 5 piedi + 5 onces)[8, 5, 5].



Le lettere apposte ai quattro vertici sono *maiuscole* e sono disposte in senso antiorario, a partire dal vertice in alto a sinistra:



L'Autore fornisce l'area del quadrato:

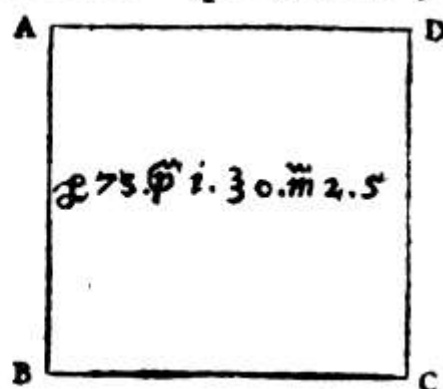
$$S_{ABCD} = (73 \text{ trabucchi quadri} + 1 \text{ piede quadro} + 0 \text{ once quadre} + 2 \text{ minuti quadri} + 5 \text{ punti quadri}) \\ [73, 1, 0, 2, 5].$$

La soluzione di questo problema è contenuta a pagina 94 del trattato di Peverone, qui di seguito riprodotta:

Sia il quadrato di quatro vguali lati , e angoli $A B C D$, del quale ogni lato sia trabuchi 8, e pie 5, e onzie 5. Se vorrai saper quanto sia la sua area, multiplica vno de lati in se, come vedi quiui apresto, clo è trabuchi 8, pie 5, onzie 5, per altrettanti trabuchi, pie, e onzie, cosi,

trabuchi	8,	5,	5.
trabuchi	8,	5,	5.
	42	7	5.
	42	7	5.
	68	40.	
trabuchi	73	1,	0,2,5.

trabuchi 8, pie 5, onzie 5.



Da la quale ne nasce trabuchi 73, pie 1, onzie 0, minuti 2, ponti 5, e tanto dico che fara l'area del quadrato $A B C D$ proposto, e per che ne la multiplicazione facilmente potresti errare, mescolando i pie con trabuchi, pero sempre che hauerai finita di multiplicare la prima ziphra, cio è il primo 5, che si multiplica, al'hora taglia i quatro primi numeri gia multiplicati: come vedi che ho fatto io. Saluo che non vi fosse che pie e onzie da multiplicare, al'hora bastarebbe tagliare due ziphre, per apartare i pie, dal onzie. Aricordati di mettere sempre i trabuchi, à fillo con trabuchi, e pie, à pie, e onzie, à onzie. Et quando l'onzie ò pie non vi fossero, metteraci vn o, in suo luogo: come vedi nel presente esempio.

Peverone esegue la moltiplicazione con l'aiuto del grafico.

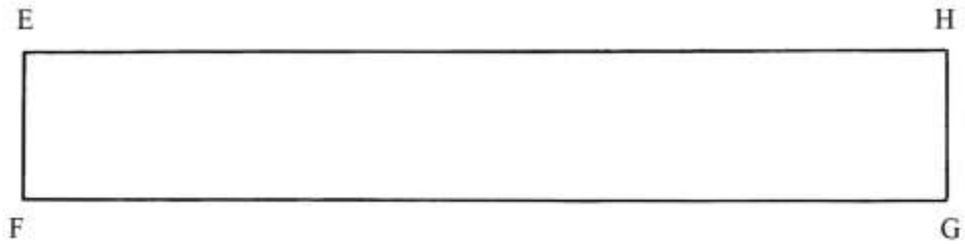
I valori di trabucchi e loro sottomultipli sono separati da virgole, “,”.

Area di un rettangolo

Il rettangolo EFGH ha lati lunghi:

* $EF = FG = (126 \text{ trabucchi} + 4 \text{ piedi});$

* $EH = GH = (22 \text{ trabucchi} + 0 \text{ piedi} + 5 \text{ oncie}).$



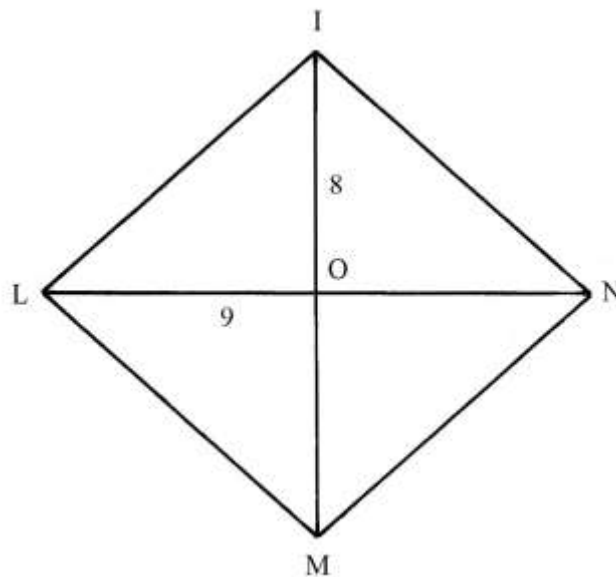
L'area del rettangolo è calcolata moltiplicando la lunghezza di FG per quella di EF, con la procedura grafica mostrata nello schema che segue.

$$\begin{array}{r}
 \text{trabuchi } 136,4,0 \\
 \quad \quad \quad 22,0,5 \\
 \hline
 \quad \quad 682,0,0 \\
 \quad \quad 00,0,0 \\
 \quad \quad 272,8,0 \\
 \quad \quad 272,8,0 \\
 \hline
 \text{trabuchi } 3007,6,2,0,0,
 \end{array}$$

$$S_{EFGH} = FG * EF = (3007 \text{ trabucchi quadri} + 6 \text{ piedi quadri} + 2 \text{ once quadre} + 0 \text{ punti quadri} + 0 \text{ atomi quadri}) = 3007, 6, 2, 0, 0.$$

Area di un rombo

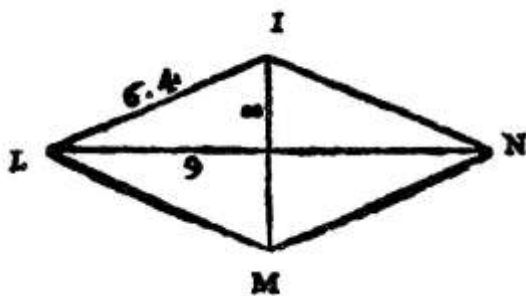
ILMN è un rombo: la diagonale maggiore LN è lunga 9 piedi e la minore, IM, è 8 piedi.



L'area del quadrilatero è:

$$S_{ILMN} = LN * IM/2 = 9 * 8/2 = 36 \text{ piedi quadri.}$$

Essa è correttamente calcolata con lo schema che è qui riprodotto da p. 95 del trattato:



$$\begin{array}{r}
 8, 0 \\
 4, 5 \\
 \hline
 400 \\
 320 \\
 \hline
 \text{pie } 36 \mid 00
 \end{array}$$

Sullo schema è scritta sul lato LI la lunghezza che è indicata in 6.4, forse da intendersi come (6 piedi + 4 once).

LI è l'ipotenusa del triangolo rettangolo LIO ed è lunga:

$$LI^2 = LO^2 + IO^2 = (9/2)^2 + (8/2)^2 = 20,25 + 16 = 36,25 \quad e$$

$$LI = \sqrt{36,25} \approx 6,02 \text{ piedi.}$$

La parte frazionaria di 0,02 piedi è:

$$0,02 * 12 = 0,24 \text{ once} = 0,24 * 12 = 2,88 \text{ punti} \approx 3 \text{ punti.}$$

La lunghezza corretta di LI sembra essere:

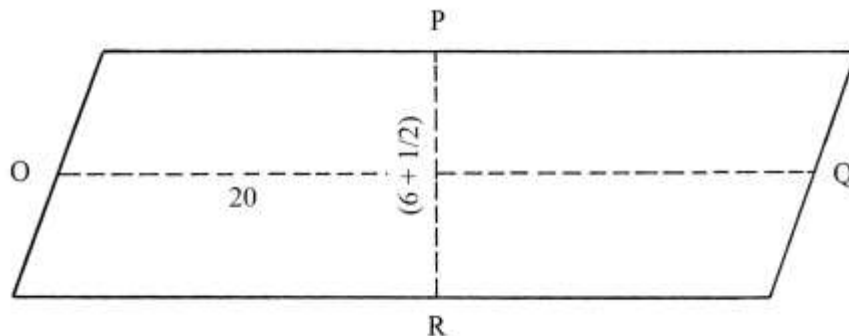
$$LI = (6 \text{ piedi} + 0 \text{ once} + 3 \text{ punti}).$$

Area di un romboide

Il quadrilatero che è indicato come *romboide* è il nostro *parallelogramma*.

PR è un'altezza ed è lunga $(6 + \frac{1}{2})$.

OQ è una mediana parallela alle basi ed è lunga 20.



L'area S del quadrilatero è:

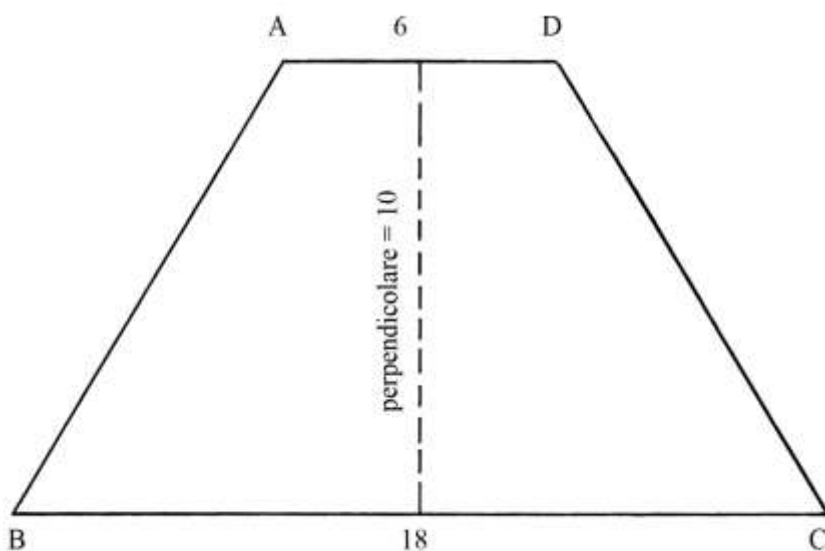
$$S = OQ * PR = 20 * (6 + \frac{1}{2}) = 130.$$

Area di un trapezio isoscele

ABCD è un trapezio isoscele che ha basi AD e BC lunghe rispettivamente 6 e 18 e altezza, che l'Autore chiama *perpendicolare*, lunga 10.

L'area del trapezio è calcolata moltiplicando la semisomma delle lunghezze delle basi per l'altezza:

$$S = [(AD + BC)/2] * 10 = [(6 + 18)/2] * 10 = 12 * 10 = 120.$$

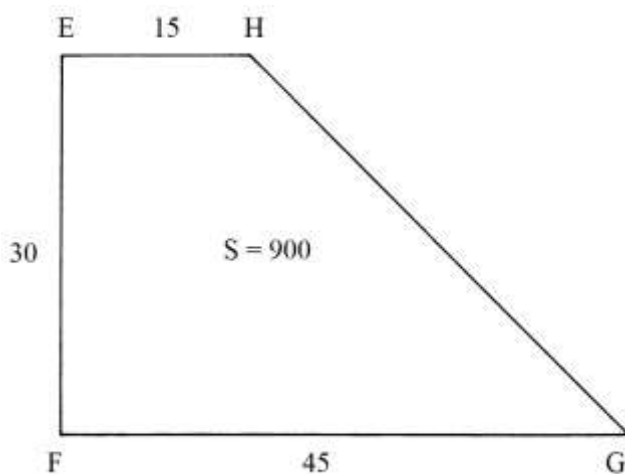


Area di un trapezio rettangolo

EFGH è un trapezio rettangolo: le sue basi sono lunghe 15 e 45 e l'altezza EF è 30.

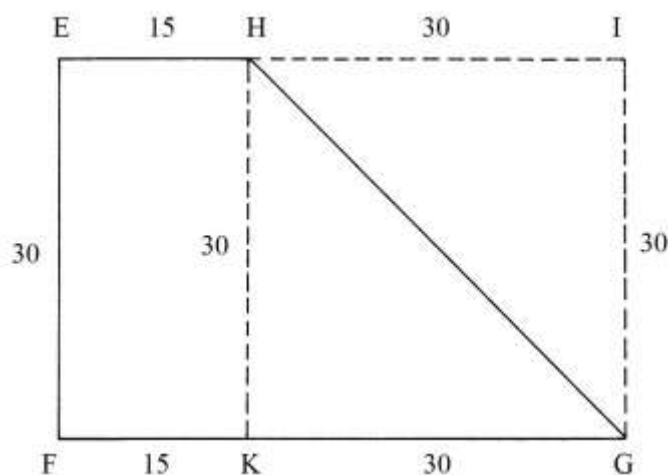
L'area è calcolata moltiplicando la semisomma delle basi per l'altezza:

$S_{EFGH} = [(EH + FG)/2] * EF = [(15 + 45)/2] * 30 = 30 * 30 = 900$, valore che è il quadrato della lunghezza di EF.



----- APPROFONDIMENTO -----

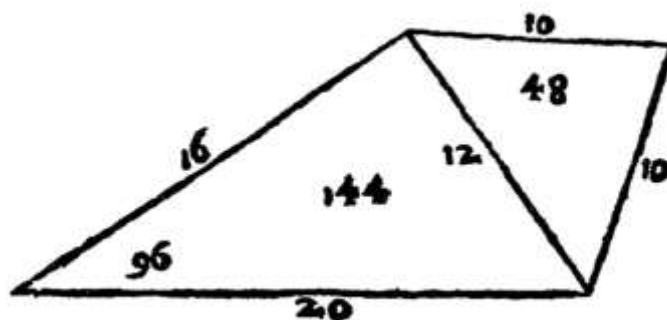
Tracciando il segmento HK, il trapezio è scomposto in due poligoni:



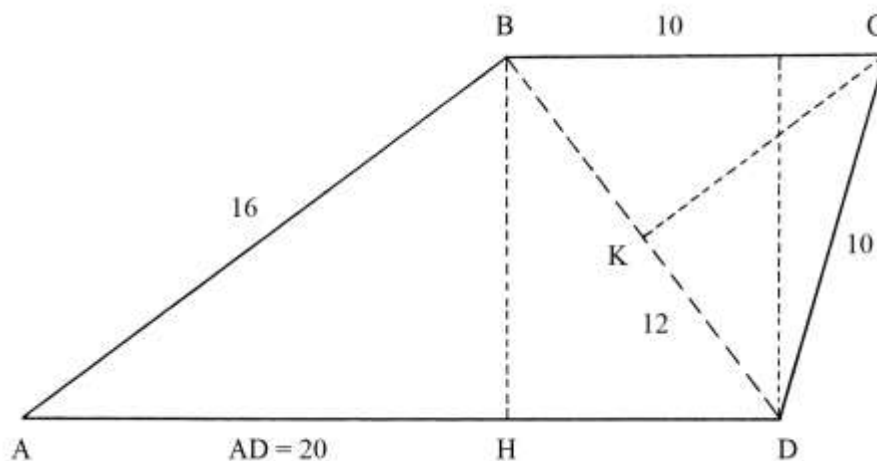
- * il rettangolo EFKH che ha dimensioni di 15 per 30: esso è la metà di un quadrato con lati lunghi 30 e area che è:
 $S_{EFKH} = EF * FK = 30 * 15 = 450$;
 - * il triangolo rettangolo isoscele HKG che ha cateti lunghi 30 ed è la metà del quadrato HKGI, diviso in due identici triangoli rettangoli isosceli dalla diagonale HG; la sua area è:
 $S_{HKG} = HK * KG / 2 = 30 * 30 / 2 = 450$.
- L'area del trapezio rettangolo EFGH è uguale a quella del quadrato HKGI:
 $S_{HKEI} = HK * KI = 30 * 30 = 900$.
-

Area di un trapezio scaleno

Un trapezio *amblygonio* è scaleno e possiede due angoli ottusi, come mostra lo schema originale:



Il disegno è di scarsa qualità perché le due basi del quadrilatero non sembrano parallele. L'Autore divide il trapezio in due triangoli scaleni per mezzo della diagonale minore, BD nello schema che segue:



Peverone fornisce solo le lunghezze dei lati e le aree.

Nello schema qui sopra sono tracciate le altezze BH e CK. Le aree dei due triangoli, ABD e BCD, possono essere calcolate con la formula di Erone.

Il perimetro $2 \cdot p$ del triangolo ABD è:

$$2 \cdot p = AB + BD + AD = 16 + 12 + 20 = 48 \text{ e il semiperimetro } p \text{ è:}$$

$$p = 48/2 = 24.$$

L'area di ABD è:

$$\begin{aligned} S_{ABD} &= \sqrt{[p \cdot (p - AB) \cdot (p - BD) \cdot (p - AD)]} = \\ &= \sqrt{[24 \cdot (24 - 16) \cdot (24 - 12) \cdot (24 - 20)]} = \sqrt{(24 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 4)} = \\ &= \sqrt{9216} = 96. \end{aligned}$$

Il perimetro $2 \cdot q$ del triangolo BCD è:

$$2 \cdot q = BC + CD + BD = 10 + 10 + 12 = 32 \text{ e il semiperimetro } q \text{ è:}$$

$$q = 32/2 = 16.$$

L'area di BCD è:

$$\begin{aligned} S_{BCD} &= \sqrt{[q \cdot (q - BC) \cdot (q - CD) \cdot (q - BD)]} = \\ &= \sqrt{[16 \cdot (16 - 10) \cdot (16 - 10) \cdot (16 - 12)]} = \sqrt{(16 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 4)} = \\ &= \sqrt{2304} = 48. \end{aligned}$$

L'area del trapezio ABCD è data da:

$$S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BCD} = 96 + 48 = 144.$$

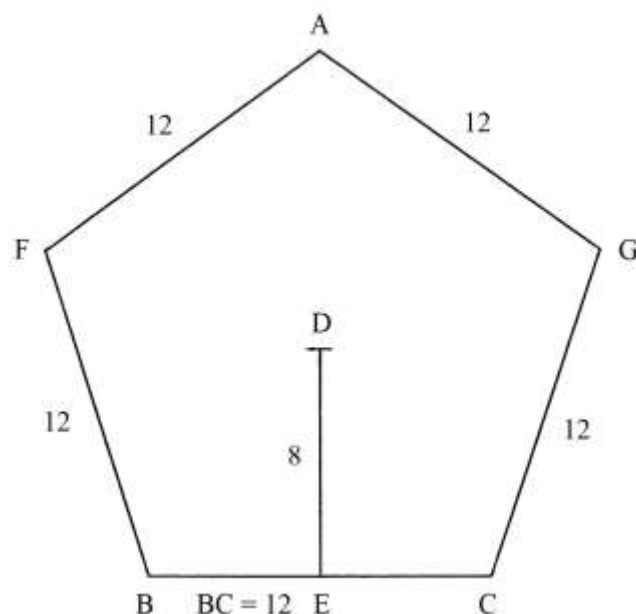
Infine, possiamo ricavare le lunghezze delle altezze BH e CK:

$$BH = 2 \cdot S_{ABD}/AD = 2 \cdot 96/20 = 9,6 ;$$

$$CK = 2 \cdot S_{BCD}/BD = 2 \cdot 48/12 = 8.$$

Area di un pentagono regolare

Un pentagono regolare ha lati lunghi 12 trabucchi.



L'Autore propone di determinare il centro del poligono, D: questo punto è il centro del cerchio circoscritto (che ha raggio DA) e del cerchio inscritto (che ha raggio DE).

DE è chiamato *apotema* ed è perpendicolare al lato BC che raggiunge nel suo punto medio E.

Nel testo la lunghezza di DE è fissata in 8 trabucchi: il rapporto fra la lunghezza di DE e quella del lato BC è:

$$DE/BC = 8/12 = 2/3 \approx 0,666).$$

Il corretto rapporto è 0,688.

L'Autore calcola la lunghezza della "circonferenza" del pentagono: si tratta del perimetro P:

$$P = 5 * 12 = 60 \text{ trabucchi.}$$

L'area è calcolata moltiplicando metà del perimetro per la lunghezza di DE:

$$S = P/2 * DE = (60/2) * 8 = 30 * 8 = 240 \text{ trabucchi quadri.}$$

----- APPROFONDIMENTO -----

Lo schema che segue mostra la costruzione di un pentagono regolare data la lunghezza di un lato, BC.

Tracciare la retta orizzontale *r* e fissarvi il primo lato, BC, lungo 12. *E* è il suo punto medio.

Da B innalzare la perpendicolare alla retta *r*.

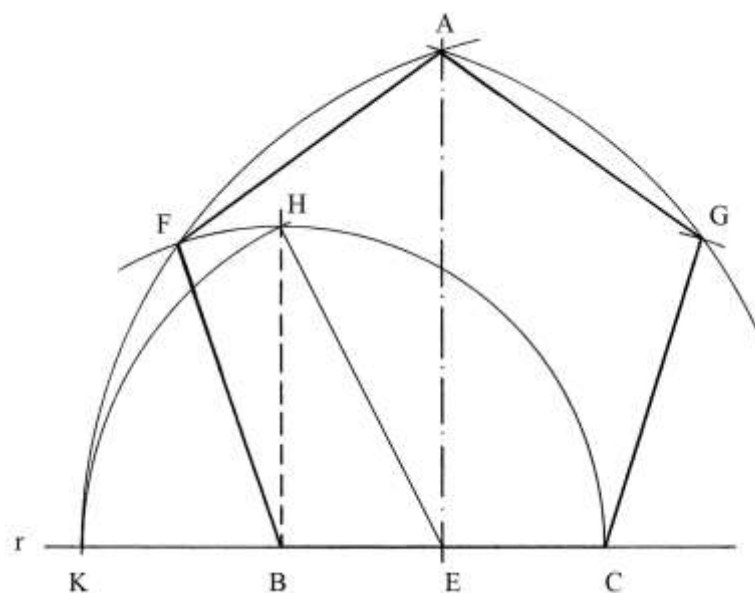
Fare centro nel punto B e con raggio BC disegnare un arco da C fino a intersecare la perpendicolare nel punto H.

Collegare H con E. Fare centro in E e con raggio EH tracciare l'arco HK. Con raggio CK fare centro in C e in B e tracciare due archi che si intersecano in A: AE è un asse di simmetria del pentagono e F è un vertice del poligono.

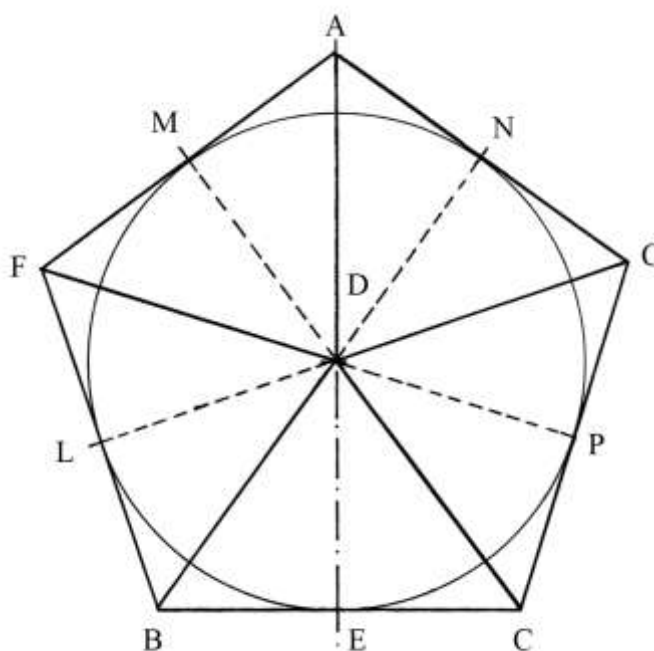
CK è la lunghezza delle *cinque* diagonali del pentagono.

Fare centro in A e in C e con raggio BC disegnare due archi che si incontrano in G.

AGCBF è il pentagono desiderato.



Fissare i punti medi dei cinque lati e collegarli ai vertici opposti:



Sono tracciati gli assi di simmetria AE, BN, CM, FP e GL. Essi si incontrano nel punto P che è il centro del cerchio *inscritto* nel pentagono e raggio DE (l'*apotema* del poligono).

I segmenti DA, DG, DC, DB e DF sono i raggi del cerchio circoscritto al pentagono.

La lunghezza di DE è:

$DE = BC * 0,688 = 12 * 0,688 = 8,256$, valore leggermente maggiore di quello indicato sopra da Peverone che è 8.

L'area del triangolo isoscele BDC è uguale a un quinto di quella dell'intero pentagono.

$$S_{BDC} = DE * (BC/2) = 8,256 * (12/2) = 49,536.$$

Il perimetro p del perimetro è:

$$p = 5 * BC = 5 * 12 = 60.$$

L'area del pentagono può essere ricavata in due modi equivalenti:

- * $S_{AGCBF} = 5 * S_{BDC} = 5 * 49,536 = 247,68$ trabucchi quadri;
 - * $S_{AGCBF} = (p/2) * DE = (60/2) * 8,256 = 247,68$ trabucchi quadri.
- L'area calcolata da Peverone, 240 trabucchi quadri, è approssimata per difetto.
-

Area di un esagono regolare

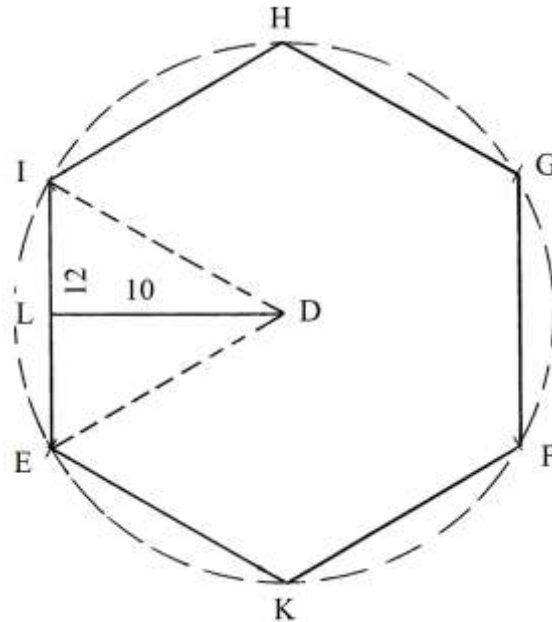
IEKFGH è un esagono regolare i cui lati sono lunghi 12.

DEI è uno dei sei triangoli equilateri che compongono l'esagono e D è il centro del poligono.

L'Autore indica in 10 unità la lunghezza dell'altezza DL.

L'area dell'esagono è calcolata moltiplicando il semiperimetro per la lunghezza di DL:

$$S_{ESAGONO} = [(6 * 12)/2] * 10 = (72/2) * 10 = 360.$$



APPROFONDIMENTO

La corretta lunghezza di DL è:

$$DL^2 = DE^2 - LE^2 = EI^2 - (EI/2)^2 = 12^2 - (12/2)^2 = 144 - 36 = 108 \quad e$$

$$DL = \sqrt{108} \approx 10,39.$$

Il perimetro p è dato da:

$$p = 6 * EI = 6 * 12 = 72.$$

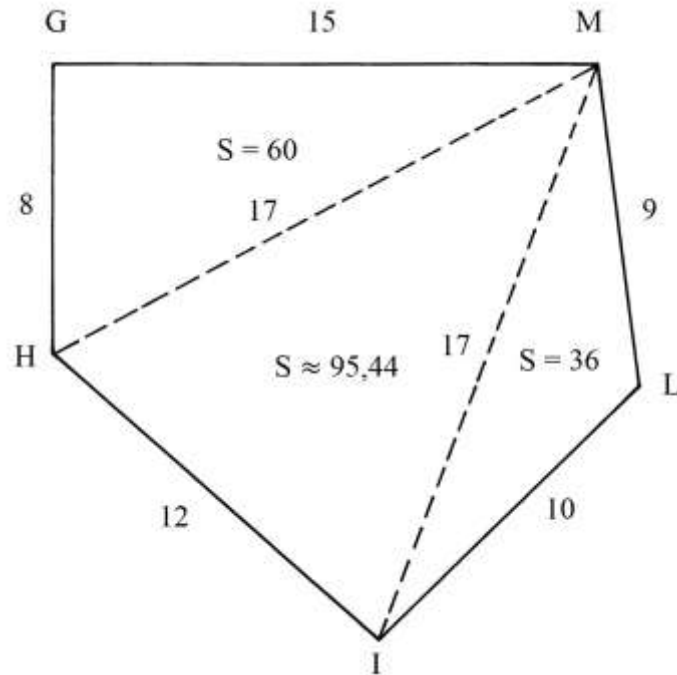
L'area dell'esagono è:

$$S_{ESAGONO} = (p/2) * DL = (72/2) * 10,39 = 36 * 10,39 \approx 374.$$

Come nel caso del pentagono, l'area dell'esagono è stata calcolata dall'Autore per difetto: 360 invece di 374.

Area di un pentagono non regolare

GHILM è un poligono delimitato da cinque segmenti: è un pentagono non regolare.



Per calcolare la sua superficie, esso viene diviso in tre triangoli:

- * il triangolo rettangolo GHM;
- * il triangolo isoscele HIM;
- * il triangolo scaleno MIL.

Nel testo non vi è alcun cenno a calcoli: le aree sono scritte sullo schema originale.

L'area di GHM è:

$$S_{GHM} = GM * GH/2 = 15 * 8/2 = 60.$$

In assenza delle lunghezze delle altezze degli altri due triangoli, per calcolare le loro aree occorre applicare la formula di ERONE (che, forse, Peverone avrà impiegato).

Il perimetro $2 * p$ del triangolo HIM è:

$$2 * p = HI + HM + IM = 12 + 17 + 17 = 46 \quad \text{e il semiperimetro } p \text{ è}$$
$$p = 46/2 = 23.$$

$$\begin{aligned} \text{L'area di HIM è: } S_{HIM} &= \sqrt{[p * (p - HI) * (p - HM) * (p - IM)]} = \\ &= \sqrt{[23 * (23 - 12) * (23 - 17) * (23 - 17)]} = \sqrt{(23 * 11 * 6 * 6)} = \\ &= \sqrt{9108} \approx 95,44. \end{aligned}$$

Nello schema originale, l'area HIM è erroneamente indicata in 78.

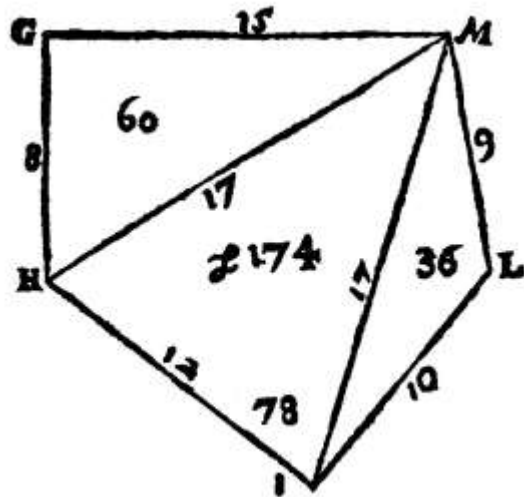
Il perimetro $2 * p$ del triangolo MIL è:

$$2 * p = ML + LI + MI = 9 + 10 + 17 = 36 \quad \text{e il semiperimetro } p \text{ è}$$
$$p = 36/2 = 18.$$

$$\begin{aligned} \text{L'area di MIL è: } S_{MIL} &= \sqrt{[p * (p - ML) * (p - LI) * (p - MI)]} = \\ &= \sqrt{[18 * (18 - 9) * (18 - 10) * (18 - 17)]} = \sqrt{(18 * 9 * 8 * 1)} = \\ &= \sqrt{1296} = 36. \end{aligned}$$

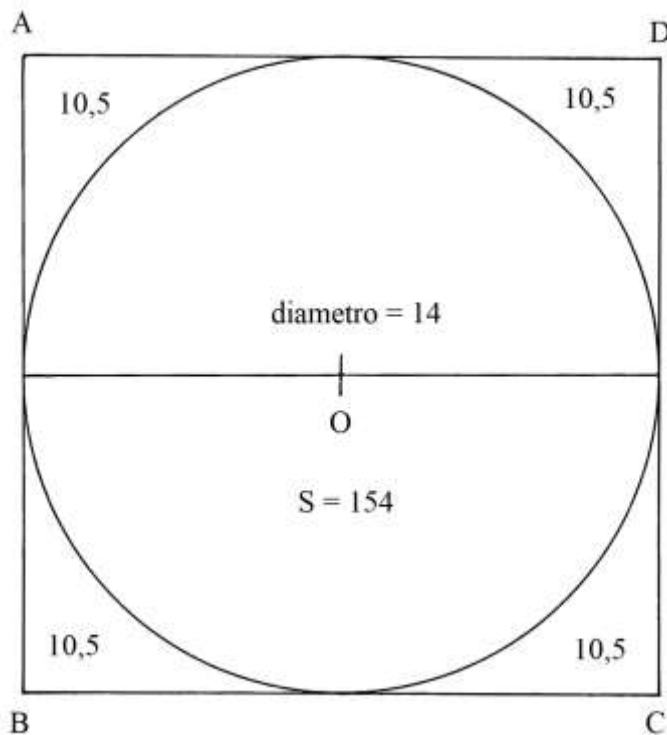
L'area totale del pentagono irregolare GHILM è:

$S_{GHILM} = S_{GHM} + S_{HIM} + S_{MIL} = 60 + 95,44 + 36 = 191,44$ e non 174 come scritto sullo schema originale.



Il cerchio

Un cerchio con diametro d lungo 14 è inscritto in un quadrato che ha lati lunghi 14.



Citando Archimede, l'Autore calcola la lunghezza della circonferenza, c , moltiplicando quella del diametro per la costante $22/7$:

$$c = d * 22/7 = 14 * 22/7 = 44.$$

La costante $22/7$ è il valore approssimato di π stabilito da Archimede:

$$22/7 = (3 + 1/7) \approx 3,142857142\dots$$

L'area del cerchio è calcolata moltiplicando metà della lunghezza della circonferenza per metà di quella del diametro:

$$S_{\text{CERCHIO}} = (c/2) * (d/2) = (44/2) * (14/2) = 22 * 7 = 154.$$

L'area del quadrato è:

$$S_{\text{QUADRATO}} = AD^2 = 14^2 = 196.$$

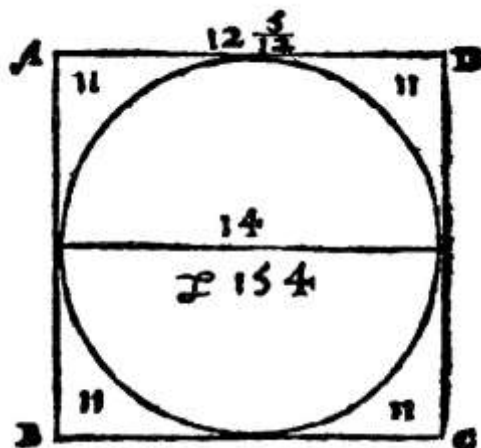
Fra il quadrato ABCD e il cerchio sono creati quattro triangoli curvilinee di uguali dimensioni; il loro insieme ha area:

$$S_{\text{QUADRATO}} - S_{\text{CERCHIO}} = 196 - 154 = 42.$$

Ciascuno dei quattro triangoli ha area:

$$42/4 = 10,5.$$

Nello schema originale, qui sotto riprodotto, sono indicati dati differenti da quelli sopra calcolati:



L'area di ciascun triangolo curvilineo è calcolata dall'Autore dividendo per 4 il numero 44, invece di usare la corretta differenza 42:

$$44/4 = 11.$$

Inoltre, la lunghezza del lato AD è indicata in “12 [+] $\frac{5}{12}$ ” quando essa è uguale a quella del diametro del cerchio inscritto che è 14.

“12 + 5/12” è forse la radice quadrata dell'area del cerchio:

$$\sqrt{154} \approx 12,4097 \approx (12 + 5/12).$$

Forse, l'Autore voleva solo calcolare la lunghezza dei lati del quadrato avente la stessa area del cerchio.

Area di un altro cerchio

Un cerchio ha diametro d lungo 10.

La sua area è calcolata con un metodo diverso da quello impiegato nella soluzione del precedente problema.

$$S_{\text{CERCHIO}} = d^2 * 11/14 = 10^2 * 11/14 = 100 * 11/14 = (78 + 4/7).$$

Vediamo l'origine della costante 11/14.

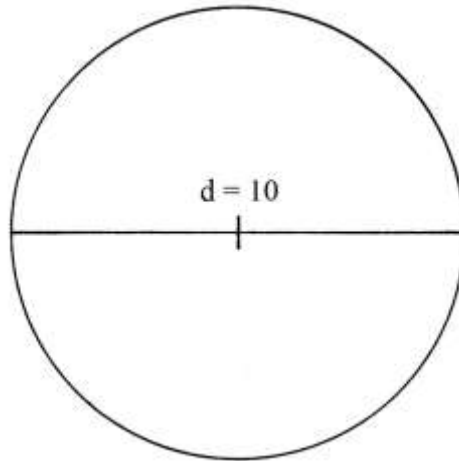
L'area di un cerchio di raggio r è data da:

$$S = \pi * r^2.$$

Per π usiamo il valore approssimato di 22/7 e a r sostituiamo il suo equivalente $d/2$.

La formula dell'area diviene:

$$S_{\text{CERCHIO}} = (22/7) * (d/2)^2 = (22/7) * (d^2/4) = d^2 * 11/14.$$



%%%%%%%%%

Un problema inverso fornisce l'area S di un cerchio:

$$S = (78 + 4/7).$$

Deve essere ricavata la lunghezza del diametro d .

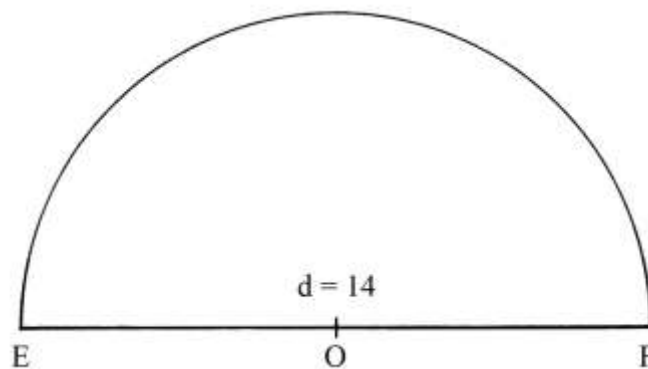
La soluzione è:

$$d^2 = S * 14/11 = (78 + 4/7) * 14/11 = 100 \quad e$$

$$d = \sqrt{100} = 10.$$

Area di un semicerchio

Il semicerchio ha diametro EF lungo 14.



La lunghezza della semicirconferenza sc è:

$$sc = (d * 22/7)/2 = 14 * (22/7)/2 = 14 * 22/14 = 22.$$

L'espressione $(d * 22/7)$ è la lunghezza della *circonferenza* c del cerchio da cui proviene il semicerchio:

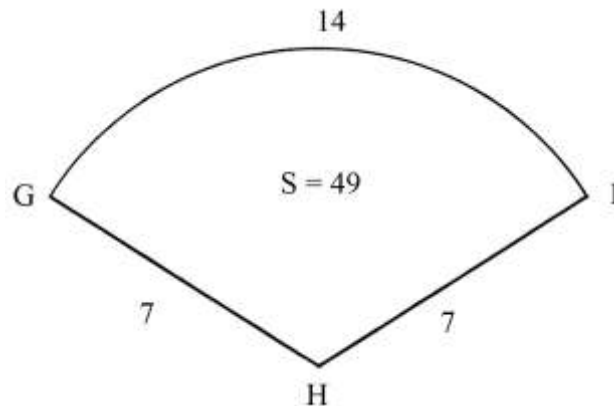
$$c = d * 22/7 = 14 * 22/7 = 44.$$

L'area S del semicerchio è data da:

$$S = (sc/2) * (d/2) = (22/2) * (14/2) = 11 * 7 = 77.$$

Area di un settore circolare

GHI è un settore circolare ritagliato da un cerchio di raggio 7.



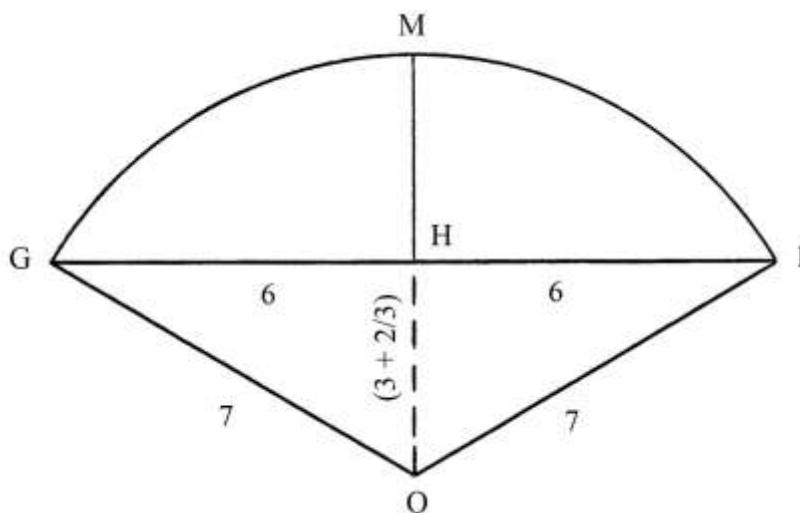
L'arco GI è lungo 14.

L'area S è:

$$S = (GI/2) * HG = (14/2) * 7 = 49.$$

Area di un segmento circolare

Il settore circolare del precedente problema è diviso in due figure per mezzo della corda GI che è lunga 12 trabucchi; l'area dell'intero settore circolare è stata appena calcolata in 49 [trabucchi quadrati].



* GMI è un segmento circolare;

* GIO è un triangolo isoscele.

OH è un'altezza del triangolo GIO e *sarebbe* lunga $(3 + 2/3)$ trabucchi.

L'area del triangolo è calcolata in:

$$S_{GIO} = (GI/2) * OH = (12/2) * (3 + 2/3) \approx 22 \text{ trabucchi quadrati.}$$

L'area del segmento circolare GMI *sarebbe* data da:

$$S_{GMI} = S_{\text{SETTORE CIRCOLARE}} - S_{GIO} = 49 - 22 = 27 \text{ trabucchi quadrati.}$$

----- APPROFONDIMENTO -----

Non sembra che la soluzione proposta da Peverone sia del tutto corretta.

MH e HO hanno uguali lunghezze:

$$MH = HO = MO/2 = 7/2 = 3,5.$$

HO non è lunga $(3 + 2/3)$ ma $(3,5)$ trabucchi: una precisa costruzione grafica conferma questa ipotesi.

L'area del triangolo isoscele GIO è:

$$S_{GIO} = (GI/2) * OH = (12/2) * 3,5 = 6 * 3,5 = 21 \text{ trabucchi quadrati.}$$

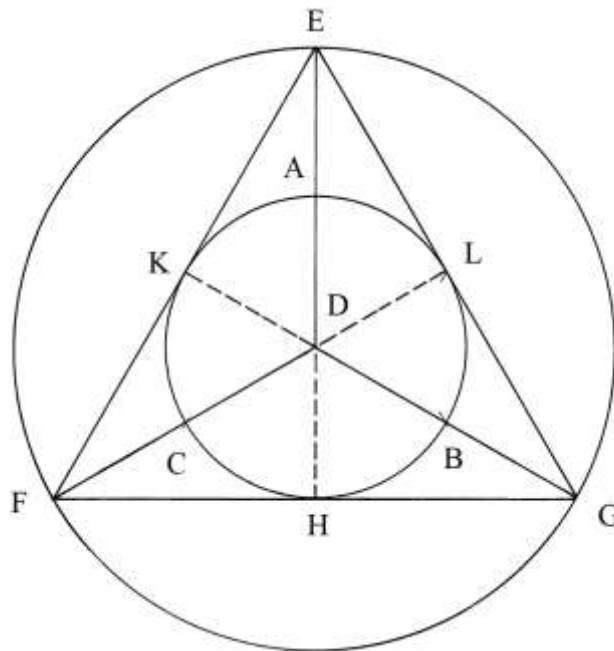
L'area del segmento circolare GMI diviene:

$$S_{GMI} = S_{SETTORE\ CIRCOLARE} - S_{GIO} = 49 - 21 = 28 \text{ trabucchi quadrati.}$$

Nota: a partire dalla costruzione che segue, Peverone numera i paragrafi aggiungendo un numero progressivo iniziando da "1".

Triangolo equilatero circoscritto a un cerchio. Regola 1.

È dato un cerchio di centro D e raggio DA.



Dividere la circonferenza in tre parti uguali: per i punti A, B e C tracciare tre diametri e prolungarli.

Da A riportare in E la lunghezza del raggio DA.

Dal punto E tracciare due linee passanti per K e per L. Per il punto H disegnare la tangente al cerchio, perpendicolare a EH.

Incontrandosi, le tre linee appena condotte si incontrano dando origine al triangolo equilatero EFG, circoscritto al cerchio di centro D e raggio DA.

----- APPROFONDIMENTO -----

La soluzione offerta da Peverone è un po' imprecisa.

Fare centro in D e con raggio AH disegnare un cerchio che taglia in E, F e G i prolungamenti dei tre diametri del cerchio di raggio DA e sempre con centro in D: sono fissati i punti E, F e G che sono i vertici del triangolo equilatero EFG, circoscritto al cerchio di centro D e raggio DA.

L'altezza EH del triangolo equilatero è lunga:

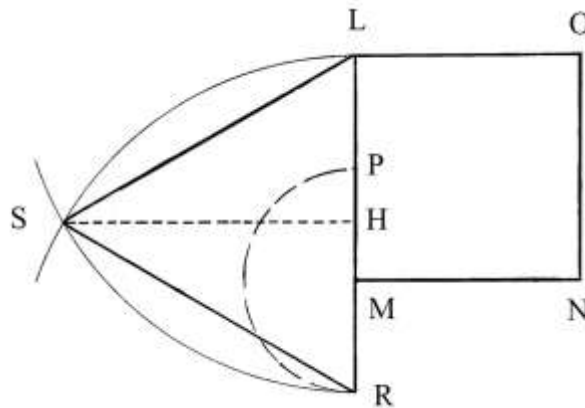
$$EH = 3 * DA \text{ e cioè è lunga } \textit{tre} \text{ volte il raggio del cerchio inscritto.}$$

Lo stesso vale per le altre due altezze del triangolo equilatero, FL e GK.

I segmenti AE, CF e BG sono lunghi quanto il raggio DA.

Triangolo di area uguale a quella di un quadrato. Regola 2.

LMNO è un quadrato e P è il punto medio del lato MN.



Esso deve essere convertito in un triangolo equilatero di area uguale.

Prolungare verso il basso il lato LM. L'Autore propone di riportare *tre* volte la lunghezza di LP per ricavare la lunghezza del lato del triangolo:

$$LR = 3 * MP = 3/2 * LM.$$

LR è il primo lato del triangolo equilatero LRS e SH è una sua altezza.

Secondo Peverone l'area di LRS sarebbe uguale a quella del quadrato LMNO.

----- APPROFONDIMENTO -----

Lorenzo Forestani (1585-1623), nel suo trattato "*Pratica d'Arithmetica e Geometria*", pubblicato nel 1682, criticò la soluzione proposta da Peverone.

Se, ad esempio, il lato del quadrato LMNO è lungo 10, la sua area è:

$$S_{LMNO} = 10^2 = 100.$$

La lunghezza del lato LR è:

$$LR = 3/2 * 10 = 15.$$

L'altezza SH del triangolo ha lunghezza che è data da:

$$SH^2 = SL^2 - LH^2 = LR^2 - (LR/2)^2 = 15^2 - (15/2)^2 = 225 - 56,25 = 168,75 \quad e$$

$$SH = \sqrt{168,75} \approx 12,99.$$

L'area di LRS è:

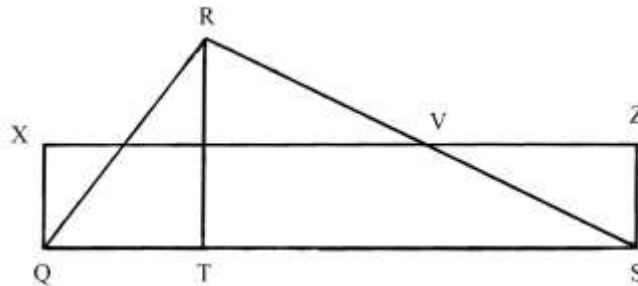
$$S_{LRS} = LR * SH/2 = 15 * 12,99/2 \approx 97,425.$$

L'area del triangolo LRS è leggermente più piccola di quella del quadrato LMNO.

Conversione di un triangolo in un rettangolo. Regola 3.

QRS è un generico triangolo che ha area:

$$S_{QRS} = QS * RT/2.$$



Il triangolo deve essere trasformato in un rettangolo di area uguale.

Fissare il punto medio del lato RS: è V.

Dai vertici Q e S elevare le perpendicolari alla base QS. Per il punto V tracciare la parallela a QS: è XZ.

I segmenti XQ e ZS hanno uguali lunghezze:

$$XQ = ZS = RT/2.$$

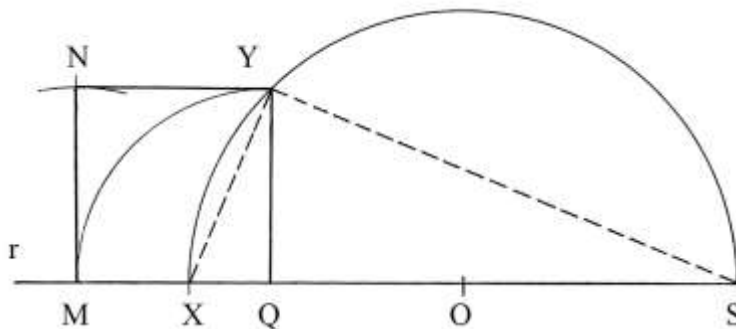
L'area del rettangolo XQSZ è:

$$S_{XQSZ} = QS * XQ = QS * (RT/2) = S_{QRS}.$$

Trasformazione di un rettangolo in un quadrato di area uguale. Regola 4.

Il rettangolo XQSZ del precedente problema deve essere trasformato in un quadrato con area uguale.

Tracciare la retta orizzontale r e riportare su di essa le lunghezze di XQ e di QS: sono fissati i segmenti adiacenti XQ e QS.



Determinare il punto medio di XS: è O. Fare centro in O e con raggio $OX = OS$ disegnare una semicirconferenza da X a S.

Dal punto Q elevare la perpendicolare alla retta r fino a incontrare la semicirconferenza nel punto Y.

YQ è la lunghezza dei lati del quadrato YQMN che ha area uguale a quella del rettangolo XQSZ del precedente problema.

XYS è un triangolo rettangolo inscritto nel semicerchio di centro O. Per il 2° teorema di Euclide sui triangoli rettangoli, la lunghezza di YQ è medio proporzionale fra quelle di XQ e di QS:

$$XQ : YQ = YQ : QS$$

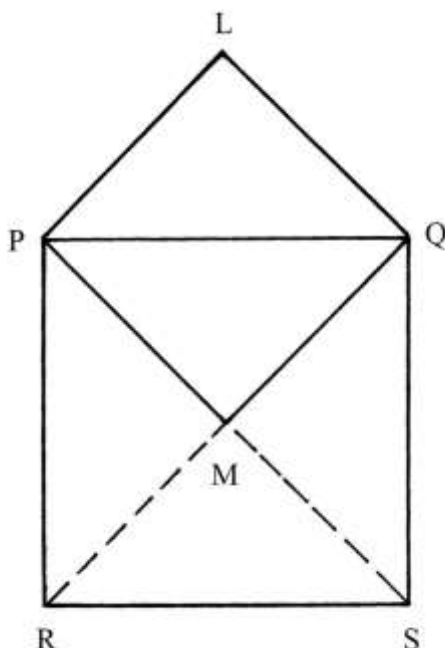
$$YQ^2 = XQ * QS.$$

YQ^2 è l'area del quadrato YQMN e il prodotto $XQ * QS$ è l'area del rettangolo XQSZ, per cui si ha:

$$S_{YQMN} = S_{XQSZ}.$$

Quadrato doppio di un altro. Regola 5.

LMPQ è un quadrato e PQ è una sua diagonale.



Deve essere costruito un quadrato di area doppia.

Dai punti P e Q disegnare verso il basso le perpendicolari alla diagonale PQ, che è il primo lato del quadrato cercato.

Fare centro in P e in Q con raggio PQ e fissare i punti R e S.

PQSR è un quadrato che ha area doppia di quella di LMPQ.

PL è il lato del primo quadrato e ha lunghezza l . La sua area è:

$$S_{LMPQ} = l^2.$$

La diagonale PQ è lunga:

$$PQ^2 = PL^2 + QL^2 = l^2 + l^2 = 2 * l^2 \quad e$$

$$PQ = l * \sqrt{2}.$$

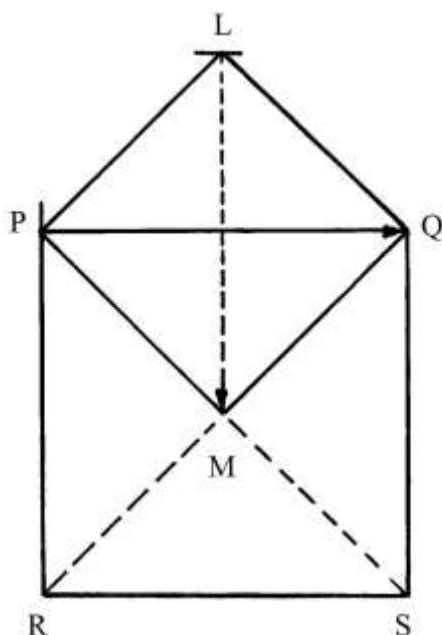
L'area di PQSR è:

$$S_{PQSR} = PQ^2 = (l * \sqrt{2})^2 = 2 * l^2.$$

L'area di PQSR è il *doppio* di quella di LMPQ.

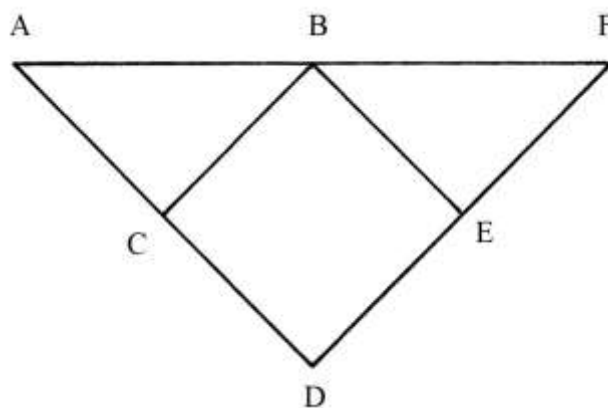
----- APPROFONDIMENTO -----

Le lettere sono state apposte da Peverone ai vertici del quadrato LMPQ in modo un po' strano: sembra che siano stati usati due vettori, L-M e P-Q, come evidenziato nello schema che segue:



Peverone intende applicare la stessa regola, descritta sopra, ai triangoli isosceli, ma non fornisce alcuna spiegazione che qui tentiamo di proporre.

ABC è un triangolo rettangolo isoscele:



Sul suo lato BC è costruito il quadrato BCDE che ha area doppia di quella di ABC. Prolungare verso destra il lato AB e da B riportare in F la lunghezza dello stesso AB. EF è il prolungamento del lato DE.

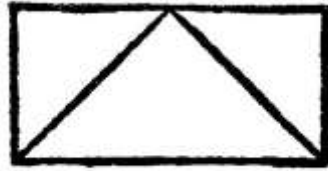
Il triangolo BFE ha area uguale a quella di ABC.

Le aree dei poligoni così disegnati a partire dal triangolo ABC sono:

- * $S_{ABC} = AC * BC/2 = AC^2/2;$
- * $S_{BCDE} = BC * CD = BC^2 = 2 * S_{ABC};$
- * $S_{BFE} = BE * EF/2 = AC^2/2 = S_{ABC};$
- * $S_{ADF} = AD * DF/2 = (2 * AC) * (2 * AC)/2 = 2 * AC^2 = 4 * S_{ABC} = 2 * S_{BCDE}.$

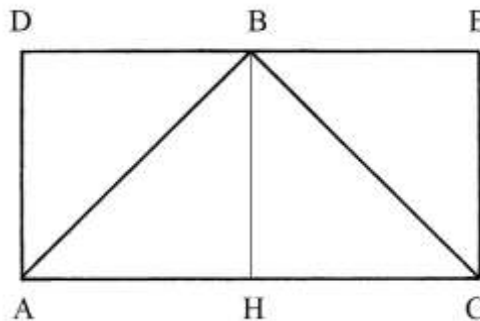
%%%%%%%%%

L'ultimo esempio fornito da Peverone è "muto" perché la figura non reca alcuna lettera e non è spiegato:



Triangolo isoscele.

Si tratta di un triangolo isoscele, con ogni probabilità *rettangolo*, inscritto in un rettangolo. Con l'aiuto dello schema che segue proponiamo una spiegazione.



ABC è un triangolo rettangolo isoscele e BH è una sua altezza.

Il rettangolo ADEC è circoscritto a ABC ed è formato da due quadrati uguali, con lati lunghi quanto BH: se Peverone fosse stato Toscano avrebbe definito il doppio quadrato ADEC come un *bislungo*.

Il triangolo rettangolo isoscele ADB ha area:

$$S_{ADB} = AB * AD/2 = AD^2/2.$$

Il triangolo rettangolo isoscele CEB ha area uguale a quella di ADB:

$$S_{CEB} = BE * EC/2 = AD^2/2.$$

Il triangolo rettangolo ABC ha area:

$$S_{ABC} = AC * BH/2 = (2 * AH) * BH/2 = (2 * AD) * AB/2 = AD^2.$$

ABC ha area doppia di quella di ADB e di CEB.

Infine, il rettangolo ADEC ha area:

$$S_{ADEC} = AC * BH = (2 * AD) * AD = 2 * AD^2 = 2 * S_{ABC}.$$

Quadrato di area tripla di uno dato. Regola 6.

ABCD è un quadrato e deve essere disegnato un altro con area tripla.

Come per altre costruzioni, l'Autore non fornisce una dettagliata descrizione della soluzione. Cerchiamo di colmare la lacuna.

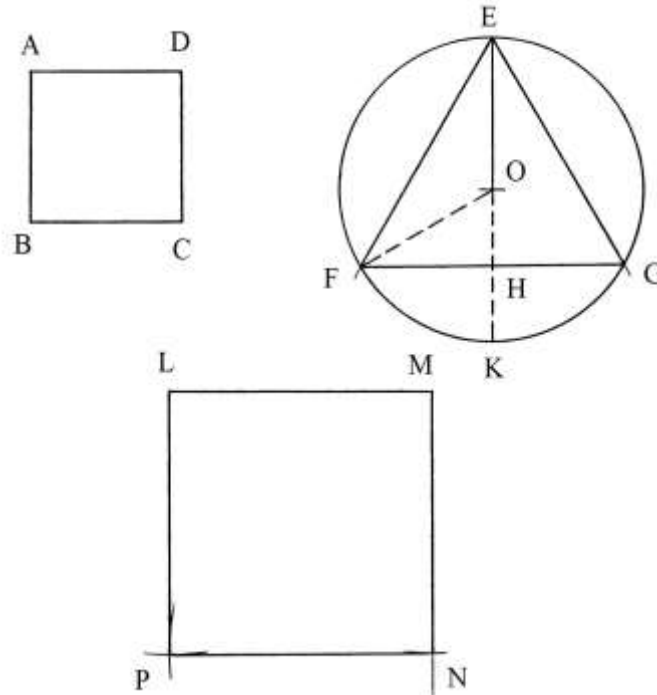
ABCD ha area:

$$S_{ABCD} = AB^2.$$

Con raggio AB disegnare una circonferenza di centro O e tracciare il diametro verticale EK.

Sempre con raggio AB fare centro in K e fissare sulla circonferenza i punti F e G.

EFG è un triangolo equilatero inscritto nel cerchio di centro O.



Indichiamo con ℓ la lunghezza di AB.

H è il punto medio del raggio OK e del lato FG:

$$OF = OK = AB = \ell.$$

La lunghezza di FH è data da:

$$FH^2 = OF^2 - OH^2 = \ell^2 - (\ell/2)^2 = 3/4 * \ell^2 \quad e$$

$$FH = (\sqrt{3}/2) * \ell.$$

La lunghezza di FG è:

$$FG = 2 * FH = 2 * (\sqrt{3}/2) * \ell = \ell * \sqrt{3}.$$

Con il compasso riportare la lunghezza di FG e tracciare il segmento LM:

$$LM = FG = \ell * \sqrt{3} = AB * \sqrt{3}.$$

Costruire il quadrato LMNP. Esso ha area che è data da:

$$S_{LMNP} = LM^2 = (AB * \sqrt{3})^2 = 3 * AB^2 = 3 * S_{ABCD}.$$

Il quadrato LMNP ha area uguale a *tre* volte quella di ABCD.

Quadrato con area 7 volte quella di uno dato. Regola 7.

È dato il quadrato ABCD e deve essere costruito un quadrato con area *sette* volte più grande.

L'area di ABCD è:

$$S_{ABCD} = BC^2.$$

Prolungare verso destra il lato BC e riportare sulla retta *sette* volte la lunghezza di BC fino al punto E:

$$CE = 7 * BC \quad e \quad BE = 8 * BC.$$

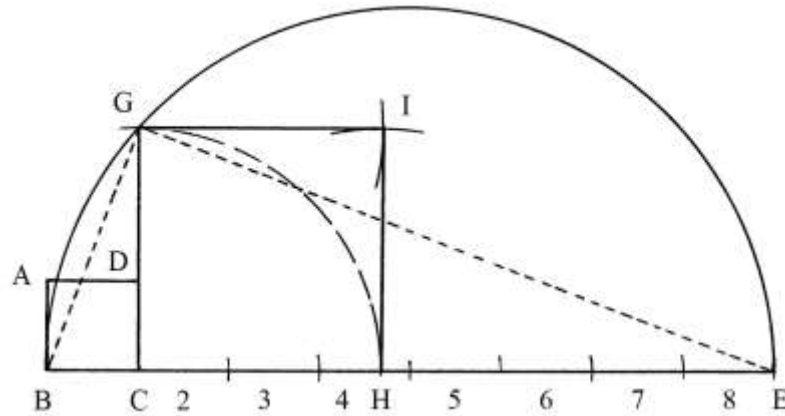
Determinare il punto medio di BE: è O.

$$OB = OE = BE/2 = 4 * BC.$$

Fare centro in O e con raggio $OB = OE$ disegnare una semicirconfenza da B a E.

Prolungare verso l'alto il lato CD fino a incontrare in G la semicirconfenza: CG è il primo lato del quadrato CGIH che ha area uguale a *sette* volte quella di ABCD.

BGE è un triangolo rettangolo inscritto nel semicerchio.



Per il secondo teorema di Euclide sui triangoli rettangoli, vale la seguente proporzione:

$$BC : CG = CG : CE \quad e$$

$$CG^2 = BC * CE = BC * (7 * BC) = 7 * BC^2 \quad e$$

$$CG = BC * \sqrt{7}.$$

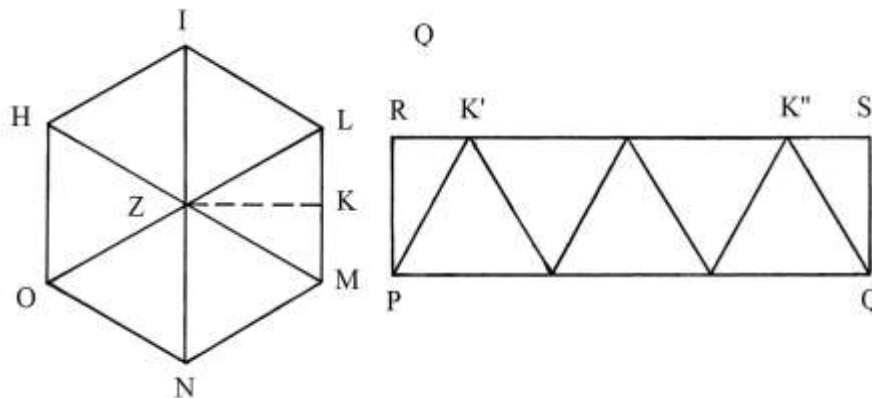
L'area di CGIH è:

$$S_{CGIH} = CG^2 = (BC * \sqrt{7})^2 = 7 * BC^2 = 7 * S_{ABCD}.$$

L'area di CGIH è *sette* volte quella di ABCD.

Quadrato di area uguale a quella di un esagono regolare. Regola 8.

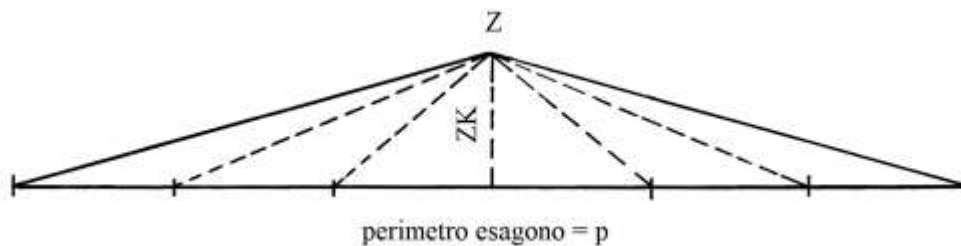
HILMNO è un esagono regolare che è suddiviso in sei triangoli equilateri.



Il poligono deve essere convertito in un quadrato di area uguale. Nel testo originale è contenuta soltanto la figura riprodotta qui sopra.

ZK è un'altezza del triangolo equilatero ZLM.

Occorre sviluppare la superficie dell'esagono. L'area di questo poligono può essere calcolata assimilandolo a un triangolo isoscele con base lunga quanto il perimetro p e altezza lunga quanto ZK:



$$S_{\text{ESAGONO}} = p * ZK/2.$$

Il perimetro p è:

$$p = 6 * HI.$$

L'area dell'esagono è:

$$S_{\text{ESAGONO}} = (6 * HI) * ZK/2 = 3 * HI * ZK.$$

Costruire il rettangolo RSQP con lunghezza uguale a:

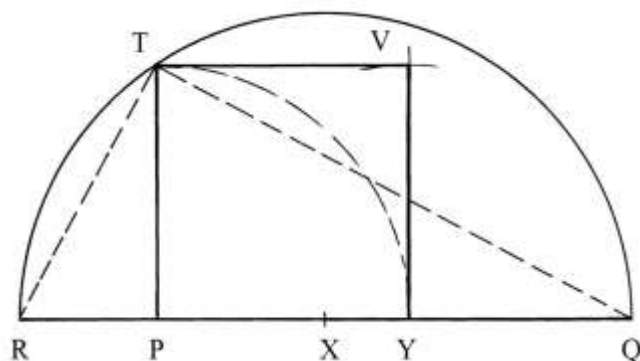
$$PQ = RS = 3 * HI = p/2.$$

La larghezza è:

$$RP = SQ = ZK.$$

Nel rettangolo sono disegnati cinque dei sei triangoli che compongono l'esagono: il sesto triangolo, ZLM, è diviso fra i due triangoli rettangoli RK'P e SK''Q.

Su di una retta orizzontale fissare il punto P: verso destra riportare la lunghezza di PQ e verso sinistra quella di PR:



Stabilire il punto medio di RQ, che è X.

Fare centro in X e con raggio $XR = XQ$ tracciare una semicirconferenza da R a Q.

Dal punto P elevare la perpendicolare a RQ: essa incontra in T la semicirconferenza. TP è il primo lato del quadrato TPYV che area uguale a quella del rettangolo RSQP e a quella dell'esagono di centro Z.

Vale la proporzione:

$$RP : TP = TP : PQ \quad e$$

$$TP^2 = RP * PQ.$$

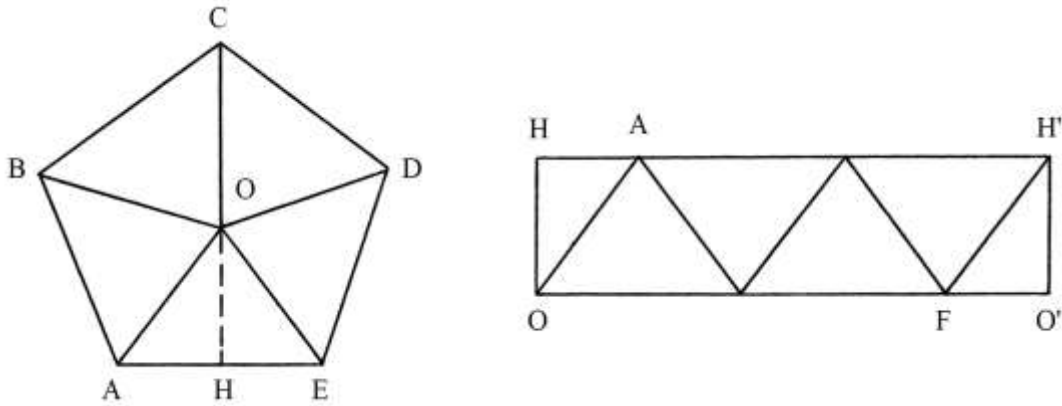
%%%%%%%%%

Quadratura di un pentagono regolare

ABCDE è un pentagono regolare e O è il suo centro.

Il poligono è suddiviso in cinque triangoli isosceli di uguali dimensioni.

OH è un'altezza del triangolo ADE.



Il perimetro p del pentagono è:

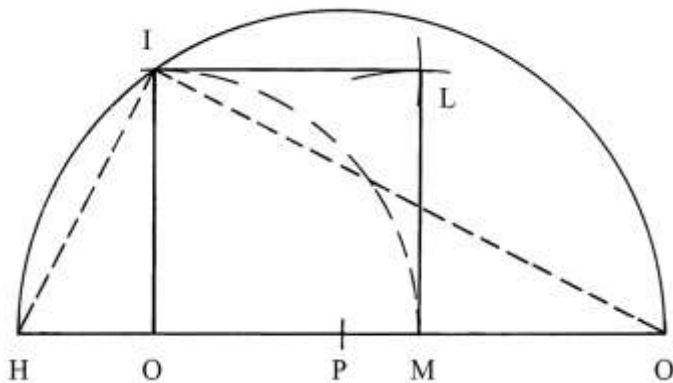
$$p = 5 * AE.$$

Il rettangolo OHH'O' ha lunghezza

$$OO' = HH' = 5 * AE/2 = p/2.$$

La larghezza OH è lunga quanto l'altezza OH del triangolo AOE.

Su di una retta orizzontale fissare il punto O: verso destra riportare la lunghezza di OO' e verso sinistra quella di OH.



Fissare il punto medio di HO': è P. Fare centro in P e con raggio PH = PO' tracciare una semicirconferenza da H a O'.

Dal punto O disegnare la perpendicolare a HO': essa incontra la semicirconferenza nel punto I: IO è il primo lato del quadrato IOML che ha area uguale a quella del rettangolo OHH'O' e quella del pentagono ABCDE.

Valgono le seguenti relazioni:

$$HO : IO = IO : OO'$$

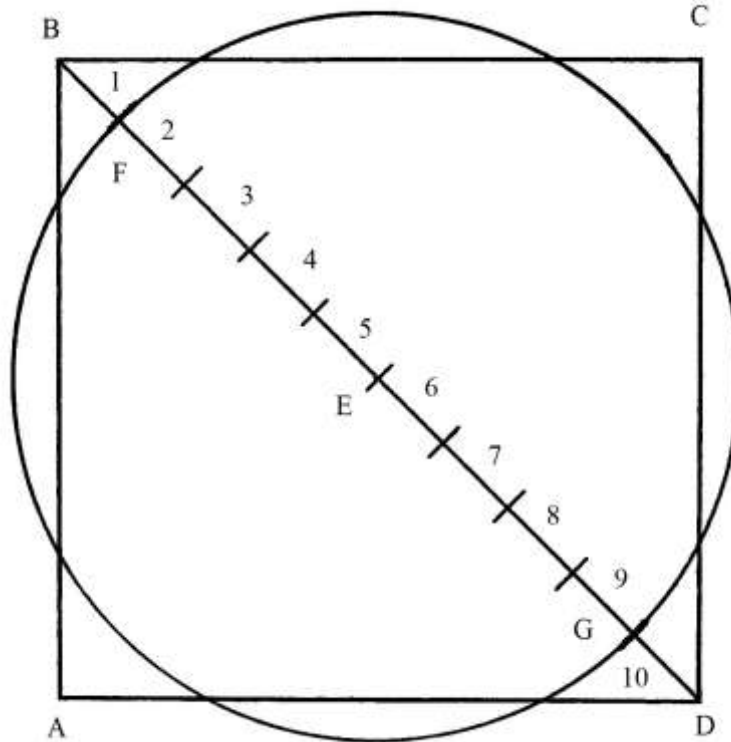
$$IO^2 = HO * OO' = S_{OHH'O'} = S_{PENTAGONO}.$$

Cerchio di area uguale a quella di un quadrato. Regola 9.

ABCD è un quadrato e BD è una sua diagonale.

Dividere BD in *dieci* parti uguali: E è il suo punto medio.

Fare centro in E e con raggio EF = EG = 4/10 * BD disegnare una circonferenza: secondo Peverone il cerchio così costruito avrebbe area uguale a quella del quadrato.



----- APPROFONDIMENTO -----

La lunghezza dei lati del quadrato è indicata con “L”:
 $AB = L$.

L’area del quadrato è:
 $S_{ABCD} = AB^2 = L^2$.

La diagonale BD è lunga:
 $BD^2 = AB^2 + AD^2 = L^2 + L^2 = 2 * L^2$ e
 $BD = L * \sqrt{2}$.

Il diametro FG del cerchio è lungo:
 $FG = 8/10 * BD = 8/10 * L * \sqrt{2}$.

L’area S del cerchio è:
 $S_{CERCHIO} = 11/14 * FG^2 = 11/14 * (8/10 * L * \sqrt{2})^2 = 11/14 * 64/100 * L^2 * 2 =$
 $= 1408/1400 * L^2$.

Il rapporto 1408/1400 è facilmente approssimabile a 1.

L’area del cerchio è *praticamente* uguale a quella del quadrato ABCD.

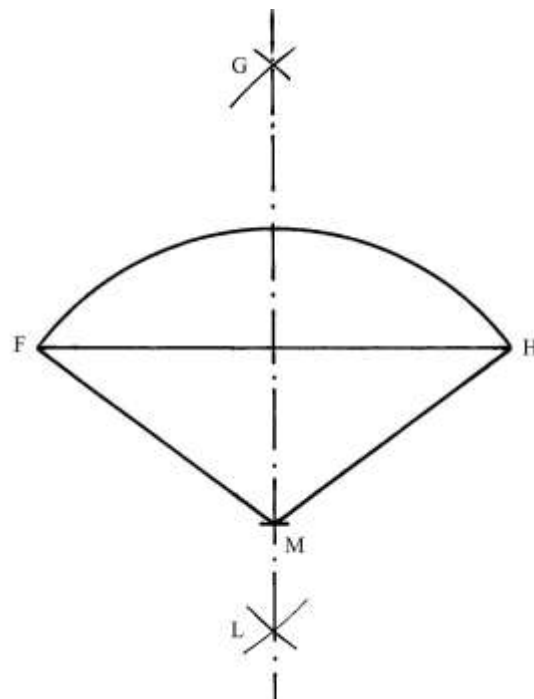
La soluzione proposta da Peverone risalirebbe al matematico ed ecclesiastico Francone da Liegi (circa 1015 – 1083), autore di un trattato in latino sulla *quadratura del cerchio*, scritto intorno al 1050.

Stante l’impossibilità di quadrare un cerchio, anche questa costruzione è approssimata, ma è accettabile per gli usi correnti.

Centro di un arco di circonferenza. Regola 10.

È dato l’arco di circonferenza che va da F a H.

Deve essere determinato il suo centro M.



Tracciare la corda FH. Fare centro in F e in H e disegnare quattro archi di circonferenza che si intersecano nei punti G e L: per questi punti passa un diametro.

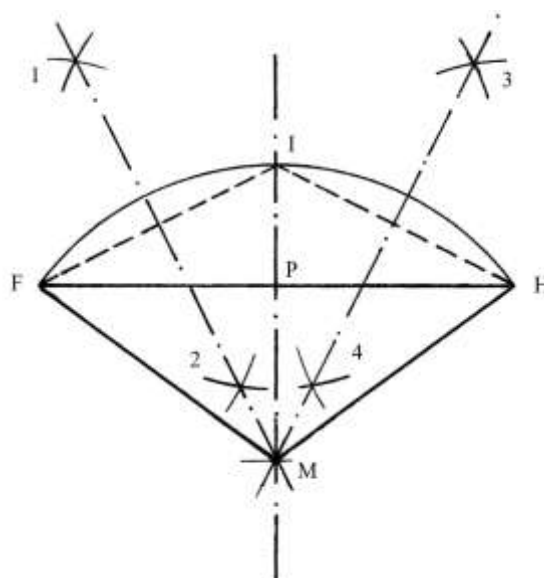
Peverone suggerisce di determinare la posizione di M *per tentativi*, con l'ausilio del compasso.

----- APPROFONDIMENTO -----

La soluzione prospettata dall'Autore è primitiva.

È possibile ricavare la posizione del centro M con una semplice e costruzione geometrica.

Tracciare la corda FH e fissare il suo punto medio, P:



Per P disegnare un diametro che incontra in I l'arco di circonferenza: FI e IH sono due corde.

Con raggio a piacere fare centro in F, I e H e tracciare *otto* archi di circonferenza che si tagliano nei punti 1, 2, 3 e 4.

Per le coppie di punti 1-2 e 3-4 disegnare gli assi rispettivamente delle corde FI e IH: essi si incontrano nel punto M, centro dell'arco di circonferenza FIH.

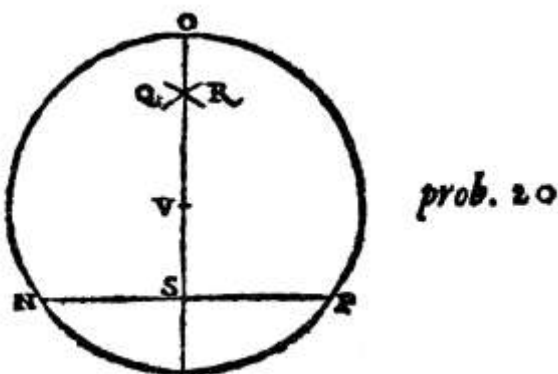
M giace sul diametro passante per I e per P.

La costruzione è del tutto esatta.

AIHP è un *segmento circolare* e FIHM è un *settore circolare*.

Centro di un cerchio. Regola 11.

Il problema è descritto in maniera un po' imprecisa, forse incompleta, come mostra lo schema originale:

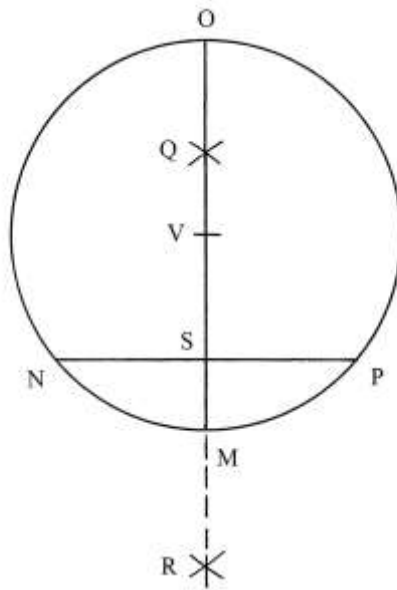


L'Autore intende ricavare il centro di un cerchio e, senza fornire spiegazioni attendibili, traccia la corda NP: fa centro in N e in P e disegna due archi che si incontrano in "Q-R" e conclude tracciando un diametro verticale che taglia NP in due parti uguali ($NS = SP$) e la circonferenza in O.

Il centro V viene trovato *per tentativi* percorrendo con il compasso il segmento OS.

APPROFONDIMENTO

Lo schema che segue rettifica le posizioni dei punti Q e R.

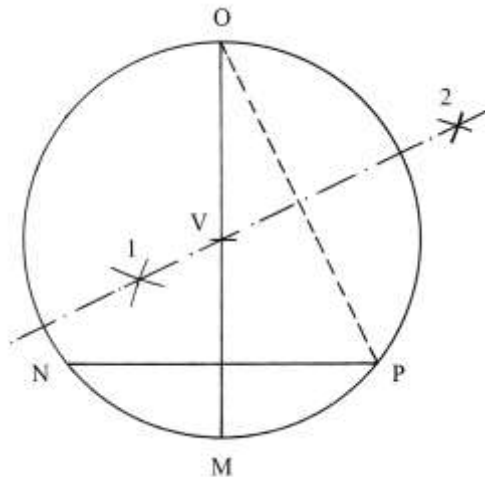


Disegnare la corda NP e, con raggio a piacere, fare centro nei suoi estremi: tracciare quattro archi che si intersecano nei punti nei punti Q e R.

Per Q e per R passa una retta che fissa gli estremi O e M del diametro verticale e taglia NP in due parti uguali.

La ricerca della posizione del centro V non è ancora conclusa e non può essere fatta per tentativi.

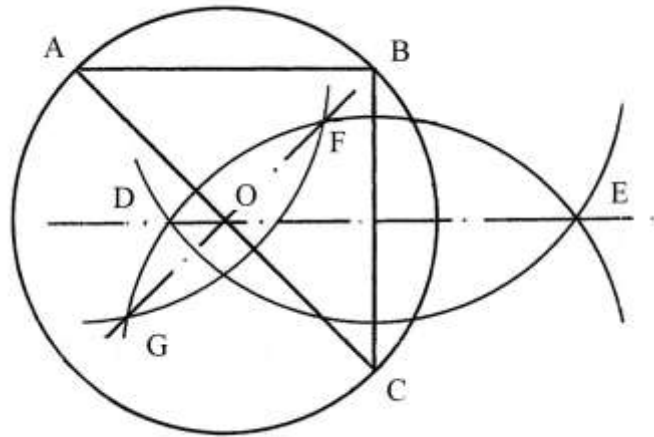
La costruzione che segue provvede allo scopo: essa riprende la precedente e vi aggiunge la corda OP.



Con raggio a piacere, fare centro in O e in P e tracciare quattro archi che si incontrano nei punti 1 e 2: per questi ultimi passa l'asse della corda OP che taglia il diametro OM nel centro V.

Cerchio circoscritto a un triangolo. Regola 12.

ABC è un triangolo che deve essere inscritto in un cerchio.

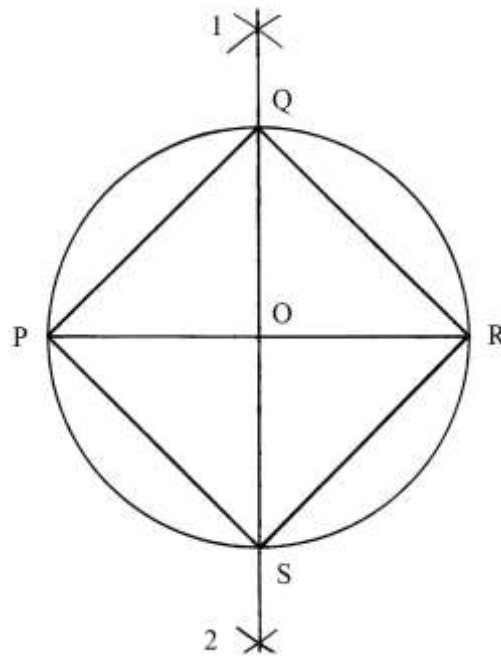


La costruzione ricalca quella, largamente conosciuta, della circonferenza passante per *tre* punti non allineati.

Con raggio scelto a piacere, fare centro in A, B e C e tracciare tre archi di circonferenza che si incontrano nei punti D, E, F e G. Per le coppie di punti D-E e F-G disegnare due rette che si incontrano in O, centro della circonferenza del cerchio circoscritto al triangolo ABC.

Quadrato inscritto e quadrato circoscritto a un cerchio. Regola 13.

È dato un cerchio di centro O: PR è il suo diametro orizzontale.



La costruzione è qui perfezionata rispetto allo schema originale.

Con apertura a piacere, fare centro in P e in R e disegnare quattro archi che si intersecano nei punti 1 e 2, esterni al cerchio.

Per 1 e per 2 passa il diametro verticale QS.

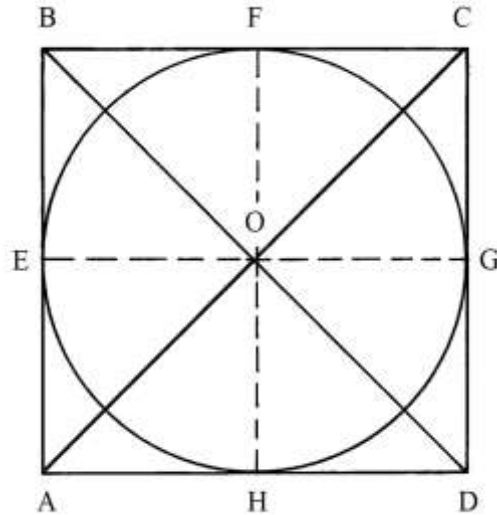
PQRS è il quadrato inscritto nel cerchio.

%%

ABCD è un quadrato nel quale sono disegnate le diagonali AC e BD. O è il centro del quadrilatero che è determinato dall'intersezione delle due diagonali.

E, F, G e H sono i punti medi dei lati del quadrato.

OE è il raggio del cerchio inscritto: la sua circonferenza è tangente ai lati del quadrato nei suoi punti medi.

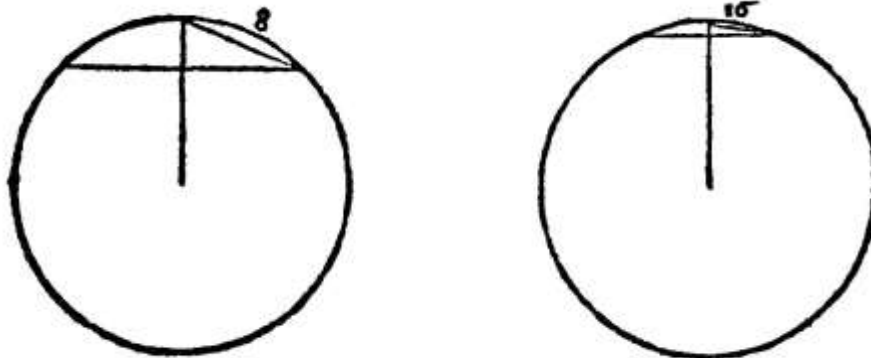


Ottagono inscritto in un cerchio. Regola 14.

L'ottagono deve essere costruito a partire da un quadrato inscritto in un cerchio.

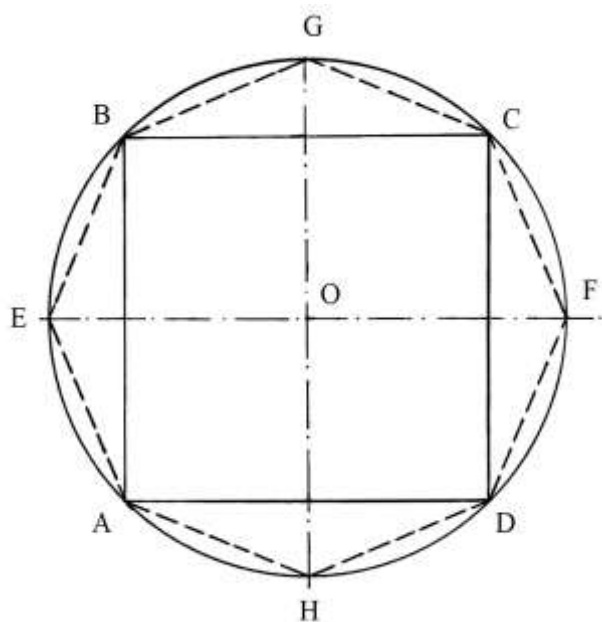
Poi è proposta la realizzazione di un poligono inscritto di 16 lati, cioè un *esadecagono* il cui nome non viene fornito da Peverone.

La qualità degli schemi originali e le stesse descrizioni sono abbastanza primitive:



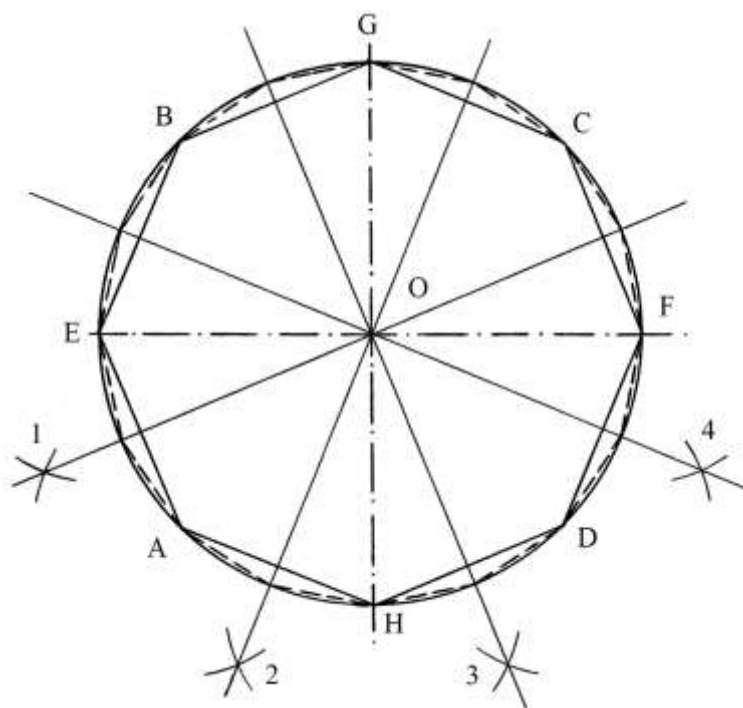
Procediamo in altro modo.

ABCD è un quadrato inscritto nel cerchio di centro O e EF e GH sono due diametri fra loro perpendicolari e paralleli o perpendicolari ai lati del quadrato.



L'Autore non fornisce alcuna informazione sulla costruzione del poligono inscritto di 16 lati, l'esadecagono.

Nella figura è riprodotto il precedente ottagono regolare inscritto.



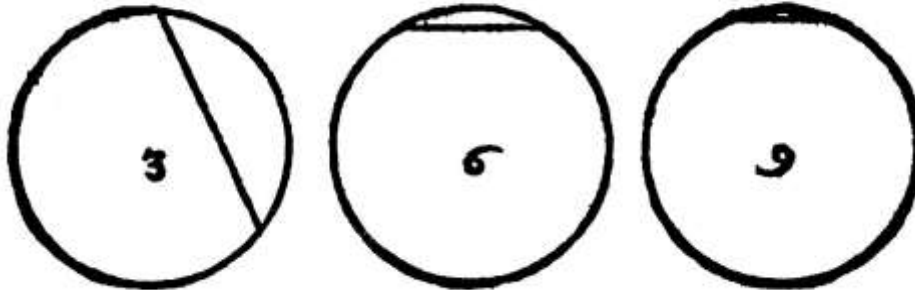
Fare centro nei punti E, A, H D e F e tracciare *otto* archi di circonferenza che si incontrano nei punti 1, 2, 3 e 4; per questi punti tracciare quattro diametri passanti per il centro O: essi tagliano la circonferenza in otto ulteriori punti che sono i vertici mancanti per completare l'esadecagono: i lati di questo poligono sono disegnati tratteggiati.

Divisione di un cerchio in 3, 6, 9 e 12 parti uguali. Regola 15.

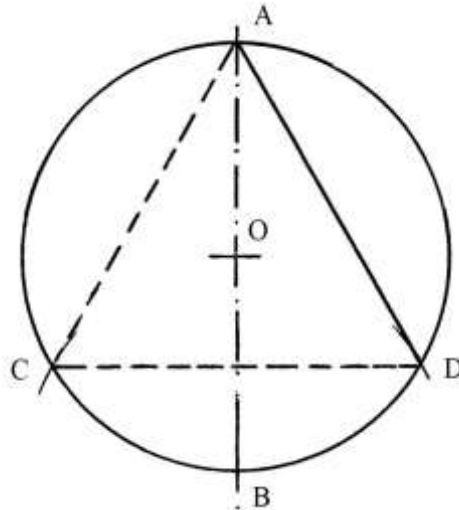
Le figure originali forniscono limitate informazioni sul metodo da seguire per ricavare i poligoni regolari inscritti, con 3, 6, 9 e 12 lati.

DI GEOMETRIA.

109



La divisione in *tre* parti uguali è spiegata nello schema che segue:



O è il centro del cerchio di raggio OA e AB è un diametro.

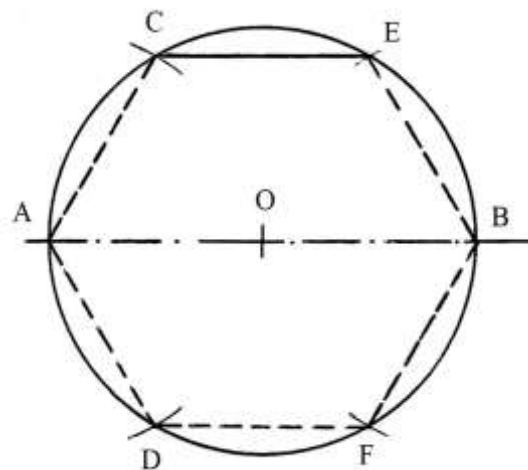
Fare centro in B e con raggio BO tracciare due archi che fissano i punti C e D.

A, C e D sono i tre punti che dividono la circonferenza in tre parti uguali e ADC è il triangolo equilatero inscritto nel cerchio.

%%%%%%%%%

O è il centro di un cerchio di raggio OA e AB è il suo diametro orizzontale.

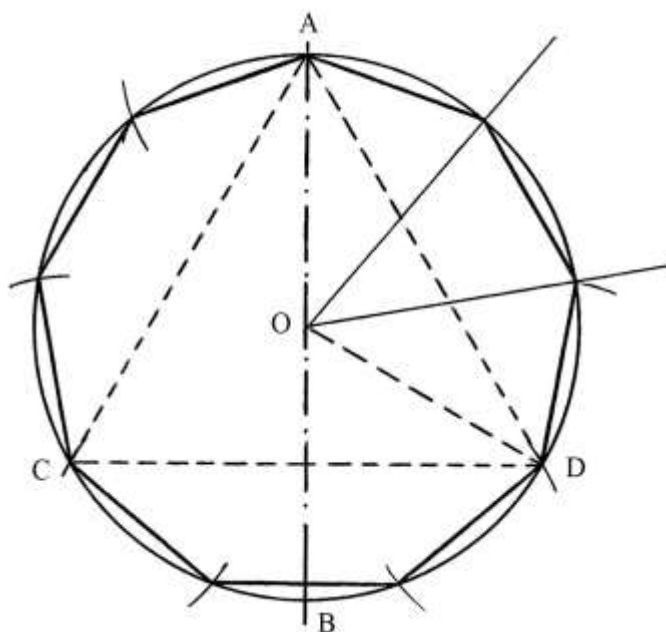
Fare centro in A e in B con raggio OA e disegnare quattro piccoli archi che tagliano la circonferenza nei punti C, D, E e F: essi sono i quattro vertici mancanti dell'esagono regolare inscritto nel cerchio di centro O.



%%%

La divisione della circonferenza in 9 parti uguali è basata sulla precedente divisione in 3 parti.

La costruzione dell'ennagono inscritto non può essere ottenuta con esattezza ed è approssimata:



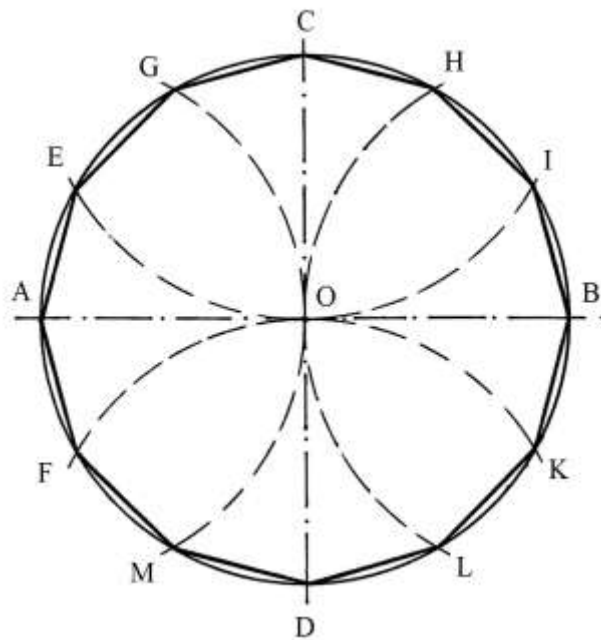
Per tentativi o con l'aiuto di un goniometro occorre dividere in tre angoli uguali l'angolo AOD che è ampio 120° ; ciascun lato dell'ennagono sottende un angolo al centro che è ampio:
 $120^\circ/3 = 40^\circ$.

L'angolo ampio 40° non è costruibile con riga e compasso.

%%%

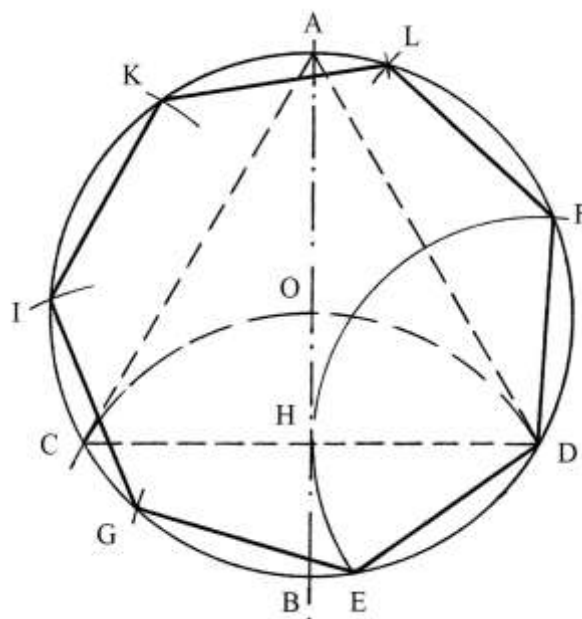
La divisione del cerchio in *dodici* parti è soltanto accennata nel titolo della Regola. O è il centro del cerchio e AB e CD sono due diametri fra loro perpendicolari.

Con apertura uguale al raggio OA fare centro in A, B, C e D e disegnare quattro archi che tagliano la circonferenza nei punti E, F, G, H, I, K, L e M che insieme a A, B, C e D dividono la circonferenza in 12 parti uguali.



Costruzione dell'ottagono inscritto. Regola 16.

La costruzione dell'ottagono inscritto in un cerchio riproduce un metodo proposto da Erone di Alessandria, non citato: il poligono che esso produce è leggermente approssimato.

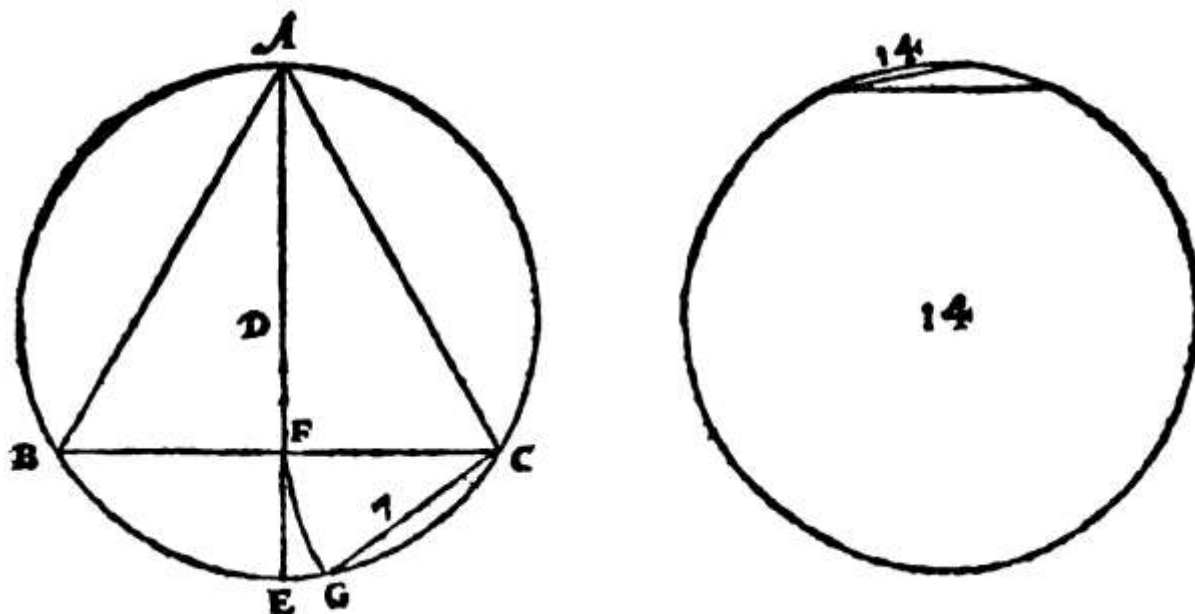


La costruzione utilizza quella del triangolo equilatero inscritto. Il diametro AB divide in due parti uguali il lato CD del triangolo equilatero: il segmento DH è la lunghezza del lato dell'ottagono inscritto che viene riportata sulla circonferenza a partire dal vertice D.

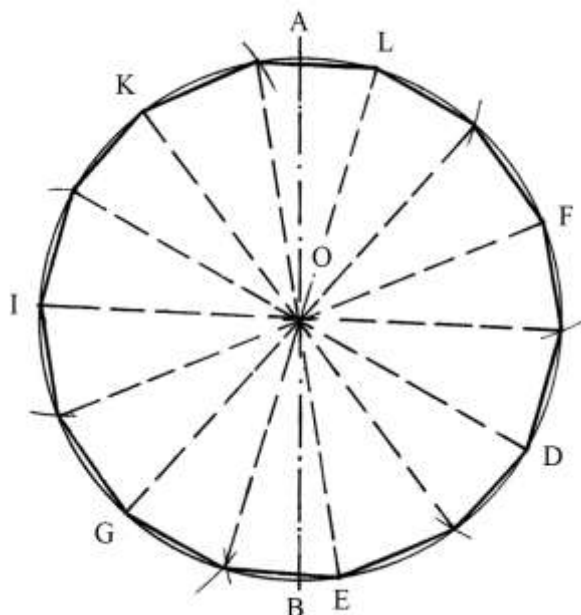
DEGIKLF è l'ottagono inscritto.

%%%%%%%%%

Peverone accenna poi alla costruzione del poligono regolare con 14 lati, il *tetradecagono*, ma si limita solo a un primitivo schema:



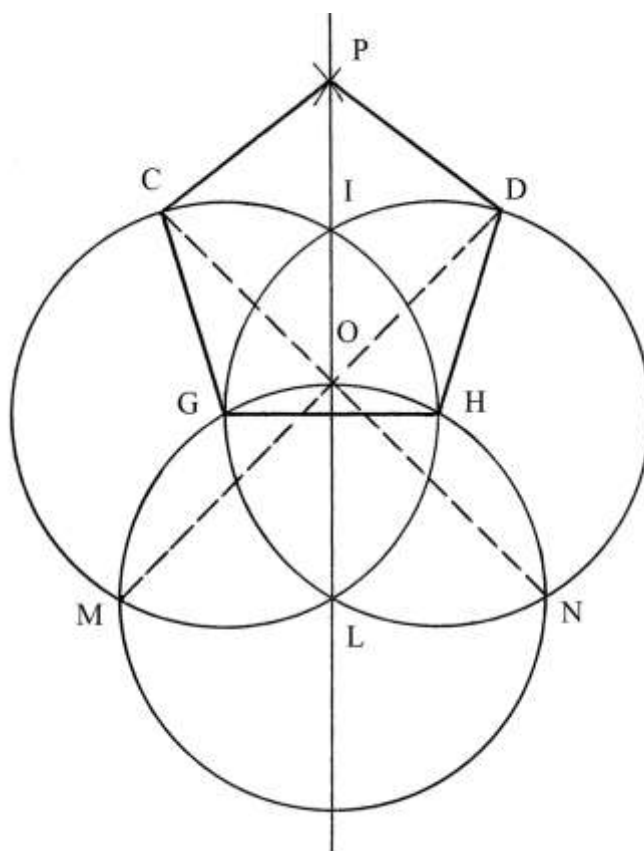
La figura che segue presenta una costruzione semplificata di questo poligono:



Essa è basata su quella dell'ottagono inscritto: dai vertici D, E, G, I, K, L e F di questo poligono disegnare sette diametri che incontrano la circonferenza negli altri sette vertici che insieme a quelli dello stesso ottagono costituiscono i 14 vertici del tetradecagono inscritto *approssimato*.

Costruzione del pentagono dato un lato. Regola 17.

Deve essere disegnato un pentagono a partire da un suo lato, GH:



La costruzione è *approssimata*; la descrizione che ne fa Peverone nel suo testo è molto sintetica: qui viene spiegata in maniera più dettagliata.

Con raggio GH fare centro in G e in H e disegnare due circonferenze che si intersecano nei punti I e L: per questi passa l'asse del segmento GH che, fra l'altro, fissa il punto O.

Con la stessa apertura GH fare centro in L e tracciare una terza circonferenza che incrocia le due precedenti nei punti M e N.

Da M e da N disegnare due diametri passanti per il punto O: sono MD e NC.

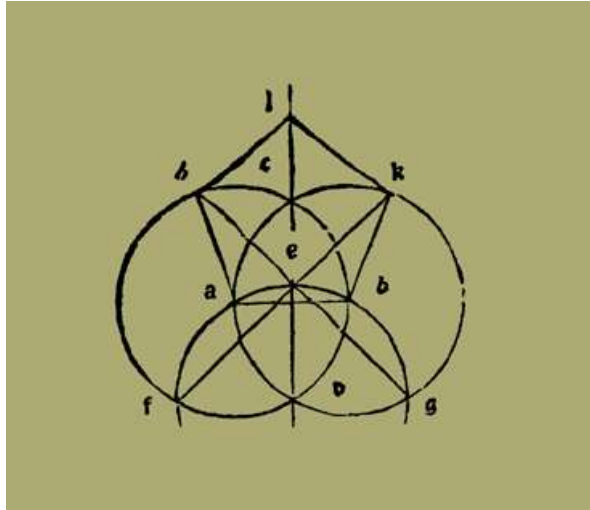
Con raggio GH fare centro in C e in D e tracciare due archi che si intersecano nel punto P posizionato sull'asse del lato GH.

GCPDH è il pentagono cercato.

La costruzione è stata ottenuta con un'unica apertura fissa del compasso.

----- APPROFONDIMENTO -----

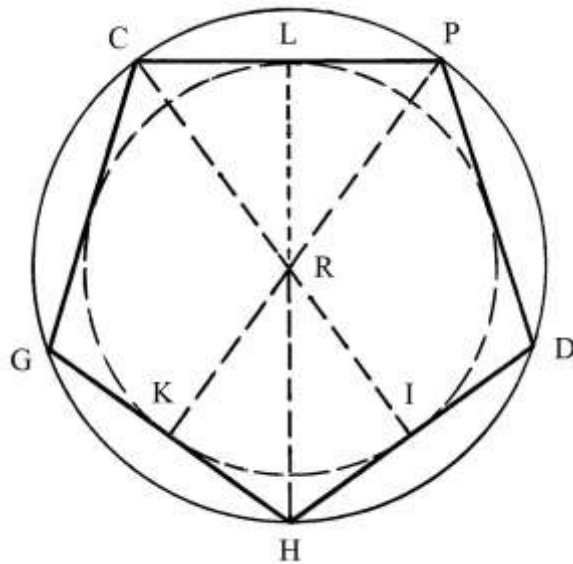
La costruzione del pentagono proposta da Peverone si deve a Albrecht Dürer (1471-1528) che, a sua volta, lo aveva ripreso da un piccolo trattato geometrico, scritto in tedesco dall'architetto Matthäus Roriczer (circa 1435-1495), costruttore di cattedrali, "*Geometria deutsch*", come mostra la figura che segue:



Nella costruzione di Roriczer e di Dürer è usata la regola del *raggio fisso*, perché tutti gli archi sono realizzati con un'unica apertura di compasso, uguale alla lunghezza del lato del pentagono da costruire.

Cerchio circoscritto a un pentagono dato. Regola 18.

PCGHD è un pentagono regolare e deve essere inscritto in un cerchio.



Occorre ricavare la posizione del centro R, punto equidistante da tutti i vertici del pentagono.

Dai vertici C, H e P tracciare le altezze relative ai lati opposti: sono CI, HL e PK. Esse si incontrano nel punto R che è il centro cercato.

I, K e L sono i punti medi rispettivamente dei lati HD, GH e CP.

Fare centro in R e con raggio $RH = RC = RP$ disegnare la circonferenza circoscritta.

RI, RK e RL sono tre *apotemi* e sono anche tre raggi del cerchio di centro R *inscritto* nel pentagono e disegnato con linea a tratti.

Divisione di un cerchio in dieci e quindici parti. Regola 19.

La Regola è descritta con soltanto *tre* righe di testo e non è accompagnata da alcuno schema, come dimostra la riproduzione che segue ripresa da p. 110 del testo di Peverone:

Il modo di partire il cerchio in dieci, e quindici parti.

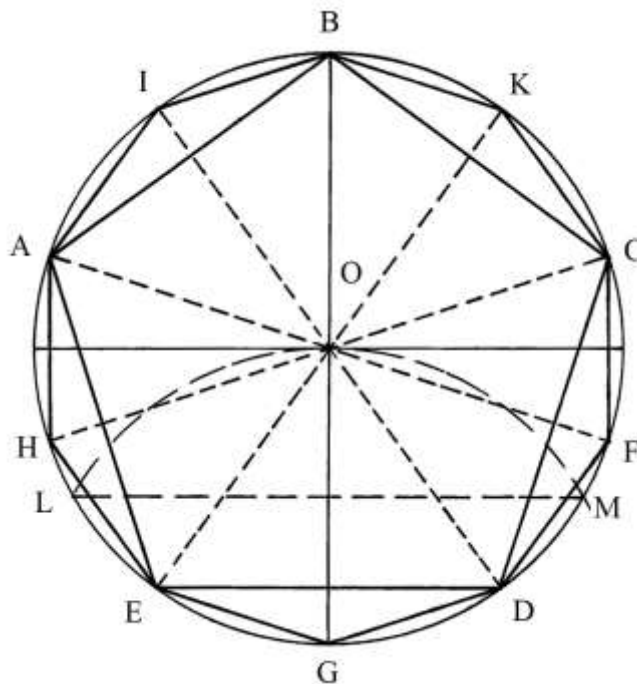
Regola 19.

Sara cosa facile partire il cerchio in dieci, se partirai vno de lati del pentagono in due. Et se lo partirai in tre, restara la circonferenza partita in'quindici lati.

Proponiamo alcune costruzioni del decagono regolare inscritto (poligono con 10 lati) e del pentadecagono regolare inscritto (poligono con 15 lati).

Peverone non offre alcun metodo di costruzione del pentagono regolare inscritto, quale ad esempio quello di Claudio Tolomeo (circa 100 – 168, Alessandria d’Egitto).

Lo schema che segue contiene il pentagono regolare inscritto ABCDE.

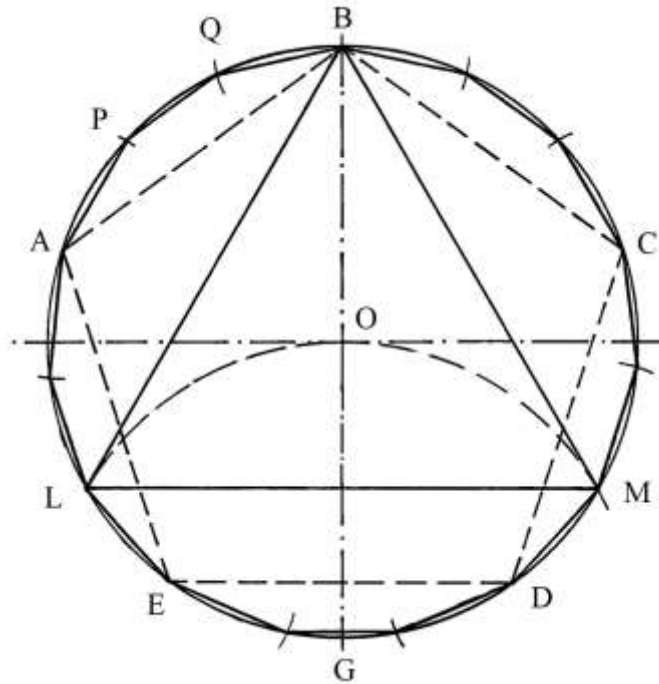


Tracciare cinque diametri uscenti dai vertici del pentagono: sono AF, BG, CH, DI e EK.

F, G, H, I e K sono i cinque vertici mancanti del pentagono regolare inscritto AIBKCFDGEH.

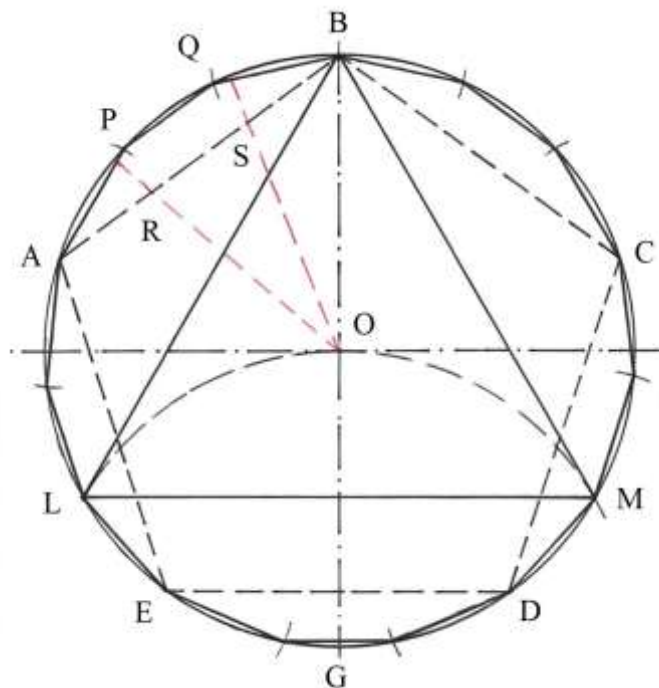
I diametri AF, BG, CH, DI e EK dividono in due parti uguali i lati del pentagono che tagliano e dividono pure in due parti uguali gli archi di circonferenza che i lati del pentagono sottendono.

Fare centro in G e con raggio GO disegnare l’arco LOM: la corda LM è un lato del triangolo equilatero inscritto LBM (non completato). L’arco LOM fissa due punti sulla circonferenza, L e M, utili per disegnare il pentadecagono inscritto.

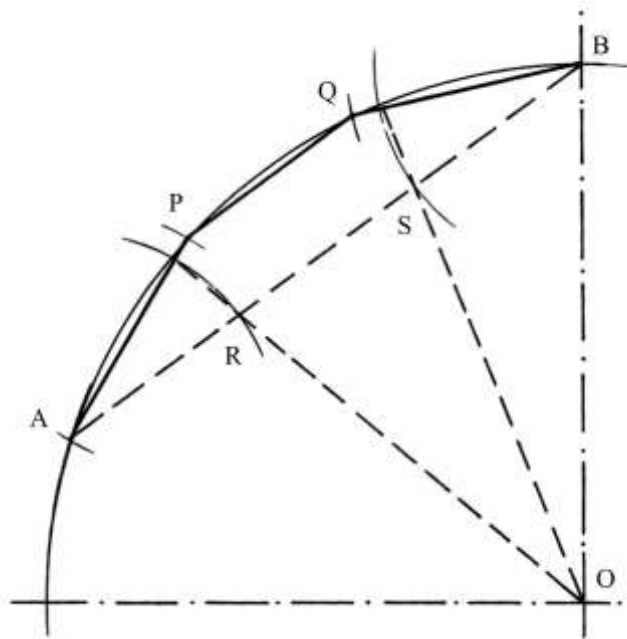


Le corde LE e MD sono due lati del pentadecagono regolare. Anche P e Q sono vertici di questo poligono.

Nello schema qui sotto, il lato AB del pentagono regolare è diviso in *tre* parti uguali:
 $AR = RS = SB$.



Tracciando i raggi uscenti da O e passanti per R e S non sono incrociati i vertici P e Q.
 Per chiarire ulteriormente la situazione, la figura che segue è un ingrandimento parziale del precedente schema:



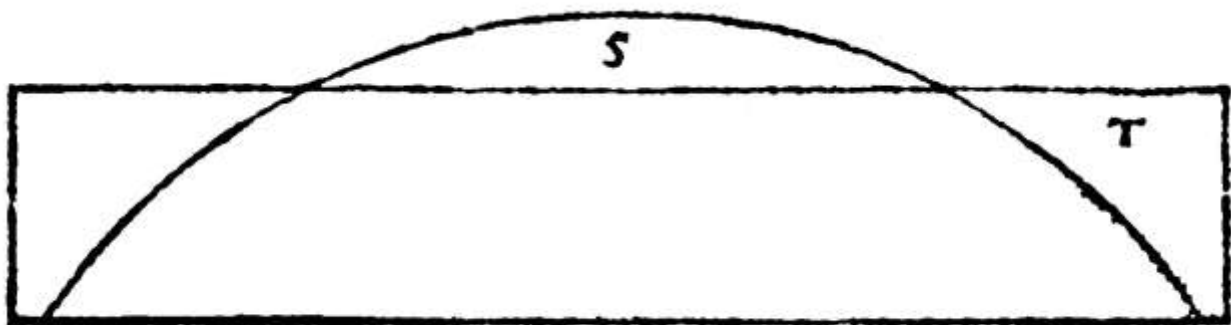
Neanche con l'impiego del compasso possiamo utilizzare le lunghezze di AR e di BS per costruire il pentadecagono regolare. La proposta di Peverone risulta erronea anche per la tracciatura di questo poligono.

Misurazioni delle volte. Regola 20.

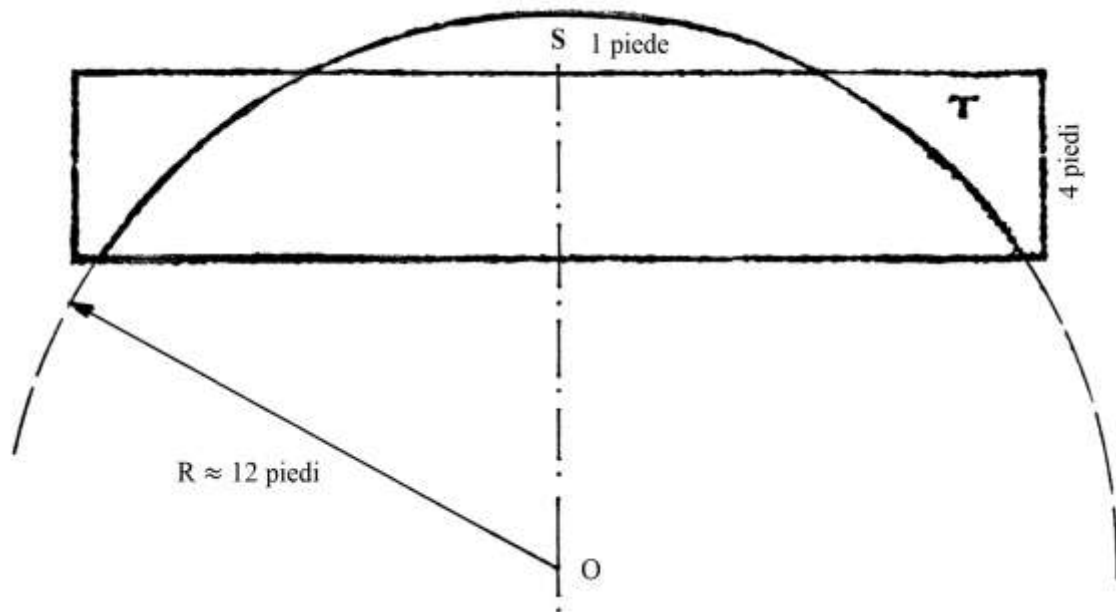
La descrizione del problema è assai oscura.

Lo schema che segue riproduce quello originale.

L'altezza della sezione T sembra misurare 4 piedi e la sezione S sarebbe 1 piede.



Il profilo curvo è certamente un arco di circonferenza, con centro in O e raggio $R \approx 12$ piedi.



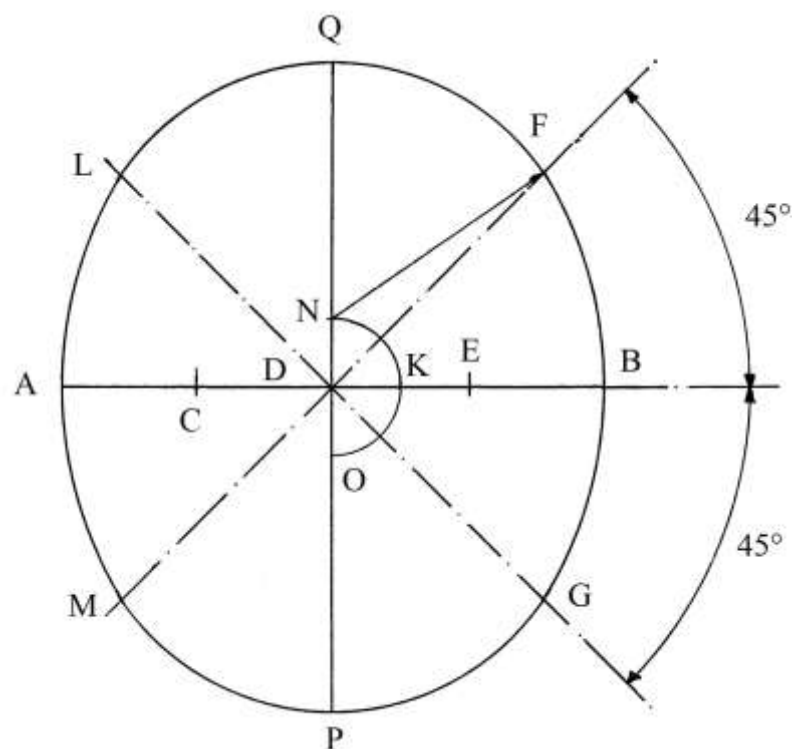
Tracciatura di un ovale. Regola 21.

Un ovale è una curva chiusa e di forma allungata che è simmetrica rispetto a due assi perpendicolari di differente lunghezza.

La curva è formata da archi di circonferenza fra loro raccordati.

La descrizione della curva è piuttosto sommaria e qui ne viene fornita un'interpretazione più dettagliata.

È dato l'asse minore AB, che è orizzontale.



Dividere AB in 4 parti uguali:

$$AC = CD = DE = EB.$$

A sua volta, DE è diviso in due parti uguali:

$$DK = KE = DE/2 = AB/8.$$

Costruire la retta perpendicolare a AB passante per il punto medio D.

Fare centro in D e con raggio DK disegnare la semicirconfenza che fissa i punti N e O.

Per il centro D disegnare due assi inclinati di 45° rispetto a AB.

Fare centro in C e poi in E e con raggio $CB = EA$ tracciare gli archi FG e LM.

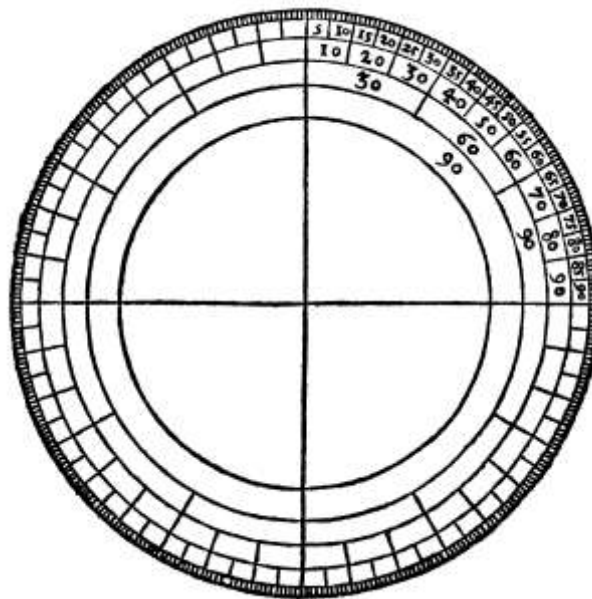
Poi fare centro in N e in O e con raggio $NF = OM$ disegnare gli archi LQF e MPG.

QP è l'asse maggiore dell'ovale.

Divisione di un cerchio secondo l'uso astronomico. Regola 22.

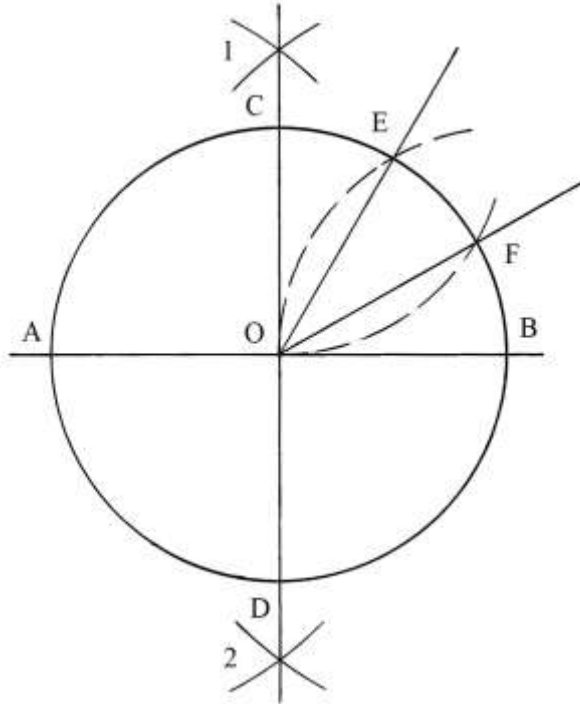
Un cerchio è prima diviso in *quattro* parti uguali. Poi uno dei quarti è ripartito in tre: ciascuna di esse sottende un angolo di 30° .

Le ulteriori divisioni si spingono fino al grado.



Nel testo non è fornita alcuna informazione sui metodi grafici occorrenti per compiere la suddivisione.

La divisione in quattro parti di un cerchio è elementare:



Con centro in A e B sono tracciati quattro archi che si incontrano nei punti 1 e 2: per questi passa l'asse del diametro AB. CD è il diametro verticale che contribuisce a dividere il cerchio e la circonferenza in *quattro* parti uguali.

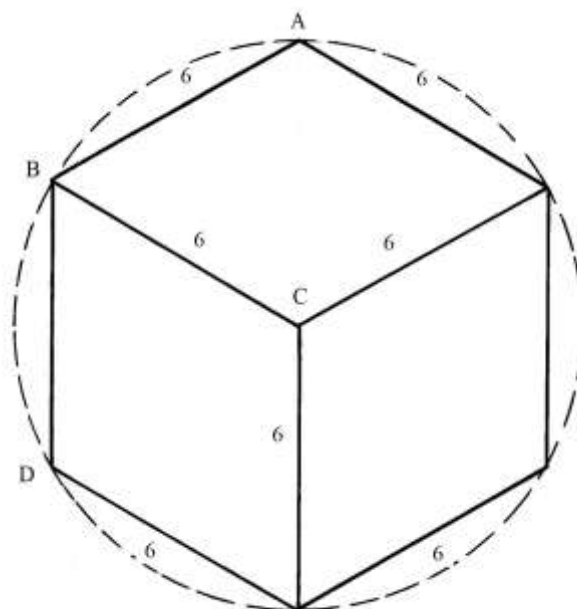
Con raggio OB, fare centro in B e in C e disegnare due archi a partire da O: essi tagliano la circonferenza nei punti E e F. L'arco AB è diviso in *tre* parti uguali che sottendono angoli di 30° .

Non sono date ulteriori informazioni per la divisione di un angolo di 30° in tre angoli uguali (di ampiezza 10°) né è chiarito come procedere alle successive ripartizioni in angoli di ampiezza 1° .

LIBRO TERZO DI GEOMETRIA

La misura dei corpi solidi

Un cubo ha spigoli lunghi 6 piedi.

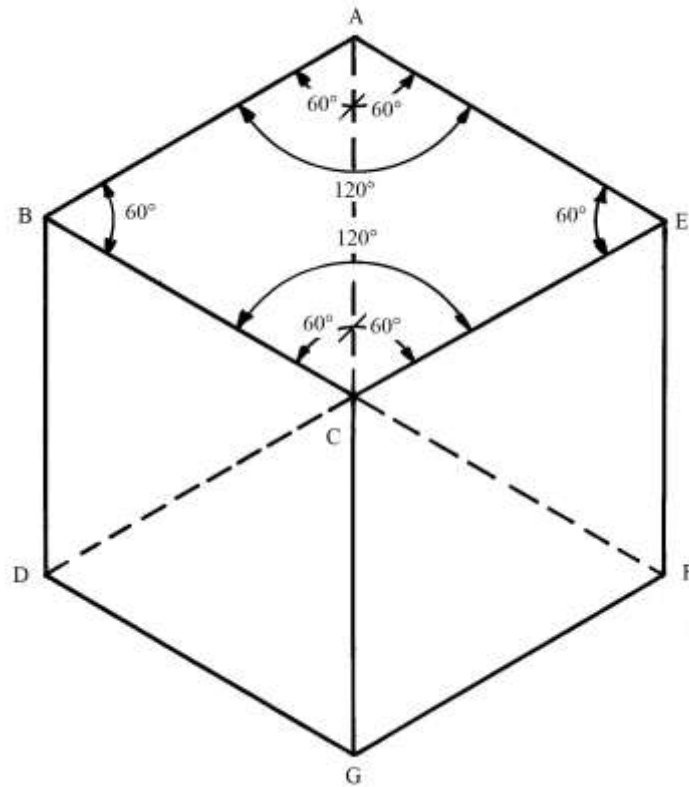


Il suo volume V è:

$$V = 6 * 6 * 6 = 216 \text{ piedi cubici.}$$

Il cubo è disegnato nello schema originale in assonometria isometrica vista dall'alto.

I vertici esterni del solido giacciono su di un cerchio di centro C e raggio lungo quanto la proiezione dello spigolo del cubo sul piano del disegno: le tre facce quadrate sono deformate in rombi formati da due triangoli equilateri con lati lunghi quanto gli spigoli:

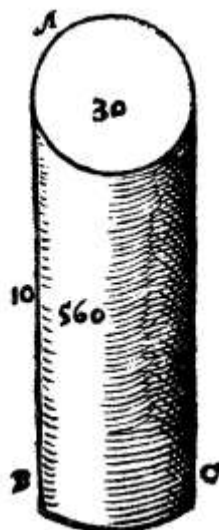


Alla fine dello stesso paragrafo, Peverone accenna a un'unità di misura: “brazza del fieno”, che equivaleva alla lunghezza di 6 piedi.

Probabilmente *brazza* sta per *braccio*, unità di misura che non sembra fosse usata a Cuneo: forse Peverone si riferiva a un “braccio” usato in altre località dell'Italia settentrionale (ad esempio Milano).

Volume di una colonna

Una colonna ha la forma di un cilindro retto:



I dati che Peverone fornisce sono:

- * circonferenza delle due basi: 20 braccia;
- * area di una base: 30 braccia [quadre];
- * altezza del cilindro: 10 braccia.

Le cifre fornite dall'Autore riguardo alle dimensioni delle due basi sono poco precise.

Se la circonferenza c di una base è lunga 20, il diametro d è dato da:

$$d = c/\pi = 20/(22/7) = 20 * 7/22 = 70/11 [\approx 6,(36)].$$

L'area S di una base circolare è data da:

$$S = c/2 * d/2 = 20/2 * (70/11)/2 = 10 * 35/11 = 250/11 = 31,(81) \text{ braccia quadre e non } 30 \text{ braccia quadre.}$$

Nota: 6,(36) e 31,(81) sono due numeri *periodici*: le parentesi stanno a indicarlo.

La superficie laterale SL del cilindro è:

$$SL = c * \text{altezza} = 20 * 10 = 200 \text{ braccia quadre.}$$

La superficie totale è data da:

$$S_{\text{TOTALE}} = 2 * S + SL \approx 2 * 31,81 + 200 \approx 263,62 \text{ braccia quadre.}$$

Peverone calcola la superficie totale come segue:

$$S = 2 * \text{area base} + \text{area superficie laterale} = 2 * 30 + 20 * 10 = 260 \text{ braccia quadre.}$$

Il volume V del cilindro è:

$$V = S * \text{altezza} \approx 31,81 * 10 \approx 318,1 \text{ braccia cubiche, } \textit{braccia "sode"} \text{ per Peverone.}$$

La figura che segue è una parziale riproduzione del testo contenuto a p. 114 del trattato di Peverone. Alla fine egli calcola il volume in 560 *braccia sode*, sommando la superficie totale (260 braccia quadre) con il volume dato da:

$$V = \text{area base} * \text{altezza} = 30 * 10 = 300 \text{ braccia cubiche.}$$

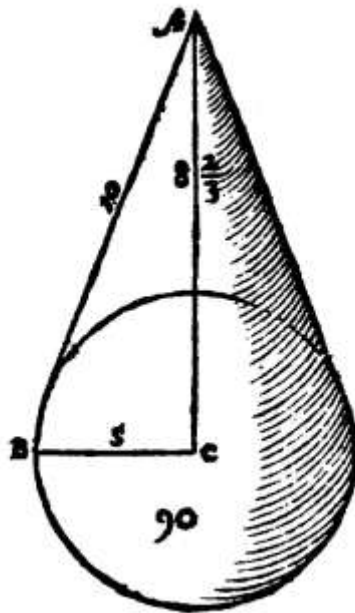
La *crassezza* [volume?] di tutta la colonna sarebbe:

$$260 + 30 * 10 = 260 + 300 = 560 \text{ braccia sode.}$$

Quando volesti poi fa-
per la sua crassezza, moltiplica l'area de la base ne l'altezza de
la colonna, e fara fatto l'intento tuo: come in esempio, Sia la
colonna ABC , le cui base, ò fазze siano circolari, e vguali. sup-
puta adunque prima l'area de le base, secondo la regola da-
ta de le figure circolare, le quali per hora presuppongo sia
brazza 30 per ogniuna, e sua circonferenza 20 brazza, e
l'altezza de la colonna 10 brazza: moltiplica adunque 20
per 10 fa 200, à le quale aggiungeui l'area de le basi, cio è
30, e 30 fara 260, e tante brazza quadrate fara la sua super-
ficie: e se moltiplicarai 30 per le istesse 10 brazza hauerai la
crassezza di tutta la colonna, cio è di brazza 560 sode.

Volume di un cono

Un cono ha la base circolare con diametro d lungo 10 piedi.
L'apotema è lungo 10 piedi:



Non è fornita l'altezza AC che deve essere calcolata:

$$AC^2 = AB^2 - BC^2 = 10^2 - (10/2)^2 = 100 - 25 = 75 \quad e$$

$$AC = \sqrt{75} \approx (8 + 2/3) \text{ piedi.}$$

L'area S del cerchio di base è:

$$S = 11/14 * d^2 = 11/14 * 10^2 = (78 + 4/7) \text{ piedi quadri.}$$

Peverone fornisce per l'area un valore errato per eccesso: 90 piedi quadri.

Il volume V del cono è:

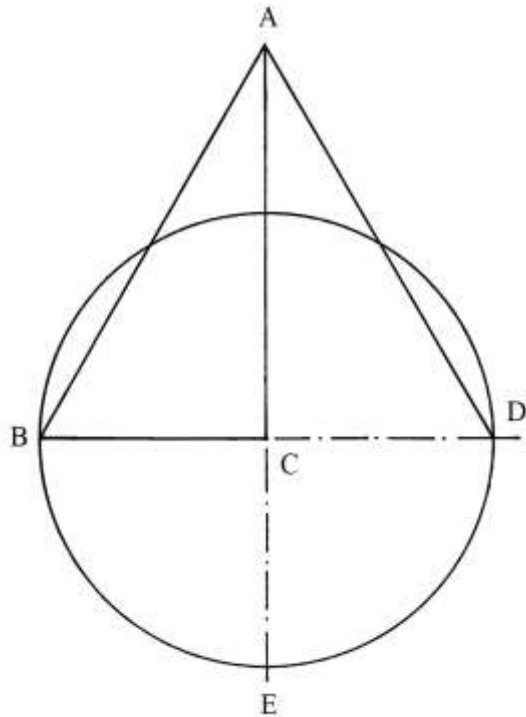
$$V = S * AC/3 = (78 + 4/7) * (8 + 2/3)/3 \approx 226,98 \text{ piedi cubici.}$$

Peverone calcola per il volume un valore errato per eccesso: 260 piedi cubici; ciò è dovuto all'erroneo uso della superficie della base: 90 invece di $(78 + \frac{4}{7})$ piedi quadri.

----- APPROFONDIMENTO -----

Lo schema originale è disegnato fuori scala.

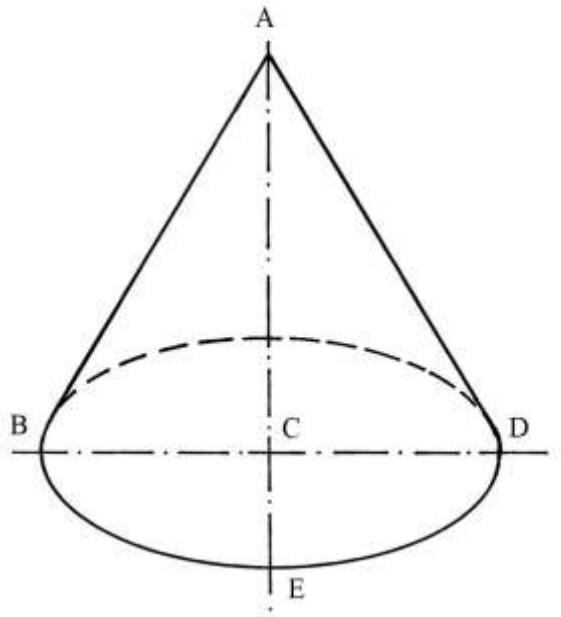
La figura che segue riproduce il cono con le dimensioni reali:



ABD è un triangolo equilatero perché i suoi lati AB e AD, che sono due apotemi del cono, hanno lunghezza uguale a quella del diametro della base, BD: 10 piedi.

Lo schema qui sopra ha il profilo triangolare in proiezione frontale e il cerchio della base in proiezione orizzontale.

La figura che segue rappresenta in assonometria il cono e il cerchio della base è correttamente deformato in un'ellisse.



Peverone definisce gli apotemi AB e AD “*linea hipothumisale*”, termine con chiara derivazione da *ipotenusa*.

Volume di una piramide a base quadrata

Una piramide retta ha base quadrata con lati lunghi 6 piedi e gli spigoli laterali 10 piedi.

L'altezza DF è un cateto del triangolo rettangolo DFE.

FE è una semidiagonale del quadrato di base e la sua lunghezza è data da:

$$FE^2 = EC^2/2 = 6^2/2 = 36/2 = 18 \quad e$$

$$FE = \sqrt{18} \text{ piedi.}$$

L'altezza DF è lunga:

$$DF^2 = DE^2 - FE^2 = 10^2 - (\sqrt{18})^2 = 100 - 18 = 82 \quad e$$

$$DF = \sqrt{82} = (9 + 1/18) \text{ piedi.}$$

Peverone calcola $(9 + 1/9)$ piedi invece di $(9 + 1/18)$.

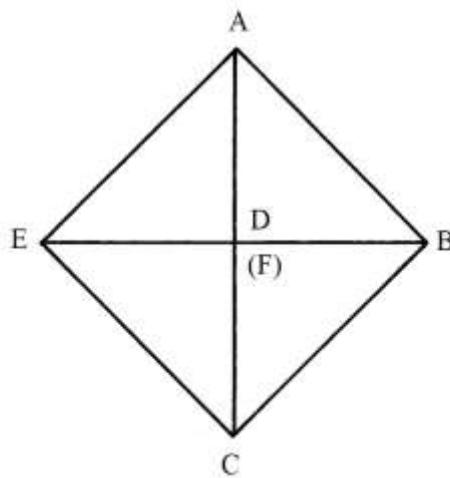
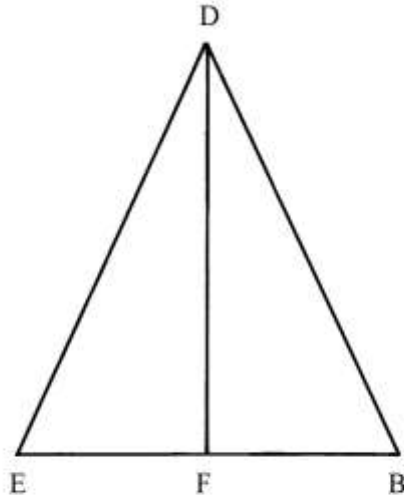
L'area S della base è:

$$S_{\text{BASE}} = EC^2 = 6^2 = 36 \text{ piedi quadri.}$$

Il volume V della piramide è dato da:

$$V = S_{\text{BASE}} * DF/3 = 36 * (9 + 1/18)/3 = (108 + 2/3) \text{ piedi cubici.}$$

Peverone fornisce per il volume un valore leggermente errato: $(109 + 1/3)$ piedi cubici.



Superficie e volume di una sfera

Una sfera ha diametro $AB = d$ lungo 14 piedi e la sua circonferenza massima, c , è 44 piedi. La lunghezza della circonferenza massima c è data da:

$$c = d * \frac{22}{7} = 14 * \frac{22}{7} = 44 \text{ piedi.}$$

L'area S del cerchio massimo è:

$$S = \frac{c}{2} * \frac{d}{2} = \frac{44}{2} * \frac{14}{2} = 22 * 7 = 154 \text{ piedi quadri.}$$

La superficie laterale SL della sfera è *quattro* volte quella del cerchio massimo:

$$SL = 4 * S = 4 * 154 = 616 \text{ piedi quadri.}$$

Peverone calcola, correttamente, in altro modo la superficie SL :

$$SL = c * d = 44 * 14 = 616 \text{ piedi quadri.}$$

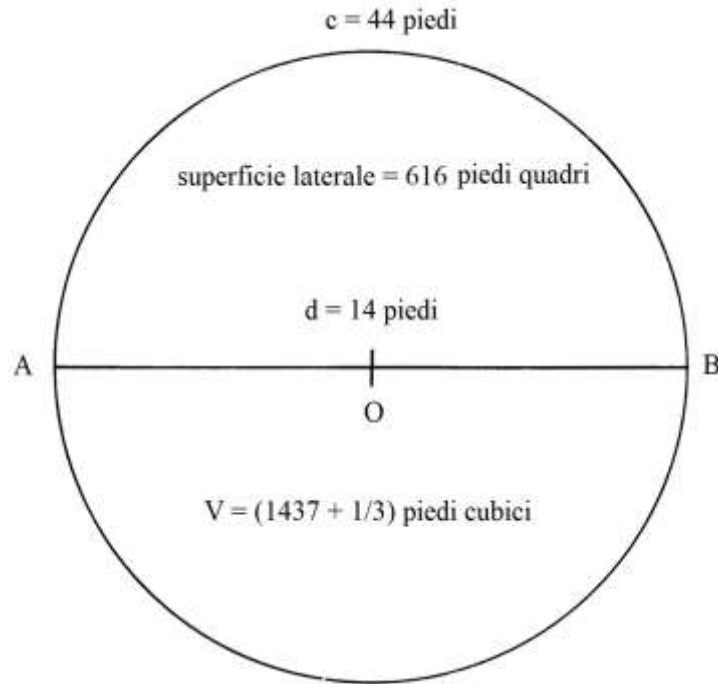
L'Autore ricava il volume V con la seguente formula:

$$V = (SL) * \frac{d}{6} = 616 * \frac{14}{6} = (1437 + \frac{1}{3}) \text{ piedi cubici.}$$

Oggi, il volume V di una sfera è calcolato con la seguente formula:

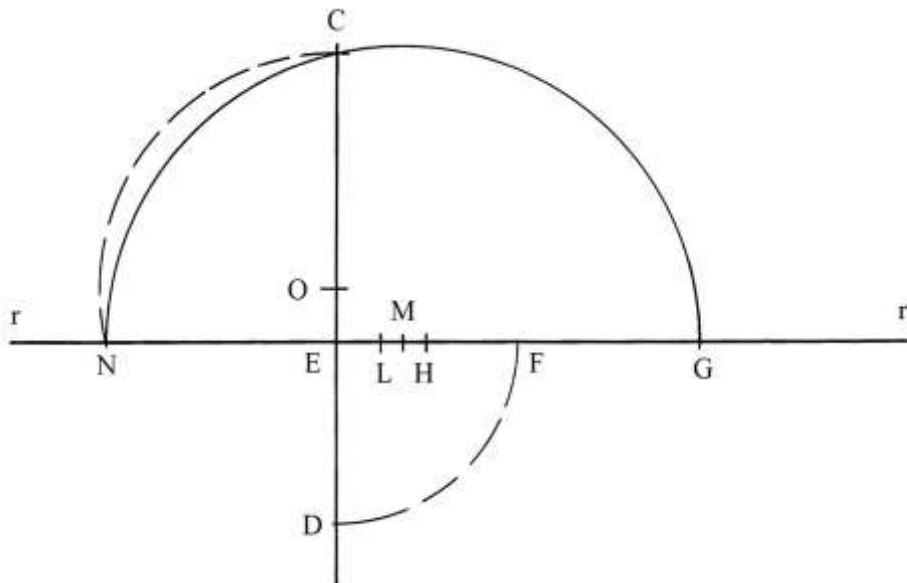
$$V = \frac{4}{3} * \pi * r^3, \text{ con } r \text{ della sfera e in questo caso } r = \frac{14}{2} = 7;$$

$$V = \frac{4}{3} * \frac{22}{7} * 7^3 = (1437 + \frac{1}{3}) \text{ piedi cubici.}$$



Metodo grafico per duplicare una sfera

Per duplicare una sfera, ad esempio una palla per artiglieria, è proposto un metodo grafico.



Tracciare la retta orizzontale r . Fissare il punto E per il quale tracciare una retta perpendicolare alla r .

Da E riportare in F la lunghezza del raggio della sfera che deve raddoppiata.

Coil compasso fare centro in E e con raggio EF tracciare l'arco FD e, sempre con raggio EF, fare centro in F e fissare sulla retta r il punto G.

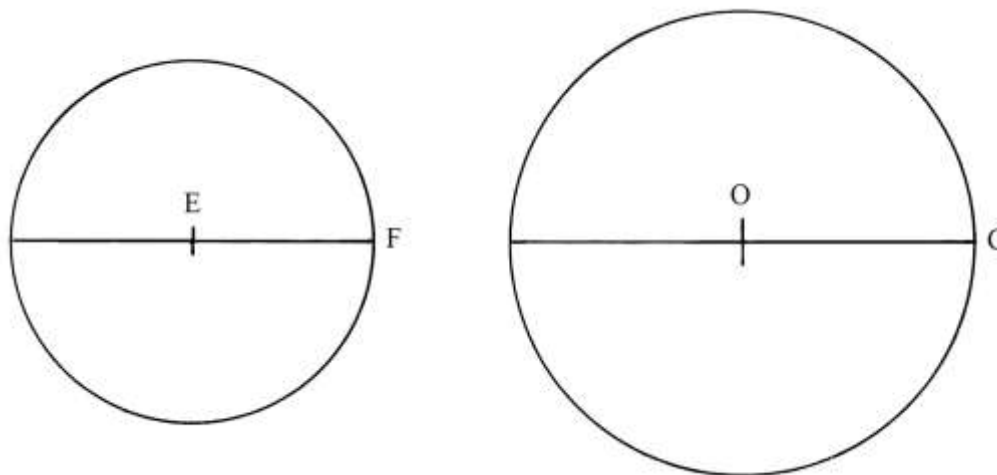
Stabilire il punto medio di EF: è H.

L è il punto medio di EH e, infine, M è il punto medio del segmento LH.

Fare centro in M e con raggio MG tracciare una semicirconferenza da G a N: essa taglia nel punto C la perpendicolare passante per E.

Fissare il punto medio di CD: è O. Fare centro in O e con raggio $OC = OD$ disegnare l'arco da C a N.

I segmenti OC, OD e ON hanno uguale lunghezza e sono il raggio della sfera di volume doppio di quella di raggio EF:



Uno spicchio di un pallone

Forse, l'Autore si riferisce a un pallone – *balon* in piemontese e in ligure – usato in uno sport di squadra e giocato su terreno piano e con un lato di rimbalzo costituito da un muro o da una rete.

Il gioco è stato creato in Italia, almeno prima del 1555, anno di pubblicazione del volume “*Trattato del giuoco della palla*”, scritto da Antonio Scaino e pubblicato a Venezia presso De’ Ferrari.

Oggi è conosciuto come *pallapugno* o *pallone elastico*.

La costruzione proposta da Peverone serve a disegnare un triangolo sferico delimitato da tre archi di circonferenza di uguali dimensioni: esso copre una superficie uguale all’*ottava* parte del pallone.

ABC è un triangolo equilatero; il lato AB è diviso in tre parti uguali:

$$AD = DE = EB.$$

Fissare i punti medi dei tre lati: sono G, I e K.

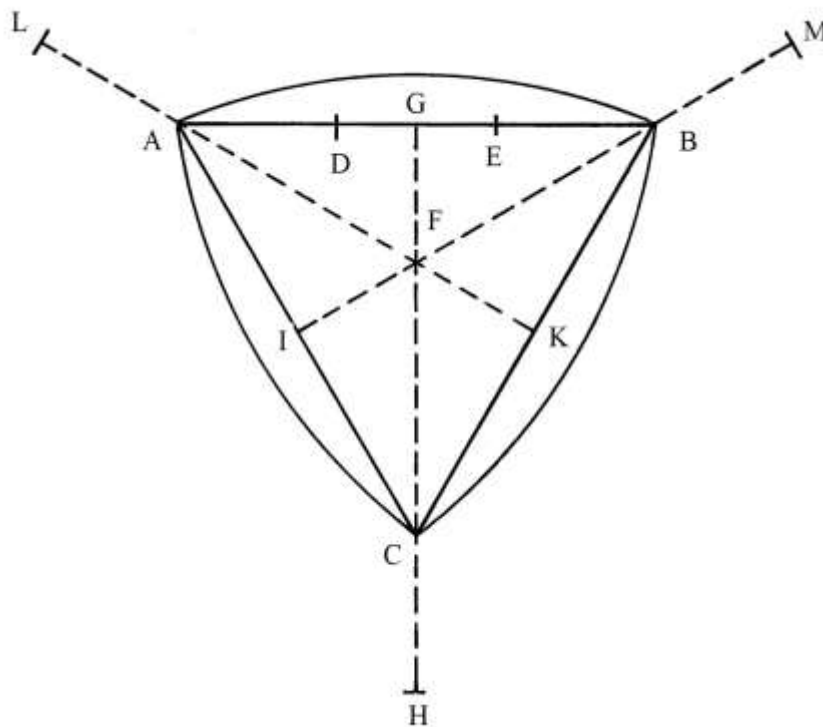
Disegnare le tre mediane del triangolo (che sono anche altezze, bisettrici e assi dei lati): sono AK, BI, CG. Esse si incontrano in F, baricentro, ortocentro, incentro e circocentro del triangolo equilatero ABC.

Le tre mediane sono prolungate oltre i vertici dai quali si dipartono.

Sui loro prolungamenti, a partire dai vertici A, B e C riportare la lunghezza di AD: sono stabiliti i punti L, M e H.

Fare centro in H, L e M e con raggio

$HA = LB = MC$ disegnare gli archi di circonferenza AB, BC e AC: essi delimitano la figura che forma uno degli otto elementi del pallone.



Botti da vino e misure antiche e moderne

Le antiche unità di misura, in particolare quelle di Roma, sono ricordate dall'Autore che cita i lavori di due giuristi: l'italiano Andre Alciati (1492-1550) e il francese Guillaume Budé (1468-1540).

Poi, Peverone descrive le unità di misura del volume del vino usate a Cuneo all'epoca nella quale ha scritto il suo trattato.

- * 1 staro [*voce dialettale per staio*] = 10 rubi;
 - * 1 staro = 2 mine;
 - * 1 mina = 2 quartari o brochi;
 - * 1 quartaro = 18 pinte;
- Riassumendo, si ha:
1 staro = 2 mine = 4 quartari = 72 pinte.

A causa della assai limitata documentazione esistente, è assai difficile riuscire a fornire un'equivalenza con le unità di misura dei volumi usate dall'attuale sistema SI.

La misura del vino contenuto nelle botti era effettuata con l'aiuto di apposite aste graduate di legno a forma di prisma quadrato.

Una sottile verga di ferro di forma cilindrica, lunga 7 piedi, era usata per ricavare l'altezza del vino e quella dello *scemo*, semplicemente introducendola verticalmente nella botte attraverso il foro noto come cocchiere.

La verga era poi messa a confronto con l'asta di legno per ricavare il volume espresso in *stari* [staia].

L'Autore suggerisce l'impiego di un *sesto*, un compasso, per misurare l'altezza dello scemo, ma non fornisce alcuna indicazione sulle modalità da seguire per il suo impiego.

Nel trattato, Peverone presenta diversi schemi con aste graduate e una tabella per facilitare la conversione da lunghezze misurate all'intero delle botti e il volume del vino.

Misura di un cumulo di grano

Una serie di problemi è dedicata alla misura di *monti* di grano, che Peverone chiama *cumuli*.

Questi problemi sono descritti con limitata precisione, al contrario di quanto avviene in due testi di poco posteriori a quello di Peverone: “*Le pratiche delle due prime matematiche*” del senese Pietro Cataneo (c. 1510-1573) e la “*Pratica d’Arithmetica e Geometria*” del francescano pesciatino Lorenzo Forestani (1585-1623).

Nel caso più semplice, con un cumulo circolare, che è a forma di cono, Peverone non lo scrive e non presenta alcuno schema.

Gli schemi che seguono sono realizzati in proiezioni ortogonali rispettando le dimensioni scritte nel trattato: essi sono stati ottenuti seguendo le considerazioni contenute nei lavori di Cataneo e di Forestani.

Peverone propone di misurare il volume del cumulo di grano con una bacchetta di legno a sezione quadrata, lunga almeno *6 piedi*: stando ai dati contenuti nelle “Tavole di Ragguaglio dei Pesi e delle Misure Già in Uso Nelle Varie Provincie del Regno Col. Peso Metrico Decimale Approvate con Decreto Reale 20 Maggio 1877, N. 3836”, citate in bibliografia, prima del 1818 a Cuneo il piede (*liprando*) era lungo l’equivalente di 0,513766 metri.

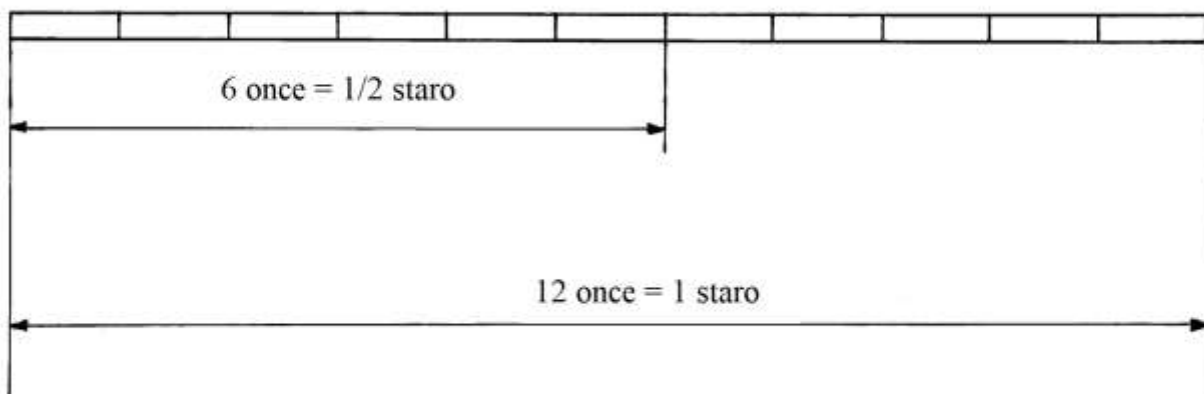
La bacchetta di legno avrebbe avuto un lunghezza L di:

$$L = 6 \text{ piedi} = 6 * 0,513766 = 3,082596 \text{ metri.}$$

Peverone suggerisce di dividere la bacchetta in parti uguali, distanziate da intervalli lunghi 6 once: sempre secondo le “Tavole di Ragguaglio” appena ricordate, 1 piede valeva 12 once e 1 oncia equivaleva a:

$$1 \text{ oncia} = 1 \text{ piede}/12 = 0,513766/12 = 0,042814 \text{ m} = 4,2814 \text{ cm.}$$

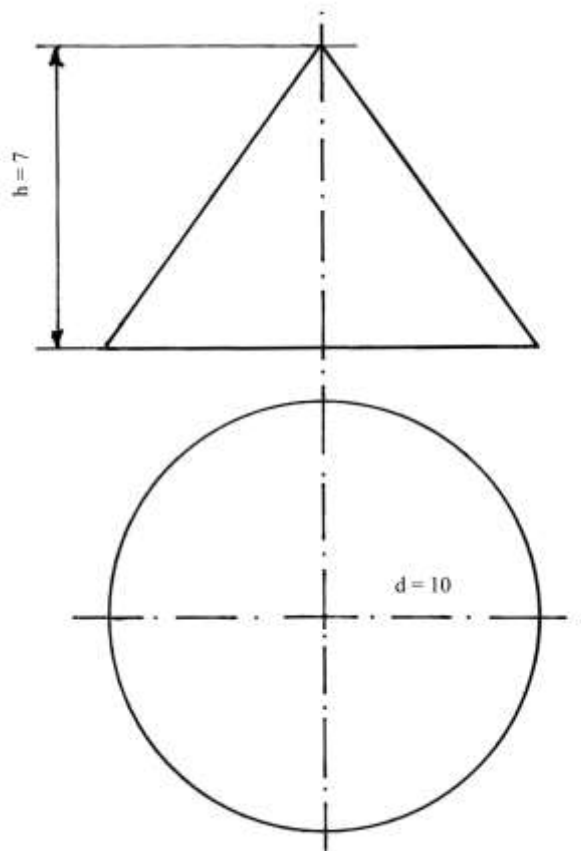
Una seconda bacchetta lunga 1 piede e divisa in 12 parti serviva a convertire direttamente da dimensioni misurate in once a *staia* [*stari* in piemontese]: questo è l’unico schema che Peverone propone e che di seguito è stato rielaborato:



Un intervallo lungo 6 onces sarebbe stato corrispondente al volume di mezzo *stario*: 12 onces o 1 piede avrebbero misurato 1 stario.

L’Autore fa l’esempio di un cumulo *conico*, anche se non definisce e non mostra alcuno schema: i calcoli che effettua confermano questa ipotesi.

Il diametro del cumulo è: $d = 10$.
 L'altezza h del cono è 7.



La base ha area S che è data da:

$$S = \frac{11}{14} * d^2 = \frac{11}{14} * 10^2 = (78 + \frac{4}{7}).$$

Il volume V del grano è:

$$V = S * \frac{h}{3} = (78 + \frac{4}{7}) * \frac{7}{3} = (183 + \frac{1}{3}) \text{ staia.}$$

%%

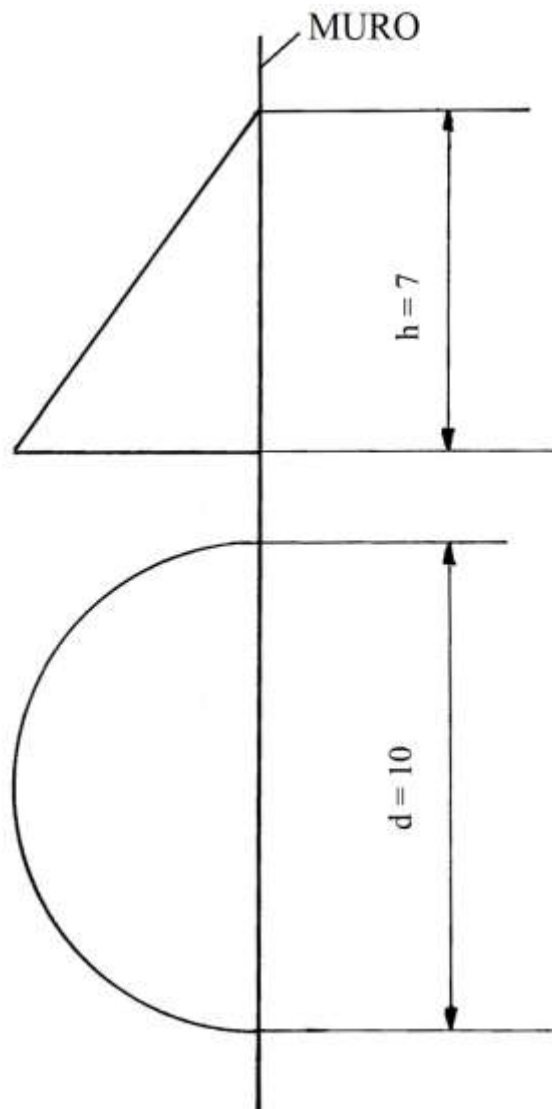
Se il cumulo di grano fosse addossato a una parete verticale, la forma che assumerebbe è quella di un semicono retto.

L'area S della base è metà di quella del cerchio intero:

$$S = (\frac{78 + 4/7}{2}) * 2 = (39 + \frac{2}{7}).$$

Il volume V è:

$$V = S * \frac{h}{3} = (39 + \frac{2}{7}) * \frac{7}{3} = (91 + \frac{2}{3}) \text{ staia.}$$



%%

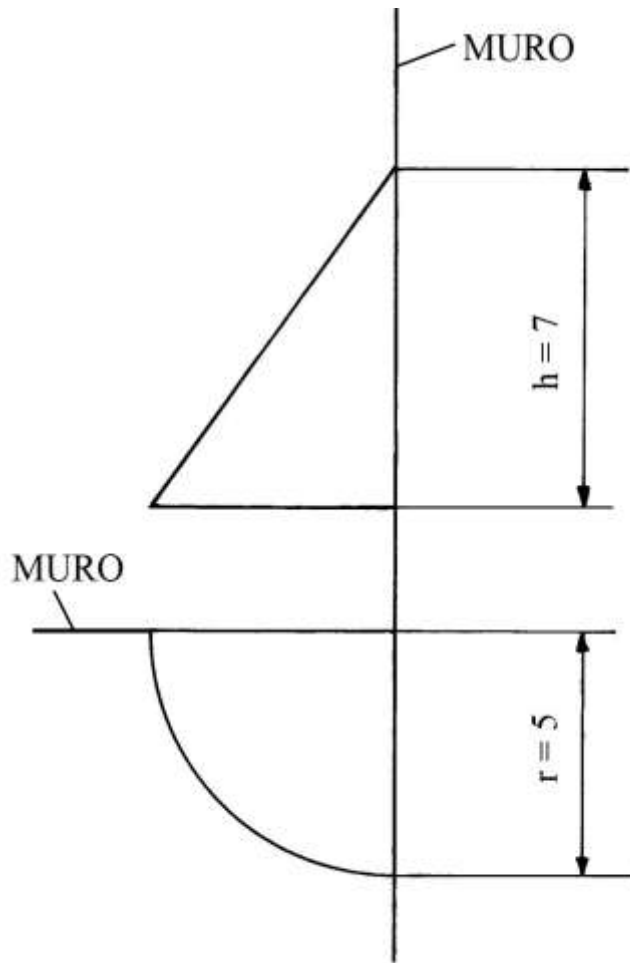
Infine, nel caso che il cumulo di grano sia poggiato nel canto di due muri formanti un angolo retto, la forma e il volume cambiano: il cumulo ha la forma di un *quarto di cono*.

La base è un quarto di cerchio e la sua area S è:

$$S = \pi * r^2/4 = 22/7 * 5^2/4 = 22 * 25/28 = (19 + 9/14).$$

Il volume V è:

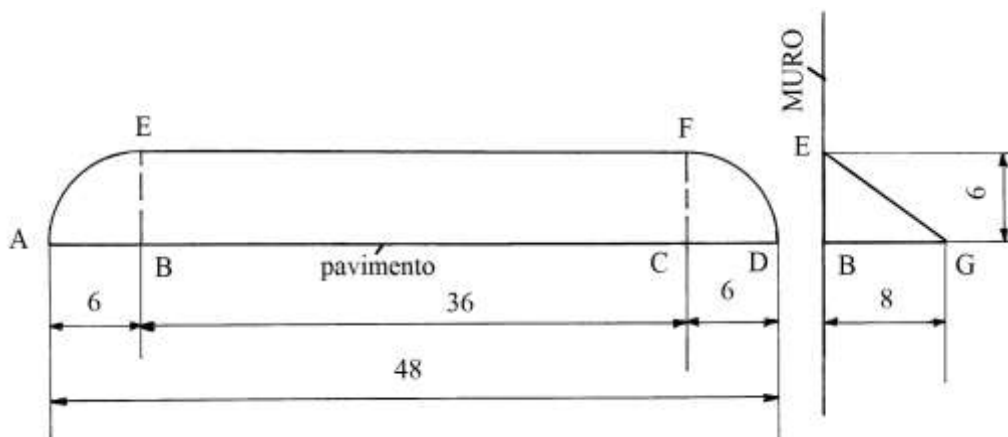
$$V = S * h/3 = (19 + 9/14) * 7/3 = (45 + 5/6) \text{ staia.}$$



%%

Un cumulo di grano è appoggiato a un solo muro e alle estremità sono formati due quarti di cumulo circolare.

Lo schema che segue è rielaborato sulla base della scarsa figura originale e delle informazioni ricavate dal testo:



A sinistra vi è una vista frontale e a destra il triangolo EBG rappresenta la sezione del corpo prismatico contenente grano.

EBFC è un prisma a base triangolare lungo 36; il triangolo rettangolo EBG ha cateti lunghi:

- * l'altezza EB è 6;
 - * la profondità del cumulo è 8.
- Peverone *non calcola* il volume dei due quarti circolari AEB e DFC, ma si limita al solo corpo prismatico.

L'area di EBG è:

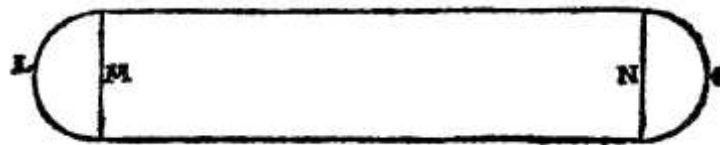
$$S_{EBG} = EB * BG/2 = 6 * 8/2 = 24.$$

Il volume del prisma EBCF è:

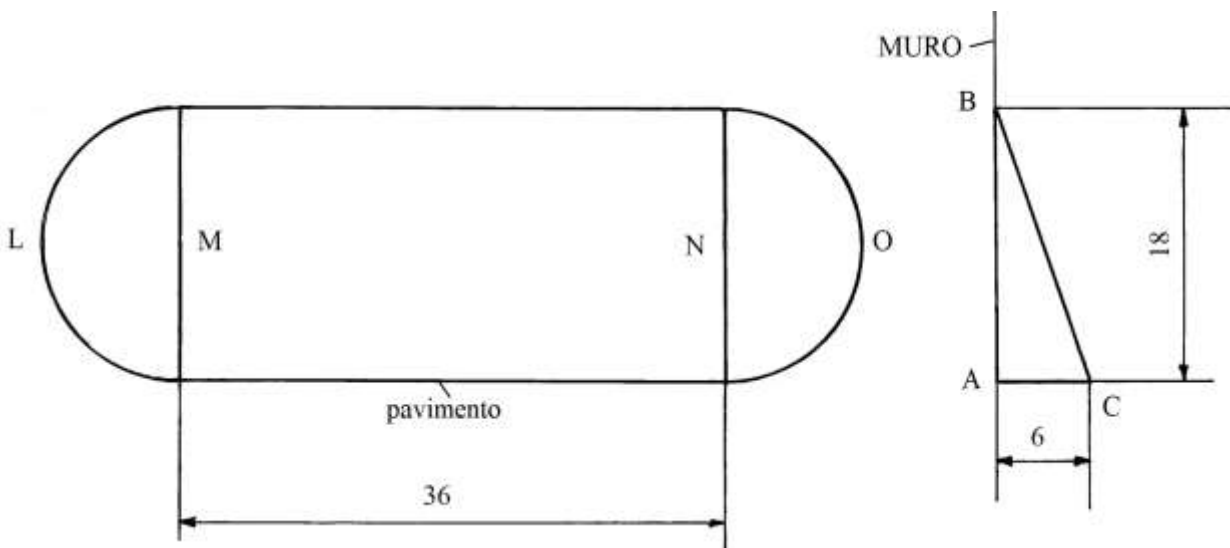
$$V_{EBCF} = S_{EBG} * BC = 24 * 36 = 864 \text{ staia di grano.}$$

%%

Un secondo esempio di cumulo poggiato a un solo muro è presentato nello schema originale che segue:



Nel testo è calcolato il volume del solo solido a base triangolare che va da M a N, escludendo le due estremità circolari.



A destra è disegnato il profilo del cumulo che è alto 18 e alla base largo 6.

L'area del triangolo ABC è:

$$S_{ABC} = AB * BC/2 = 18 * 6/2 = 54.$$

Il volume V del prisma è:

$$V = S_{ABC} * MN = 54 * 36 = 1944 \text{ staia di grano.}$$

Bibliografia

1. Cataneo Pietro, “Le pratiche delle due prime matematiche”, Venezia, Giuseppe Griffio, 1567, pp. 88.
2. “L’architettura di Pietro Cataneo Senese”, Venezia, Eredi di Aldo Manuzio, 1567, pp. 217.
3. Forestani Lorenzo, “Pratica d’Arithmetica e Geometria”, Siena, Stamperia del Pubblico, 1682, pp. 574.
4. Høyrup Jens, “Linee larghe. Un’ambiguità geometrica dimenticata”, “Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche”, XV, 1995, n. 1, pp. 3-14.
5. Martini Angelo, “Manuale Di Metrologia: Ossia, Misure, Pesi e Monete in Uso Attualmente E Anticamente Presso Tutti I Popoli”, Torino, Ermanno Loescher, 1883, pp. VIII+904.
6. Ministero di Agricoltura, “Tavole di Raggiungimento dei Pesi e delle Misure Già in Uso Nelle Varie Provincie del Regno Col. Peso Metrico Decimale Approvate con Decreto Reale 20 Maggio 1877, N. 3836”, Roma, Stamperia Reale, 1877, pp. 767.
7. Peverone Gio.(van) Francesco, “Arithmetica e Geometria”, Lione, Gio. di Tornes, 1558 e 1581, pp. 134.
8. Pomodoro Giovanni, “Geometria pratica tratta dagli Elementi di Euclide et altri auctori da Giovanni Pomodoro venetiano mathematico eccellentissimo descritta et dichiarata da Giovanni Scala mathematico. ...”, Roma, Stefano Paolini, 1599, pp. 117.
9. Zupko Ronald Edward, “Italian Weights and measures from the Middle Ages to the Nineteenth Century”, Philadelphia, American Philosophical Society, 1981, pp. lxxxiv+339.