Parole chiave: aree figure piane; triangolo equilatero; triangolo isoscele; triangolo 13-14-15; formula di Erone per l'area dei triangoli; trapezi; cerchio; teorema delle corde; cubo; prisma; cilindro; cono; tronco di cono; sfera; unità di misura senesi; misura delle botti

L'OPERA DI GIOVANNI SFORTUNATI

Giovanni Sfortunati nacque a Siena probabilmente nel 1485 e nella prima fase della vita fu insegnante di abaco alle dipendenze del Comune di Siena. Poi si spostò in altre città italiane (in particolare a Ferrara) e in Sicilia sempre per insegnare l'abaco.

Il suo cognome potrebbe significare che appena nato era stato abbandonato in un Ospedale senese. A questo proposito, Raffaella Franci e Laura Toti Rigatelli, in uno studio pubblicato nel 1981 e citato in Bibliografia) fanno a p. 4 la seguente affermazione:

"…Non si sono trovati, presso l'Archivio di Stato di Siena, documenti nei quali lo Sfortunati sia citato. Nell'elenco dei battezzati dal 1470 al 1499 non compare alcun Giovanni Sfortunati o Giovanni figlio di Fortunato. Risulta però da tale elenco che un certo «*Giovanni Fortunato, figlio dello spedale, fu condotto a battesimo a di* 12 *aprile* 1485» ed ebbe a comari due donne dai nomi Lucia e Maria…".

Sembra che a Ferrara compilasse il suo trattato di aritmetica mercantile "*Nuovo Lume*", pubblicato per la prima volta a Venezia nel 1534 (edizione rarissima) e, grazie al suo successo, ristampato sempre a Venezia nel 1544, nel 1545, nel 1561 e nel 1568.

Non sono noti la data della sua morte e il luogo in cui avvenne.

Fra gli argomenti affrontati nel suo trattato vi è lo studio dei metodi di misura del contenuto delle botti da vino (e quindi anche dei loro *scemi*): allo scopo lo Sfortunati utilizzò le unità di misura lineari e volumetriche in uso a Siena all'epoca, all'inizio del Cinquecento.

L'edizione del 1561 contiene ben *ventuno* pagine di tabelle, relative ai calcoli da effettuare.

Interessanti sono le considerazioni che lo Sfortunati fa riguardo ai metodi usati dai misuratori senesi. Essi impiegavano il *braccio da panno*, lungo l'equivalente di 60,1055 cm, che da essi era suddiviso in 24, oppure in 45, 48 o anche 60 parti uguali: ciascuna di queste parti era chiamata *ponto*.

Probabilmente *ponto* stava per *punto*.

Nelle pagine finali del suo trattato (carte da 104 *verso* a 129 *recto*) lo Sfortunati riserva alcuni paragrafi che egli chiama "*Propositione*" (qui rese con *Proposizione*) alla soluzione di alcuni problemi geometrici.

Dopo una breve introduzione dedicata ai concetti fondamentali della Geometria (punto, linea, superficie, angoli, cerchi e circonferenze, corpi solidi) egli risolve alcuni problemi.

Lo Sfortunati numera parte delle proposizioni con numeri romani minuscoli, quasi anticipando l'uso moderno degli Editori anglosassoni che impiegano questo metodo per numerare le pagine delle introduzioni dei volumi che pubblicano.

Tutti i numeri romani minuscoli sono qui convertiti nelle corrispondenti cifre maiuscole.

Altre Proposizioni sono numerate con numeri arabi, con un'alternanza che può essere spiegata solo con ragioni tipografiche.

Note

* Lo Sfortunati usa espressioni come “3 ½” per 3,5, senza scrivere alcun simbolo infisso come è “+”: qui si è quasi sempre scritto “3 + ½” oppure “3,5”. Allo scopo di evitare errori o malintesi, i numeri misti come “3 + ½” sono spesso scritti racchiusi fra parentesi tonde e con il simbolo “+” infisso: (3 + ½).
* L’Autore non usa la *virgola decimale*, come è richiesto da “3,5”.
* Per semplificare la scrittura, il simbolo di frazione è reso con la barra “/”, anziché con la barra orizzontale.
* Lo Sfortunati usa per π il valore approssimato “3 1/7”: in questo articolo è quasi sempre usata l’equivalente frazione “22/7”.
* La maggior parte delle figure è stata ridisegnata cercando di rispettare forme e proporzioni.
* Alcuni argomenti sono ampliati con appositi riquadri graficamente evidenziati e contrassegnati con la dicitura APPROFONDIMENTO.

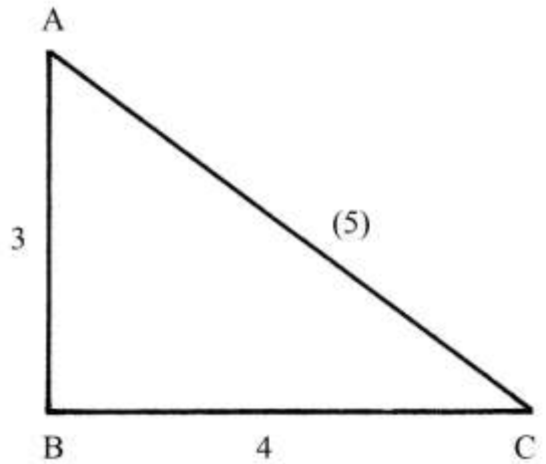
PROPOSIZIONE PRIMA

Triangolo rettangolo

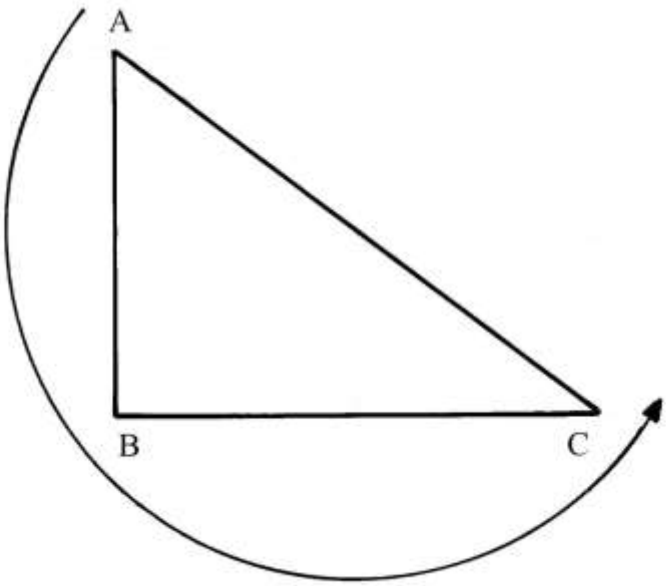
È dato il triangolo rettangolo ABC [lo Sfortunati usa le lettere minuscole] con i cateti lunghi:

* AB = 3;
* BC = 4.

È chiesta la lunghezza dell’ipotenusa AC.



Le lettere sono apposte scrivendole in senso *antiorario*:



Il triangolo rettangolo ABC è metà del rettangolo ABC[D], tagliato lungo la diagonale AC.

La lunghezza dell'ipotenusa è:

$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$ e

$AC = \sqrt{25} = 5$.

PROPOSIZIONE SECONDA

Il problema è basato sul triangolo rettangolo della *Proposizione prima*.

Sono note le lunghezze dell'ipotenusa AC (che è 5) e del cateto BC, che forma la base, ed è lungo 4.

La lunghezza del cateto verticale AB è così ricavata:

$AB^2 = AC^2 – BC^2 = 5^2 – 4^2 = 25 – 16 = 9$ e

$AB = \sqrt{9} = 3$.

PROPOSIZIONE III

Il problema chiede l'area del precedente triangolo rettangolo ABC.

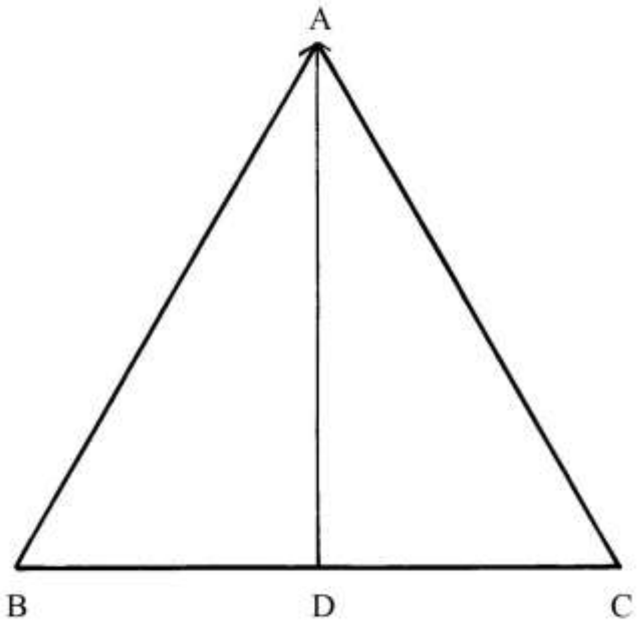
L'Autore suggerisce due diverse soluzioni, equivalenti:

* $S_{ABC} = (BC/2) * AB = (4/2) * 3 = 6$;
* $S_{ABC} = BC * (AB/2) = 4 * (3/2) = 4 * 1{,}5 = 6$.

PROPOSIZIONE IV [IIII]

Triangolo equilatero

Un triangolo equilatero ha lati lunghi 10: lo Sfortunati non indica alcuna unità di misura di lunghezza e di superficie.



AD è una delle tre altezze del triangolo che l'Autore chiama "il catetto".
L'altezza divide ABC in due triangoli rettangoli di uguali dimensioni: ABD e ACD.
La lunghezza di AD è:

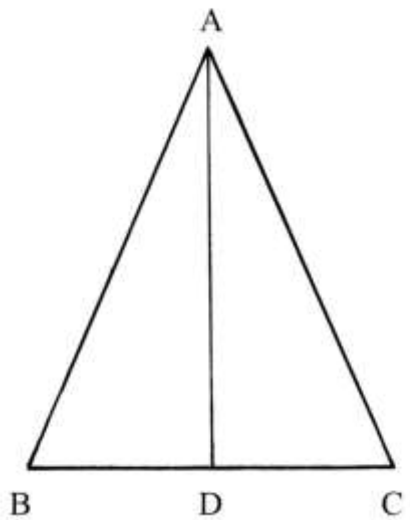
$AD^2 = AB^2 – BD^2 = AB2 – (BC/2)^2 = AB^2 – (AB/2)^2 = 10^2 – (10/2)^2 = 75$ e
$AD = \sqrt{75}$.

$\sqrt{75}$ è un numero irrazionale il cui valore è compreso fra 8 ($8^2 = 64$) e 9 ($9^2 = 81$).
L'area di ABC è:

$S_{ABC} = AD * BC/2 = AD * 10/2 = \sqrt{75} * 5 = \sqrt{(75 * 25)} = \sqrt{1875}$.

PROPOSIZIONE V
Triangolo isoscele

Il testo descrive un triangolo isoscele con lati obliqui lunghi 10 e la base BC lunga 8.



Il problema chiede la lunghezza di AD e l'area del triangolo.
AD è lunga:

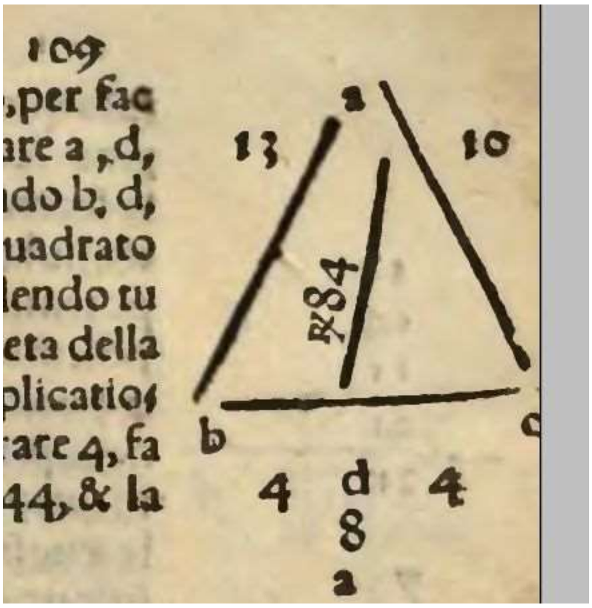
$AD^2 = AB^2 – BD^2 = 10^2 – (8/2)^2 = 100 – 16 = 84$ e
$AD = \sqrt{84}$.

L’area del triangolo è:

$S_{ABC} = AD * BD = \sqrt{84} * 4 = \sqrt{(84 * 16)} = \sqrt{1344}$.

- APPROFONDIMENTO -

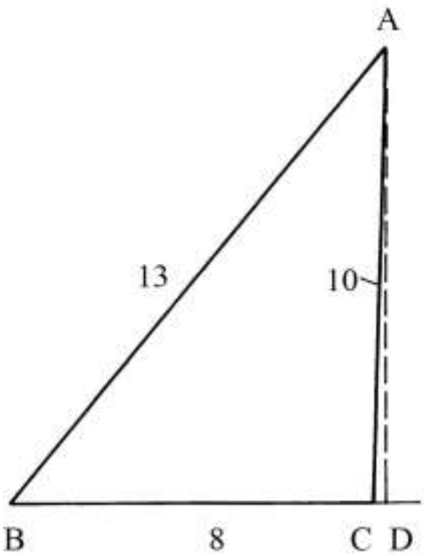
Il testo dello Sfortunati è accompagnato dallo schema che è riprodotto qui sotto:



Stando alla figura, i lati del triangolo sarebbero lunghi:

* AB = 13;
* AC = 10;
* BC = 8.

Lo schema che segue presenta il triangolo ABC – non più isoscele ma scaleno – con queste dimensioni:



L’altezza AD cade sul prolungamento esterno del lato BC.

Applicando la formula di Erone per il calcolo dell’area dei triangoli si ha:

* perimetro = 2 * p = AB + AC + BC = 13 + 10 + 8 = 31;
* semiperimetro = p = 31/2 = 15,5.

$S_{ABC} = \sqrt{[p * (p – AB) * (p – AC) * (p – BC)]} =$
$= \sqrt{[15,5 * (15,5 – 13) * (15,5 – 10) * (15,5 – 8)]} = \sqrt{(15,5 * 2,5 * 5,5 * 7,5)} =$
$= \sqrt{1598,4375} \approx 39,98.$

Conoscendo l'area è possibile ricavare la lunghezza di AD:

$S_{ABC} = AD * BC/2 = AD * 4,$ da cui
$AD = S_{ABC}/4 \approx 39,98/4 \approx 9,995.$

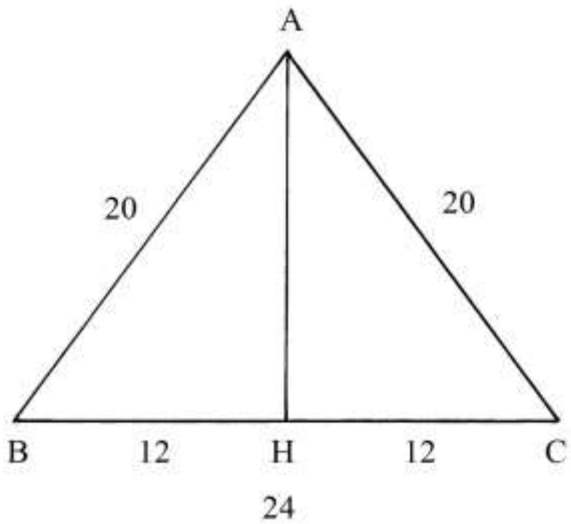
Evidentemente, la figura originale contenuta nel trattato contiene dati errati.

- -

PROPOSIZIONE VI

Triangolo isoscele

ABC è un triangolo isoscele che ha i lati obliqui, AB e BC, lunghi 20 e la base BC 24.



Sono chiesti la lunghezza dell'altezza AH ("il catetto") e l'area del triangolo.

L'altezza AH è lunga:

$AH^2 = AB^2 – BH^2 = 20^2 – (24/2)^2 = 20^2 – 12^2 = 400 – 144 = 256$ e
$AH = \sqrt{256} = 16.$

L'area del triangolo è:

$S_{ABC} = AH * BH = 16 * 12 = 192.$

- APPROFONDIMENTO -

L'altezza AH scompone ABC in due triangoli rettangoli di uguali dimensioni: ABH e AHC, che sono uniti dal comune cateto AH.

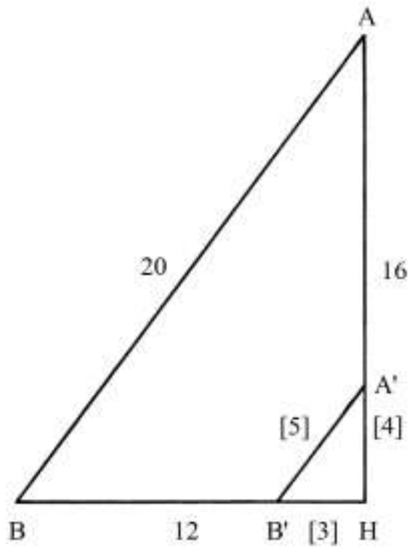
Consideriamo uno dei due triangoli, quello ABH.

Le lunghezze dei lati di questo triangolo stanno in una precisa proporzione:

BH : AH : AB = 12 : 16 : 20 = 3 : 4 : 5.

Queste lunghezze formano una terna derivata dalla terna primitiva 3-4-5 ottenuta moltiplicando i membri di questa ultima per l'intero 4.

La scelta di questa terna derivata nella costruzione del triangolo ABC ha facilitato i calcoli.



Nello schema qui sopra è disegnato anche il triangolo B'HA' che ha lati lunghi 3, 4 e 5.

- -

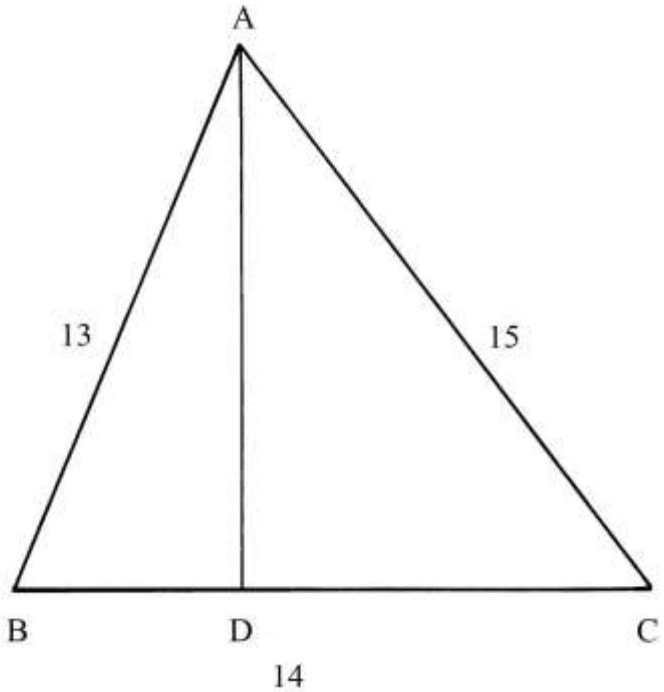
PROPOSIZIONE VII

Il triangolo 13 – 14 – 15

La Proposizione è dedicata al classico triangolo scaleno con lati lunghi 13, 14 e 15, che è stato studiato da molti geometri (a partire da Erone di Alessandria) e da numerosi maestri d'abaco toscani.

Il problema chiede la lunghezza della "*saetta*" che forse l'Autore intende per il "catetto" o altezza AD e poi domanda l'area dell'intero triangolo.

Per lo Sfortunati occorre in primo luogo determinare la posizione del punto D, piede dell'altezza AD.



La lunghezza di BD è calcolata con una procedura che è qui riassunta in una formula (sempre dovuta al citato Erone di Alessandria, che lo Sfortunati non cita):

$BD = (AB^2 + BC^2 – AC^2)/(2 * BC) = (13^2 + 14^2 – 15^2)/(2 * 14) =$
$= (169 + 196 – 225)/28 = 140/28 = 5.$

Ne consegue che la lunghezza di DC è:

$DC = BC – BD = 14 – 5 = 9.$

AD divide ABC in due triangoli rettangoli che hanno in comune il cateto AD: ABD e ADC.

La lunghezza di AD è ricavabile con due diverse soluzioni:

* $AD^2 = AB^2 – BD^2$ oppure
* $AD^2 = AC^2 – DC^2$.

$AD^2 = 13^2 – 5^2 = 169 – 25 = 144$ oppure
$AD^2 = 15^2 – 9^2 = 225 – 81 = 144$ e
$AD = \sqrt{144} = 12.$

L'Autore calcola l'area di ABC con due differenti metodi. Con il primo, più semplice, si ha:

$S_{ABC} = AD * (BC/2) = 12 * 7 = 84.$

Il secondo metodo utilizza la nota formula di Erone per il calcolo dell'area di un triangolo generico. Riassumiamo la procedura:

* *2 * p* è il perimetro di ABC: $2 * p = AB + BC + AD = 13 + 14 + 15 = 42;$
* *p* è il semiperimetro: $p = 42/2 = 21.$

La formula è:

$S_{ABC} = \sqrt{[p * (p – AB) * (p – BC) * (p – AC)]} =$
$= \sqrt{[21 * (21 – 13) * (21 – 14) * (21 – 15)]} = \sqrt{(21 * 8 * 7 * 6)} = \sqrt{7056} = 84.$

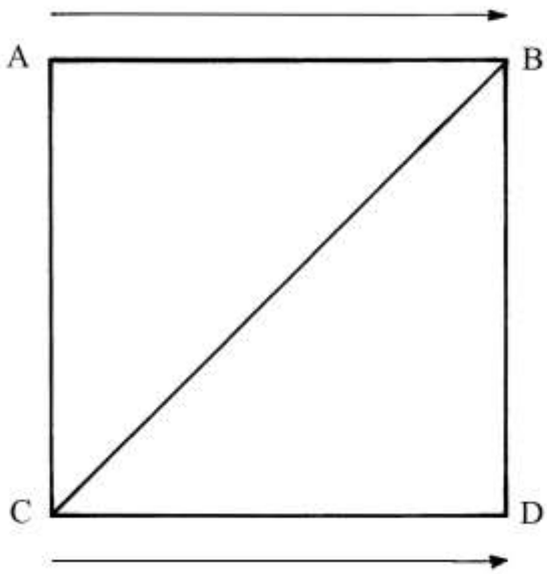
I risultati forniti dai due metodi sono uguali.

PROPOSIZIONE VIII

Quadrato

ABDC è un quadrato che ha lati lunghi 20.

Anche lo Sfortunati appone le lettere ai vertici procedendo da sinistra verso destra (e non in senso rotatorio (orario o antiorario).



Il problema domanda l'area e la lunghezza della diagonale CB.

L'area del quadrato viene calcolata moltiplicando le lunghezze di due lati ("*faccie*") consecutivi, quasi si trattasse di un rettangolo:

$S_{ABDC} = AC * CD = 20 * 20 = 400.$

Benché non abbia fin qui indicata alcuna unità di misura, nella descrizione della soluzione di questa Proposizione lo Sfortunati indica l'area come "braccia 400", ovviamente si tratta di braccia quadrate.

La diagonale CB è lunga:

$CB^2 = 2 * (AC * CD) = 2 * 400 = 800$ e

$CB = \sqrt{800}.$

Invece di calcolare la lunghezza della diagonale applicando il cosiddetto teorema di Pitagora a uno dei due triangoli rettangoli, lo Sfortunati estrae la radice quadrata del doppio dell'area: il risultato è comunque equivalente:

$CB^2 = CD^2 + DB^2 = 20^2 + 20^2 = 400 + 400 = 800$ e

$CB = \sqrt{800}.$

L'Autore non semplifica l'ultima espressione, che potrebbe essere così scritta come segue:

$\sqrt{800} = \sqrt{(100 * 8)} = 10 * \sqrt{8} = 10 * 2 * \sqrt{2} = 20 * \sqrt{2}.$

PROPOSIZIONE IX

Rettangolo

ABDC è un rettangolo che ha lunghezza 20 e larghezza 10.

Il problema domanda l'area e la lunghezza della diagonale CB.

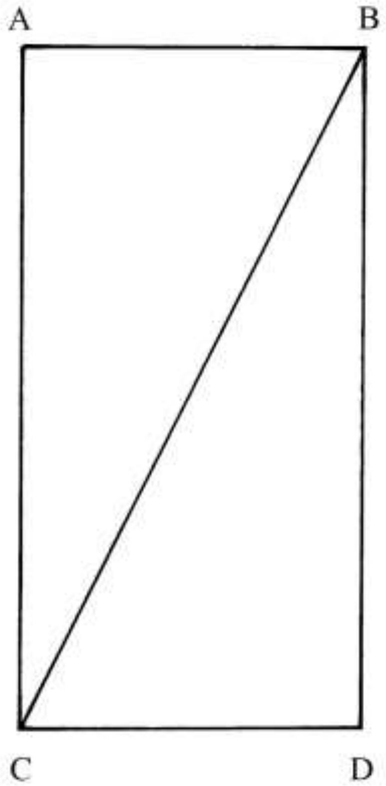
L'area è:

$S_{ABDC} = AC * CD = 20 * 10 = 200.$

La lunghezza della diagonale CB è data da:

$CB^2 = CD^2 + DB^2 = 10^2 + 20^2 = 100 + 400$ e

$CB = \sqrt{500}$ [= $10 * \sqrt{5}$].



PROPOSIZIONE X

Rombo

ABCD è un *rombo* [così lo definisce lo Sfortunati] con lati lunghi 13.

La diagonale minore BD è lunga 10.

Il problema domanda l'area del quadrilatero e la lunghezza della diagonale maggiore AC.

Le due diagonali dividono il rombo in quattro triangoli rettangoli di uguali dimensioni: ABE, AED, BEC e CED.

Consideriamo uno di essi, ad esempio il triangolo ABE: la lunghezza del cateto BE è metà di quella della diagonale BD e cioè:

$$BE = BD/2 = 10/2 = 5.$$

La lunghezza di AE è data da:

$$AE^2 = AB^2 - BE^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144 \qquad e$$

$$AE = \sqrt{144} = 12.$$

Il triangolo ABE ha lunghezze che formano la seconda terna primitiva: 5 – 12 – 13.

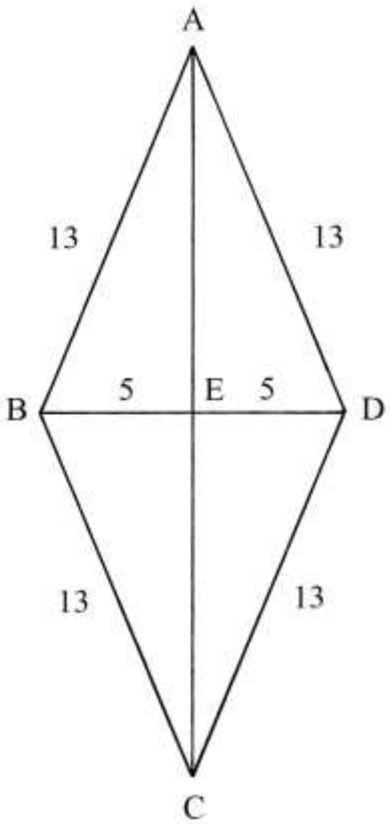
Le stesse considerazioni valgono per gli altri tre triangoli: AED, BEC e CED.

La diagonale maggiore AC è lunga:

$$AC = 2 * AE = 2 * 12 = 24.$$

L'area del rombo è:

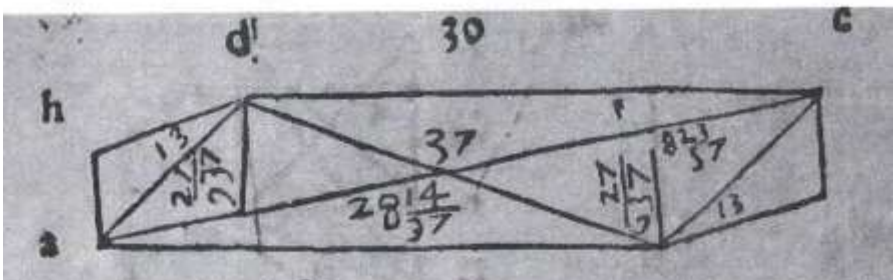
$$S_{ABCD} = BD * (AC/2) = BD * AE = 10 * 12 = 120.$$



PROPOSIZIONE XI
Parallelogramma

Un parallelogramma che lo Sfortunati chiama *romboide* ha i lati orizzontali lunghi 30 e quelli obliqui 13: la diagonale maggiore AC è lunga 37.

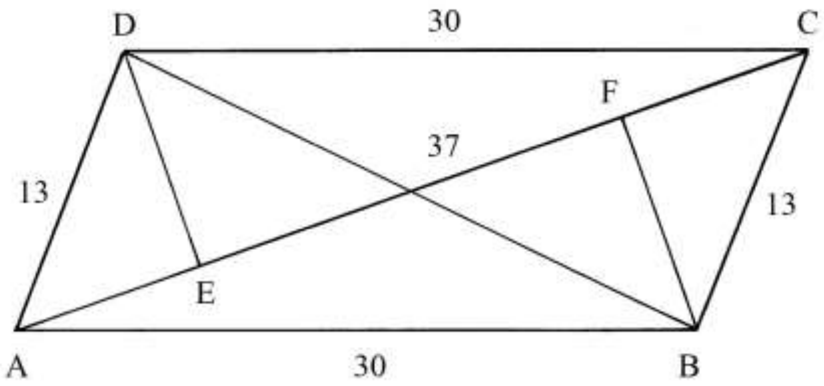
Lo schema originale reca agli estremi due triangoli che non sembrano avere alcun significato per la soluzione:



Il problema chiede l'area del quadrilatero e le lunghezze delle altezze DE e BF.

La diagonale maggiore AC divide il parallelogramma in due triangoli scaleni di uguali dimensioni: ADC e ACB.

Dai vertici D e B sono disegnate le altezze DE e BF, entrambe perpendicolari a AC.



Applicando la formula già incontrata nella soluzione della Proposizione VII, ricaviamo la lunghezza di AE:

$AE = (AD^2 + AC^2 – DC^2)/(2 * AC) = (13^2 + 37^2 – 30^2)/(2 * 37) =$
$= (169 + 1369 – 900)/74 = 638/74.$

Con una serie di calcoli che comportano numerosi numeri misti con parti intere e parti frazionarie, lo Sfortunati giunge a calcolare l'area del parallelogramma uguale a 360.

- APPROFONDIMENTO -

Utilizziamo la formula di Erone per il calcolo dell'area del triangolo ADC.

Il suo perimetro 2 * p è:

$2 * p = AD + DC + AC = 13 + 30 + 37 = 80$ e
il semiperimetro p è 40.

L'area di ADC è:

$S_{ADC} = \sqrt{[p * (p – AD) * (p – DC) * (p – AC)]} =$
$= \sqrt{[40 * (40 – 13) * (40 – 30) * (40 – 37)]} = \sqrt{(40 * 27 * 10 * 3)} = \sqrt{32400} = 180.$

Dato che i triangoli ADC e ACB hanno uguali dimensioni, anche le loro aree sono uguali.

L'area dell'intero parallelogramma è:

$S_{ABCD} = S_{ADC} + S_{ACB} = 180 + 180 = 360.$

La soluzione presentata dallo Sfortunati è esatta.

- -

PROPOSIZIONE 12
Trapezio isoscele

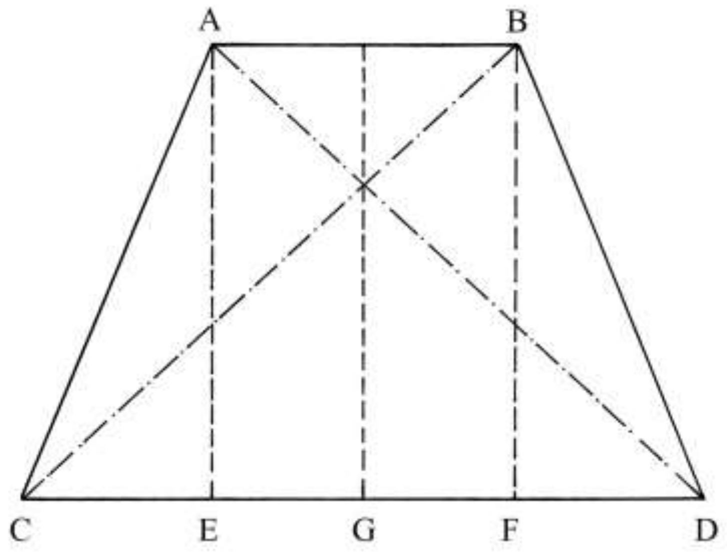
Un trapezio isoscele ("*capo tagliato*") ha le basi lunghe 8 e 18 e i lati obliqui sono lunghi 13.

Il problema domanda l'area del trapezio.

Dai vertici A e B tracciare le perpendicolari alla base maggiore CD: sono AE e BF e cioè due altezze di uguale lunghezza.

Nella figura le lunghezze dei diversi segmenti sono:

* AB = 8;
* CD = 18;
* AC = BD = 13;
* EF = AB = 8;
* CE = FD = (CD – AB)/2 = (18 – 8)/2 = 10/2 = 5.



Le altezze AE e BF dividono il trapezio isoscele in tre poligoni:

* il rettangolo ABFE;
* il triangolo rettangolo ACE;
* il triangolo rettangolo BDF.

I due triangoli rettangoli hanno uguali dimensioni.

L'altezza AE è un cateto del triangolo rettangolo ACE ed è lunga:

$AE^2 = AC^2 - CE^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144$ e

$AE = \sqrt{144} = 12$.

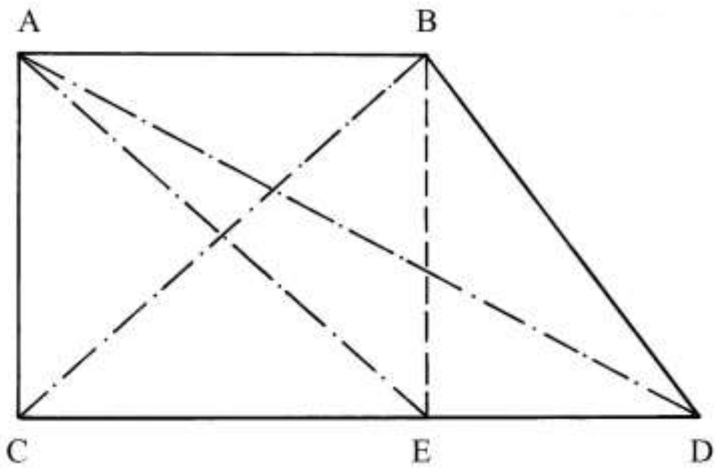
I triangoli rettangoli ACE e BDF hanno lati con lunghezze che formano la terna primitiva 5-12-13.

L'area del trapezio è:

$S_{ABDC} = [(AB + CD)/2] * AE = [(8 + 18)/2] * 12 = 13 * 12 = 156$.

PROPOSIZIONE 13
Trapezio rettangolo

ABDC è un trapezio rettangolo. Lo Sfortunati lo chiama "*mezzo capo tagliato*".



La base maggiore CD è lunga 30 e quella minore AB è 18; l'altezza AC è lunga 16.

Il problema chiede la lunghezza del lato BD e l'area del trapezio.

Dal punto B abbassare la perpendicolare alla base CD: è BE, che è parallela a AC e anch'essa lunga 16.

ED è lungo:

ED = CD – CE = CD – AB = 30 – 18 = 12.

BD è l'ipotenusa del triangolo rettangolo BED e la sua lunghezza è:

$BD^2 = BE^2 + ED^2 = AC^2 + ED^2 = 16^2 + 12^2 = 256 + 144 = 400$ e

$BD = \sqrt{400} = 20$.

I lati di BED hanno lunghezze che formano una terna derivata da quella primitiva 3-4-5:

ED : BE : BD = 12 : 16 : 20 = 3 : 4 : 5.

L'area del trapezio è:

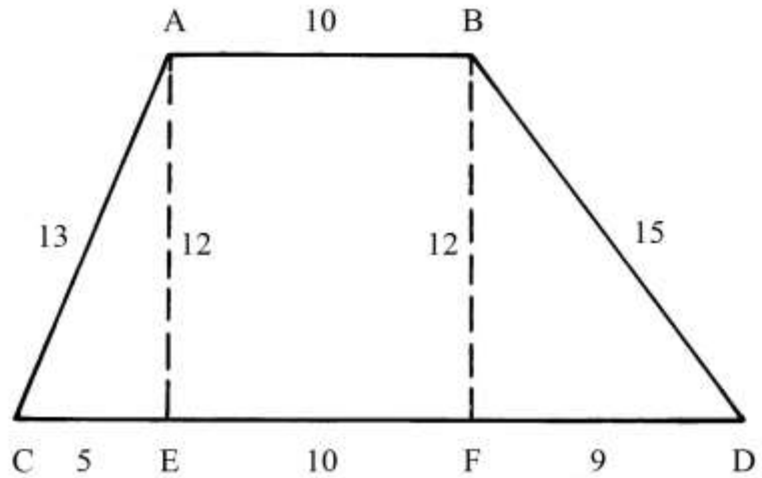
$S_{ABDC} = [(AB + CD)/2] * AC = [(18 + 30)/2] * 16 = 24 * 16 = 384$.

PROPOSIZIONE 14

Trapezio scaleno

ABDC è un trapezio scaleno: la base maggiore CD è lunga 24 e quella minore AB è 10.

I lati obliqui sono lunghi: AC = 13 e BD = 15.



Dai punti A e B sono tracciate le altezze AE e BF che hanno uguale lunghezza.

EF ha stessa lunghezza di AB:

EF = AB = 10.

La somma delle lunghezze dei segmenti CE e FD è:

(CE + FD) = CD – EF = CD – AB = 24 – 10 = 14.

A questo punto lo Sfortunati richiama la Proposizione VII il cui argomento era il triangolo 13-14-15.

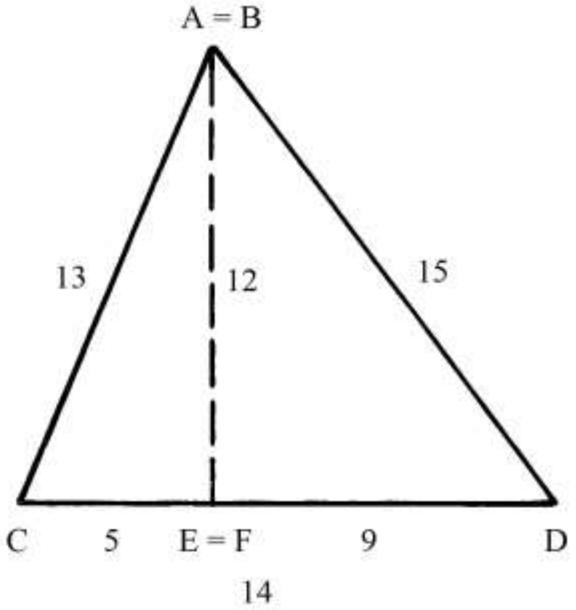
Unendo i triangoli ACE e BDF lungo i cateti AE = BF viene ricreato il triangolo 13-14-15:

* CA(=B) = 13;
* A(=B)D = 15;
* CD = 14.

Dalla soluzione della Proposizione VII sappiamo che l'altezza A(=B) – E(=F) è lunga 12 e che i due segmenti che formano la base CD sono lunghi:

* CE(=F) = 5;
* E(=F)D = 9.

L'area del triangolo è 84.



L’area del trapezio ABDC può essere calcolata in due modi diversi:

* S_{ABDC} = [(AB + CD)/2] * AE = [(10 + 24)/2] * 12 = 17 * 12 = 204:
* S_{ABDC} = S_{ABFE} + (S_{ACE} + S_{BDF}) = AB * AE + 84 = 10 * 12 + 84 = 204.

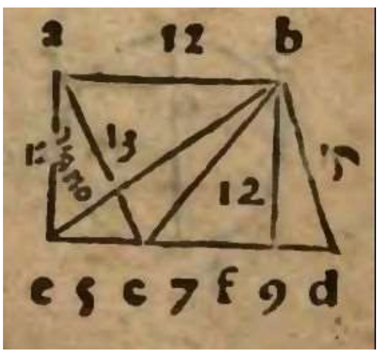
La individuazione della presenza del triangolo 13-14-15 nel trapezio ABDC è veramente una soluzione intelligente dovuta a Giovanni Sfortunati.

PROPOSIZIONE 15

Trapezio ottusangolo

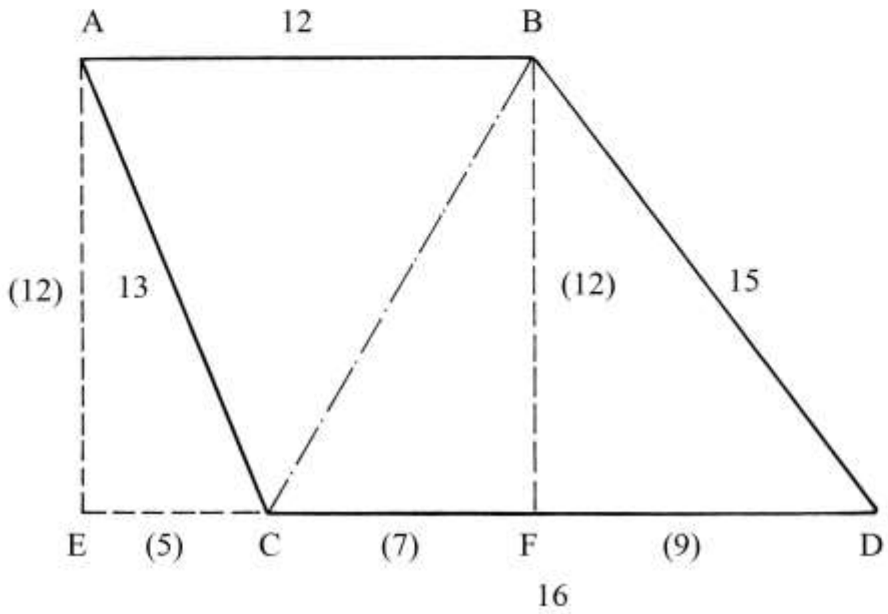
ABDC è un trapezio che lo Sfortunati chiama “*capo tagliato declinante*”. Questo quadrilatero è oggi definito come “*trapezio ottusangolo*” perché possiede un angolo ottuso adiacente alla base maggiore CD: l’angolo è ACD e il vertice è in C.

Lo schema originale non aiuta molto perché tutti i segmenti vi sono disegnati con tratto continuo, senza distinguere fra lati, altezze e diagonali:



Tutto ciò è spiegabile con il livello tecnologico della stampa all’epoca della pubblicazione del trattato dello Sfortunati.

Il trapezio non contiene alcun angolo retto:



Le dimensioni dei quattro lati sono:

* AB = 12;
* CD = 16;
* AC = 13;
* BD = 15.

Prolungare verso sinistra la base CD. Dai vertici A e B abbassare due perpendicolari alla base CD e al suo prolungamento: sono i segmenti AE e BF, fra loro paralleli ed entrambi risultano essere due altezze del trapezio rispetto alla base maggiore CD.

Il problema domanda l'area del quadrilatero.

Occorre ricavare la lunghezza della proiezione EC. Lo Sfortunati la calcola come segue:

$EC = \{BD^2 - [(CD - AB)^2 + AC^2]\}/[2 * (CD - AD)] =$

$= \{15^2 - [(16 - 12)^2 + 13^2]\}/[2 * (16 - 12)] = [225 - (16 + 169)]/8 =$

$= 40/8 = 5.$

AEC è un triangolo rettangolo e AE ne è un cateto: la sua lunghezza è:

$AE^2 = AC^2 - EC^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144$ e

$AE = \sqrt{144} = 12.$

Anche BF è lunga quanto AE:

$BF = AE = 12.$

L'area del trapezio è:

$S_{ABDC} = BF * (AB + CD)/2 = 12 * (12 + 16)/2 = 12 * 14 = 168.$

- APPROFONDIMENTO -

La lunghezza di EC è calcolata dallo Sfortunati con una formula che si avvicina a quella usata in una procedura proposta dal matematico catalano Abraham Bar Hiyya (Savasorda, circa 1065 – 1070/1136) nel suo trattato geometrico, poi tradotto dall'ebraico in latino da Platone da Tivoli con il titolo di "Liber Embadorum" ("Il libro delle aree").

Savasorda considerò un trapezio ottusangolo che Platone da Tivoli rese con l'espressione "*trapezio declinante*".

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Ricostruiamo i passaggi della procedura usata dallo Sfortunati con l'aiuto dell'algebra elementare.

La lunghezza di EC è l'incognita "x": EC = x.

L'altezza AE è lunga:

$AE^2 = AC^2 – EC^2 = 13^2 – x^2 = 169 – x^2$.

Il segmento EF è lungo:

$EF = AB = 10 = EC + CF = x + CF$ da cui:

$CF = EF – x = 12 – x$.

Il segmento FD è lungo:

$FD = CD – CF = 16 – (12 – x) = (4 + x)$.

La lunghezza di BF è data da:

$BF^2 = BD^2 – FD^2 = 15^2 – (4 + x)^2 = 225 – 16 – 8 * x – x^2 = (209 – 8 * x – x^2)$.

Ma AE e BF hanno lunghezze uguali e sono uguali anche i loro quadrati:

$AE = BF$

$AE^2 = BF^2$

$169 – x^2 = 209 – 8 * x – x^2$

$8 * x = 209 – 169$

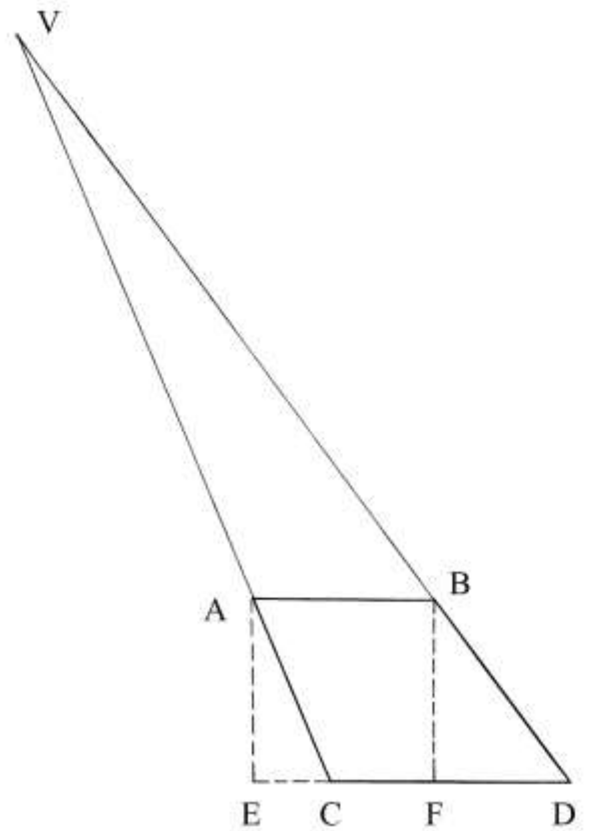
$8 * x = 40$

$x = 40/8 = 5$.

La procedura impiegata dallo Sfortunati conduce allo stesso risultato.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Come tutti i trapezi, anche quello considerato in questa Proposizione deriva dal sezionamento di un triangolo lungo una linea parallela alla base maggiore:



%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

I termini usati dallo Sfortunati per definire i trapezi sono riuniti nella tabella che segue:

Proposizione numero	Definizione dello Sfortunati	Definizione attuale
12	capo tagliato	trapezio isoscele
13	mezzo capo tagliato	trapezio rettangolo
15	capo tagliato declinante	trapezio ottusangolo

Nel volgarizzamento trecentesco della "*Practica geometriae*" di Leonardo Pisano (Fibonacci), edita da Francesco Feola, sono citati ben cinque diversi tipi di trapezio:

a) Mezzo capo tagliato.
b) Capo tagliato.
c) Diversamente capo tagliato.
d) Capo decrinante [*declinante*].
e) Pesce.

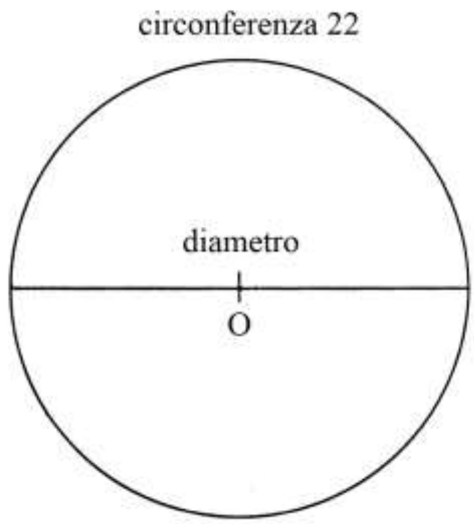
Evidentemente, anche lo Sfortunati ha attinto, direttamente o indirettamente, alle opere geometriche di Savasorda e di Fibonacci.

- -

PROPOSIZIONE XVI

Diametro di un cerchio

Un cerchio ha circonferenza *c* lunga 22.
È chiesta la lunghezza del diametro *d*:



d = c/(3 + 1/7) = 22/(3 + 1/7) = 7.

PROPOSIZIONE XVII

Circonferenza di un cerchio

Un altro cerchio ha diametro *d* lungo 14: occorre calcolare la lunghezza della sua circonferenza, *c*:

c = d * (3 + 1/7) = 14 * (3 + 1/7) = 44.

Nota: nella descrizione di questo problema lo Sfortunati introduce una nuova notazione per i numeri misti: egli scrive "3 & 1/7" invece della per lui consueta "3 1/7".

PROPOSIZIONE XVIII
Area di un cerchio

Un cerchio ha diametro *d* lungo 7.

Il problema chiede la sua area *S*:

$S = d^2 * 11/14 = (7^2 * 11)/14 = (49 * 11)/14 = 539/14 = (38 + ½)$.

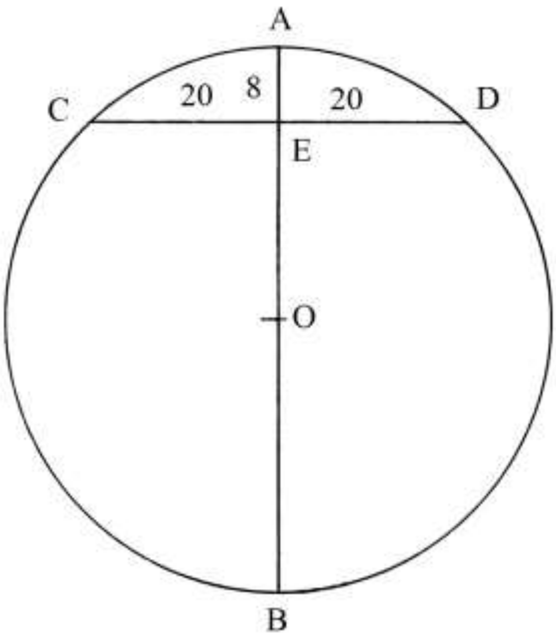
Qui sopra sono riprodotti tutti i passaggi contenuti nel testo originale.

Nota: lo Sfortunati scrive la frazione 1/14 come segue:

$\frac{1}{1} \quad \frac{1}{14}$

PROPOSIZIONE 19
Applicazione del teorema delle corde

In un cerchio è tracciata la corda CD che è lunga 40 e la freccia ("*saetta*") AE è 8.



Il problema domanda la lunghezza del diametro AB.

Lo Sfortunati risolve citando Euclide e applicando quello che è noto come *teorema delle corde*:

AE : CE = ED : EB

AE : CE = CE : EB   da cui:

$EB = CE^2/AE = (40/2)^2/8 = 20^2/8 = 400/8 = 50$.

Il diametro AB è lungo:

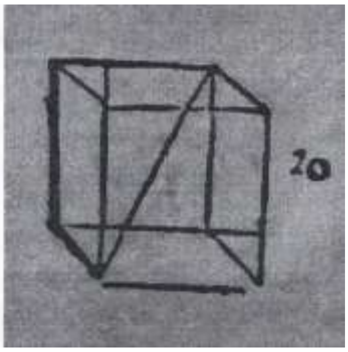
AB = AE + EB = 8 + 50 = 58.

PROPOSIZIONE 20

Volume di un cubo

Un cubo ha spigoli lunghi 8 e deve essere calcolato il suo volume.

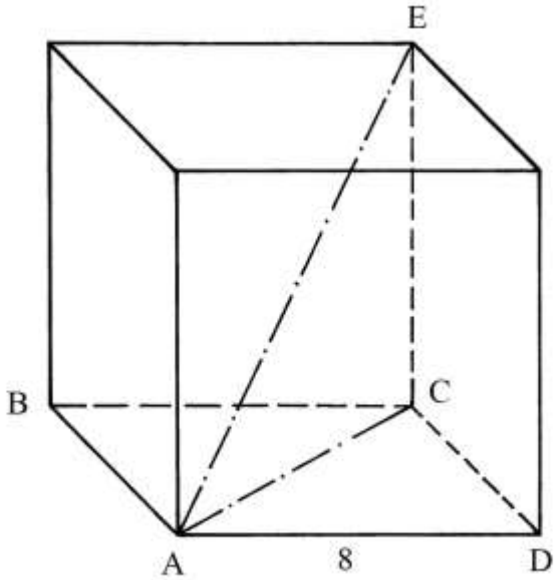
Lo schema originale pare essere disegnato in assonometria cavaliera perché gli spigoli obliqui sono approssimativamente lunghi *metà* degli altri; inoltre essi sono inclinati di circa 45° rispetto agli spigoli orizzontali e a quelli verticali:



Inoltre, vi è tracciata una delle diagonali del cubo che non è considerata nel testo.

Il volume del cubo è:

$V = 8 * 8 * 8 = 8^3 = 512.$



AC è una diagonale del quadrato ABCD che ha lati lunghi 8. AC è:

$AC = 8 * \sqrt{2}.$

AE è una delle quattro diagonali del cubo ed è l'ipotenusa del triangolo rettangolo ACE; la sua lunghezza è data da:

$AE^2 = AC^2 + CE^2 = (8 * \sqrt{2})^2 + 8^2 = 3 * 8^2$ e

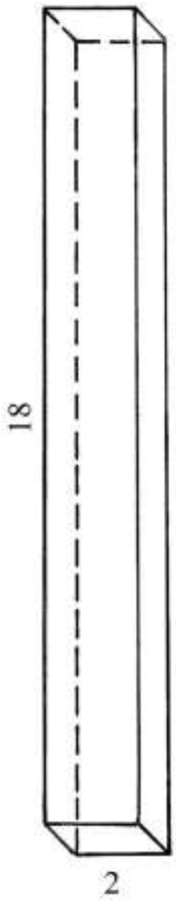
$AE = \sqrt{(3 * 8^2)} = 8 * \sqrt{3}.$

PROPOSIZIONE XXI

Volume di un prisma

Un prisma a base quadrata ("una colonna") ha i lati della base lunghi 2 ed è alto 18.

Il problema chiede la sua "area corporale" e cioè il *volume*.



La base ha area S:

S = 2 * 2 = 4.

Il volume V è:

V = S * altezza = 4 * 18 = 72.

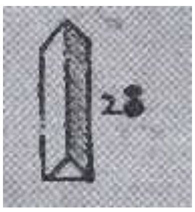
Lo schema qui sopra ridisegna quello originale: sembra che lo Sfortunati abbia rappresentato il prisma in una variante dell'assonometria cavaliera, *vista dal basso*.

<u>PROPOSIZIONE XXII</u>

<u>Volume di un prisma a base triangolare</u>

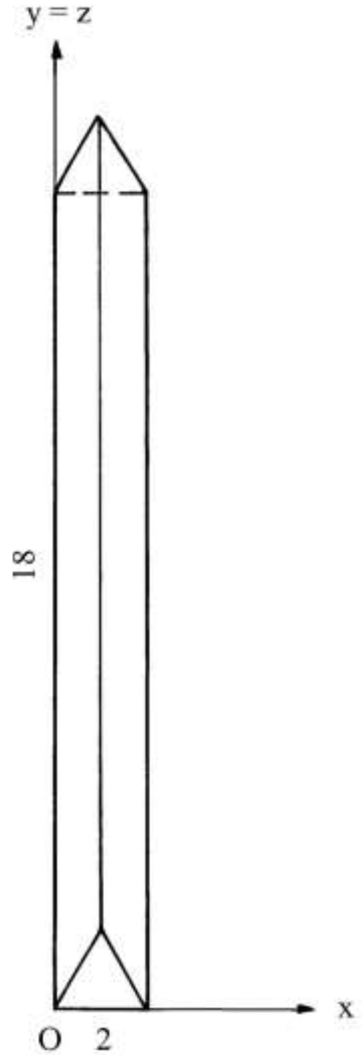
Una "colonna" triangolare ha le basi formate da triangoli equilateri con la lati lunghi 2. Il prisma è alto 18.

Come accade ad altri schemi del trattato, lo Sfortunati ombreggia una delle facce del solido, generalmente quella posizionata a destra: l'illuminazione proverrebbe da sinistra.



Benché lo schema originale sia un po' primitiva, pare che i triangoli equilateri che formano le due basi siano in grandezza naturale, senza alcuno scorciamento dei lati obliqui.

Il prisma pare disegnato in una variante dell'assonometria cavaliera, con gli assi *y* e *z* coincidenti e verticali: l'asse *x* forma un angolo di 90° con gli assi *y* = *z*.



L'angolo di fuga è yOx = 90°.

Il *rapporto di fuga* è il rapporto fra la lunghezza disegnata dei lati obliqui dei due triangoli equilateri e la reale lunghezza: dato che i lati obliqui non sono scorciati, il rapporto di fuga è 1.

Per ulteriori approfondimenti sull'argomento rimando al mio articolo "*appunti assonometria*", citato in bibliografia.

PROPOSIZIONE XXIII

Volume di un cilindro

Una colonna cilindrica ha il cerchio delle basi con diametro *d* lungo 3 ed è alta *h* = 27.

Il problema domanda l' "area corporale" e cioè il volume del solido.

L'area S della base è:

$$S = d^2 * 11/14 = 3^2 * 11/14 = 99/14 = (7 + 1/14).$$

Il volume V è:

$$V = S * h = (7 + 1/14) * 27 = (730 + 13/14).$$

PROPOSIZIONE XXIV [XXIIII]
Piramide a base quadrata

Una piramide ha base quadrata con lati lunghi 4 ed è alta 36.
È chiesto il volume del solido.
L'area S della base è:

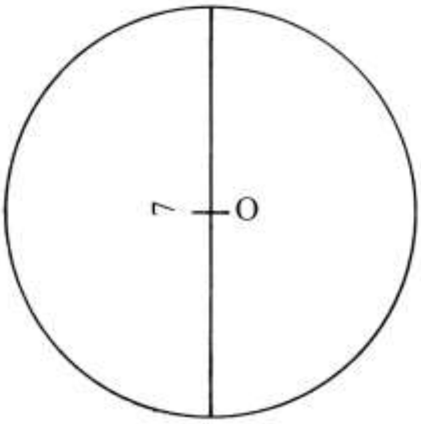
$S = 4 * 4 = 16.$

Il volume V è:

$V = (S * 36)/3 = (16 * 36)/3 = 576/3 = 192.$

PROPOSIZIONE XXV
Superficie di una sfera

Una sfera ha diametro *d* lungo 7.
Il problema chiede la sua superficie.



Lo Sfortunati la calcola correttamente affermando che essa è uguale a quattro volte l'area del cerchio massimo di diametro 7:

$S_{\text{CERCHIO MASSIMO}} = d^2 * 11/14 = 7^2 * 11/14 = (38 + ½).$

La superficie della sfera è:

$S_{\text{SFERA}} = 4 * S_{\text{CERCHIO MASSIMO}} = 4 * (38 + ½) = 154.$

Le formule sono oggi scritte come segue:

$S_{\text{CERCHIO MASSIMO}} = = \pi * r^2 = \pi * (d/2)^2 = \pi * d^2/4.$

$S_{\text{SFERA}} = 4 * S_{\text{CERCHIO MASSIMO}} = 4 * (\pi * r^2) = 4 * [\pi * (d/2)^2] = \pi * d^2.$

PROPOSIZIONE XXVI
Volume di una sfera

Il problema domanda il volume della sfera ("palla") della precedente Proposizione.
La soluzione che lo Sfortunati propone è la seguente:

* dividere per 6 la lunghezza del diametro: $7/6 = (1 + 1/6);$
* moltiplicare per la superficie della sfera:

$7/6 * S_{\text{SFERA}} = 7/6 * 154 = (179 + 2/3).$

- APPROFONDIMENTO -

La soluzione utilizzata dallo Sfortunati per il calcolo del volume della sfera richiama un'analoga usata da Pietro Cataneo nel suo "Le pratiche delle due prime matematiche": infatti egli calcola il volume della sfera con la formula:

$V_{\text{SFERA}} = d/6 * S_{\text{SFERA}}$.

Per ragioni anagrafiche, questa soluzione può essere attribuita allo Sfortunati che potrebbe averla appresa dai maestri di una scuola di abbaco da lui frequentata a Siena.

Verifichiamo la correttezza della procedura impiegata dallo Sfortunati.

La corretta formula per il calcolo del volume della sfera è:

$V_{\text{SFERA}} = 4/3 * \pi * r^3$, con *r* raggio della sfera.

Per π era usato il valore approssimato *22/7* per cui la formula diveniva:

$V_{\text{SFERA}} = 4/3 * 22/7 * r^3 = 88/21 * r^3$.

La superficie laterale della sfera è:

$S_{\text{SFERA}} = 4 * (\pi * r^2) = 4 * 22/7 * r^2 = 88/7 * r^2$.

Il rapporto fra il volume e la superficie laterale della sfera è:

$V_{\text{SFERA}} / S_{\text{SFERA}} = (88/21 * r^3)/(88/7 * r^2) = 7/21 * r = 1/3 * (d/2) = d/6$, che è il coefficiente usato dallo Sfortunati e poi da Pietro Cataneo.

La soluzione impiegata dai due Autori senesi è corretta.

- -

Le unità di misura usate a Siena

Nella carta 112 *verso*, in calce al testo della Proposizione XXVI, lo Sfortunati descrive le unità di misura lineari e superficiali usate a Siena verso il 1500.

Per misurare i terreni erano impiegati due strumenti:

* la *canna*, lunga 4 braccia;
* la *tavola*, lunga 6 braccia.

La superficie di un terreno era misurata in "staro da terra" e cioè in staia. Lo staio equivaleva a 3600 braccia^2 o all'area di un quadrato con lati lunghi 60 braccia.

La descrizione che fa lo Sfortunati non è molto precisa perché, come altri Autori, non distingue chiaramente fra unità lineari e unità superficiali.

Una *canna quadrata* è l'area di un quadrato che ha lati lunghi 4 braccia:

1 canna^2 = 16 braccia^2.

Uno "staro da terra" valeva:

3600/16 = 225 canne^2.

Una *tavola quadrata* è l'area di un quadrato con lati lunghi 1 tavola o 6 braccia:

1 tavola^2 = 36 braccia^2.

Poi lo Sfortunati offre un'ulteriore informazione, qui riprodotta dalla carta 112 *verso*:

"…Dividesi poi il staro del terreno in quarti e boccali, e braccia 900 o vero canne 56 e braccia 4 o tavole 25 fanno un quarto di terreno. Il quarto è 4 boccali e il staro è 16 boccali, adonque ogni boccale è braccia 225 ovvero canne 14 e braccia 1 o veramente tavole 6 e braccia 9 e questo è circa la mensura nostra…".

Secondo lo Sfortunati si avevano i seguenti rapporti:

* 1 "staro del terreno" = 4 quarti;
* 1 quarto = 4 boccali.

Ne conseguono le seguenti equivalenze:

* 1 quarto = 3600 braccia^2/4 = 900 braccia^2 = 900/16 canne^2 = (56 + ¼) canne^2 =
  = (56 canne^2 + 4 braccia^2) = 900/36 tavole^2 = 25 tavole^2;
* 1 boccale = 1 quarto/4 = 900/4 braccia^2 = 225 braccia^2 = (56 canne^2 + 4 braccia^2)/4 =

= (14 canne^2 + 1 braccio^2) = 25/4 tavole^2 = (6 + ¼) tavole^2 = (6 tavole^2 + 9 braccia^2).

La tavola che segue è riprodotta dalla p. 553 dell'edizione a stampa delle "Tavole di Ragguaglio" pubblicate a Firenze nel 1782 per l'attuazione dell'unificazione metrologica voluta per la Toscana dal Granduca Pietro Leopoldo I.

(553)

S I E N A

LA Libbra di Siena corriſponde a Once 11. Denari 15. Grani 15. del Peſo di Firenze.

Lo Stajo del Grano divideſi in Boccali 16., e corriſponde a Staja — Quarti 3. Quartucci 11. e $\frac{76}{100}$ della Miſura da Grano di Firenze.

Il Barile del Vino divideſi in Staja 2., lo Stajo in Boccali 16., ed il Boccale in Quartucci 4., e ſecondo la Miſura da Vino di Firenze contiene Fiaſchi 18. Quartucci 5. $\frac{22}{100}$.

Il Barile dell' Olio è compoſto di due Staja, e lo Stajo divideſi in Boccali 16., il Boccale in Quartucci 4. La ſua tenuta a Miſura Fiorentina è di Barili 1. Fiaſchi 3. Quartucci 6. e $\frac{14}{100}$.

Il Braccio divideſi in Once 24., ed è lungo Braccia 1. Sol. — Den. 7. $\frac{2}{12}$.

Il Paſſetto è di lunghezza Braccia 1. Soldi 5. Denari 9.

Lo Stajo di Terra è compoſto di Tavole 100., la Tavola di Pertiche 6., e la Pertica di Braccia □ 6., e ſecondo la nuova Miſura corriſponde a Quadrati — Tavole 3. Pertiche 8. Deche 1. Braccia □ 9. $\frac{2400}{14000}$.

Il Miglio Statutario è di lunghezza Braccia 3600. Seneſi, e corriſponde a Miglia 1. Paſſi 236.

Il Miglio moderno è di lunghezza Braccia 2500., e corriſponde a Miglia — Paſſi 858. Braccia 1.

aaaa

In origine lo *staio* era un'unità di peso che poi è divenuta anche un'unità di misura della superficie agraria: grosso modo con uno *staio* di grano veniva seminata una porzione di terreno della superficie di uno staio.

Nota: il termine *stioro* risale al XIII secolo ed è di origine toscana, derivata da *staiolo*, diminutivo di *staio*. *Staioro* è stato poi contratto in *stioro*.

Alla fine del Settecento, a Siena erano in uso due varianti dello staio:

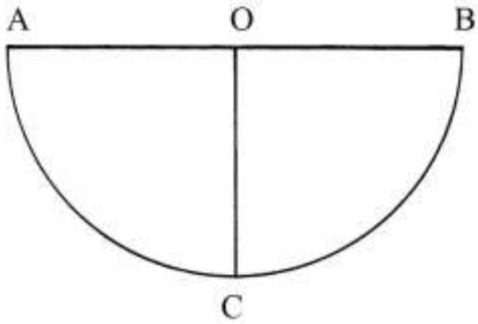
* uno, lo “Stajo del Grano”, era usato per misurare gli aridi (come i cereali) e i liquidi;
* l’altro, lo “Stajo di Terra”, era impiegato per misurare i terreni.

PROPOSIZIONE XXVII

Un mantello

Un mantello ha la forma di un semicerchio e il suo diametro è:

AB = 2 * OC = 2 * 2,5 = braccia.



Deve essere ritagliato un mantello che ha la forma di un semicerchio di raggio (2 + ½) braccia da un panno.

La soluzione del problema è piuttosto oscura perché non è accompagnata da alcuno schema.

L’Autore procede come segue:

* calcolare il diametro del semicerchio: (2 + ½) * 2 = 5 braccia;
* moltiplicare la lunghezza del diametro per sé stessa: 5 * 5 = 25;
* moltiplicare per la costante 11/14: 25 * 11/14 = (19 + 9/14) braccia^2, area del cerchio intero;
* dividere per (2 + ½): (19 + 9/14)/(2 + ½) = (7 + 6/7) braccia, lunghezza del panno occorrente.

PROPOSIZIONE 28

Costruzione di un muro

Deve essere costruito un muro lungo 20 braccia, alto (5 + 1/5) e spesso (2 + ½) braccia.

I mattoni usati per fabbricarlo hanno forma di parallelepipedo con lunghezza di ½ braccio, larghezza di ¼ e con spessore uguale a 1/8 di braccio.

Il problema domanda il numero di mattoni occorrenti per costruire il muro.

Il volume della muratura è:

V_{MURO} = 20 * (5 + 1/5) * (2 + ½) = 260 braccia^3.

Il volume di un mattone è:

$V_{MATTONE}$ = ½ * ¼ * 1/8 = 1/64 braccia^3.

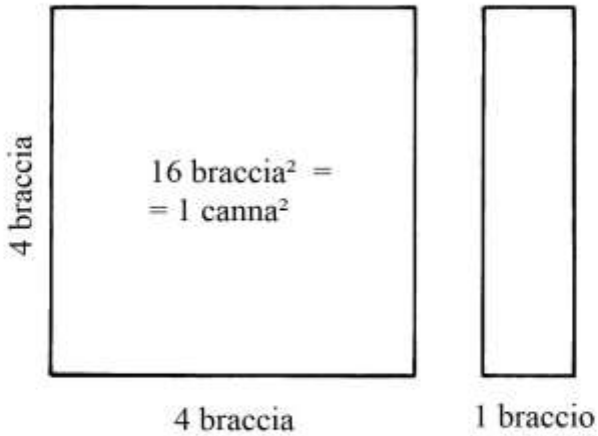
Il numero N di mattoni occorrenti è:

N = V_{MURO}/ $V_{MATTONE}$ = 260/(1/64) = 260 * 64 = 16640 mattoni.

Infine, lo Sfortunati ricorda che non tutti i mattoni hanno uguali dimensioni e che alcuni si rompono nel corso della posa in opera per cui occorre provvederne un numero maggiore e suggerisce una regola empirica: servirebbero 1000 mattoni per canna quando il muro è spesso 1 braccio, ma non chiarisce se si tratta di canne lineari, canne quadrate o canne cubiche.

Lo schema che segue presenta la proiezione frontale il profilo di un'ipotetica porzione di muro: essa ha area di

$16 \text{ braccia}^2 = 1 \text{ canna}^2$ e spessore di 1 braccio.



Il volume del muro è uguale a 16 braccia^3.

Per costruirlo occorrono N mattoni che hanno volume uguale a 1/64 braccia^3:

$N = 16/(1/64) = 16 * 64 = 1024$.

Qualcosa non torna nel testo dello Sfortunati.

PROPOSIZIONE 29

Un pozzo

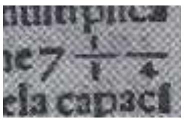
Un pozzo è largo 3 braccia (è il diametro *d*) ed è profondo 16.

Il problema chiede il volume dell'acqua che può contenere.

L'area della sezione circolare, S, è:

$S = d^2 * 11/14 = 3^2 * 11/14 = 99/14 = (7 + 1/14) \text{ braccia}^2$.

Lo Sfortunati scrive il risultato come segue:



Il volume V vale:

$V = S * \text{profondità} = (7 + 1/14) * 16 = (113 + 1/7) \text{ braccia}^3$.

Il *braccio^3* equivale a *11 staia* di vino, acqua o grano, per cui il pozzo può contenere:

$V_{ACQUA} = 11 * (113 + 1/7) = (1244 + 4/7)$ staia di acqua.

PROPOSIZIONE 30

Una cassa

Una cassa ha la forma di un parallelepipedo e le sue dimensioni sono:

* lunghezza: 4 braccia;
* larghezza: (3 + ½) braccia;
* profondità: (2 + 1/7) braccia.

Il problema domanda la quantità di grano che può contenere.

L'area della base è:

$S_{BASE} = 4 * (3 + ½) = 14$ braccia^2.

Il volume V è:

$V = S_{BASE} * (2 + 1/7) = 14 * (2 + 1/7) = 30$ braccia^3.

Il volume del grano contenuto, espresso in staia, è:

$V_{GRANO} = 11 * 30 = 330$ staia.

PROPOSIZIONE 31

Un monte di grano

Un monte di grano ha forma circolare ed è un cono: lo Sfortunati chiama *piramide* anche il cono.

La circonferenza della base è lunga 44 braccia e l'altezza del monte è di 6 braccia.

È chiesto il volume del grano in staia.

La circonferenza *c* è data da:

$c = 2 * \pi * r = \pi * d$, con *d* diametro.

Il diametro è lungo:

$d = c/\pi = 44/(22/7) = 14$ braccia.

L'area S della base è:

$S = d^2 * 11/14 = 14^2 * 11/14 = 154$ braccia^2.

Il volume V del monte di grano è:

$V = S *$ altezza$/3 = 154 * 6/3 = 154 * 2 = 308$ braccia^3.

In staia, il volume del grano è:

$V_{GRANO} = 11 * V = 11 * 308 = 3388$ staia.

PROPOSIZIONE 32

Tronco di cono

Il problema considera un tronco di cono che lo Sfortunati chiama "piramide corta rotonda". Deve esserne calcolato il volume.

ABCD è il tronco di cono visto di fronte: il diametro della base AD è lungo 4 braccia e quello della base superiore, BC, è 3 braccia.

Il solido è alto 2 braccia.

Per i punti medi G e H passa l'asse di simmetria del solido.

Prolungare verso l'alto gli apotemi AB e DC: essi si incontrano nel punto V che giace sull'asse di simmetria.

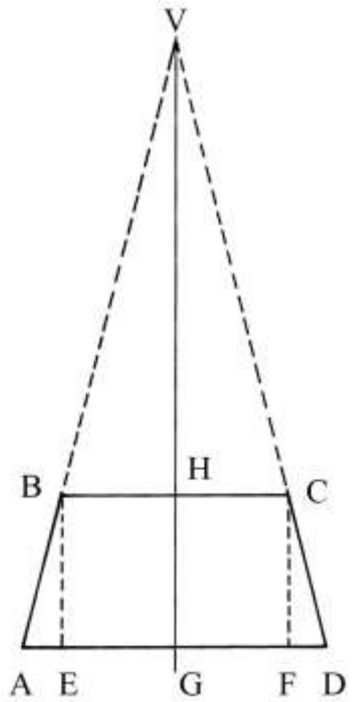
Il tronco di cono ABCD è ricavato dal cono di base AD e vertice V con un taglio effettuato con un piano perpendicolare all'asse di simmetria e passante per i punti B, H e C.

Lo Sfortunati calcola il volume del tronco di cono sottraendo dal volume del cono VAD quello del cono asportato, VBC.

Dai punti B e C abbassare le perpendicolari a AD: sono BE e CF.

I segmenti AE e FD hanno lunghezze uguali:

$AE = AG – BH = AD/2 – BC/2 = 4/2 – 3/2 = 0,5$ braccia.



Per determinare l'altezza VH del cono tagliato, lo Sfortunati ricorre in modo solo accennato alla similitudine fra i triangoli rettangoli: ABE e BVH sono simili per cui si ha la seguente proporzione:

$AE : BH = EB : VH$, da cui consegue:

$VH = (BH * EB)/AE = (3/2) * 2/0,5 = 3/0,5 = 6$ braccia.

L'altezza totale del cono è:

$VG = VH + HG = 6 + 2 = 8$ braccia.

L'area del cerchio di base è:

$S_{AD} = AD^2 * 11/14 = 4^2 * 11/14 = (12 + 4/7)$ braccia^2.

L'area del cerchio superiore è:

$S_{BC} = BC^2 * 11/14 = 3^2 * 11/14 = (7 + 1/14)$ braccia^2.

Il volume del cono VAD è:

$V_{VAD} = S_{AD} * VG/3 = (12 + 4/7) * 8/3 = (33 + 11/21)$ braccia^3.

Il volume del cono tagliato, VBC, è:

$V_{VBC} = S_{BC} * VH/3 = (7 + 1/14) * 6/3 = (14 + 1/7)$ braccia^3.

Il volume del tronco di cono è:

$V_{ABCD} = V_{VAD} – V_{VBC} = (33 + 11/21) – (14 + 1/7) = (19 + 8/21)$ braccia^3.

- APPROFONDIMENTO -

Oggi il volume di un tronco di cono è ottenuto con una formula, corretta, che semplifica i calcoli:

$V = 1/3 * \pi * h (R^2 + r^2 + R * r)$, dove:

- *h* è l'altezza HG = 2 braccia;
- *R* è il raggio della base maggiore: R = GA = 4/2 = 2 braccia;
- *r* il raggio del cerchio della base superiore: r = HB = 3/2 = 1,5 braccia.

Applicando la formula si ha:

$V_{ABCD} = 1/3 * 22/7 * (2^2 + 1,5^2 + 2 * 1,5) = 44/21 * (4 + 2,25 + 3) =$
$= 44/21 * 9,25 = (19 + 8/21)$ braccia^3.

La procedura impiegata dallo Sfortunati ha notevole valore didattico.

- -

Lo Sfortunati conclude suggerendo di applicare questa procedura di calcolo alla determinazione del volume delle botti che hanno la forma di due tronchi di cono uniti lungo le loro basi maggiori: è in questa zona che si trova il *cocchiume*.

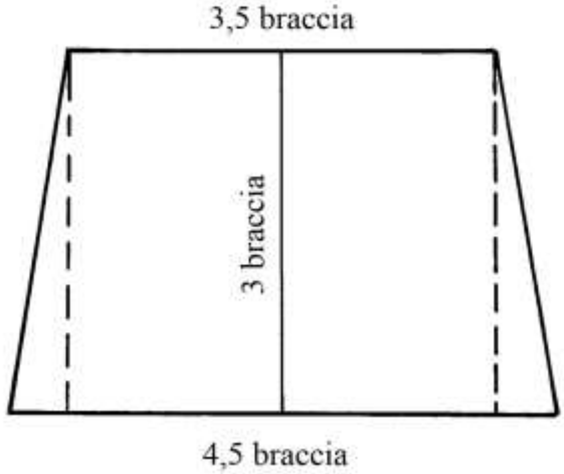
Infine, accenna all'uso degli *staggioli*, le aste usate per misurare l'altezza del vino nelle botti.

PROPOSIZIONE 33

Volume di un tino

Una "tina" (un tino) è riempita con delle uve.

Il diametro del fondo è (4 + ½) braccia e quello della bocca è (3 + ½) ed è alto 3 braccia.



Il problema domanda la quantità di vino che può essere ricavato dalle uve, considerando che esse hanno una resa di 17/24: i restanti 7/24 formano le vinacce.

I calcoli che seguono sono fatti utilizzando i numeri decimali e non i numeri misti con parti frazionarie, come fa lo Sfortunati: lo scopo è quello di semplificare.

La procedura usata dall'Autore contiene i seguenti passi:

* moltiplicare il diametro della bocca per sé stesso: $(3,5)^2 = 12,25$;
* moltiplicare il diametro del fondo per sé stesso: $(4,5)^2 = 20,25$;
* moltiplicare i due precedenti prodotti: $12,25 * 20,25 = 248,0625$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{248,0625} = 15,75$;
* sommare con i primi due quadrati: $12,25 + 20,25 + 15,75 = 48,25$;
* moltiplicare per l'altezza del tino e dividere per 3: $48,25 * 3/3 = 48,25$;
* moltiplicare per 11/14: $48,25 * 11/14 \approx 37,91$ braccia^3, volume del tino e delle uve contenute;
* moltiplicare per 11: $37,91 * 11 \approx 417$ staia, volume delle uve;
* moltiplicare per 17/24: $417 * 17/24 \approx 295,375$ staia, quantità di vino ricavato dalle uve.

Lo Sfortunati suggerisce di calcolare solo i 2/3 del volume delle uve per determinare la quantità del vino:

417 * 2/3 = 278 staia di vino.

Il coefficiente 2/3 è minore di 17/24:

2/3 = 16/24 < 17/24.

- APPROFONDIMENTO -

La procedura impiegata dallo Sfortunati può essere riassunta con una formula.

* *2 * r* è il diametro della bocca: 2 * r = 3,5 braccia;
* *2 * R* è il diametro del fondo: 2 * R = 4,5 braccia;
* *h* è l'altezza del tino: h = 3 braccia.

La che condensa i passi è:

$$V = \{[\sqrt{(2 * r)^2 * (2 * R)^2}] + (2 * r)^2 + (e * R)^2\} * (h/3) * 11/14.$$

La formula richiama quella moderna, descritta nell'APPROFONDIMENTO allegato alla soluzione della Proposizione 32.

- -

PROPOSIZIONE 34

Pietra caduta in un vivaio

Un vivaio è lungo 12 braccia, è largo 10 e l'acqua contenuta è profonda h = 8 braccia.

Vi cade una palla sferica di pietra del diametro di 3 braccia.

Il problema domanda quanto si alza il livello dell'acqua.

Il volume della sfera è:

$$V_{SFERA} = 4/3 * \pi * r^3 = 4/3 * 22/7 * (3/2)^3 = 88/21 * 27/8 = 11 * 9/7 =$$
$$= (14 + 1/7) \text{ braccia}^3.$$

L'area della sezione orizzontale del vivaio è:

$$S = 12 * 10 = 120 \text{ braccia}^2.$$

Il volume dell'acqua è:

$$V_{ACQUA} = S * h = 120 * 8 = 960 \text{ braccia}^3.$$

Con la caduta della palla, il volume aumenta:

$$V_{FINALE} = V_{ACQUA} + V_{SFERA} = 960 + (14 + 1/7) = (974 + 1/7) \text{ braccia}^3.$$

Il nuovo livello dell'acqua, H, è dato da:

$$H = V_{FINALE} /S = (974 + 1/7) = (8 + 33/280) \text{ braccia}.$$

Il livello dell'acqua si è alzato di:

$$H – h = (8 + 33/280) – 8 = 33/280 \text{ braccia}.$$

PROPOSIZIONE 35

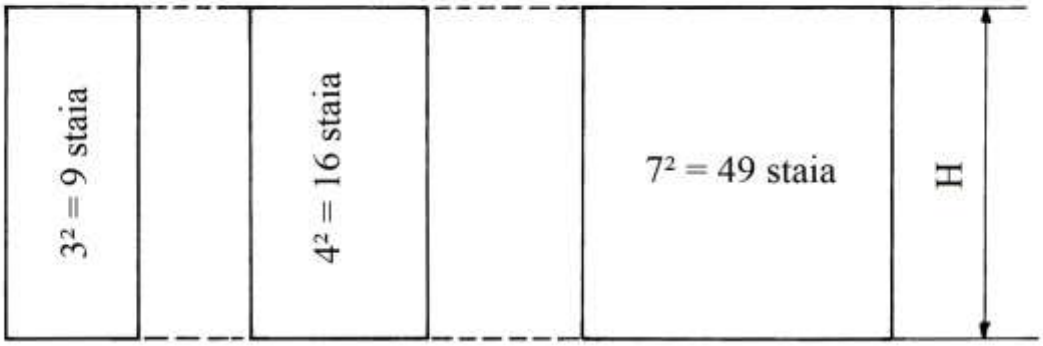
Unione di due sacche

Due sacche hanno uguale altezza, H: la prima contiene 9 staia di grano e la seconda 16:

$V_1 = 9$ e $V_2 = 16$.

Le due sacche vengono scucite e poi unite per formare una nuova sacca che ha la stessa altezza H: il problema chiede il volume in staia del grano che questa ultima può contenere.

Ovviamente, le tre sacche hanno forma circolare.



La procedura usata dallo Sfortunati contiene i seguenti passi:

* moltiplicare i due volumi: $V_1 * V_2 = 9 * 16 = 144$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{144} = 12$;
* moltiplicare per 2: $12 * 2 = 24$;
* sommare con i due volumi iniziali: $24 + V_1 + V_2 = 24 + 9 + 16 = 49$ staia,

volume della sacca risultante dall'unione delle prime due = V_3.

La procedura impiegata è riassunta nella seguente formula:

$$V_3 = 2 * \sqrt{(V_1 * V_2)} + (V_1 + V_2).$$

Una formula equivalente porta allo stesso risultato:

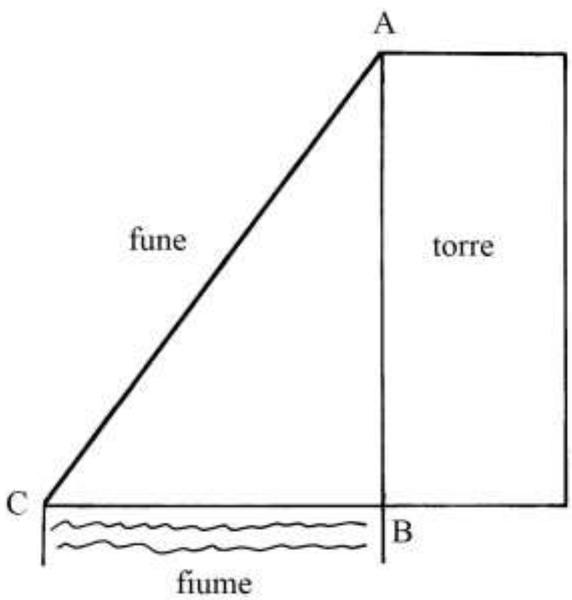
$$V_3 = (\sqrt{V_1} + \sqrt{V_2})^2 = (\sqrt{9} + \sqrt{16})^2 = (3 + 4)^2 = 7^2 = 49 \text{ staia.}$$

Le due formule rispettano semplici considerazioni: le tre sacche sono dei cilindri i volumi dei quali sono proporzionali al prodotto delle aree delle basi per l'altezza H, comune a tutte le sacche.

Semplificando, i tre volumi sono proporzionali alle aree delle rispettive basi.

PROPOSIZIONE 36
Una torre

Una torre è alta 40 bracca ed è posizionata sulla riva di un fiume che è largo 30 braccia.



Il problema domanda la lunghezza di una fune che vada dalla cima della torre alla riva opposta del fiume.

ABC è un triangolo rettangolo.

La lunghezza di AC è:

$AC^2 = AB^2 + CB^2 = 40^2 + 30^2 = 1600 + 900 = 2500$ e

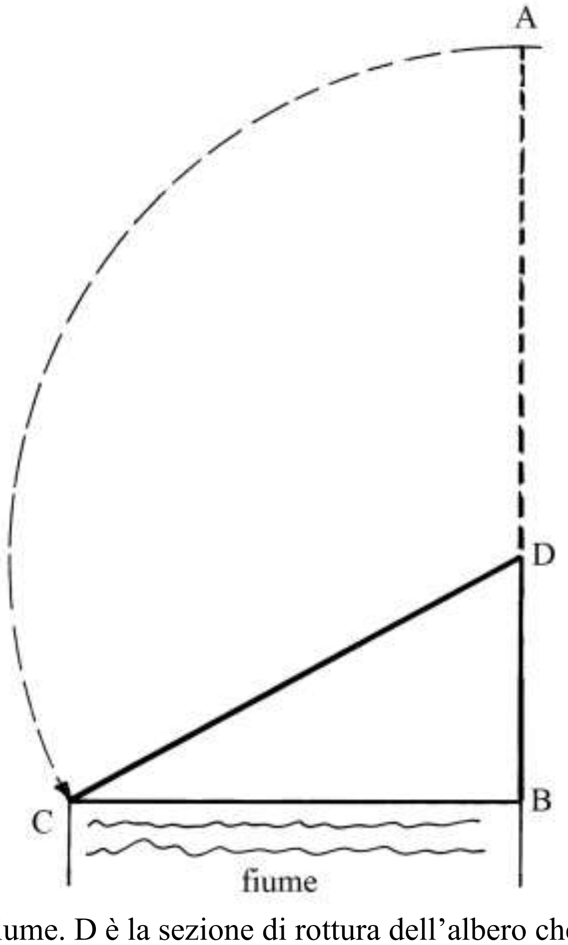
$AC = \sqrt{2500} = 50$ braccia.

Le lunghezze dei lati di ABC formano la terna derivata 30 – 40 – 50 i cui membri sono multipli di ragione 10 di quelli della prima terna primitiva 3 – 4 – 5.

PROPOSIZIONE 37
Un albero caduto

Un albero è piantato lungo la riva di un fiume ed è alto 50 braccia. Il fiume è largo 30 braccia.

Un colpo di vento rompe l'albero e la sua cima finisce sulla riva opposta del fiume.



AB è l'albero e CD è il fiume. D è la sezione di rottura dell'albero che sotto l'azione del vento ruota verso il fiume: la cima A cade sull'altra riva del fiume nel punto C.

Il problema chiede le lunghezze del tratto spezzato, DA, e del tronco rimasto in piedi, DB.

La soluzione proposta dallo Sfortunati contiene i seguenti passi:

* moltiplicare l'altezza dell'albero per sé stessa: 50 * 50 = 2500;
* moltiplicare la larghezza del fiume per sé stessa: 30 * 30 = 900;
* sottrarre 900 da 2500: 2500 – 900 = 1600;
* moltiplicare per 2 l'altezza dell'albero (AB): 50 * 2 = 100;
* dividere 1600 per 100: 1600/100 = 16 braccia, lunghezza del tronco rimasto

in piedi (DB);

* sottrarre dall'altezza dell'albero: 50 – 16 = 34 braccia, parte dell'albero tagliata (AD).

La procedura è riassunta nella formula che segue:

$$DB = (AB^2 – CB^2)/(2 * AB) = (50^2 – 30^2)/(2 * 50) = (2500 – 900)/100 =$$
$$= 1600/100 = 16 \text{ braccia.}$$

- APPROFONDIMENTO -

Il problema può essere risolto con l'aiuto dell'algebra elementare.

La lunghezza di DB è l'incognita: DB = x.

DC ha la stessa lunghezza di AD: DC = AD.

La lunghezza di AD è:

$$AD = AB – DB = 50 – x.$$

DC è l'ipotenusa del triangolo rettangolo CBD e la sua lunghezza è:

$$DC^2 = CB^2 + DB^2 = 30^2 + x^2 = 900 + x^2.$$

Dato Che DC e AD hanno uguali lunghezze, sono uguali anche i loro quadrati:

$$DC^2 = AD^2$$
$$900 + x^2 = (50 – x)^2$$
$$900 + x^2 = 2500 – 100 * x + x^2$$
$$100 * x = 2500 – 900$$
$$100 * x = 1600$$
$$x = 1600/100 = 16 \text{ braccia} \quad e$$
$$AD = AB – DB = 50 – x = 50 – 16 = 34 \text{ braccia.}$$

- -

PROPOSIZIONE 38

Botti

Una botte contiene 96 staia di vino ed è formata da 96 doghe.

Una seconda botte contiene 24 staia di vino.

Le doghe delle due botti possiedono la stessa geometria.

Il problema domanda il numero delle doghe della seconda botte.

La procedura usata dall'Autore contiene i seguenti passi:

* moltiplicare per sé stesso il numero delle doghe della prima botte: 96 * 96 = 9216;
* moltiplicare per il volume della seconda botte: 9216 * 24 = 221184;
* dividere per il volume della prima botte: 221184/96 = 2304;
* estrarre la radice quadrata: √2304 = 48, numero delle doghe della seconda botte.

- APPROFONDIMENTO -

La procedura usata può essere riassunta in una formula.

* V_1 è il volume della prima botte: V_1 = 96 staia;
* V_2 è il volume della seconda botte: V_2 = 24 staia;
* *N* è il numero delle doghe della prima botte: N = 96;
* *n* è il numero delle doghe della seconda botte.

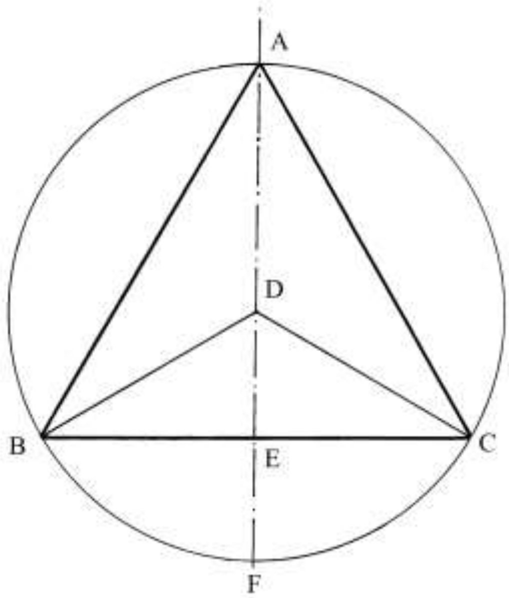
$$n = \sqrt{N^2 * V_2/V_1} = N * \sqrt{V_2/V_1} = 96 * \sqrt{24/96} = 96 * \sqrt{1/4} = 96 * ½ = 48.$$

- -

PROPOSIZIONE 39

Triangolo equilatero

ABC è un triangolo equilatero che ha lati lunghi 12; esso deve essere inscritto in un cerchio: il problema chiede il suo diametro.



La procedura usata dallo Sfortunati prevede i seguenti passi:

* moltiplicare la lunghezza di un lato per sé stessa: $12 * 12 = 144$;
* dividere per 3: $144/3 = 48$;
* sommare con 144: $48 + 144 = 192$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{192}$ [$= 8 * \sqrt{3}$], lunghezza del diametro del cerchio circoscritto, AF.

- APPROFONDIMENTO -

L'altezza di un triangolo equilatero, quale è AE, è lunga:

$AE^2 = AB^2 – BE^2 = AB^2 – (AB/2)^2 = 12^2 – 6^2 = 144 – 36 = 108$ e

$AE = \sqrt{108} = 6 * \sqrt{3}$.

L'altezza AE è lunga i ¾ del diametro AF: ED è lungo quanto EF.

Ne consegue:

$AF = AE + AE/3 = 4/3 * AE = 4/3 * (6 * \sqrt{3}) = 8 * \sqrt{3} = \sqrt{192}$, che è il risultato ottenuto dallo Sfortunati.

- -

Da questa Proposizione l'Autore trae alcune conclusioni: di seguito ne sono presentate alcune relative al triangolo equilatero inscritto.

Il quadrato della lunghezza del lato del triangolo equilatero sta al quadrato della lunghezza del diametro del cerchio circoscritto come 3 : 4:

$BC^2 : AF^2 = 3 : 4$.

Infatti:

$12^2 : (\sqrt{192})^2 = 144 : 192 = 4 : 3$.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Il quadrato della lunghezza del lato del triangolo equilatero sta al quadrato della lunghezza del raggio come 3 : 1:

$BC^2 : DB^2 = 3 : 1$.

DB è un raggio del cerchio e la sua lunghezza è:

$DB = AF/2 = ((\sqrt{192})/2 = \sqrt{(192/4)} = \sqrt{48}$.

Quindi si ha:

$12^2 : (\sqrt{48})^2 = 144 : 48 = 3 : 1$.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Il quadrato della lunghezza di un raggio, ad esempio DB, sta al quadrato della distanza del punto medio di un lato del triangolo dal centro come 4 : 1:

$DB^2 : DE^2 = 4 : 1$.

Come appena visto, DB è lungo √48.

DE è lungo metà del raggio DF:

$DE = DF/2 = DB/2 = (\sqrt{48})/2 = \sqrt{12}$.

La proporzione è:

$DB^2 : DE^2 = (\sqrt{48})^2 : (\sqrt{12})^2 = 48 : 12 = 4 : 1$.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Il quadrato della lunghezza di un lato del triangolo equilatero sta al quadrato della lunghezza di un’altezza come 4 : 3:

$BC^2 : AE^2 = 4 : 3$.

L’altezza AE ha lunghezza che è data da:

$AE^2 : AB^2 – BE^2 = AB^2 – (AB/2)^2 = ¾ * AB^2$.

La precedente proporzione può essere scritta come segue.

$BC^2 : AE^2 = AB^2 : ¾ * AB^2 = = 1 : ¾ = 4/4 : 3/4 = 4 : 3$.

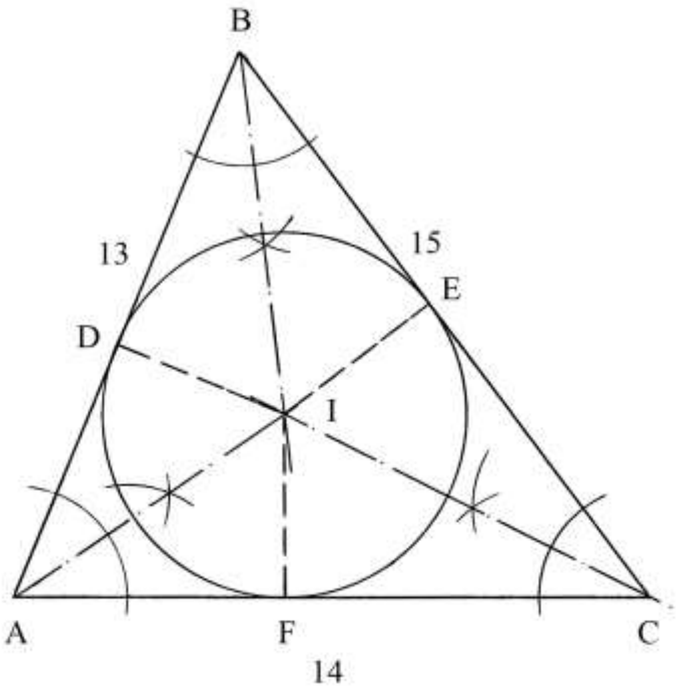
PROPOSIZIONE 39

Cerchio inscritto in un triangolo 13-14-15

Il numero della Proposizione, 39, è errato perché ripete quello della precedente.

È dato il noto triangolo che ha lati lunghi 13, 14 e 15 braccia.

Vi deve essere inscritto il più grande cerchio possibile: è domandato il suo diametro.



La procedura usata dallo Sfortunati è la seguente:

* sommare le lunghezze dei lati: AB + BC + AC = 13 + 15 + 14 = 42, perimetro;
* dividere per 2: 42/2 = 21, semiperimetro;
* dividere l’area del triangolo [calcolata nella Proposizione VII in 84 braccia^2] per il semiperimetro: 84/21 = 4 braccia, raggio del cerchio inscritto;
* moltiplicare per 2: 4 * 2 = 8 braccia, diametro del cerchio inscritto.

- APPROFONDIMENTO -

L’Autore non dice niente riguardo alla posizione del centro del cerchio inscritto e alla sua determinazione.

Le bisettrici dei tre angoli interni del triangolo si incontrano in un punto, I, che è chiamato *incentro*, che è il centro del cerchio inscritto.

Si richiama *inraggio* la distanza dell’incentro dai tre lati: ID = IE = IF.

Il cerchio inscritto è detto *incerchio*.

- -

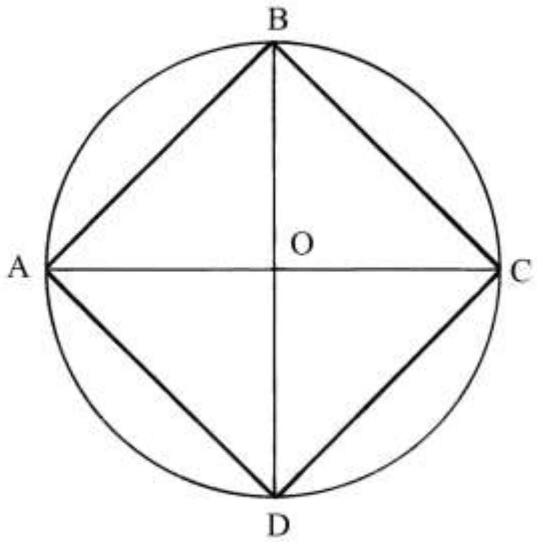
PROPOSIZIONE 40
Quadrato inscritto in un cerchio

Un cerchio ha diametro lungo 10: vi deve essere inscritto il più grande quadrato possibile.

È chiesta la lunghezza dei lati del quadrato.

AC e BD sono due diametri fra loro perpendicolari che si intersecano nel centro del cerchio, che è O.

ABCD è il quadrato inscritto.



L'Autore risolve affermando, correttamente, che il quadrato della lunghezza del diametro sta al quadrato della lunghezza del lato del quadrato come 2 : 1:

$AC^2 : AB^2 = 100 : 50 = 2 : 1$.

La lunghezza del lato AB è fissata in: $AB = \sqrt{50}$.

- APPROFONDIMENTO -

La lunghezza di AB è data da:

$AB^2 = OA^2 + OB^2 = (10/2)^2 + (10/2)^2 = 100/4 + 100/4 = 200/4 = 50$ e

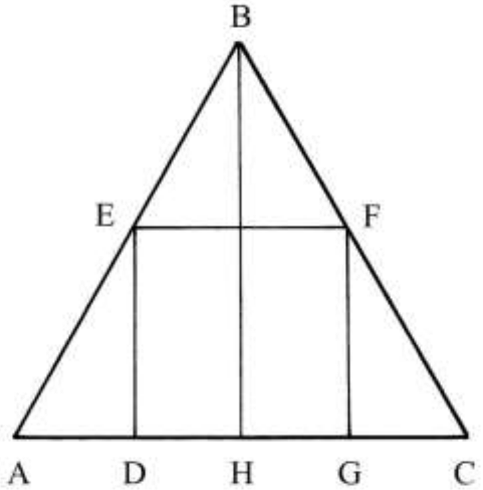
$AB = \sqrt{50}$.

- -

PROPOSIZIONE 41

Quadrato inscritto in un triangolo equilatero

Un triangolo equilatero ha lati lunghi 10 braccia. Il problema chiede la lunghezza del lato del più grande quadrato in esso inscritto.



La soluzione che presenta l'Autore è aritmetica: esistono pure metodi geometrici.

I diversi metodi producono un quadrato che possiede tutti i vertici posizionati sui lati del triangolo: un lato del quadrato giace interamente su di un lato del triangolo.

Ecco i passi della procedura usata dallo Sfortunati:

* moltiplicare per 3 la lunghezza di un lato del triangolo [è il perimetro]: 3 * 10 = 30;
* moltiplicare per sé stesso: 30 * 30 = 900;
* dividere per 3: 900/3 = 300;
* sommare con 900: 300 + 900 = 1200;
* estrarre la radice quadrata: √1200;
* sottrarre il perimetro: (√1200 – 30) [≈ 4,641] braccia, lunghezza dei lati del quadrato DEFG.

La procedura è riassunta nella formula che segue, con *L* lunghezza del lato del triangolo e ℓ lunghezza del lato del quadrato:

$$\ell = \sqrt{[(3 * L)^2 * 4/3]} - (3 * L).$$

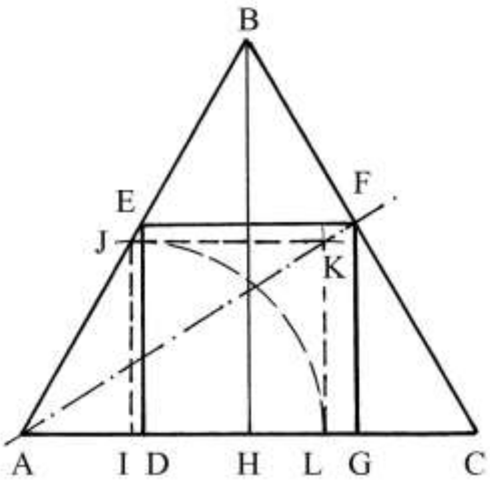
\- APPROFONDIMENTO -

Un problema identico era contenuto nel "*Libro di ragioni*" compilato dal mercante e abacista fiorentino Paolo Gherardi, attivo fra Firenze e Montpellier a cavallo del 1300. Il trattato sarebbe stato composto intorno al 1328.

Anche Gherardi proponeva l'inscrizione di un quadrato in uno *scudo* (un triangolo pure equilatero) con lati lunghi braccia: la soluzione che proponeva ricavava la lunghezza dei lati del quadrato inscritto per via aritmetica.

È possibile inscrivere il quadrato usando un metodo geometrico, come è il caso della soluzione qui di seguito proposta.

All'interno del triangolo equilatero ABC disegnare un quadrato generico IJKL, con soltanto *tre* vertici posizionati sui lati di ABC: il primo lato è IJ, perpendicolare a AC e con l'aiuto del compasso completare il poligono.



Il lato IL è interamente collocato su AC e il vertice K è interno al triangolo.

Tracciare una retta passante per i punti A e K, fino a tagliare BC in F.

Da F condurre le parallele a AC (è FE) e a BH (è FG).

Infine, dal punto E abbassare la perpendicolare a AC: è il quarto lato, ED.

Il quadrato DEFG ha tutti i vertici posizionati sui lati di ABC.

I quadrati ottenuti con il metodo aritmetico dello Sfortunati e con quello geometrico hanno uguali dimensioni: i due disegni se sovrapposti lo possono confermare. È possibile dimostrarlo con l'aiuto dell'algebra elementare, come è suggerito nel paragrafo che segue.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Nell'ultimo schema, il triangolo ABC è diviso in *quattro* poligoni:

* il quadrato DEFG con lati di lunghezza incognita: DE = "x";
* il triangolo equilatero EBF che ha lati lunghi quanto EF = DE;
* i due triangoli rettangoli AED e GFC che hanno uguali dimensioni.

Questi due ultimi possiedono angoli di ampiezze uguali a EF = DE = x;

* i due triangoli rettangoli AED e GFC che hanno uguali dimensioni.

Questi due ultimi possiedono angoli di ampiezze uguali a 30°, 60° e 90°:

* AED = CFG = 30°;
* EAD = FCG = 60°
* EIA = FGC = 90°.

L'ipotenusa AE del triangolo rettangolo AED è lunga:

$$AE = AB – ED = AB – EF = (AB – x).$$

Il seno dell'angolo EAD è dato da:

$$\text{sen } AED = ED/AE = x/(AB – x) = x/(10 – x).$$

Dato che questo angolo è ampio 60°, il suo seno vale:

$$\text{sen } AED = \text{sen } 60° = (\sqrt{3})/2.$$

Uguagliando le due espressioni si ottiene:

$$x/(10 – x) = (\sqrt{3})/2$$
$$x = (10 – x) * (\sqrt{3})/2$$
$$2 * x = 10 * \sqrt{3} – x * \sqrt{3}$$
$$2 * x + x * \sqrt{3} = 10 * \sqrt{3}$$
$$x * (2 + \sqrt{3}) = 10 * \sqrt{3}$$
$$x = (10 * \sqrt{3})/(2 + \sqrt{3}) = (10 * \sqrt{3}) * (2 – \sqrt{3})/[(2 + \sqrt{3}) * (2 – \sqrt{3})] =$$
$$= (20 * \sqrt{3} – 10 * \sqrt{3})/(4 – 3) = (20 * \sqrt{3} – 10 * \sqrt{3}) \approx 4{,}641 \text{braccia}.$$

Il risultato è uguale a quello calcolato dallo Sfortunati.

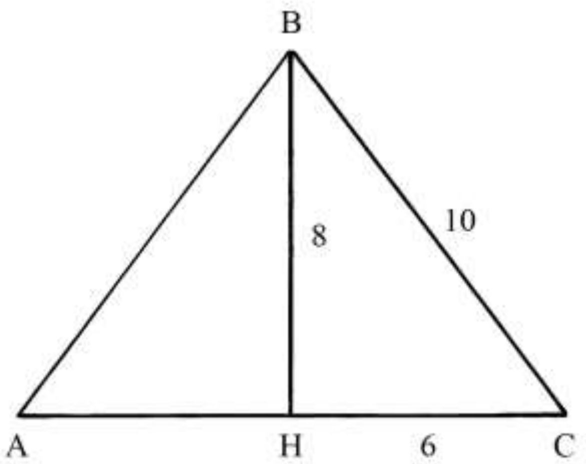
- -

PROPOSIZIONE 42

Un padiglione

Un padiglione è sostenuto da un fusto alto 8 braccia. Quando è teso, il panno che lo forma è lungo dalla cima a terra 10 braccia.

Il problema chiede l'area del panno.



Il raggio AH è dato da:

$$AH^2 = AB^2 – BH^2 = 10^2 – 8^2 = 100 – 64 = 36 \quad \text{e}$$
$$AH = \sqrt{36} = 6 \text{ braccia}.$$

Il diametro d = AC è:

AC = 2 * AH = 2 * 6 = 12 braccia.

Nello schema compare di nuovo la terna 3-4-5: le lunghezze dei lati dei due triangoli rettangoli ABH e BHC formano la terna derivata 6-8-10.

Il panno del padiglione ha la forma equivalente a quella della superficie laterale di un cono e la sua area S è data da:

S = π * r * a, dove *r* è il base (r = 6) e *a* è l'apotema BA (a = 10).

S = 22/7 * 6 * 10 = (188 + 4/7) $braccia^2$.

Lo Sfortunati calcola prima la lunghezza *c* della circonferenza della base:

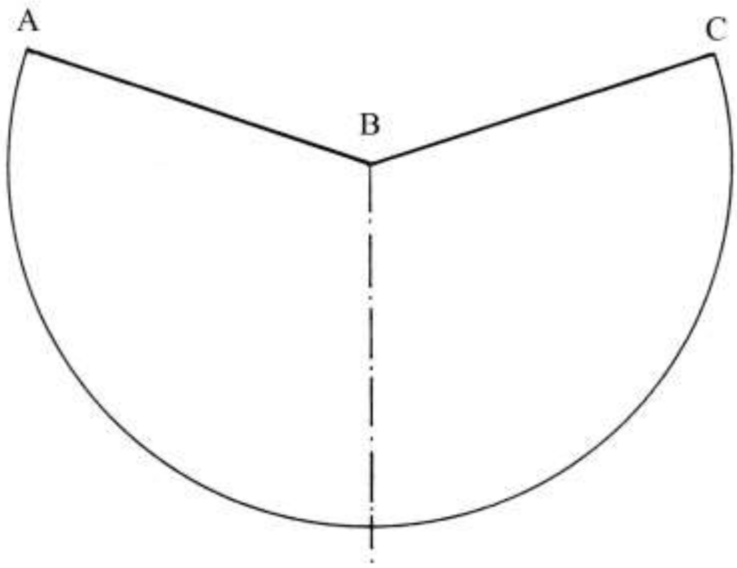
c = 2 * π * r = π * d = 22/7 * 12 = (37 + 5/7) braccia.

Poi moltiplica la lunghezza della circonferenza per quella dell'apotema *a* e divide per 2:

S = c * a/2 = (37 + 5/7) * 10/2 = (188 + 4/7) $braccia^2$.

Il risultato è uguale.

La soluzione proposta dallo Sfortunati assimila la superficie laterale del padiglione all'area di un settore circolare che ha raggio lungo quanto l'apotema BA = *a* e l'arco lungo quanto la circonferenza della base *c*.



La formula è:

S = c * a/2 = (37 + 5/7) * 10/2 = (188 + 4/7) $braccia^2$.

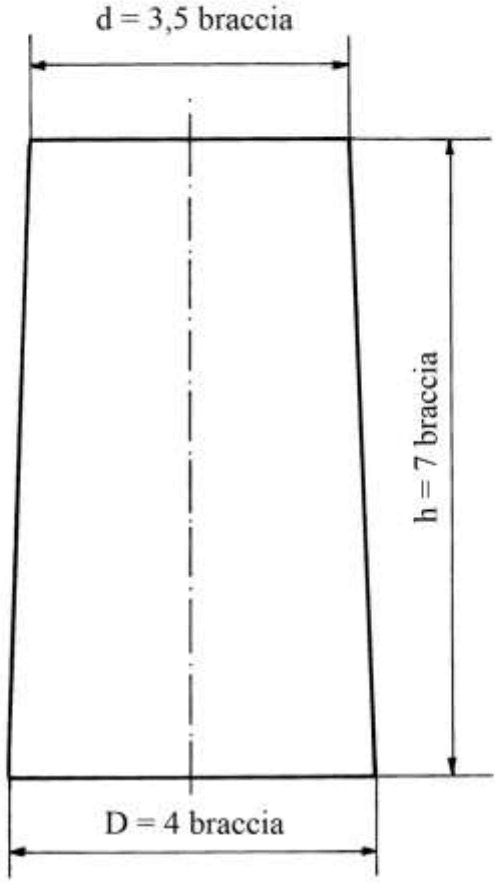
PROPOSIZIONE 43

Volume di una fornace

Una fornace per la calce (*calcina* la chiama l'Autore) ha forma circolare a tronco di cono: è alta 7 braccia, il fondo ha diametro di 4 e la bocca (3 + ½) braccia.

È chiesto il volume della calce che può contenere.

Per la soluzione, l'Autore richiama quella utilizzata per la Proposizione 32.



La procedura si discosta in parte da quella appena citata e contiene i seguenti passi:

* sommare i due diametri: $(D + d)$;
* dividere per 2: $(D + d)/2$;
* moltiplicare per sé stesso: $[(D + d)/2]^2$;
* moltiplicare per l'altezza h: $h * [(D + d)/2]^2$;
* moltiplicare per 11: $11 * h * [(D + d)/2]^2$;
* dividere per 14: $11/14 * h * [(D + d)/2]^2$,

braccia cubiche, volume della fornace.

Non sono riportati i dati forniti dallo Sfortunati perché probabilmente errati.

Con la precedente procedura, il volume V che risulta (espresso in numeri decimali) è:

$$V = 11/14 * 7 * [(4 + 3,5)/2]^2 = 77,34375 \text{ braccia}^3.$$

Poi l'Autore converte in staia (1 braccio^3 = 11 staia):

$$V = 77,34375 * 11 = 850,78125 \text{ staia}.$$

Se la misura è *a colmo*, un braccio cubico equivale a 10 staia:

$$V = 77,34375 * 10 = 773,4375 \text{ staia}.$$

\- APPROFONDIMENTO -

Nel quarto libro del trattato "*I primi quattro libri* d'architettura", Pietro Cataneo (Siena circa 1510 – 1573) descrive, fra le altre cose, le unità usate per misurare il volume delle "cose corporee": colonne, piramidi, muri, tini, botti, fornaci, fosse per il grano.

Cataneo cita alcune unità di misura usate a Siena, a Firenze e in gran parte della Toscana. Ecco una sintesi:

* 1 braccio^3 = 11 staia di vino = 11 staia di olio = 11 staia di cereali;
* 1 braccio^3 = 10 staia di calcina di gesso = 10 staia di inerti.

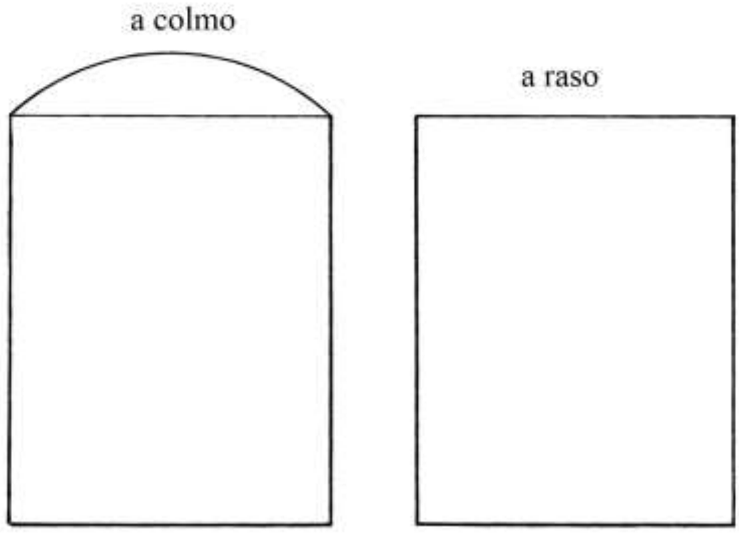
Lo staio aveva dei sottomultipli:
* 1 staio = 4 quarti;
* 1 quarto = 4 boccali per cui si ha:

1 staio = 16 boccali.

Infine, Cataneo afferma che 24 staia formano *un moggio*.

I cereali, il vino e l'olio riempiono perfettamente un recipiente, mentre gli inerti non lo fanno: ciò giustifica il diverso valore che il braccio cubico aveva in relazione ai materiali contenuti.

Lo schema che segue mostra la differenza fra la misura *a colmo* e la misura *a raso*:



All'epoca dello Sfortunati erano già in vigore a Siena i rapporti fra unità di misura descritti dal Cataneo.

A causa delle frodi che venivano commesse alcuni Comuni toscani imposero l'uso della *misura a colmo* per la compravendita del grano: tutto ciò può aver avuto qualche influenza sui valori e sui multipli e sottomultipli dello staio.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Applichiamo al caso concreto la nota formula per il calcolo del volume di un tronco di cono. *R* è il raggio del fondo e *r* quello della bocca:

$R = D/2 = 4/2 = 2$ braccia;

$r = d/2 = 3,5/2 = 1,75$ braccia.

$V = 1/3 * \pi * h * (R^2 + r^2 + R * r) = 1/3 * 22/7 * 7 * (2^2 + 1,75^2 + 2 * 1,75) =$

$= 22/3 * (4 + 3,0625 + 3,5) = 77,458(33)$.

I risultati della procedura proposta dallo Sfortunati e della formula moderna sono pressoché uguali.

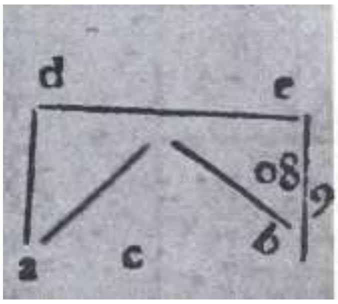
Nota: il numero 77,458(33) è decimale e periodico: "458" è l'*antiperiodo* e "33" è il *periodo* che si ripete all'infinito, qui racchiuso fra parentesi tonde.

PROPOSIZIONE 44

Corda tesa fra due torri

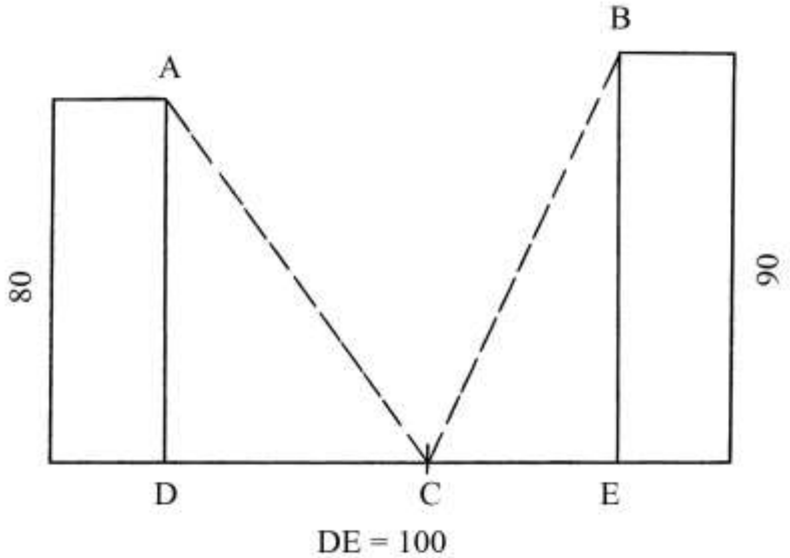
Due torri sono fra separate da una distanza di 100 braccia. La prima è alta 80 e l'altra è 90 braccia.

Lo schema originale è probabilmente capovolto:



Il testo è abbastanza oscuro e può essere interpretato come segue: una corda è stesa fra le cime delle due torri ed è fissata al terreno in un punto intermedio fra le due torri.

È chiesta la distanza del punto di fissaggio C dai piedi delle due torri: *è implicito che i due tratti della fune abbiano lunghezze uguali*: AC = CB.



La procedura proposta dallo Sfortunati sembra essere la seguente:

- moltiplicare per sé stessa l'altezza AD: 80 * 80 = 6400;
- moltiplicare per sé stessa l'altezza BE: 90 * 90 = 8100;
- sottrarre 6400 da 8100: 8100 – 6400 = 1700;
- moltiplicare per sé stessa la distanza DE: 100 * 100 = 10000;
- sommare con 1700: 10000 + 1700 = 11700;
- dividere per il doppio della distanza DE: 11700/(2 * 100) = 58,5 braccia, lunghezza di DC;
- sottrarre dalla lunghezza di DE: 100 – 58,5 = 41,5 braccia, lunghezza di CE.

La procedura è riassunta nella formula che segue:

$$DC = [(BE^2 – AD^2) + DE^2]/(2 * DE).$$

- APPROFONDIMENTO -

Il problema è un classico dei trattati di abaco: nel punto C può essere una fonte verso la quale giungono contemporaneamente per abbeverarsi due uccelli che si muovono dalle cime delle due torri.

I percorsi lineari effettuati dai due volatili hanno uguale lunghezza, come accade ai tratti di corda AC e BC: AC = BC.

Risolviamo con l'aiuto dell'algebra elementare.

DC è la lunghezza incognita: DC = x e CE = DE – DC = (100 – x).

AC e BC sono le ipotenuse rispettivamente dei triangoli rettangoli ADC e BCE: le loro lunghezze sono:

$AC^2 = AD^2 + DC^2 = (80^2 + x^2)$

$BC^2 = BE^2 + CE^2 = 90^2 + (100 – x)^2$

Dato che AC e BC hanno uguali lunghezze, sono uguali anche i loro quadrati:

$AC^2 = BC^2$.

$(80^2 + x^2) = 90^2 + (100 – x)^2$

$6400 + x^2 = 8100 + 10000 – 200 * x + x^2$

$200 * x = 18100 – 6400$

$200 * x = 11700$

$x = 11700/200 = 58,5$ braccia = DC.

Ne consegue:

CE = DE – DC = 100 – 58,5 = 41,5 braccia.

Il risultato è uguale a quello ottenuto dallo Sfortunati.

La lunghezza di AC è:

$AC^2 = AD^2 + DC^2 = 80^2 + 58,5^2 = 6400 + 3422,25 = 9822,25$ e

$AC = \sqrt{9822,25} \approx 99,11$ braccia.

L'intera corda ACB è lunga:

ACB = AC + CB = 2 * AC = 2 * 99,11 = 198,22 braccia.

- -

PROPOSIZIONE 45

Semicerchio inscritto in un triangolo 13-14-15

È dato un triangolo con lati lunghi 13, 14 e 15 braccia.

Vi deve essere inscritto il più grande semicerchio possibile.

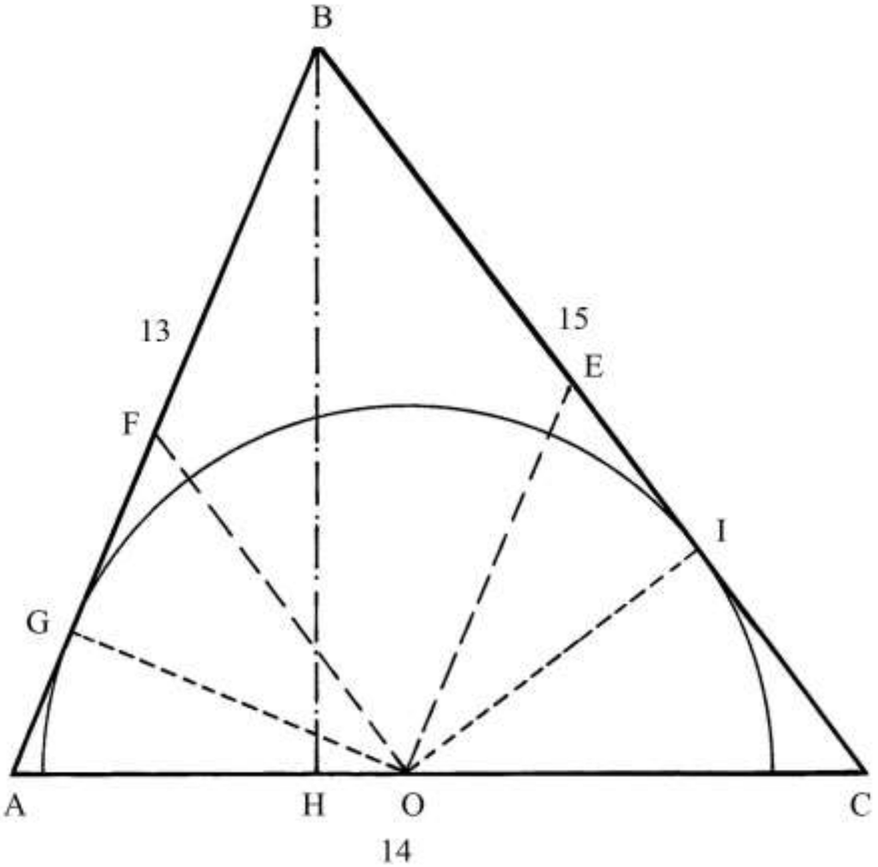
In precedenza sono già state ricavate la lunghezza dell'altezza BH e l'area del triangolo:

* BH = 12 braccia;
* $S_{ABC} = 84$ braccia^2.

Senza indicarlo esplicitamente, l'Autore fa coincidere il diametro del semicerchio con il lato di base AC.

La procedura proposta dallo Sfortunati è:

* sommare le lunghezze dei due lati che non coincidono con il con il diametro del semicerchio: AB + BC = 13 + 15 = 28;
* dividere per 2: 28/2 = 14;
* dividere l'area del triangolo per 14: $S_{ABC}/14 = 84/14 = 6$;
* moltiplicare per 2: 6 * 2 = 12 braccia, diametro del semicerchio inscritto.



\- APPROFONDIMENTO -

Lo Sfortunati non dice nulla riguardo alla determinazione della posizione del centro O del semicerchio, che deve risultare tangente ai lati AB e BC.

La posizione di O può essere stabilita per via geometrica.

All'interno del triangolo tracciare una corda parallela al lato AB e da esso distanziata di 6 braccia: questa è la misura del raggio del semicerchio da inscrivere; la corda è EO.

Poi disegnare una seconda corda parallela al lato BC, sempre a distanza di 6 braccia: è FO.

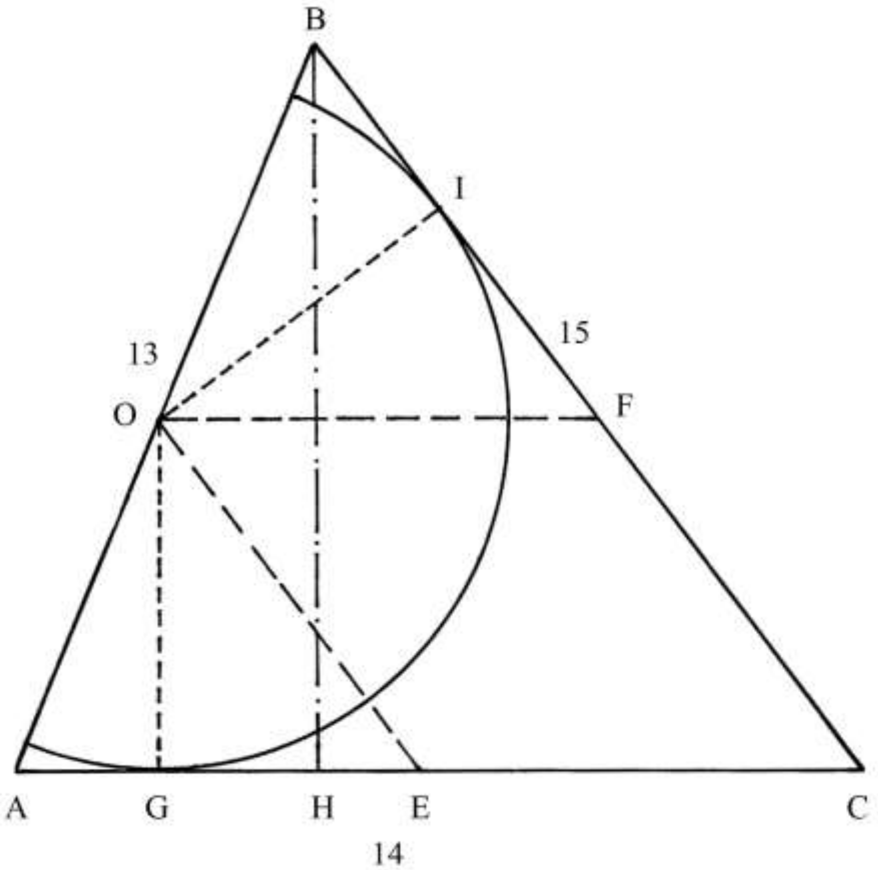
Le due corde si incontrano nel punto O che è situato sul lato AC ed è il centro del semicerchio di diametro 12 braccia.

Da O sono infine tracciate le perpendicolari ai lati AB e BC: sono i raggi OG e OI. G e I sono i punti di tangenza fra la semicirconferenza e i due lati AB e BC.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

È possibile inscrivere altri due semicerchi nel triangolo ABC: essi devono avere i diametri posizionati sui due rimanenti lati, AB e BC.

Il semicerchio basato sul lato AB è così disegnato:



*	sommare le lunghezze dei lati AC e BC:	14 + 15 = 29;
*	dividere per 2:	29/2 = 14,5;
*	dividere l’area del triangolo per 14,5:	84/14,5 ≈ 5,793 → ≈ 5,78 braccia, raggio del semicerchio;
*	moltiplicare per 2:	5,78 * 2 = 11,56 braccia, diametro del semicerchio.

Tracciare due corde parallele ai lati AC e BC, a distanza di 5,78 braccia da essi: i due segmenti sono OE e OF e si incontrano nel punto O posizionato sul lato AB, il più corto dei lati del triangolo ABC.

Da O condurre le perpendicolari a AC (è OG) e a BC (è OI): OG e OI sono due raggi del semicerchio di centro O e raggio 5,78.

G e I sono i punti di tangenza della semicirconferenza con i due lati del triangolo.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

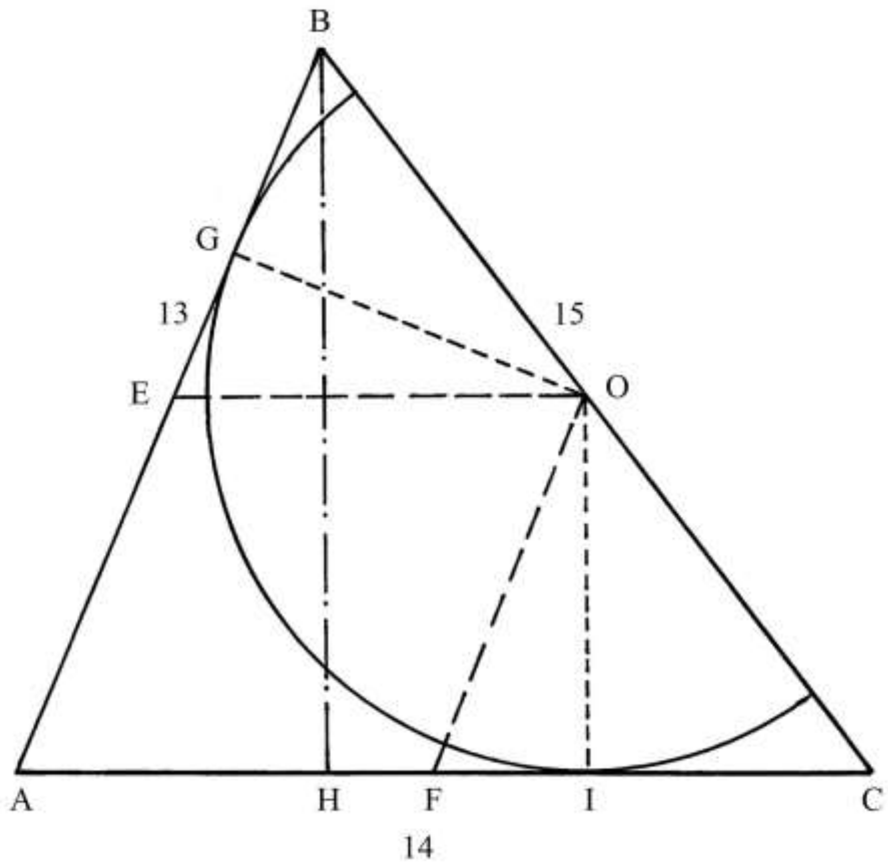
Infine, il terzo semicerchio è costruito come segue:

*	sommare le lunghezze dei lati AB e AC:	13 + 14 = 27;
*	dividere per 2:	27/2 = 13,5;
*	dividere l’area del triangolo per 13,5:	84/13,5 = 6,(22) braccia, raggio del semicerchio;
*	moltiplicare per 2:	6,(22) * 2 = 12,(44) braccia, diametro del semicerchio.

Disegnare due corde parallele ai lati AC e AB, a distanza di 6,(22) braccia da essi. I due segmenti sono EO e FO, che si incontrano nel punto O collocato sul lato BC.

Da O tracciare le perpendicolari ai lati AB (è OG) e AC (è OI): OG e OI sono due raggi del semicerchio di centro O e raggio 6,(22) braccia.

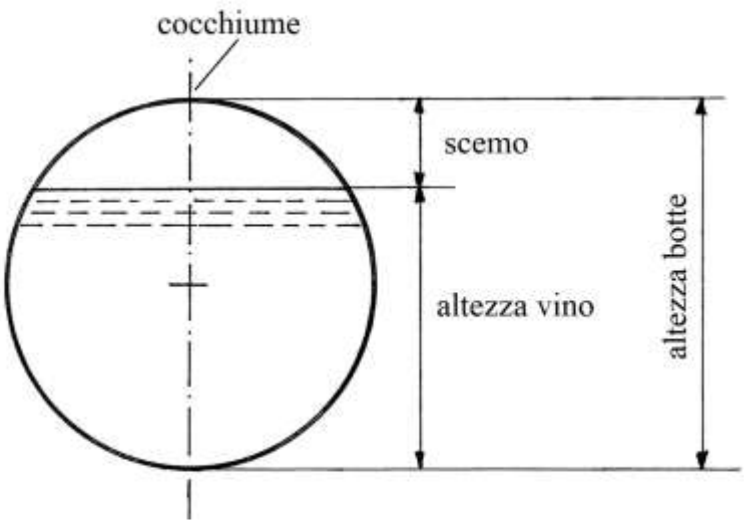
Questo semicerchio ha raggio leggermente più lungo di quelli precedenti.



- -

LA MISURA DELLE BOTTI

La parte finale del trattato è dedicata alla misura delle botti.
Lo *scemo* è l'altezza della colonna d'aria sovrastante il pelo libero del liquido:



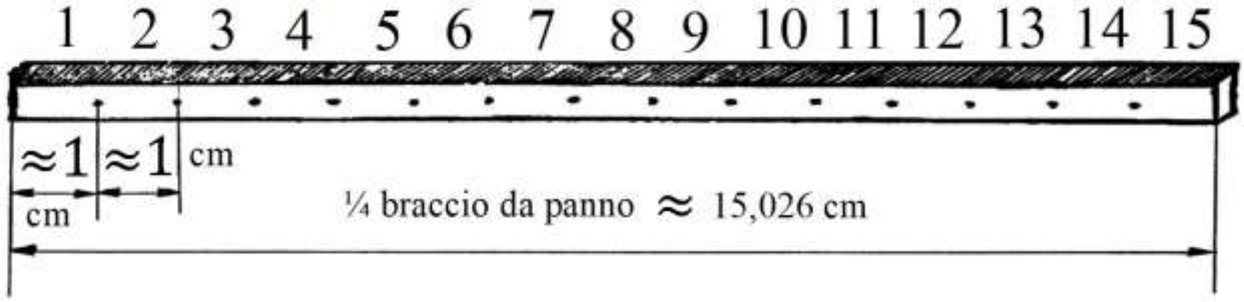
Lo schema mostra la sezione di una botte di forma circolare; sono evidenziati lo *scemo* e l'altezza del vino: lo loro somma costituisce l'altezza della botte.

La misura dello *scemo* era fatta con delle aste graduate, le *stagie* (*staggiuoli* secondo lo Sfortunati): il vino bagna l'asta ed è possibile leggere la profondità del liquido contenuto nella botte.

La stagia era conosciuta con diversi nomi: la stazza (da cui *stazzatura* delle botti), riga da misuratore, bacchetta cadometrica, la velta e la gauge (in Francia).

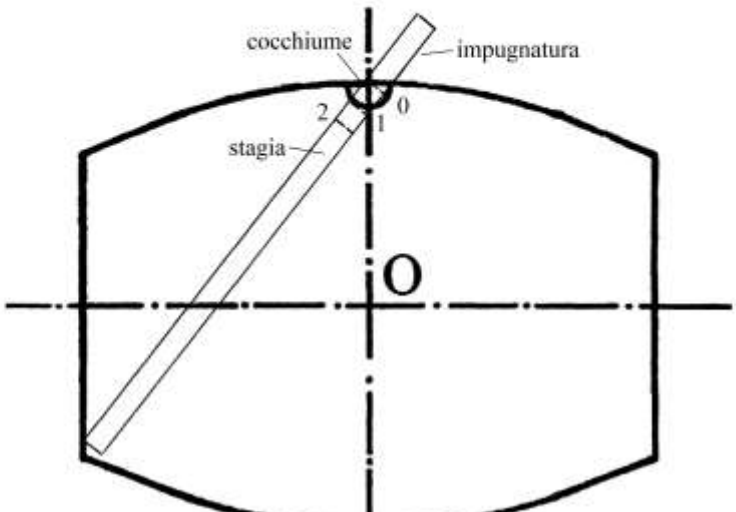
La stagia doveva recare delle tacche o dei fori per misurare il livello del vino.

Uno dei pochissimi esempi di questi strumenti è contenuto nel trattato di Giovanni Sfortunati:



Lo strumento aveva la forma di un prisma a base quadrata e su di una faccia laterale recava *quattordici* fori a uguale distanza che lo dividevano in 15 parti uguali. Lo strumento era lungo un quarto di braccio e cioè 60,1055/4 = 15,026 cm: ciascuna delle divisioni corrispondeva a ≈ 1 cm.

La stagia veniva inserita obliquamente nella botte attraverso il cocchiume, fino a farle toccare un'estremità:



Le cifre "0", "1" e "2" fanno parte della scala forse incisa sull'asta. Lo "0" doveva combaciare con il cocchiume.

Fra gli argomenti affrontati nel suo trattato vi è lo studio dei metodi di misura del contenuto delle botti da vino (e quindi anche dei loro *scemi*): allo scopo lo Sfortunati utilizzò le unità di misura lineari e volumetriche in uso a Siena all'epoca, all'inizio del Cinquecento.

L'edizione del 1561 contiene ben *ventuno* pagine di tabelle.

Interessanti sono le considerazioni che Sfortunati fa riguardo ai metodi usati dai misuratori senesi. Essi impiegavano il *braccio da panno*, lungo l'equivalente di 60,1055 cm, che da essi era suddiviso in 24, oppure in 45, 48 o anche 60 parti uguali: ciascuna di queste parti era chiamata *ponto*: probabilmente *ponto* stava per *punto.*

L'Autore ricordale già citate unità di misura dei volumi:

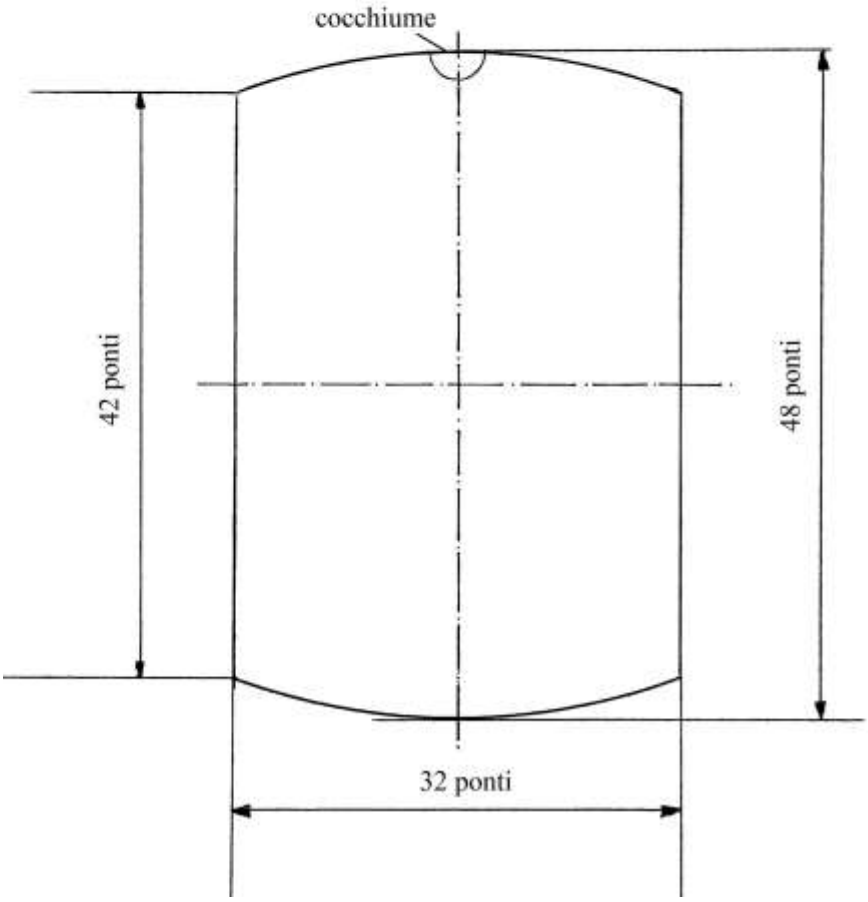
1 staio = 16 (= 2^4) boccali (o metadelle);
1 boccale = 4 (= 2^2) quartucci;
1 staio = 64 (= 2^6) quartucci.

A Siena erano usati due multipli dello staio:

1 soma = 2 barili = 4 (= 2^2) staia = 64 (= 2^6) boccali = 256 (= 2^8) quartucci.

Tutte queste unità erano fra loro legate da rapporti espressi da potenze di 2.

Lo Sfortunati fa l'esempio di una botte, probabilmente circolare, che ha i fondi di uguali dimensioni:



Egli la misura con il *ponto* sottomultiplo del braccio senese nel rapporto:

1 braccio = 45 ponti   e
1 ponto = 1/45 di braccio = 1/45 * 60,1055 = 1,33567 cm.

Sulla base di questo rapporto, le dimensioni della botte risulterebbero:

* diametro dei fondi: 42/45 * 60,1055 = 56,14 cm;
* diametro al cocchiume: 48/45 * 60,1055 = 64,11 cm;
* lunghezza: 32/45 * 60,1055 = 42,74 cm.

Sfortunati calcola il volume della botte con una procedura un po' strana:

* moltiplicare la lunghezza della botte per il diametro dei fondi: 32 * 42 = 1344 [ponti^2];
* moltiplicare il precedente risultato per il diametro al cocchiume:

1344 * 48 = 64512 [ponti^3].

L'Autore fornisce un risultato uguale a 645: egli ha diviso il risultato per 100, ma non spiega il perché: in modo implicito, l'Autore fissa in 100 il numero dei boccali che misurano il volume della botte:

100 boccali = (96 + 4) boccali = (6 staia + 4 boccali).

Ne consegue:

64512 ponti^3 = 100 boccali   e

1 boccale = 64512/100 = 645,12 ponti^3.

Questo ultimo dato è confermato dal valore che è introdotto nella procedura che segue:

645,12 ponti^3 ≈ 646 ponti^3.

L'Autore propone poi un'altra procedura:

* sommare le due *altezze* (e cioè le lunghezze del diametro al fondo e di quello al cocchiume): 42 + 48 = 90;
* dividere per 2: 90/2 = 45 [e cioè calcola l'*altezza ragguagliata* della botte];
* moltiplicare per sé stesso: 45 * 45 = 2025;
* moltiplicare per la lunghezza della botte: 2025 * 32 = 64800 [ponti^3].

A questo punto, Sfortunati introduce le equivalenze con le unità di misura senesi:

* 1 quartuccio = (161 + ½) ponti^3;
* 1 boccale = 646 ponti^3;
* 1 staio = 10336 ponti^3.

Sulla base di questi valori, la conversione del volume espresso da 64800 [ponti^3] fornisce il seguente risultato:

Volume $_{\text{BOTTE}}$ = (6 staia + 4 boccali + 1 quartuccio e 1/5).

Alle carte 116 *verso* e 117 *recto* sembra fornire un'informazione relativa al peso del vino: il vino leggero e *brusco* pesa un po' meno di quello dolce. Una botte contiene 256 *libbre* di vino (la libbra era un'unità di peso e non di volume): 256 libbre formano una *soma* e si hanno le seguenti relazioni:

1 soma = 2 barili = 4 staia = 256 (= 2^8) libbre

1 staio = 1 soma/4 = 256/4 = 64 libbre

1 boccale = 1 staio/16 = 64/16 = 4 libbre

1 quartuccio = 1 boccale/4 = 4/4 = 1 libbra.

La *libbra* pesava l'equivalente di 339,5 grammi.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Le tre pagine finali del trattato di Sfortunati contengono la descrizione di un ulteriore metodo per il calcolo delle quantità di vino contenute nelle botti. Come accade a gran parte del libro non sono presenti figure, schemi o diagrammi esplicativi, ciò che avrebbe facilitato la comprensione da parte dei lettori.

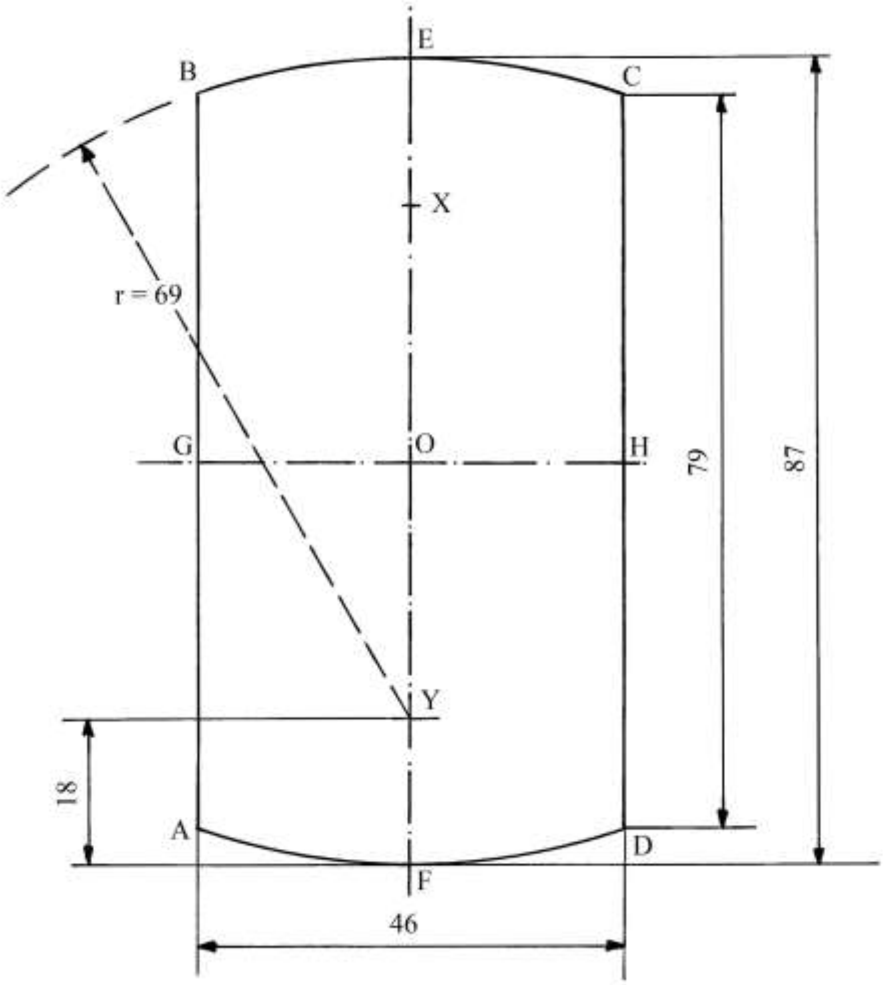
Una botte ha le seguenti dimensioni:

* capacità: 3 some + 1 staio (= 13 staia);
* diametro al cocchiume: 87 ponti;
* diametro del (o dei) fondo/i: 79 ponti;
* distanza fra i fondi: 46 ponti;
* volume: 208 boccali.

Il ponto usato in queste tre pagine del trattato è uguale a *1/60* (e non 1/45) della lunghezza del braccio e quindi:

1 ponto = 1 braccio/60 ≈ 60,1055/60 ≈ 1,002 cm, arrotondato a 1 cm.

Notiamo che in precedenza Sfortunati aveva usato il ponto uguale a *1/45* di braccio.



La botte di questo esempio potrebbe avere avuto un profilo delimitato da due archi di circonferenza di raggio XA = YB = 69 ponti. I due centri X e Y sono posizionati sull'asse di simmetria EF a 18 ponti di distanza rispettivamente da E e da F e cioè EX = FY = 18 ponti.

L'Autore richiama il volume di metà della botte e cioè 104 boccali. Infatti:

Volume $_{\text{METÀ BOTTE}}$ = 13 staia/2 = (6 + ½) staia = (6 + ½) * 16 = 104 boccali.

La procedura impiegata contiene i seguenti passi:

* moltiplicare il diametro al cocchiume per quello di un fondo: 87 * 79 = 6873 [ponti^2];
* moltiplicare per la lunghezza della botte: 6873 * 46 = 316158 [ponti^3];
* dividere per 1520 [Sfortunati introduce senza alcuna spiegazione un nuovo valore per il boccale: 1 boccale = 1520 ponti^3]:

  316158/1520 ≈ 207,998 arrotondato a 208 boccali.

- APPROFONDIMENTO -

Proponiamo un'ipotesi riguardo alle differenti equivalenze fra boccali e ponti^3: se il braccio è diviso in 45 ponti, il boccale vale:

1 boccale = 646 ponti^3.

Con la divisione della lunghezza del braccio in 60 ponti, il volume del boccale è:

1 boccale = 1520 ponti^3.

Sembra ragionevole proporre la seguente proporzione:

$646 : 45^3 = 1520 : 60^3$.

In assenza di indicazioni da parte dello Sfortunati, questa ipotesi sembra l'unica possibile.

- -

A questo punto è utile riepilogare le nuove equivalenze secondo l'abacista senese:

* 1 ponto = 1/60 braccio;
* 1 boccale = 1520 $ponti^3$;
* 1 staio = 16 boccali = 16 * 1520 = 24320 $ponti^3$.

Dato che i 316158 [$ponti^3$] calcolati da Sfortunati devono equivalere a 13 staia, l'Autore introduce il valore convenzionale di 24320 (=16*1520) per verificare il risultato del calcolo del volume in 13 staia:

$$Volume_{BOTTE} = 316158/24320 \approx 12{,}9999$$, arrotondato a 13 staia.

A questo riguardo l'esatto valore in *$ponti^3$ convenzionali* è:

$$13 \text{ staia} * 24320 = 316160.$$

Il volume effettivo della botte in boccali vale:

$$Volume_{BOTTE} = 13 \text{ staia} * 16 = 208 \text{ boccali}.$$

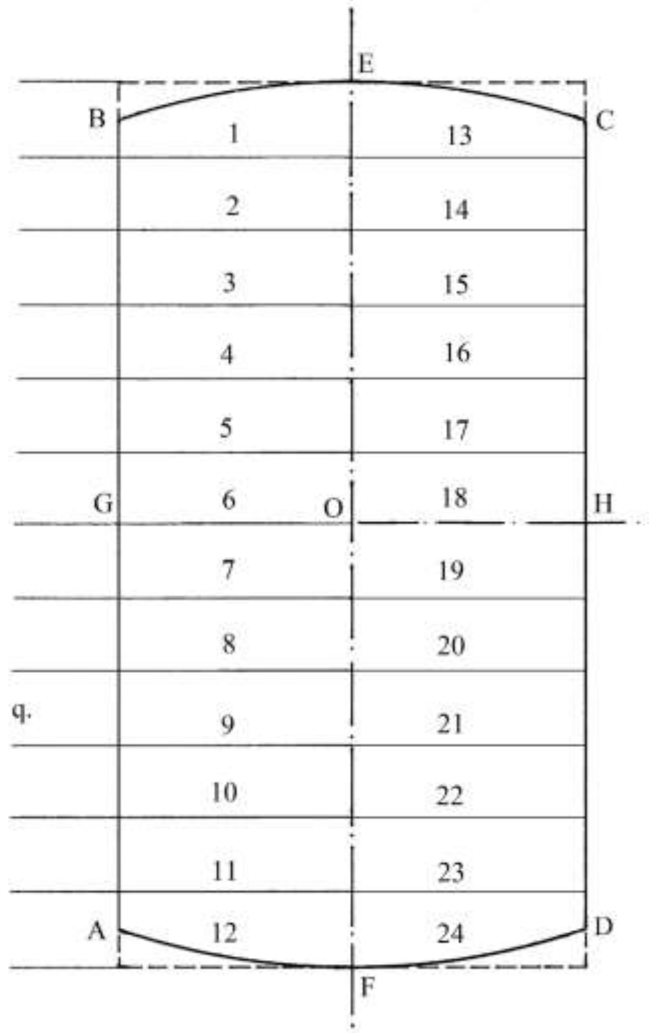
La scomposizione in fattori primi dei due numeri mostra i rapporti esistenti fra di loro:

$$24320 = 2^8 * 5 * 19$$

$$1520 = 2^4 * 5 * 19.$$

Infatti, la divisione 24320/1520 dà come risultato 2^4 e cioè 16.

L'Autore divide la botte in 24 parti uguali con sezionamenti orizzontali e con una sezione effettuata lungo l'asse di simmetria verticale EF:



Le parti sono numerate dall'alto verso il basso: nella semibotte di sinistra vanno da 1 a 12 e in quella di destra da 13 a 24.

Sfortunati prende in considerazione una delle due semibotti: qui è stata scelta quella di sinistra.

Egli mostra una tabella, che qui di seguito è riformulata, nella quale fornisce i successivi volumi contenuti nelle dodici parti: la capacità cresce secondo una progressione quasi aritmetica:

Sezioni	Capacità in *boccali* e *quartucci*	Differenza con il successivo
1	1 bb. + 3 qq.	5 bb. + 0 qq.
2	6 bb. + 3 qq.	7 bb. + 0 qq.
3	13 bb. + 3 qq.	7 bb. + 1 qq.
4	21 bb. + 0 qq.	9 bb. + 1 qq.
5	30 bb. + 1 qq.	9 bb. + 3 qq.
6	40 bb. + 0 qq.	10 bb. + 0 qq.
7	50 bb. + 0 qq.	10 bb. + 1 qq.
8	60 bb. + 1 qq.	11 bb + (1 + 1/3) qq.
9	71 bb. + (2 + 2/3) qq.	10 bb. + (1 + 1/3) qq.
10	82 bb. + 0 qq.	11 bb. + 0 qq.
11	93 bb. + 0 qq.	11 bb. + 0 qq.
12	104 bb. + 0 qq.	- - - - - - - - - - - - - - - - -

Nota: *bb.* sta per *barili* e *qq.* per *quartucci*.

Gli incrementi discontinui che la tabella mostra nella terza colonna possono essere giustificati con la curvatura del profilo della botte.

Lo Sfortunati non fornisce alcuna spiegazione riguardo alla procedura con la quale ha calcolato i valori delle successive capacità: operò empiricamente con una serie di misurazioni?

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

L'Autore applica il metodo appena visto a un *secondo caso*.

Una botte ha la capacità di 100 staia e al cocchiume ha diametro uguale a 176 ponti e l'altezza del vino è 136 ponti: ne consegue che lo scemo vale:

scemo = 176 – 136 = 40 ponti.

Prima di procedere, Sfortunati introduce una precisazione: se il vino occupa in altezza più della metà del diametro al cocchiume (ed è questo caso) deve essere misurato lo scemo. Se, invece, il vino è alto meno della metà del diametro (e quindi lo scemo è maggiore della metà del diametro al cocchiume) deve essere misurata la profondità del vino per poi ricavare, per differenza, la lunghezza dello stesso scemo.

Ecco i passi della procedura:

* dividere per 2 la capacità della botte: 100/2 = 50 staia = 800 boccali;
* dividere per 2 il diametro al cocchiume: 176/2 = 88 [ponti];
* dividere per 12: 88/12 = (7 + 1/3) [ponti];
* dividere la lunghezza dello scemo per 12: 40/12 = (3 + 1/3) [ponti].

A questo punto, Sfortunati fornisce alcuni dati:

* fino alla quinta parte [rivedere la precedente tabella] tiene (30 boccali + 1 quartuccio).
* Sempre utilizzando la tabella, fra la sesta e la quinta parte vi una differenza di (9 barili e 3 quartucci).
* Calcolare la terza parte di questa differenza: (9 barili + 3 quartucci)/3 = = (3 barili + 1 quartuccio).
* Sommare l'ultimo risultato al valore della quinta parte:
  (30 boccali + 1 quartuccio) + (3 boccali + 1 quartuccio) = (33 boccali + 2 quartucci) = = (33 + ½) boccali.

Per determinare il volume del vino contenuto in questa seconda botte, l'Autore impiega una seconda procedura che inizia con una proporzione:

* ultimo dato : volume prima semibotte = x : volume metà seconda botte
  (33 + ½ boccali) : 104 boccali = x : 800 boccali da cui
  x = [(33 + ½) * 800]/104 = (257 + ½) boccali.
* Sottrarre l'ultimo risultato dalla capacità totale della seconda botte, 100 staia = 1600 boccali:
  1600 – (257 + ½) = (1342 + ½) boccali, contenuto in vino della botte.

Questo dato equivale a:

(1342 + ½)/16 = (83 staia + 14 boccali + 2 quartucci).

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Un *terzo esempio* è quello di una botte che ha capacità uguale a 80 staia, con diametro al cocchiume uguale a 172 ponti e con il vino alto 60 ponti.

Quindi, il livello del liquido è più basso della metà del diametro al cocchiume e lo scemo misura:

scemo = 172 – 60 = 112 ponti.

La procedura impiegata per calcolare il volume del vino prevede i seguenti passi:

* dividere per 2 la lunghezza del diametro al cocchiume: 172/2 = 86 [ponti];
* dividere per 12: 86/12 = (7 + 1/6);
* dividere l'altezza del vino, 60, per l'ultimo quoziente: 60/(7 + 1/6) = (8 + 16/43).

La procedura si interrompe con la consultazione della solita tabella: la parte intera dell'ultimo quoziente, "8", porta a leggere il dato relativo alla *sezione 8* che vale la capacità di

(60 boccali + 1 quartuccio).

Dalla stessa tabella risulta che fra la *nona* e l'*ottava* sezione vi è una differenza di [11 boccali + (1 + 2/3) quartucci]: occorre calcolarne i 16/43:

[11 boccali + (1 + 2/3) quartucci] * 16/43 ≈ 4 boccali [Sfortunati calcola 5 boccali] + 2/3 quartucci.

Occorre sommare l'ultimo quoziente al dato relativo alla *sezione 8*:

(4 boccali + 2/3 quartucci) + (60 boccali + 1 quartuccio) =
= [64 boccali + (1 + 2/3) quartucci].

Per calcolare il volume del vino contenuto nella terza botte occorre applicare una seconda procedura che inizia con una proporzione:

ultimo dato : volume prima semibotte = y : volume terza semibotte.

Il volume della terza botte è:

$$\text{Volume}_{\text{TERZA BOTTE}} = 80 \text{ staia} = 80 * 16 = 1280 \text{ boccali.}$$

La proporzione diviene:

[64 boccali + (1 + 2/3) quartucci)] : 104 = y : 1280/2

y= {[64 boccali + (1 + 2/3) quartucci] * 640}/104 ≈ (24 + ¾) staia ≈

≈ (396 + 2/5) boccali [Sfortunati fornisce un risultato leggermente diverso: 400 boccali].

APPENDICE I

Le tabelle contenute nelle ventuno pagine ad esse riservate sono redatte allo scopo di semplificare i calcoli.

Esse sono basate sull'*altezza ragguagliata*: si tratta del diametro medio fra quello del fondo e quello al cocchiume: Sfortunati non accenna al suo metodo di calcolo.

La colonna a sinistra indica la lunghezza della botte in *ponti*. Per i diversi valori dell'*altezza ragguagliata* sono compilate separate tabelle. Ecco la prima tabella relativa a un'*altezza* di 45 *ponti* = 1 braccio (tutte le tabelle sono basate su questa equivalenza dei *ponti*):

Distanza fra i fondi (in ponti)	Staia	Boccali	Quartucci
27	5	5	0
28	5	8	0
29	5	11	1
30	5	14	1
31	6	1	0
32	6	4	1
33	6	7	0
34	6	10	1
35	6	13	1
36	7	0	0
37	7	3	0

APPENDICE II

Le unità di misura usate a Siena

Riassumiamo le principali unità di misura usate a Siena e citate dallo Sfortunati (e da Pietro Cataneo):

* 1 canna = 4 braccia;
* 1 tavola = 6 braccia;
* 1 canna ^{2} = 16 braccia^2;
* 1 tavola ^{2} = 36 braccia^2;
* 1 staro da terra = 3600 braccia^2 = 225 canne^2 = 100 tavole^2;
* 1 staro da terra = 4 quarti;
* 1 quarto = 4 boccali;
* 1 staro da terra = 16 boccali;
* 1 quarto = 25 tavole^2 = (56 + ¼) canne^2) = (56 canne^2 + 4 braccia^2);
* 1 boccale = (6 tavole^2 + 9 braccia^2);
* 1 braccio^3 = 11 staia di vino = 11 staia di olio = 11 staia di cereali = 44 quarti = 176 boccali;
* 1 braccio^3 = 10 staia di calcina di gesso = 10 staia di inerti;
* 24 staia = 1 moggio;
* 1 moggio = 24 staia = 12 barili = 6 some;
* 1 soma = 2 barili = 4 staia = 64 boccali = 256 quartini.

Bibliografia

1. Calzolani Sergio, "appunti assonometrie.pdf", 2019, pp. 119, in www.geometriapratica.it.
2. Feola Francesco, "Gli esordi della geometria in volgare". Un volgarizzamento trecentesco della *Practica Geometriae* di Leonardo Pisano, Firenze, Accademia della Crusca, 2008, pp. 231.
3. Franci R.(affaella) – Toti Rigatelli L.(aura), "La trattatistica matematica del Rinascimento Senese", "Gli Atti dell'Accademia delle Scienze di Siena detta de' Fisiocritici", serie XIV – tomo XIII, 1981, pp. 71.
4. Sfortunati Giovanni, "Nuovo Lume", Venezia, Francesco del Leno, 1561.
5. "Tavole di Ragguaglio per la riduzione dei pesi e misure che si usano in diversi luoghi del Granducato di Toscana al peso e misura vegliante in Firenze", Firenze, Gaetano Cambiagi Stampator Granducale, 1782, pp. XVII+835.