

Il materiale contenuto in questo documento può essere riprodotto, in tutto o in parte, a scopi *non commerciali*, purché siano citati l'Autore e la fonte

Parole chiave: costruzioni geometriche elementari; poligoni regolari inscritti; misurazione di campi; poligoni simili; problemi sui poligoni; divisione di poligoni; problemi sul triangolo 13-14-15; trapezi; triangoli; equivalenze fra figure piane; cerchio; circonferenza; segmento circolare; settore circolare; solidi pieni e vuoti; assonometrie di solidi

INTRODUZIONE

Giovanni Pomodoro nacque probabilmente a Venezia intorno al 1550 e morì nel 1599.

È stato un matematico, un ingegnere militare e un agrimensore; non sono conosciute altre informazioni sulla sua vita.

Nel corso dei suoi ultimi anni compose il trattato "*Geometria Prattica*" che non riuscì a completare a causa della sua morte. L'opera fu poi conclusa dal fratello Pietro e ampliata dall'ingegnere militare friulano Giovanni Scala.

Il trattato fu pubblicato per la prima volta a Roma nel 1599 con i disegni originali di Pomodoro e con l'aggiunta di alcune Tavole curate dallo Scala: a questo secondo Autore si devono le descrizioni delle costruzioni geometriche preparate dal Pomodoro. L'opera riscosse un certo successo e fu più volte ristampata.

Questo articolo si basa su due distinte edizioni della "*Geometria Prattica*", entrambe citate in Bibliografia e sono quella del 1599 e quella del 1623.

I metodi usati da Pomodoro e da Scala per risolvere numerosi problemi sono geometrici con il supporto dell'aritmetica.

Alcune Tavole offrono più esercizi sullo stesso tema, con alcune costruzioni che sembrano ripetitive o superflue: il testo sembrerebbe aver avuto finalità didattiche

Nei moderni testi di disegno geometrico e di disegno tecnico sembra sia riservato sempre minore spazio alle costruzioni elementari.

Alcuni problemi *sembrano* forse indicare l'influenza dell'opera di Cosimo Bartoli, citata in Bibliografia, pubblicata a Venezia nel 1564.

Numerosi problemi sul cerchio offrono esempi con diametri lunghi 14 e, talvolta, suoi multipli: ciò semplifica i calcoli delle lunghezze delle circonferenze e delle aree.

Solo in alcuni problemi sono usate le unità di misura, mentre lo Scala impiega nelle sue Tavole quelle impiegate a Roma per lunghezze, superfici e volumi.

A Pomodoro si devono le prime 44 Tavole (in numerazione romana, da I a XLIV) e lo Scala ne ha aggiunte 7 (da I a VII).

* Le lettere apposte ai vertici delle figure sembrano scelte in modo un po' casuale: non sempre iniziano con la A. Esse sono quasi sempre *maiuscole*.

* In alcune figure le lettere ai vertici e le lunghezze parziali sono scritte al loro *interno*: in questo articolo esse sono all'*esterno*.

* Particolare rilievo è dato in questo Trattato a problemi che sfruttano le proprietà geometriche del classico triangolo con lati lunghi secondo la terna 13-14-15.

NOTE

* Per non ripetere in questo articolo il lungo titolo dell'opera di Pomodoro e di Scala, la "*Geometria Prattica*" è citata come il "*Trattato*".

- * Qui sono riprodotte molte figure ricavate da alcune Tavole; un cenno sarà fatto all'evoluzione della nomenclatura: ad esempio Pomodoro continua ad usare le espressioni “capo tagliato” e “doppio capo tagliato” per indicare i tipi di quadrilateri che oggi sono chiamati i trapezi.
- * Numerose costruzioni geometriche sono state proposte da geometri (Archimede, Erone di Alessandria, Abu'l - Wafa, ad esempio) e da tanti artigiani pratici desiderosi di risolvere dei problemi tecnici.
- * In alcuni casi, gli schemi sono qui riprodotti apportando leggere modifiche per renderli più chiari e più semplici: alcune costruzioni sono state omesse perché poco significative o ovvie o perché risultano incorporate in altre.
- * La maggior parte delle figure è stata ridisegnata cercando di rispettare forme e proporzioni. Sono state aggiunte o modificate alcune lettere apposte ai vertici o ai punti significativi.
- * I valori numerici usati per esprimere le lunghezze, le aree e i volumi sono eccessivamente rappresentati da numeri misti, scritti senza l'impiego del simbolo infisso “+” a separare la parte intera da quella frazionaria: la validità didattica dell'opera ne risulta danneggiata. Forse, il loro uso deriva dall'impiego, nel Rinascimento di unità di misura con multipli e sottomultipli non decimali? In questo articolo, i numeri misti sono racchiusi fra parentesi tonde, con l'impiego del simbolo infisso “+”: ad esempio, $(12 + 1/3)$.
- * Il simbolo della divisione viene reso con la barra: “/”.
- * Nella soluzione di alcuni problemi sono stati forniti risultati numerici approssimati scritti secondo le moderne convenzioni dell'aritmetica: ad esempio $\sqrt{(1553 + 4/9)} \approx 39,41$.
- * La qualità dei testi recuperati in Internet non è eccelsa: i numeri misti, molto usati dai due Autori, contengono una parte frazionaria le cui cifre sono stampate con caratteri piccoli e spesso di difficile lettura: in qualche caso la loro interpretazione può essere erronea, ma trattandosi di valori piuttosto piccoli, gli errori commessi nella trascrizione risultano poco significativi.
- * Negli schemi contenuti nel Trattato, le quote verticali sono spesso scritte in modo da essere lette *da sinistra*: oggi esse sono lette *da destra*.
- * Fra parentesi quadre – [...] – sono inseriti dei commenti.
- * Alcuni argomenti sono ampliati all'intero di appositi riquadri, graficamente separati e contrassegnati dalla dicitura “APPROFONDIMENTO”.

TAVOLE I e II

La Tavola I descrive gli strumenti usati per il disegno geometrico e alcuni strumenti di misura, quali lo *squadro* e il *quadrante geometrico*.

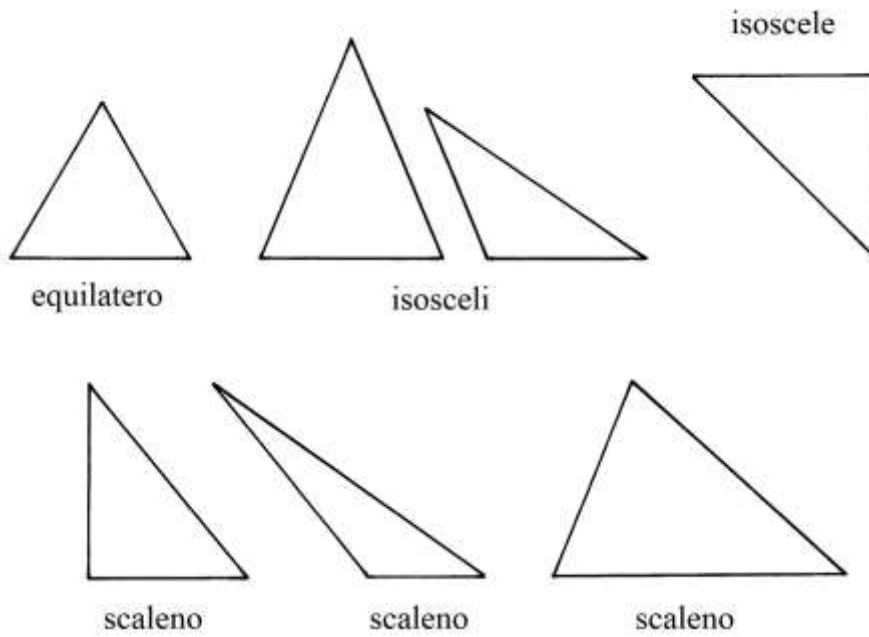
La Tavola II presenta alcune entità geometriche elementari: retta, segmenti, angoli curve.

TAVOLA III

In questa Tavola sono presentate figure piane con le loro denominazioni. Ne sono riprodotte alcune.

L'Autore distingue con precisione vari tipi di triangoli e li indica con i termini che sono in uso anche oggi:

TRIANGOLI



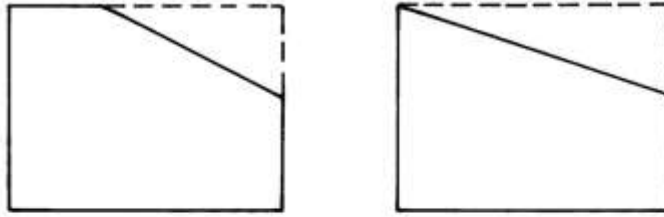
Nello schema che segue sono presentati tre esempi di quadrilateri, che in realtà sono dei trapezi scaleni che l'Autore definisce con l'espressione "capo tagliato", largamente usata nel Medioevo e nel Rinascimento:



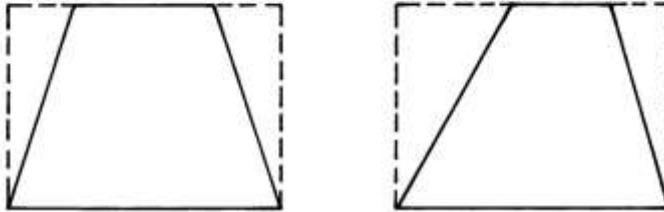
La figura qui sotto presenta due coppie di poligoni: i primi due sono definiti "capo tagliato" perché i quadrilateri di origine (rettangoli) hanno subito un solo taglio. Il poligono a sinistra è divenuto un pentagono non regolare.

I due quadrilateri in basso hanno subito tagli su entrambi i fianchi e sono definiti "doppio capo tagliato": oggi sono chiamati trapezi.

"capo tagliato"

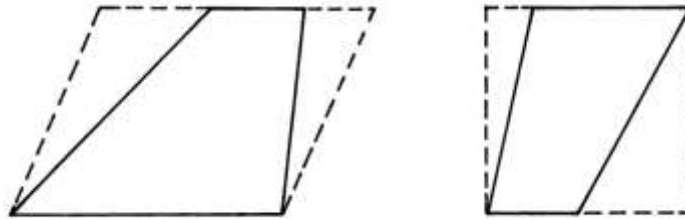


"doppio capo tagliato"



Lo schema che segue presenta in dettaglio l'origine di due differenti "doppio capo tagliato":

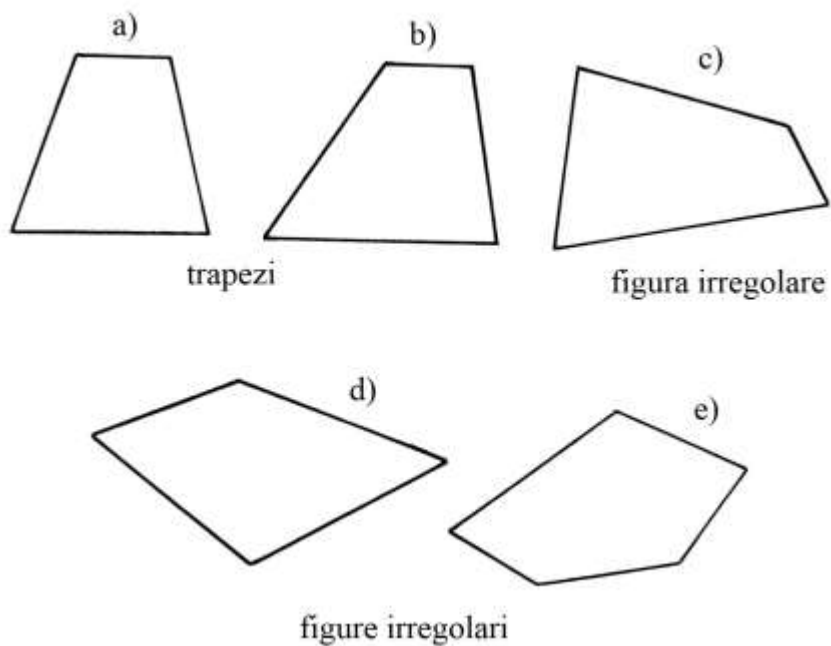
"doppio capo tagliato"



A sinistra, un parallelogramma subisce due tagli che originano un trapezio scaleno.

A destra, un quadrato viene sezionato e con le due asportazioni viene creato un trapezio scaleno con la base maggiore in alto e quella minore in basso.

Infine, nella figura qui sotto l'Autore utilizza il termine "trapezio" per definire i primi due quadrilateri:

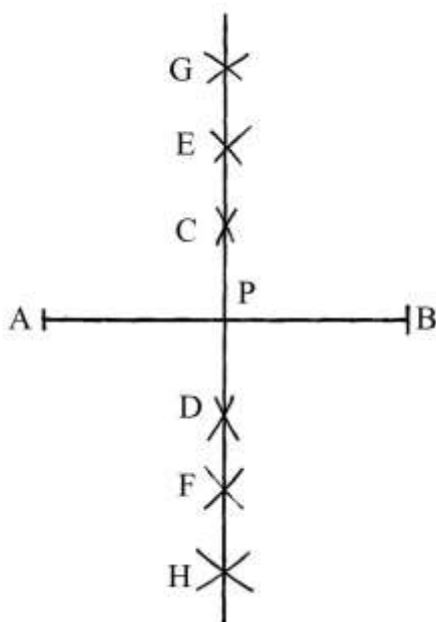


I tre poligoni rimanenti sono definiti “figure irregolari”: oggi sono soltanto dei *quadrilateri*.

TAVOLA III

La Tavola contiene alcune costruzioni elementari, quali la divisione di un segmento in due parti uguali, realizzate con l’impiego di compassi con differenti aperture.

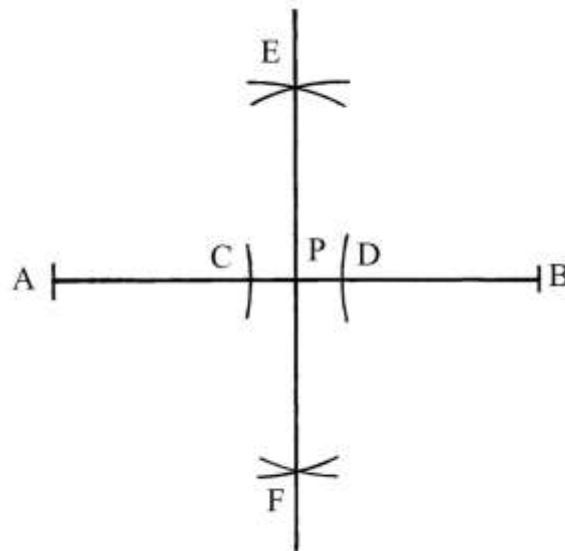
AB è il segmento che deve essere diviso in due parti uguali:



Il risultato è ottenuto con la costruzione del suo asse, retta perpendicolare passante per il suo punto medio.

Disponendo di compassi con aperture differenti, facendo centro in A e in B sono tracciate le coppie di archi che si intersecano in “C e D”, in “E e F” e in “G e H”. Per queste coppie di punti passa la retta che taglia AB nel suo punto medio P.

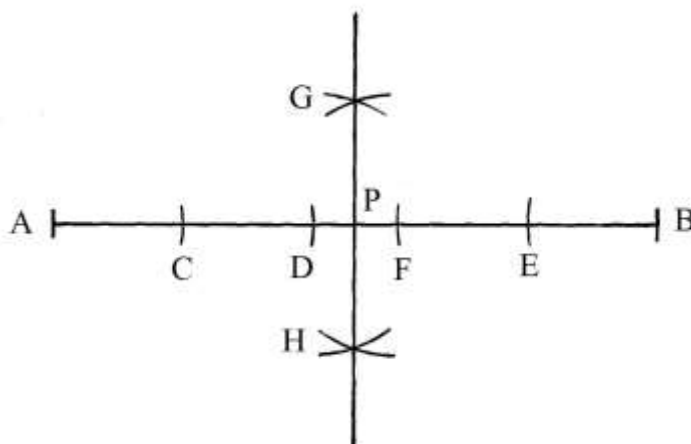
La divisione di un segmento con un compasso di piccola apertura è ottenuta nel modo descritto nello schema che segue:



AB è il segmento da dividere. Fare centro in A e in B con apertura AC e disegnare due archi che fissano i punti C e D.

Con la stessa apertura $AC = BD$, fare centro in C e in D e tracciare quattro archi che si intersecano in E e in F: per questi due punti passa la retta verticale che taglia AB nel suo punto medio P.

Se il segmento è lungo e si dispone solo di un compasso di piccole dimensioni è possibile procedere come mostra la figura:



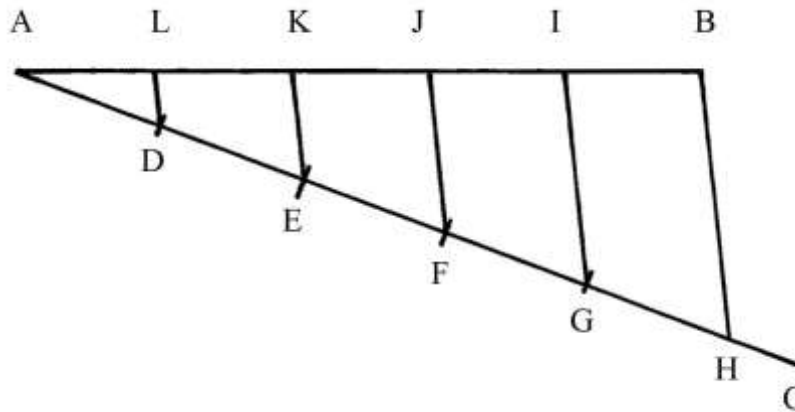
Con raggio a piacere fa centro in A e fissare il punto C: con la stessa apertura fare centro in C e stabilire il punto D. Poi fare centro in B e con lo stesso raggio ripetere le precedenti operazioni e determinare i punti E e F.

Infine, fare centro in D e in F e tracciare quattro archi che si intersecano nei punti G e H.

Per G e per H passa l'asse che divide in due parti uguali AB: $AP = PB$.

%%

AB è un segmento che deve essere diviso in n parti uguali, in questo caso *cinque*:



Dal vertice A disegnare un segmento di lunghezza a piacere: è AC.

Su AC fissare cinque punti a uguale distanza:

$$AD = DE = EF = FG = GH.$$

Collegare H con B e parallelamente a BH tracciare segmenti a partire dai punti G, F, E e D fino a raggiungere AB: questo segmento è diviso in cinque parti uguali:

$$BI = IJ = JK = KL = LA.$$

%%

Un segmento, AB, deve essere diviso in tre parti di differenti lunghezze:

- * $AC = 7/18$ di AB;
- * $CD = 1/3$ di AB = $6/18$ di AB;
- * $DB = 5/18$ di AB.

Il denominatore comune delle tre frazioni è 18:

$$7/18 + 1/3 + 5/18 = 7/18 + 6/18 + 5/18 = 18/18.$$

Dal vertice A tracciare una perpendicolare a AB e riportarvi 18 volte una lunghezza scelta a piacere: è AE.

Il punto F è distante 7 da A: $AF = 7$.

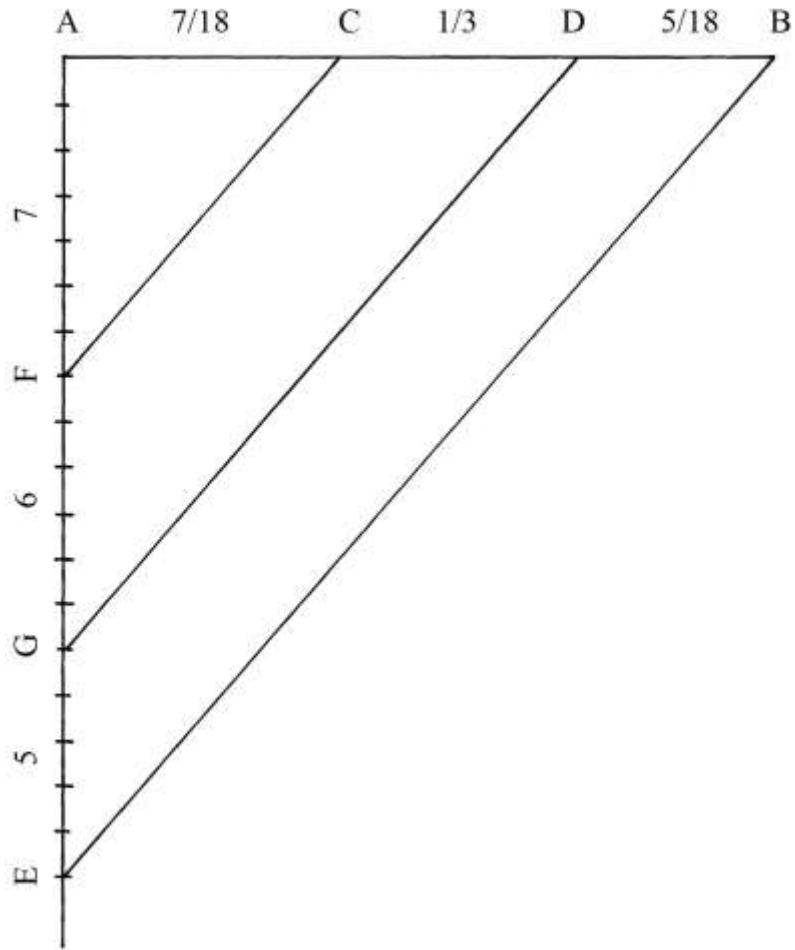
Il punto G è a distanza 6 da F: $FG = 6$.

Residua il segmento GE che è lungo:

$$GE = AE - AF - FG = 18 - 7 - 6 = 5.$$

Collegare E con B. Parallelamente a EB disegnare i segmenti GD e FC.

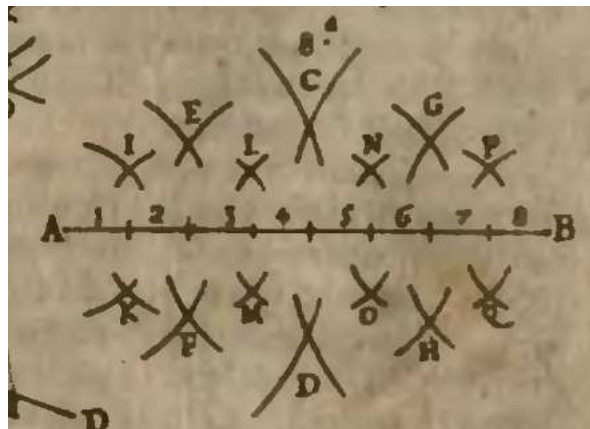
AB è diviso nei tre segmenti con le lunghezze desiderate.



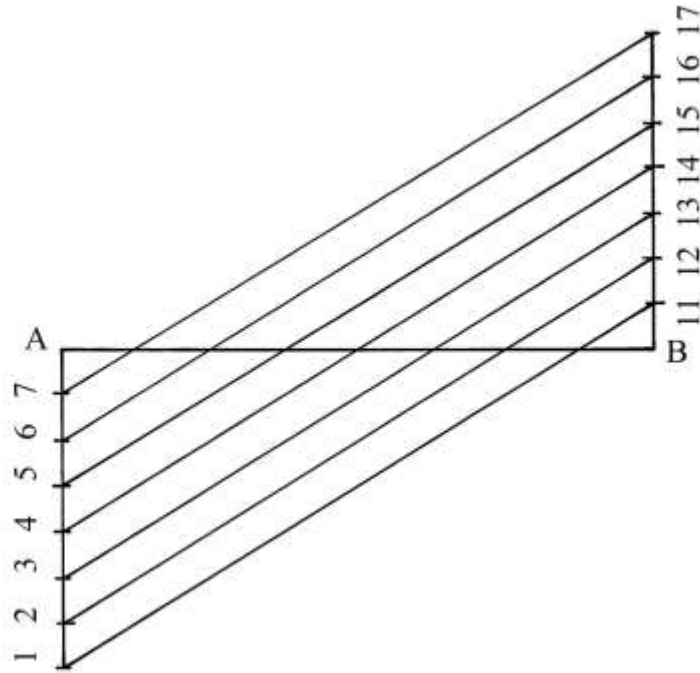
%%

AB è un segmento che deve essere diviso in *otto* parti uguali.

La soluzione può essere ottenuta dividendo AB con l'aiuto di un compasso ripetendo più la prima costruzione dell'asse del segmento, come propone l'Autore:



La soluzione grafica qui sotto presentata offre un risultato più preciso:



Agli estremi di AB disegnare due perpendicolari rivolte in senso opposto. Su di esse riportare, a partire da A e da B, *sette* volte una lunghezza scelta a piacere e collegare i punti come segue:

- * 1-11;
- * 2-12;
- * 3-13;
- * 4-14;
- * 5-15;
- * 6-16;
- * 7-17.

Queste linee tagliano AB in *otto* parti uguali.

%%%%%%%%%

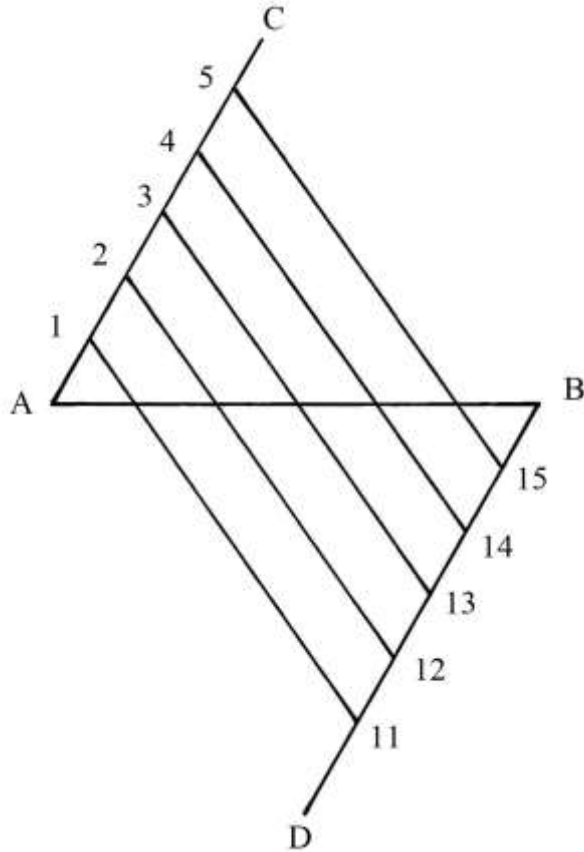
AB è un segmento che deve essere diviso in *sei* parti uguali.

Dai vertici A e B tracciare due semirette fra loro parallele e in direzioni opposte: sono AC e BD.

Da A e da B riportare *cinque* lunghezze uguali e tracciare le seguenti corde:

- * 1-11;
- * 2-12;
- * 3-13;
- * 4-14;
- * 5-15.

Esse dividono AB in *sei* parti uguali.



%%%

Lo schema che segue presenta un quadrato, ABCD, con lati lunghi 18 e suddiviso in strisce verticali larghe 1.

La struttura è utilizzabile per dividere in parti uguali un segmento.

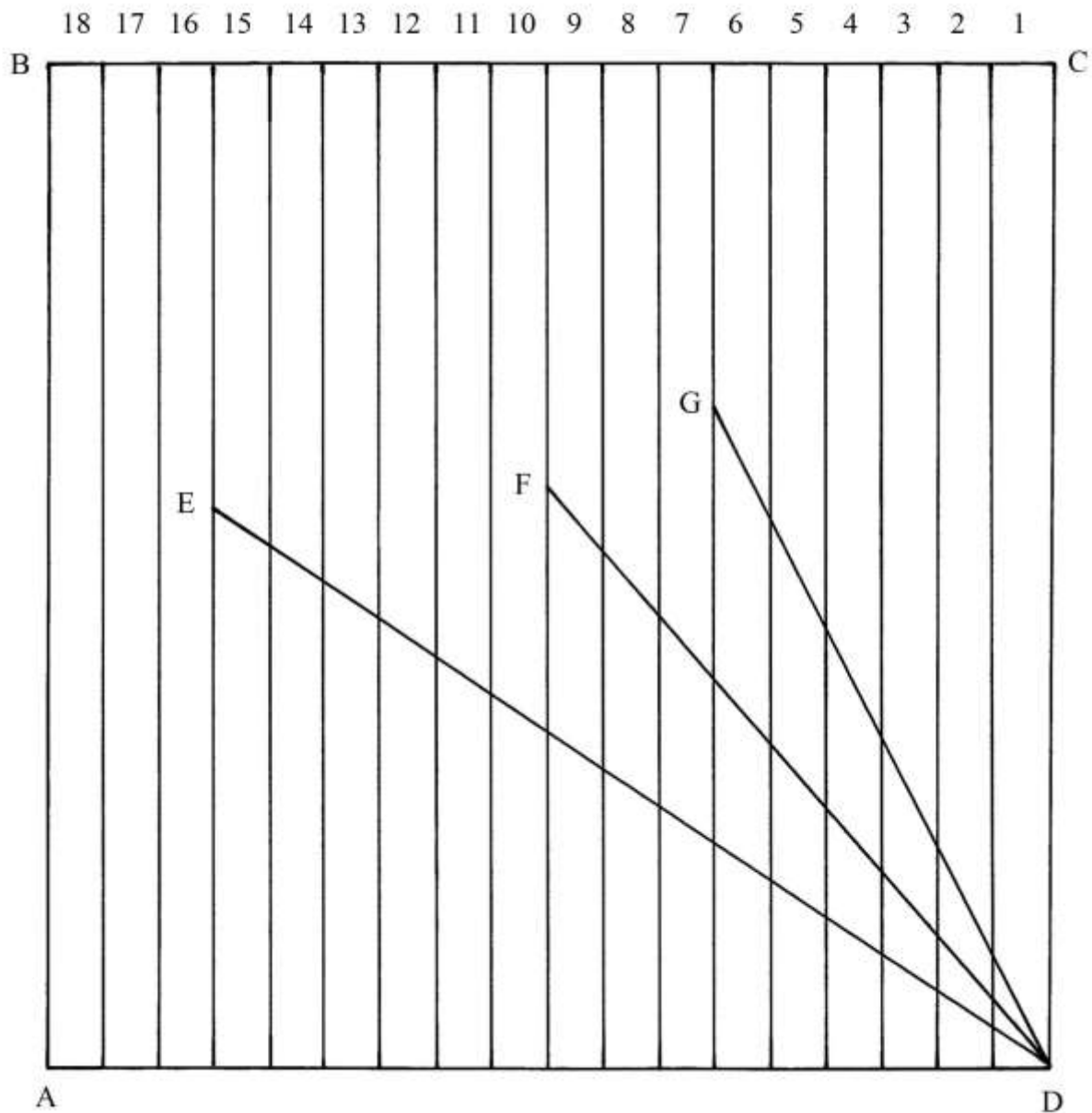
Fu il matematico Giovan Francesco Peverone (1509 – 1559) a pubblicare per primo l'idea di utilizzare questa griglia per dividere in parti uguali un segmento.

Un generico segmento è disegnato con un vertice posizionato in D e ruotato fino a far coincidere l'altro estremo con una delle linee verticali della griglia, corrispondente al numero delle parti uguali nelle quali deve essere ripartito.

DE è un segmento che è diviso in 15 parti uguali, DF in 9 parti e DG in 6.

Il segmento più lungo che è possibile dividere con questa griglia ha lunghezza uguale a quella di una diagonale del quadrato:

$$DB = 18 * \sqrt{2}.$$



%%

La figura che segue è un esercizio grafico sulla proporzionalità.

ABC è un triangolo rettangolo con cateto AB lungo, ad esempio, 100. DB è lungo 25 e FB è

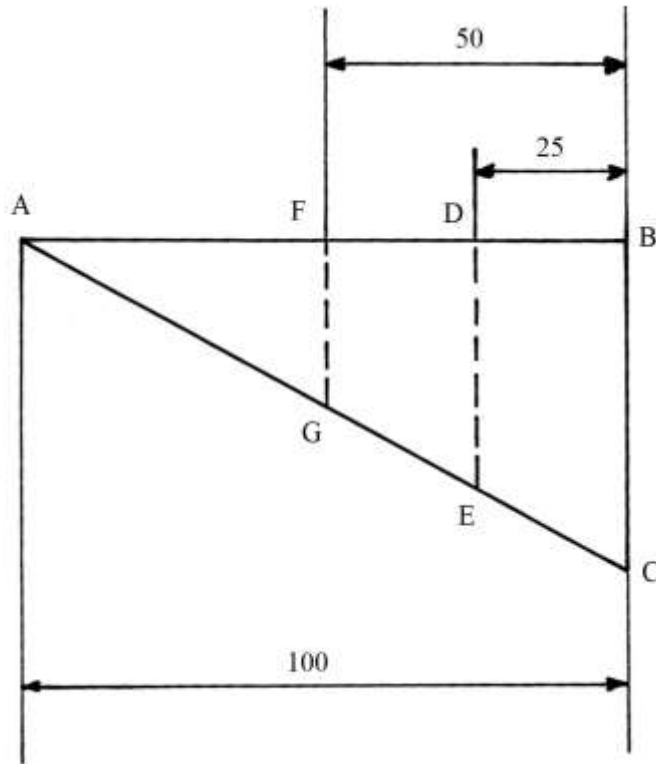
50.

Dai punti D e F sono abbassati i segmenti DE e FG, perpendicolari a AB e paralleli a BC.

Vale la proporzione:

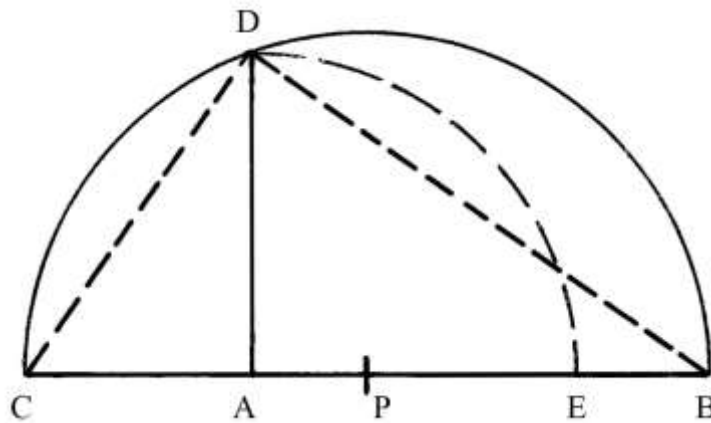
$$DB : EC = FB : GC$$

$$25 : EC = 50 : GC.$$



Segmento con lunghezza medio proporzionale fra due dati

AB e AC sono due segmenti adiacenti: AB è lungo 60 e AC è 30.



Deve essere costruito un segmento, DA, che abbia lunghezza medio proporzionale fra quelle di AB e di AC:

$$\begin{aligned}
 AB : DA &= DA : AC \\
 60 : DA &= DA : 30 \\
 DA^2 &= 60 * 30 = 1800 \quad e \\
 DA &= \sqrt{1800} = 30 * \sqrt{2}
 \end{aligned}$$

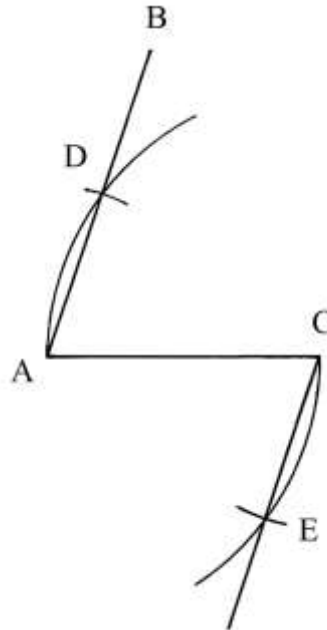
Per via geometrica, la soluzione è un'applicazione del 2° teorema di Euclide sui triangoli rettangoli e CDB lo è perché è inscritto in un semicerchio. L'altezza DA ha lunghezza che è medio proporzionale fra quelle di AC e di AB, proiezioni sull'ipotenusa CB rispettivamente dei cateti DC e DB.

La costruzione geometrica è piuttosto semplice. Dal punto A elevare la perpendicolare a CB. Determinare il punto medio di CB: è P; fare centro in P e con raggio PC = PB tracciare una semicirconferenza da C a B: essa taglia in D la perpendicolare innalzata da A.

CDB è un triangolo rettangolo inscritto nel semicerchio di centro P e DA è una sua altezza.

Angoli di uguale ampiezza

BAC è un angolo di ampiezza qualsiasi: nell'esempio è acuto.



Nel vertice C del lato AC deve essere costruito un secondo angolo di ampiezza uguale a quella di BAC.

Con apertura di compasso a piacere fare centro in A e in C e tracciare due archi: l'arco di centro C taglia il lato AB nel punto D.

Con il compasso misurare la lunghezza della corda AD e con questa apertura fare centro in C per disegnare l'arco che taglia in E l'arco esistente.

Per i punti C e E passa il secondo lato dell'angolo ACE, ampio quanto quello BAC.

%%%%%%%%%

L'ultima costruzione contenuta nella Tavola IIII è piuttosto oscura.

Un quadrato ha lati lunghi 150 canne e la sua area è:

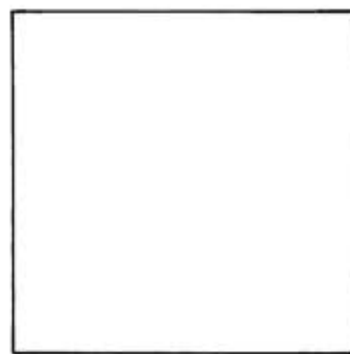
$$S_1 = 150 * 150 = 22500 \text{ canne quadre.}$$

UN secondo quadrato ha area uguale a 2/3 di quella del primo:

$$S_2 = 2/3 * S_1 = 2/3 * 22500 = 15000 \text{ canne quadre.}$$

La lunghezza ℓ del lato del secondo quadrato è:

$$\ell = \sqrt{15000} \approx 122,47 \text{ canne.}$$



$S_1 = 22500$ canne quadre

150 canne

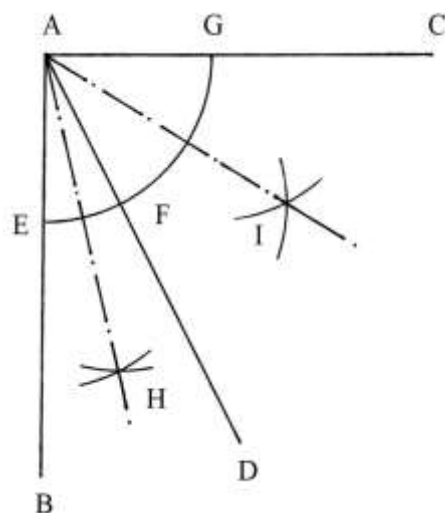


$S_2 = \frac{2}{3} * S_1 = 15000$ canne quadre

$\sqrt{15000}$ canne

TAVOLA V

BAC è un angolo generico che è diviso dalla semiretta AD in due angoli di differenti ampiezze: BAD e DAC.

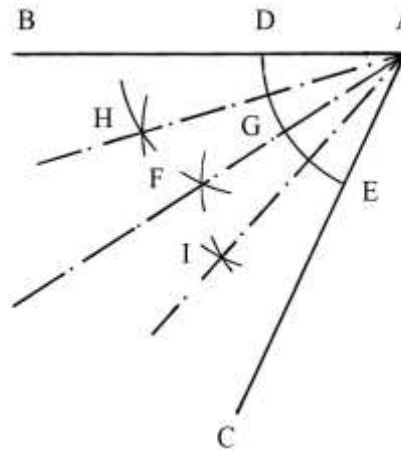


Dovendo dividere i due angoli in parti uguali, fare centro in A e tracciare l'arco EFG.

Poi fare centro in E, in F e in G e disegnare gli archi che si intersecano nei punti H e I: per questi ultimi passano le bisettrici degli angoli BAD e DAC.

%%%%%%%%%

Un angolo generico deve essere diviso in quattro parti uguali: è BAC.



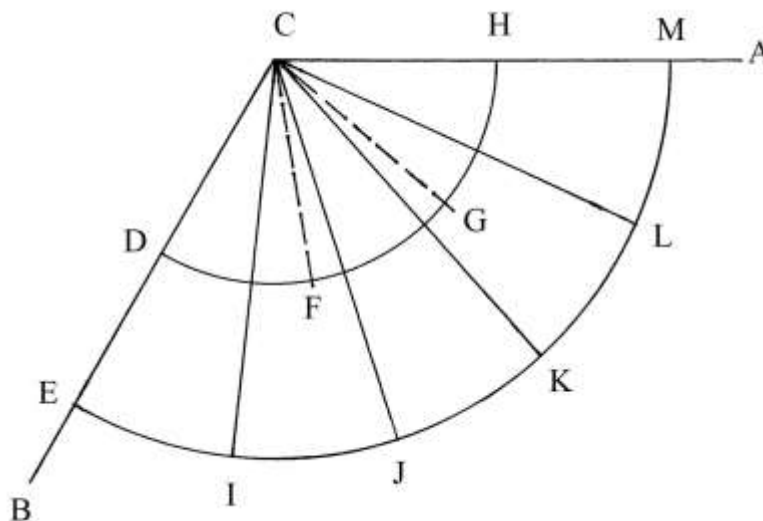
Fare centro in A e con raggio a piacere tracciare l'arco DE. Con la stessa apertura fare centro in D e in E e disegnare due archi che si intersecano in F: per A e per F passa la semiretta che divide BAC in due angoli uguali.

Infine, con la stessa apertura, fare centro in B, in G e in E e tracciare i quattro archi che si incontrano nei punti H e I.

Le semirette AH e AI dividono gli angoli BAF e FAC in due parti uguali.

Divisione di un angolo in 3 e in 5 parti uguali

La divisione in 3 e in 5 parti uguali dell'angolo BCA non è spiegata.



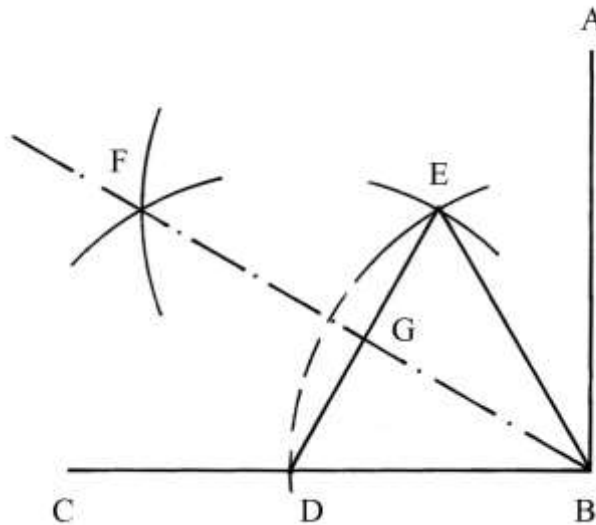
Con centro in C sono tracciati due archi di circonferenza di raggi CD e CE.

Le semirette CF e CG dividono l'angolo BCA in *tre* parti uguali.

Le semirette CI, CJ, CK e CL dividono l'angolo BCA in *cinque* parti uguali.

Divisione di un angolo retto in tre parti uguali

ABC è un angolo retto che deve essere diviso in tre angoli di ampiezza pari a 30° .



Con raggio scelto a piacere, fare centro in B e tracciare un arco che fissa il punto D. Con la stessa apertura fare centro in D e disegnare un arco che incrocia il precedente in E: BDE è un triangolo equilatero.

Con la stessa apertura BD fare centro in D e in E e disegnare due archi che si intersecano in F.

Per il punto F passa la semiretta uscente da B che conclude la divisione dell'angolo retto in tre angoli uguali:

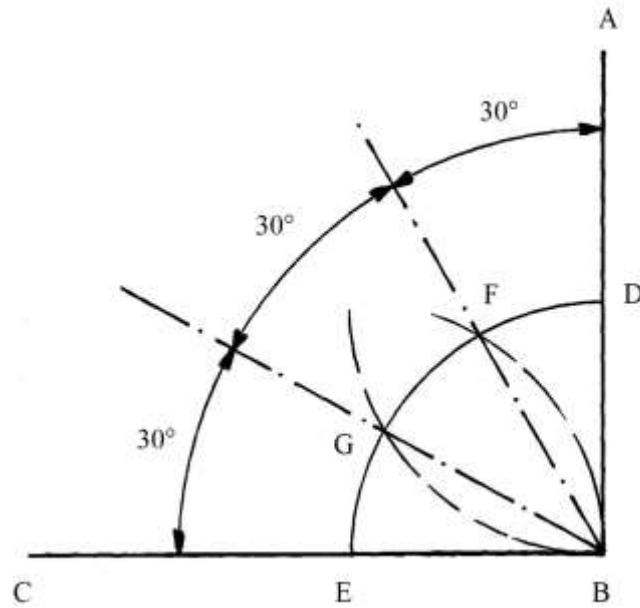
$$GBD = EBG = EBA = 30^\circ.$$

----- APPROFONDIMENTO -----

La divisione di un angolo in parti uguali può essere ottenuta anche con i goniometri e sembra che l'Autore ne avesse a disposizione, ma la costruzione con l'aiuto di riga e compasso fornisce una maggiore precisione.

Lo schema che segue offre una soluzione più semplice rispetto alla precedente.

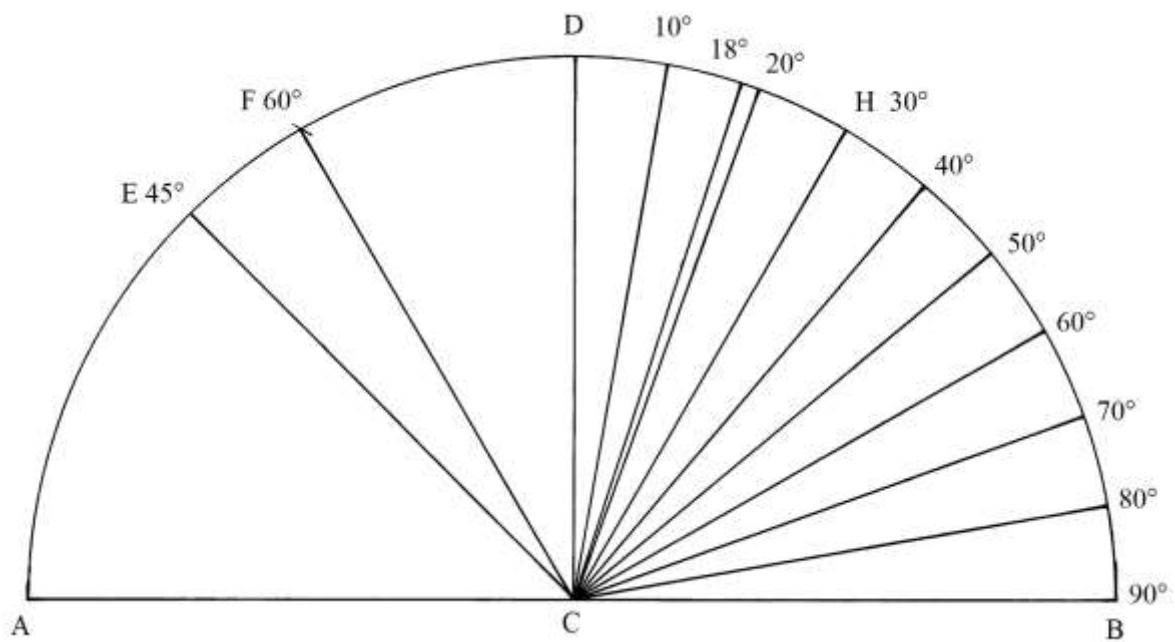
ABC è un angolo retto che deve essere diviso in tre parti uguali.



Fare centro in B e con raggio a piacere disegnare l'arco di circonferenza DE.

Con la stessa apertura, fare centro in D e in E e tracciare due archi che incontrano il precedente nei punti F e G: le semirette BF e BG dividono l'angolo retto in tre angoli di uguale ampiezza, 30° .

Lo schema che segue riproduce, con semplificazioni, un diagramma proposto da Pomodoro per determinare gli angoli interni di poligoni regolari inscritti in un cerchio.



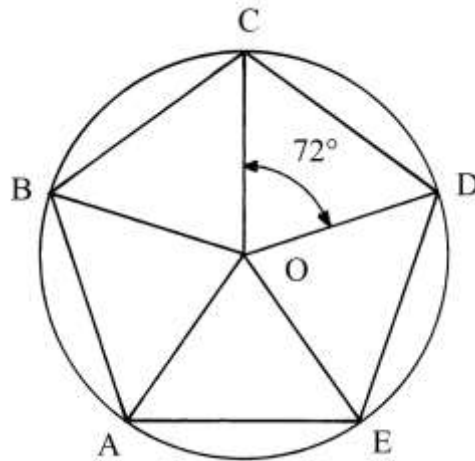
Nel testo originale è disegnato solo un semicerchio, come è fatto nello schema qui sopra. L'Autore misura l'angolo giro in *gradi sessagesimali*: un angolo giro vale 360° .

La costruzione è un ausilio per la tracciatura dei poligoni inscritti con numero di lati compreso fra 3 e 12: ovviamente, i poligoni con numeri di lati uguale a 7 e a 11 sono soltanto approssimati. L'ennagono, il poligono con 9 lati, è costruibile con l'aiuto del goniometro perché i suoi lati sono opposti ad angoli al centro del cerchio con ampiezza esatta: $360^\circ/9 = 40^\circ$.

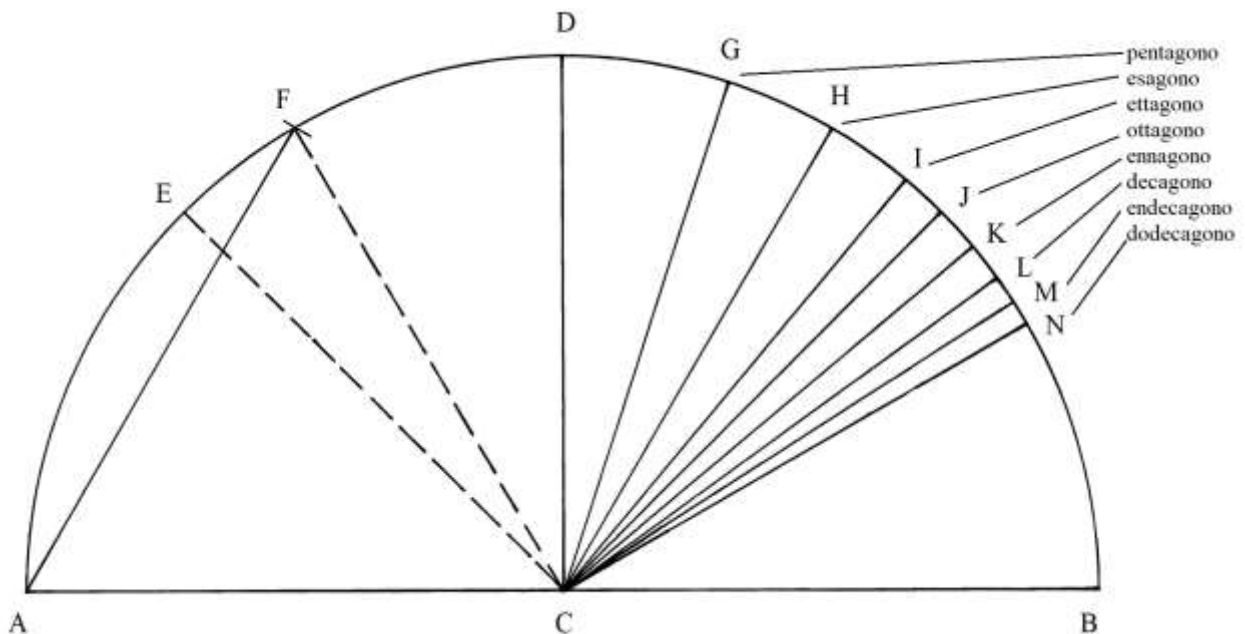
I lati dei poligoni sono corde con gli estremi giacenti sulla circonferenza del cerchio.

L'Autore si limita però a spiegare la costruzione degli angoli al centro. Ad esempio, gli angoli al centro di un pentagono regolare inscritto in un cerchio hanno ampiezza uguale a:
 $360^\circ/5 = 72^\circ$.

I lati sono le corde AB, BC, CD, DE e EA.



Nello schema che segue è disegnato solo il triangolo equilatero AFC: AF è una corda della semicirconferenza e un lato del triangolo.

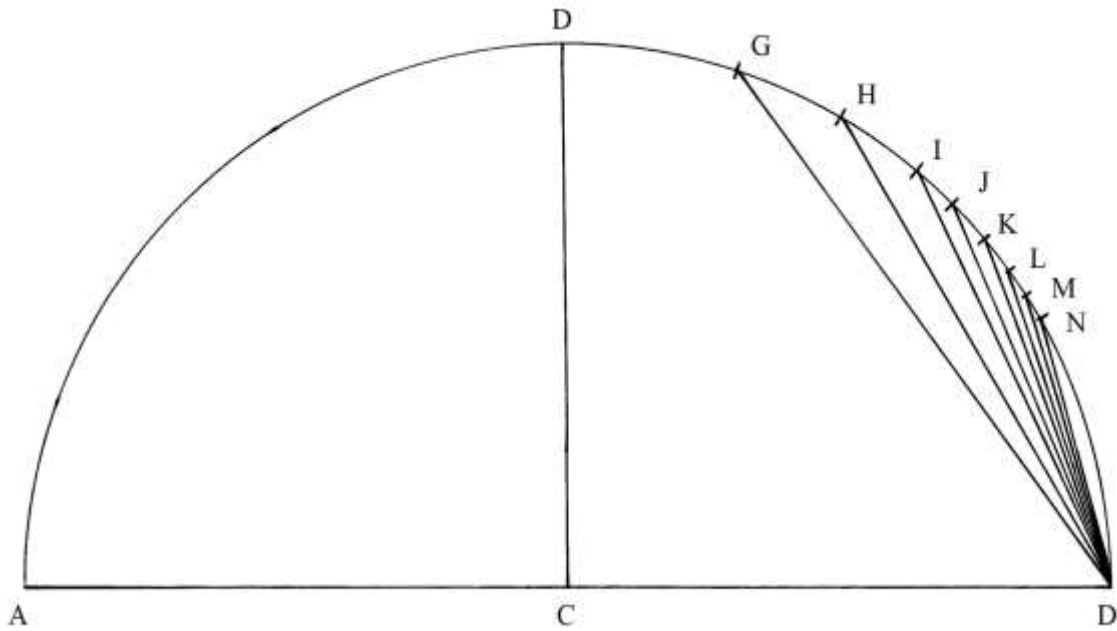


Sulla destra del semicerchio sono fissati alcuni punti: essi sono i vertici delle corde che formano i lati dei poligoni regolari con numero di lati compresi fra 5 e 12. Il vertice terminale di queste corde è B.

----- APPROFONDIMENTO -----

Nella figura che segue sono disegnati i primi lati degli *otto* poligoni regolari del precedente schema:

- * GB: pentagono;
- * HB: esagono;
- * IB: ettagono;
- * JB: ottagono;
- * KB: ennagono;
- * LB: decagono;
- * MB: endecagono;
- * NB: dodecagono.



Gli otto angoli – non disegnati nella figura – che i lati dei poligoni sottendono al centro C hanno le seguenti ampiezze:

- * $GCB = (360/5)^\circ = 72^\circ$;
- * $HCB = (360/6)^\circ = 60^\circ$;
- * $ICB = (360/7)^\circ = (51 + 3/7)^\circ$;
- * $JCB = (360/8)^\circ = 45^\circ$;
- * $KCB = (360/9)^\circ = 40^\circ$;
- * $LCB = (360/10)^\circ = 36^\circ$;
- * $MCB = (360/11)^\circ = (32 + 8/11)^\circ$;
- * $NCB = (360/12)^\circ = 30^\circ$.

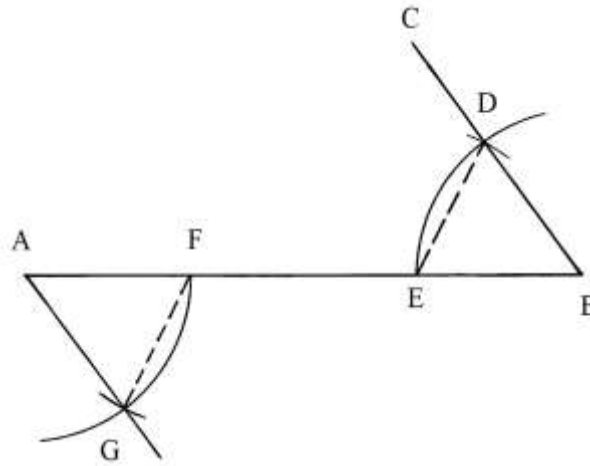
L'Autore indica solo l'ampiezza dell'angolo al centro dell'ettagono:

$$ICB = (360/7)^\circ = (51 + 3/7)^\circ.$$

Angoli opposti ai vertici di un segmento

AB è un segmento e ai suoi estremi devono essere costruiti due angoli di uguale ampiezza e rivolti in direzioni opposte.

La descrizione della soluzione del problema è piuttosto lacunosa, per cui qui essa viene ampliata.



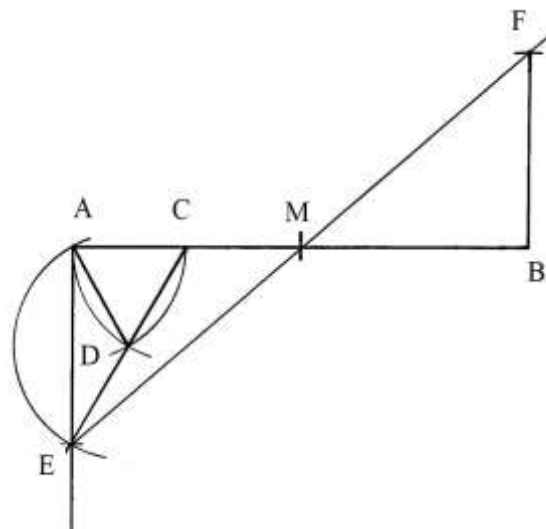
L'angolo dato è CBA. Fare centro in A e in B con raggio a piacere e tracciare due archi: sono fissati i punti D, E e F.

Disegnare la corda ED e misurarla con il compasso. Con apertura ED fare centro in F e disegnare un arco che stabilisce il punto G.

Per A e per G passa la semiretta AG. FAG è un angolo che ha ampiezza uguale a quella di CBA o CBE.

%%%%%%%%%

Una seconda versione di questa costruzione è descritta nello schema che segue:



Anche questa costruzione è leggermente modificata rispetto all'originale. AB è il segmento dato e M è il suo punto medio.

Con raggio a piacere fare centro in A e tracciare un arco che fissa il punto C. Con la stessa apertura fare centro in C e disegnare un arco che stabilisce il punto D, quindi con la stessa apertura fare centro in D e tracciare un ampio arco passante per il vertice A.

Disegnare il triangolo equilatero ACD e prolungare CD fino a incontrare in E l'ultimo arco. Tracciare una semiretta uscente da A e passante per E.

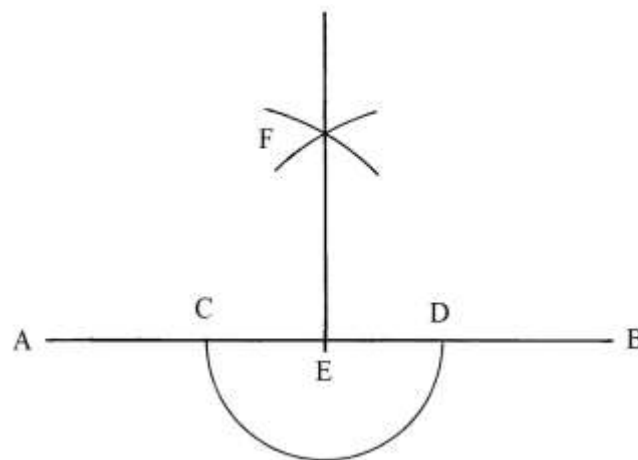
Con il compasso misurare la lunghezza di AE e riportarla facendo centro in B verso l'alto.

Per i punti E e M tracciare una retta che taglia in F l'arco appena disegnato.

Per B e per F passa la semiretta che determina l'angolo retto MBF.

Perpendicolare per un punto dato di un segmento

AB è un segmento orizzontale e E è un suo punto, per il quale deve essere tracciata una perpendicolare.



Fare centro in E con raggio a piacere e disegnare la semicirconferenza da C a D.

Con altro raggio più grande, fare centro in C e in D e tracciare due archi che si intersecano nel punto F.

Per E e per F passa la perpendicolare desiderata.

Poligoni inscritti

Nello schema che è qui riprodotto con piccole modifiche sono riassunte le possibili costruzioni di alcuni poligoni inscritti in un cerchio.

AB è il diametro orizzontale e CD è un raggio verticale.

E è il punto medio del raggio CB: la corda FEG è un lato del triangolo equilatero inscritto.

AD è un lato del quadrato inscritto.

Facendo centro in A e in D sono tracciati due archi che si incontrano in Z: per questo punto passa la semiretta CZ che taglia la circonferenza in N; la corda AN è un lato dell'ottagono inscritto.

AO è un lato del poligono di 16 lati (esadecagono) e AP è un lato del poligono regolare di 32 lati.

Fare centro in F e con raggio FE disegnare l'arco FH: FH è un lato dell'ettagono approssimato inscritto.

FI è un lato del tetradecagono (con 14 lati) e FL è un lato dell'ottaicosagono (con 28 lati).

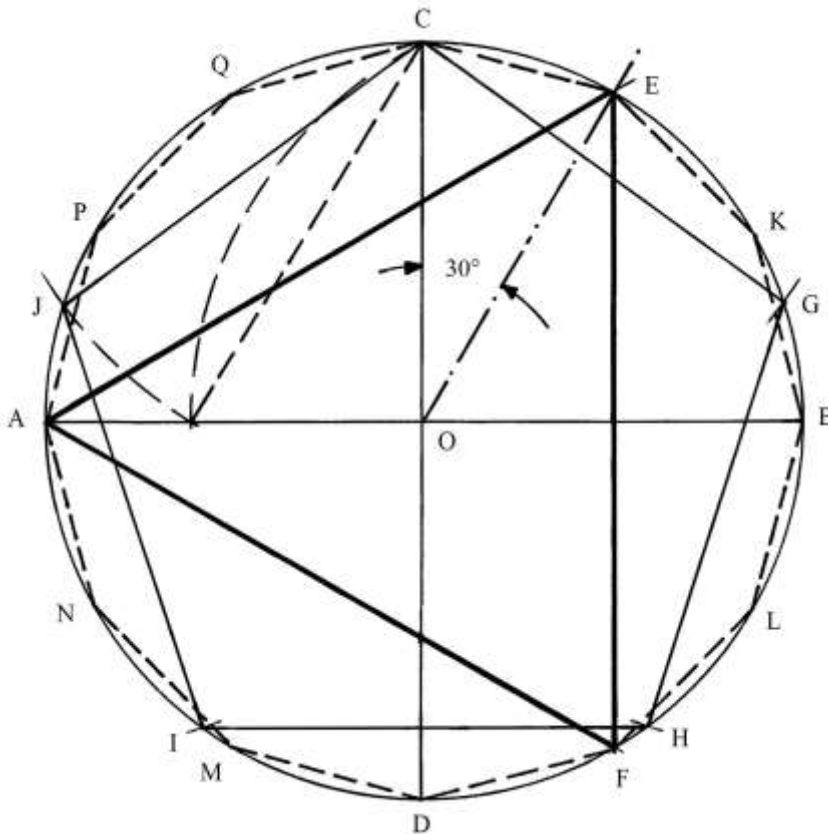
La corda HB è un lato del poligono con 42 lati.

Il segmento FE interessa anche la costruzione del pentagono inscritto: fare centro in E e con raggio ED tracciare l'arco DH. La corda DH è la lunghezza dei lati del pentagono inscritto.

Collegare O con E: questo raggio, insieme a quello OC, crea un angolo, COE, che è ampio 30° : la corda CE è un lato del dodecagono regolare. Dividendo l'angolo giro per l'ampiezza dell'angolo COE si ha:

$$360^\circ / COE = 360^\circ / 30^\circ = 12, \text{ numero dei lati del dodecagono.}$$

CEKBLFDMNAPQ è il poligono cercato.



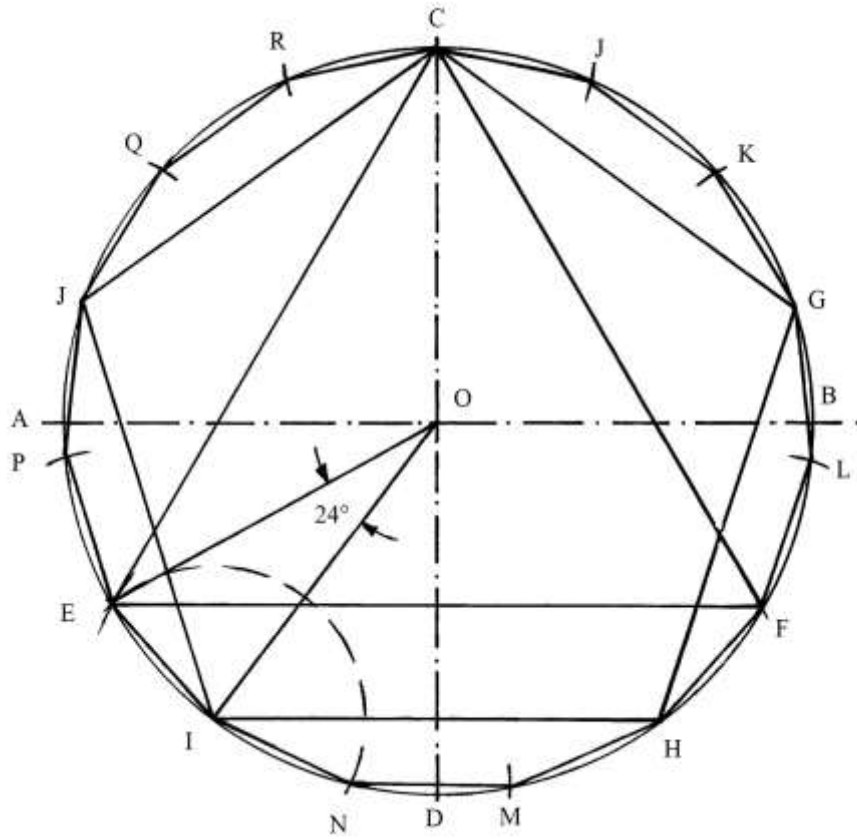
Nella figura che segue, il triangolo equilatero ha un lato – EF – disposto orizzontalmente e parallelo al lato IH del pentagono.

Fare centro in I e con raggio IE tracciare un arco da E fino a tagliare la circonferenza in N. Le corde EI e IN sono due lati del pentadecagono inscritto.

L'angolo EOI è ampio 24° e cioè

$$24/360 = 1/15 \text{ dell'angolo giro.}$$

CJKGLFHMNIEPJQR è il pentadecagono inscritto.



Una semplice rotazione di 90° , in senso orario o antiorario, della posizione del triangolo equilatero rispetto a quella del pentagono permette la costruzione di due diversi poligoni regolari: il dodecagono e il pentadecagono.

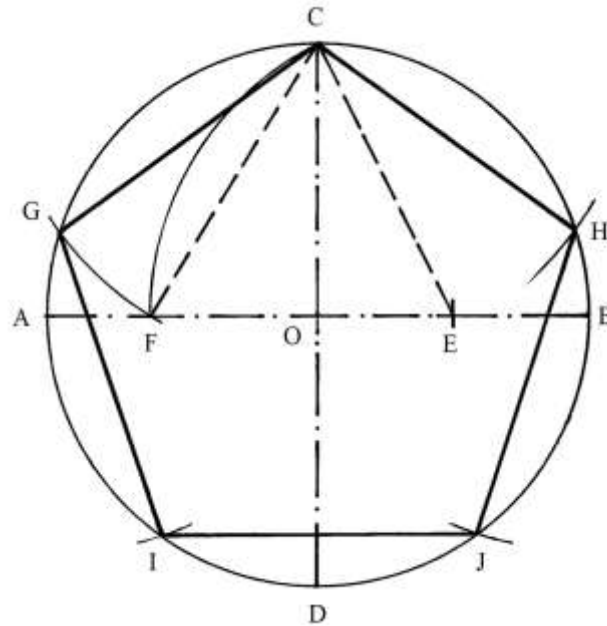
%%

La tabella che segue contiene i nomi dei primi poligoni regolari:

Numero lati	Nome	Numero lati	Nome
3	Triangolo	18	Ottadecagono
4	Quadrato	19	Ennadecagono
5	Pentagono	20	Icosagono
6	Esagono	21	Endeicosagono
7	Ettagono	22	Doicosagono
8	Ottagono	23	Triaicosagono
9	Ennagono	24	Tetraicosagono
10	Decagono	25	Pentaicosagono
11	Endecagono	26	Esaicosagono
12	Dodecagono	27	Eptaicosagono
13	Tridecagono	28	Ottaicosagono
14	Tetradecagono	29	Ennaicosagono
15	Pentadecagono	30	Triacontagono
16	Esadecagono	40	Tetracontagono
17	Eptadecagono	50	Pentacontagono

Pentagono inscritto

È dato un cerchio di centro O e diametro $AB = d$ e raggio $OA = OB = r$.



Collegare E con C e fare centro in E : con raggio EC tracciare l'arco CF e la corda CF .

Come spiegato nel precedente paragrafo, il segmento OF è la lunghezza del lato del *decagono* regolare inscritto, ma questo poligono non interessa per continuare la costruzione del pentagono.

La corda CF è la lunghezza dei lati del pentagono: fare centro in C e con raggio CF fissare sulla circonferenza i punti G e H ; con la stessa apertura fare centro in G e in H e stabilire i punti I e J .

$GCHJI$ è il pentagono regolare inscritto nel cerchio.

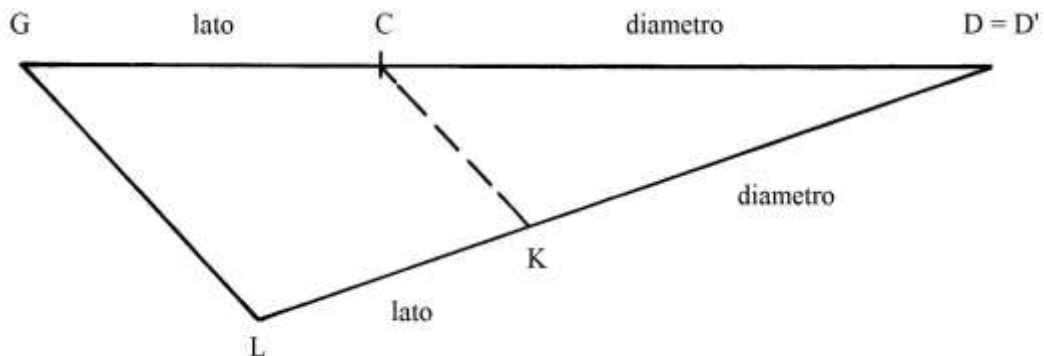
Fra la lunghezza ℓ di un lato del pentagono e quella del diametro d del cerchio in cui è inscritto esiste un preciso rapporto:

$$\ell = d * (\sqrt{5} - 1)/2.$$

Questo rapporto è un *numero irrazionale*.

Deve essere costruito un secondo pentagono regolare in un cerchio di cui è dato il diametro di lunghezza KD' : la lunghezza dei lati può essere ricavata con una costruzione.

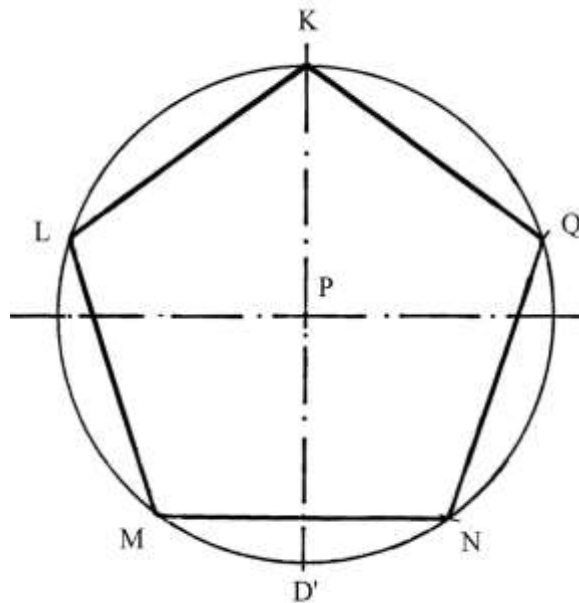
Tracciare una linea orizzontale e riportarvi le lunghezze del lato GC e del diametro CD : i due segmenti sono *adiacenti*:



Dal punto D disegnare una semiretta inclinata a piacere: da $D = D'$ riportare la lunghezza del diametro del secondo pentagono: è $D'K$.

Collegare C con K.

Da G tracciare una linea parallela a CK: è GL. Il segmento LK è la lunghezza del lato del pentagono inscritto in un cerchio di diametro KD' :



Il metodo sopra descritto è reversibile: date le lunghezze del lato LK e del diametro KD' (del secondo pentagono) è possibile risalire alle lunghezze dei lati del primo pentagono (GC) e del diametro (CD) del cerchio in cui è inscritto il primo pentagono:

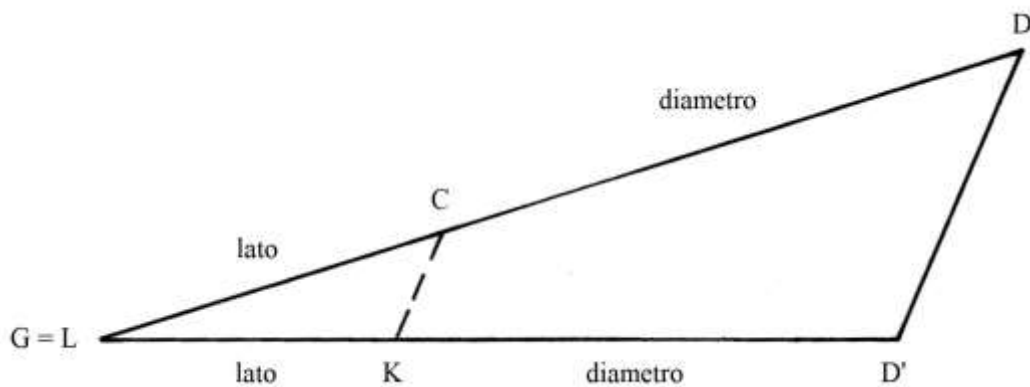
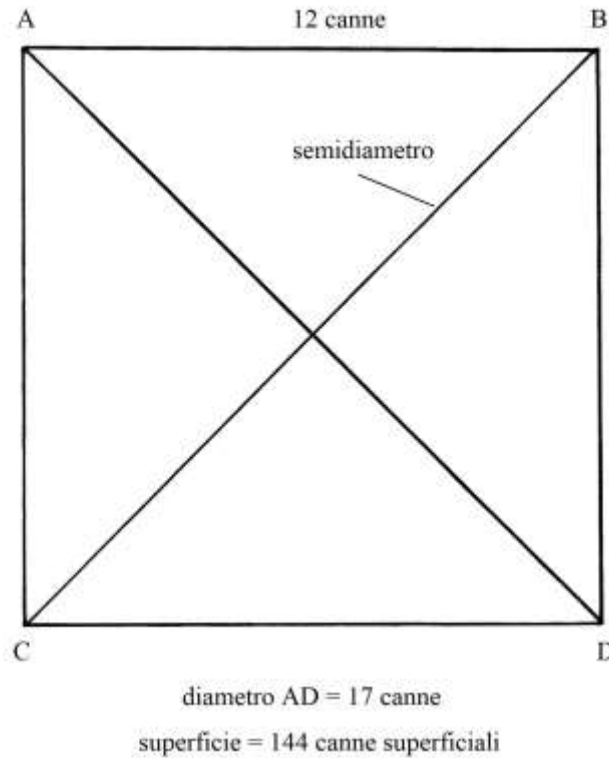


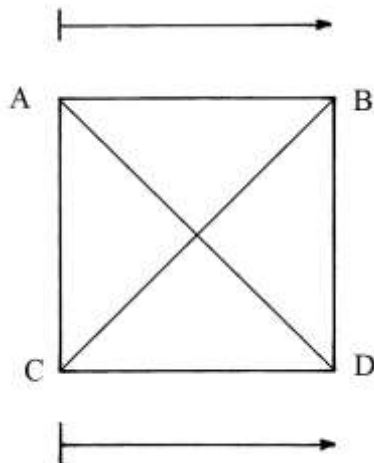
TAVOLA VI

Misurazione di un campo

ABCD è un campo di forma quadrata con lati lunghi 12 canne.



È da notare che l'Autore (o gli Autori, Pomodoro e Scala) legge/leggono la disposizione delle coppie di lettere come se esse fossero orientate alla stregua di due *vettori*:



L'area del campo è:

$$S_{ABCD} = 12 * 12 = 144 \text{ canne superficiali.}$$

Nel testo, le diagonali sono chiamate "*diametri*": anche in altri trattati anteriori a questo questa definizione era di uso corrente.

La lunghezza di AD è:

$$AD^2 = AC^2 + CD^2 = 12^2 + 12^2 = 144 + 144 = 288 \quad e$$

$$AD = \sqrt{288} \approx 17 \text{ canne.}$$

Il quadrato di 17 è 289, ma gli Autori, evidentemente mossi da intenti pratici, hanno arrotondato la lunghezza della diagonale a 17 canne.

Il *mezzo diametro* BE è lungo:

$$BE = 17/2 = (8 + \frac{1}{2}) \text{ canne.}$$

Per chiarire il metodo di calcolo dell'area di questo campo, nel trattato il quadrato viene scomposto in 144 piccoli quadrati con lati lunghi 1 canna:

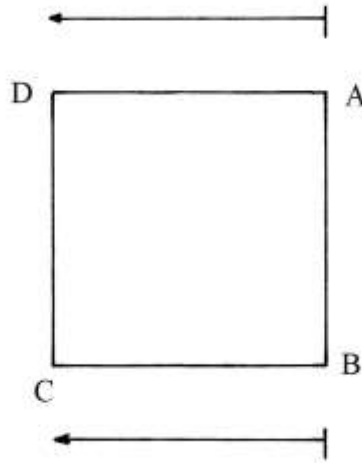
D												A	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
												12	E
												12	F
												12	G
												12	H
												12	I
												12	K
												12	L
												12	M
												12	N
												12	O
												12	
C													B

Le colonne sono numerate da 1 a 12; le righe orizzontali sono contrassegnate con lettere maiuscole.

Ciascuna colonna e ciascuna riga contengono 12 quadratini.

Sommando le cifre – 12 – contenute nell'ultima colonna a destra si ottiene il numero 144 che è l'area di DACB.

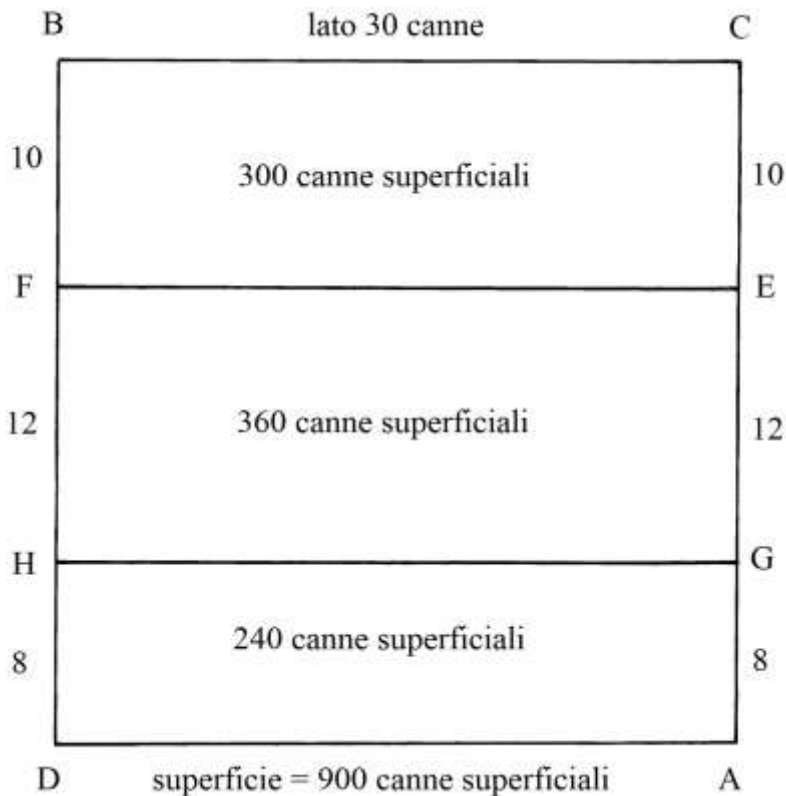
Anche in questo secondo schema, le lettere sono scritte come esse fossero gli estremi di due vettori:



Nel testo questo secondo quadrato è indicato come DACB, mentre leggendo le lettere in senso orario o antiorario si avrebbero DABC oppure DCBA: numerose figure del testo originario così contrassegnate sono, in questo articolo, lette indicando le lettere in senso orario o antiorario e quindi il quadrato qui sopra è designato come “ABCD” in senso orario.

%%%%%%%%%

Il campo BCDA ha forma quadrata con lati lunghi 30 canne:



È diviso in tre strisce orizzontali larghe 10, 12 e 8 canne.

Le aree delle tre strisce sono:

- * $S_{BCEF} = BF * BC = 10 * 30 = 300$ canne superficiali;
- * $S_{FEGH} = FH * FE = 12 * 30 = 360$ canne superficiali;
- * $S_{HGAD} = HD * HG = 8 * 30 = 240$ canne superficiali.

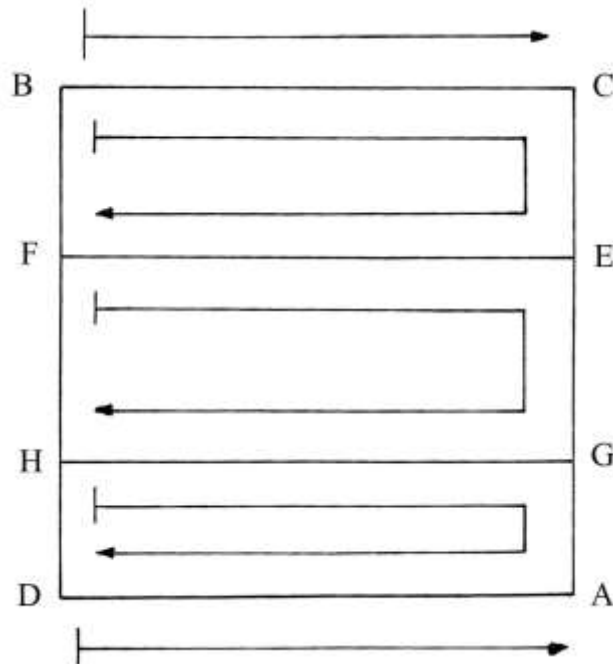
L'area dell'intero campo è:

$$S = S_{BCEF} + S_{FEGH} + S_{FGAD} = 300 + 360 + 240 = 900 \text{ canne superficiali.}$$

----- APPROFONDIMENTO -----

Nel testo il quadrato esterno è indicato come il *poligono "BCDA"* e le lettere sono legate da due vettori:

$$B \rightarrow C \quad \text{e} \quad D \rightarrow A.$$



Invece, i rettangoli che compongono il quadrato sono definiti da vertici che recano lettere disposte in *senso orario*:

- * $B \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow F$;
- * $F \rightarrow E \rightarrow G \rightarrow H$;
- * $H \rightarrow G \rightarrow A \rightarrow D$.

Un campo diviso in strisce verticali

Il solito campo quadrato BDAC, con lati lunghi 30 canne, è diviso in tre strisce verticali:

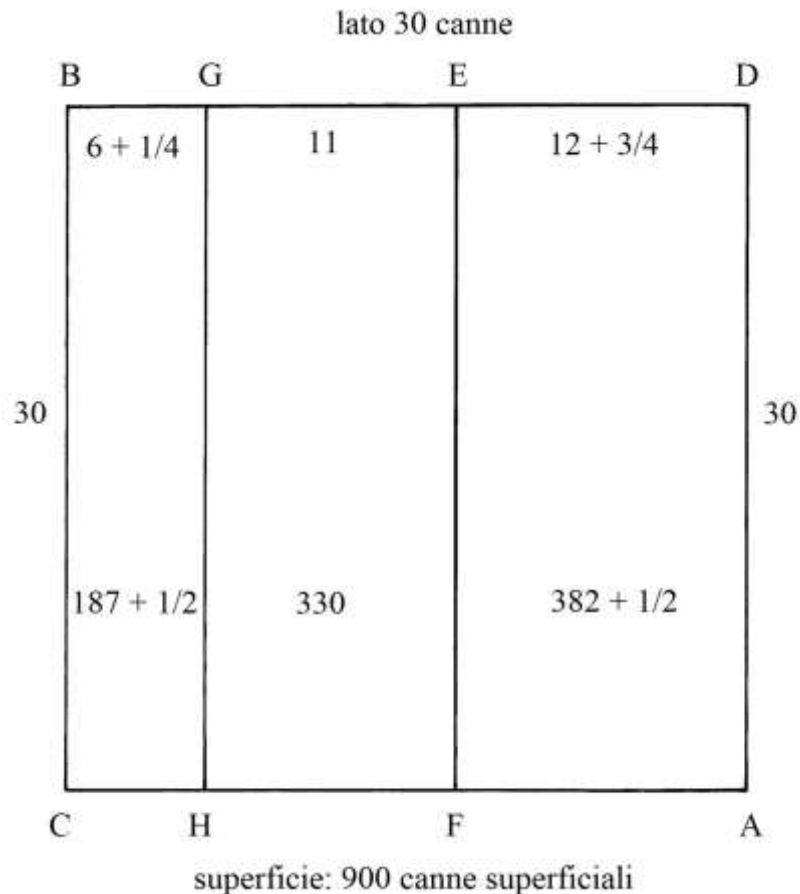
- * BG è largo $(6 + \frac{1}{4})$ canne;
- * GE è largo 11 canne;
- * ED è largo $(12 + \frac{3}{4})$ canne.

Le aree delle tre strisce sono le seguenti:

- * $S_{BGHC} = BG * BC = (6 + \frac{1}{4}) * 30 = (187 + \frac{1}{2})$ canne superficiali;
- * $S_{GEFH} = GE * GH = 11 * 30 = 330$ canne superficiali;
- * $S_{EDAF} = ED * EF = (12 + \frac{3}{4}) * 30 = (382 + \frac{1}{2})$ canne superficiali.

L'area dell'intero campo è:

$$S_{BDAC} = S_{BGHC} + S_{GEFH} + S_{EDAF} = (187 + \frac{1}{2}) + 330 + (382 + \frac{1}{2}) = 900 \text{ canne superficiali.}$$



Un altro campo diviso

Il quadrato ABDC ha lati lunghi 98 palmi e 5 onces: 1 palmo valeva 12 onces.

Il testo accenna alla possibilità che la lunghezza dei lati del quadrato sia espressa in *piedi*:

$$AB = (98 + 5/12) \text{ piedi.}$$

Anche il piede possedeva un sottomultiplo che aveva 1/12, il *pollice*:

$$1 \text{ piede} = 12 \text{ pollici.}$$

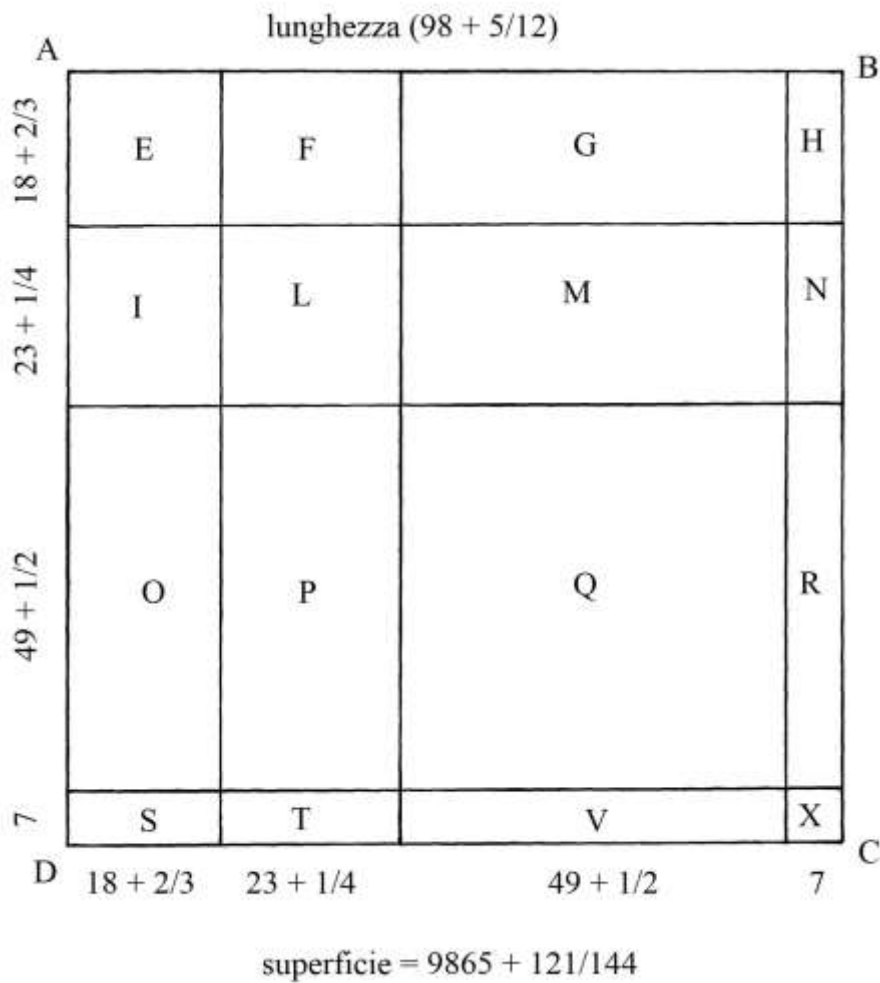
Nel testo non è fornita alcuna informazione sui rapporti fra le lunghezze della canna, del palmo e del piede.

Il quadrato è ABDC è suddiviso in 4 quadrati (indicati con le lettere E, L, Q e X) e in 12 ulteriori rettangoli, per un insieme di 16 quadrilateri con angoli retti.

Nel testo sono calcolate le aree dei singoli quadrilateri, calcoli che non sono qui riportati.

L'area dell'intero quadrato è:

$$S_{ABDC} = AB * AD = (98 + 5/12) * (98 + 5/12) = (9685 + 121/144) \text{ palmi quadri.}$$



Quadrato diviso in 9 parti

BACD è un quadrato con lati lunghi 65: non è indicata alcuna unità di misura delle lunghezze.

Il poligono è diviso in *nove* rettangoli dei quali sono riportate in figura le dimensioni lineari e le superfici.

L'area dell'intero quadrato è:

$$S_{BACD} = BA * AC = 65 * 65 = 4225.$$

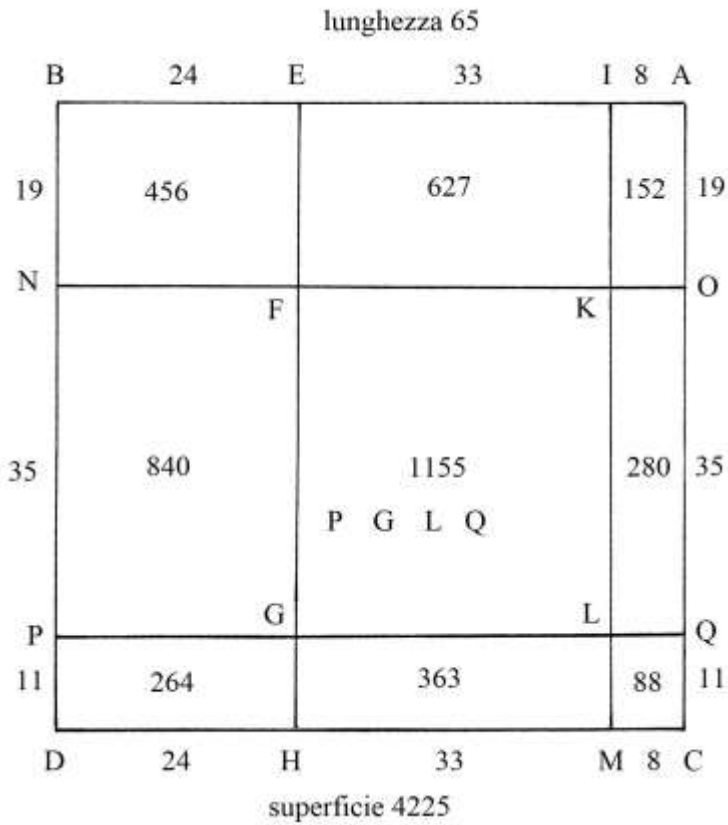
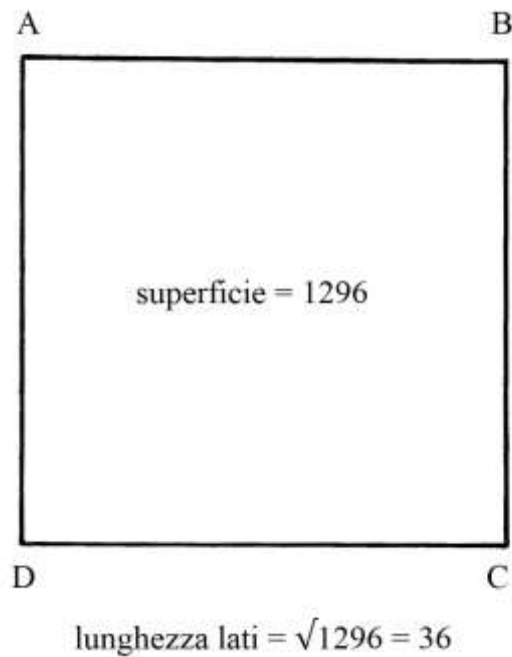


TAVOLA VII

Un quadrato ha area uguale a 1296: deve essere ricavata la lunghezza dei suoi lati.



La lunghezza dei lati è:

$$AB = \sqrt{1296} = 36.$$

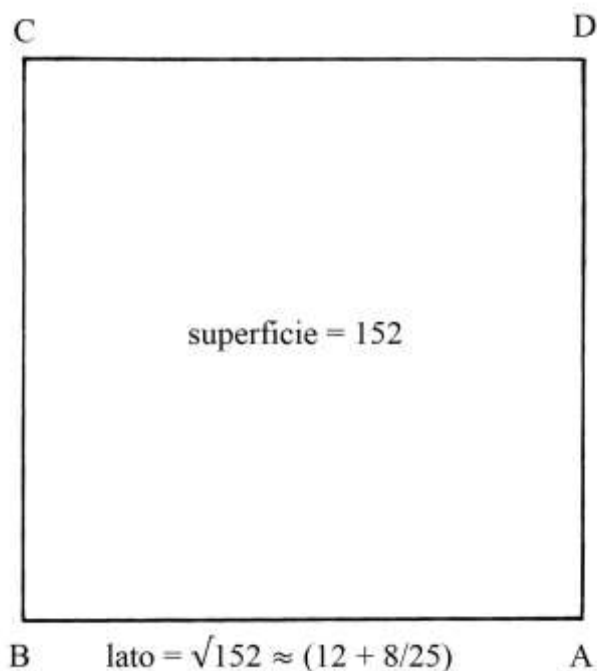
Nota: numerosi problemi che incontreremo in seguito contengono figure che hanno area uguale a 1296: è curiosa la passione mostrata nei confronti di questo numero, che è un *quadrato perfetto*:

$$(6^2)^2 = 36^2 = 1296.$$

La scelta di questo particolare numero può semplificare i calcoli.

Lunghezza dei lati di un altro quadrato

Un quadrato ha area uguale a 152:



La lunghezza ℓ dei suoi lati è:

$$\ell = \sqrt{152} = (12 + \sqrt{8}).$$

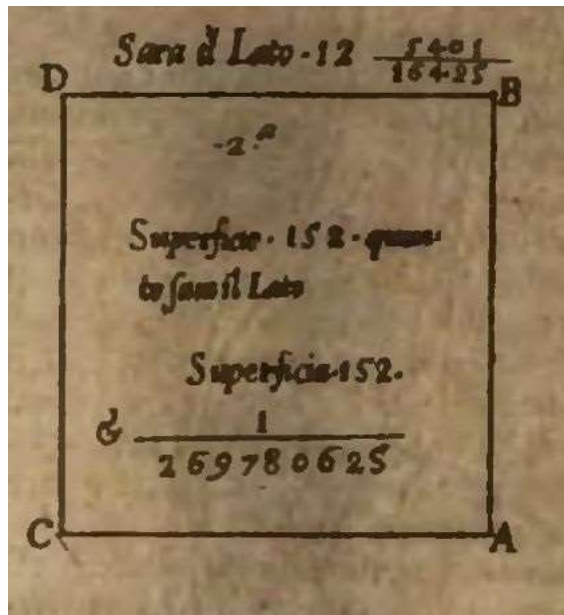
Il testo calcola la lunghezza approssimata più precisa dei lati con una procedura:

- * moltiplicare per 2 la parte intera di $\sqrt{152}$, che è 12: $2 * 12 = 24$;
- * aggiungere 1: $24 + 1 = 25$;
- * formare la frazione $8/25$.

La lunghezza dei lati del quadrato sarebbe:

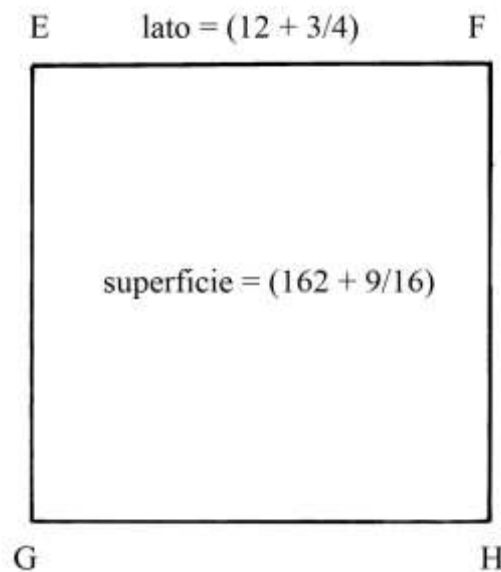
$$\ell = (12 + 8/25).$$

Nello schema originale, qui sotto riprodotto, sono forniti altri dati:



Un altro quadrato

Un terzo quadrato, EFGH, ha lati lunghi $(12 + \frac{3}{4})$:



La sua area è:

$$S_{EFGH} = EF * EG = (12 + \frac{3}{4}) * (12 + \frac{3}{4}) = (162 + \frac{9}{16}).$$

Quadrati simili

ABCD è un quadrato che ha area uguale a 3600: ne consegue che i suoi lati sono lunghi 60.

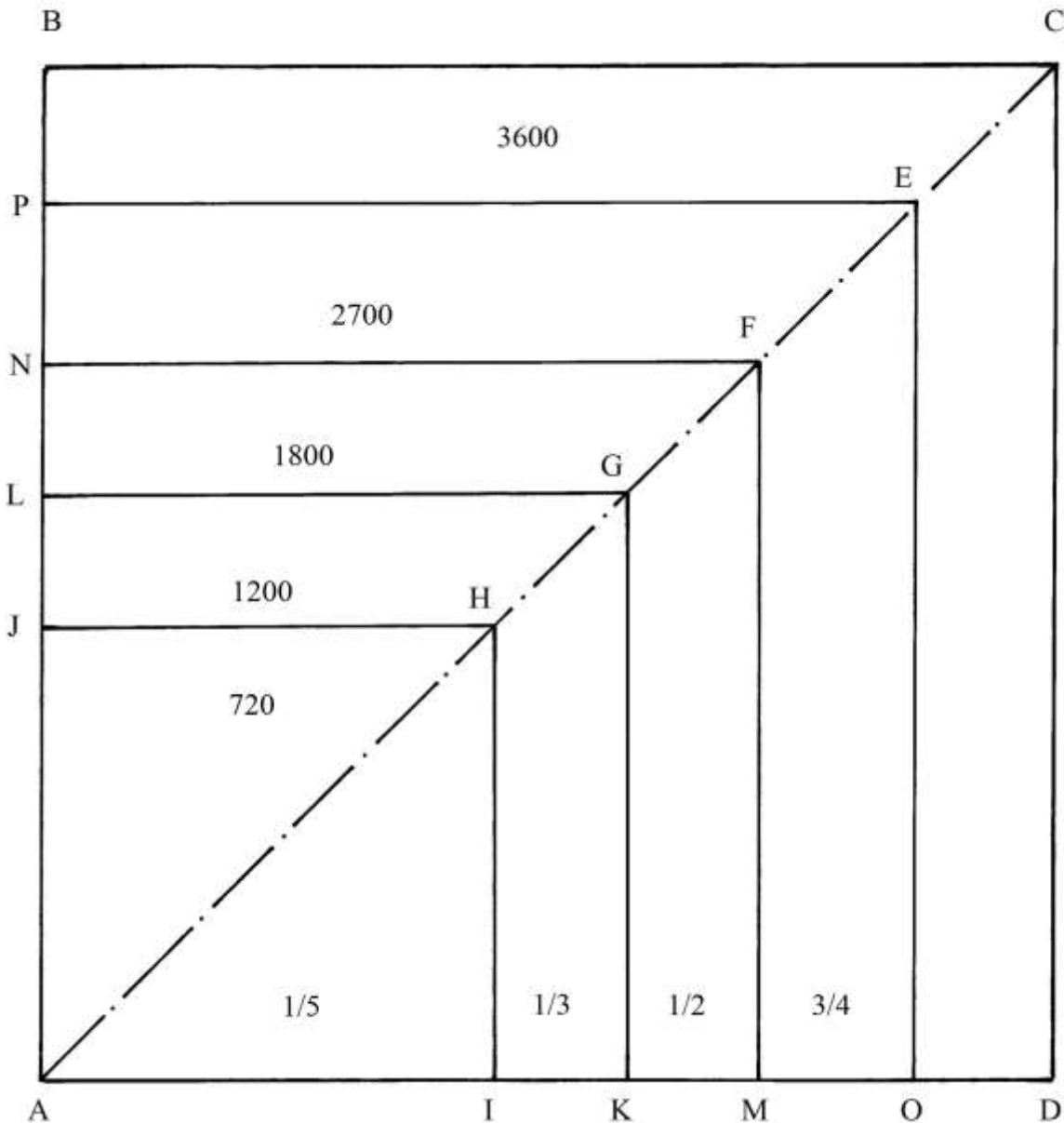
Nel quadrato devono essere disegnati altri *quattro* quadrati: le loro diagonali giacciono tutte sulla diagonale AC e hanno in comune il vertice A.

APEO ha area uguale a $\frac{3}{4}$ di quella di ABCD:

$$S_{APEO} = \frac{3}{4} * S_{ABCD} = \frac{3}{4} * 3600 = 2700.$$

APEO ha lati lunghi:

$$AP = \sqrt{2700} = 30 * \sqrt{3}.$$



ANFM ha area uguale a $\frac{1}{2}$ di quella di ABCD:

$$S_{ANFM} = \frac{1}{2} * S_{ABCD} = 3600/2 = 1800.$$

Il lato AN è lungo:

$$AN = \sqrt{1800} = 30 * \sqrt{2}.$$

ALGK ha area uguale a $\frac{1}{3}$ di quella di ABCD:

$$S_{ALGK} = \frac{1}{3} * S_{ABCD} = 3600/3 = 1200.$$

Il lato AL è lungo:

$$AL = \sqrt{1200} = 20 * \sqrt{3}.$$

Infine, il quadrato AJHI ha area che è $\frac{1}{5}$ di quella di ABCD:

$$S_{AJHI} = \frac{1}{5} * S_{ABCD} = 3600/5 = 720.$$

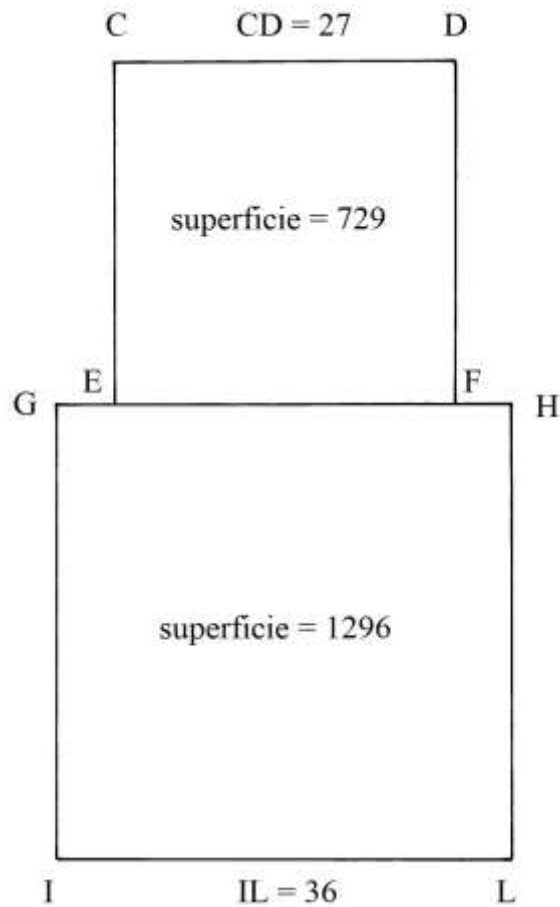
Il lato AJ è lungo:

$$AJ = \sqrt{720} = 12 * \sqrt{5}.$$

Nel testo non è contenuta alcuna informazione sulla tracciatura dei quadrati interni.

Due quadrati

La descrizione del problema è un po' oscura. Qui se ne tenta un'interpretazione.



GHLI è un quadrato che ha lati lunghi 36.

Sul lato GH deve essere costruito un secondo quadrato, CDFE, con area uguale a $\frac{9}{16}$ di quella di GHLI.

L'area di GHLI è:

$$S_{GHLI} = IL * GI = 36 * 36 = 1296.$$

L'area di CDFE è:

$$S_{CDFE} = \frac{9}{16} * S_{GHLI} = \frac{9}{16} * 1296 = 729.$$

La lunghezza dei lati di CDFE è:

$$CD = \sqrt{S_{CDFE}} = \sqrt{729} = 27.$$

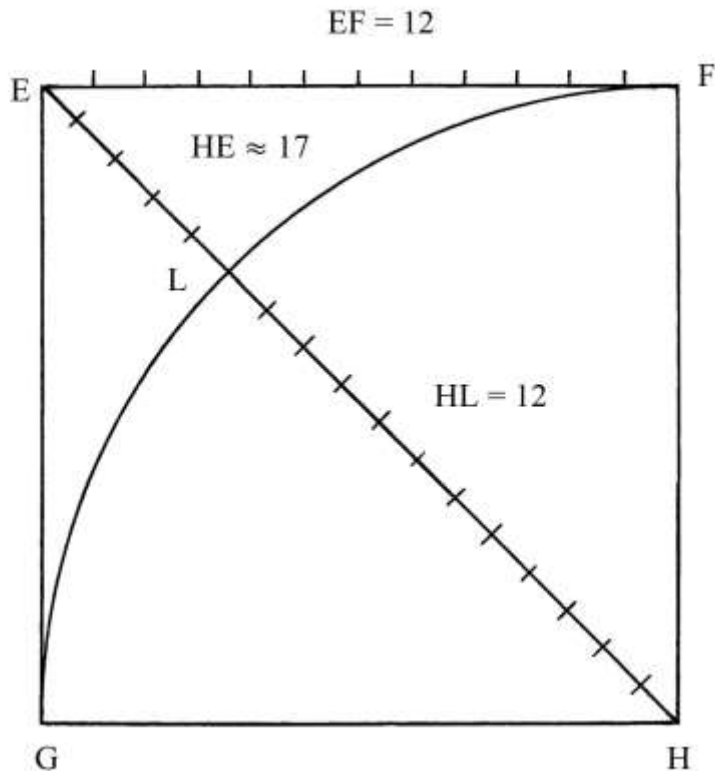
Lunghezza delle diagonali di un quadrato

Il quadrato EFGH ha lati lunghi 12.

Tracciare la diagonale HE (il "diametro").

Fare centro in H e con raggio HG disegnare l'arco di circonferenza da G a F: esso taglia la diagonale nel punto L.

La costruzione dovrebbe servire a ricavare per via geometrica la lunghezza della diagonale.



La lunghezza di HE è:

$$HE^2 = GE^2 + GH^2 = 2 * (12 * 12) = 288 \quad e$$

$HE = \sqrt{288}$ che nel testo è approssimato a 17 perché $17 * 17 = 289$, valore leggermente maggiore di 288.

Sul lato EF e sulla diagonale HE (da H verso E) sono riportate le divisioni in unità.

Il segmento LE misura *quasi* 5:

$$HE = HL + LE = 12 + (\text{quasi}) 5.$$

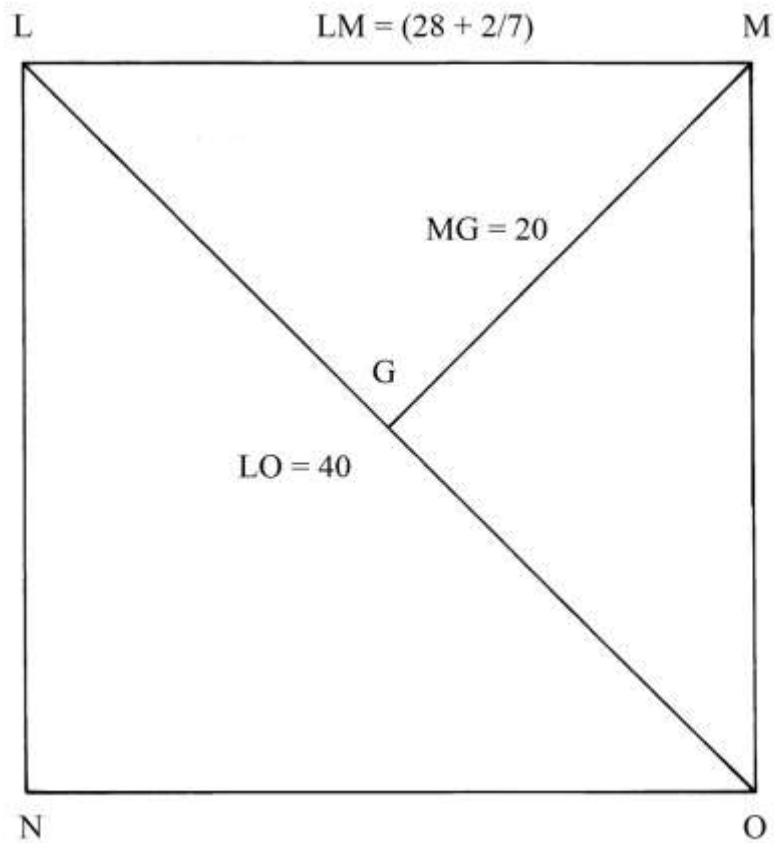
Quadrato data la diagonale

Il quadrato LMON ha la diagonale LO lunga 40.

È chiesta la lunghezza dei lati del poligono.

Ecco la soluzione:

$$LM = \sqrt{(LO^2/2)} = \sqrt{(40^2/2)} = \sqrt{(1600/2)} = \sqrt{800} = (28 + 2/7).$$



----- APPROFONDIMENTO -----

La soluzione è corretta. Infatti:

$$LO^2 = LM^2 + MO^2 = 2 * LM^2 \quad e$$

$$LM^2 = LO^2/2$$

$$LM = \sqrt{(LO^2/2)}.$$

Quadrato date le diagonali

ADBC è un quadrato che ha le diagonali disposte verticalmente (AB) e orizzontalmente (CD).

La diagonale CD è lunga:

$$CD = \sqrt{300}.$$

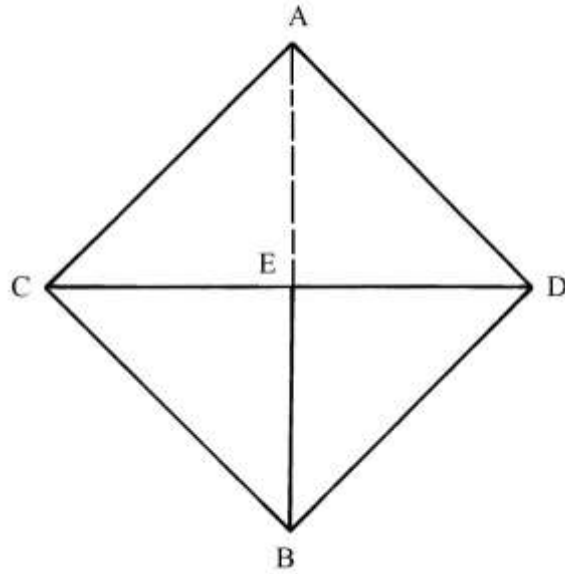
La semidiagonale EB è:

$$EB = CD/2 = (\sqrt{300})/2 = \sqrt{(300/4)} = \sqrt{75}.$$

Il lato BC ha lunghezza che è data da:

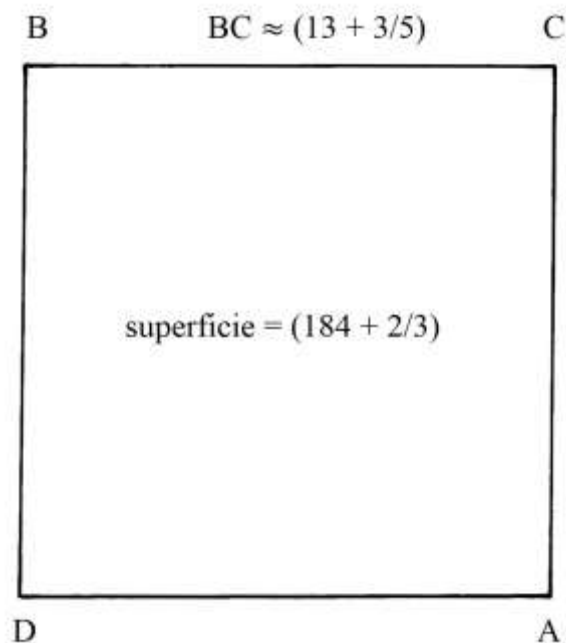
$$BC^2 = CE^2 + EB^2 = 2 * EB^2 = 2 * (\sqrt{75})^2 = 2 * 75 = 150 \quad e$$

$$BC = \sqrt{150} \approx (12 + \frac{1}{4}).$$



Quadrato data la superficie

Il quadrato BCAD ha area uguale a $(184 + 2/3)$.



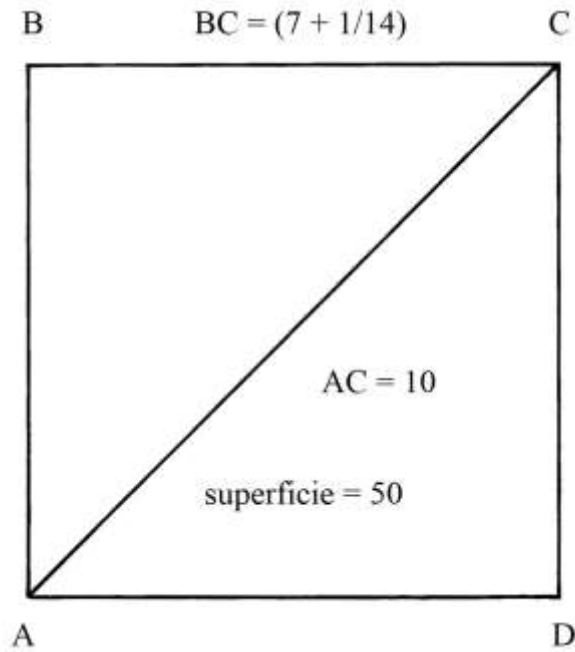
La lunghezza dei lati del quadrato è:

$$BC = \sqrt{184 + 2/3} \approx (13 + 3/5).$$

Lato e diagonale di un quadrato

Il quadrato ABCD ha superficie S uguale a 50.

Devono essere calcolate le lunghezze dei lati e delle diagonali (“*diametri*”).



La lunghezza dei lati è:

$$BC = \sqrt{50} = (7 + 1/14).$$

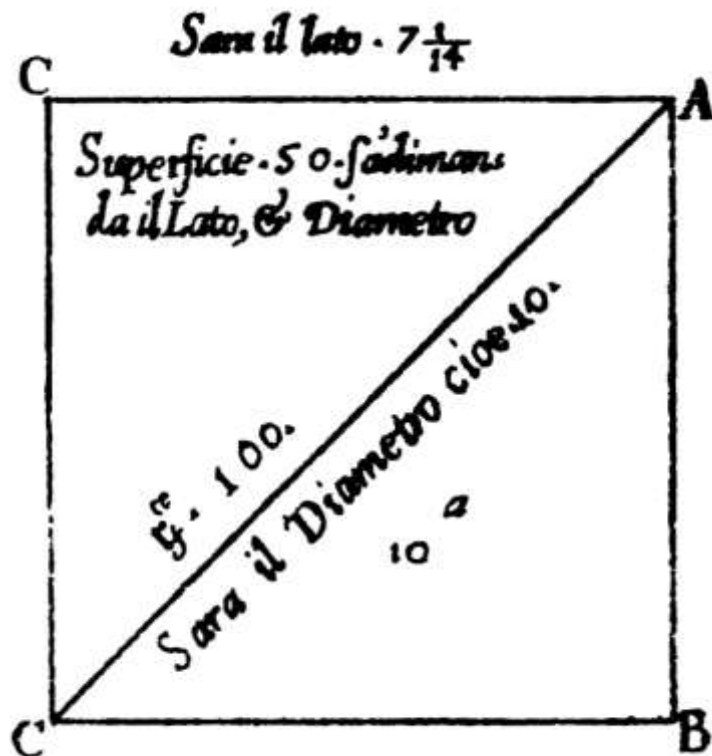
La lunghezza delle diagonali è calcolata come segue:

$$AC^2 = 2 * S = 2 * 50 = 100 \quad e$$

$$AC = \sqrt{100} = 10.$$

----- APPROFONDIMENTO -----

Sia nello schema originale che nel testo ad esso collegato, il quadrato è indicato come "CACB":



È molto strano che la lettera C sia usata due volte nella stessa figura.

%%%%%%%%%

La soluzione proposta nel testo per il calcolo della lunghezza delle diagonali è corretta.

L'area di un quadrato con lati lunghi ℓ è:

$$S = \ell^2.$$

La diagonale d dello stesso quadrato è lunga:

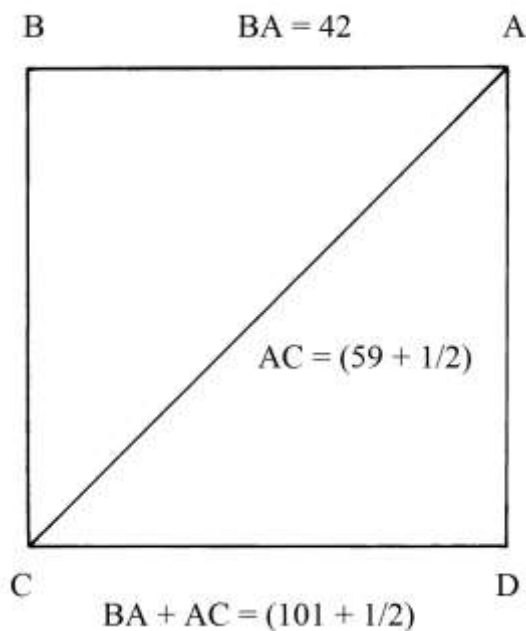
$$d = \ell * \sqrt{2}.$$

Il quadrato della lunghezza della diagonale d è:

$$d^2 = (\ell * \sqrt{2})^2 = \ell^2 * 2 = S * 2.$$

Lati e diagonali di un quadrato

Nel quadrato ABCD la somma delle lunghezze di un lato e di una diagonale è uguale a $(101 + \frac{1}{2})$.



Sono chieste le lunghezze dei lati e delle diagonali.

Nel testo, il problema viene risolto con una proporzione che utilizza i dati del quadrato del precedente problema:

$$AB + AC = (7 + \frac{1}{14}) + 10 = (17 + \frac{1}{14}).$$

La soluzione che qui proponiamo è una semplificazione.

La lunghezza di una diagonale, d , è uguale a $\sqrt{2}$ volte quella del lato ℓ dello stesso quadrato:

$$d + \ell = \sqrt{2} * \ell + \ell = \ell * (\sqrt{2} + 1), \quad \text{da cui:}$$

$$\ell = (d + \ell) / (\sqrt{2} + 1).$$

Nel caso di questo problema si ha:

$$\begin{aligned} \ell &= (101 + \frac{1}{2}) / (\sqrt{2} + 1) = (101 + \frac{1}{2}) * (\sqrt{2} - 1) / [(\sqrt{2} + 1) * (\sqrt{2} - 1)] = \\ &= (101 + \frac{1}{2}) * (\sqrt{2} - 1) = 42 = AB. \end{aligned}$$

La diagonale AC è lunga:

$$AC = (101 + \frac{1}{2}) - AB = (101 + \frac{1}{2}) - 42 = (59 + \frac{1}{2}).$$

Una tabella

La figura che segue, riprodotta dall'originale, contiene una tabella che serve per effettuare moltiplicazioni:

Dimostrazione del Moltiplicare de retti.

A								12 ^a								K								B																							
1	2	3	4	5	6	7	8																																								
9	10	11	12	13	14	15	16																																								
17	18	19	20	21	22	23	24																																								
25	26	27	28	29	30	31	32																																								
33	34	35	36	37	38	39	40																																								
41	42	43	44	45	46	47	48																																								
49	50	51	52	53	54	55	56																																								
57	58	59	60	61	62	63	64	H																																							
E								1								2								3								4								P							
D								G								C																															

TAVOLA VIII

I disegni contenuti in questa Tavola sono dedicati ai metodi usati per dividere un quadrato in differenti modi.

La descrizione del contenuto di questa Tavola reca in calce una *nota* del curatore Giovanni Scala che è qui integralmente riprodotta:

DA NOTARE

“M. Giouanni Pomodoro Autore di quest’opera non solo non hà lasciato cosa alcuna di scritto, ma oltre a ciò ancora le medesime figure poste nelle tavole sono restate imperfette, come si vede in questa ottava tavola che la figura quarta, quinta, sesta, settima, ottava, nona e decima sono senza numeri, & tutto ciò ch’io hò scritto sopra ciò è posto da me. Inoltre la duodecima figura non hà né numeri ne titolo, alla quale io manco hò curato metterne affine si vegga, & conosca chiaramente l’Autore haver lassato delle cose imperfette come hò detto, ma il tutto si deve attribuire all’insidiosa Morte, la quale interroppe così bello, & utile studio cominciato da un tanto virtuoso huomo.”

Divisione di un quadrato in due parti uguali

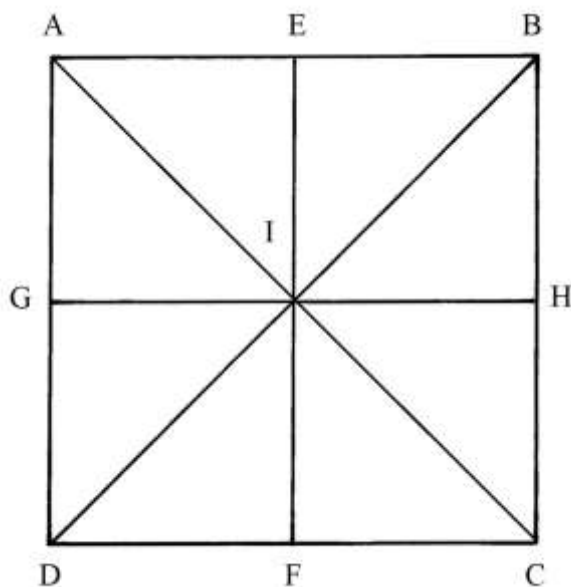
ABCD è il quadrato da dividere in due parti uguali.

La costruzione offre alcuni esempi.

Tracciare le diagonali AC e DB e le mediane EF e GH.

AC divide il quadrato in due triangoli rettangoli di uguali dimensioni: lo stesso accade con DB che divide in due parti uguali ABCD.

Anche ciascuna delle due mediane divide il quadrato in due rettangoli di uguali dimensioni.

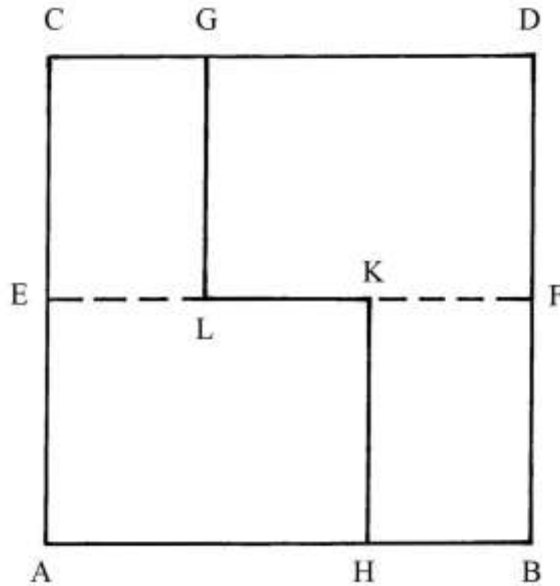


%%

Il quadrato ACDB deve essere diviso in due parti di aree uguali. EF è una mediana: su di essa fissare i punti L e K in modo che valga l'uguaglianza

$$EL = KF.$$

I segmenti EK e LF hanno uguale lunghezza.

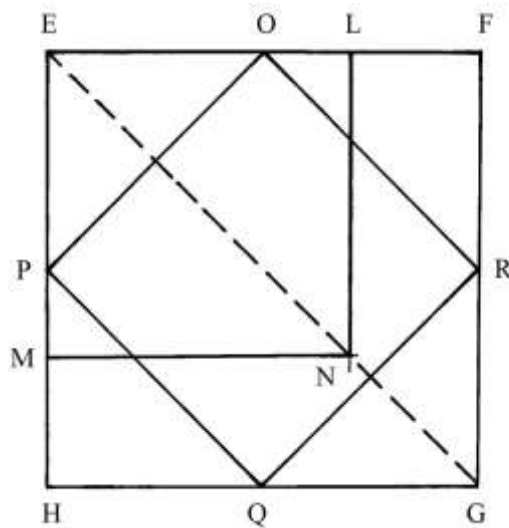


Dal punto L elevare la perpendicolare LG alla mediana EF e abbassare quella KH.

Il poligono AECCGLKH ha area uguale a quella del poligono GDFBHKL: entrambi hanno area uguale a metà di quella di ACDB.

%%

Il quadrato EFGH deve essere diviso in due parti uguali, una delle quali deve essere un quadrato.



Tracciare la diagonale EG.

Fissare i punti medi dei lati: sono O, P, Q e R.

Disegnare il quadrato OPQR: esso ha area uguale a metà di quella di EFGH.

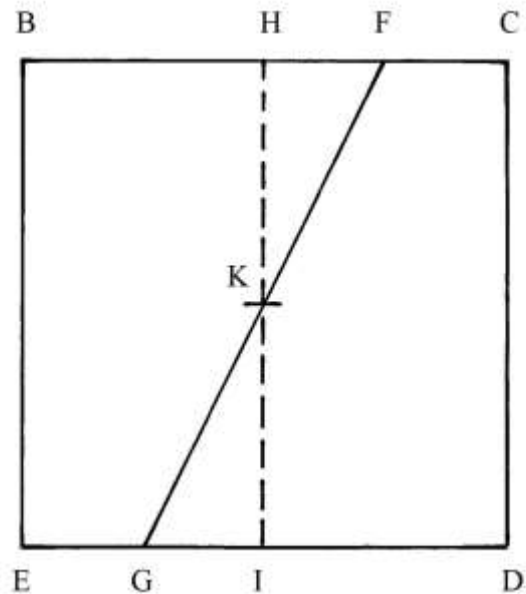
Con il compasso misurare la lunghezza di OP: con questa apertura fare centro in E, per fissare i punti L e M; poi, con la stessa apertura fare centro in L e in M per stabilire il punto N, posizionato sulla diagonale EG.

ELNM è un quadrato che ha le stesse dimensioni di quello OPQR e cioè la metà di quella di EFGH.

Il poligono LFGHMN ha area che è uguale a quella di ELNM ed è anch'essa metà di quella del quadrato EFGH.

%%%

BCDE è un quadrato che deve essere diviso in due parti di aree uguali, con una corda uscente dal generico punto F.



Fissare i punti medi dei lati BC e ED: sono H e I.

HI è una mediana del quadrato e K è il suo punto medio.

Tracciare la corda uscente da F e passante per K: è FKG.

I trapezi rettangoli EBFK e CDKF hanno aree uguali e pari a metà di quella del quadrato BCDE.

Divisione di un quadrato in tre parti uguali

ACGH è un quadrato con lati lunghi 60. Sul lato AC è fissato un punto, I, che dista 15 da A.

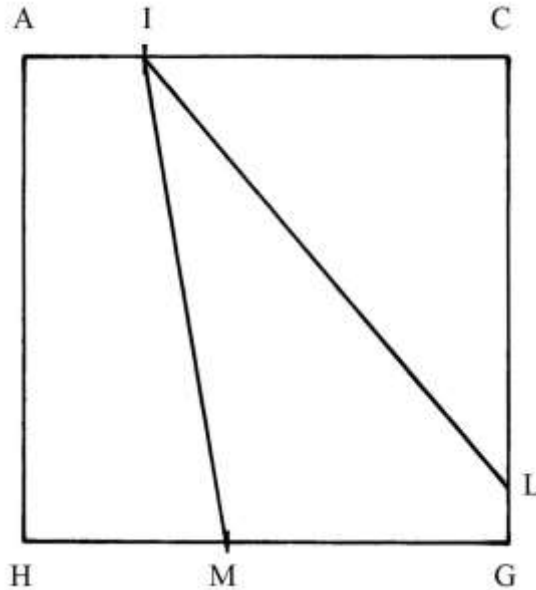
Dal punto I devono essere tracciate due corde per dividere ACGH in tre parti con aree uguali a un terzo di quella di ACGH.

L'area dell'intero quadrato è:

$$S_{ACGH} = 60 * 60 = 3600.$$

Ciascuna delle tre parti deve avere area uguale a:

$$3600/3 = 1200.$$



La soluzione è ottenuta con una procedura che è qui riprodotta:

- * moltiplicare la lunghezza di AI per quella di AH: $15 * 60 = 900$;
- un rettangolo con lati lunghi quanto AI e AH non ha area uguale a $1/3$ di quella del quadrato, ma soltanto $1/4$: $900/3600 = 1/4$;
- * sottrarre 900 da 1200: $1200 - 900 = 300$;
- * dividere 300 per la lunghezza di un lato di ACGH: $300/60 = 5$;
- * moltiplicare per 2: $5 * 2 = 10$;
- * sommare con la lunghezza di AI: $10 + 15 = 25$, lunghezza di HM [AIMH è un trapezio rettangolo].

Semplifichiamo la procedura per giungere a una soluzione più rapida.

L'area del trapezio AIMH è:

$$S_{AIMH} = AH * (AI + HM)/2 = 60 * (15 + 25)/2 = 60 * 40/2 = 1200.$$

La corda IL è l'ipotenusa del triangolo rettangolo ICL che deve avere area di 1200 ($1/3$ di quella di ACGH).

L'area di ICL è data da:

$$S_{ICL} = IC * CL/2 = 1200.$$

La lunghezza di CL è:

$$CL = 2 * S_{ICL}/IC = 2 * 1200/45 = (53 + 1/3).$$

ACGH è ora diviso in tre poligoni di aree uguali a *un terzo* della sua. Verifichiamo: MILG è un quadrilatero la cui area, per differenza, è data da:

$$S_{MILG} = S_{ACGH} - S_{AIMH} - S_{ICL} = 3600 - 1200 - 1200 = 1200.$$

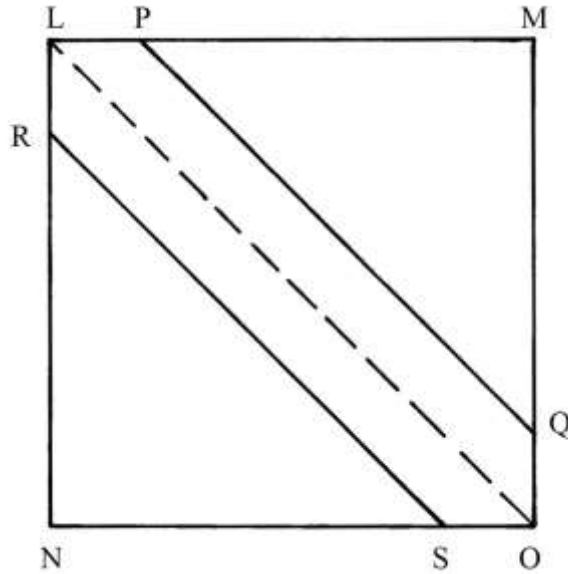
I tre poligoni hanno aree uguali a *un terzo* di quella del quadrato.

Altra divisione di un quadrato in tre parti uguali

Il quadrato LMON ha lati lunghi 60, come nel caso precedente.

Deve essere diviso in tre parti di aree uguali con due corde parallele alla diagonale LO.

È da notare che l'Autore o i due Autori (Pomodoro e Scala) usa/usano il termine "diagonale" per indicare LO e viene abbandonata la precedente definizione "diametro".



La diagonale LO è lunga:

$$LO^2 = LN^2 + NO^2 = 60^2 + 60^2 = 3600 + 3600 = 7200$$

e

$$LO = \sqrt{7200}.$$

L'area del quadrato è:

$$S_{LMON} = LN * NO = 60 * 60 = 3600.$$

L'area dei due triangoli rettangoli isosceli LNO e LMO è uguale a *metà* di quella del quadrato:

$$S_{LNO} = S_{LMO} = S_{LMON}/2 = 3600/2 = 1800.$$

La soluzione del problema è data dalla costruzione di due triangoli rettangoli isosceli, RNS e PMQ, con ipotenuse parallele alla diagonale LO. Usiamo un metodo leggermente modificato rispetto a quello del testo.

Essendo RNS un triangolo rettangolo isoscele, i due cateti RN e NS hanno uguale lunghezza:

$$RN = NS.$$

L'area di RNS è 1200 ed è data da:

$$S_{RNS} = RN * NA/2 = RN^2/2 = 1200 \quad \text{da cui:}$$

$$RN^2 = 2 * 1200 = 2400 \quad \text{e}$$

$$RN = \sqrt{2400} \approx 49.$$

Il quadrato di 49 è 2401, di poco superiore a 2400.

Anche NS, PM e MQ hanno lunghezza 49.

L'esagono non regolare RLPQOS ha area che *un terzo* di quella di LMON.

Divisione di un quadrato in quattro parti uguali

GFGF è un quadrato con lati lunghi 60: è da notare la ripetizione delle lettere G e F sui lati del poligono.

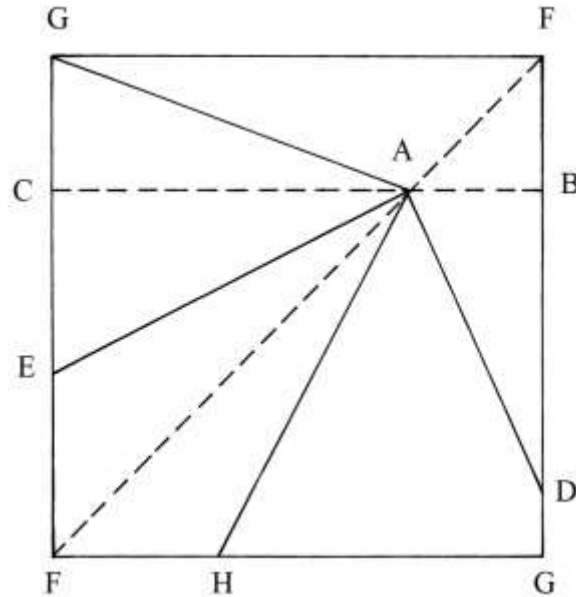
Il punto A è collocato sulla diagonale FF e dista 15 dai lati FG (superiore) e FG (laterale a destra):

$$AB = 15 \quad \text{e} \quad CA = CB - AB = 60 - 15 = 45.$$

Il quadrato deve essere diviso in quattro parti uguali con corde uscenti dal punto A; esse sono i seguenti poligoni:

* il triangolo GAE;

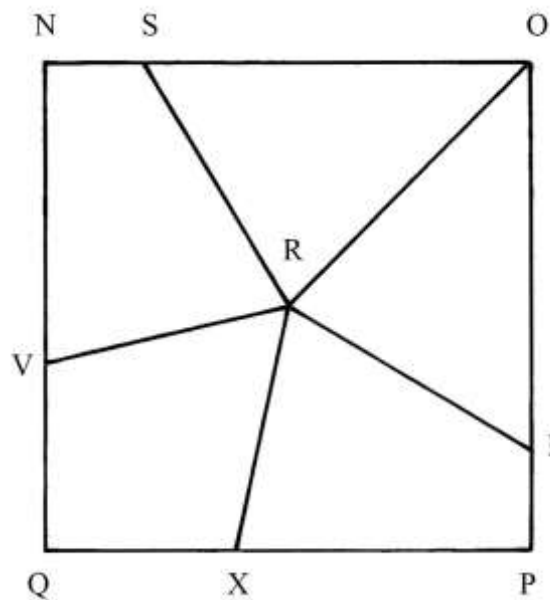
- * il quadrilatero EAHF;
 - * il quadrilatero AHGD;
 - * il quadrilatero GFDA.
- Nel testo non è fornita alcuna spiegazione sulla costruzione.



Divisione di un quadrato in cinque parti uguali

Il quadrato NOPQ deve essere diviso in cinque parti uguali con segmenti uscenti dal centro

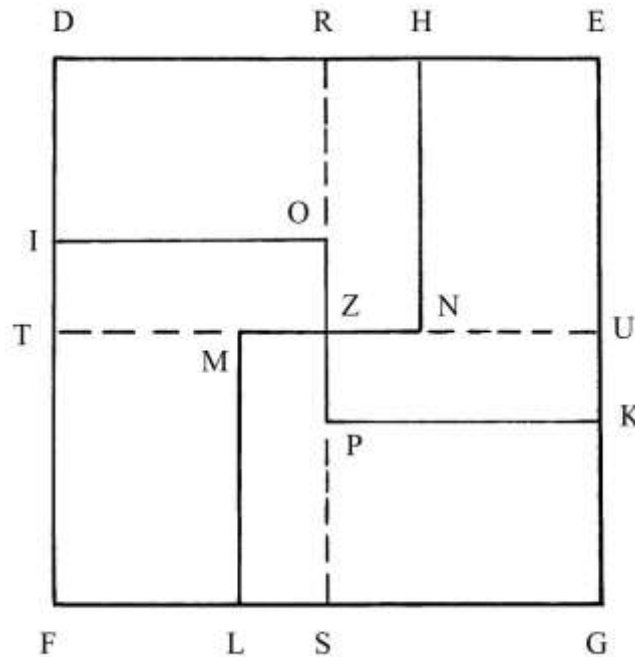
R.



Non viene fornita alcuna indicazione sul metodo usato.

Altra divisione di un quadrato in quattro parti uguali

DEGF è un quadrato che deve essere diviso in quattro parti con segmenti passanti per il centro Z.



Disegnare le mediane RS e TU.

È probabile che nel trattato la costruzione sia stata effettuata dividendo ciascun lato in due parti di differente lunghezza: ad esempio, DH è lungo i 2/3 di DE e HE il rimanente 1/3 della lunghezza del lato.

Applicare questa suddivisione agli altri tre lati.

Dal punto H abbassare la perpendicolare HN alla mediana TU.

Da L elevare la perpendicolare LM.

Infine, disegnare IO e KP perpendicolari ai lati ai quali i due punti appartengono.

Gli esagoni non regolari DHNZOI, HEKPZN, MZPKGL e IOZMLF hanno tutti area uguale a un quarto di quella di DEGF.

Divisione di un quadrato in tre parti proporzionali a 3, 4 e 5

AGHI è un quadrato che deve essere diviso in parti con aree proporzionali a 3, 4 e 5.

I lati del quadrato sono lunghi 60 e la sua area è:

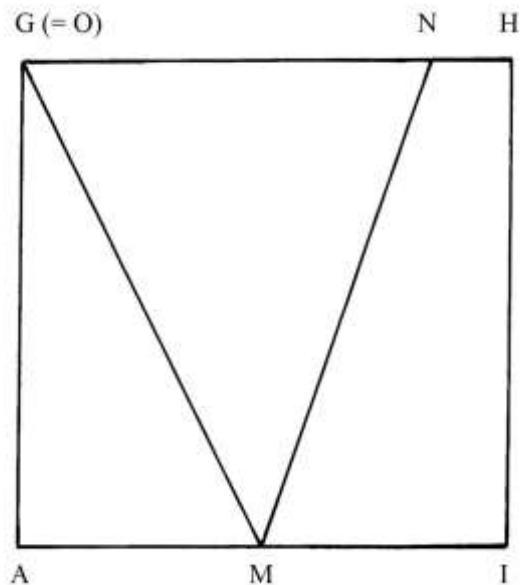
$$S_{AGHI} = AG * GH = 60 * 60 = 3600.$$

Il punto M è il medio del lato AI.

Le aree dei tre poligoni che devono essere disegnati sono così calcolate:

- | | |
|--------------------------------------|----------------------|
| * sommare 3, 4 e 5: | $3 + 4 + 5 = 12;$ |
| * moltiplicare l'area di AGHI per 5: | $3600 * 5 = 18.000;$ |
| * dividere per 12: | $18.000/12 = 1500;$ |
| * moltiplicare l'area per 4: | $3600 * 4 = 14.400;$ |
| * dividere per 12: | $14.400/12 = 1200;$ |
| * moltiplicare l'area per 3: | $3600 * 3 = 10.800;$ |
| * dividere per 12: | $10.800/12 = 900.$ |

1500, 1200 e 900 sono le aree dei tre poligoni cercati:
 $1500 : 5 = 1200 : 4 = 900 : 3$.



Il triangolo OAM ha area uguale a 900, che è data da:

$$S_{OAM} = OA \cdot AM/2 = 900.$$

Dobbiamo ricavare la lunghezza di OA:

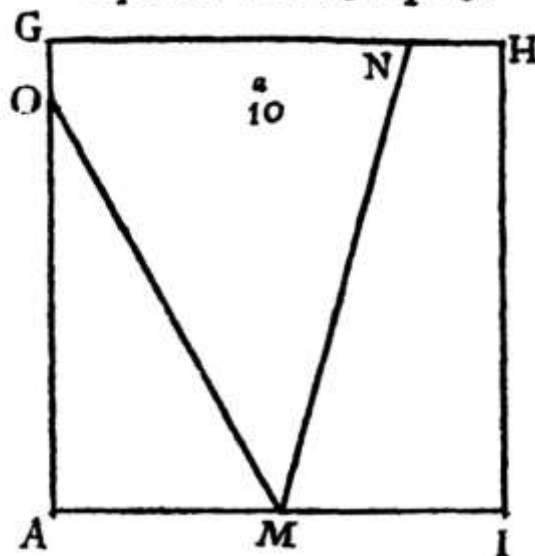
$$OA = 2 \cdot S_{OAM}/AM = 2 \cdot 900/30 = 60.$$

Il punto O coincide con G. Infatti, l'area di GAM = OAM è pari a 3/12 di quella di AGHI:

$$S_{GAM}/S_{AGHI} = 900/3600 = 1/4 = 3/12.$$

Lo schema originale è *errato* perché il punto O non coincide con G e l'area di OAM è inferiore a 900:

*Di uno quadrato per fame . 3 . parti in
 Proporzione come . 3 . 4 . 5 .*



Se l'area del trapezio rettangolo NHIM deve essere proporzionale a $\frac{4}{12}$ di quella di AGHI, procediamo a calcolare la lunghezza incognita di NH.

L'area del trapezio è:

$$S_{NHIM} = HI * (NH + MI/2) \text{ o } \frac{4}{12} * 3600 = 1200$$

$$(NH + MI) = 2 * S_{NHIM}/HI$$

$$NH = 2 * S_{NHIM}/HI - MI$$

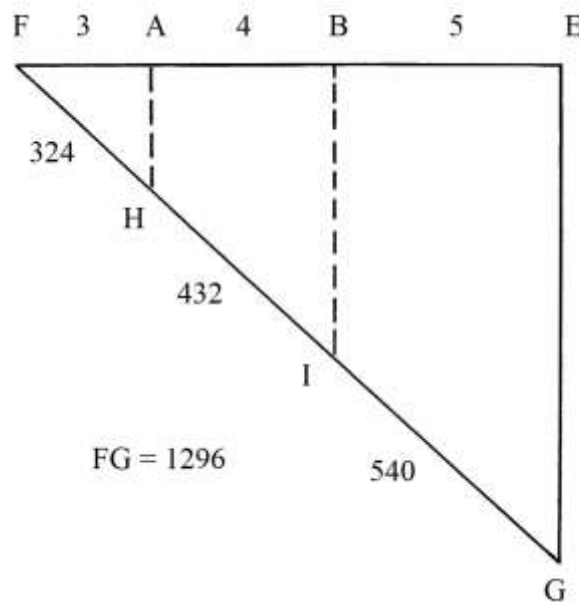
$$NH = 2 * 1200/60 - 30 = 2400/60 - 30 = 40 - 30 = 10.$$

Il triangolo GNM è per differenza il poligono che ha area uguale a $\frac{5}{12}$ di quella di AGHI e cioè:

$$S_{GNM} = \frac{5}{12} * S_{AGHI} = \frac{5}{12} * 3600 = 1500.$$

Divisione di un segmento in proporzione a 3, 4 e 5

FG è un segmento lungo 1296 che deve essere diviso in parti proporzionali a 3, 4 e 5.



FG è la diagonale del triangolo rettangolo isoscele FEG.

Dividere il lato FE in parti proporzionali a 3, 4 e 5: la somma dei tre divisori è:

$$3 + 4 + 5 = 12.$$

Il segmento FA è lungo $\frac{3}{12}$ di FE, AB è $\frac{4}{12}$ di FE e BE è lungo $\frac{5}{12}$ di FE.

Dai punti A e B tracciare le corde AH e BI parallele al cateto EG.

FG è ora diviso in segmenti proporzionali a 3, 4 e 5:

* $FH = \frac{3}{12} * FG = \frac{3}{12} * 1296 = 324;$

* $HI = \frac{4}{12} * FG = \frac{4}{12} * 1296 = 432;$

* $IG = \frac{5}{12} * FG = \frac{5}{12} * 1296 = 540.$

TAVOLA IX

La Tavola contiene *dieci* schemi che illustrano i modi per calcolare le aree di poligoni rettangolari sia con lunghezze dei lati espresse da numeri interi e da numeri “*rotti*” e cioè misti con una parte intera e una frazionaria.

Nella Tavola non è mai usata alcuna unità di misura, lineare o superficiale.

Area di un rettangolo

Il rettangolo ABDC è largo 8 e alto 12.

	1	2	3	4	5	6	7	8	
A	2							8	E
	3							8	F
	4							8	G
	5							8	H
	6							8	I
	7							8	K
	8							8	L
	9							8	M
	10							8	N
	11							8	O
	12							8	
C									D

La sua area è:

$$S_{ABDC} = AC * AB = 12 * 8 = 96.$$

Il rettangolo è diviso in 96 quadrati con lati lunghi 1.

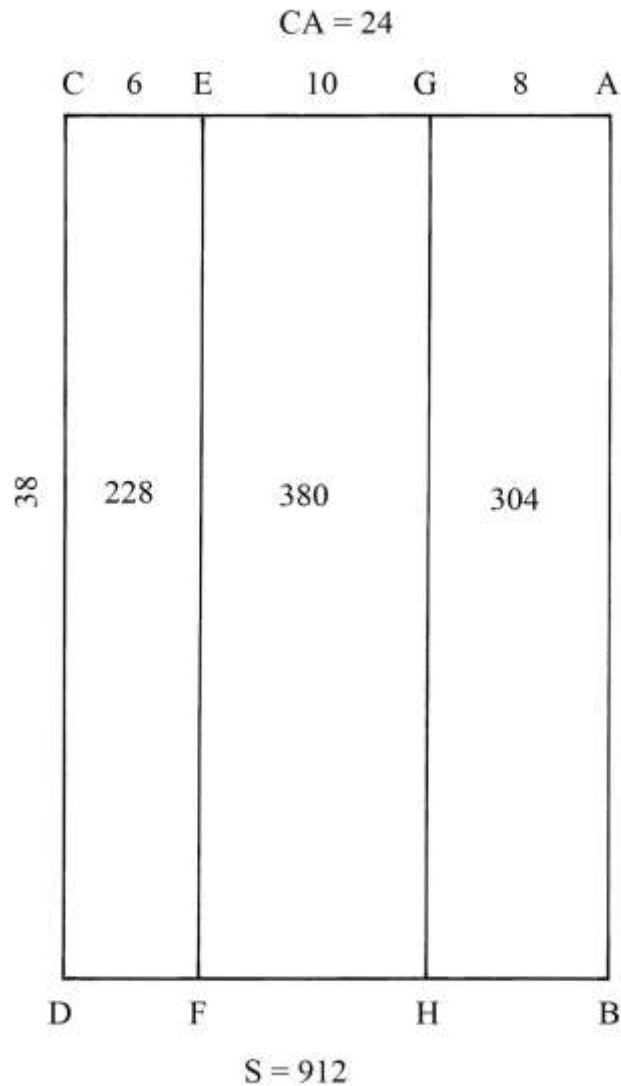
Ciascuna riga orizzontale ha area uguale a 8.

Area di un rettangolo

Un rettangolo è largo 24 e alto 38; la sua area è:

$$S_{ABDC} = AB * BD = 38 * 24 = 912.$$

È diviso in tre strisce verticali rettangolari larghe 6, 10 e 8.



All'interno dei tre rettangoli sono scritte le rispettive aree.

Rettangolo scomposto in 9 quadrilateri

Il rettangolo BCED è diviso in nove rettangoli con l'aiuto di quattro corde: KN, OR, FG e

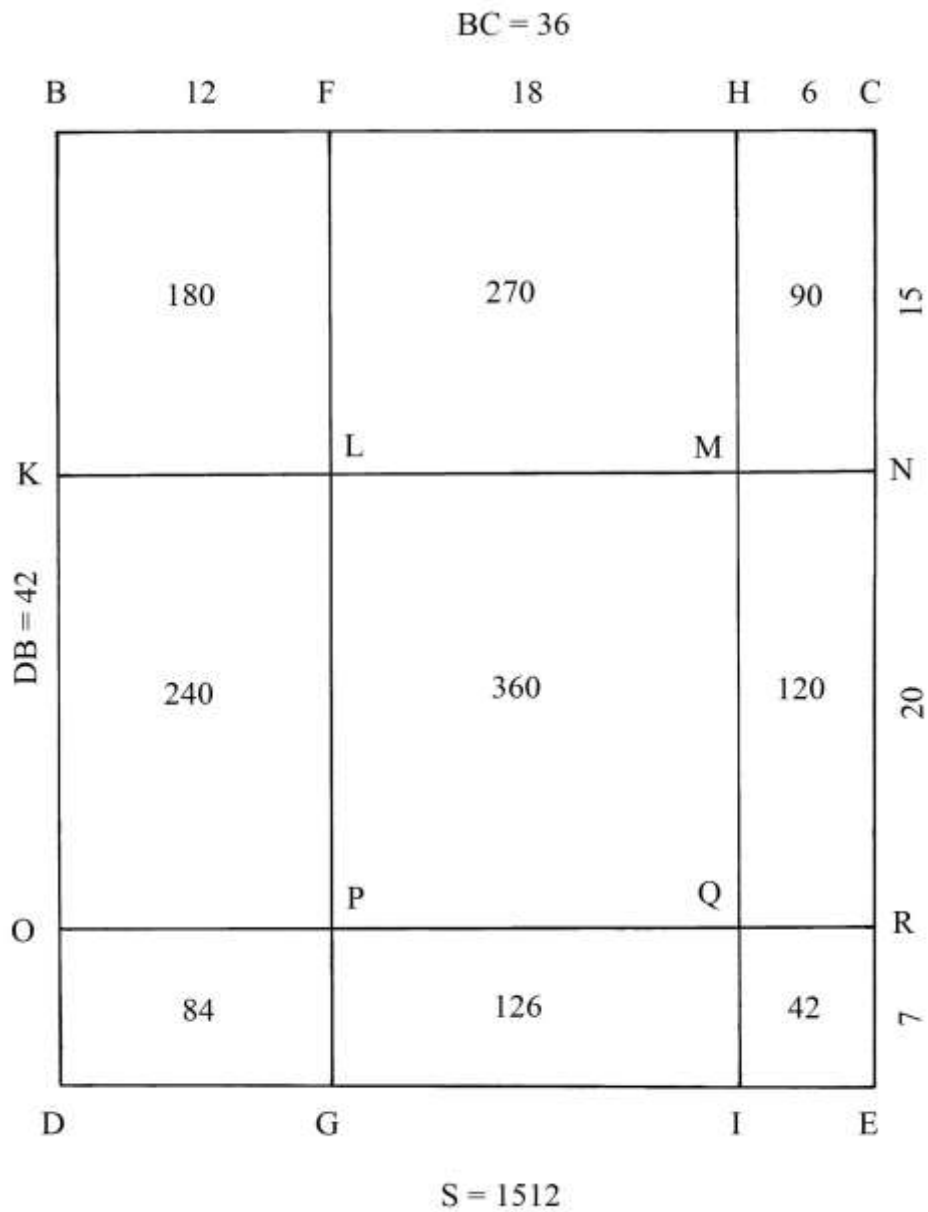
HI.

Esso è largo: BC = 36 e alto: BD = 42.

La sua area è:

$$S_{BCED} = BC * BD = 36 * 42 = 1512.$$

Per ciascuno dei nove rettangoli è calcolata l'area che è scritta al loro interno.



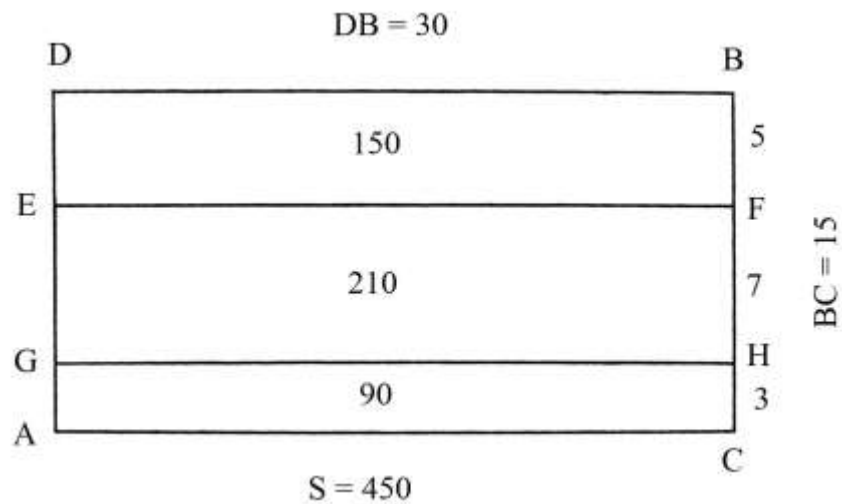
Rettangolo diviso in tre quadrilateri

ADBC è un rettangolo lungo 30 e largo 15: è la metà di un quadrato.

È diviso in tre strisce rettangolari che hanno larghezze:

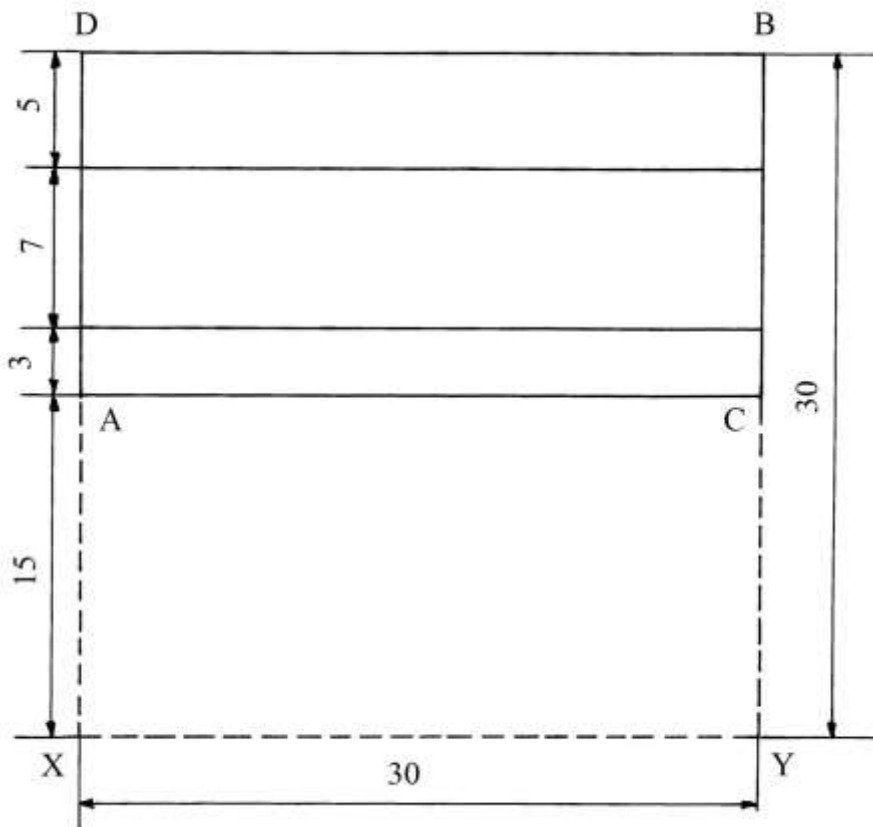
- * DE = 5;
- * EG = 7;
- * GA = 3.

Le aree delle tre strisce rettangolari sono scritte al loro interno.



----- APPROFONDIMENTO -----

Il rettangolo ABDC è metà del quadrato XDBY diviso in due parti uguali dalla mediana orizzontale AC.



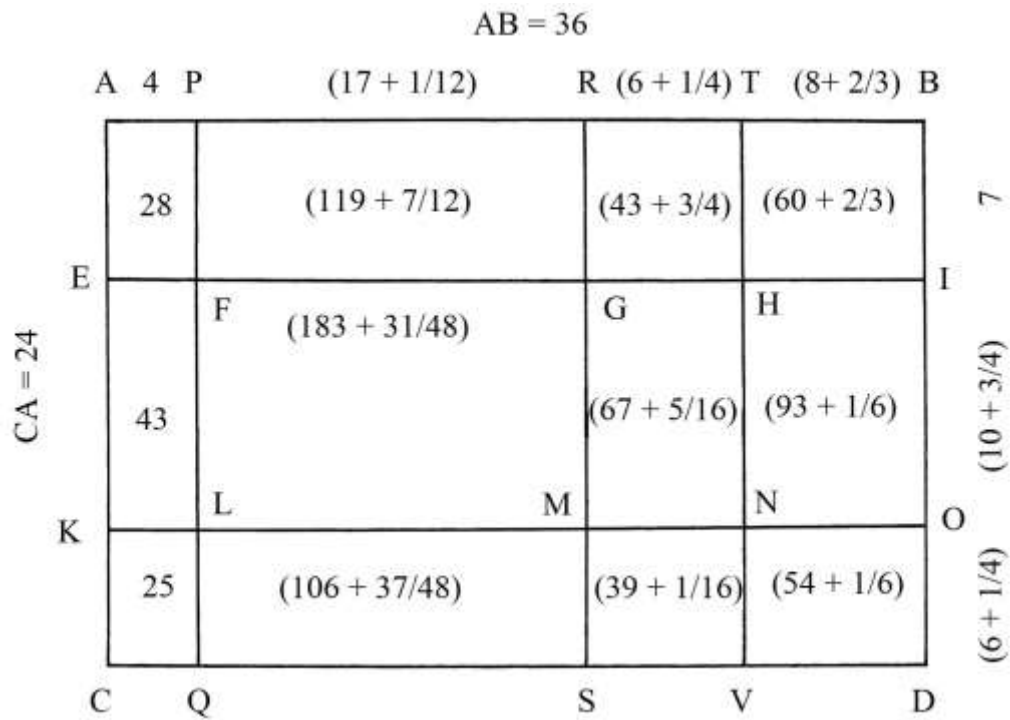
Rettangolo con misure non intere diviso in 12 quadrilateri

Il rettangolo ABDC è lungo 36 e largo 24:

- * AB = 36;
- * AC = 24.

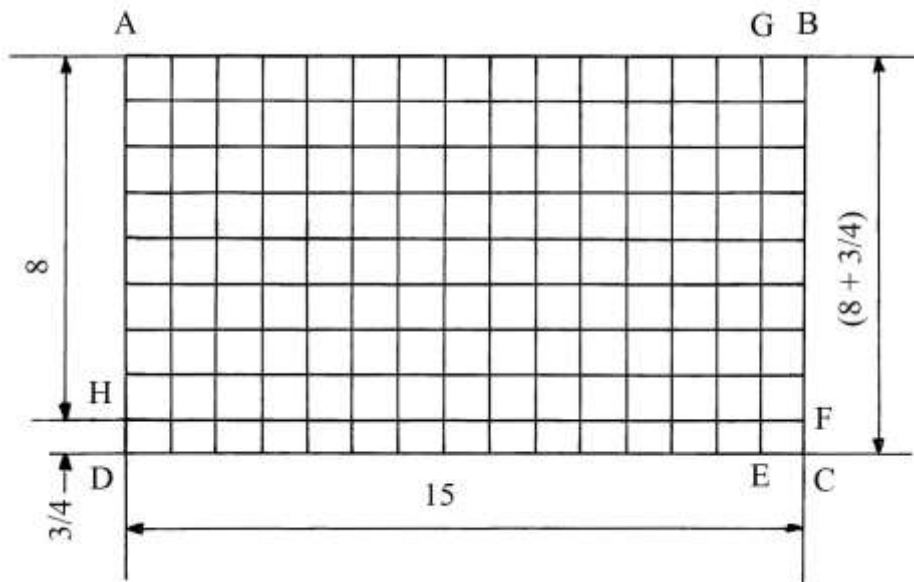
Esso è diviso in rettangoli che hanno anche lunghezze e larghezze espresse da numeri misti, con una parte frazionaria.

Le lunghezze e le aree sono riportate sulla figura.



Rettangolo diviso in quadrati e rettangoli

Un rettangolo è lungo 15 e largo $(8 + 3/4)$:



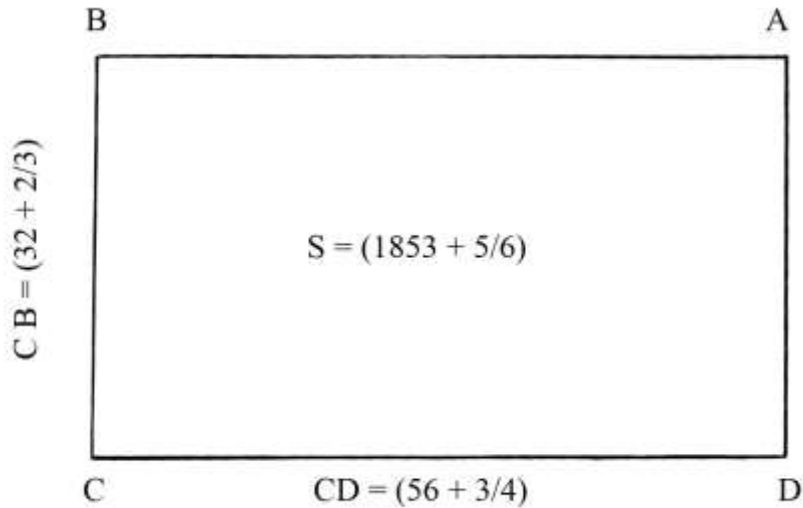
Esso viene diviso in 8 righe di quadrati con lati lunghi 1 e una riga, in basso, HDCE, formata da 15 rettangoli alti $(3/4)$ e larghi 1.

Lo schema qui sopra e la sua descrizione sono stati semplificati rispetto al testo originale.

Rettangolo con lunghezze espresse da numeri misti

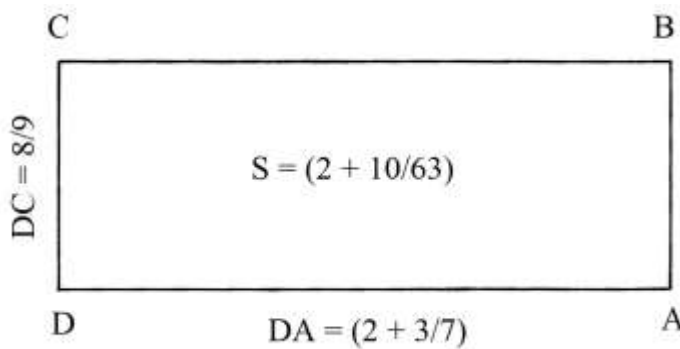
Il rettangolo ABCD ha lunghezza AB = $(56 + \frac{3}{4})$ e larghezza AD = $(32 + \frac{2}{3})$.
La sua area è:

$$S_{ABCD} = CD * CB = (56 + \frac{3}{4}) * (32 + \frac{2}{3}) = (1853 + \frac{5}{6}).$$



Area di un rettangolo

Il rettangolo ABCD è lungo DA = $(2 + \frac{3}{7})$ ed è largo DC = $\frac{8}{9}$.



La sua area è:

$$S_{ABCD} = DA * DC = (2 + \frac{3}{7}) * \frac{8}{9} = (2 + \frac{10}{63}).$$

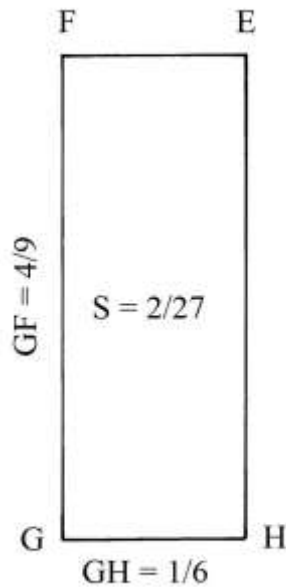
Area di un altro rettangolo

Il rettangolo EFGH è disposto con la lunghezza verticale.

La larghezza GH è $\frac{1}{6}$ e la lunghezza FG è $\frac{4}{9}$.

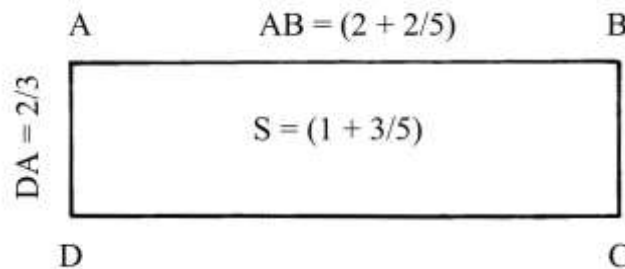
L'area del rettangolo è:

$$S_{EFGH} = FG * GH = \frac{4}{9} * \frac{1}{6} = \frac{2}{27}.$$



Area di un altro rettangolo

ABCD è un rettangolo che ha lunghezza $AB = (2 + 2/5)$ e larghezza $AD = 2/3$.



La sua area è:

$$S_{ABCD} = AB * AD = (2 + 2/5) * 2/3 = (1 + 3/5).$$

TAVOLA X

La Tavola offre alcuni strumenti pratici per calcolare le aree di rettangoli.

Area di un rettangolo

ABDC è un rettangolo che ha lunghezza $AB = 36$ e larghezza $AC = 12$.

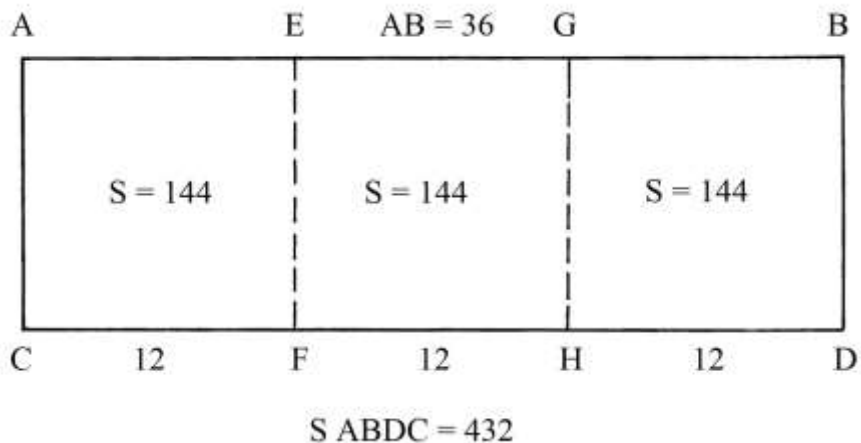
È evidente che esso è formato dall'unione di tre quadrati con lati lunghi 12.

L'area di un quadrato, ad esempio quello AEFC, è:

$$S_{AEFC} = AC * CF = 12 * 12 = 144.$$

L'area dell'intero rettangolo è:

$$S_{ABDC} = AB * AC = 36 * 12 = 432 = 3 * S_{AEFC} = 3 * 144 = 432.$$



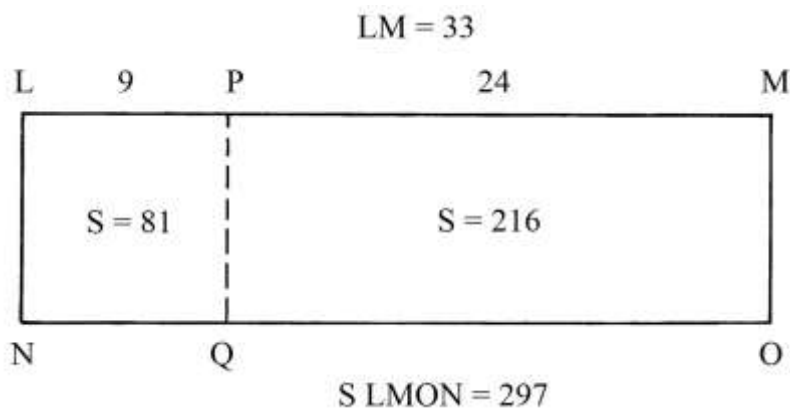
Nel testo è definita la proporzione esistente fra aree e lunghezze, qui riassunta come segue:

$$S_{ABDC} : S_{AEFC} = AB : CF$$

$$432 : 144 = 36 : 12.$$

Area di un rettangolo

LMON è un rettangolo che è lungo 33 e largo 9.



Esso è scomposto in un quadrato, LPQN con lati lunghi 9, e in un rettangolo, PMOQ, lungo 24 e largo 9.

L'area di LPQN è:

$$S_{LPQN} = LP * LN = 9 * 9 = 81.$$

L'area del rettangolo PMOQ è:

$$S_{PMOQ} = QO * PQ = 24 * 9 = 216.$$

L'area dell'intero quadrilatero è:

$$S_{LMON} = S_{LPQN} + S_{PMOQ} = 81 + 216 = 297.$$

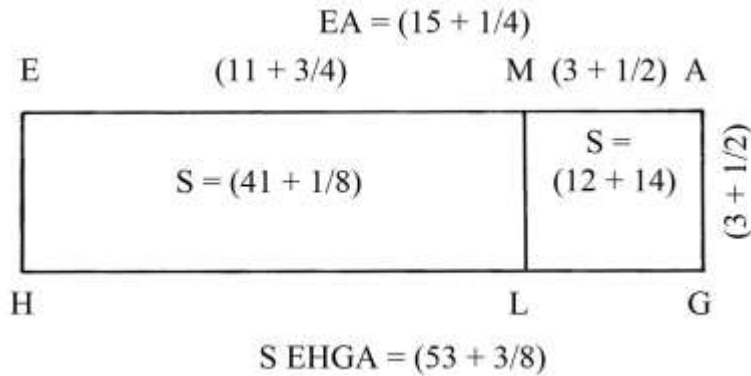
Esiste una proporzione fra le lunghezze e le aree:

$$MQ : NO = S_{LPQN} : S_{LMON}$$

$$9 : 33 = 81 : 297.$$

Area di un altro rettangolo

EAGH è un rettangolo che è composto da un quadrato, MAGL, con lati lunghi $(3 + \frac{1}{2})$ e da un residuo rettangolare, EMLH, che ha lunghezza di $(11 + \frac{3}{4})$.



L'area di MAGL è:

$$S_{MAGL} = MA * AG = (3 + \frac{1}{2}) * (3 + \frac{1}{2}) = (12 + \frac{1}{4}).$$

L'area di EMLH è:

$$S_{EMLH} = EH * HL = (3 + \frac{1}{2}) * (11 + \frac{3}{4}) = (41 + \frac{1}{8}).$$

L'area dell'intero quadrilatero è:

$$S_{EAGH} = S_{MAGL} + S_{EMLH} = (12 + \frac{1}{4}) + (41 + \frac{1}{8}) = (53 + \frac{3}{8}).$$

Vale la seguente proporzione:

$$S_{MAGL} : S_{EAGH} = MA : EA$$

$$(12 + \frac{1}{4}) : (53 + \frac{3}{8}) = (3 + \frac{1}{2}) : (15 + \frac{1}{4}).$$

Quadrati multipli

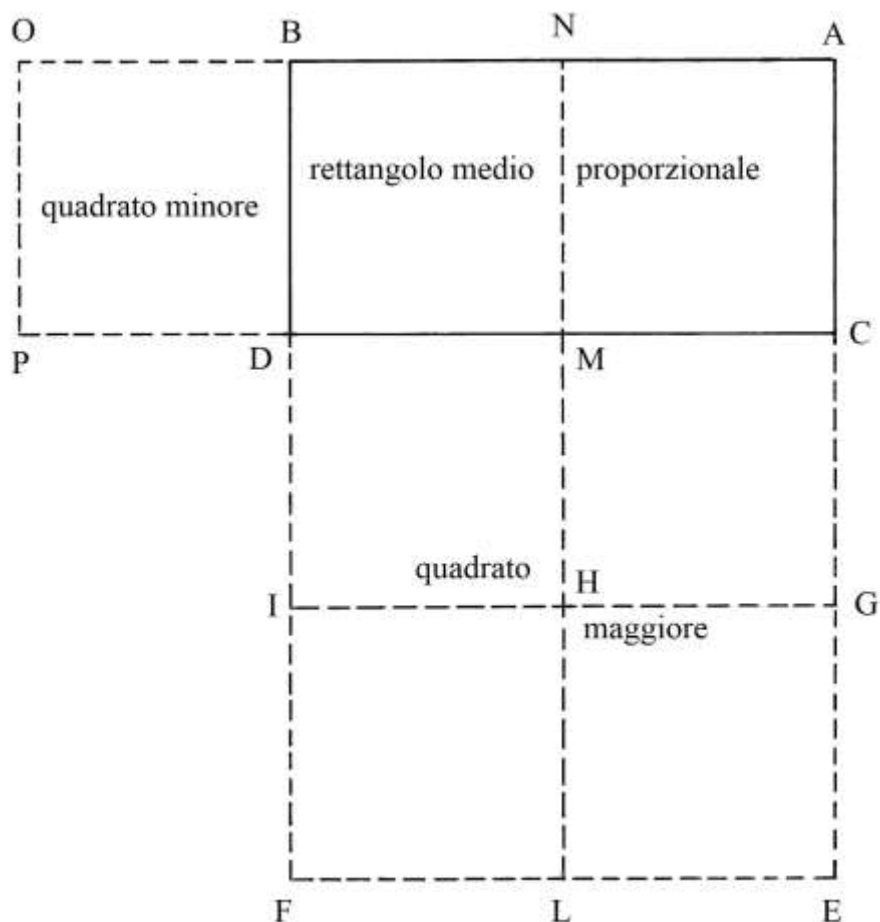
ACDB è un rettangolo formato da due quadrati di uguali dimensioni: ACMN e MNBD.

A sinistra, sul lato BD è costruito il quadrato BDPO.

Sul lato DC è disegnato il quadrato DCEF che dalle mediane IG e ML viene diviso in quattro quadrati uguali.

Fra le aree dei diversi quadrilateri intercorrono delle proporzioni:

$$S_{BDPO} : S_{ACDB} : S_{DCEF} = 1 : 2 : 4.$$



Rapporti fra le aree di quadrilateri

Lo schema che segue è leggermente modificato rispetto a quello contenuto nel testo originale.

DCEF è un quadrato che ha lati lunghi 12.

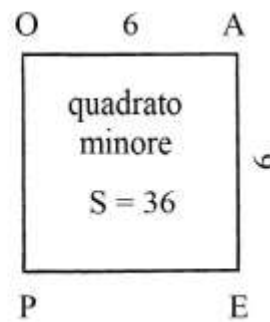
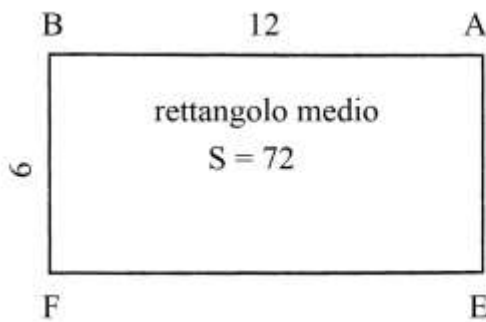
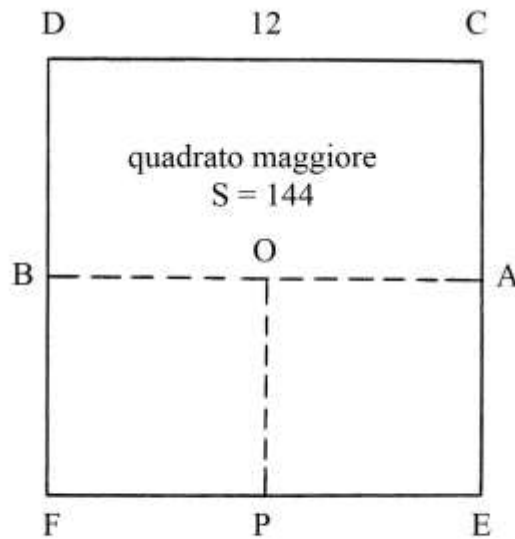
BA è la sua mediana orizzontale; AEFB è un rettangolo che la lunghezza 12 e larghezza $AE = BF$ di 6.

O e P sono i punti medi rispettivamente di BA e di FE.

OAEP è un quadrato, metà del rettangolo AEFB.

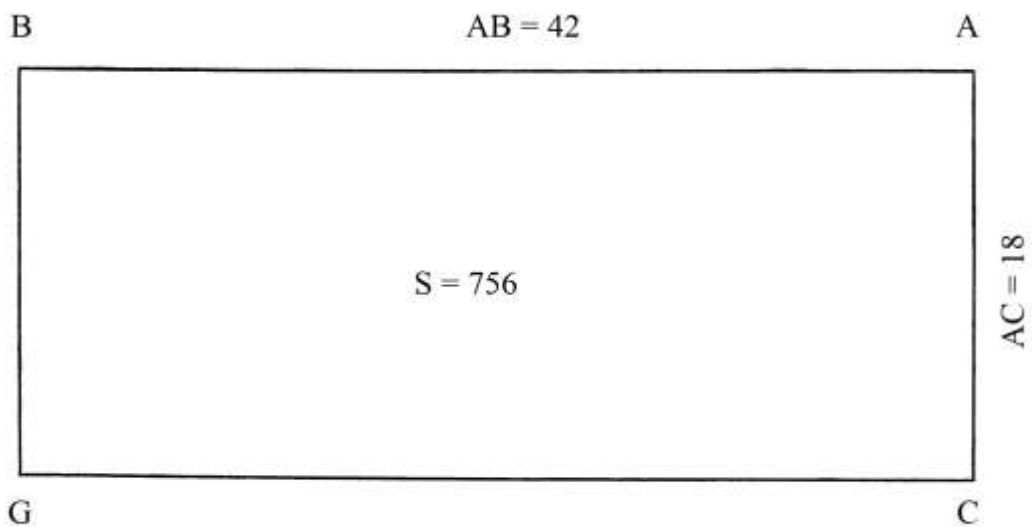
Le aree dei tre quadrilateri sono in proporzione:

$$S_{DCEF} : S_{AEFB} : S_{OAEP} = 144 : 72 : 36 = 4 : 2 : 1.$$



Rettangolo con lati in proporzione 7:3

Il rettangolo ACGB ha area uguale a 756. La lunghezza AB è 42.



Le lunghezze dei lati stanno in proporzione 7 : 3 e cioè:
 $AB : AC = 7 : 3$.

Il rapporto è noto come *dupla sesquiterza*.

Gli Autori (Pomodoro e Scala) ricavano la lunghezza di AC a partire da quella di AB:

$$AC = 3/7 * AB = 3/7 * 42 = 3 * 6 = 18.$$

----- APPROFONDIMENTO -----

Conoscendo soltanto l'area e il rapporto fra le lunghezze dei lati (lunghezza e larghezza) possiamo calcolare queste ultime con l'algebra elementare.

La lunghezza di AB è l'incognita x .

La lunghezza di AC è:

$$AC = 3/7 * AB = 3/7 * x.$$

L'area di ACGB è 756:

$$S_{ACGB} = AB * AC = x * (3/7 * x) = 3/7 * x^2.$$

$$3/7 * x^2 = 756$$

$$x^2 = 7/3 * 756$$

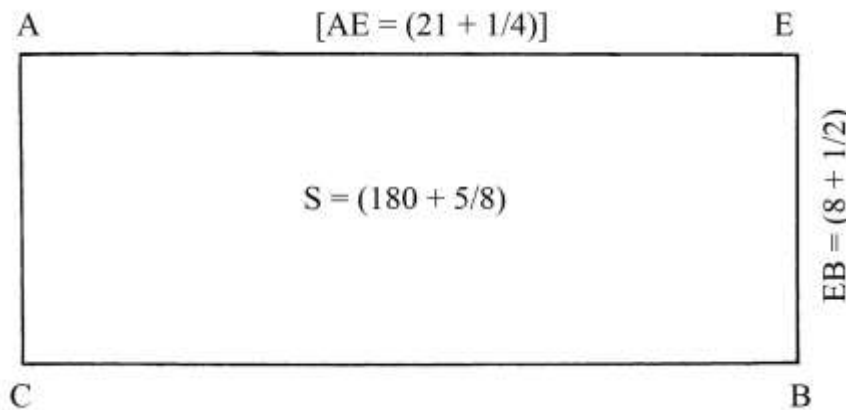
$$x^2 = 1764$$

$$x = \sqrt{1764} = 42 = AB$$

$$AC = 3/7 * AB = 3/7 * 42 = 18.$$

Lunghezza di un lato di un rettangolo

Il rettangolo AEBC ha area uguale a $(180 + 5/8)$.



La lunghezza del lato minore, EB, è $(8 + 1/2)$.

Deve essere ricavata la lunghezza del lato AE:

$$AE = S_{AEBC}/EB = (180 + 5/8)/(8 + 1/2) = (21 + 1/4).$$

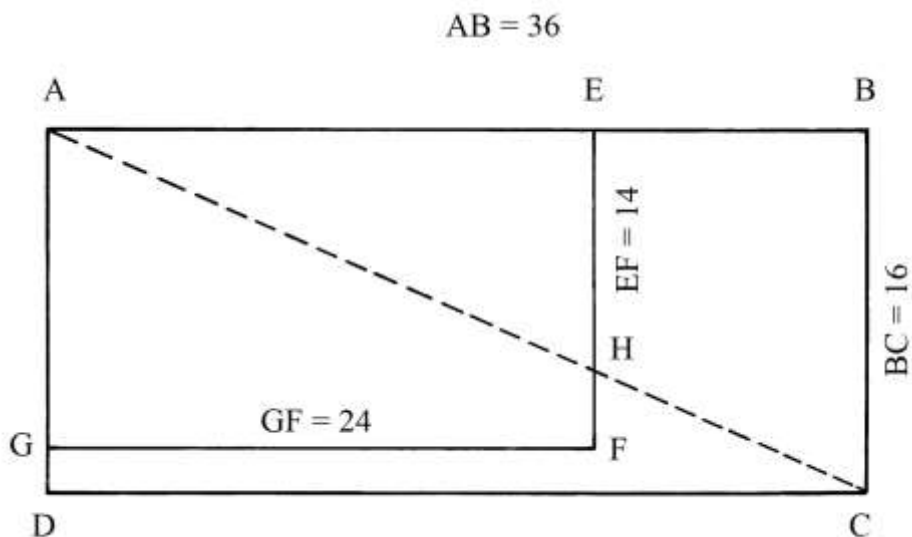
Proporzione fra le aree di due rettangoli

Due rettangoli hanno un vertice in comune, A, e due lati consecutivi, uscenti da A, parzialmente sovrapposti.

ABCD è il più grande e AC è una sua diagonale. I suoi lati sono lunghi:

* $AB = 36;$

* $BC = 16.$



L'area di ABCD è:

$$S_{ABCD} = AB * BC = 36 * 16 = 576.$$

Il secondo rettangolo è AEFG e i suoi lati sono lunghi:

* $AE = 24;$

* $EF = 14.$

L'area di AEFG è:

$$S_{AEFG} = AE * EF = 24 * 14 = 336.$$

I due rettangoli non sono simili: la diagonale AC taglia il lato EF in H e non passa per il vertice F.

Non esiste una proporzionalità diretta fra le aree dei due rettangoli e le lunghezze dei lati:

$$S_{ABCD} : S_{AEFG} = 576 : 336 \neq AB : GF \neq 36 : 24.$$

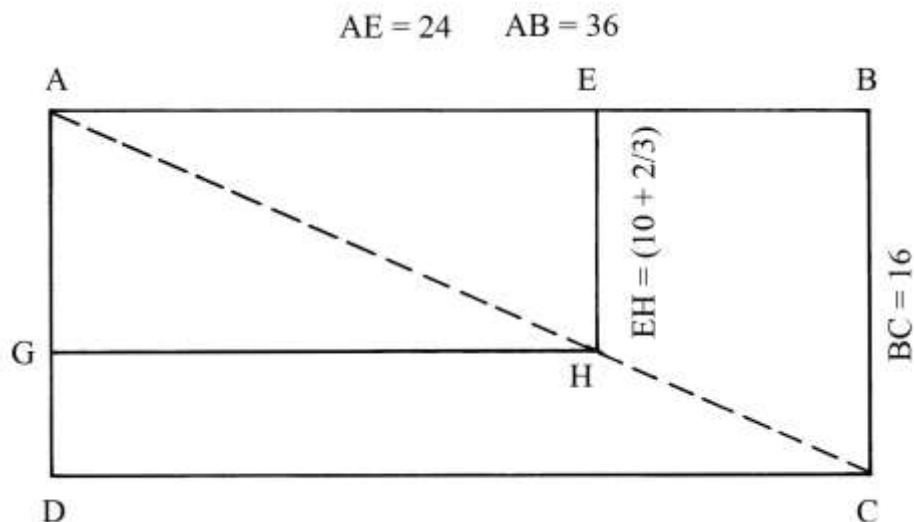
----- APPROFONDIMENTO -----

L'ultima proporzione richiede un chiarimento.

ABCD è il rettangolo che ha lati lunghi:

* $AB = 36;$

* $BC = 16.$



Il rettangolo AEHG è simile a quello ABCD: la sua diagonale AH giace su AC.

AE è lungo i $\frac{2}{3}$ di AB:

$$AE = \frac{2}{3} * AB = \frac{2}{3} * 36 = 24.$$

Anche il lato EH è lungo i $\frac{2}{3}$ di BC:

$$EH = \frac{2}{3} * BC = \frac{2}{3} * 16 = \frac{32}{3} = (10 + \frac{2}{3}).$$

Le aree dei due rettangoli sono:

* $S_{ABCD} = AB * BC = 36 * 16 = 576;$

* $S_{AEHG} = AE * EH = 24 * (10 + \frac{2}{3}) = 256.$

Esiste una proporzione fra aree e quadrati delle lunghezze dei due rettangoli:

$$S_{ABCD} : S_{AEHG} = AB^2 : AE^2$$

$$576 : 256 = 36^2 : 24^2$$

$$576 : 256 = 1296 : 576.$$

TAVOLA XI

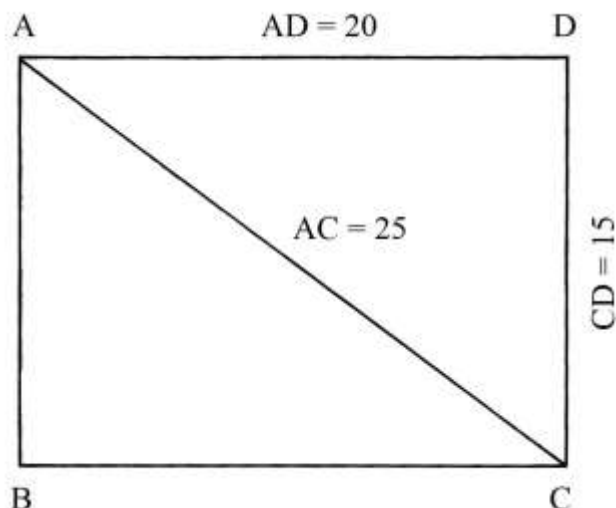
I problemi presentati in questa Tavola sono relativi a rettangoli dei quali vanno calcolate le lunghezze dei lati oppure quelle delle diagonali.

Lunghezza della diagonale di un rettangolo

Il rettangolo ABCD ha lati lunghi:

* $AD = 20;$

* $AB = 15.$



La lunghezza della diagonale AC è:

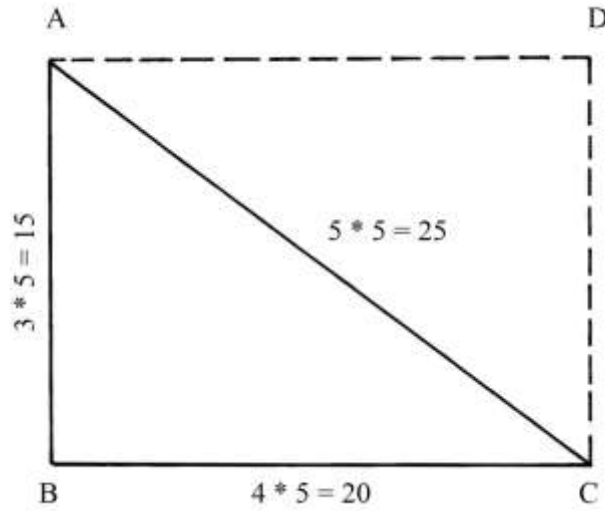
$$AC^2 = AD^2 + AB^2 = 20^2 + 15^2 = 400 + 225 = 625$$

e

$$AC = \sqrt{625} = 25.$$

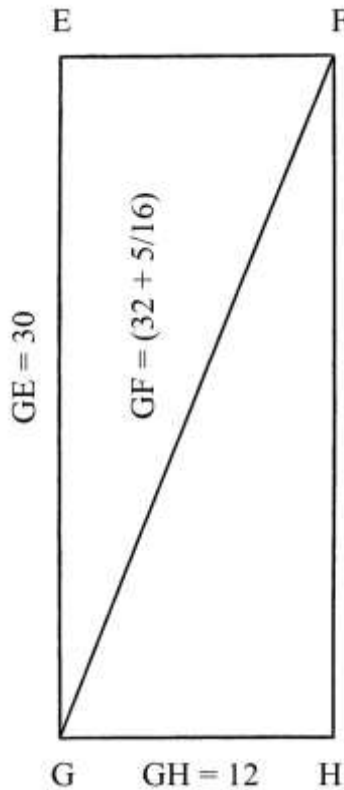
----- APPROFONDIMENTO -----

La diagonale AC divide il rettangolo ABCD in due triangoli rettangoli che hanno lati con lunghezze che formano la terna derivata 15 – 20 – 25, proveniente dalla terna primitiva 3 – 4 – 5 i cui membri sono moltiplicati per 5.



Lunghezza della diagonale di un rettangolo

EFHG è un rettangolo, disposto con la lunghezza verticale.



GE è lungo 30 e GH è 12.

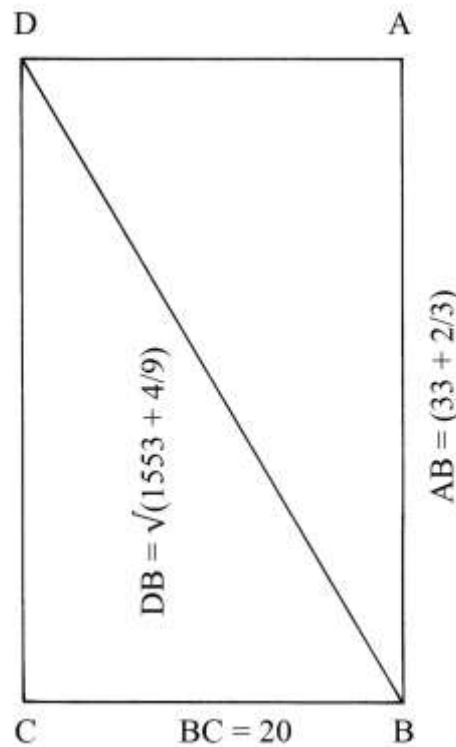
La lunghezza della diagonale GF è:

$$GF^2 = GE^2 + EF^2 = 30^2 + 12^2 = 900 + 144 = 1044 \quad e$$

$$GF = \sqrt{1044} = (32 + 5/16).$$

Diagonale di un rettangolo

ABCD è un rettangolo: la lunghezza di AB è $(33 + 2/3)$ e quella di BC è 20.



La diagonale DB ha lunghezza che è data da:

$$DB^2 = AB^2 + AD^2 = (33 + 2/3)^2 + 20^2 = (1553 + 4/9) \quad e$$

$$DB = \sqrt{(1553 + 4/9)} \approx 39,41.$$

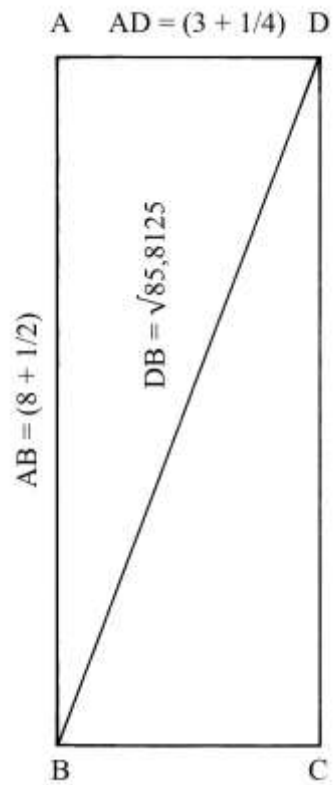
Diagonale di un altro rettangolo

ABCD è un rettangolo: la lunghezza di AB è $(8 + 1/2)$ e la larghezza AD è $(3 + 1/4)$.

La diagonale DB ha lunghezza che è data da:

$$DB^2 = AB^2 + AD^2 = (8 + 1/2)^2 + (3 + 1/4)^2 = 72,25 + 10,5625 = 85,8125 \quad e$$

$$DB = \sqrt{85,8125} \approx 9,26.$$



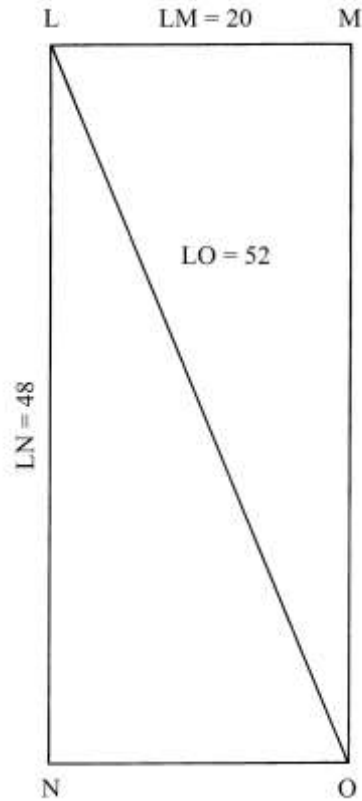
Diagonale di un altro rettangolo

LMON è un rettangolo: la sua lunghezza LN è 48 e la larghezza LM è 20.

La diagonale LO è lunga:

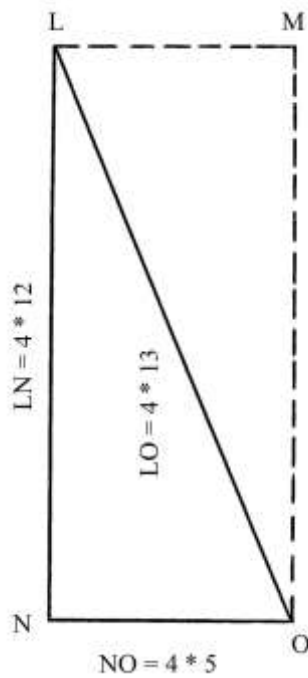
$$LO^2 = LM^2 + MO^2 = 20^2 + 48^2 = 400 + 2304 = 2704 \quad e$$

$$LO = \sqrt{2704} = 52.$$



----- APPROFONDIMENTO -----

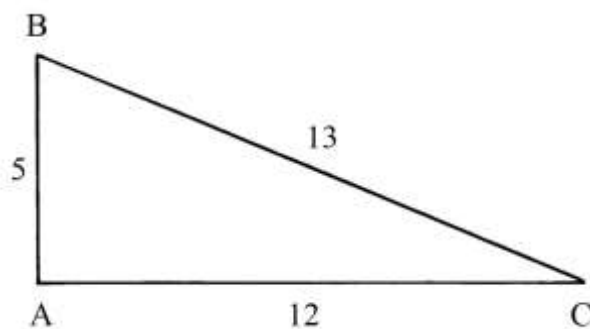
La diagonale LO divide il rettangolo LMON in due triangoli rettangoli che hanno uguali dimensioni: LNO e LMO.



Le lunghezze dei lati dei due triangoli rettangoli formano una terna derivata, 20-48-52, che deriva dalla seconda terna primitiva, 5-12-13, i cui membri sono moltiplicati per 4.

%%%%%%%%%

Soltanto un triangolo rettangolo ha l'ipotenusa lunga 13: è quello 5-12-13.

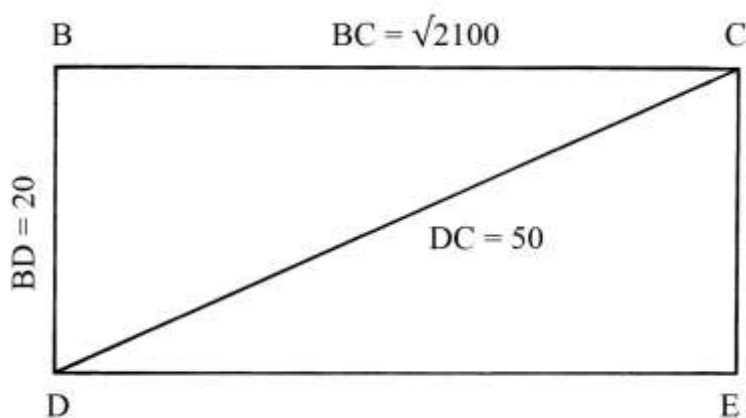


Esso possiede un'interessante proprietà: il perimetro p è uguale, in valore assoluto, all'area S . Infatti:

- * $p = AB + AC + BC = 5 + 12 + 13 = 30$;
 - * $S_{ABC} = (AC * AB)/2 = (12 * 5)/2 = 60/2 = 30$.
-

Lati di un rettangolo

BCED è un rettangolo: sono note le lunghezze dei lati BD e CE, che è 20, e quella della diagonale DC che è lunga 50.



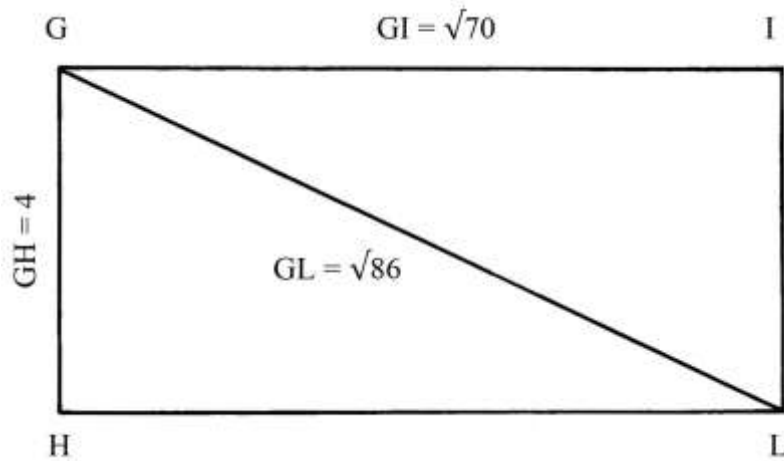
Il problema chiede la lunghezza dei lati BC e DE.

Infatti si ha:

$$DE^2 = DC^2 - CE^2 = 50^2 - 20^2 = 2500 - 400 = 2100 \quad e$$
$$DE = \sqrt{2100} \approx 45,82.$$

Diagonale di un rettangolo

GILH è un rettangolo: i lati GI e HL sono lunghi $\sqrt{70}$ e i lati GH e IL sono lunghi 4.



La lunghezza della diagonale GL è:

$$GL^2 = GI^2 + IL^2 = (\sqrt{70})^2 + 4^2 = 70 + 16 = 86 \quad e$$

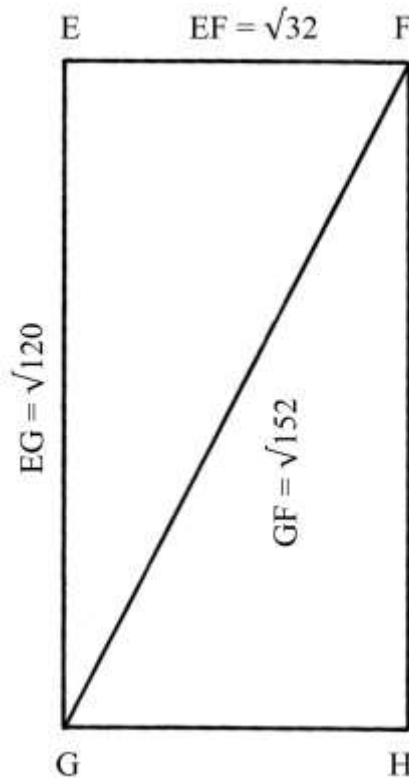
$$GL = \sqrt{86}.$$

Diagonale di un altro rettangolo

EFHG è un rettangolo.

I lati EF e GH sono lunghi $\sqrt{2}$ e quelli EG e FH sono lunghi $\sqrt{120}$.

Deve essere ricavata la lunghezza della diagonale GF.



La lunghezza di GF è:

$$GF^2 = EF^2 + EG^2 = (\sqrt{32})^2 + (\sqrt{120})^2 = 32 + 120 = 152 \quad e$$

$$GF = \sqrt{152} \approx (12 + 1/3).$$

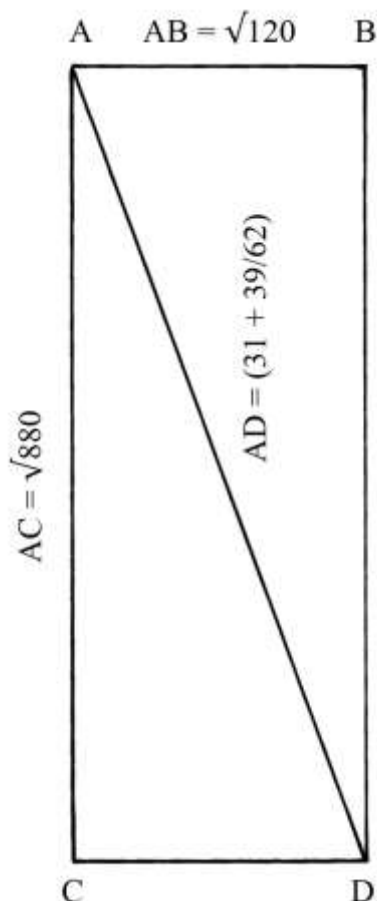
Diagonale di un altro rettangolo

Il rettangolo ABDC ha i lati AB e CD lunghi $\sqrt{120}$; i lati AC e BD sono lunghi $\sqrt{880}$.

La lunghezza della diagonale AD è data da:

$$AD^2 = AB^2 + BD^2 = (\sqrt{120})^2 + (\sqrt{880})^2 = 120 + 880 = 1000 \quad e$$

$$AD = \sqrt{1000} = (31 + 39/62).$$



Quadrato con rettangoli

ABDC è un rettangolo lungo 30 e largo 12:

* $AB = CD = 30;$

* $AC = BD = 12.$

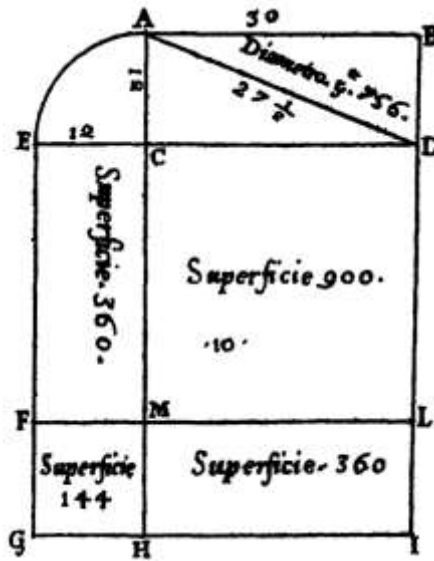
La sua diagonale AD è lunga:

$$AD^2 = AB^2 + BD^2 = 30^2 + 12^2 = 900 + 144 = 1044 \quad e$$

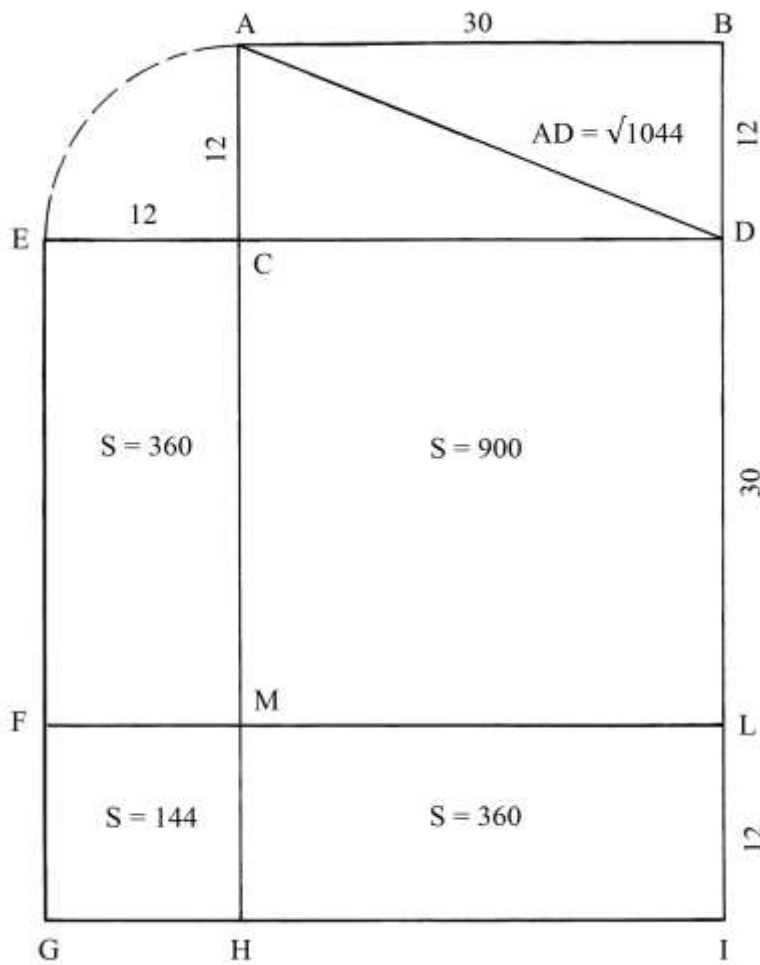
$$AD = \sqrt{1044} = 32,31.$$

Nello schema originale, la diagonale è indicata come lunga $\sqrt{756}$. L'errore è spiegabile: il quadrato della lunghezza di BD è stato *sottratto* dal quadrato della lunghezza di AD:

$$AB^2 - AD^2 = 30^2 - 12^2 = 900 - 144 = 756.$$



Prolungare verso sinistra il lato CD. Fare centro in C e con raggio CA = 12 disegnare l'arco AE.



Prolungare verso il basso i lati AC e BD e dal punto E tracciare una parallela ai due prolungamenti.

Da E e da D riportare in successione le lunghezze di 30 e di 12:

* $EF = DL = 30$;

* $FG = LI = 12$.

Disegnare le linee ECD , FML e GHI .

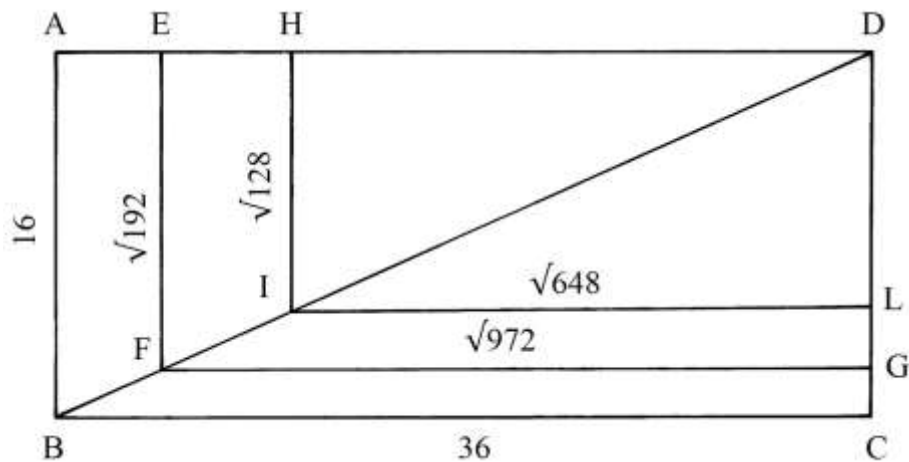
All'interno dei quadrati $CDLM$ e $FMHG$ e dei rettangoli $ECMF$ e $MLIH$ sono scritte le rispettive aree.

Rettangoli simili

$ABCD$ è un rettangolo che ha lati lunghi:

* $AD = BC = 36$;

* $AB = CD = 16$.



DB è una delle due diagonali di $ABCD$.

All'interno di $ABCD$ devono essere costruiti due rettangoli simili, entrambi con un vertice in D e con le diagonali giacenti su DB .

Il primo rettangolo ha lunghezze LI e DH uguali a $\sqrt{648}$.

Con una proporzione ricaviamo la lunghezza di HI :

$$HI : DC = HD : AD$$

$$HI = (DC * HD) / AD = (16 * \sqrt{648}) / 36 = \sqrt{(256 * 648) / 1296} = \sqrt{128}.$$

La lunghezza dei lati orizzontali del secondo rettangolo simile, $EDGF$ è:

$$ED = FG = \sqrt{972}.$$

Con una seconda proporzione calcoliamo la lunghezza di EF :

$$EF : DC = ED : AD$$

$$EF = (DC * ED) / AD = (16 * \sqrt{972}) / 36 = \sqrt{(256 * 972) / 1296} = \sqrt{192}.$$

Il Trattato non contiene alcun calcolo.

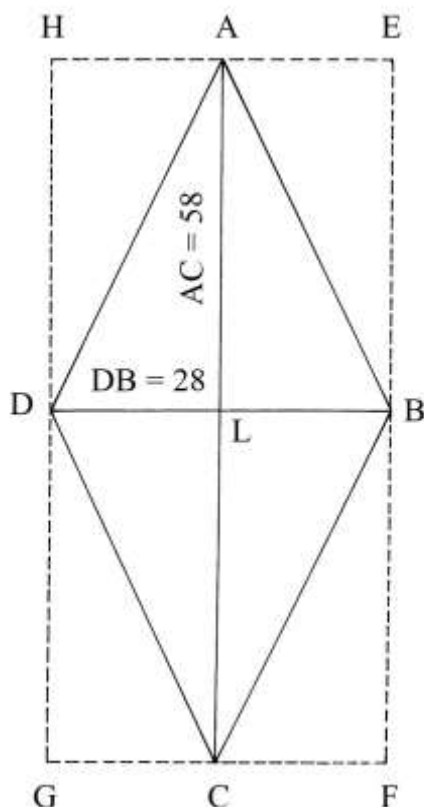
TAVOLA XII

La Tavola XII è dedicata a quadrilateri che gli Autori chiamano “*rombiche*”.
I poligoni comprendono rombi e trapezi.

Area di un rombo

ABCD è un rombo: le sue diagonali (“*diametri*”) hanno le seguenti lunghezze:

- * diagonale maggiore: $AC = 58$;
- * diagonale minore: $DB = 28$.



Il rombo è inscritto nel rettangolo EFGH: esso è disegnato con linee a punti che nel trattato sono chiamate “*finte*”: nello schema qui sopra i punti sono stati sostituiti con trattini.

La lunghezza dei lati del rombo, AB ad esempio, è data da:

$$\begin{aligned} AB^2 &= AL^2 + LB^2 = (AC/2)^2 + (DB/2)^2 = (58/2)^2 + (28/2)^2 = 29^2 + 14^2 = \\ &= 841 + 196 = 1037 \quad \text{e} \\ AB &= \sqrt{1037} = (32 + 1/5). \end{aligned}$$

L'area del rombo è:

$$S_{ABCD} = AC * DB/2 = (58 * 28)/2 = 812.$$

Area di un altro rombo

Il rombo BCED ha lati lunghi 23.

La diagonale minore DC è lunga $(26 + 2/3)$.

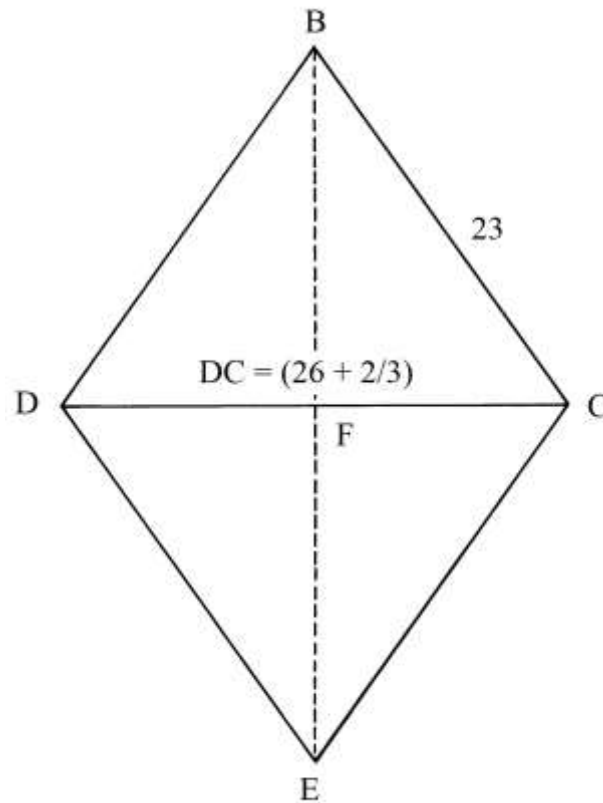
Il problema chiede l'area del rombo.

La lunghezza della semidiagonale BF è data da:

$$BF^2 = BC^2 - FC^2 = BC^2 - (DC/2)^2 = 23^2 - [(26 + 2/3)/2]^2 =$$

$$= 23^2 - (13 + 1/3)^2 = 351,23 \quad e$$

$$BF = 18,74.$$



L'area del rombo è:

$$S_{BCED} = DC * BF = (26 + 2/3) * 18,74 = 493,49.$$

Nel trattato non è contenuto alcun calcolo.

Lati di un altro rombo

Il rombo BCDF ha le diagonali con le seguenti lunghezze:

* $BD = 38;$

* $FC = (26 + 2/3).$

Il problema chiede la lunghezza dei lati.

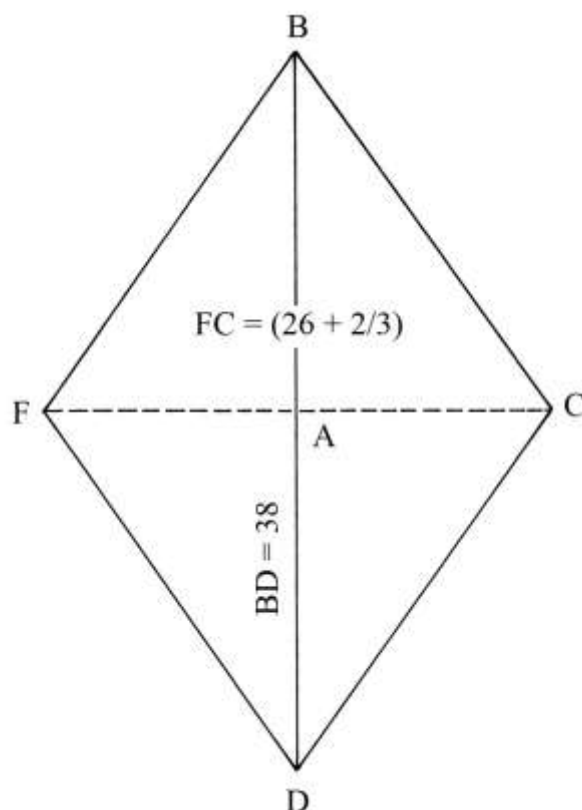
Il lato BC è lungo:

$$BC^2 = BA^2 + AC^2 = (BD/2)^2 + (FC/2)^2 = (38/2)^2 + [(26 + 2/3)/2]^2 =$$

$$= 19^2 + (13 + 1/3)^2 = 361 + (177 + 7/9) = (538 + 7/9) \quad e$$

$$BC = \sqrt{(538 + 7/9)} = 23,21.$$

I dati del precedente problema e di questo sono pressoché uguali.



Lati e diagonale minore di un rombo

ABCD è un rombo di cui sono noti l'area e la lunghezza della diagonale maggiore AC:

* $S_{ABCD} = (313 + \frac{1}{2})$;

* $AC = 38$.

Devono essere calcolate le lunghezze della diagonale minore e dei lati.

La lunghezza della diagonale DB è data da:

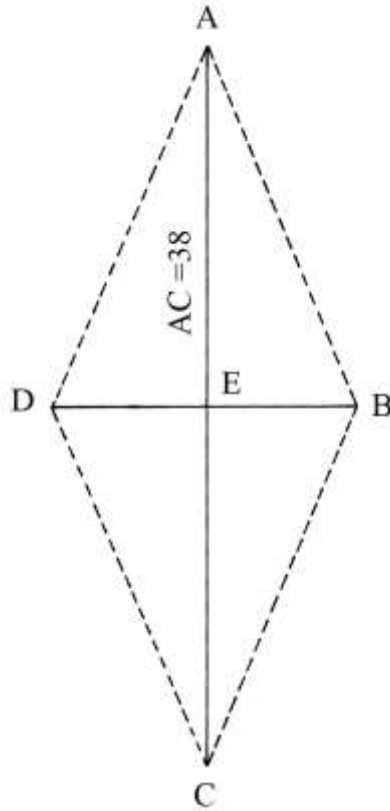
$$DB = 2 * S_{ABCD} / AC = 2 * (313 + \frac{1}{2}) / 38 = (16 + \frac{1}{2}).$$

La lunghezza di un lato, ad esempio AB, è:

$$AB^2 = AE^2 + EB^2 = (AC/2)^2 + (DB/2)^2 = (38/2)^2 + [(16 + \frac{1}{2})/2]^2 = 19^2 + (8 + \frac{1}{4})^2 =$$

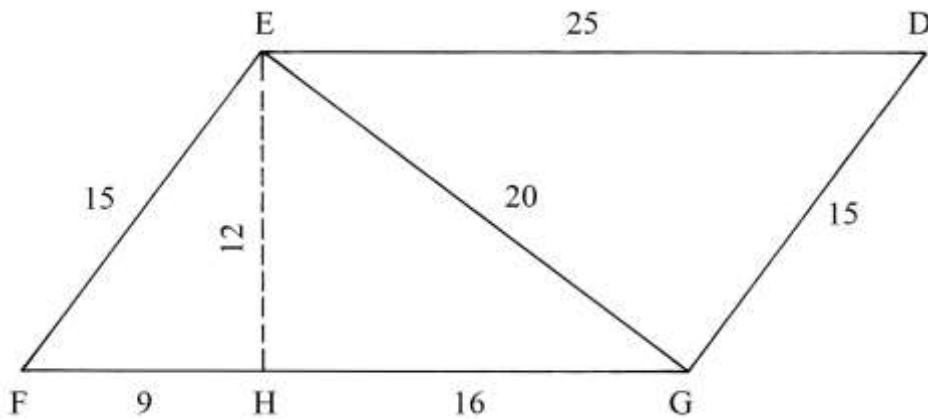
$$= 429,0625 \quad \text{e}$$

$$AB = \sqrt{429,0625} \approx 20,71.$$



Area di un parallelogramma

EDGF è un parallelogramma le cui basi ED e FG sono entrambe lunghe 25.



L'altezza EH è 12.

I due lati obliqui EF e DG, fra loro paralleli, sono lunghi 15.

L'area del parallelogramma è:

$$S_{EDGF} = FG * EH = 25 * 12 = 300.$$

La lunghezza della diagonale minore EG è:

$$EG^2 = EH^2 + HG^2 = 12^2 + 16^2 = 144 + 256 = 400$$

e

$$EG = \sqrt{400} = 20.$$

----- APPROFONDIMENTO -----

Nel parallelogramma EDGF sono presenti ben *quattro* triangoli rettangoli:

- * EFG;
- * FHE;
- * EHG;
- * GED.

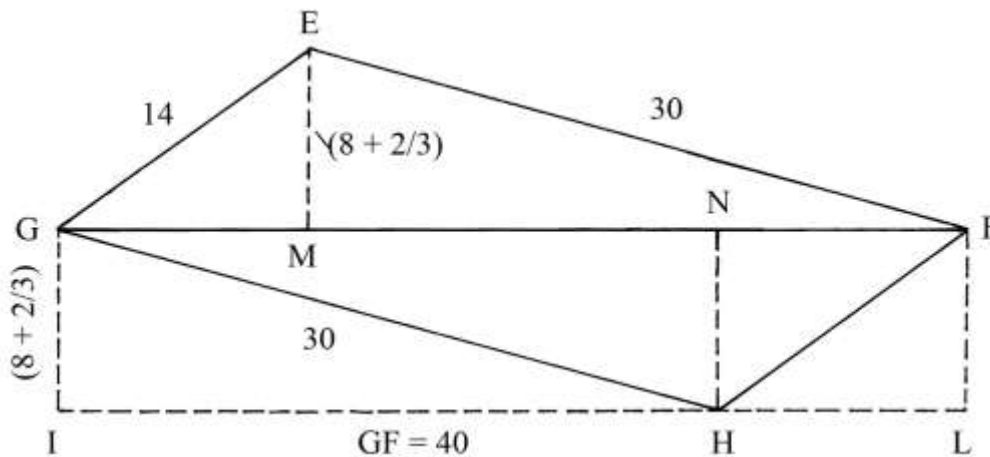
I loro lati hanno lunghezze espresse da numeri che formano terne derivate dalla primitiva 3-4-5:

- * EHG: 15-20-25;
 - * FHE: 9-12-15;
 - * EHG: 12-16-20;
 - * GED: 15-20-25.
-

Area di un parallelogramma

EFHG è un parallelogramma di cui sono note le lunghezze delle coppie di lati paralleli:

- * EF = GH = 30;
- * GE = HF = 14.



La diagonale maggiore GF, orizzontale, è lunga 40.

Le altezze EM e HN sono lunghe $(8 + \frac{2}{3})$.

Le proiezioni GM e FN sono $(11 + \frac{1}{5})$.

Infine, MF è lunga $(28 + \frac{4}{5})$.

La metà inferiore del parallelogramma e cioè il triangolo GHF, è inscritta nel rettangolo GFIL.

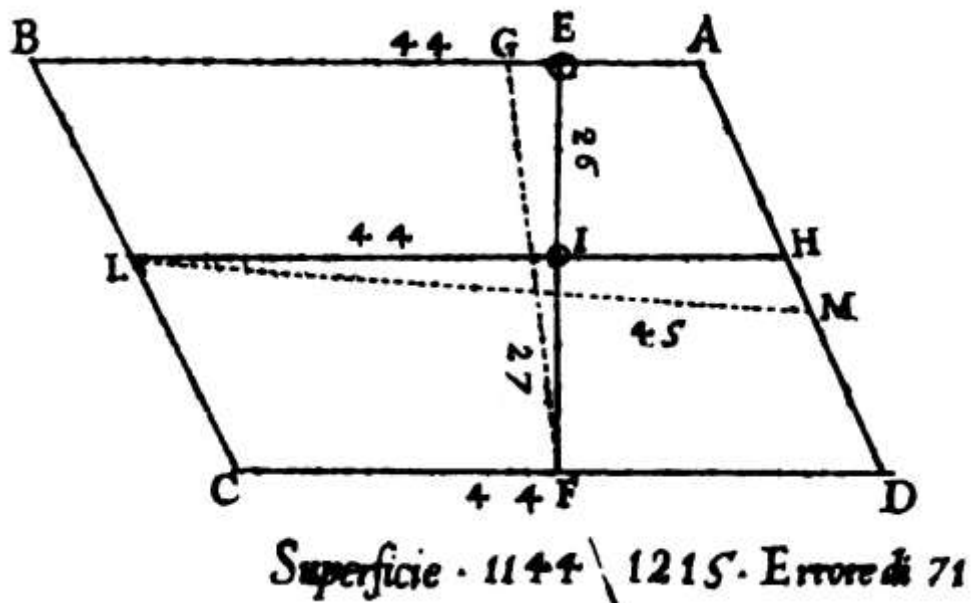
La diagonale maggiore GF divide il parallelogramma in due triangoli scaleni di uguali dimensioni: GEF e GHF.

L'area del rettangolo GFIL è uguale a quella del parallelogramma EFHG:

$$S_{GFIL} = GF * GI = GF * HN = 40 * (8 + \frac{2}{3}) = (346 + \frac{2}{3}) = S_{EFHG}.$$

Area di un quadrilatero (7)

Lo schema che segue è riprodotto dal trattato originale.



La qualità e la precisione del disegno originale sono un po' scadenti.

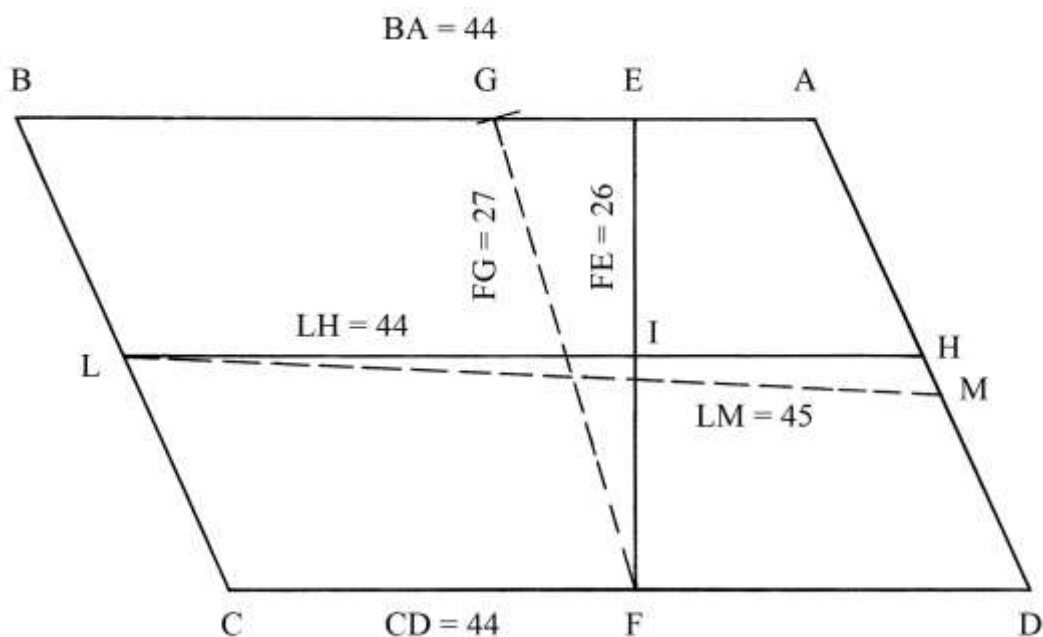
ABCD è un parallelogramma: le basi AB e CD sono lunghe 44.

Il testo non fornisce alcuna informazione sulla lunghezza dei lati obliqui AD e BC.

Nella figura che segue, il parallelogramma è stato ridisegnato con la maggiore precisione possibile, rispettando la scala e le dimensioni scritte sullo schema originale. Le coppie di lati sono fra loro parallele:

- * BC \parallel AD;
- * BA \parallel CD.

Il simbolo " \parallel " sta per *segmenti paralleli*.



Deve essere calcolata l'area del quadrilatero.

Gli Autori scrivono di aver misurato con lo *squadro* due segmenti, EF e LH, che si intersecano a angolo retto nel punto I: EF è un'altezza del parallelogramma e LH è parallela alle due basi (forse è una *mediana*).

EF è lunga 26 e LH è 44.

L'area del parallelogramma è:

$$S_{ABCD} = EF * LH = 26 * 44 = 1144.$$

Gli autori affermano anche che potrebbero essere misurati due segmenti – due *corde* – non perpendicolari fra loro, quali sono GF e LM: utilizzando queste due lunghezze si otterrebbe un valore dell'area errato per eccesso:

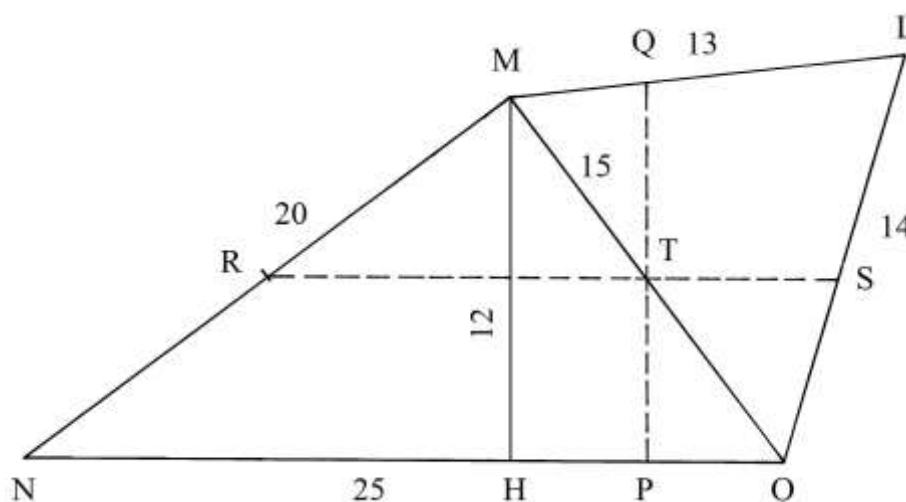
$$27 * 45 = 1215.$$

L'errore sarebbe:

$$1215 - 1144 = 71.$$

Area di un quadrilatero

NMLO è un quadrilatero privo di lati paralleli.



Esso è formato dal triangolo rettangolo NMO e dal triangolo scaleno MLO.

Le lunghezze dei lati di NMO formano la terna derivata 15-20-25.

Il triangolo MLO divide il suo lato più lungo, MO = 15, con NMO: gli altri due lati sono lunghi 13 e 14.

Deve essere calcolata l'area del quadrilatero.

Il testo non fornisce alcuna spiegazione sul metodo impiegato ma dà soltanto il risultato: l'area è $(234 + 1/3)$.

Qui presentiamo un'ipotesi di spiegazione. Fissare i punti medi dei lati MN e MO: sono rispettivamente R e T.

Tracciare una linea passante per R e per T, fino incontrare in S il lato OL: RTS è parallela a NO.

Per il punto T disegnare la perpendicolare QP a RTS (e a NO).

Gli Autori forniscono due lunghezze:

* RS = 19;

* QP = $(12 + 1/3)$.

L'area viene calcolata moltiplicando le lunghezze dei due ultimi segmenti:

$$S_{NMLO} = RS * QP = 19 * (12 + 1/3) = (234 + 1/3).$$

----- APPROFONDIMENTO -----

L'area del triangolo NMO è facilmente calcolabile: da M abbassare la perpendicolare MH al lato NO: MH è un'altezza ed è lunga 12. Questo dato è dimostrabile con una semplice procedura, qui omessa.

L'area di NMO è:

$$S_{NMO} = NO * MH/2 = 25 * 12/2 = 150.$$

L'area del triangolo MLO è calcolabile con la massima precisione con l'impiego della formula di Erone. Ecco i passaggi:

* il perimetro $2 * p$ di MLO è: $ML + LO + MO = 13 + 14 + 15 = 42$;

* il semiperimetro p vale: $42/2 = 21$.

L'area di MLO è data da:

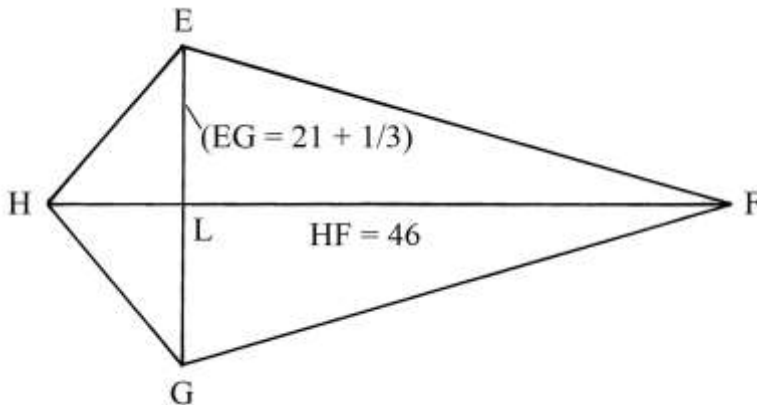
$$S_{MLO} = \sqrt{[p * (p - MO) * (p - OL) * (p - ML)]} = \sqrt{[21 * (21 - 15) * (21 - 14) * (21 - 13)]} = \sqrt{(21 * 6 * 7 * 8)} = \sqrt{7056} = 84.$$

L'area del quadrilatero è:

$$S_{NMLO} = S_{NMO} + S_{MLO} = 150 + 84 = 234.$$

Area di un deltoide

Un *deltoide* è un quadrilatero che possiede due coppie di *lati consecutivi* di uguale lunghezza.



La diagonale maggiore del deltoide, HF, è lunga 46 e quella minore, EG, è $(21 + 1/3)$.

È chiesta l'area del quadrilatero EFGH:

$$S_{EFGH} = HF * EG/2 = 46 * (21 + 1/3)/2 = (490 + 2/3).$$

Area di un quadrilatero

ABCD è un quadrilatero composto da un triangolo rettangolo, ABD, e da un triangolo scaleno, BCD.

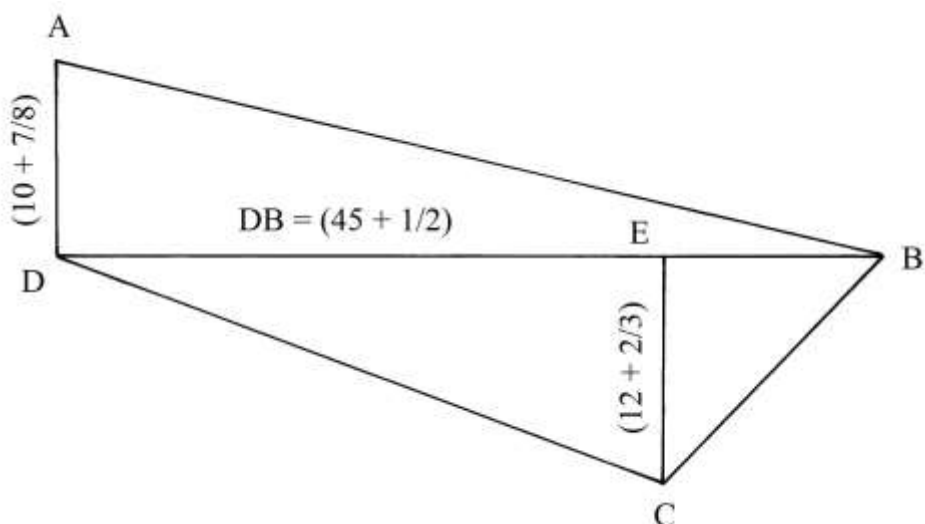
Essi hanno in comune il lato BD, cateto maggiore di ADB e diagonale maggiore di ABCD.

L'area del triangolo ADB è:

$$S_{ADB} = DB * AD/2 = (45 + 1/2) * (10 + 7/8)/2 \approx 288,17.$$

L'area del triangolo BCD è:

$$S_{BCD} = DB * EC/2 = (45 + 1/2) * (12 + 2/3)/2 \approx 288,17.$$

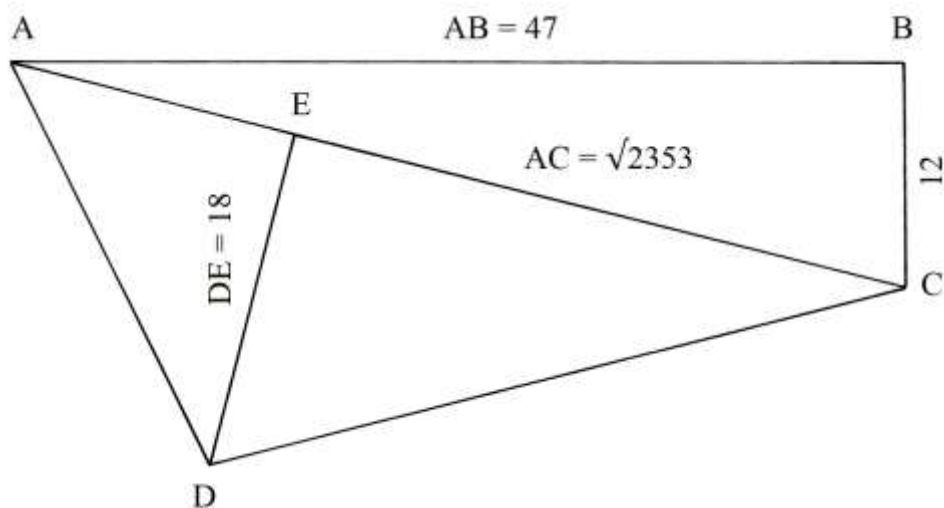


L'area del quadrilatero ABCD è data dalla somma delle aree dei due triangoli:
 $S_{ABCD} = S_{ADB} + S_{BCD} = 247,41 + 288,17 = 535,58$.

Area di un quadrilatero

ABCD è un quadrilatero formato dall'unione, lungo il lato comune AC, del triangolo rettangolo ABC e del triangolo scaleno ACD.

AC è l'ipotenusa del triangolo ABC e la diagonale maggiore del quadrilatero ABCD.



Gli Autori (Pomodoro e Scala) affermano che l'area del quadrilatero è espressa in “*misure quadre*”, senza però indicare alcuna unità di misura.

La lunghezza di AC è $\sqrt{2553}$ che nel testo è così approssimata:

$$\sqrt{2553} = (48 + 49/96) \approx (48 + 1/2).$$

L'area di ABC è:

$$S_{ABC} = AB * BC/2 = 47 * 12/2 = 282.$$

L'area di ACD è:

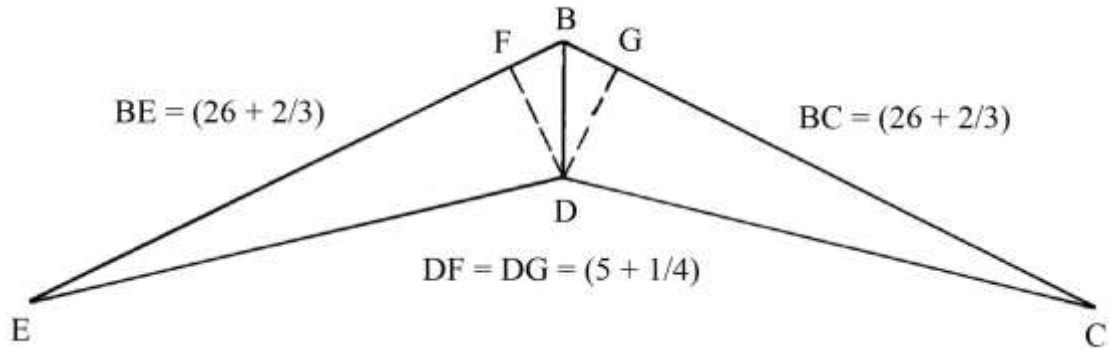
$$S_{ACD} = AC * DE/2 = (48 + 1/2) * 18/2 = (436 + 1/2).$$

L'intero quadrilatero ha area:

$$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} = 282 + (436 + \frac{1}{2}) = (718 + \frac{1}{2}).$$

Area di un quadrilatero

BCDE è un quadrilatero formato dall'unione di due triangoli scaleni molto allungati, BCD e BDE, lungo il loro lato comune BD.



DF e DG sono due altezze dei due triangoli.

L'area di BCD è:

$$S_{BCD} = BC * DG/2 = (26 + \frac{2}{3}) * (5 + \frac{1}{4})/2 = 70.$$

L'area di BDE è:

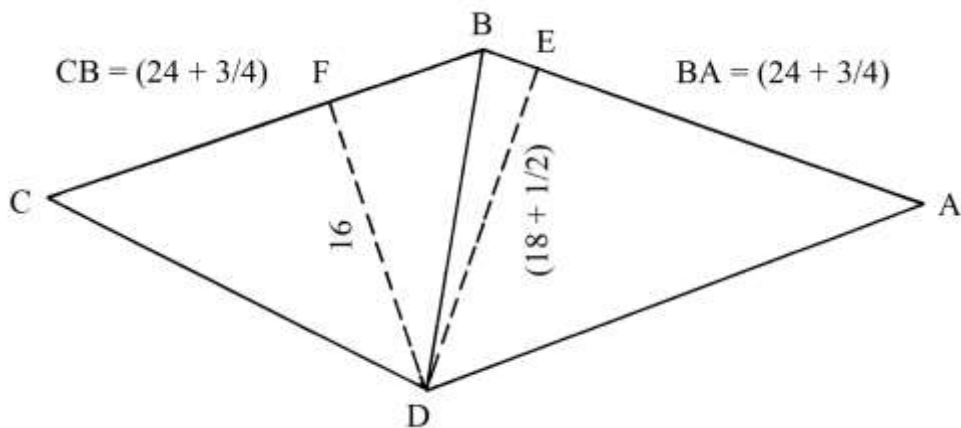
$$S_{BDE} = BE * DF/2 = (26 + \frac{2}{3}) * (5 + \frac{1}{4})/2 = 70.$$

L'area del quadrilatero è:

$$S_{BCDE} = S_{BCD} + S_{BDE} = 70 + 70 = 140.$$

Area di un altro quadrilatero

ABCD è un quadrilatero formato dall'unione di due triangoli scaleni, ADB e BCD, i quali hanno in comune il lato BD: questo lato è anche la diagonale minore del quadrilatero.



Le aree dei due triangoli sono:

* $S_{ADB} = BA * DE/2 = (24 + \frac{3}{4}) * (18 + \frac{1}{2})/2 = (228 + \frac{15}{16});$

* $S_{BCD} = CB * DF/2 = (24 + \frac{3}{4}) * 16/2 = 198.$

L'area dell'intero quadrilatero è:

$$S_{ABCD} = S_{ADB} + S_{BCD} = (228 + 15/16) + 198 = (426 + 15/16).$$

Nota

Nella parte finale del testo, gli Autori spiegano la regola usata per il calcolo dell'area di un triangolo: moltiplicare la lunghezza del lato di base per metà di quella dell'altezza relativa ad esso, altezza che essi chiamano “larghezza del triangolo”.

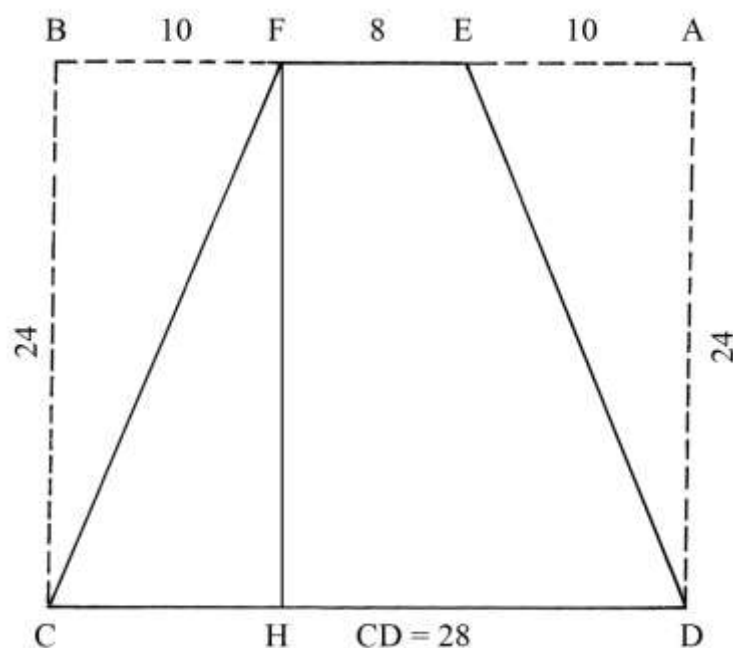
TAVOLA XIII

La Tavola contiene *undici* esempi di trapezi, “*doppi capi tagliati*”.

Nella descrizione della precedente Tavola III sono stati mostrati altri esempi di quadrilateri “*capo tagliato*” e “*doppi capi tagliati*”.

Area di un trapezio isoscele

CDEF è un trapezio isoscele con le basi lunghe 8 e 28 e ha altezza 24: esso è inscritto nel rettangolo ABCD.



È richiesta la sua area.

La soluzione proposta nel Trattato è un po' complicata:

- * calcolare l'area del rettangolo ABCD:
 $S_{ABCD} = BC * CD = 24 * 28 = 672;$
- * calcolare l'area complessiva dei triangoli rettangoli ADE e BCF:
 $S_{(ADE + BCF)} = AD * AE = 24 * 10 = 240;$
- * sottrarre l'area di (ADE + BCF) da quella di ABCD:
 $S_{ABCD} - S_{(ADE + BCF)} = 672 - 240 = 432.$

È da notare che altri trapezi descritti in questa Tavola hanno area uguale a 432: sono i primi otto.

----- APPROFONDIMENTO -----

L'area di un trapezio è facilmente calcolabile moltiplicando la semisomma delle basi (CD e FE) per l'altezza (FH = AD = BC):

$$S_{ABCD} = [(CD + FE)/2] * FH = [(28 + 8)/2] * 24 = (36/2) * 24 = 18 * 24 = 432.$$

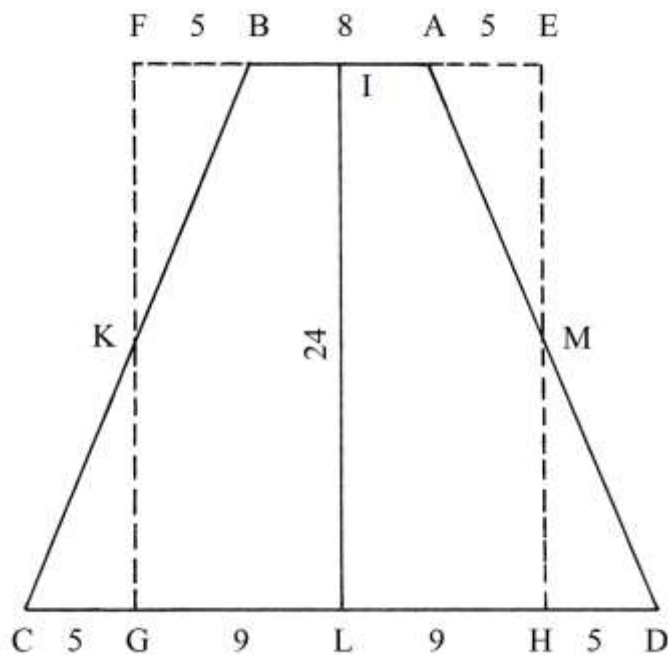
Perché gli Autori (Pomodoro e Scala) non hanno usato nella soluzione di questo problema la formula semplificata, poi impiegata nei casi successivi?

Rettangolo equivalente a un trapezio isoscele

ABCD è un trapezio isoscele che ha le basi lunghe:

- * AB = 8;
- * CD = 28.

IL è l'altezza che è lunga 24.



Il quadrilatero ha le stesse dimensioni di quello del precedente problema.

Disegnare il rettangolo EFGH che ha lati lunghi:

- * EF = 18;
- * FG = 24.

L'area di questo rettangolo è:

$$S_{EFGH} = EF * FG = 18 * 24 = 432.$$

È da notare l'uguaglianza fra le lunghezze di FB e di CG e di AE e di HD: tutti lunghi 5.

I triangoli FBK, CGK, AEM e DHM hanno tutti le stesse dimensioni e aree uguali.

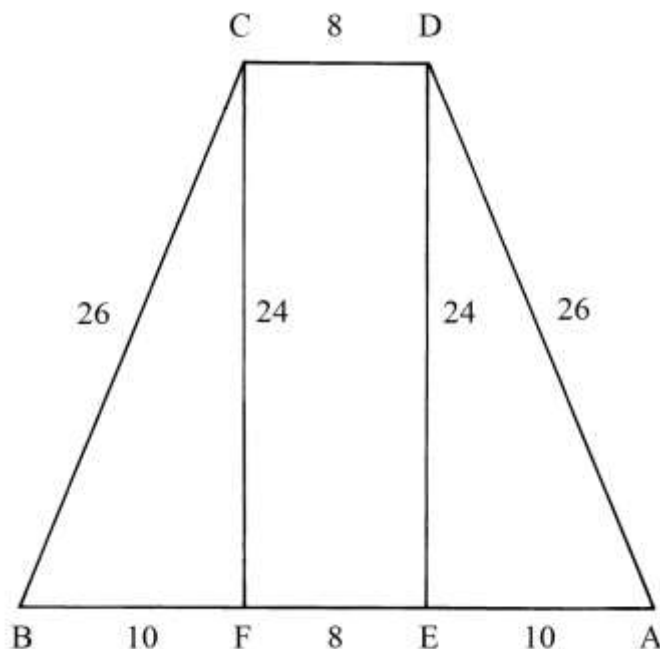
L'area del trapezio ABCD è nel Trattato calcolata con la formula citata qui sopra nell'APPROFONDIMENTO:

$$S_{ABCD} = [(AB + CD)/2] * IL = [(8 + 28)/2] * 24 = 18 * 24 = 432.$$

Il rettangolo EFGH e il trapezio ABCD hanno aree uguali.

Area di un trapezio isoscele

Nel solito trapezio ABCD sono tracciate le due altezze DE e CF, entrambe lunghe 24.



Esse creano il rettangolo CDEF e i triangoli rettangoli BCF e ADE.

L'area del rettangolo CDEF è:

$$S_{CDEF} = CF * CD = 24 * 8 = 192.$$

L'area dell'insieme dei due triangoli BCF e ADE è:

$$S_{(BCF+ADE)} = CF * BF = 24 * 10 = 240.$$

L'area del trapezio è:

$$S_{ABCD} = S_{CDEF} + S_{(BCF+ADE)} = 192 + 240 = 432.$$

----- APPROFONDIMENTO -----

Nello schema precedente, i lati obliqui AD e BC sono indicati con lunghezza uguale a 26. Verifichiamo il dato.

ADE è un triangolo rettangolo e AD è la sua ipotenusa. La lunghezza di AD è:

$$AD^2 = ED^2 + EA^2 = 24^2 + 10^2 = 576 + 100 = 676 \quad e$$

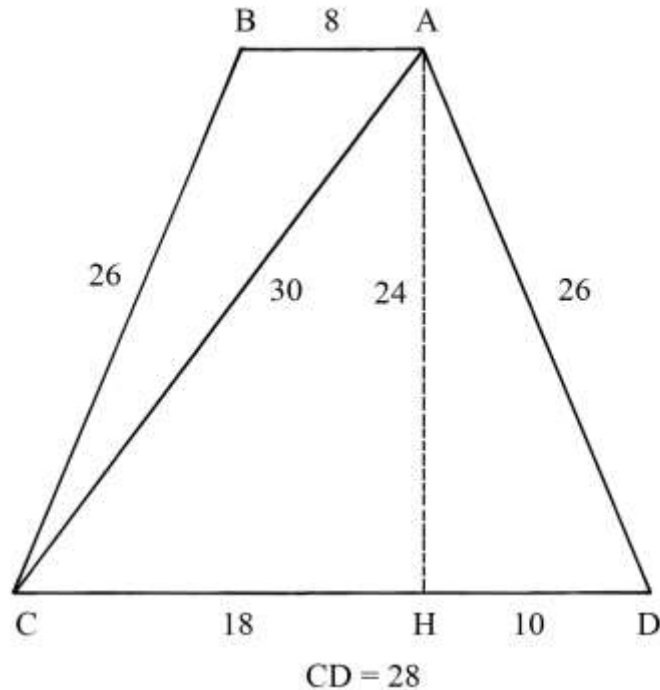
$$AD = \sqrt{676} = 26.$$

Il triangolo ADE ha lati con lunghezze formanti la terna derivata 10-24-26 che proviene dalla seconda terna primitiva, 5-12-13, i cui membri sono moltiplicati per 2.

Area di un trapezio isoscele diviso in due triangoli

Il solito trapezio isoscele ABCD è diviso in due triangoli scaleni dalla diagonale AC.

Il testo non fornisce alcuna informazione sulla procedura da impiegare per calcolare l'area dei due triangoli (e in particolare quella di ABC).



----- APPROFONDIMENTO -----

AH è un'altezza del trapezio che già sappiamo essere lunga 24.

ACH è un triangolo rettangolo di cui AC è l'ipotenusa. La lunghezza di AC è data da:

$$AC^2 = AH^2 + CH^2 = 24^2 + 18^2 = 576 + 324 = 900 \quad e$$

$$AC = \sqrt{900} = 30.$$

Le lunghezze dei lati di ACH formano la terna derivata 18-24-30 che proviene dalla terna primitiva 3-4-5.

L'area del triangolo scaleno ACD è:

$$S_{ACD} = CD * AH / 2 = 28 * 24 / 2 = 336.$$

Per calcolare l'area di ABC possiamo applicare la formula di Erone:

* $AB + BC + CA = 8 + 26 + 30 = 64 = 2 * p$, perimetro;

* $2 * p / 2 = p = \text{semiperimetro} = 64 / 2 = 32$.

L'area è:

$$S_{ABC} = \sqrt{[p * (p - AB) * (p - BC) * (p - CA)]} =$$

$$= \sqrt{[32 * (32 - 8) * (32 - 26) * (32 - 30)]} = \sqrt{(32 * 24 * 6 * 2)} = \sqrt{9216} = 96.$$

L'area del trapezio è:

$$S_{ABCD} = S_{ACD} + S_{ABC} = 336 + 96 = 432.$$

Area di un trapezio isoscele scomposto in due triangoli

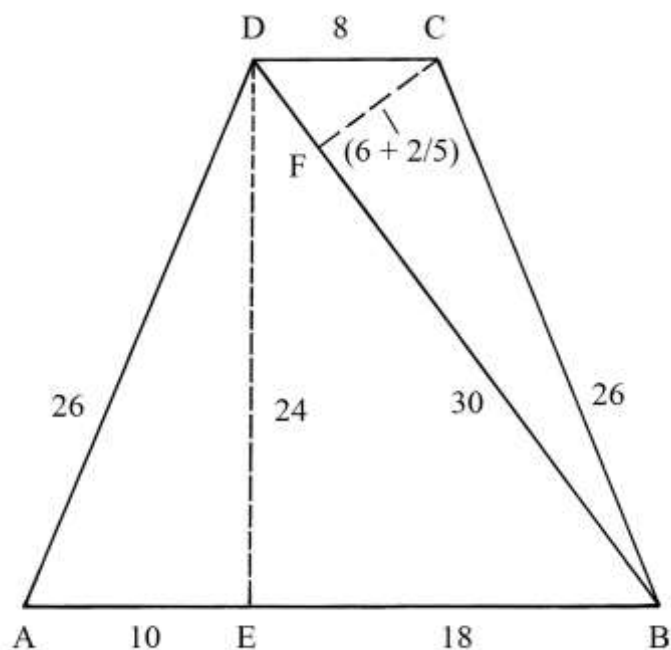
La scomposizione del trapezio in due triangoli scaleni è simmetrica rispetto a quella effettuata sul trapezio del precedente problema.

L'area di ADB è:

$$S_{ADB} = AB * DE / 2 = 28 * 24 / 2 = 336.$$

L'area del triangolo BDC è:

$$S_{BDC} = BD * FC/2 = 30 * (6 + 2/5)/2 = 96.$$

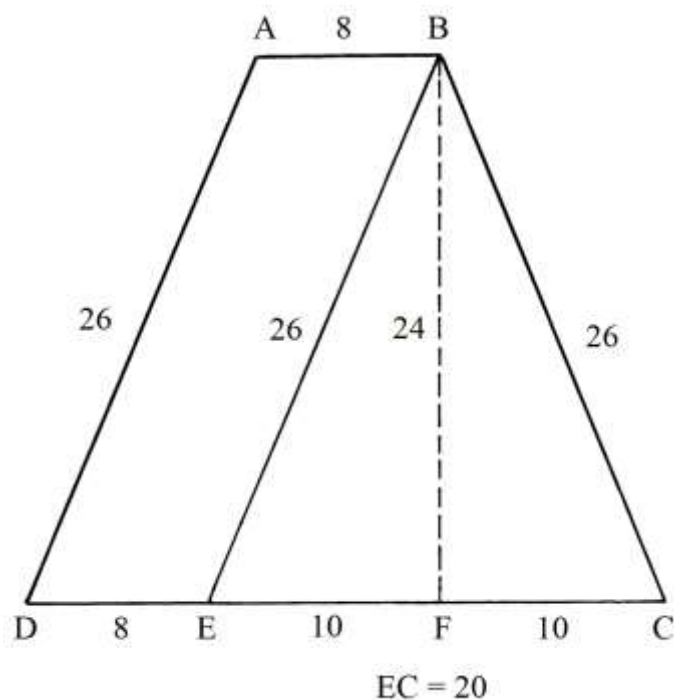


L'area dell'intero trapezio è:

$$S_{ABCD} = S_{ADB} + S_{BDC} = 336 + 96 = 432.$$

Area di un trapezio isoscele scomposto in un triangolo isoscele e in un parallelogramma

Il consueto trapezio isoscele ABCD è scomposto fra un triangolo isoscele, BCE, e un parallelogramma, ABED.

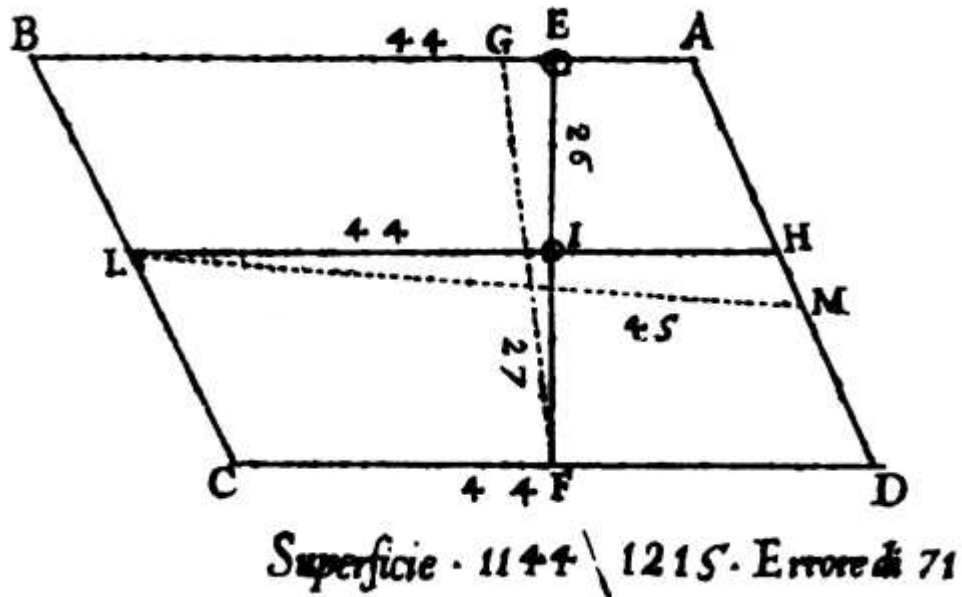


L'area del triangolo isoscele BCE è:

$$S_{BCE} = BF * EC/2 = 24 * 20/2 = 240.$$

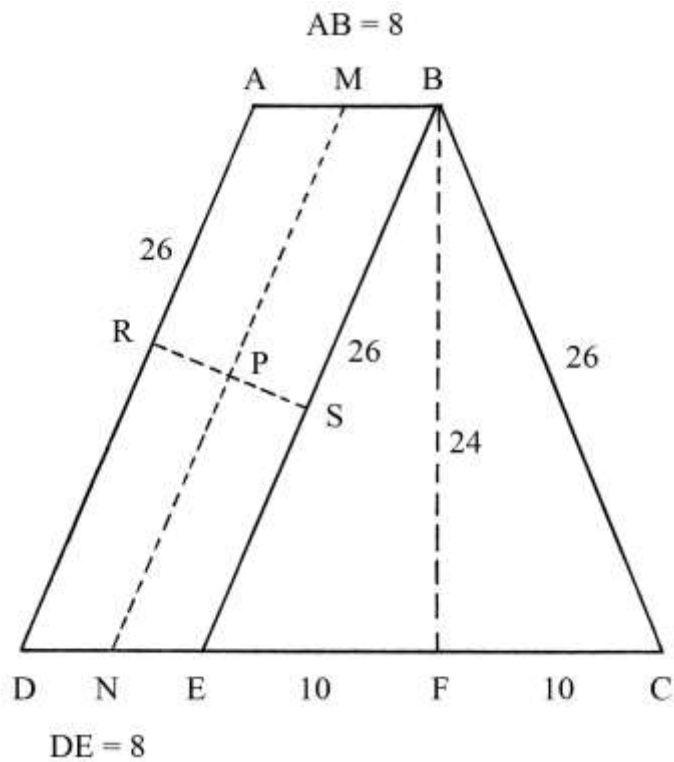
Nel testo è suggerito un metodo per calcolare l'area del parallelogramma ABED: viene proposta la tracciatura di due corde ("due diametri") all'interno di questo quadrilatero e fra loro perpendicolari: il prodotto delle loro lunghezze darebbe l'area del parallelogramma: non viene fornito però alcuno né sono presentati dei calcoli.

È la soluzione usata per risolvere il problema numero 7 della precedente Tavola XII che è espressamente citato. Per chiarezza, è qui riprodotto lo schema originale già incluso nella descrizione della precedente Tavola:



MN e RS sono due corde fra loro perpendicolari e il prodotto delle loro lunghezze fornisce l'area di ABED:

$$S_{ABED} = MN * RS.$$



Dai precedenti problemi sappiamo che l'area del trapezio ABCD è 432: ne consegue che l'area di ABED deve essere uguale a:

$$S_{ABED} = S_{ABCD} - S_{BCE} = 432 - 240 = 192.$$

Se la corda MN è parallela a AD e a BE, la sua lunghezza è:

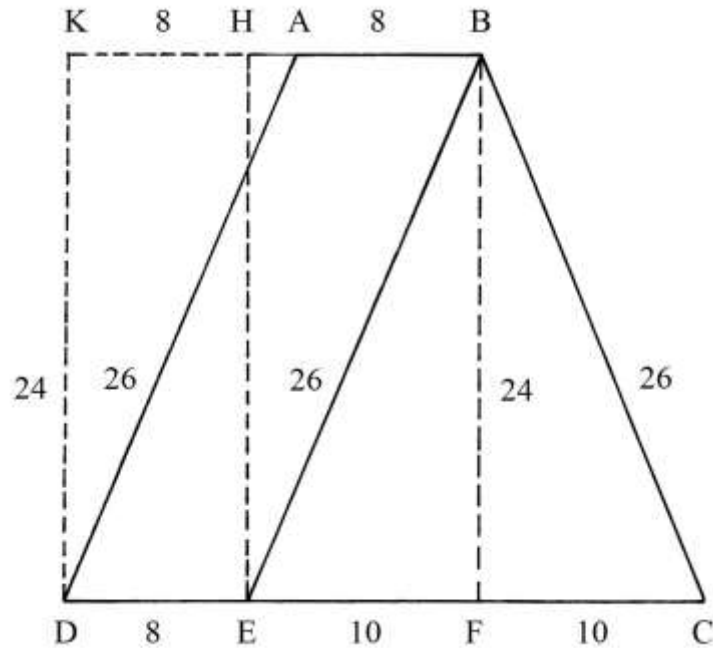
$$MN = AD = BE = 26.$$

Possiamo ricavare la lunghezza della corda RS:

$$RS = S_{ABED} / MN = 192 / 26 = (7 + 5/13).$$

È evidente la difficoltà di misurare con precisione la lunghezza di RS.

Una soluzione più semplice per ricavare l'area di ABED è presentata nello schema che segue:



Prolungare verso sinistra la base AB. Dai punti D e E elevare due parallele all'altezza BF: sono EH e DK.

Il rettangolo DKHE ha area uguale a quella di ABED: i due quadrilateri hanno in comune la base DE e uguale altezza che è:

$$KD = HE = BF = 24.$$

L'area di DKHE è:

$$S_{DKHE} = DE * KD = 8 * 24 = 192 = S_{ABED}.$$

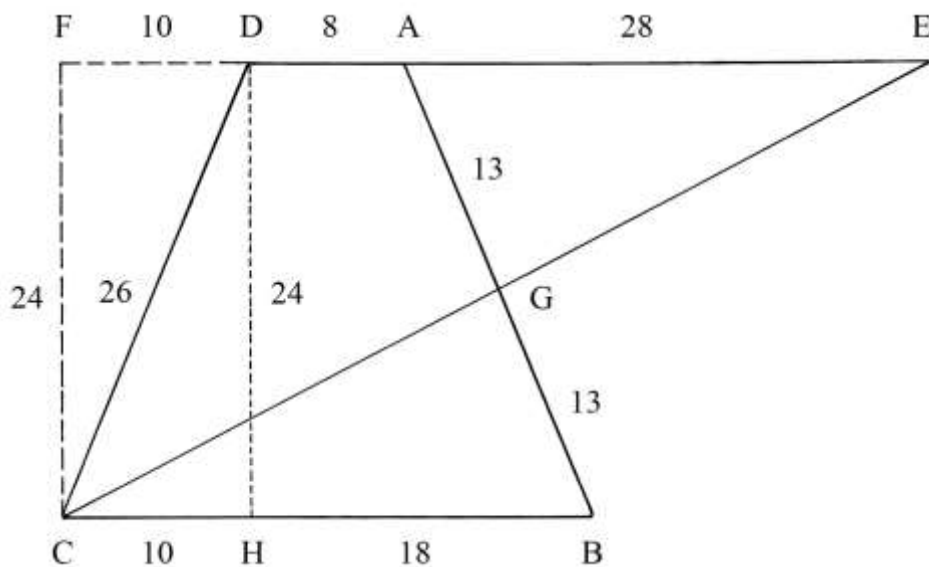
L'area del trapezio ABCD è:

$$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ABED} = 240 + 192 = 432.$$

La soluzione prospettata nel Trattato, ma non sviluppata, delle due corde MN e RS fra loro perpendicolari è troppo complicata e presenta margini di errore che non possono essere eliminati con una esatta misurazione.

Triangolo scaleno equivalente a un trapezio isoscele

ABCD è il solito trapezio isoscele.



Prolungare verso sinistra e verso destra la base minore DA.

Dal punto C elevare la perpendicolare CF: CF è parallela all'altezza DH.

Da A riportare in E la lunghezza di CB:

$$CB = CH + HB = 10 + 18 = 28.$$

Collegare C con E. CE taglia in G il lato AB e lo divide in due segmenti di uguale lunghezza:

$$AG = GB = 13.$$

CE è l'ipotenusa del triangolo rettangolo CFE: essa viene divisa in due parti uguali dal lato

AB: $CG = GE$.

I triangoli scaleni CGB e GAE sono uguali perché i loro lati hanno uguali lunghezze:

* $AE = CB$;

* $AG = GB$;

* $CG = GE$.

L'area del triangolo CDE è uguale a quella del trapezio ABCD e cioè:

$$S_{CDE} = S_{ABCD} = 432.$$

Triangolo isoscele tagliato

Il triangolo isoscele CDE è tagliato con una linea parallela alla base CD: la sezione genera il trapezio isoscele ABDC.

Lo schema che segue è leggermente modificato rispetto a quello originale e anche i dati sono stati parzialmente corretti perché sono sorti dei dubbi.

Le basi del trapezio sono lunghe:

* $AB = 4$;

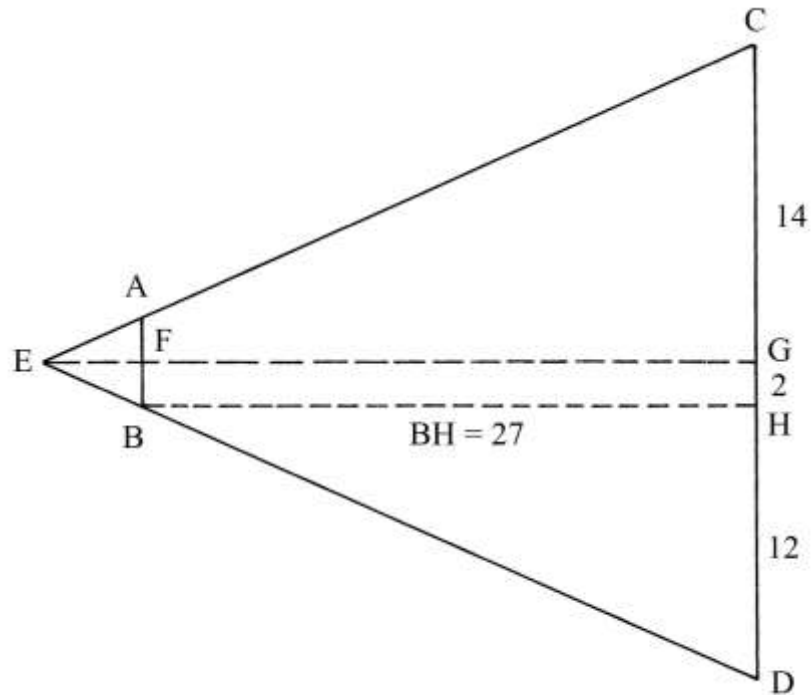
* $CD = 28$.

Le altezze sono:

* $FG = 27$;

* $EF = 4,5$;

* $EG = EF + FG = 4,5 + 27 = 31,5$.



L'area del trapezio ABDC è:

$$S_{ABDC} = [(AB + CD)/2] * FG = [(4 + 28)/2] * 27 = (32/2) * 27 = 16 * 27 = 432.$$

Con questo trapezio si conclude la serie dei quadrilateri con area uguale a 432.

Area di un trapezio isoscele

ABCD è un trapezio isoscele.

Le sue basi sono lunghe:

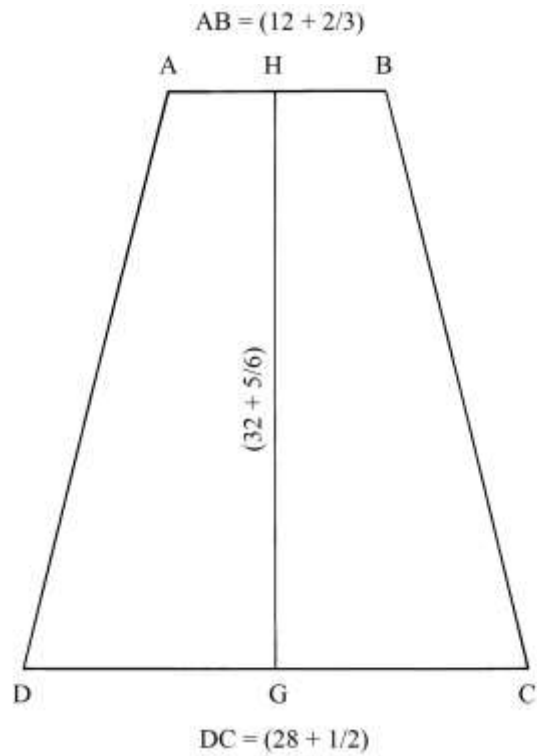
* $AB = (12 + 2/3);$

* $CD = (28 + 1/2).$

L'altezza HG è lunga $(32 + 5/6).$

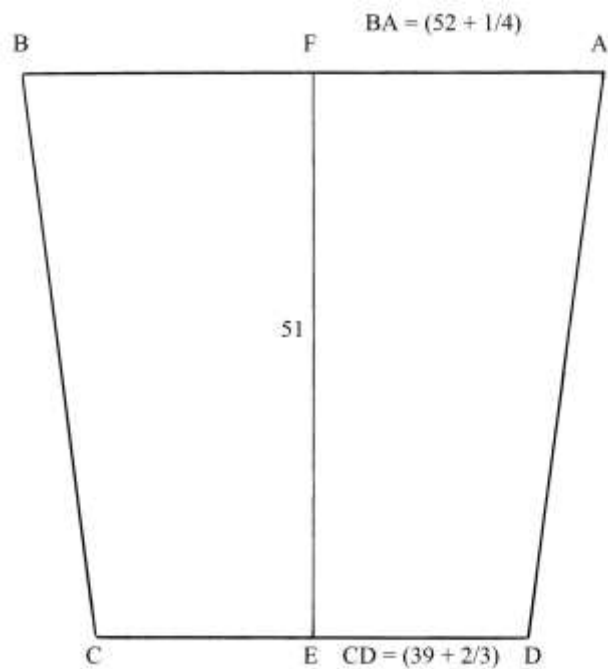
L'area è data da:

* $S_{ABCD} = [(AB + CD)/2] * HG = [(12 + 1/3) + (28 + 1/2)/2] * (32 + 5/6) = [(40 + 5/6)/2] * (32 + 5/6) = (20 + 5/12) * (32 + 5/6) = (670 + 25/72).$



Area di un trapezio con la base maggiore in alto

ABCD è un trapezio isoscele con la base maggiore posizionata in alto, come fosse il profilo di un vaso.



Le basi sono lunghe:

* $AB = (52 + \frac{1}{4})$;

* $CD = (39 + \frac{2}{3})$.

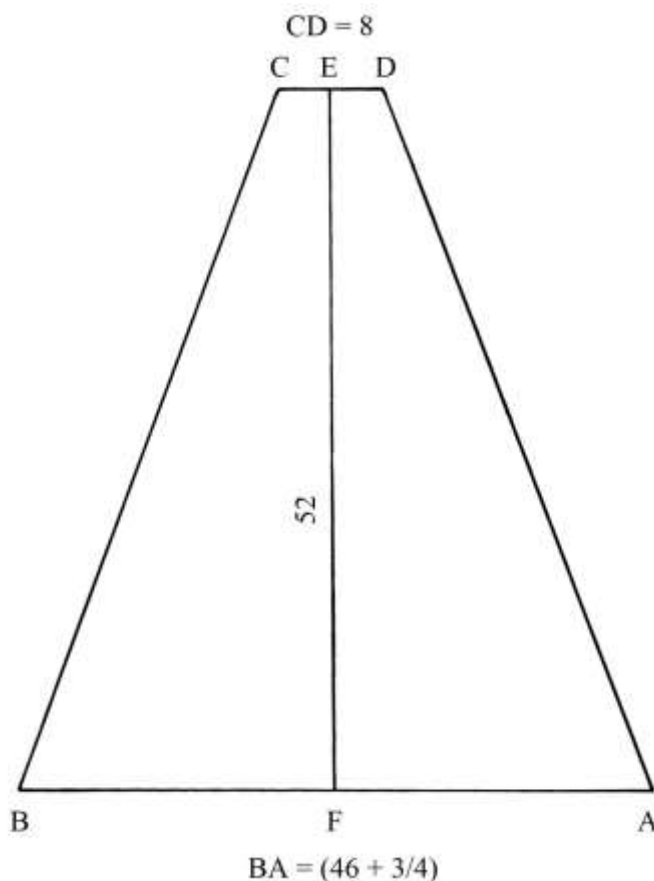
L'altezza FE è 51.

L'area del trapezio è data da:

$$S_{ABCD} = [(AB + CD)/2] * FE = [(52 + \frac{1}{4}) + (39 + \frac{2}{3})]/2 * 51 = \\ = (91 + \frac{8}{12})/2 * 51 = (45 + \frac{23}{24}) * 51 = (2343 + \frac{7}{8}).$$

Area di un trapezio isoscele

L'ultimo e undicesimo quadrilatero di questa Tavola è un trapezio isoscele con la base superiore molto corta.



Le due basi sono lunghe:

* $CD = 8;$

* $BA = (46 + \frac{3}{4}).$

L'altezza EF è lunga 52.

L'area del trapezio è:

$$S_{ABCD} = [(CD + BA)/2] * EF = [8 + (46 + \frac{3}{4})]/2 * 52 = (54 + \frac{3}{4})/2 * 52 = \\ = (27 + \frac{3}{8}) * 52 = (1423 + \frac{1}{2}).$$

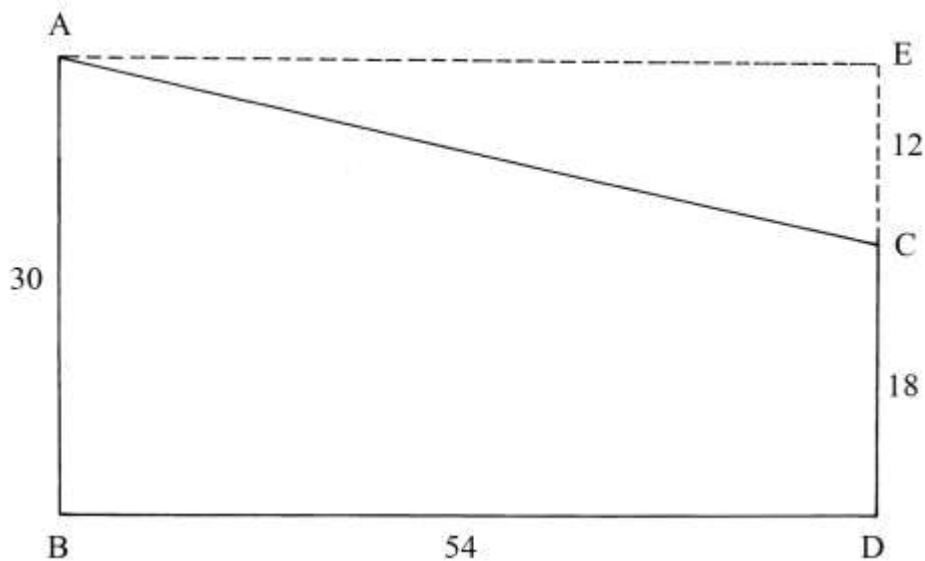
TAVOLA XIV

Anche la Tavola XIV è dedicata a quadrilateri “capitagliati” e cioè a trapezi rettangoli di varie dimensioni.

Nella Tavola sono considerati *undici* esempi di poligoni.

Area di un trapezio rettangolo

ABDC è un trapezio rettangolo originato dal rettangolo ABDE dal quale è stato asportato il triangolo rettangolo AEC, disegnato con “linee finte” e cioè punteggiate.



Deve essere calcolata l'area di ABDC.

Nel testo è proposta una soluzione corretta ma un po' lunga:

* calcolare l'area del rettangolo ABDE:

$$S_{ABDE} = AB * BD = 30 * 54 = 1620;$$

* calcolare l'area del triangolo rettangolo AEC:

$$S_{AEC} = AE * EC/2 = 54 * 12/2 = 324;$$

* sottrarre l'area di AEC da quella di ABDE:

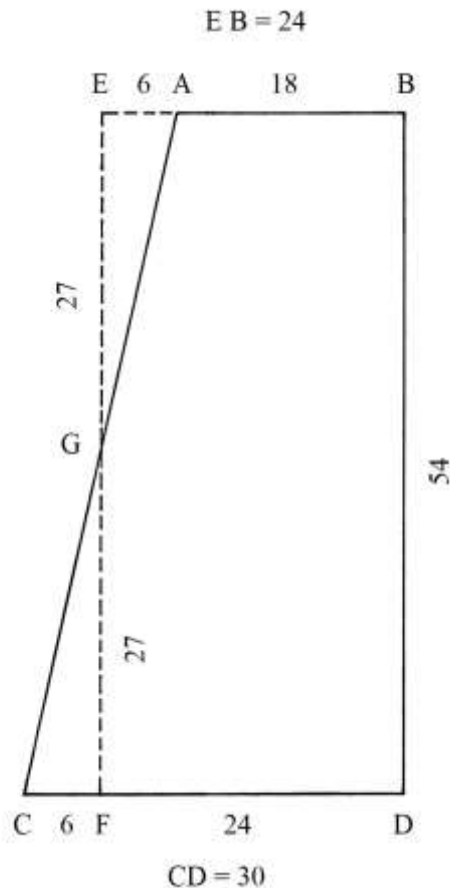
$$S_{ABDE} - S_{AEC} = 1620 - 324 = 1296, \text{ area del trapezio rettangolo ABDC.}$$

La soluzione più semplice è data dal prodotto della semisomma delle basi del trapezio rettangolo (AB e CD) per l'altezza (BD):

$$S_{ABDC} = [(AB + CD)/2] * BD = [(30 + 18)/2] * 54 = 24 * 54 = 1296.$$

Area di un altro trapezio rettangolo

ABDC è un trapezio rettangolo che è generato dal sezionamento del rettangolo EBDF con una corda, AC, che determina due triangoli rettangoli di uguali dimensioni: EAG e CFG. G è il punto medio di EF.



L'area del triangolo EAG è:

$$S_{EAG} = EA * EG/2 = 6 * 27/2 = 81.$$

Anche CFG ha area uguale a quella di EAG:

$$S_{CFG} = CF * FG/2 = 6 * 27/2 = 81.$$

L'area di EAG è asportata dal rettangolo EBDF e viene aggiunta l'area di CFG.

L'area del trapezio ABDC è:

$$S_{ABDC} = [(AB + CD)/2] * BD = [(18 + 30)/2] * 54 = 24 * 54 = 1296.$$

L'area del rettangolo originario EBDF è:

$$S_{EBDF} = EB * BD = 24 * 54 = 1296, \text{ area uguale a quella del trapezio ABDC.}$$

----- APPROFONDIMENTO -----

Lo schema che segue mostra un'ipotesi di costruzione del trapezio ABDC.

Fissare il punto G, medio di EF.

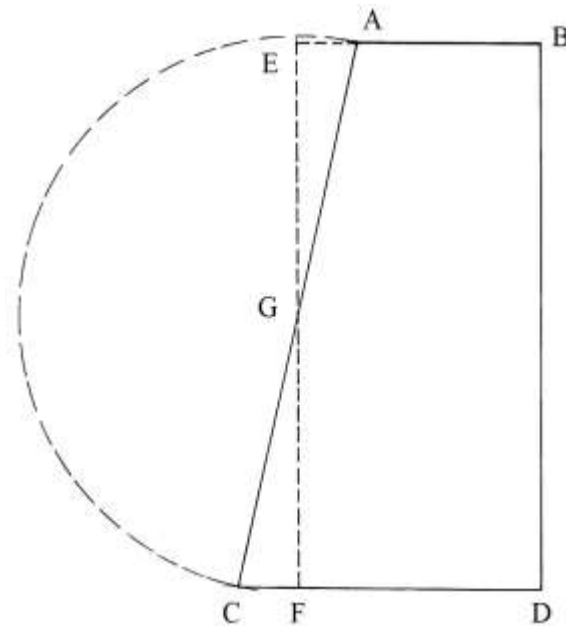
Stabilire il punto A a distanza 6 da E:

$$EA = 6.$$

Prolungare verso sinistra il lato DF.

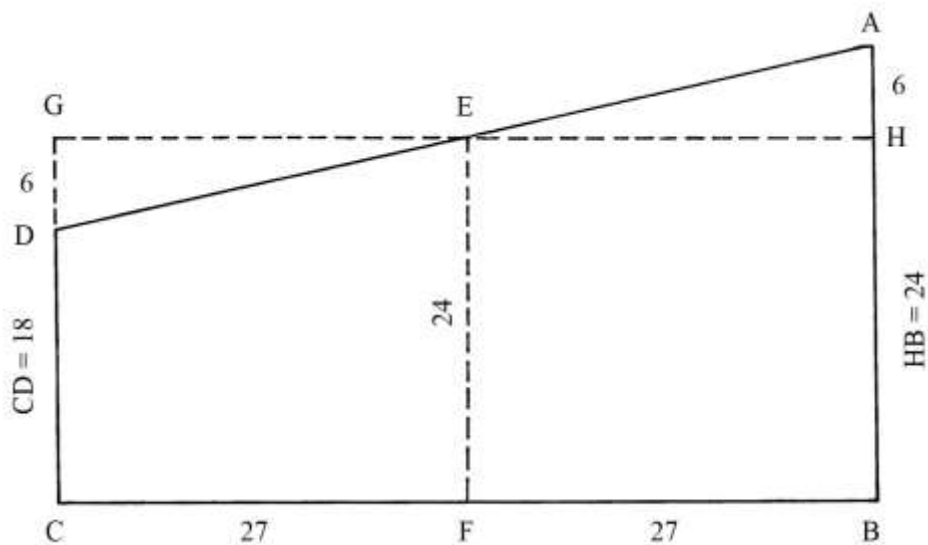
Fare centro in G e con raggio GA tracciare un arco da A fino a stabilire il punto C.

ABDC è il trapezio che ha area uguale a quella del rettangolo EBDF.



Area di un trapezio

ABCD è un trapezio che è ottenuto dal parziale sezionamento del rettangolo CGHB.



I triangoli rettangoli AHE e GDE hanno aree uguali:

$$S_{AHE} = AH * HE/2 = 6 * 27/2 = 81 = S_{GDE}.$$

E è il punto di intersezione del lato AD (e del lato GH): esso dista 24 dalla base CB e 27 dai lati GC e AB.

L'area del rettangolo CGHB è:

$$S_{CGHB} = CG * CB = 24 * 54 = 1296.$$

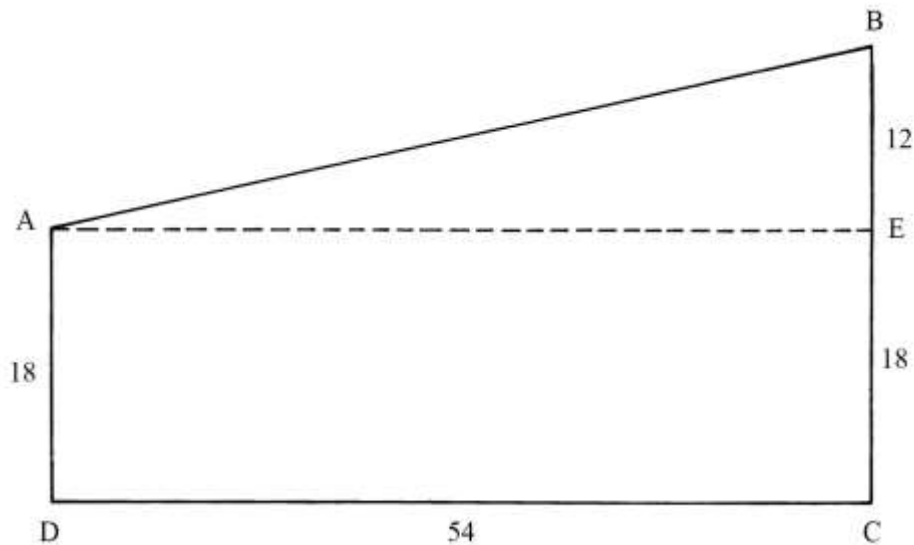
L'area del trapezio ABCD è:

$$S_{ABCD} = [(DC + AB)/2] * CB = [(18 + 30)/2] * 54 = 24 * 54 = 1296.$$

Le aree del rettangolo CGHB e del trapezio ABCD sono uguali.

Area di un triangolo rettangolo e di un rettangolo

ABCD è un trapezio rettangolo che ha le stesse dimensioni di quello del precedente problema.



Il trapezio è scomposto nel triangolo rettangolo ABE e nel rettangolo AECD.

L'area del triangolo rettangolo ABE è:

$$S_{ABE} = AE * BE/2 = 54 * 12/2 = 324.$$

L'area del rettangolo AECD è data da:

$$S_{AECD} = DC * AD = 54 * 18 = 972.$$

L'area del trapezio è:

$$S_{ABCD} = S_{ABE} + S_{AECD} = 324 + 972 = 1296.$$

Un altro metodo per calcolare l'area di ABCD è dato dalla nota formula:

$$S_{ABCD} = [(AD + BC)/2] * DC = [(18 + 30)/2] * 54 = 24 * 54 = 1296.$$

Triangolo rettangolo sezionato

ABF è un triangolo rettangolo che è sezionato con una linea, CD, parallela al cateto minore AB.

L'operazione crea il trapezio rettangolo ABDC.

Nessun calcolo è presente nel testo contenuto nel Trattato.

L'area del trapezio ABDC è:

$$S_{ABDC} = [(AB + CD)/2] * EC = [(30 + 18)/2] * 54 = 48/2 * 54 = 24 * 54 = 1296.$$

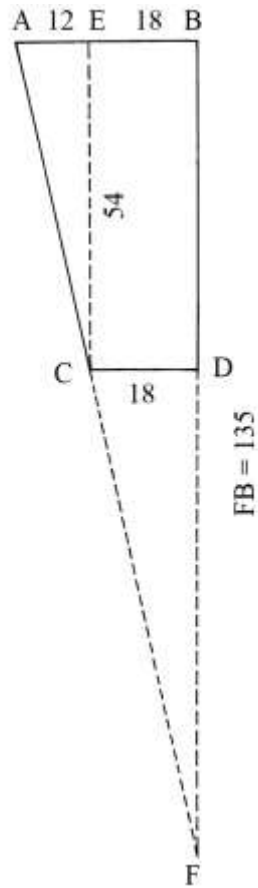
L'area di questo trapezio è uguale a quella dei quadrilateri considerati nei *quattro* precedenti problemi.

L'area del triangolo CDF è :

$$S_{CDF} = CD * DF/2 = 18 * (135 - 54)/2 = 18 * 81/2 = 729.$$

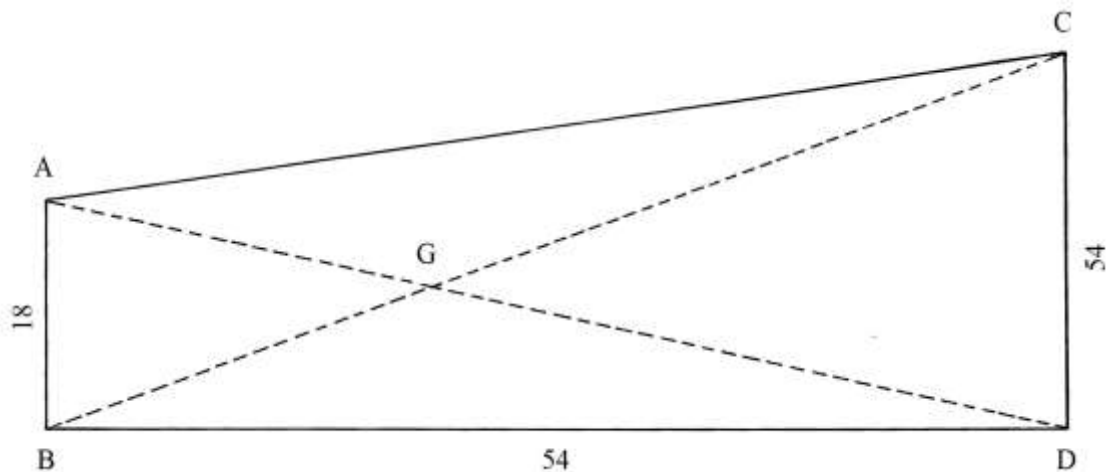
L'intero triangolo ABF ha area:

$$S_{ABF} = AB * BF/2 = 30 * 135/2 = 2025.$$



Trapezio rettangolo diviso in quattro triangoli

ABDC è un trapezio rettangolo: le sue diagonali AD e BC si intersecano in G e dividono il quadrilatero in quattro triangoli scaleni.



L'area del trapezio è:

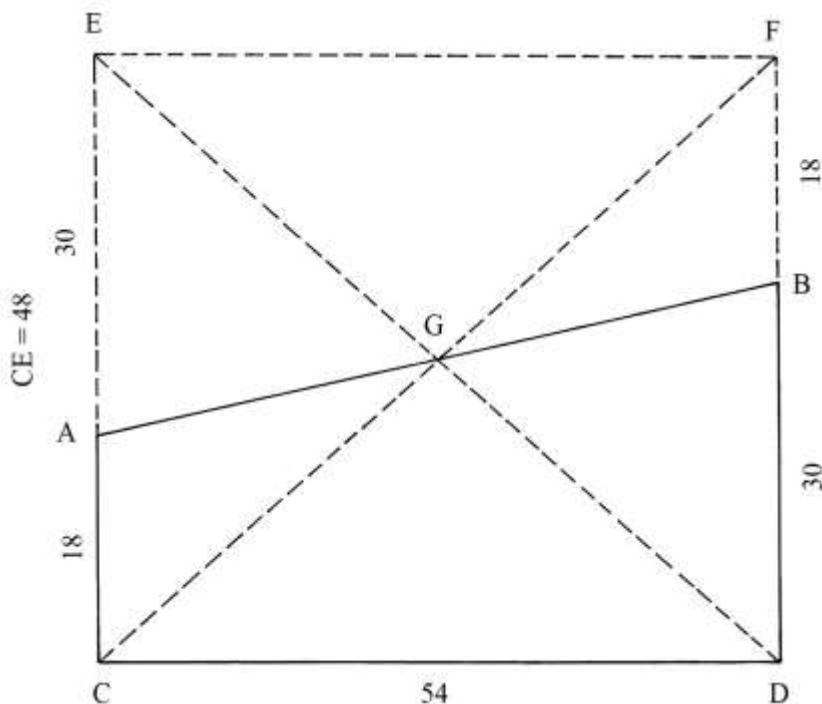
$S_{ABDC} = [(AB + CD)/2] * BD = [(18 + 54)/2] * 54 = 36 * 54 = 1944$, area che è uguale a quella dei quadrilateri considerati nei precedenti cinque problemi.

Stando al testo, le due diagonali dividerebbero il trapezio ABDC in due *triangoli isosceli* (ma non indica quali sarebbero) e in due triangoli scaleni, ABC e ABD, che in realtà sono *rettangoli*.

Considerati singolarmente AGC, AGB, BGD e CGD sono triangoli *scaleni*.

Trapezio rettangolo

ABDC è un trapezio rettangolo ricavato dal sezionamento del rettangolo CEFD che è tagliato con la corda AB.



AB divide il rettangolo CEFD in due trapezi rettangoli che hanno uguali dimensioni: ABDC e AEFB.

L'area di ABDC è:

$$S_{ABDC} = [(AC + BD)/2] * CD = [(18 + 30)/2] * 54 = (48/2) * 54 = 24 * 54 = 1296.$$

L'area dell'intero rettangolo è:

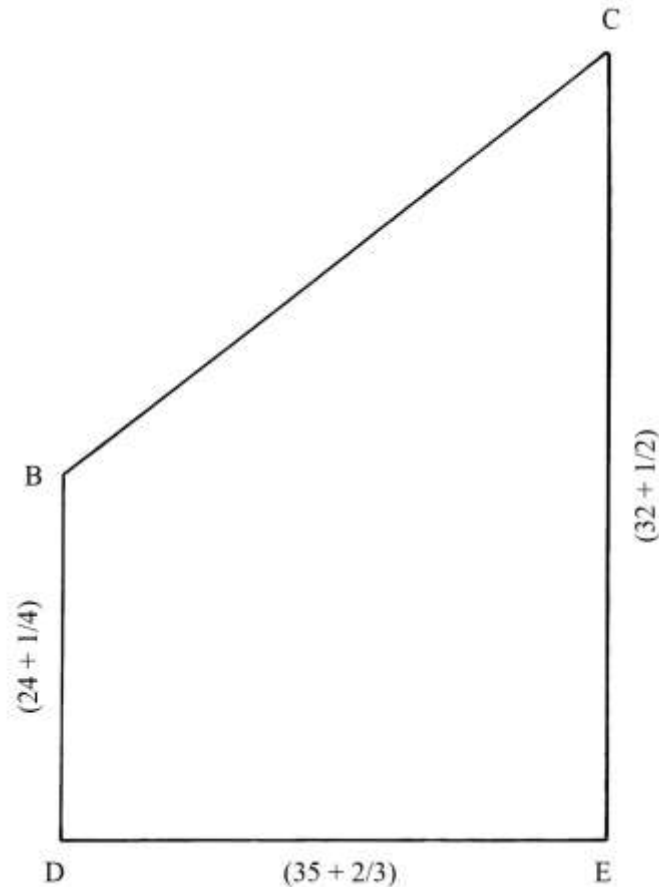
$$S_{CEFD} = CE * CD = 48 * 54 = 2592 = 2 * 1296.$$

I due trapezi, ABCD e AEFB, hanno area uguale a metà di quella di CEFD.

Le diagonali del rettangolo, ED e FC, si intersecano in G che è anche il punto medio della corda AB.

Area di un trapezio con dimensioni "rotte"

Il trapezio DBCE ha lunghezze delle basi e dell'altezza DE espresse da numeri "rotti", cioè con parti frazionarie.



L'area del trapezio è data da:

$$S_{DBCE} = [(DB + EC)/2] * DE = [(24 + 1/4) + (32 + 1/2)]/2 * (35 + 2/3) = (1012 + 1/24).$$

Area di un altro trapezio

Il trapezio scaleno ABDC è ottenuto dal trapezio rettangolo ABGC dal quale è stato tagliato il triangolo rettangolo BGD i cui cateti hanno le seguenti lunghezze:

* $BG = 12;$

* $DG = 5.$

L'ipotenusa BD ha lunghezza che è data da:

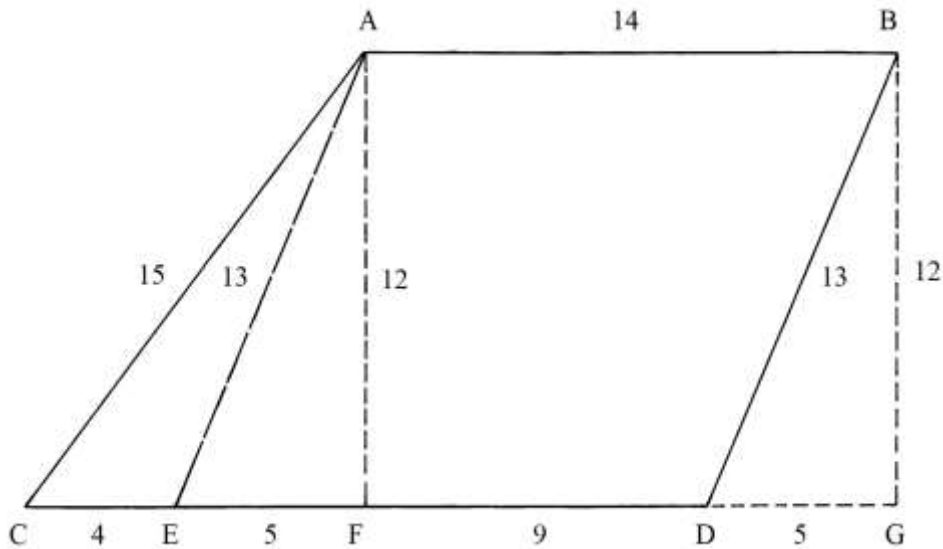
$$BD^2 = BG^2 + DG^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169 \quad e$$

$$BD = \sqrt{169} = 13.$$

Il triangolo BGD ha lati con lunghezze che formano la seconda terna primitiva, 5-12-13.

L'area del trapezio ABDC è:

$$S_{ABDC} = [(AB + CD)/2] * AF = [(14 + 18)/2] * 12 = 16 * 12 = 192.$$



----- APPROFONDIMENTO -----

Fissare il punto E:

- * CE = 4;
- * EF = 5.

Tracciare la corda AE: essa è parallela al lato BD e il quadrilatero ABDE è un parallelogramma che possiede le due coppie di lati parallele e di uguale lunghezza:

- * AE//BD = 13;
- * AB//ED = 14.

ACF ha area:

$$S_{ACF} = CF * AF/2 = (CE + EF) * AF/2 = (4 + 5) * 12/2 = 54.$$

ACE ha area:

$$S_{ACE} = CE * AF/2 = 4 * 12/2 = 24.$$

Il triangolo AEF ha le stesse dimensioni del triangolo BGD.

Area di un trapezio composto

LNOM è un trapezio formato dall'unione del triangolo rettangolo LPM e del rettangolo PMON, uniti lungo il loro comune lato PM.

L'area del triangolo LPM è:

$$S_{LPM} = LP * PM/2 = 15 * 36/2 = 270.$$

L'area del rettangolo PMON è data da:

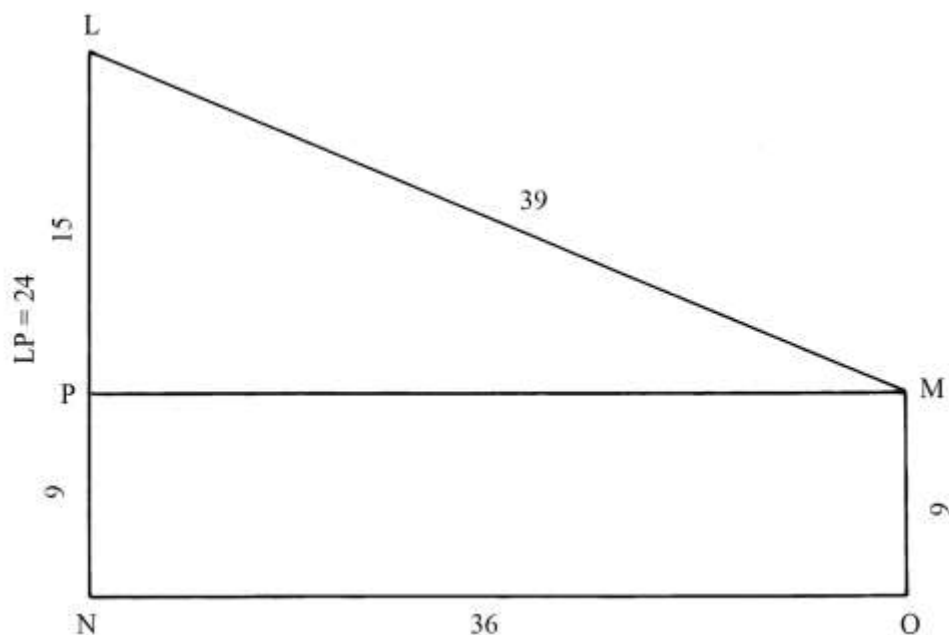
$$S_{PMON} = PM * PN = 36 * 9 = 324.$$

L'area dell'intero trapezio è:

$$S_{LNOM} = S_{LPM} + S_{PMON} = 270 + 324 = 594.$$

Essa può essere calcolata anche con la formula consueta:

$$S_{LNOM} = [(LN + MO)/2] * NO = [(24 + 9)/2] * 36 = 33/2 * 36 = 594.$$



----- APPROFONDIMENTO -----

Verifichiamo la lunghezza del lato LM, che è anche l'ipotenusa del triangolo rettangolo LPM.

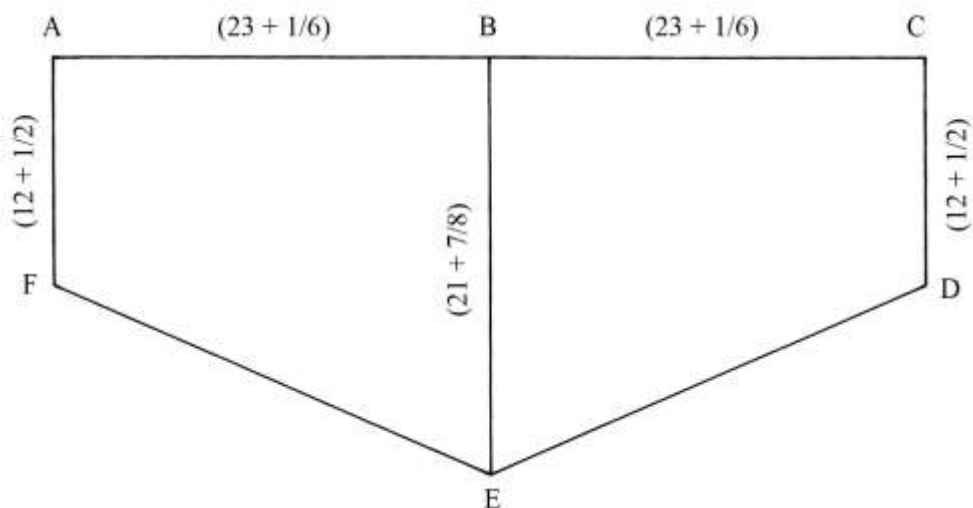
$$LM^2 = LP^2 + PM^2 = 15^2 + 36^2 = 225 + 1296 = 1521 \quad e$$

$$LM = \sqrt{1521} = 39.$$

Il triangolo LPM ha lati lunghi quanto la terna derivata 15-36-39 che proviene dalla primitiva i cui membri sono moltiplicati per 3.

Area di un doppio trapezio

ABCDEF è un poligono formato da due trapezi rettangoli identici, uniti lungo la loro comune base maggiore BE.



L'area di uno dei due trapezi, ad esempio quello ABEF, è data da:

$$S_{ABEF} = [(AF + BE)/2] * AB = [(12 + 1/2) + (21 + 7/8)]/2 * (23 + 1/6) = (403 + 43/48).$$

L'area di ABCDEF è il doppio di quella di ABEF:

$$S_{ABCDEF} = 2 * S_{ABEF} = 2 * (403 + 43/48) = (807 + 38/48) = (807 + 19/24).$$

TAVOLA X

La Tavola contiene *undici* costruzioni geometriche relative ai triangoli equilateri.

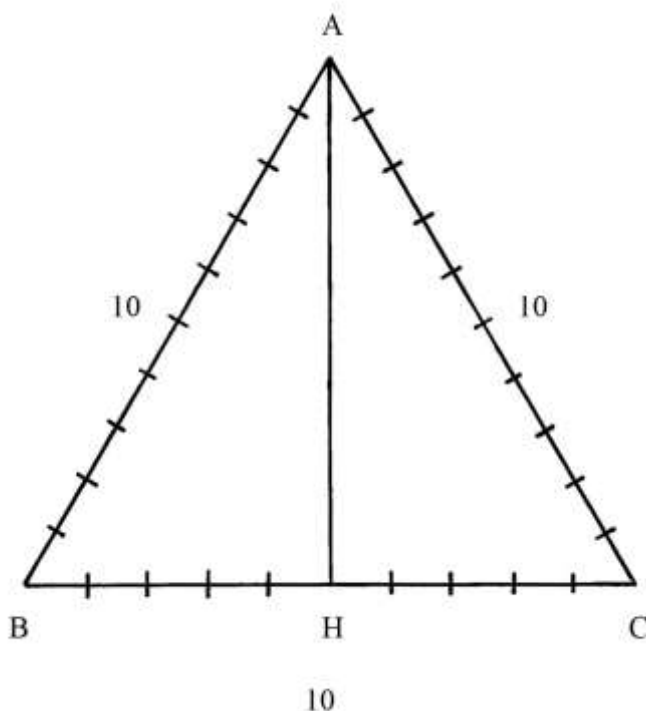
Le prime dieci sono descritte con testi privi di qualsiasi calcolo: solo per l'undicesima vi è la presentazione di una regola numerica.

Non sono impiegate specifiche unità di misura.

Per i primi dieci problemi, si è tentato di effettuare alcuni calcoli.

Area di un triangolo equilatero

Il triangolo ABC ha lati lunghi 10.



L'altezza AH è lunga:

$$AH^2 = AB^2 - BH^2 = 10^2 - (10/2)^2 = 100 - 25 = 75 \quad e$$

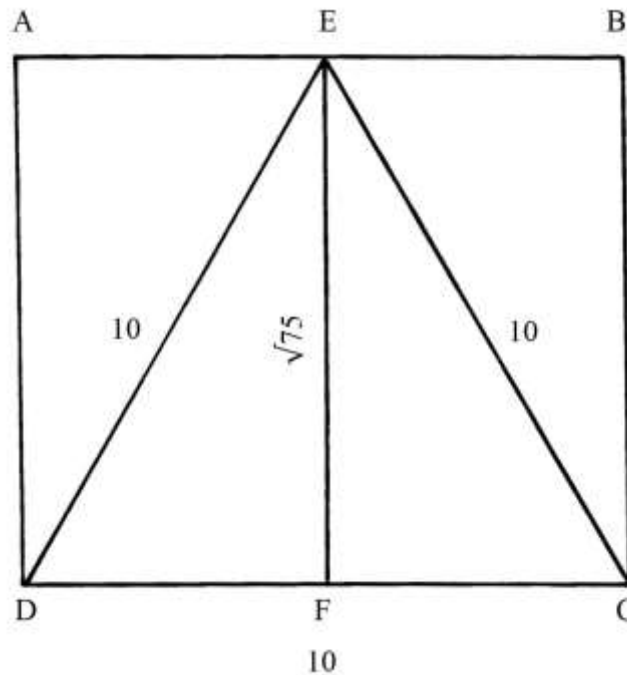
$$AH = \sqrt{75}.$$

L'area del triangolo è:

$$S_{ABC} = BC * AH/2 = (10 * \sqrt{75})/2 = 5 * \sqrt{75} = \sqrt{(25 * 75)} = \sqrt{1875} = 25 * \sqrt{3}.$$

Area di un triangolo equilatero inscritto

DEC è un triangolo equilatero inscritto nel rettangolo ABCD e ha lati lunghi 10: il rettangolo ha base DC lunga 10 e larghezza AD che è uguale all'altezza del triangolo, EF.



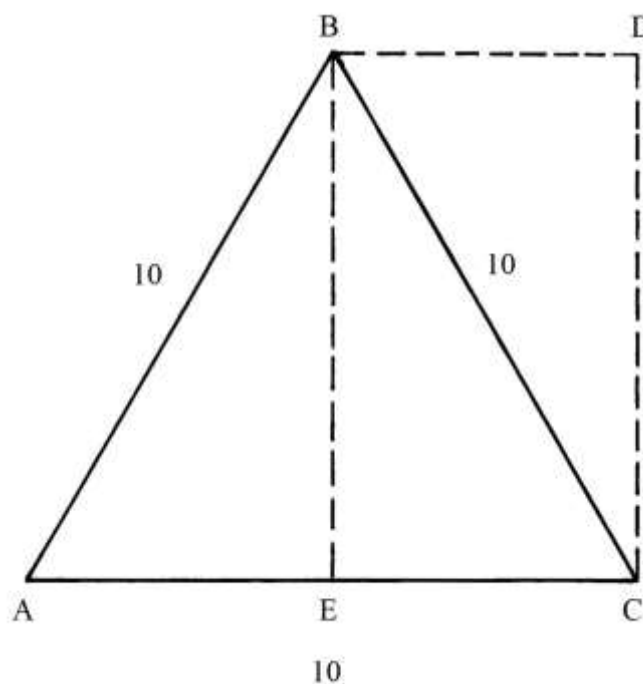
Il triangolo equilatero ha le stesse dimensioni del triangolo del precedente problema.

L'area di DEC è la metà di quella del rettangolo ABCD:

$$S_{ABCD} = 2 * S_{DEC} = 2 * (25 * \sqrt{3}) = 50 * \sqrt{3}.$$

Rettangolo equivalente a un triangolo equilatero

ABC è il solito triangolo equilatero con lati lunghi 10.



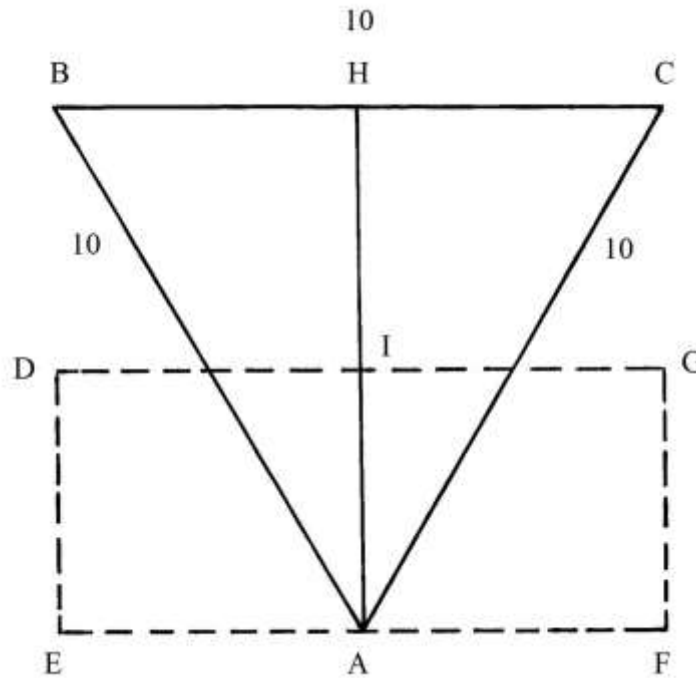
Sulla metà della base AC, EC, è costruito il rettangolo BECD: esso ha area che è data da:

$$S_{BECD} = EC * BE = (10/2) * \sqrt{75} = 5 * \sqrt{75} = \sqrt{(25 * 75)} = \sqrt{1875} = 25 * \sqrt{3}.$$

L'area di BECD è uguale a quella del triangolo ABC: la cosa è ovvia perché i triangoli ABE e BDC hanno dimensioni e aree uguali.

Triangolo equilatero equivalente a un rettangolo

ABC è un triangolo equilatero con lati lunghi 10.



Determinare il punto medio dell'altezza AH: è I.

Per I tracciare la parallela a BC e per il vertice A disegnare una seconda parallela a BC.

Dai punti I e A riportare verso sinistra e verso destra la lunghezza di HB: sono fissati i punti D, E, F e G.

Il rettangolo DEFG ha area data da:

$$S_{DEFG} = DE * EF = (HA/2) * BC = [\sqrt{75}/2] * 10 = 5 * \sqrt{75} = \sqrt{(25 * 75)} = \sqrt{1875} = 25 * \sqrt{3}.$$

L'area del rettangolo DEFG è uguale a quella del triangolo equilatero ABC.

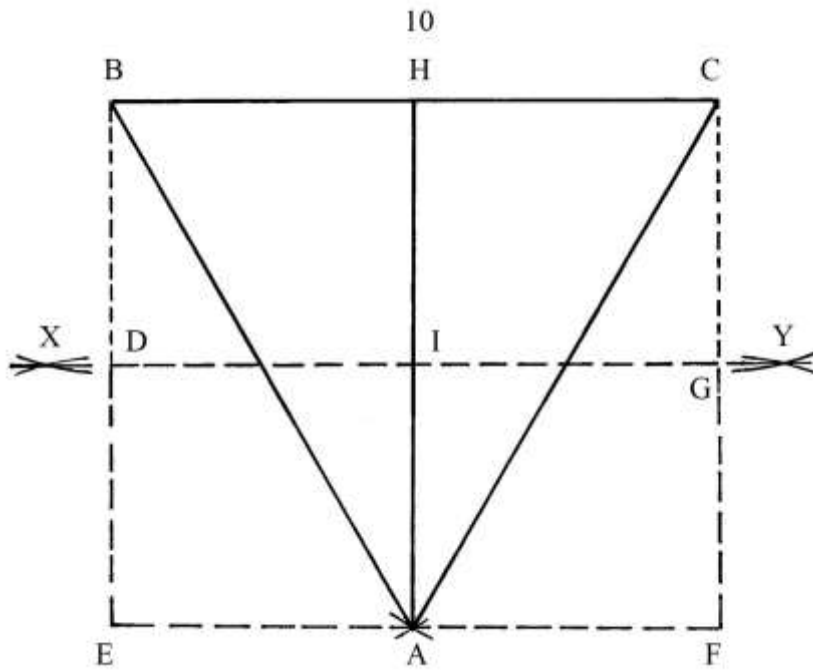
----- APPROFONDIMENTO -----

L'esatta costruzione del rettangolo DEFG richiede l'uso del compasso.

Disegnare il rettangolo EBCF in cui si risulta inscritto il triangolo equilatero ABC.

Con raggio a piacere, con il compasso fare centro in B e in E e poi in C e in F e tracciare quattro archi che si intersecano nei punti X e Y: per questi punti passa l'asse dell'altezza AH che divide a metà nel punto I.

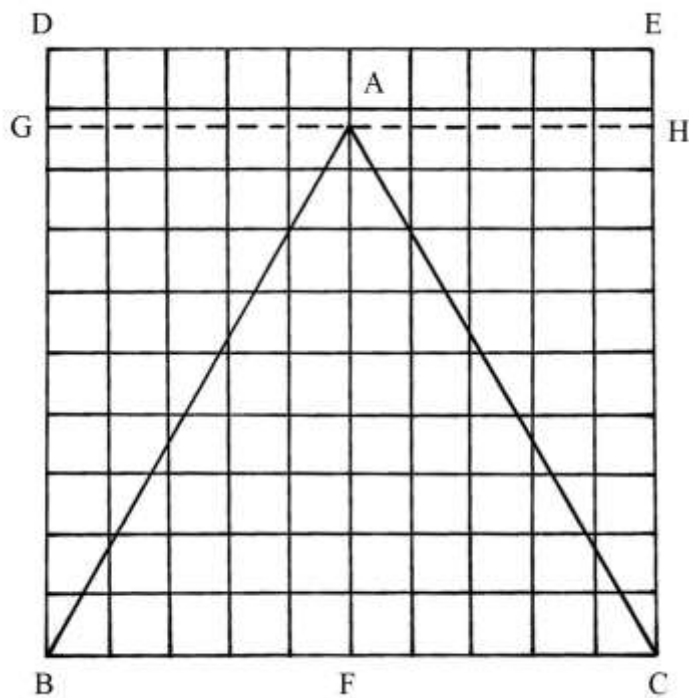
EDIGFA è il rettangolo cercato che ha area uguale a quella di ABC.



Triangolo equilatero inscritto in un quadrato

Il triangolo equilatero ABC ha lati lunghi 10 ed è inscritto nel quadrato BDEC che ha anch'esso lati lunghi 10.

Il quadrato è suddiviso in una griglia formata da 100 quadrati con lati lunghi 1.



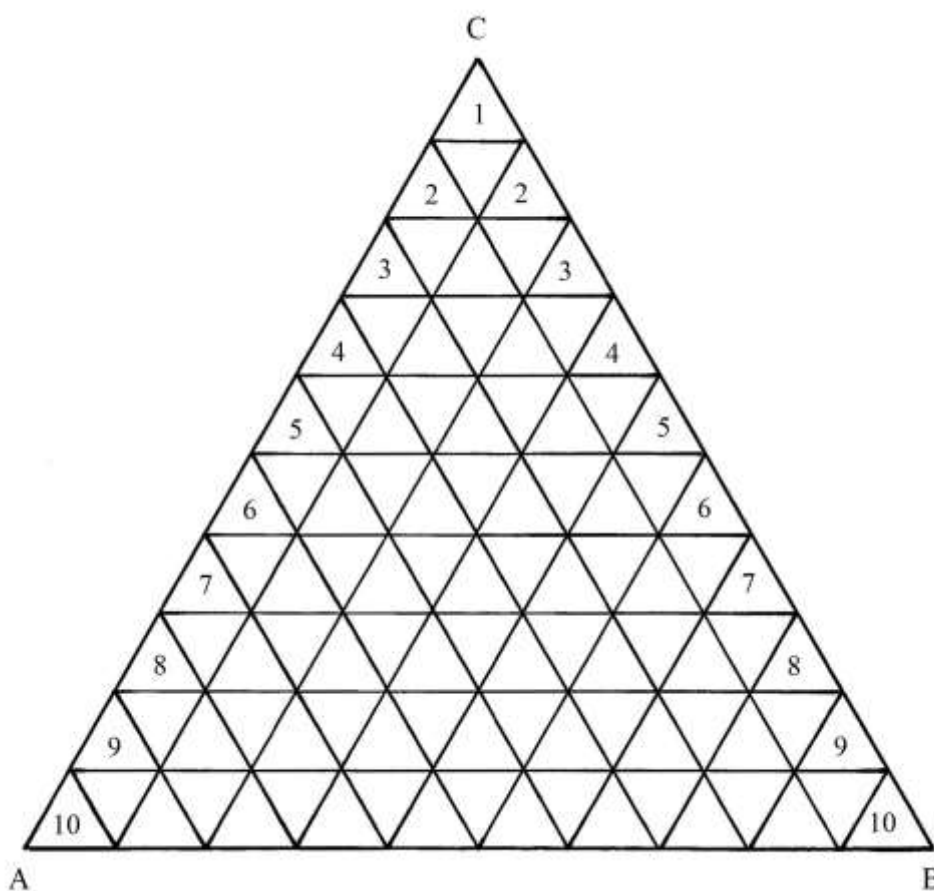
Per il vertice A è tracciata la corda GH che non coincide con una linea della quadrettatura.

L'altezza AF è calcolata in $(8 + \frac{2}{3})$. Infatti, AF è lunga:
 $AHF = \sqrt{75} \approx (8 + \frac{2}{3})$.

Una griglia triangolare

ABC è un triangolo equilatero con lati lunghi 10. I lati sono divisi in 10 parti uguali di lunghezza 1.

ABC è diviso in una griglia ottenuta dall'intersezione di corde parallele ai tre lati: da ogni lato si dipartono *nove* corde.



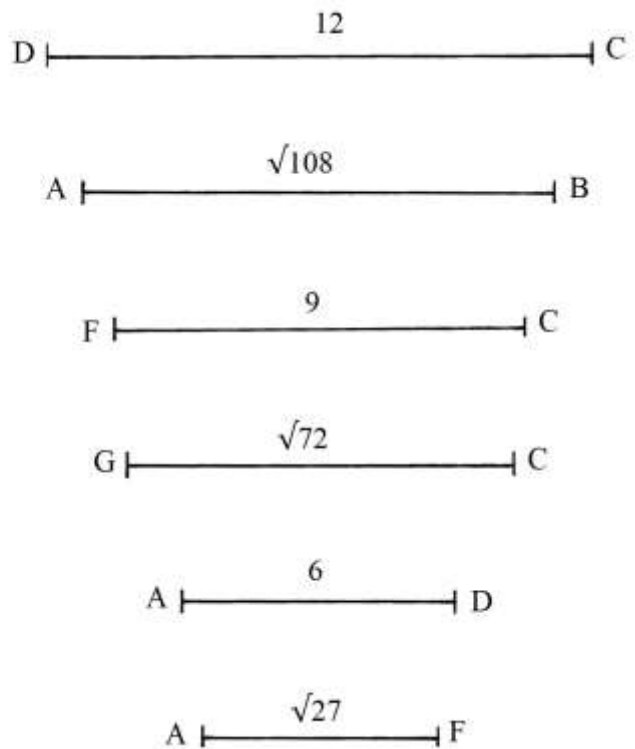
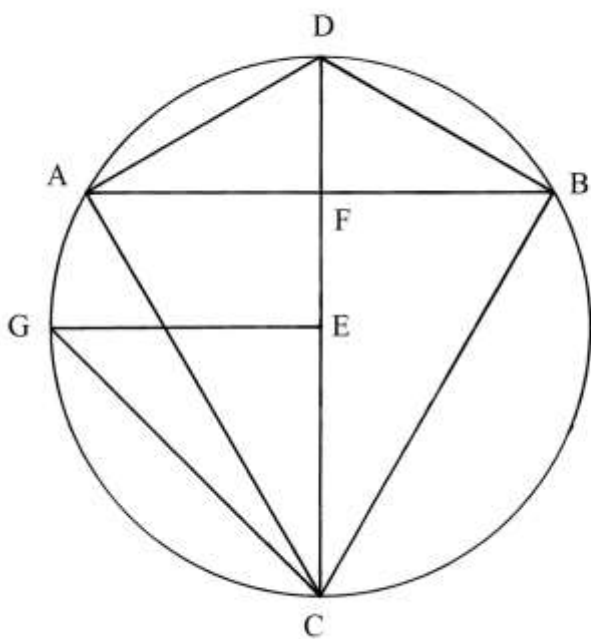
I triangoli adiacenti ai lati CA e CB sono dieci e sono numerati da 1 a 10.

La tabella che segue riporta il numero dei piccoli triangoli equilateri presenti in ciascuna riga orizzontale:

Numero riga	Numero triangoli equilateri
1	1
2	3
3	5
4	7
5	9
6	11
7	13
8	15
9	17
10	19
TOTALE	100

Triangolo equilatero inscritto in un cerchio

Un cerchio ha centro in E e diametro DC lungo 12.



Il testo che l'accompagna non è per nulla chiaro: si ha l'impressione che un Autore (Pomodoro) abbia incluso lo schema nella Tavola senza lasciare alcuna spiegazione e che il secondo Autore (Scala) abbia cercato di interpretare.

GFE è un triangolo equilatero i cui lati sono lunghi $\sqrt{30}$.

FK è un'altezza del triangolo e la sua lunghezza è data da:

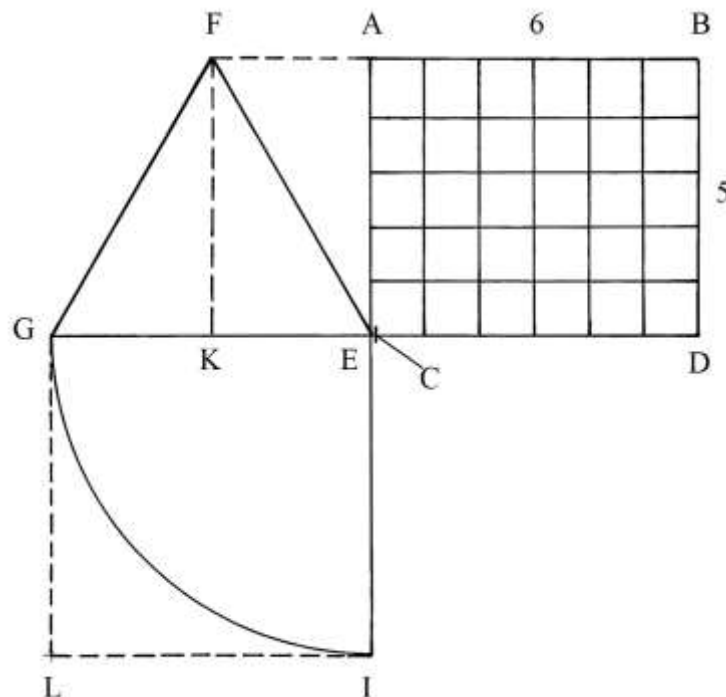
$$FK^2 = \frac{3}{4} * GE^2 = \frac{3}{4} * (\sqrt{30})^2 = \frac{3}{4} * 30 = (22 + \frac{1}{2}) \quad e$$

$$FK = \sqrt{(22 + \frac{1}{2})}.$$

L'area del triangolo GFE è data:

$$S_{GFE} = GE * FK/2 = \sqrt{30} * \sqrt{(22 + \frac{1}{2})}/2 = \sqrt{[30 * (22 + \frac{1}{2})/4]} = \sqrt{(168 + \frac{3}{4})}.$$

Lo schema che segue è un'ipotesi *parziale e non completata* di ricostruzione della soluzione proposta:



Dal vertice F è tracciata verso destra una linea parallela alla base GE e dal punto E è elevata un perpendicolare alla stessa GE: le due linee si incontrano in A.

Il segmento AE è lungo quanto l'altezza FK e viene diviso in *cinque* parti uguali.

Da A in B è riportata per *sei* volte la lunghezza di 1/5 di AE.

ABDE è una griglia formata da $5 * 6 = 30$ quadrati.

GEIL è un quadrato costruito sul lato GE e la sua area è:

$$S_{GEIL} = GE^2 = (\sqrt{30})^2 = 30.$$

Gli Autori hanno forse approssimato a 5/6 il rapporto fra la lunghezza dell'altezza, FK, e quella del lato, GE, di un triangolo equilatero?

Il rapporto fra la lunghezza dell'altezza, h , e quella di un lato, ℓ , di un triangolo equilatero è:

$$h/\ell = (\sqrt{3})/2 \approx (8 + 2/3)/10 \approx 0,866.$$

Il rapporto 5/6 vale:

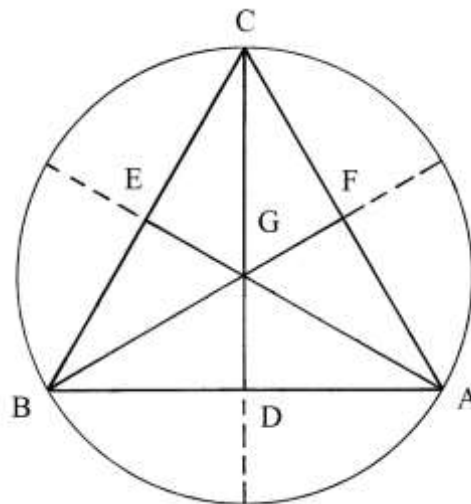
$$5/6 = 0,8333 = (8 + 1/3)/10.$$

Gli Autori hanno cercato di fissare il punto medio GD, C: nella ricostruzione fatta qui sopra, il punto C si trova *a ridosso* di E.

Forse essi hanno tentato di applicare il cosiddetto secondo teorema di Euclide sui triangoli rettangoli per il quale l'altezza è medio proporzionale fra le lunghezze delle proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.

Altezze di un triangolo equilatero

ABC è un triangolo equilatero e AE, BF e CD sono le sue tre altezze.



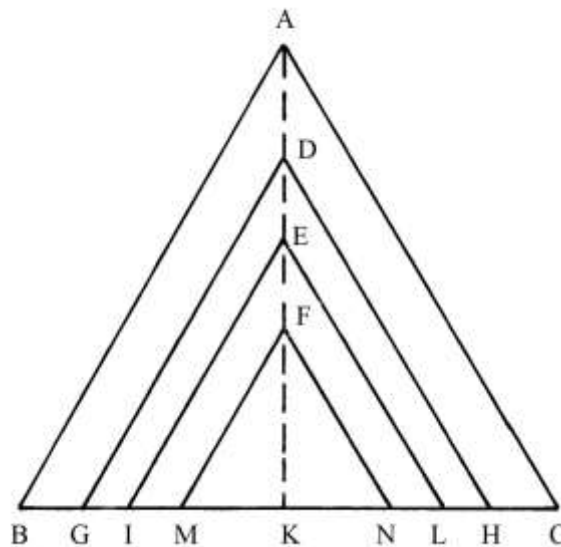
Esse si incontrano nel centro G che è anche il centro del cerchio circoscritto che ha raggio

AG:

$$AG = 2/3 * EG.$$

Quattro triangoli equilateri

Nello schema che segue sono disegnati quattro triangoli equilateri:

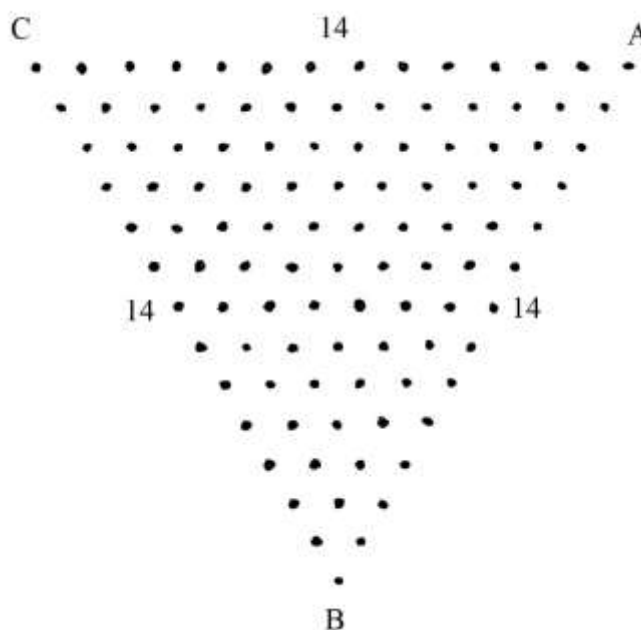


I triangoli hanno il lato orizzontale poggiato su BC, lato del triangolo più grande.
 I lati obliqui sono tutti paralleli a AB e a AC.
 Infine, tutte le altezze giacciono su AK, altezza del triangolo più grande.

Una struttura triangolare

ABC è una struttura triangolare equilatera.

Ciascun lato è diviso da punti sono distanziata di 1 unità e ogni lato del triangolo ABC è definito da 14 punti.



Tracciando le parallele interne ai tre lati sono fissati un certo numero di punti, N.

Il loro numero è così calcolato:

- * sommare 1 a 14: 1 + 14 = 15;
- * dividere 14 per 2: 14/2 = 7;
- * moltiplicare 15 per 7: 15 * 7 = 105 = N.

La procedura è riassunta nella formula che segue, dove $n = 14$:

$$N = (n + 1) * n/2.$$

La formula è nota con il nome del matematico tedesco Carl Gauss (1777-1855).

Lo stesso risultato si ottiene sommando il numero dei punti presenti nelle righe, a partire da un vertice qualsiasi:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 = 105.$$

TAVOLA XVI

La Tavola contiene *quindici* esempi di triangoli rettangoli per i quali devono essere calcolate le aree oppure le lunghezze dei lati.

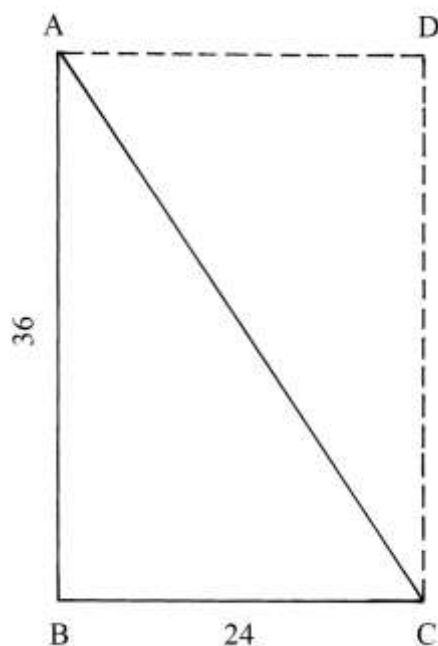
Area di un triangolo rettangolo

ABC è un triangolo rettangolo i cui cateti sono lunghi:

* $AB = 36;$

* $BC = 24.$

Altri successivi problemi conservano queste dimensioni dei cateti.



Il triangolo è ricavato dal rettangolo ABCD tagliato lungo la diagonale AC.

La sua area è:

$$S_{ABC} = AB * BC/2 = 36 * 24/2 = 432.$$

Rettangolo equivalente a un triangolo rettangolo

Il rettangolo ABED ha area uguale a quella del triangolo rettangolo ABC.

Infatti si ha:

$$BE = AD = AC/2 = 24/2 = 12.$$

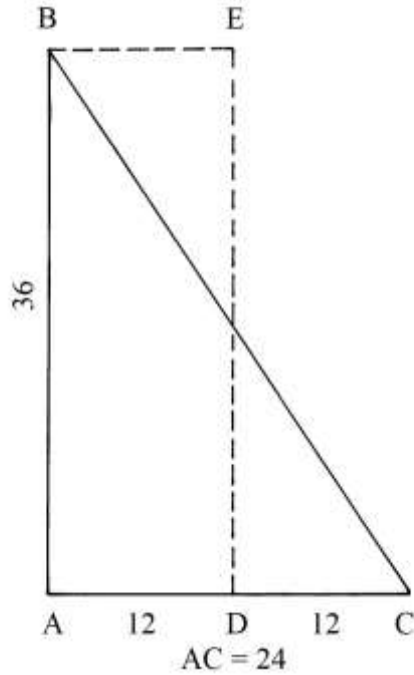
L'area del triangolo è:

$$S_{ABC} = AB * AC/2 = AB * [AD] = 36 * 12 = 432.$$

L'area del rettangolo ABED è:

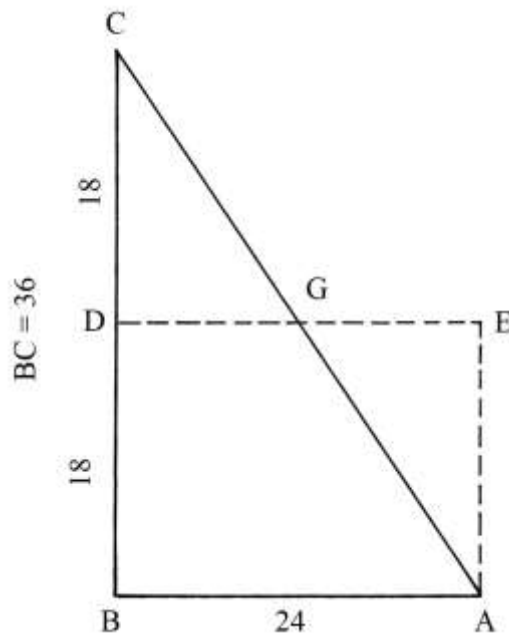
$$S_{ABED} = AB * AD = 36 * 12 = 432.$$

Le aree dei due poligoni, il triangolo rettangolo ABC e il rettangolo ABED, sono uguali: essi sono equivalenti.



Un altro rettangolo equivalente a un triangolo rettangolo

Il solito triangolo rettangolo con cateti lunghi 24 e 36 ha area uguale a quella del rettangolo BDEA.



L'area di ABC è:

$$S_{ABC} = AB * BC/2 = 24 * 36/2 = 24 * 18 = 432.$$

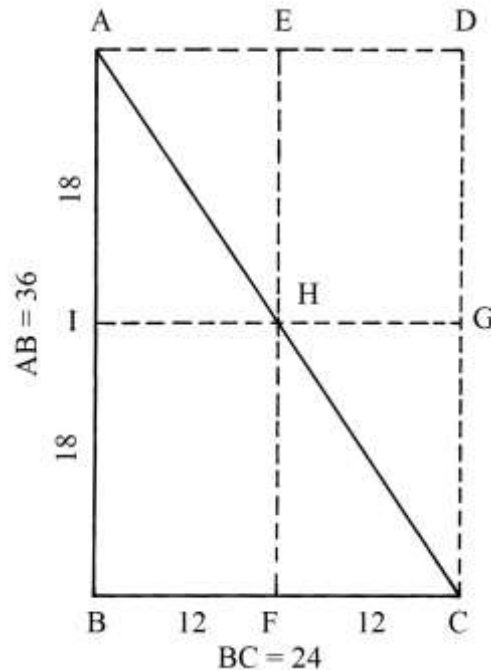
L'area del rettangolo BDEA è:

$$S_{BDEA} = BA * BD = 24 * 18 = 432.$$

AC è l'ipotenusa del triangolo rettangolo ABC e DE è un lato del rettangolo BDEA: i due segmenti si incontrano nel punto G che li taglia entrambi a metà:

- * $AG = GC = AC/2;$
- * $DG = GE = DE/2.$

Rettangolo di area doppia di quella di un triangolo rettangolo
 ABC è il solito triangolo rettangolo con cateti lunghi 24 e 36.



La sua area è 432.

Il triangolo è inscritto in un rettangolo, ABCD, che ha lati lunghi 24 e 36: la sua area è:

$$S_{ABCD} = AB * BC = 36 * 24 = 864, \text{ valore che è il doppio dell'area di ABC.}$$

Nello schema sono tracciate le *mediane* del rettangolo: EF e IG. Esse si intersecano nel baricentro del rettangolo, H, che le divide a metà: H è anche il punto medio dell'ipotenusa AC:

- * $EH = HF = EF/2;$
- * $IH = HG = IG/2;$
- * $AH = HC = AC/2.$

Area di un triangolo rettangolo

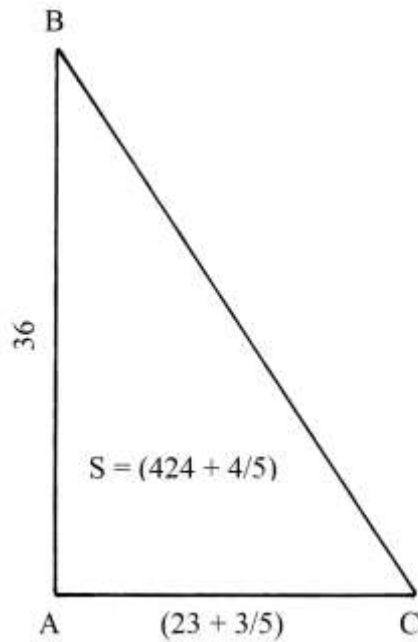
ABC è un triangolo rettangolo con il cateto minore, orizzontale, AC che ha lunghezza espressa da un numero *rotto*:

$$AC = (23 + 3/5).$$

Il cateto maggiore, AB, è verticale ed è lungo 36, come in tutti i precedenti problemi.

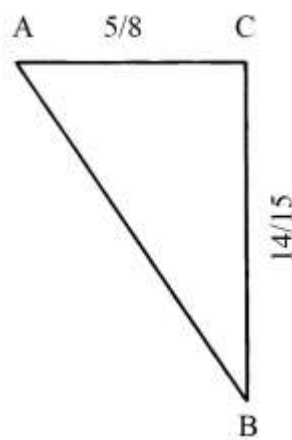
L'area del triangolo è pure essa espressa da un numero *rotto*:

$$S_{ABC} = AB * AC/2 = 36 * (23 + 3/5)/2 = (424 + 4/5).$$



Area di un piccolo triangolo rettangolo

ABC è un triangolo rettangolo con i cateti assai corti e con lunghezze espresse da frazioni.



Il cateto minore, AC, è lungo $5/8$ e quello maggiore, CB, è $14/15$.

L'area del triangolo è:

$$S_{ABC} = AC * CB/2 = (5/8 * 14/15)/2 = 7/24.$$

Nella figura contenuta nel Trattato di Pomodoro l'area è indicata come "49/60".

Area di un triangolo rettangolo

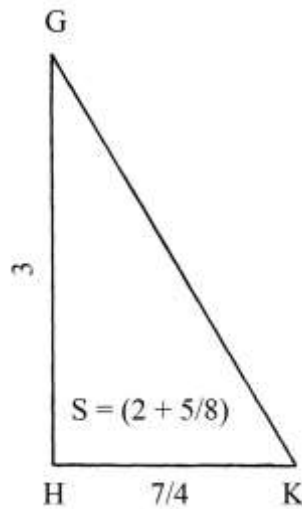
GHK è un triangolo rettangolo con i cateti lunghi:

* GH = 3;

* HK = $7/4$.

La sua area è:

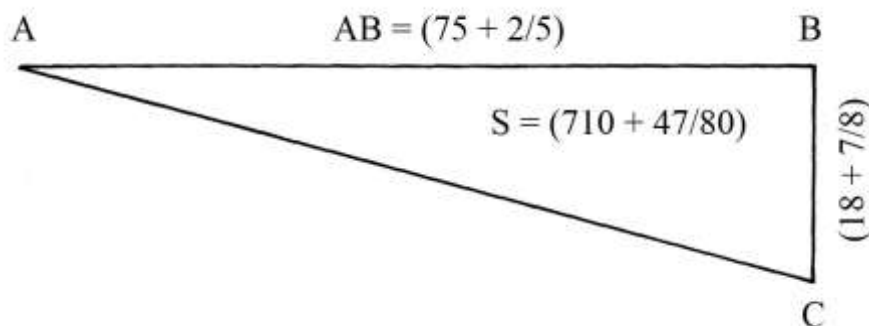
$$S_{GHK} = GH * HK/2 = 3 * (7/4)/2 = (2 + 5/8).$$



Area di un altro triangolo rettangolo

I dati del problema sono poco leggibili sia nel testo che nello schema, almeno per le parti frazionarie.

ABC è un triangolo rettangolo: il cateto maggiore, AB, è orizzontale ed è lungo $(75 + 2/5)$ e quello minore, verticale, BC, è lungo $(18 + 7/8)$, ma la lettura del testo su questo dato non è certa.



L'area del triangolo è:

$$S_{ABC} = AB * BC/2 = (75 + 2/5) * (18 + 7/8)/2 = (710 + 47/80).$$

Area di un piccolo triangolo rettangolo

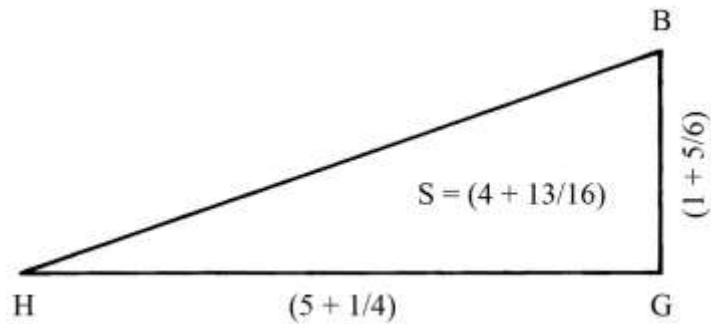
Lo schema originale è poco comprensibile e i dati sono stati ricostruiti.

HBG è un triangolo rettangolo.

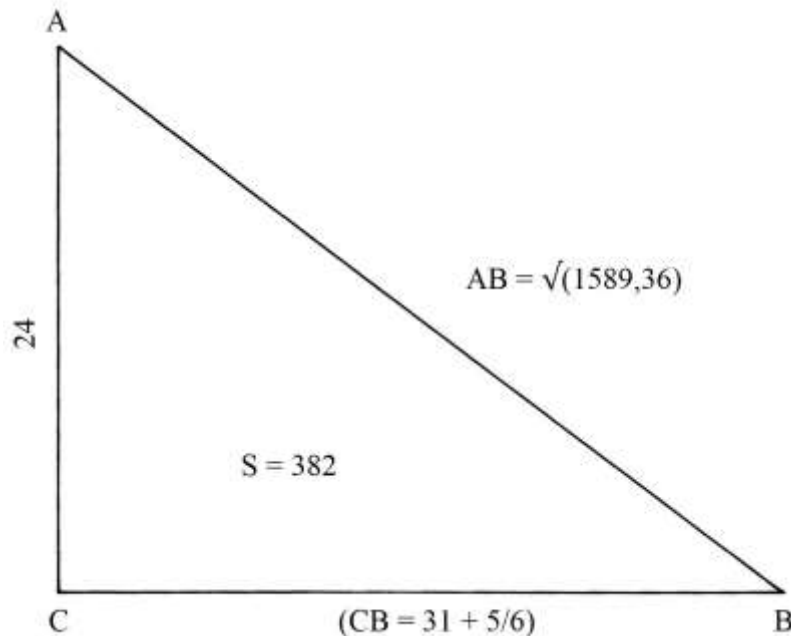
Il cateto maggiore, orizzontale, HG, è lungo $(5 + 1/4)$ e il cateto minore BG è verticale e lungo $(1 + 5/6)$.

L'area del triangolo è:

$$S_{HBG} = HG * BG/2 = (5 + 1/4) * (1 + 5/6)/2 = (4 + 13/16).$$



Area di un triangolo rettangolo e lunghezza dell'ipotenusa
 ABC è un triangolo rettangolo con il cateto minore, AB, verticale e lungo 24.



L'area del triangolo è 382.

Devono essere calcolate le lunghezze del cateto orizzontale CB e dell'ipotenusa AB.

Il cateto CB è lungo:

$$CB = 2 * S_{ABC} / AC = 2 * 382 / 24 = (31 + 5/6).$$

La lunghezza dell'ipotenusa AB è data da:

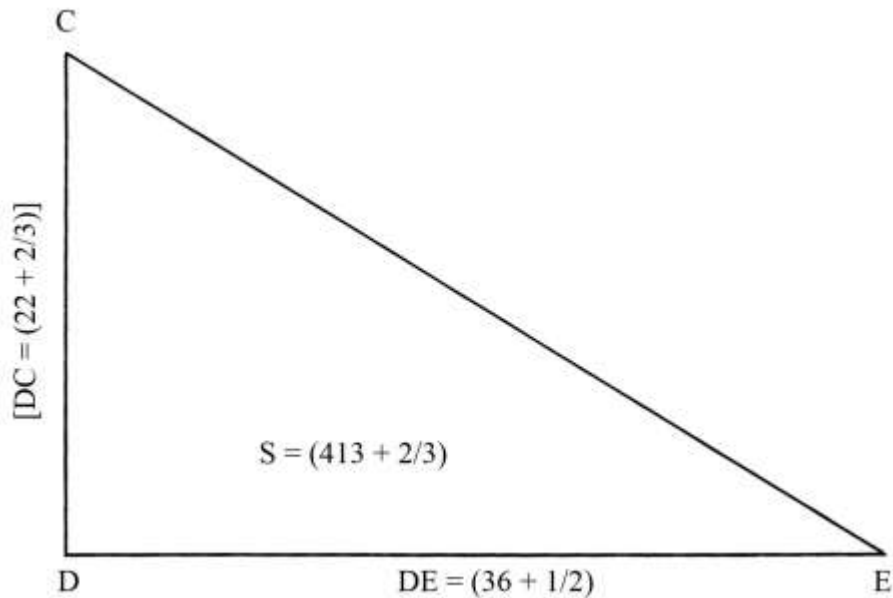
$$AB^2 = AC^2 + CB^2 = 24^2 + (31 + 5/6)^2 = 576 + 1013,36 = 1589,36 \quad e$$

$$AB = \sqrt{1589,36}.$$

Cateto minore di un triangolo rettangolo

Il triangolo rettangolo CDE ha il cateto maggiore, orizzontale, DE lungo $(36 + 1/2)$.

L'area del triangolo è $(412 + 2/3)$.



Deve essere calcolata la lunghezza del cateto minore, CD.

$$CD = 2 * S_{CDE}/DE = 2 * (413 + 2/3)/(36 + 1/2) = (22 + 2/3).$$

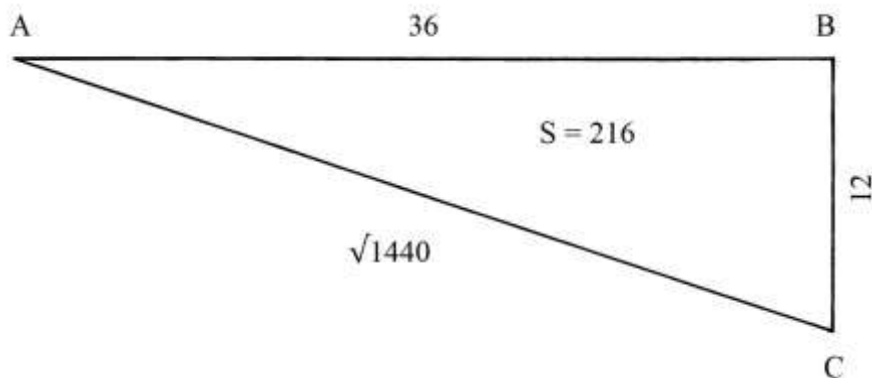
Lunghezze dei cateti di un triangolo rettangolo

Un triangolo rettangolo ha i cateti con lunghezze legate da un rapporto: il prodotto della lunghezza del cateto maggiore per quella del cateto minore, che è *un terzo*, fa 432:

$$AB * BC = 432.$$

Dobbiamo ricavare le due lunghezze.

$$AB * AB/3 = 432.$$



Con l'aiuto dell'algebra elementare risolviamo il problema: x è la lunghezza del cateto maggiore, AB:

* $AB = x$

* ne consegue: $BC = x/3$.

$$AB * BC = x * x/3 = 432$$

$$x^2/3 = 432$$

$$x^2 = 3 * 432$$

$$x^2 = 1296$$

$$x = \sqrt{1296} = 36.$$

La lunghezza di BC è:

$$BC = AB/3 = 36/3 = 12.$$

L'area di ABC è:

$$S_{ABC} = (AB * BC)/2 = (36 * 12)/2 = (432)/2 = 216.$$

L'area è esattamente la metà del prodotto delle lunghezze dei due cateti.

La lunghezza dell'ipotenusa AC è:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 36^2 + 12^2 = 1296 + 144 = 1440 \quad e$$

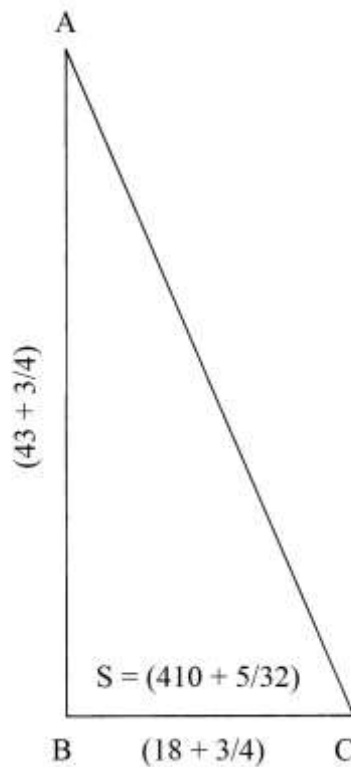
$$AC = \sqrt{1440}.$$

Nel testo non è contenuto alcun calcolo: le lunghezze sono solo scritte sullo schema.

Area di un altro triangolo rettangolo

ABC è un triangolo rettangolo: la somma delle lunghezze dei due cateti è:

$$AB + BC = (62 + \frac{1}{2}).$$



Il cateto maggiore è lungo i $\frac{2}{3}$ della somma e il cateto minore è lungo $\frac{1}{3}$:

* $AB = (62 + \frac{1}{2}) * \frac{2}{3} = (43 + \frac{3}{4});$

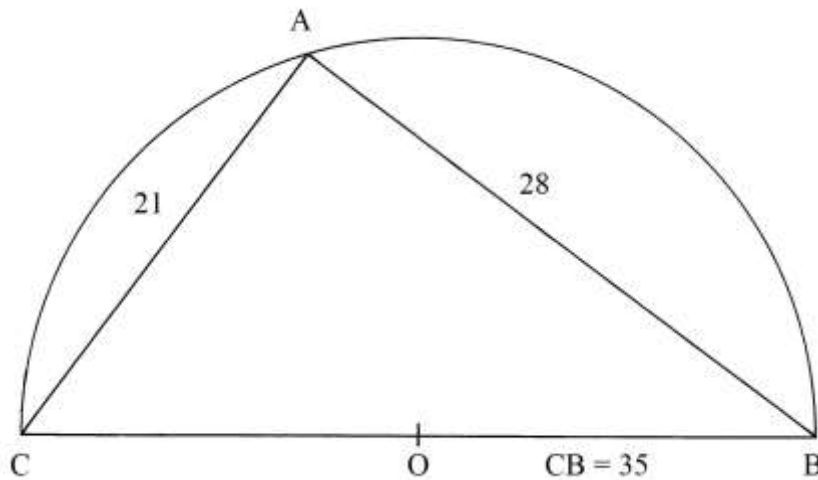
* $BC = (62 + \frac{1}{2}) * \frac{1}{3} = (18 + \frac{3}{4}).$

L'area del triangolo è:

$$S_{ABC} = AB * BC/2 = (43 + \frac{3}{4}) * (18 + \frac{3}{4})/2 = (410 + \frac{5}{32}).$$

Area di un triangolo rettangolo inscritto

ABC è un triangolo rettangolo inscritto in un semicerchio di centro O.



Le lunghezze dei tre lati formano la terna derivata 21-28-35:

$$AC^2 + AB^2 = CB^2$$

$$21^2 + 28^2 = 35^2$$

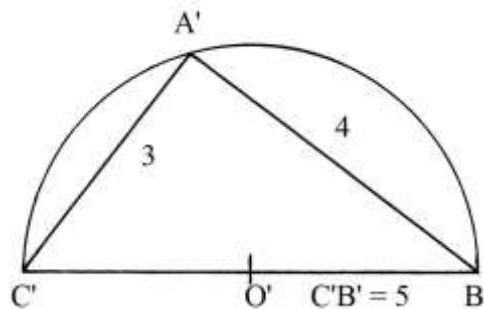
$$441 + 784 = 1225.$$

La radice di 1225 vale 35:

$$\sqrt{1225} = 35.$$

La terna 21-28-35 deriva dalla prima terna primitiva, 3-4-5, i cui componenti sono moltiplicati per 7:

$$3 * 7 - 4 * 7 - 5 * 7 \rightarrow 21-28-35.$$



Lunghezze dei lati di un triangolo rettangolo data la sua area

BCD è un triangolo rettangolo che ha area uguale a 50.

Le lunghezze dei suoi cateti sono in *proporzione sesquialtera* e cioè 4 : 3:

$$BC : DC = 4 : 3.$$

Devono essere ricavate le lunghezze dei cateti e dell'ipotenusa.

Nel Trattato non è contenuta alcuna soluzione: le lunghezze richieste sono solo scritte sullo schema originale.

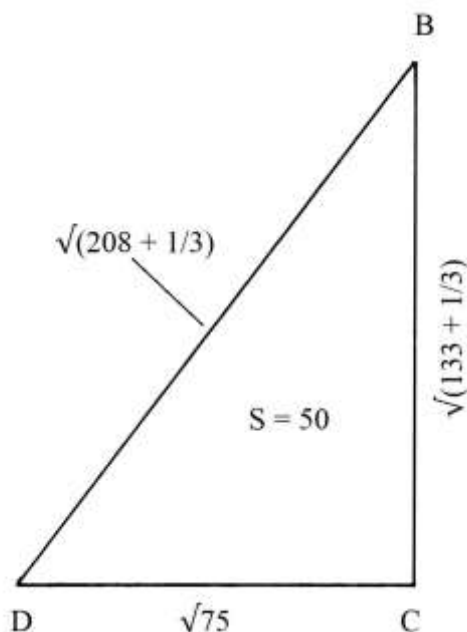
Con l'aiuto dell'algebra calcoliamo le lunghezze dei cateti.

Sia $BC = x$. Ne consegue:

$$DC = \frac{3}{4} * BC = \frac{3}{4} * x.$$

L'area del triangolo è data da:

$$S_{BCD} = BC * DC/2 = (x * \frac{3}{4} * x)/2 = x^2 * \frac{3}{8}.$$



L'area di BCD è nota: è 50. Quindi si ha:

$$x^2 * \frac{3}{8} = 50$$

$$x^2 = 50 * \frac{8}{3}$$

$$x^2 = \frac{400}{3} \quad e$$

$$x = \sqrt{\frac{400}{3}} = \sqrt{133 + \frac{1}{3}} = BC.$$

La lunghezza di DC è:

$$DC = \frac{3}{4} * BC = \frac{3}{4} * \sqrt{133 + \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{9}{16} * \frac{400}{3}} = \sqrt{75}.$$

Verifichiamo la correttezza di questi risultati ricalcolando l'area del triangolo:

$$S_{BCD} = \frac{BC * DC}{2} = \frac{(\sqrt{\frac{400}{3}}) * (\sqrt{75})}{2} = \frac{[\sqrt{(\frac{400}{3} * 75)}]}{2} = \frac{[\sqrt{(400 * 25)}]}{2} = \frac{(\sqrt{10000})}{2} = \frac{100}{2} = 50.$$

La lunghezza dell'ipotenusa BD è:

$$BD^2 = BC^2 + DC^2 = (\sqrt{\frac{400}{3}})^2 + (\sqrt{75})^2 = \frac{400}{3} + 75 = \frac{625}{3} = (208 + \frac{1}{3}) \quad e$$

$$BD = \sqrt{208 + \frac{1}{3}}.$$

TAVOLA XVII

La Tavola contiene *quattordici* esempi di triangoli e quadrilateri. Devono essere calcolate altezze e aree.

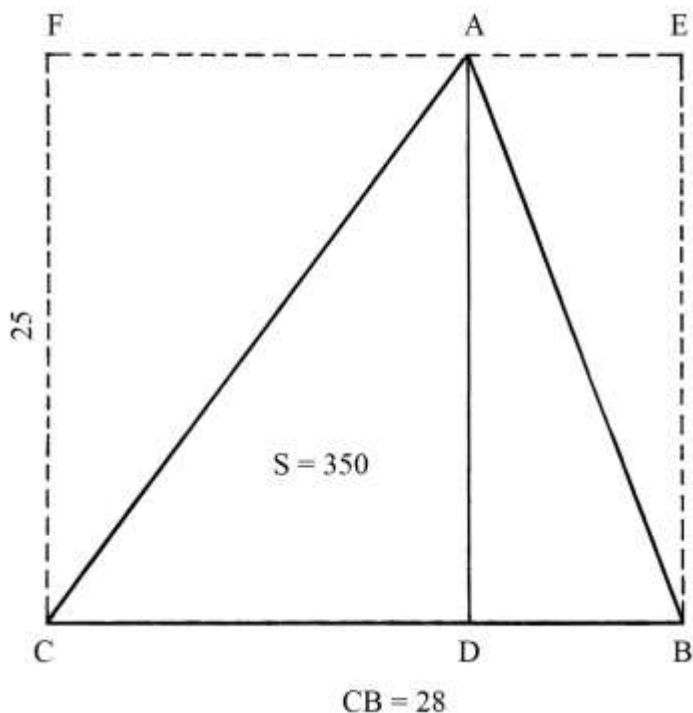
La descrizione dei singoli problemi è quasi sempre molto sintetica e non offre metodi per realizzare le costruzioni contenute nella Tavola.

Sugli schemi sono scritte lunghezze e aree ma nei testi collegati non sono approfonditi i passaggi occorrenti.

Triangolo scaleno inscritto in un rettangolo

ABC è un triangolo scaleno inscritto nel rettangolo BCFE: questo è lungo 28 e largo 25. I due poligoni hanno in comune la base CB.

Il triangolo è chiaramente *scaleno* perché il punto D non è il medio del lato CB: il testo non fornisce alcuna informazione sulla sua posizione sulla base.



L'altezza AD è lunga quanto la larghezza del rettangolo:

$$AD = FC = EB = 25.$$

L'area del triangolo è:

$$S_{ABC} = CB * AD/2 = 28 * 25/2 = 350.$$

L'area del rettangolo BCFE è:

$$S_{BCFE} = CB * FC = 28 * 25 = 700 \quad \text{ed è il doppio dell'area del triangolo ABC.}$$

Rettangolo equivalente a un triangolo scaleno

BCD è un triangolo scaleno che la base DC lunga $(39 + \frac{3}{4})$ e l'altezza BH che è 36.

Il punto K è il medio dell'altezza.

Dai vertici D e C elevare le parallele a BH e per il punto K traccia una linea parallela alla base DC.

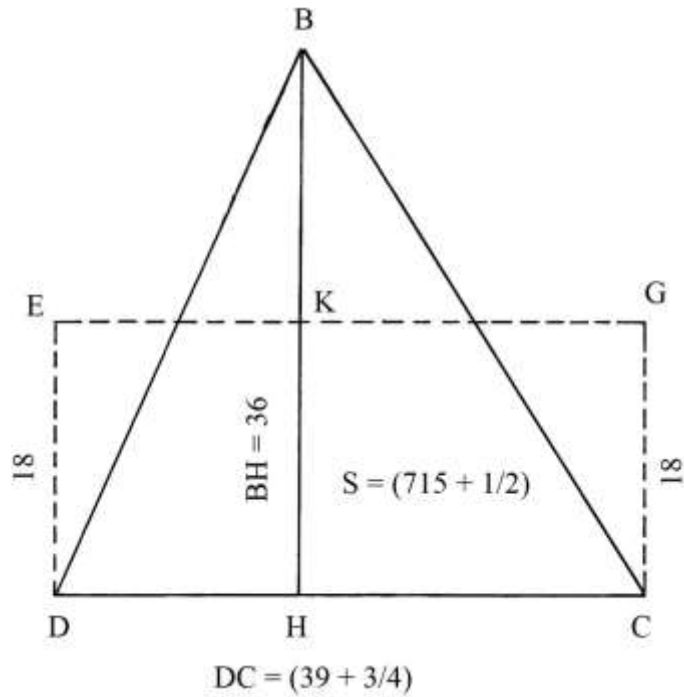
DEGC è un rettangolo che ha area:

$$S_{DEGC} = DC * ED = (39 + \frac{3}{4}) * 18 = (715 + \frac{1}{2}).$$

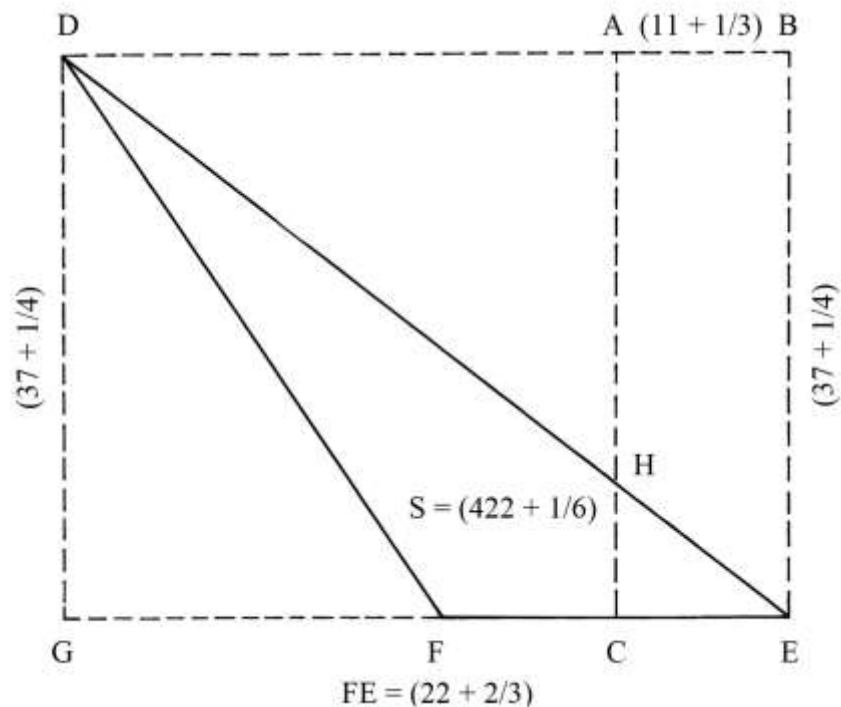
L'area del triangolo BCD è:

$$S_{BCD} = DC * BH/2 = (39 + \frac{3}{4}) * 36/2 = (39 + \frac{3}{4}) * 18 = (715 + \frac{1}{2}).$$

Le aree di DEGC e di BCD sono uguali.



Rettangolo equivalente a un triangolo scaleno ottusangolo
 DEF è un triangolo scaleno con l'angolo in F *ottuso*.



Deve essere costruito un rettangolo equivalente.
 Prolungare verso sinistra il lato FE e da D tracciare una parallela a FE .
 Dal punto D abbassare la perpendicolare DG e da E disegnare la perpendicolare EB .
 Il triangolo DEF è inscritto nel rettangolo $DBEG$.
 DG è l'altezza del triangolo relativa al lato FE ed è lunga $(37 + \frac{1}{4})$.

Determinare il punto medio del lato FE: è C.

Da C innalzare CA, parallela a BC.

Si ha: $FC = CE = FE/2 = (22 + 2/3)/2 = (11 + 1/3)$.

L'area del triangolo DEF è:

$$S_{DEF} = DG * FE/2 = (37 + 1/4) * (22 + 2/3)/2 = (422 + 1/6).$$

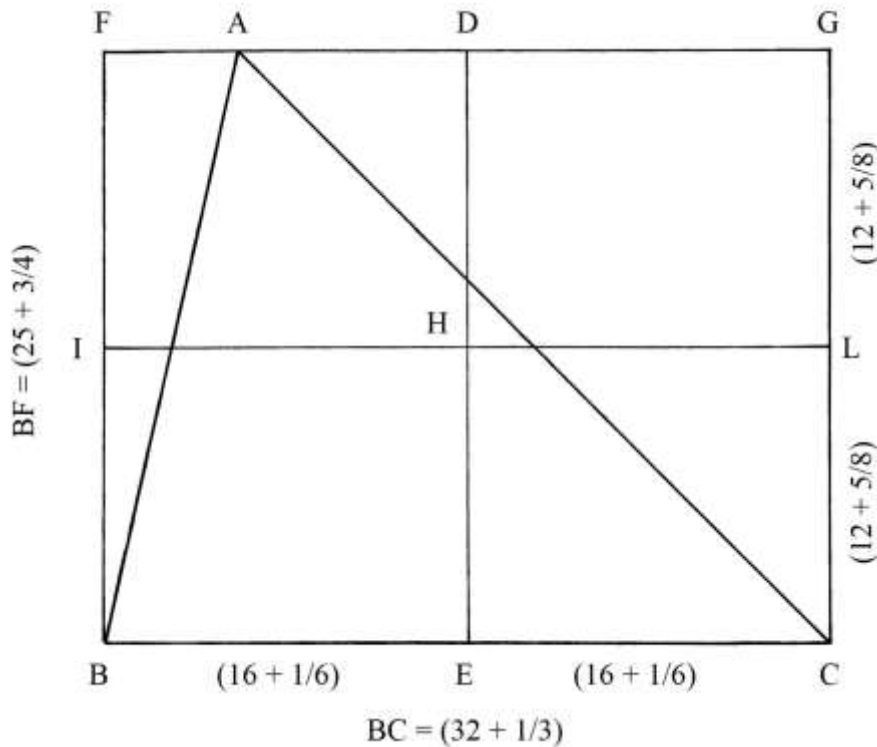
L'area del rettangolo ABEC è:

$$S_{ABEC} = AC * CD = BE * CE = (37 + 1/4) * (11 + 1/3) = (422 + 1/6).$$

La superficie del triangolo DEF è uguale a quella del rettangolo ABEC.

Triangolo inscritto in un rettangolo

Il triangolo scaleno ABC è inscritto nel rettangolo BFGC. I due poligoni condividono la base BC che è lunga $(32 + 1/3)$.



L'altezza del triangolo rispetto alla base BC non è tracciata nello schema: essa è lunga quanto la larghezza del rettangolo e cioè:

$$FB = GC = (25 + 3/4).$$

Sono disegnate le *mediane* del rettangolo, IL e DE, che si intersecano nel baricentro H. Nel testo le due mediane sono chiamate "*diametri*".

L'area del rettangolo BFGC è:

$$S_{BFGC} = BC * FB = (32 + 1/3) * (25 + 3/4) = (832 + 7/12).$$

L'area del triangolo ABC è:

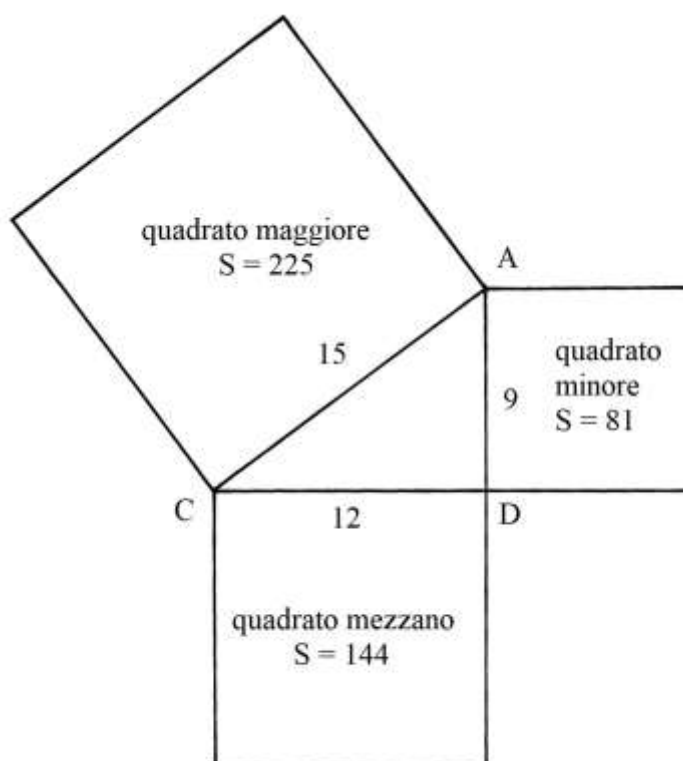
$$S_{ABC} = BC * FB/2 = (32 + 1/3) * (25 + 3/4)/2 = (416 + 7/24).$$

Il triangolo ABC ha area che è la metà di quella del rettangolo BFGC.

Nota: nel testo originale, l'area del triangolo è $(408 + 5/24)$.

Quadrati costruiti sui lati di un triangolo rettangolo

ADC è un triangolo rettangolo con lati lunghi quanto la terna derivata 9-12-15, che proviene dalla primitiva 3-4-5 i cui componenti sono moltiplicati per 3.



I quadrati costruiti sui tre lati hanno aree uguali a:

- * $AD^2 = 9^2 = 81;$
 - * $CD^2 = 12^2 = 144;$
 - * $AC^2 = 15^2 = 225.$
- $AD^2 + CD^2 = AC^2$
 $81 + 144 = 225.$

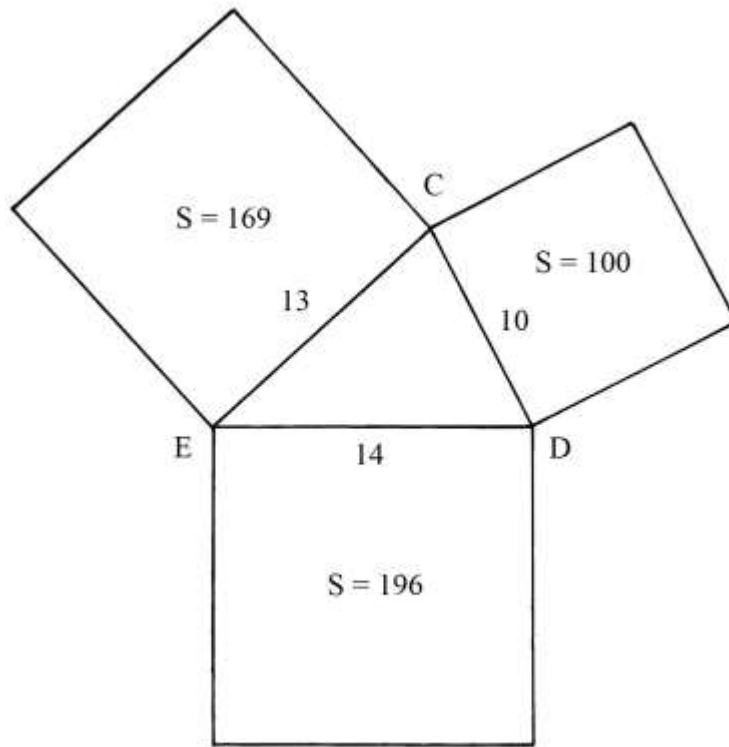
Quadrati costruiti sui lati di un triangolo scaleno

CDE è un triangolo scaleno con i lati lunghi:

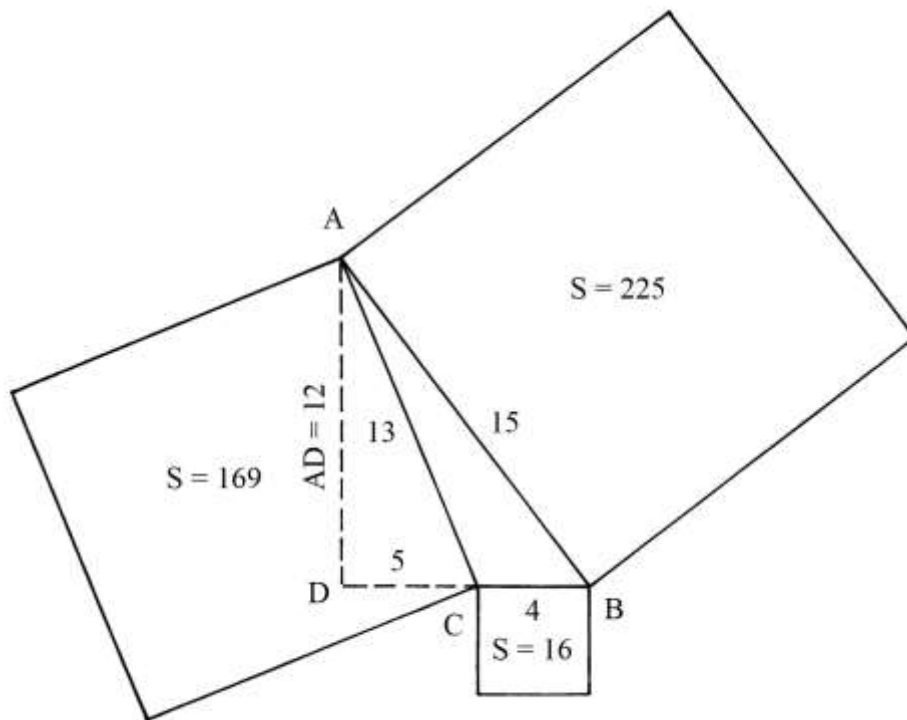
- * $CD = 10;$
- * $CE = 13;$
- * $DE = 14.$

I quadrati costruiti sui tre lati del triangolo hanno aree uguali a:

- * $CD^2 = 10^2 = 100;$
- * $CE^2 = 13^2 = 169;$
- * $DE^2 = 14^2 = 196.$



Quadrati costruiti sui lati di un triangolo ottusangolo
 ABC è un triangolo che possiede nel vertice C un angolo *ottuso*.



Prolungare verso sinistra il lato BC. Dal vertice A abbassare la perpendicolare AD al prolungamento di BC: è AD, lunga 12, che è un'altezza del triangolo ABC (rispetto al lato BC).

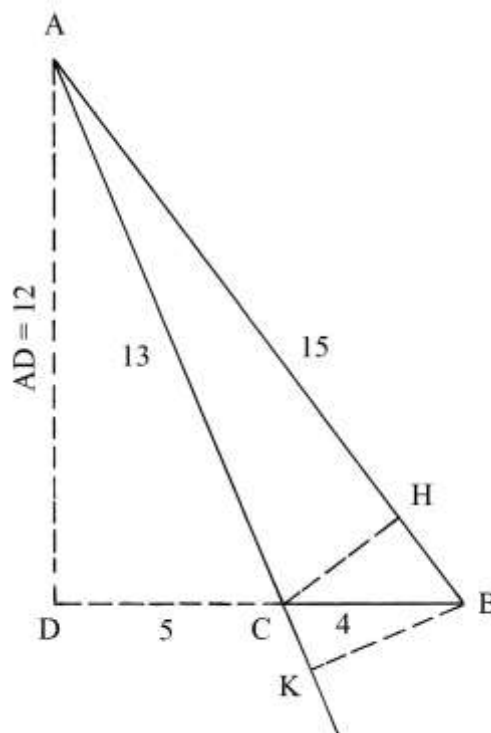
DC è lungo 5.

Sui tre lati di ABC sono costruiti i tre quadrati che hanno aree:

- * $CB^2 = 4^2 = 16$;
- * $AC^2 = 13^2 = 169$;
- * $AB^2 = 15^2 = 225$.

----- APPROFONDIMENTO -----

Consideriamo il triangolo ABC.



AD è un'altezza del triangolo ABC e cade al suo esterno perché ABC è ottusangolo. Anche una seconda altezza, BK, cade all'esterno, sul prolungamento del lato AC.

Solo la terza altezza, CH, cade all'interno del triangolo.

Conoscendo la lunghezza di AD è facile ricavare quella di DC:

$$DC^2 = AC^2 - AD^2 = 13^2 - 12^2 = 169 - 144 = 25 \quad \text{e}$$

$$DC = \sqrt{25} = 5.$$

Il triangolo rettangolo ADB ha lati lunghi:

- * DC = 5;
- * AD = 12;
- * AC = 13.

Queste tre lunghezze formano la terna primitiva 5-12-13.

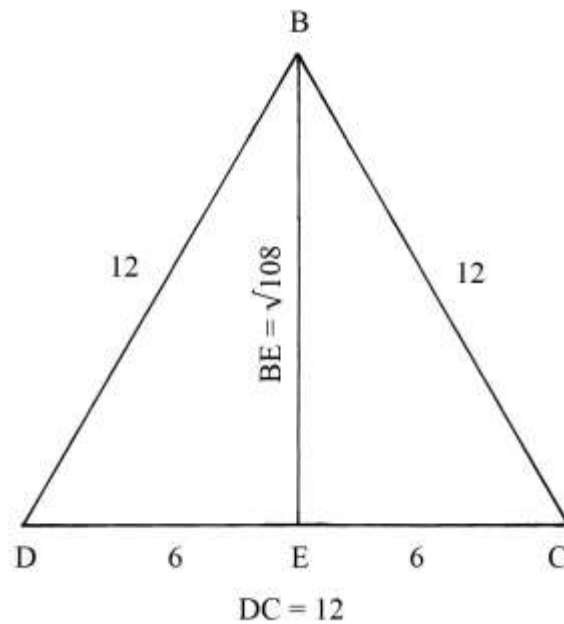
Anche il triangolo ADB è rettangolo e i suoi lati sono lunghi:

- * DB = 9;
- * AD = 12;
- * AB = 15.

È evidente che la terna 9-12-15 deriva dalla primitiva 3-4-5.

Altezza di un triangolo equilatero

BCD è un triangolo equilatero i cui lati sono lunghi 12.
È chiesta la lunghezza dell'altezza BE.



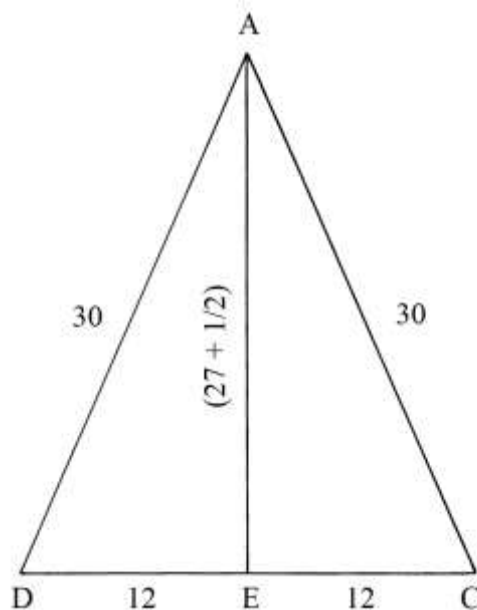
La lunghezza di BE è data da:

$$BE^2 = BD^2 - DE^2 = 12^2 - 6^2 = 144 - 36 = 108 \quad e$$

$$BE = \sqrt{108}.$$

Altezza di un triangolo isoscele

ACD è un triangolo isoscele. I suoi lati obliqui sono lunghi 30 e la base DC è 24.



La lunghezza di AE è data da:

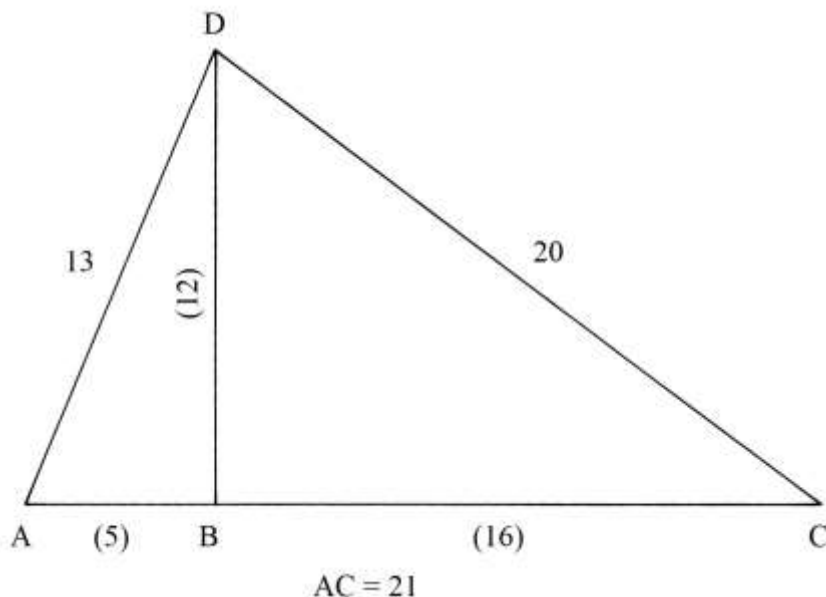
$$AE^2 = AD^2 - DE^2 = 30^2 - 12^2 = 900 - 144 = 756 \quad e$$

$$AE = \sqrt{756} \approx (27 + \frac{1}{2}).$$

Area di un triangolo scaleno

ADC è un triangolo scaleno di cui sono note le lunghezze dei lati:

- * AD = 13;
- * DC = 20;
- * AC = 21.



Deve essere calcolata l'area del triangolo: è ignota la lunghezza dell'altezza che nel testo è stimata essere 12.

----- APPROFONDIMENTO -----

Ricaviamo la lunghezza di DB impiegando l'algebra elementare.

DB divide il triangolo ADC in due triangoli rettangoli che hanno in comune il cateto DB: ADB e DBC.

Indichiamo con x la lunghezza di AB.

BC è lungo:

$$BC = AC - AB = (21 - x).$$

La lunghezza di DB nel triangolo ADB è data da:

$$DB^2 = AD^2 - AB^2 = 13^2 - x^2 = 169 - x^2.$$

La lunghezza di DB nel triangolo DBC è data da:

$$\begin{aligned} DB^2 &= DC^2 - BC^2 = 20^2 - (21 - x)^2 = 400 - (441 - 42 * x + x^2) = \\ &= 400 - 441 + 42 * x - x^2 = 42 * x - 41 - x^2. \end{aligned}$$

Le due espressioni di DB^2 sono equivalenti per cui si ha:

$$169 - x^2 = 42 * x - 41 - x^2$$

$$169 + 41 = 42 * x$$

$$210 = 42 * x$$

$$x = 210/42 = = AB.$$

La lunghezza di BC è:

$$BC = AC - AB = 21 - 5 = 16.$$

La lunghezza di DB è:

$$DB^2 = AD^2 - AB^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144 \quad e$$

$$DB = \sqrt{144} = 12.$$

Il risultato coincide con quello ipotizzato nel Trattato.

L'area del triangolo ADC è:

$$S_{ADC} = DB * AC/2 = 12 * 21/2 = 126.$$

Le lunghezze dei lati dei due triangoli rettangoli creati dall'altezza DB sono:

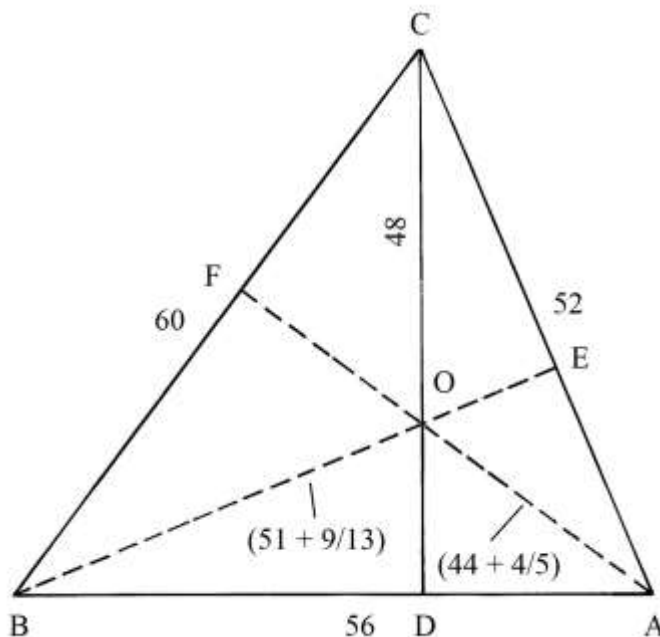
* triangolo ADB: $AB = 5$ $BD = 12$ $AD = 13$: esse formano una terna primitiva;

* triangolo DBC: $DB = 12$ $BC = 16$ $DC = 20$.

12-16-20 è una terna derivata dalla primitiva 3-4-5.

Altezze di un triangolo scaleno

Il problema è basato sul triangolo 13-14-15: le lunghezze dei lati di ABC sono ottenute moltiplicando per 4 i membri di quella terna e formano la derivata 52-56-60.



Nel testo non è fatto alcun cenno all'origine di questo triangolo: lo studio del triangolo 13-14-15 fu approfondito fra i primi geometri – almeno stando ai testi – da Erone di Alessandria (I secolo d.C.).

Il triangolo 13-14-15 fu utilizzato e studiato da:

- Erone;
- Varrone (Marco Terenzio Varrone, 116-27 a.C.);
- i Grammatici *Marcus Iunius Nipsus* (II secolo d.C.) e Epafrodito (II – III secolo);
- Boezio (475-526);
- forse Gerberto di Aurillac (Papa Silvestro II, 940 circa – 1003);
- Leonardo Fibonacci (1170 circa – dopo il 1242), nella *Practica Geometrie*;
- Piero della Francesca (1412? – 1492), nel *Trattato d'abaco* (fogli 80 recto, 80 verso, 81 recto-a, 81 verso, 82 recto);
- Giorgio Valla (1447 – 1500) nel “*De expetendis et fugiendis rebus opus*”, pubblicato a Venezia nel 1501;

- Giovanni Sfortunati (1485 - ?) nel “*Nuovo Lume*”, nuovamente pubblicato a Venezia nel 1561;
- Niccolò Fontana, detto Tartaglia (circa 1499 – 1557);
- Lorenzo Forestani (1585 – 1623), nella sua “*Pratica d’Arithmetica e Geometria*” stampata a Siena nel 1682.

Pomodoro e Scala devono aver attinto a questa tradizione, peraltro senza citare alcun Autore.

Le tre altezze di ABC si incontrano in un punto interno al triangolo, O, che è l’*ortocentro*.

Il triangolo 13-14-15 possiede un’interessante proprietà geometrica: le lunghezze dei lati e di un’altezza (CD) e l’area sono espresse da *numeri interi*.

Pomodoro e Scala si sono limitati a scrivere le lunghezze delle tre altezze sulla figura, ma non spiegano il metodo usato per ricavarle.

È probabile che essi abbiano calcolato l’area del triangolo con la formula di Erone e da questa ottenere le lunghezze delle altezze.

Il perimetro $2 * p$ del triangolo è:

$$2 * p = CA + AB + BC = 52 + 56 + 60 = 168.$$

Il semiperimetro p è:

$$p = 2 * p/2 = 168/2 = 84.$$

La formula di Erone per calcolare l’area S di ABC è:

$$\begin{aligned} S_{ABC} &= \sqrt{[p * (p - CA) * (p - BA) * (p - BC)]} = \\ &= \sqrt{[84 * (84 - 52) * (84 - 56) * (84 - 60)]} = \sqrt{(84 * 32 * 28 * 24)} = \sqrt{1806336} = \\ &= 1344. \end{aligned}$$

L’altezza CD è lunga:

$$CD = 2 * S_{ABC}/BA = 2 * 1344/56 = 48.$$

L’altezza BE è:

$$BE = 2 * S_{ABC}/CA = 2 * 1344/52 = (51 + 9/13).$$

Infine, l’altezza AF è lunga:

$$AF = 2 * S_{ABC}/BC = 2 * 1344/60 = (44 + 4/5).$$

Nel triangolo 13-14-15, l’area è 84 e l’altezza relativa al lato lungo 14 è 12.

Altezza di un triangolo scaleno

ABC è un triangolo scaleno: sullo schema originale sono riportate solo le lunghezze dei lati.

AD è l’altezza relativa al lato CB.

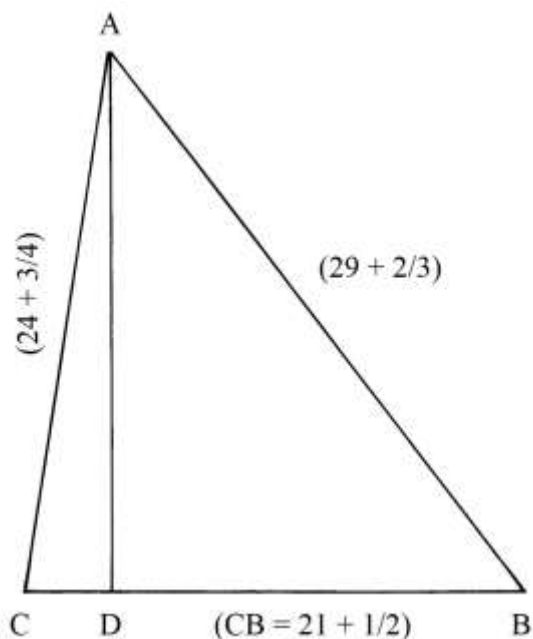
Il testo afferma che la lunghezza di AD può essere ricavata “*per via di numeri*”, ma non presenta metodi e risultati numerici.

Applicando la formula di Erone si ottiene l’area del triangolo, che con buona approssimazione, è:

$$S_{ABC} \approx 261,66.$$

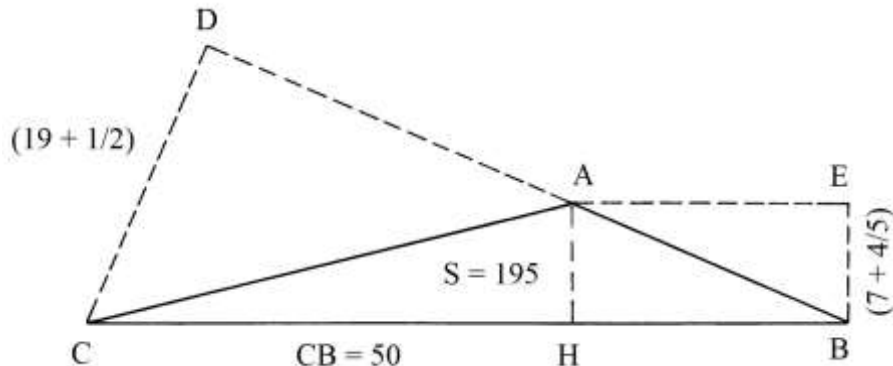
L’altezza AD è:

$$AD = 2 * S_{ABC}/CB = 2 * 261,66/(21 + 1/2) \approx 24,34.$$



Area di un triangolo scaleno

Deve essere calcolata l'area del triangolo scaleno ABC di cui è possibile misurare direttamente solo la lunghezza di un lato, CB, che è 50.



Dal vertice A tracciare verso destra la parallela a CB e dal vertice B elevare la perpendicolare a CB stesso: le due linee si incontrano in E.

EB è parallela all'altezza AH ed è misurata la sua lunghezza:

$$EB = (7 + 4/5) = AH.$$

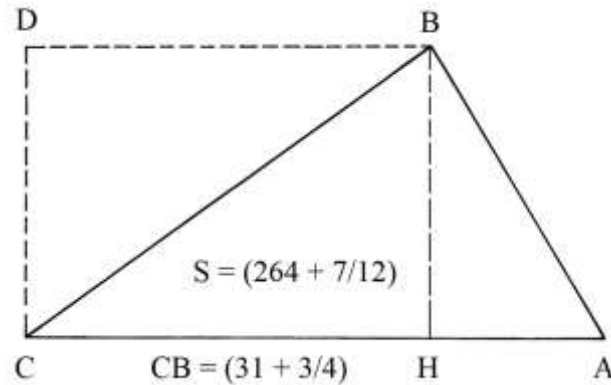
L'area di ABC è:

$$S_{ABC} = CB * EB/2 = 50 * (7 + 4/5)/2 = 195.$$

Lo schema accenna a una seconda soluzione: prolungare verso sinistra il lato AB e dal vertice C tracciare la perpendicolare al prolungamento: è CD che è misurata $(19 + 1/2)$. Ma il suggerimento si ferma qui.

Area di un triangolo scaleno

ABC è un triangolo scaleno di cui è nota solo la lunghezza della base CA che è $(31 + \frac{3}{4})$.



Dal vertice C elevare la perpendicolare a CA e da B tracciare verso sinistra la parallela a CA: le due linee si incontrano in D e DC è lunga quanto l'altezza BH:

$$DC = (16 + \frac{2}{3}) = BH.$$

L'area del triangolo ABC è data da:

$$S_{ABC} = CA * DC/2 = (31 + \frac{3}{4}) * (16 + \frac{2}{3})/2 = (264 + \frac{7}{12}).$$

TAVOLA XVIII

La Tavola contiene *dodici* problemi sui triangoli e su superfici curve delimitate da archi di circonferenza.

Altezza di un triangolo scaleno

Il triangolo ABC ha lati lunghi:

- * AB = 26;
- * BC = 28;
- * AC = 30.

Le lunghezze dei lati sono multiple di una costante 2 della terna 13-14-15.

Oltre alle lunghezze dei lati, il testo propone quella dell'altezza AD, misurata uguale a 24.

La lunghezza della proiezione di AB sulla base BC, che è BD, viene calcolata applicando una formula dovuta a Erone di Alessandria (non citato):

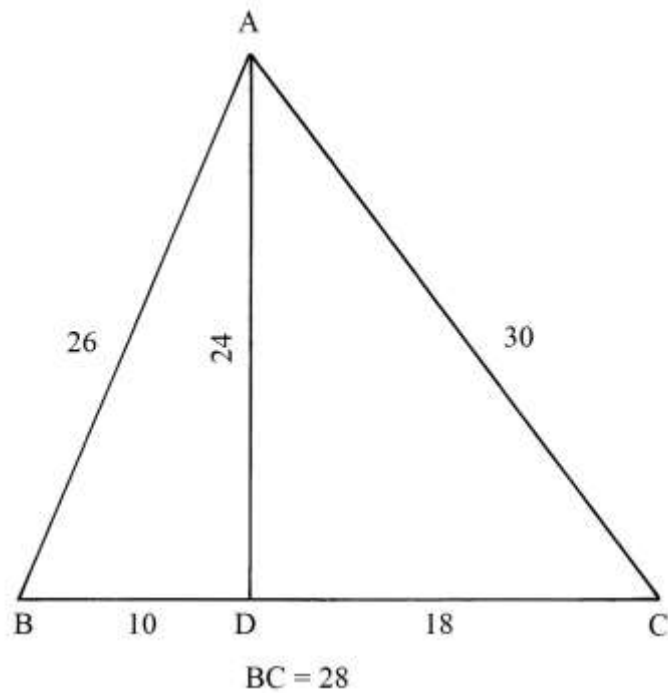
$$BD = (AB^2 + BC^2 - AC^2)/(2 * BC) = (26^2 + 28^2 - 30^2)/(2 * 28) = (676 + 784 - 900)/56 = 560/56 = 10.$$

L'altezza AD ha lunghezza che è data da:

$$AD^2 = AB^2 - BD^2 = 26^2 - 10^2 = 676 - 100 = 576 \quad e$$
$$AD = \sqrt{576} = 24, \text{ dato che conferma quello fornito nel testo.}$$

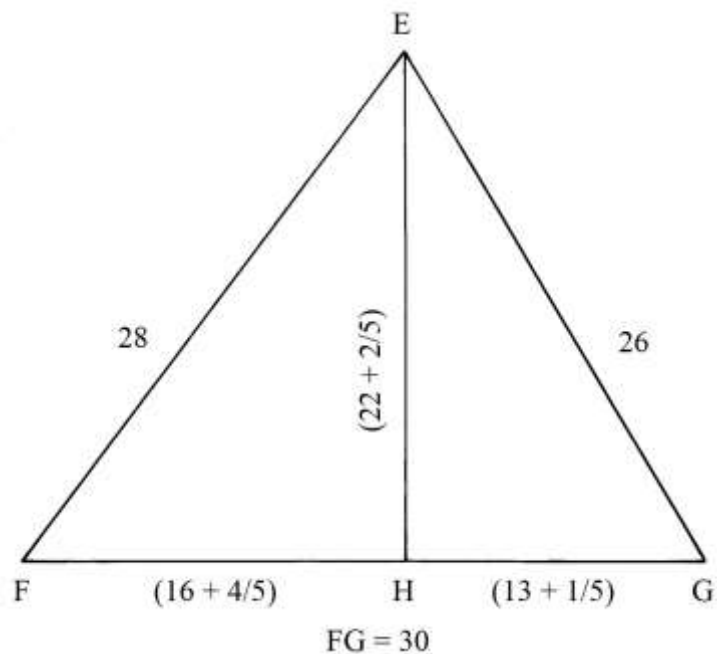
L'area del triangolo è:

$$S_{ABC} = BC * AD/2 = 28 * 24/2 = 336.$$



Altezza e area di un triangolo scaleno

I lati del triangolo EFG hanno le stesse dimensioni di quelli del triangolo del precedente problema: la differenza sta nelle loro diverse posizioni: infatti la base FG è lunga 30.



La lunghezza della proiezione FH è data da:

$$FH = (EF^2 + FG^2 - EG^2) / (2 * FG) = (28^2 + 30^2 - 26^2) / (2 * 30) = (784 + 900 - 676) / 60 = 1008 / 60 = (16 + 4/5).$$

La lunghezza di HG è:

$$HG = FG - FH = 30 - (16 + 4/5) = (13 + 1/5).$$

L'altezza EH è data da:

$$EH^2 = EF^2 - FH^2 = 28^2 - (16 + 4/5)^2 = 784 - 282,24 = 501,76 \quad e$$

$$EH = \sqrt{(501,76)} = (22 + 2/5).$$

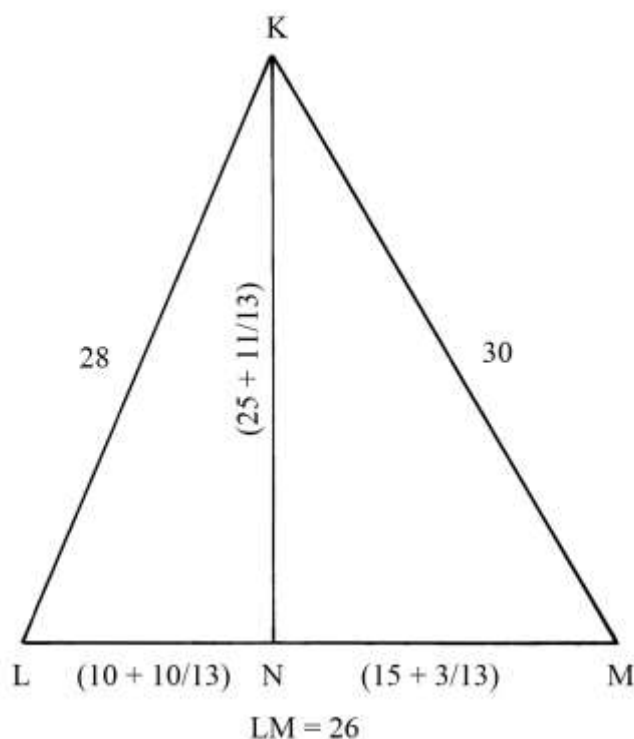
Un'altra soluzione – non contenuta nel Trattato – per ricavare la lunghezza di EH è semplice: dato che questo triangolo ha le stesse dimensioni del triangolo del problema precedente, anche l'area è uguale ed è 336.

L'altezza EH è data da:

$$EH = 2 * S_{EFG}/FG = 2 * 336/30 = (22 + 2/5).$$

Altezza di un altro triangolo

Il triangolo LKM ha le stesse dimensioni dei triangoli scaleni dei due precedenti problemi: questo triangolo ha la base LM lunga 26.



La lunghezza della proiezione LN è data da:

$$LN = (KL^2 + LM^2 - KM^2)/(2 * LM) = (28^2 + 26^2 - 30^2)/(2 * 26) = (784 + 676 - 900)/52 = 560/52 = (10 + 10/13).$$

L'altezza KN è data da:

$$KN^2 = KL^2 - LN^2 = 28^2 - (10 + 10/13)^2 \approx 668,5 \quad e$$

$$KN = \sqrt{668,5} = (25 + 11/13).$$

Ricorrendo all'aiuto dell'area, come proposto nella soluzione del precedente problema, si ha lo stesso risultato e in maniera più semplice, perché eliminata la presenza della radice quadrata:

$$KN = 2 * S_{KLM}/LM = 2 * 336/26 = (25 + 11/13).$$

Altezze di un triangolo rettangolo

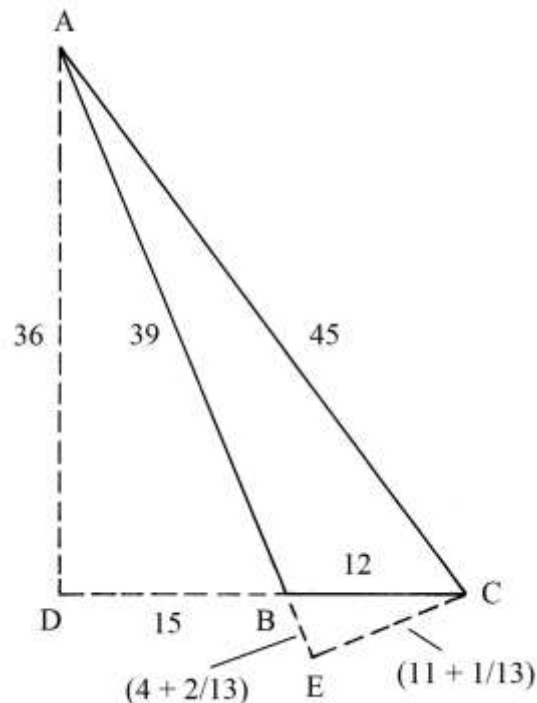
La costruzione riproduce il *settimo* problema della precedente Tavola XVII, con lunghezze modificate: questo triangolo ha dimensioni moltiplicate per 3.

Nessuna spiegazione è fornita riguardo alla determinazione delle lunghezze di BE e di EC.

BEC è un triangolo rettangolo.

Presentiamo una proposta di soluzione.

Prolungare verso il basso il lato AB e dal vertice C tracciare la perpendicolare CE: questo segmento è l'altezza relativa al lato AC, che cade fuori dal triangolo ABC.



L'area del triangolo ABC è:

$$S_{ABC} = AD * BC/2 = 36 * 12/2 = 216.$$

La lunghezza di CE è data da:

$$CE = 2 * S_{ABC}/AC = 2 * 216/45 = (11 + 1/13).$$

BC è l'ipotenusa del triangolo rettangolo BCE e CE e BE sono i due cateti.

Le lunghezze di EC e di BE sono riprese dallo schema originale e non sono state verificate.

Altezza di un triangolo scaleno

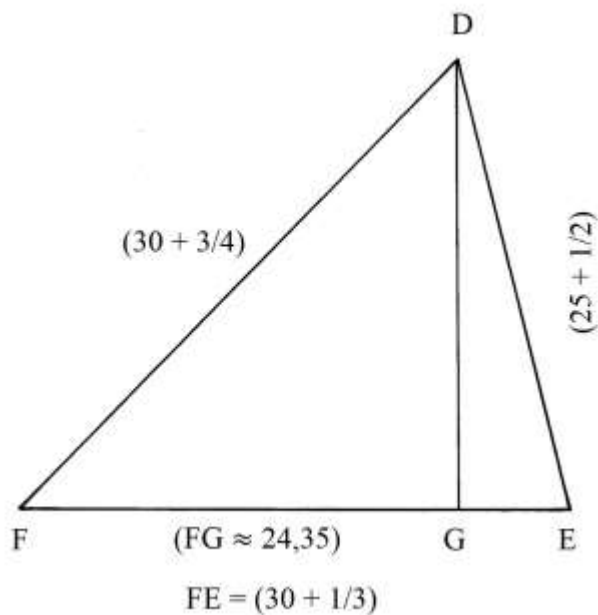
DEF è un triangolo scaleno. Deve essere calcolata la lunghezza della proiezione FG.

Essa viene ricavata con la formula già incontrata:

$$FG = (DF^2 + FE^2 - DE^2)/(2 * FE) = (34,75^2 + 30,33^2 - 25,5^2)/(2 * 30,33) =$$

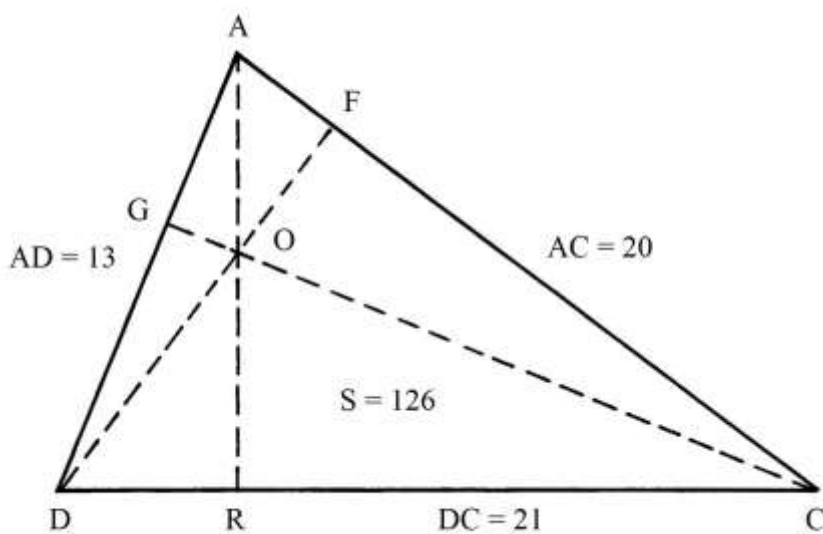
$$= (1207,5625 + 919,91 - 650,25)/60,66 \approx 24,35.$$

I calcoli sono stati semplificati per la presenza di numeri misti.



Altezze di un triangolo scaleno

ACD è un triangolo scaleno di cui sono note le lunghezze dei lati e l'area.
Sono richieste le lunghezze delle tre altezze che si intersecano nell'ortocentro O.



L'area del triangolo 126.

Possiamo ricavare le tre altezze conoscendo l'area e le lunghezze dei tre lati:

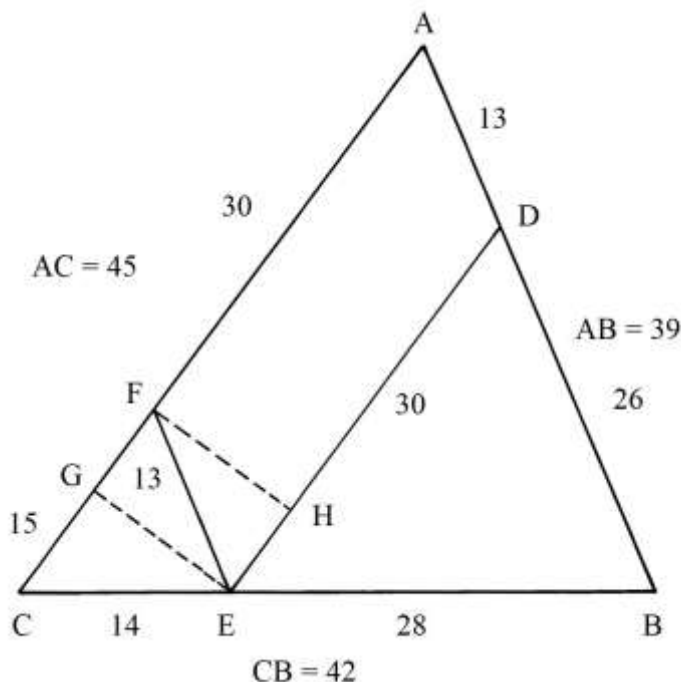
- * $AE = 2 * S_{ACD}/DC = 2 * 126/21 = 12;$
- * $DF = 2 * S_{ACD}/AC = 2 * 126/20 = (12 + 3/5);$
- * $CG = 2 * S_{ACD}/AD = 2 * 126/13 = (19 + 5/13).$

Aree di più poligoni

ABC è un triangolo scaleno che ha i lati lunghi:

- * AB = 39 [3 * 13];
- * CB = 42 [= 3 * 14];
- * AC = 45 [= 3 * 15].

Le lunghezze sono multiple della terna 13-14-15 che è disegnata nel triangolo FEC.



Il testo che descrive lo schema segnala solo la presenza del parallelogramma AFED e del trapezio ACED ma non fornisce alcuna informazione riguardo al calcolo delle aree, tranne la citazione di quello impiegato per il triangolo: la sua area è data dal prodotto della lunghezza di un lato per quella dell'altezza relativa, il tutto diviso per *due*.

Sullo schema sono scritte solo le lunghezze.

----- APPROFONDIMENTO -----

EG è un'altezza del triangolo CEF. Sappiamo dalla soluzione di un problema contenuto nella precedente Tavola che l'area di un triangolo 13-14-15 è 84:

$$S_{CEF} = 84.$$

L'altezza EG è lunga:

$$EG = 2 * S_{CEF} / CF = 2 * 84 / 15 = 5,6.$$

I triangoli CEF, DBE e ABC sono *simili*: le lunghezze dei loro lati stanno in proporzione:

$$CE : EB : CB = 14 : 28 : 42 = 1 : 2 : 3$$

Le loro sono in proporzione elevata al quadrato:

$$S_{CEF} : S_{DBE} : S_{ABC} = 14^2 : 28^2 : 42^2 = 1^2 : 2^2 : 3^2 = 1 : 4 : 9.$$

FH è un'altezza del parallelogramma AFED ed è lunga quanto EG:

$$FH = EG = 5,6.$$

L'area del parallelogramma AFED è:

$$S_{AFED} = AF * FH = 30 * 5,6 = 168.$$

L'area del trapezio ACED è:

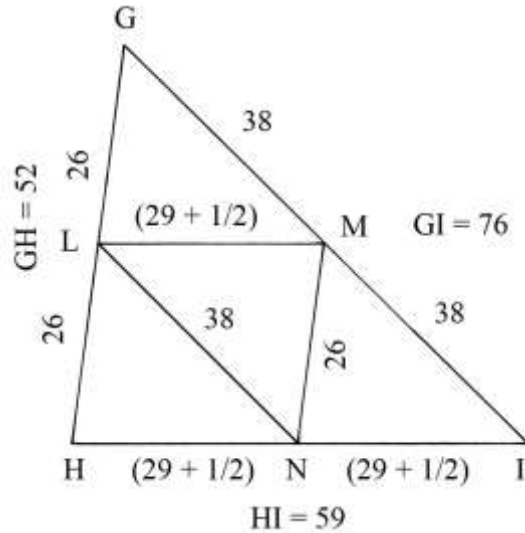
$$S_{ACED} = [(AC + DE)/2] * FH = [(45 + 30)/2] * 5,6 = (75/2) * 5,6 = 210.$$

L'area del triangolo DBE è:

$S_{DBE} = 4 * S_{CEF} = 4 * 84 = 336.$
 Infine, l'area del triangolo ABC è:
 $S_{ABC} = 9 * S_{CEF} = 9 * 84 = 736.$

Triangolo scaleno diviso in quattro triangoli uguali

GHI è un triangolo scaleno.

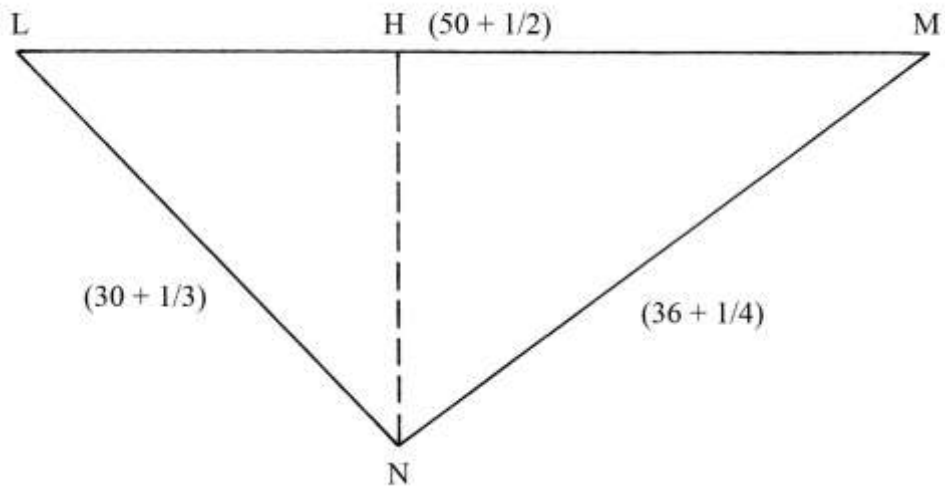


Determinare i punti medi dei tre lati: sono L, M e N.

Tracciare i segmenti LN, LM e MN: essi dividono il triangolo GHI in quattro triangoli di uguali dimensioni e *simili* a GHI; ciascun triangolo ha area che *un quarto* di quella di GHI.

Area di un triangolo ottusangolo

LMN è un triangolo ottusangolo con il lato di base LM disposto in alto.



L'area è data dal prodotto dell'altezza NH per metà della lunghezza di LM.

Nel testo non è fornita la lunghezza dell'altezza: se desideriamo conoscerla occorre ricavarla dall'area.

L'area di LMN va calcolata con la formula di Erone:

* perimetro $2 * p = LM + LN + NM = (50 + \frac{1}{2}) + (30 + \frac{1}{3}) + (36 + \frac{1}{4}) = (117 + \frac{1}{12})$;

* semiperimetro: $p = (117 + \frac{1}{2})/2 \approx 58,5$.

L'area è:

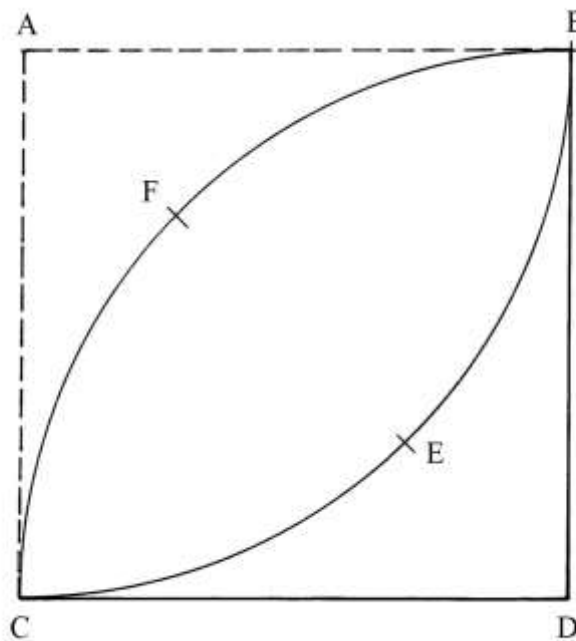
$$\begin{aligned} S_{LMN} &= \sqrt{[p * (p - LM) * (p - LN) * (p - NM)]} = \\ &= \sqrt{[58,5 * (58,5 - 50,5) * (58,5 - 30,33) * (58,5 - 36,25)]} = \\ &= \sqrt{(58,5 * 8 * 28,17 * 22,25)} = \sqrt{293.334,21} \approx 541,60. \end{aligned}$$

L'altezza NH è lunga:

$$NH = 2 * S_{LMN}/LM = 2 * 541,60/50,5 \approx 21,45.$$

Area di una biangola

ABDC è un quadrato e vi sono tracciati due archi di circonferenza di raggio lungo quanto il lato dello stesso quadrato e con centri in due vertici opposti del poligono, A e D.



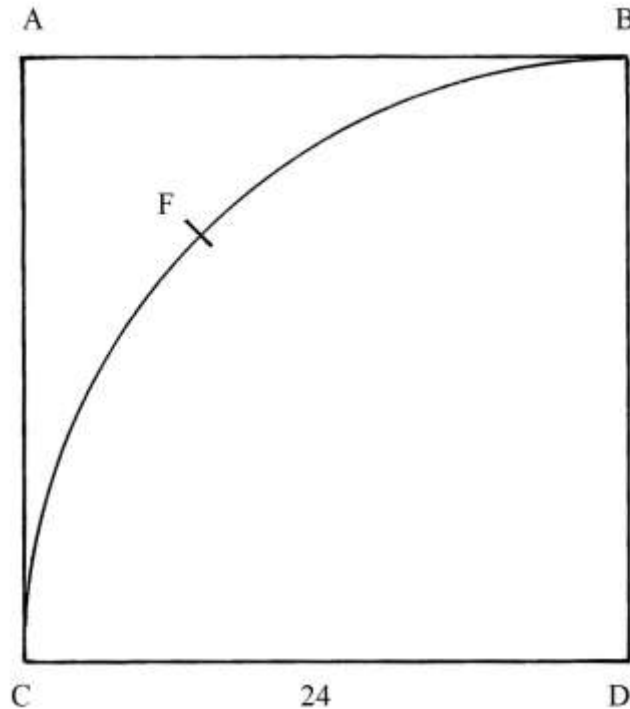
La figura curva racchiusa dai due archi è chiamata dai due Autori (Pomodoro e Scala) “biangola”.

In geometria, la figura è nota come “fuso circolare”.

----- APPROFONDIMENTO -----

La descrizione del problema contenuta nel Trattato non fornisce alcuna indicazione operativa: nello schema originario sono indicate le aree del fuso senza essere accompagnate da una qualsiasi metodologia. Come vedremo, i dati forniti sono esatti.

Consideriamo lo schema che segue:



L'area del quadrato ABDC è:

$$S_{ABDC} = 24 * 24 = 576.$$

Il quadrante BFC D è un quarto di cerchio.

L'area di BFC D è data da:

$$S_{BFC D} = (22/7 * BD^2)/4 = (22/7 * 24^2)/4 = (452 + 4/7).$$

Infatti, l'area di un cerchio di raggio di raggio BD è:

$$S_{CERCHIO} = 22/7 * BD^2 = 22/7 * 24^2 = (1810 + 2/7) = 4 * (452 + 4/7).$$

L'area del triangolo curvilineo ABFC è data da:

$$S_{ABFC} = S_{ABDC} - S_{BFC D} = 576 - (452 + 4/7) = (123 + 3/7).$$

Torniamo alla prima figura: l'area del *fuso circolare* è data da:

$$S_{BECF} = S_{ABDC} - 2 * S_{ABFC} = 576 - 2 * (123 + 3/7) = 576 - (246 + 6/7) = (329 + 1/7).$$

Area di un segmento circolare

Un cerchio di centro F e raggio $FC = FB$ è tagliato in due segmenti circolari dalla corda CB, lunga 32. La freccia DE è lunga 9.

Sulla corda CB è costruito il triangolo equilatero CAB.

Sembra che il problema chieda l'area del *segmento circolare* CDBE che nel testo è definito come "*figura biangola BDC*".

Per ricavare il diametro del cerchio di centro F occorre applicare il *teorema delle corde*:

$$DE : CE = EB : EG, \text{ da cui:}$$

$$EG = (CE * EB)/DE = CE^2/DE = 16 * 16/9 = 256/9 = (28 + 4/9).$$

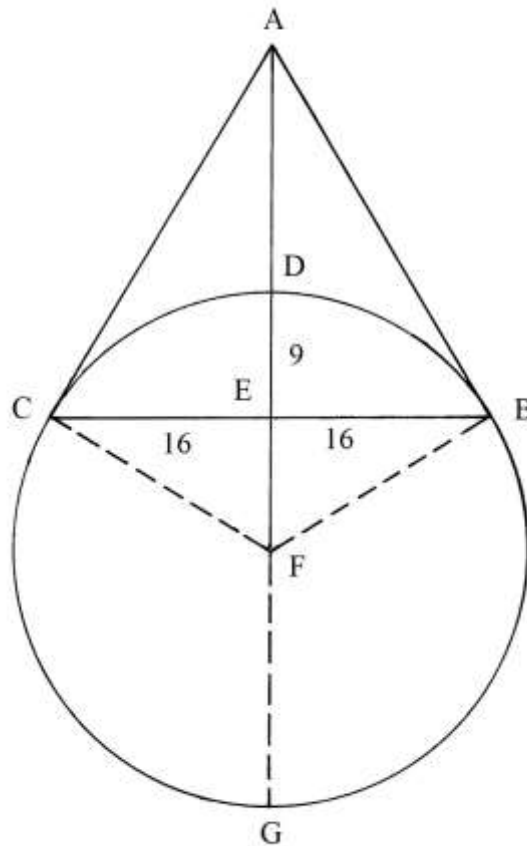
Il diametro DG è lungo:

$$DG = DE + EG = 9 + (28 + 4/9) = (37 + 4/9).$$

L'altezza AE del triangolo equilatero è data da:

$$AE^2 = AC^2 - CE^2 = 32^2 - 16^2 = 1024 - 256 = 768 \quad e$$

$$AE = \sqrt{768} = 16 * \sqrt{3}.$$



Nella figura del Trattato la lunghezza di AD è indicata in 17.

Nel testo originale non sono indicati valori numerici.

L'area del segmento circolare CDBE può essere ricavata con una formula:

$$S_{CDBE} = [R * (a - c) + c * f]/2 = [FC * (CDB - CB) + CB * DE]/2.$$

R è il raggio del cerchio, CDB è la lunghezza dell'arco che delimita il segmento circolare, CB è la corda e f è la freccia DE .

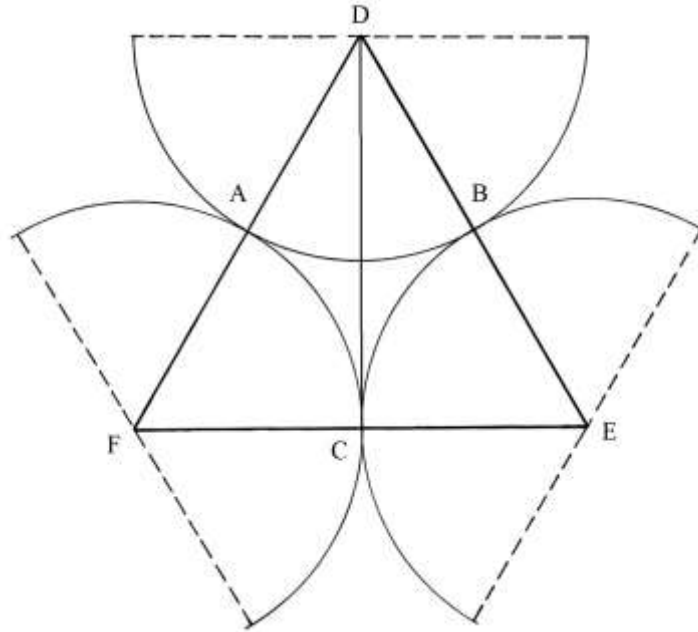
Con l'aiuto della trigonometria è possibile ricavare la lunghezza dell'arco CDB .

Nessun cenno riguardo a questa soluzione è contenuto nel Trattato.

Area di un triangolo a lati circolari

Lo schema che segue mostra un "triangolo a lati circolari" che nel testo è definito "triangolo fatto da linee curve": è ABC .

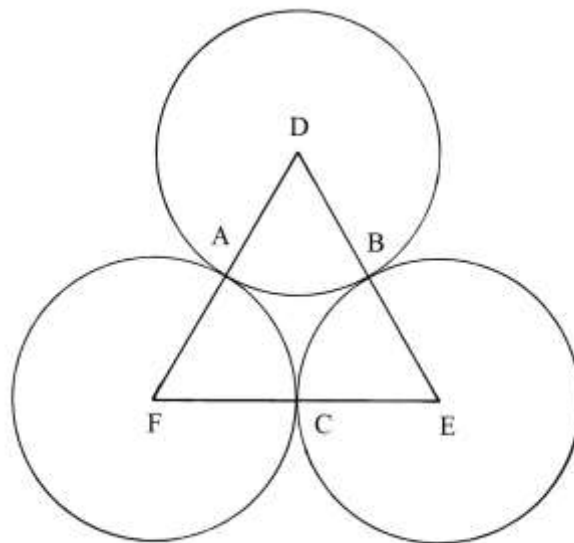
Nel Trattato non è contenuto alcun calcolo.



----- APPROFONDIMENTO -----

Qui di seguito proponiamo una soluzione.

DEF è un triangolo equilatero: A, B e C sono i punti medi dei suoi lati.



Fare centro nei vertici di DEF e, con raggio uguale alla metà della lunghezza di un suo lato, disegnare tre circonferenze fra loro tangenti nei punti A, B e C.

Esse determinano tre settori circolari di uguali dimensioni: DAB, EBC e FAC. Il triangolo a lati circolari ABC è la parte residuale del triangolo equilatero.

Gli angoli interni nei vertici A, B e C hanno ampiezza di 60° e cioè *un sesto* di un angolo giro.

Consideriamo il settore DAB: la sua area è *un sesto* di quella di un cerchio di raggio DA e centro in D.

Per semplificare i successivi calcoli, indichiamo con R la lunghezza del raggio DA.

L'area di un cerchio di raggio R è:

$$S_{\text{CERCHIO}} = \frac{22}{7} * R^2.$$

L'area del settore circolare DAB è:

$$S_{DAB} = 1/6 * S_{CERCHIO} = (22/7 * R^2)/6 = 22/42 * R^2 = 11/21 * R^2.$$

L'area dei tre settori circolari, tutti di uguali dimensioni per costruzione, è:

$$S_{3SETTORI} = S_{DAB} + S_{EBC} + S_{FAC} = 3 * S_{DAB} = 3 * (11/21 * R^2) = 11/7 * R^2.$$

La loro area è metà di quella del cerchio di raggio R.

L'area del triangolo equilatero è:

$$S_{DEF} = FE * DC/2 = FE^2 * (\sqrt{3})/4.$$

FE è lungo di doppio di FC e quindi anche di DA:

$$FE = 2 * DA = 2 * R.$$

L'area del triangolo può quindi essere scritta come:

$$S_{DEF} = (2 * R)^2 * (\sqrt{3})/4 = \sqrt{3} * R^2.$$

L'area del *triangolo a lati circolari* AB è data da:

$$S_{ABC} = S_{DEF} - S_{3SETTORI} = \sqrt{3} * R^2 - 11/7 * R^2 = R^2 * (\sqrt{3} - 11/7) \approx \\ \approx R^2 * (1,732 - 1,5714) \approx 0,1606 * R^2.$$

TAVOLA XVIII

La Tavola contiene alcune costruzioni basate sul triangolo 13-14-15: i triangoli sono divisi secondo varie regole.

In calce alla pagina sono alcuni schemi forse non completati e qui non considerati.

Divisione di un triangolo in due parti uguali

ABC è un triangolo scaleno, con lati lunghi:

* AB = 13;

* BC = 14;

* AC = 15.

AD è l'altezza relativa alla base BC e E il punto medio di BC.

Tracciare la *mediana* AE: essa divide ABC in *due* triangoli che hanno aree uguali, ABE e AEC.

I due triangoli hanno in comune l'altezza AD che è lunga 12.

BE è lungo quanto EC:

$$BE = BC/2 = 14/2 = 7.$$

L'area di ABC è:

$$S_{ABC} = BC * AD/2 = 14 * 12/2 = 84.$$

L'area di ABE è:

$$S_{ABE} = BE * AD/2 = 7 * 12/2 = 42.$$

L'area di AEC è:

$$S_{AEC} = EC * AD/2 = 7 * 12/2 = 42.$$

L'altezza AD cade sul lato BC nel punto D che divide la base BC in due segmenti:

* BD = 5;

* DE = 9.

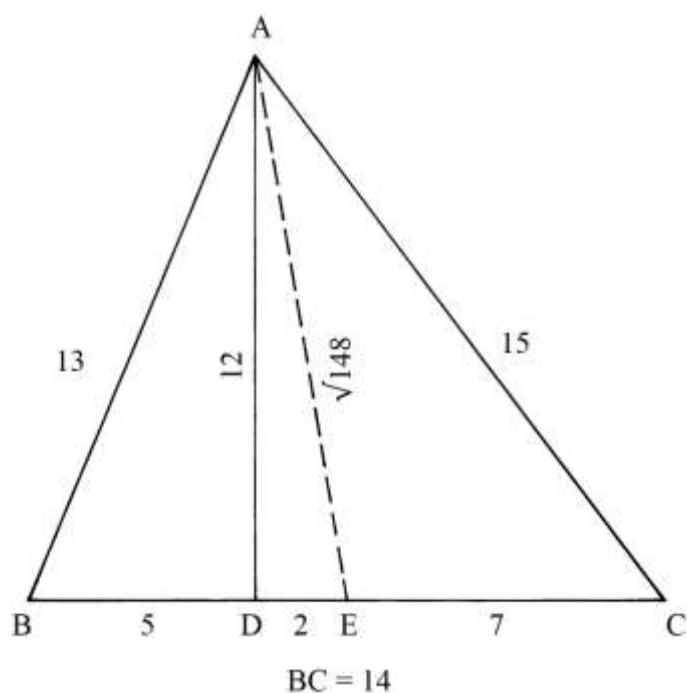
ADE è un triangolo rettangolo che ha cateti AD e DE: questo ultimo è lungo:

$$DE = BE - BD = 7 - 5 = 2.$$

AE è l'ipotenusa del triangolo rettangolo ADE e la sua lunghezza è:

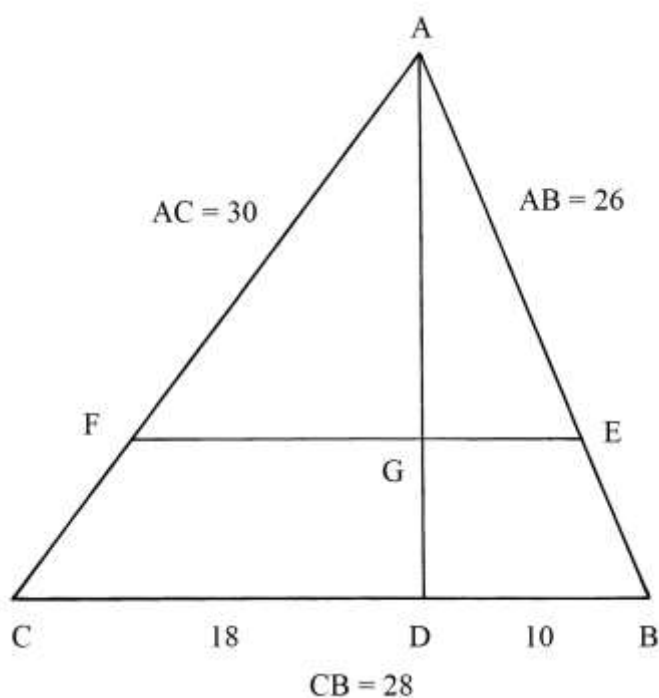
$$AE^2 = AD^2 + DE^2 = 12^2 + 2^2 = 144 + 4 = 148 \quad e$$

$$AE = \sqrt{148}.$$



Divisione di un triangolo in due parti con una corda parallela a un lato

ABC è un triangolo scaleno con lati lunghi 26, 28 e 30 e cioè con lunghezze uguali a quelle della terna 13-14-15 i cui membri sono moltiplicati per *due*.



L'area del triangolo 13-14-15, da cui deriva ABC, è 84; l'area di un triangolo è sempre proporzionale al quadrato delle lunghezze dei suoi lati e raddoppiandole l'area quadruplica ($2^2 = 4$), per cui si ha:

$$S_{ABC} = 4 * S_{13-14-15} = 4 * 84 = 336.$$

L'altezza relativa alla base BC è AD e la sua lunghezza è:

$$AD = 2 * S_{ABC}/BC = 2 * 336/28 = 24.$$

ABC deve essere diviso in due parti uguali con una corda parallela alla base BC.

La soluzione proposta nel Trattato è la seguente:

* moltiplicare per sé stessa la lunghezza di BC: $28 * 28 = 784;$

* dividere per 2: $784/2 = 392;$

* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{392} \approx 19,8$, lunghezza della corda EF.

EF divide ABC in due poligoni:

* il triangolo scaleno AEF;

* il trapezio scaleno FEBC.

Entrambi i poligoni hanno area uguale a metà di quella di ABC:

$$S_{AEF} = S_{FEBC} = S_{ABC}/2 = 336/2 = 168.$$

L'altezza AG ha lunghezza che è data da:

$$AG = 2 * S_{AEF}/EF = 2 * 168/\sqrt{392} = 336/\sqrt{392} = (336 * \sqrt{392})/392 \approx 16,97.$$

La soluzione contenuta nel Trattato è estremamente sintetica e non contiene altro che la lunghezza $EF = \sqrt{392}$.

----- APPROFONDIMENTO -----

Sullo schema contenuto nel Trattato sono scritte, anche se poco leggibili, le lunghezze dei lati e delle altezze dei poligoni generati dalla presenza della corda EF.

Per semplificare i calcoli, qui sono usati i numeri decimali, a differenza di quelli misti (con parte frazionaria) contenuti sullo schema originale.

La lunghezza di AF può essere ricavata con una proporzione:

$$AF : AG = AC : AD$$

$$AF = (AG * AC)/AD = (16,97 * 30)/24 = 21,21.$$

La lunghezza di FC è:

$$FC = AC - AF = 30 - 21,21 = 8,79.$$

La lunghezza di AE è anch'essa ottenuta con una proporzione:

$$AE : AB = AG : AD$$

$$AE = (AB * AG)/AD = (26 * 16,97)/24 = 18,38.$$

La lunghezza di EB è:

$$EB = AB - AE = 26 - 18,38 = 7,62.$$

La lunghezza di AF è ricavabile anche con un altro metodo:

* moltiplicare la lunghezza di AC per sé stessa: $30 * 30 = 900;$

* dividere per 2: $900/2 = 450;$

* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{450} \approx 21,21.$

Il risultato è uguale a quello ricavata con una proporzione.

%%%%%%%%%

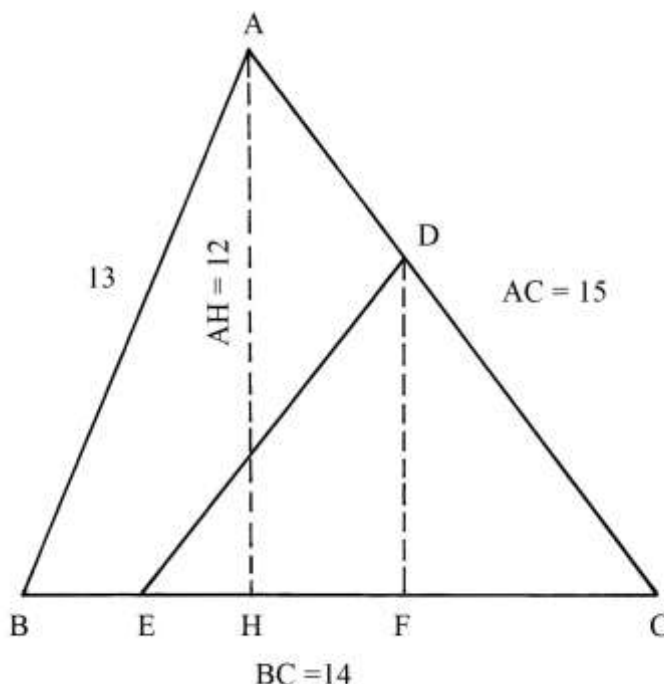
I problemi di divisione delle figure piane furono studiati almeno a partire da Euclide che scrisse un piccolo trattato "*Sulle divisioni delle figure*", andato perduto.

Erone di Alessandria, alcuni geometri Arabi, Abraham bar Hiyya (conosciuto come Savasorda), Leonardo da Pisa (Fibonacci) e numerosi abacisti toscani proposero nei loro testi diversi problemi sulla divisione delle figure piane.

Il trattato di Pomodoro e Scala deve aver avuto una conoscenza di quei lavori.

Divisione di un triangolo con una corda uscente da un punto dato

ABC è il consueto triangolo 13 – 14 – 15 con area uguale a 84.



Sul lato AC è fissato un punto intermedio fra A e C: è D.

Da D deve essere tracciata una corda che divida ABC in due poligoni di area uguale a metà di quella dello stesso triangolo.

L'area di ABC è 84 e la metà della sua area è 42.

Dal punto D abbassare la perpendicolare al lato BC: è DF.

Misurare la lunghezza di DF.

La base del triangolo di area uguale a 42 e altezza DF è EC la cui lunghezza è data da:

$$EC = 2 * S_{DCE}/DF = 2 * 42/DF = 84/DF.$$

ABC è diviso in due poligoni di area pari a 42:

- * il triangolo DCE;
- * il quadrilatero ABED.

----- APPROFONDIMENTO -----

Diversamente da molti Geometri dell'antichità, Pomodoro e Scala hanno risolto il problema per via aritmetica.

Lo stesso risultato può essere ottenuto con una soluzione geometrica che si deve al matematico Abu'L – Wafa al Buzjani (940-998), autore di un trattato dal titolo "Su quelle parti di geometria necessarie agli artigiani".

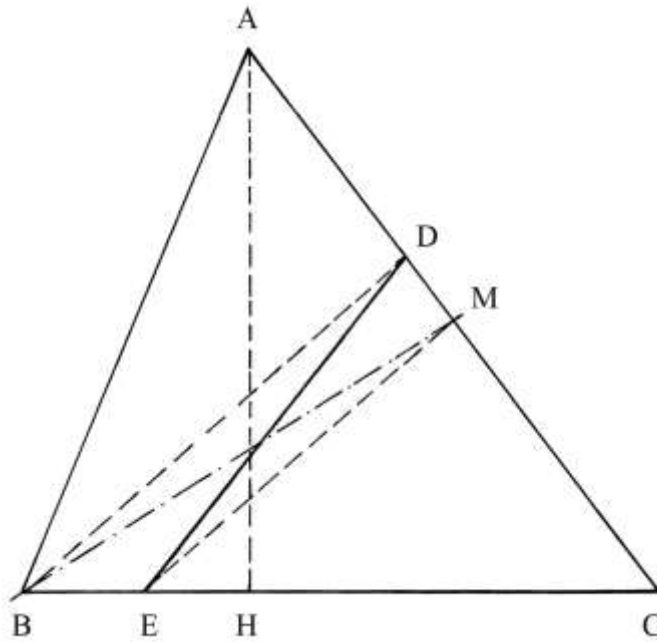
Lo schema che segue è un'applicazione del metodo contenuto in questo libro.

Tracciare la mediana BM.

Collegare D con B e dal punto M disegnare la corda ME parallela a DB.

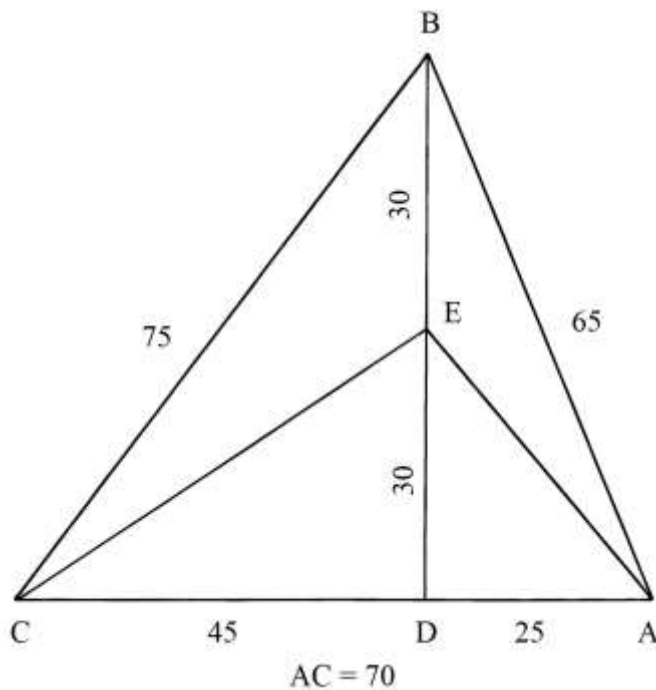
Infine, tracciare la corda DE: essa è il terzo lato del triangolo DCE.

Questo metodo porta allo stesso risultato ottenuto da Pomodoro e Scala, con il vantaggio della maggiore precisione data dal metodo geometrico rispetto all'impiego dell'aritmetica.



Divisione di un triangolo in due parti uguali

ABC è un triangolo scaleno i cui lati sono lunghi 65, 70 e 75 e cioè *cinque* volte le lunghezze della terna 13-14-15.

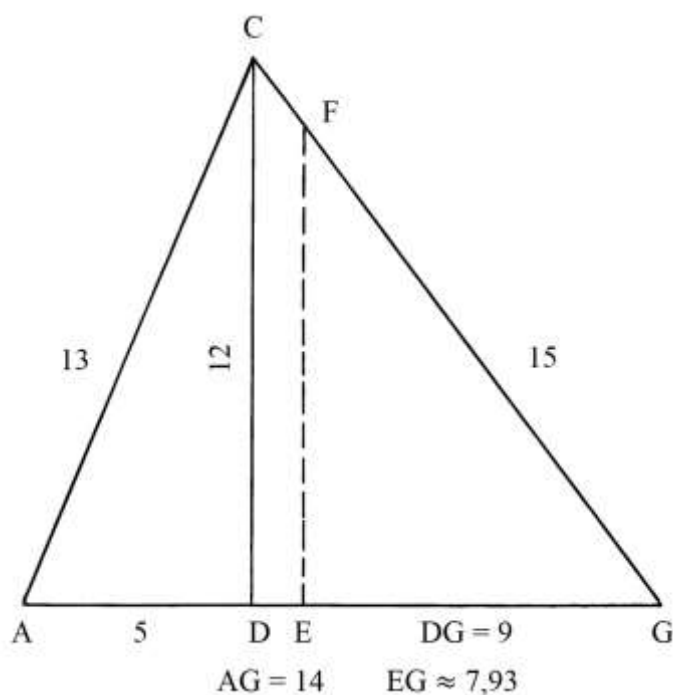


Deve essere diviso in due parti di area uguale tagliando l'altezza che è lunga 60.
 Determinare il punto medio di BD: è E. Collegare E con i vertici A e C.

Il triangolo ABC è diviso in due poligoni:
 * il triangolo scaleno AEC;

- * il quadrilatero ABCE.
 L'area del triangolo ABC è:
 $S_{ABC} = AC * BD / 2 = 70 * 60 / 2 = 2100$.
 L'area del triangolo AEC è:
 $S_{AEC} = AC * ED / 2 = 70 * 30 / 2 = 1050$.
 L'area di ABCE è, per differenza, data da:
 $S_{ABCE} = S_{ABC} - S_{AEC} = 2100 - 1050 = 1050$.
 AEC e ABCE hanno aree uguali.

Divisione di un triangolo con un segmento parallelo a un'altezza
 ACG è un triangolo scaleno con lati lunghi 13, 14 e 15.



Il triangolo deve essere diviso in due parti di aree uguali a metà, con un segmento parallelo all'altezza CD che è lunga 12.

Il triangolo ACD ha area:
 $S_{ACD} = AD * CD / 2 = 5 * 12 / 2 = 30$.

Il triangolo CDG ha area:
 $S_{CDG} = DG * CD / 2 = 9 * 12 / 2 = 54$.

L'area dell'intero ACG è 84.

Il segmento FE determina il triangolo FEG che deve avere area uguale a metà di quella di ACG e cioè 42.

Vale la proporzione:

$$CD^2 : S_{CDG} = FE^2 : S_{FEG}$$

$$12^2 : 54 = FE^2 : 42$$

$$FE^2 = (12^2 * 42) / 54 = (144 * 42) / 54 = 112 \quad e$$

$$FE = \sqrt{112}$$

La lunghezza di EG è data da:

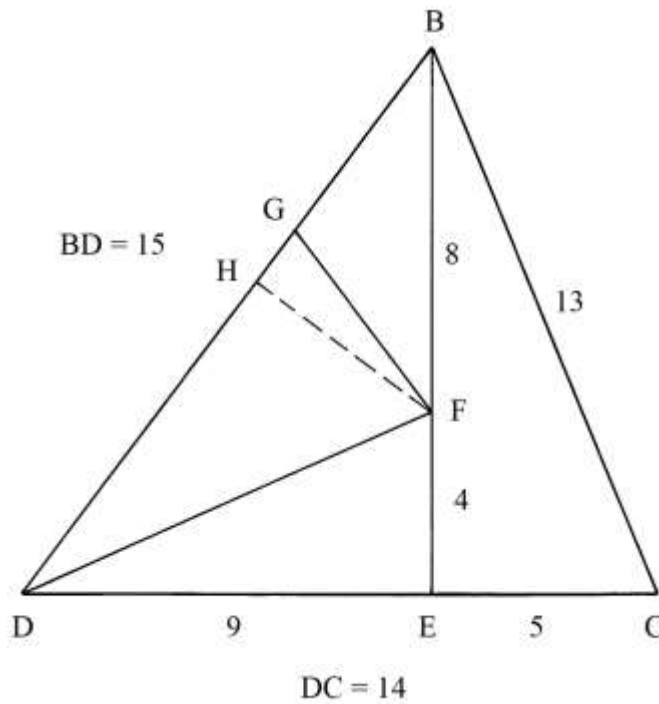
$$EG = 2 * S_{FEG} / FE = 2 * 42 / \sqrt{112} = 84 / \sqrt{112} \approx 7,93$$

Triangolo inscritto in un triangolo 13-14-15

BCD è il solito triangolo 13-14-15 che ha area 84.

Sull'altezza BE, lunga 12, è fissato il punto F che si trova a distanze:

- * BF = 8;
- * FE = 4.



Dal punto F è tracciata la perpendicolare FH che è lunga $(4 + 4/5)$.

Sul lato BD è stabilito il punto G a distanza 5 da B, per cui si ha:

$$GD = BD - BG = 15 - 5 = 10.$$

Collegare G con F.

Il triangolo DGF ha area:

$$S_{DGF} = GD * FH/2 = 10 * (4 + 4/5)/2 = 24.$$

DFE è un triangolo rettangolo che ha area:

$$S_{DFE} = DE * FE/2 = 9 * 4/2 = 18.$$

La somma delle aree di DGF e di DFE è:

$$S_{DGF} + S_{DFE} = 24 + 18 = 42 \text{ e cioè la metà di quella di BCD.}$$

Le aree dei due triangoli che compongono BCD sono:

- * $S_{BED} = BE * DE/2 = 12 * 9/2 = 54;$

- * $S_{BEC} = BE * EC/2 = 12 * 5/2 = 30.$

L'area del triangolo residuale BGF è:

$$S_{BGF} = S_{BED} - S_{DFE} = 54 - 24 - 18 = 12.$$

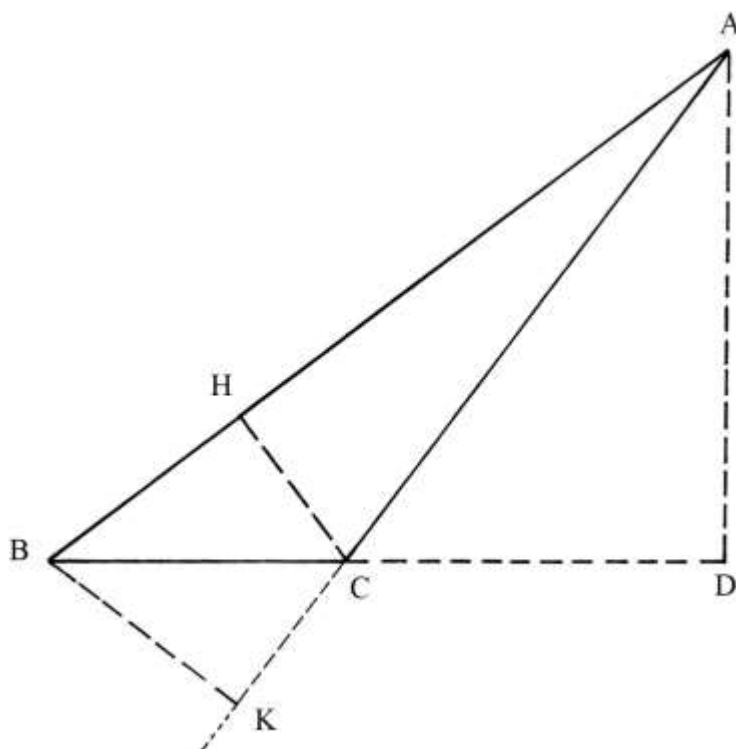
Infine, la lunghezza dell'ipotenusa DF è data da:

$$DF^2 = FE^2 + DE^2 = 4^2 + 9^2 = 16 + 81 = 97 \text{ e}$$

$$DF = \sqrt{97}.$$

Triangolo 13-14-15 sezionato con due rette parallele

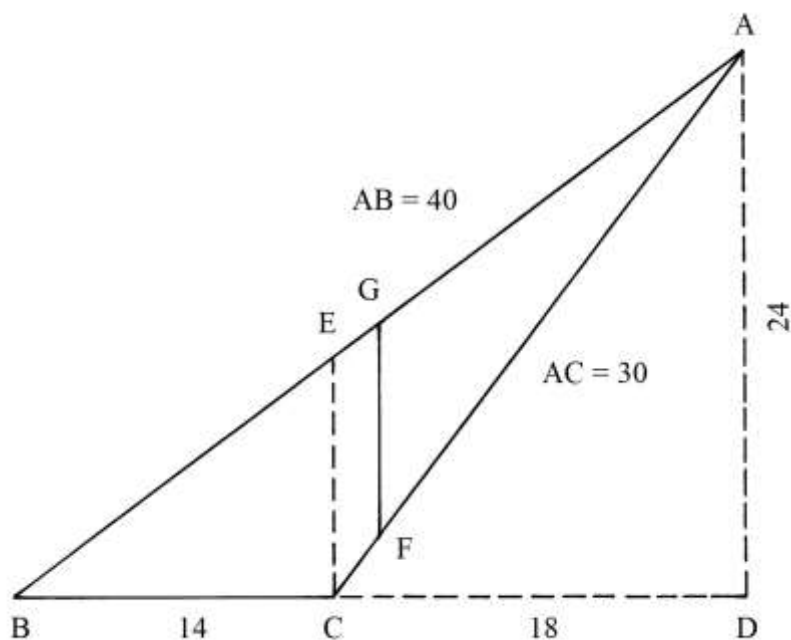
ABC è il triangolo 13-14-15 che è tagliato da due rette fra loro parallele, ma non parallele rispetto alla base BC: una passa per D e per E e l'altra per F e per G.



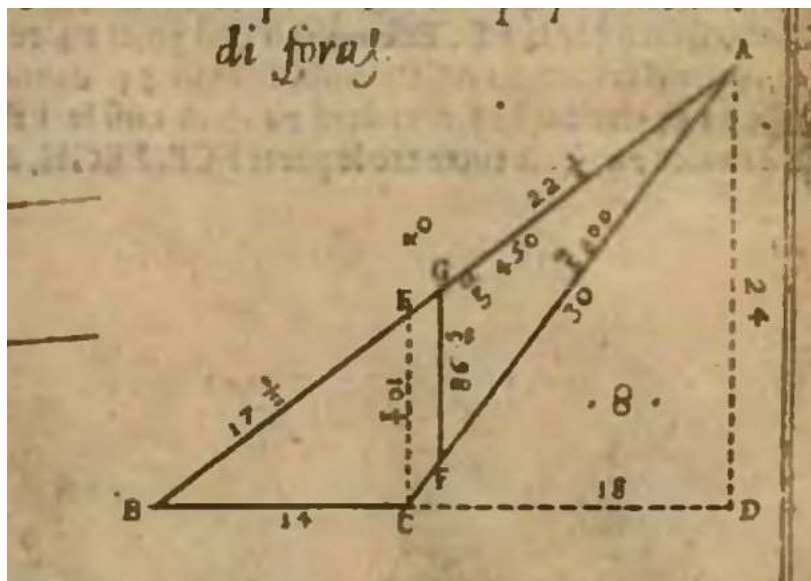
Torniamo al triangolo ABC. La sua area è:

$$S_{ABC} = BC * AD/2 = 14 * 24/2 = 168.$$

Dal punto C elevare la perpendicolare a BC: è CE che sembra essere lungo $(10 + \frac{1}{2})$.



Parallela a CE è disegnata la corda GF la cui lunghezza scritta sullo schema originale sembra essere $\sqrt{98}$:



Sempre dallo schema originale sembra potersi fornire i seguenti dati:

- * $BE = (17 + \frac{1}{2})$;
- * $EA = (22 + \frac{1}{2})$;
- * $AB = 40$;
- * $GA = \sqrt{450}$.

In conclusione, presentiamo un'ipotesi: GF divide il triangolo ABC in due poligoni di aree uguali:

- * il quadrilatero BGFC;
- * il triangolo ottusangolo GAF.

Entrambi i poligoni sembrano avere area uguale a metà di quella di ABC e cioè:
 $168/2 = 84$.

----- APPROFONDIMENTO -----

Il triangolo ABC dà vita a due triangoli rettangoli, ABD e ACD, che hanno lunghezze che formano terne derivate dalla primitiva 3-4-5.

Nel triangolo ABD le lunghezze sono:

- * $AD = 24 = 3 * 8$;
- * $BD = 32 = 4 * 8$;
- * $AB = 40 = 5 * 8$.

Nel triangolo ACD le lunghezze sono:

- * $CD = 18 = 3 * 6$;
- * $AD = 24 = 4 * 6$;
- * $AC = 30 = 5 * 6$.

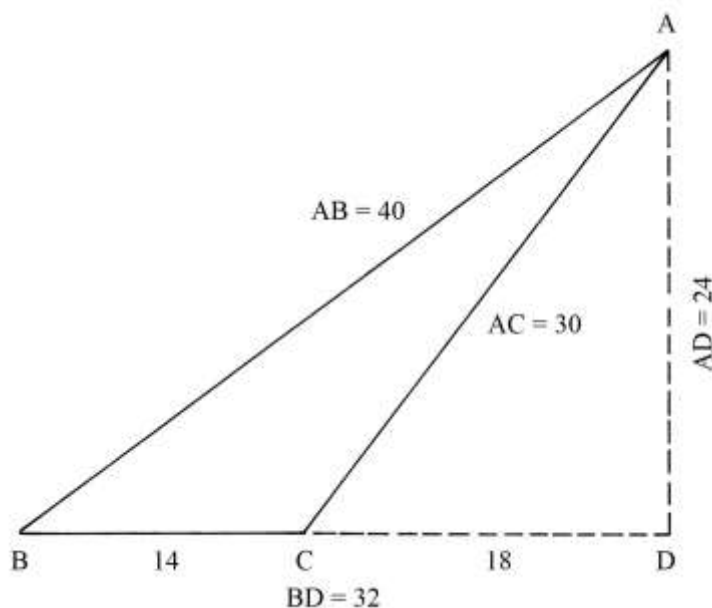


TAVOLA XX

La Tavola presenta *nove* esempi di triangoli scaleni divisi in parti uguali.

Divisione di un triangolo in 3 parti uguali

ABC è un triangolo scaleno che ha lati lunghi 39, 42 e 45 e cioè *tre* volte quelli del noto triangolo 13-14-15.

Anche l'altezza AD è lunga *tre* volte quella del triangolo 13-14-15: infatti è:

$$12 * 3 = 36.$$

L'area del triangolo è:

$$S_{ABC} = AD * BC / 2 = 36 * 42 / 2 = 504.$$

ABC deve essere diviso in tre parti uguali con due corde uscenti dal vertice A.

Dividere in tre parti uguali il lato BC:

$$BE = EF = FC = BC / 3 = 42 / 3 = 14.$$

I triangoli ABE, AEF e AFC hanno aree uguali a un terzo di quella di ABC:

$$S_{ABE} = S_{AEF} = S_{AFC} = S_{ABC} / 3 = 504 / 3 = 168.$$

Sullo schema originale sono riportate le lunghezze delle corde AE e AF.

BD è lungo $5 * 3 = 15$ e DC è $9 * 3 = 27$: questi dati sono noti perché provengono dalle proprietà geometriche del triangolo 13-14-15.

AFD è un triangolo rettangolo e AE è la sua ipotenusa: il cateto ED è lungo:

$$ED = BD - BE = 15 - 14 = 1.$$

La lunghezza di AE è data da:

$$AE^2 = AD^2 + ED^2 = 36^2 + 1^2 = 1296 + 1 = 1297 \quad e$$

$$AE = \sqrt{1297}.$$

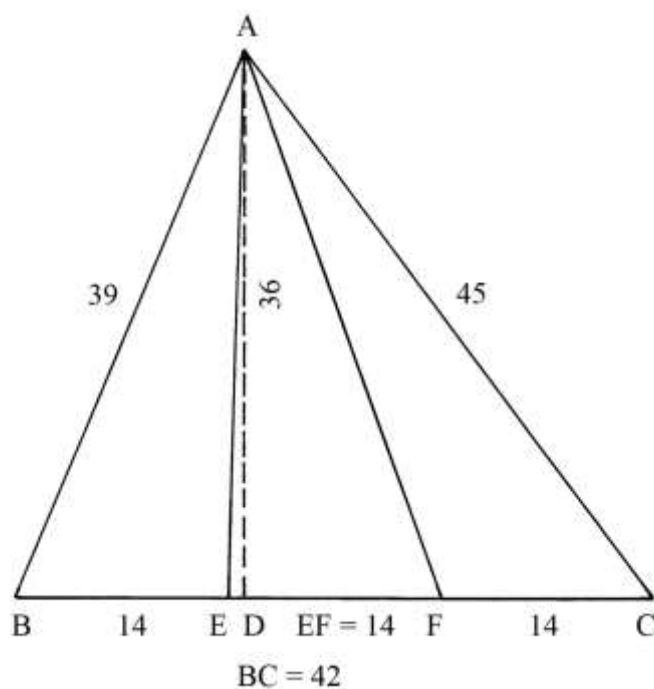
ADF è un altro triangolo rettangolo: AF è la sua ipotenusa. La lunghezza del cateto DF è:

$$DF = DC - FC = 28 - 14.$$

AF ha lunghezza che è data da:

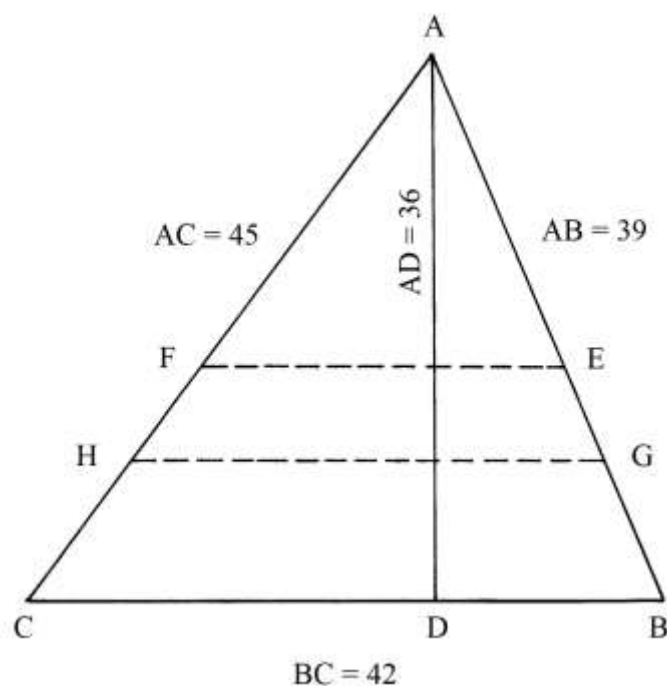
$$AF^2 = AD^2 + DF^2 = 36^2 + 14^2 = 1296 + 196 = 1492 \quad e$$

$$AF = \sqrt{1492}.$$



Divisione di un triangolo in 3 parti uguali con corde parallele alla base

ABC è il solito triangolo scaleno 39-42-45. Esso deve essere diviso in tre parti con due corde parallele alla base BC.



L'area di ABC è:

$$S_{ABC} = AD * BC/2 = 756.$$

La procedura è la seguente:

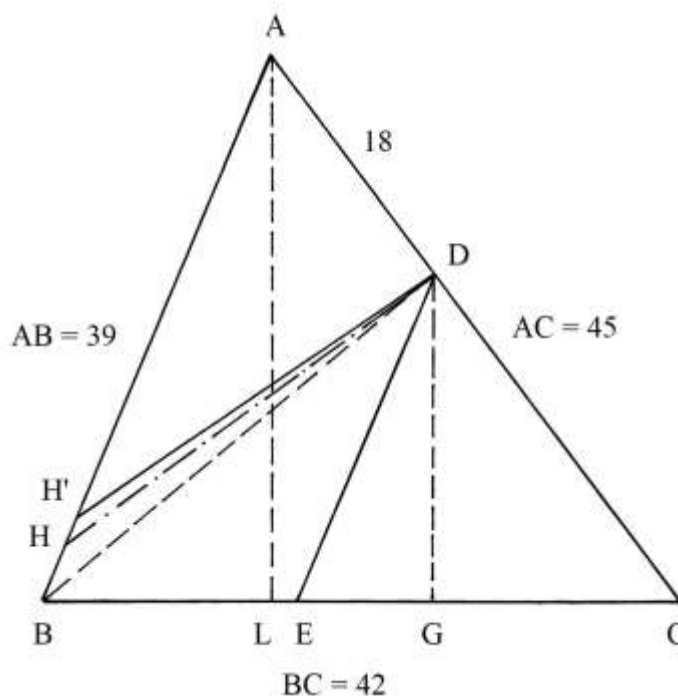
- * moltiplicare la lunghezza della base BC per sé stessa: $42 * 42 = 1764$;
- * dividere per 3: $1764/3 = 588$;
- * estrarre la radice quadrata: $\sqrt{588}$, lunghezza della corda EF;
- * moltiplicare 588 per 2 [oppure moltiplicare 1764 per 2/3]: $588 * 2 = 1176$;
- * estrarre la radice quadrata: $\sqrt{1176}$, lunghezza della corda GH.

Il triangolo ABC è ora diviso in tre poligoni di area uguale a un terzo della sua e che è:

$$756/3 = 252:$$

$$S_{AFE} = S_{FEGH} = S_{HGBC} = 252.$$

- [3] Divisione di un triangolo in 3 parti con corde uscenti da un punto
 ABC è il triangolo 39-42-45.



L'altezza AL è lunga 36 e l'area del triangolo è:

$$S_{ABC} = AL * BC/2 = 36 * 42/2 = 756.$$

Sul lato AC è fissato il punto D, a distanze:

- * $AD = 18$;
- * $DC = 27$.

ABC deve essere diviso in tre parti di aree uguali con due corde uscenti da D.

Dal punto D abbassare la perpendicolare a BC: è DG. La sua lunghezza è stimata essere circa 20; essa è l'altezza del triangolo DCE che deve avere area uguale a *un terzo* di quella di ABC:

$$S_{DCE} = S_{ABC}/3 = 756/3 = 252.$$

La base EC ha lunghezza che è data da:

$$EC = 2 * S_{DCE}/DG = 2 * 252/20 = 25,2.$$

Sullo schema originale, la lunghezza di EC è indicata come $(23 + 1/3)$ mentre nel Trattato è $(25 + 1/5 = 25,2)$.

La divisione in due parti uguali del poligono rimanente, il quadrilatero ADEB, è ottenuta con la procedura che segue:

- * moltiplicare per sé stessa la lunghezza di AB: $39 * 39 = 1521$;
- * moltiplicare per sé stessa la lunghezza di AD: $18 * 18 = 324$;
- * sottrarre il quadrato di AD da quello di AB: $1521 - 324 = 1197$;
- * estrarre la radice quadrata: $\sqrt{1197} \approx 34,60$ [nel Trattato è arrotondata a 34];
- * dividere per 2 la lunghezza di AD: $18/2 = 9$;
- * moltiplicare per $\sqrt{1197}$: $9 * \sqrt{1197} \approx 311$ [valore maggiore di 252, che è un terzo dell'area di ABC];
- * risolvere la proporzione:
 $311 : AB = 252 : DH$
 $311 : 39 = 252 : DH$
 $DH = (39 * 252)/311 \approx 31,6$.

ADH ha area maggiore di quella di un terzo di ABC.

Utilizzando l'arrotondamento per difetto, 34, usato nel Trattato si ha:

- * moltiplicare la metà della lunghezza di AD per 34: $9 * 34 = 304$;
- * risolvere la proporzione:
 $304 : AB = 252 : DH'$
 $304 : 39 = 252 : DH'$
 $DH' = (39 * 252)/304 \approx (32 + 1/3)$.

Sullo schema originale è scritta la lunghezza di BH': $(6 + 1/2)$.

La costruzione contenuta nel Trattato è assai approssimata.

Riassumendo, si ha il seguente risultato: ABC è diviso in tre poligoni che hanno aree approssimativamente uguali a un terzo di quella di ABC e cioè 252 ciascuno:

- * il triangolo DEC;
- * il triangolo ADH';
- * il quadrilatero BHDE.

Divisione di un triangolo scaleno in 3 parti uguali con corde parallele a un'altezza

ABC è il triangolo 13-14-15 che ha la base orizzontale CB lunga 14 e l'altezza AD 12.

Deve essere diviso in tre parti di aree uguali con due corde parallele all'altezza AD.

L'area del triangolo è:

$$S_{ABC} = BC * AD/2 = 14 * 12/2 = 84.$$

Ciascuna parte deve avere area uguale a: $84/3 = 28$.

L'area del triangolo ADB è:

$$S_{ADB} = DB * AD/2 = 5 * 12/2 = 30.$$

Da ADB deve essere ritagliato il triangolo rettangolo con area uguale a un terzo di quella di ABC e cioè 28.

La soluzione prevede i seguenti passi:

- * moltiplicare la lunghezza di AD per sé stessa: $AD^2 = 12^2 = 144$;
- * risolvere la proporzione:
 $AD^2 : GH^2 = S_{ADB} : S_{GMB}$
 $144 : GH^2 = 30 : 28$
 $GH^2 = 144 * 28/30 = (134 + 2/5)$ e
 $GH = \sqrt{(134 + 2/5)} \approx 11,59$.

La lunghezza della seconda corda, FE, è ricavata con lo stesso metodo.

L'area di ACD è:

$$S_{ACD} = CD * AD/2 = 9 * 12/2 = 54.$$

L'area di FCE deve essere uguale a 28.

Risolvere la proporzione:

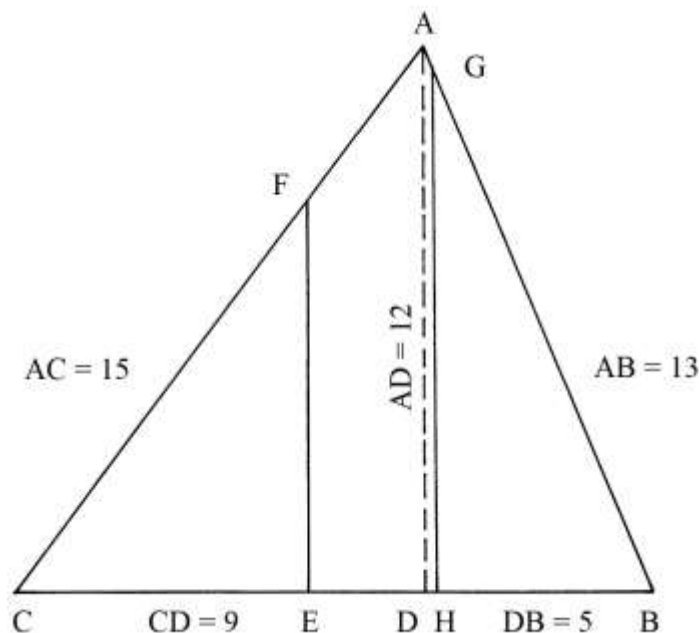
$$AD^2 : FE^2 = S_{ACD} : S_{FCE}$$

$$12^2 : FE^2 = 54 : 28$$

$$144 : FE^2 = 54 : 28$$

$$FE^2 = (144 * 28)/54 = (74 + 2/3) \quad e$$

$$FE = \sqrt{(74 + 2/3)} \approx 8,64.$$



Il triangolo ABC è diviso in tre poligoni, tutti con area uguale a 28:

- * il triangolo GHB;
- * il triangolo FEC;
- * il pentagono non regolare EFAGH.

Divisione di un triangolo 13-14-15 lungo un'altezza

Il triangolo ABC ha la base BC lunga 14 e l'altezza ad essa relativa, AD, è lunga 12.

Dividere l'altezza AD in *tre* parti uguali di lunghezza 4: E e F sono i punti fissati dalla divisione.

Collegare i punti E e F con i vertici B e C.

Il triangolo ABC è ora diviso in tre poligoni che hanno aree uguali a $84/3 = 28$:

- * il triangolo scaleno BFC;
- * il quadrilatero BFCE;
- * il quadrilatero BECA.

Sulla figura originale sono scritte le lunghezze dei segmenti uscenti da E e da F: FB, EB, FC e EC.

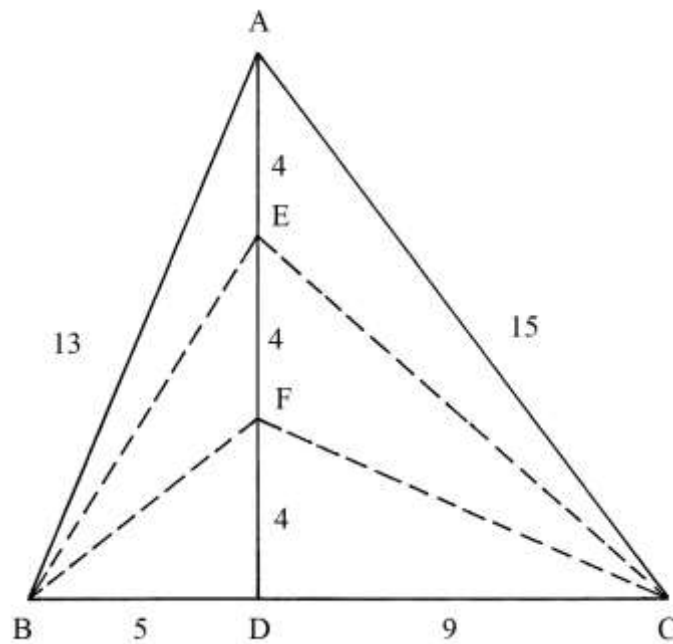
Essi sono le ipotenuse dei triangoli rettangoli di cui fanno parte.

Ecco le loro lunghezze:

$$* \quad FB^2 = BD^2 + FD^2 = 5^2 + 4^2 = 25 + 16 = 41 \quad e$$

$$FB = \sqrt{41};$$

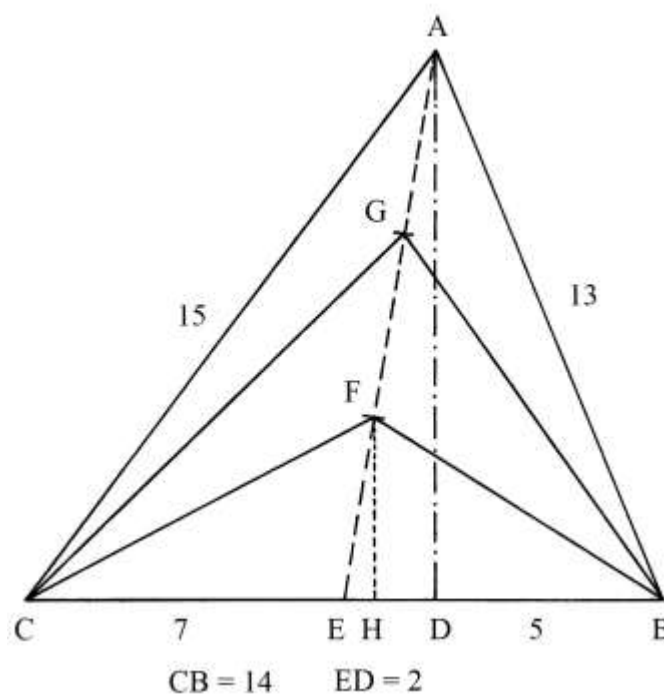
* $EB^2 = BD^2 + ED^2 = 5^2 + 8^2 = 25 + 64 = 89$ e
 $EB = \sqrt{89}$;



* $FC^2 = DC^2 + FD^2 = 9^2 + 4^2 = 81 + 16 = 97$ e
 $FC = \sqrt{97}$;

* $EC^2 = DC^2 + ED^2 = 9^2 + 8^2 = 81 + 64 = 145$ e
 $EC = \sqrt{145}$.

Divisione di un triangolo 13-14-15 in tre parti uguali con l'ausilio di una mediana
 La base CB è lunga 14 e AD è l'altezza ad essa relativa è lunga 12.



H è il punto medio del lato CB e dista 7 sia da C che da B.

AE è la *mediana* relativa alla base CB.

ADE è un triangolo rettangolo e AE è la sua ipotenusa. ED e AD sono i due cateti di questo triangolo. La lunghezza di ED è:

$$ED = CD - CE = 9 - 7 = 2.$$

La lunghezza di AE è data da:

$$AE^2 = AD^2 + HD^2 = 12^2 + 2^2 = 144 + 4 = 148 \quad e$$

$$AE = \sqrt{148}.$$

Dividere in tre parti uguali la mediana AE:

$$AG = GF = FE = AE/3 = (\sqrt{148})/3 = \sqrt{(148/9)} = \sqrt{(16 + 4/9)} \approx 4,055.$$

Dal punto F abbassare la perpendicolare a CB: FH è lungo 4 perché i triangoli rettangoli FHE e ADE sono simili.

CFH e BFH sono due triangoli rettangoli che hanno in comune il cateto FH.

Sullo schema originale sono scritte anche le lunghezze delle due ipotenuse FC e FB.

Occorre preliminarmente ricavare la lunghezza del cateto EH:

$$EH^2 = FE^2 - FH^2 = [\sqrt{(16 + 4/9)}]^2 - 4^2 = (16 + 4/9) - 16 = 4/9 \quad e$$

$$EH = \sqrt{(4/9)} = 2/3.$$

Il cateto CH è lungo:

$$CH = CE + EH = (7 + 2/3).$$

La lunghezza di CF è:

$$CF^2 = CH^2 + FH^2 = (7 + 2/3)^2 + 4^2 = (58 + 7/9) + 14 = (74 + 7/9) \quad e$$

$$CF = \sqrt{(74 + 7/9)}.$$

La lunghezza del cateto HB è:

$$HB = EB - EH = 7 - 2/3 = (6 + 1/3).$$

La lunghezza di BF è:

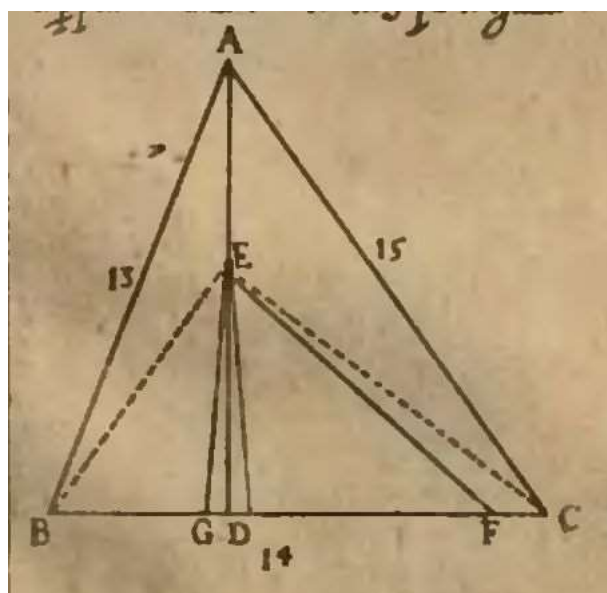
$$BF^2 = HB^2 + FH^2 = (6 + 1/3)^2 + 4^2 = (40 + 1/9) + 16 = (56 + 1/9) \quad e$$

$$BF = \sqrt{(56 + 1/9)}.$$

[7]

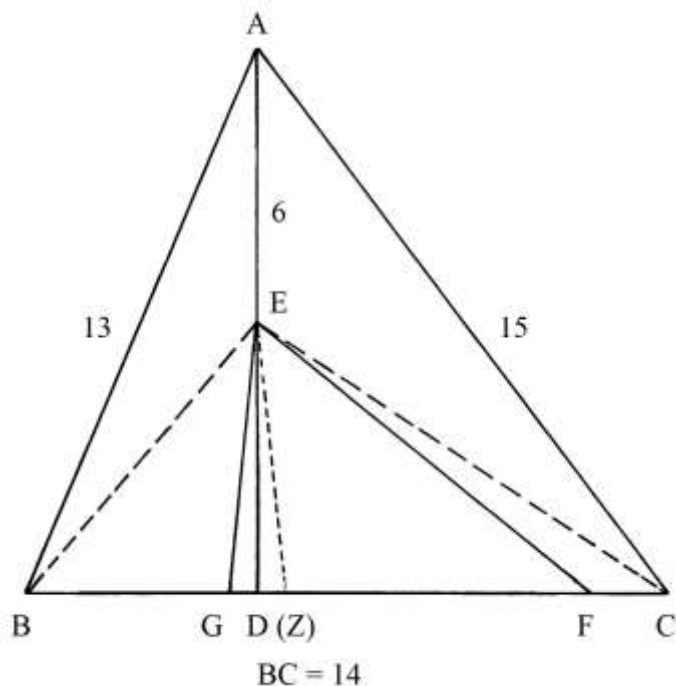
Settimo problema

Lo schema che segue riproduce l'originale del problema n. 7 della Tavola XX.



Il testo contenuto nel Trattato rimanda soltanto alla soluzione del precedente problema n. 3, ma non fornisce altra informazione.

Lo schema che segue è una ipotetica ricostruzione della figura originale. Il punto (Z), non denominato nell'originale, non sembra svolgere alcun ruolo nella costruzione: forse è il simmetrico di G rispetto a D.



AD è l'altezza relativa alla base BC ed è lunga 14.

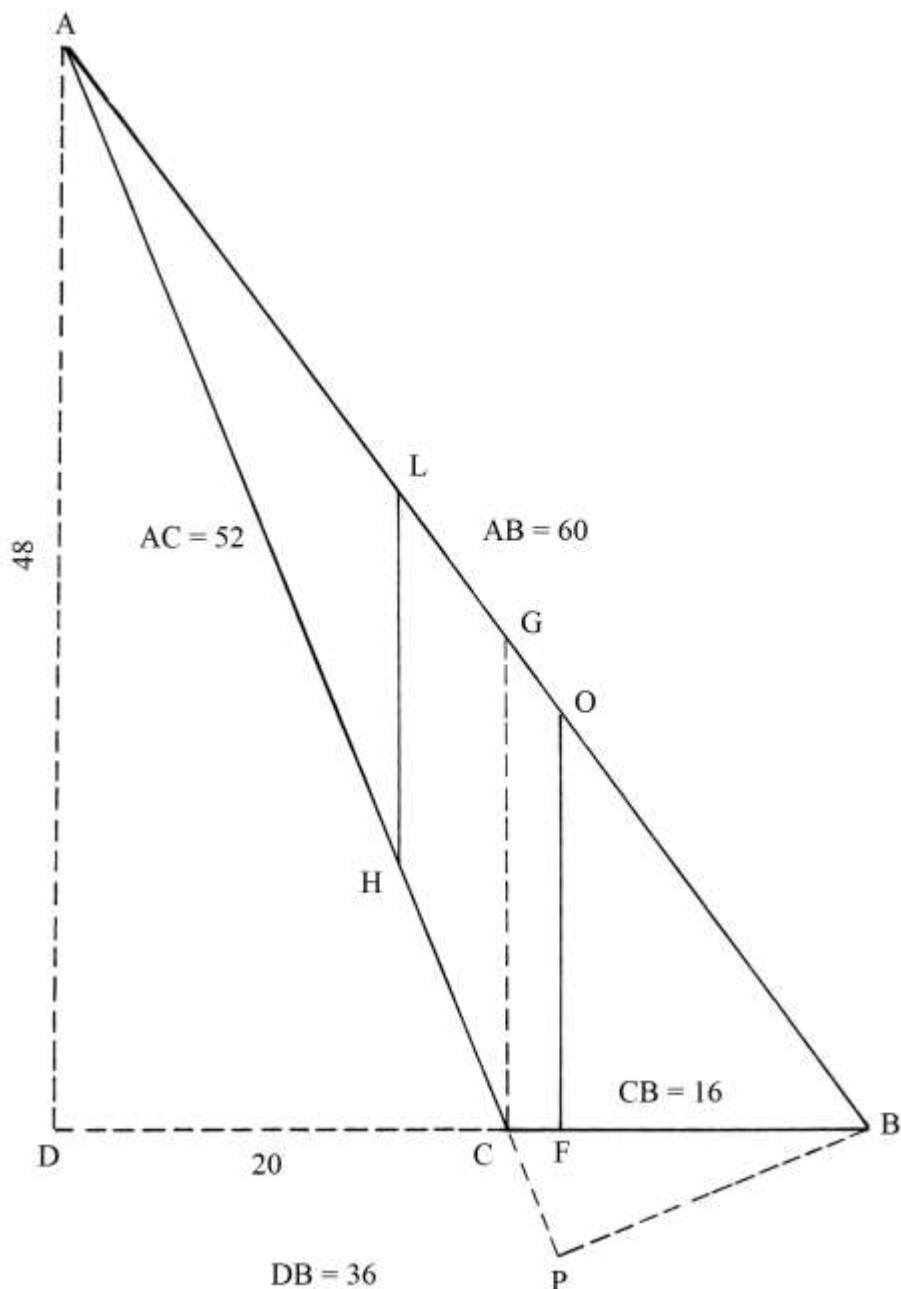
Per analogia con la soluzione del problema n. 3 sembra che questa costruzione si proponga di dividere in tre parti uguali il triangolo ABC, con dei segmenti uscenti dal punto medio, E, dell'altezza AD.

I poligoni risultanti, tutti di area $84/3 = 28$, sarebbero:

- * il triangolo EGF;
- * il quadrilatero EABG;
- * il quadrilatero EACF.

Divisione di un triangolo ottusangolo in 3 parti uguali

ABC è un triangolo ottusangolo con lati lunghi 16, 52 e 60.



Prolungare verso sinistra il lato CB e dal vertice A abbassare la perpendicolare AD.

ADB è un triangolo rettangolo che ha lati lunghi 36, 48 e 60.

Il triangolo ABC deve essere diviso in tre poligoni con aree uguali.

Nel Trattato, l'area di ABC è calcolata come differenza fra l'area di ADB e quella di ADC:

* $S_{ADB} = AD * DB/2 = 48 * 36/2 = 864;$

* $S_{ADC} = AD * DC/2 = 48 * 20/2 = 480;$

* $S_{ABC} = S_{ADB} - S_{ADC} = 864 - 480 = 384.$

La soluzione più semplice per ricavare l'area di ABC è:

$$S_{ABC} = AD * CB/2 = 48 * 16/2 = 384.$$

Ciascuno dei tre poligoni fra i quali va diviso ABC deve avere area uguale a:

$$S_{ABC}/3 = 384/3 = 128.$$

Tracciare la perpendicolare CG rispetto al lato di base CB: nel Trattato è fornita la sua lunghezza:

$$CG = (21 + 1/3).$$

ABC deve essere diviso in tre parti uguali con la tracciatura di due segmenti, OF e LH, paralleli a CG e perpendicolari a DB (e a CB).

Moltiplicare la lunghezza di CG per sé stessa:

$$CG^2 = (21 + 1/3)^2 = (455 + 1/9).$$

L'area del triangolo GCB è:

$$S_{GCB} = CB * CG/2 = 16 * (21 + 1/2)/2 = (170 + 2/3).$$

Per ricavare la lunghezza di OF occorre risolvere una proporzione:

$$CG^2 : OF^2 = S_{GCB} : S_{OFB}$$

$$(455 + 1/9) : OF^2 = (170 + 2/3) : 128$$

$$OF^2 = (455 + 1/9 * 128)/(170 + 2/3) = (341 + 1/3) \quad e$$

$$OF = \sqrt{(341 + 1/3)}.$$

L'area di AGC è:

$$S_{AGC} = S_{ABC} - S_{GCB} = 384 - (170 + 2/3) = (213 + 1/3).$$

Per ricavare la lunghezza di LH occorre risolvere la proporzione che segue:

$$S_{AGC} : S_{ALH} = CG^2 : LH^2$$

$$(213 + 1/3) : 128 = (455 + 1/9) : LH^2$$

$$LH^2 = 128 * (455 + 1/9)/(213 + 1/3) = (273 + 1/15) \quad e$$

$$LH = \sqrt{(273 + 1/15)}.$$

ABC è così ripartito in tre poligoni ciascuno di area uguale a 128:

- * il triangolo OFB;
- * il pentagono non regolare LOFCH;
- * il triangolo ALH.

----- APPROFONDIMENTO -----

Questo problema è collegato al n. 3 della Tavola XVII e al n. 4 della Tavola XVIII.

Nello schema sono presenti due terne derivate.

Il triangolo rettangolo ADB ha lati lunghi:

- * DB = 36;
- * AD = 48;
- * AB = 60.

36-48-60 formano una terna derivata dalla primitiva 3-4-5 i cui membri sono moltiplicati per 12.

Il triangolo rettangolo ADC ha lati lunghi:

- * DC = 20;
- * AD = 48;
- * AC = 52.

20-48-52 formano una terna derivata dalla primitiva 5-12-13 i cui componenti sono moltiplicati per 4.

%%%%%%%%%

Prolungare verso il basso il lato AC e dal vertice A tracciare la perpendicolare BP: questa ultima è l'altezza del triangolo ABC rispetto al lato AC: essa cade fuori dal triangolo perché questo è ottusangolo.

La lunghezza di BP è ricavata da:

$BP = 2 * S_{ABC}/AB = 2 * 384/60 = (12 + 4/5)$: sullo schema contenuto nel Trattato è scritto "14 + 10/13".

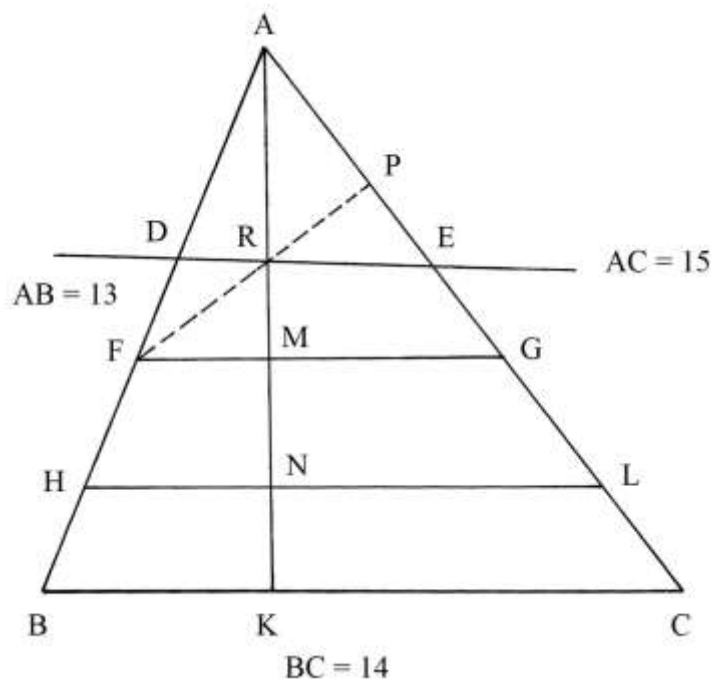
Sempre sullo schema originale sono scritte le altre seguenti lunghezze:

- * $AG = (33 + 1/3)$;
- * $GB = (26 + 2/3)$;
- * $AL = \sqrt{(666 + 2/3)}$;
- * $AH = \sqrt{(1622 + 2/3)}$;
- * $FB = \sqrt{192}$;
- * $OF = \sqrt{(344 + 1/9)}$;
- * $CP = 6 + 2/13$ (?).

Queste lunghezze non sono state qui verificate.

Divisione di un triangolo scaleno con lati lunghi 13, 14 e 15

ABC è il consueto triangolo scaleno con lati lunghi 13, 14 e 15. La base BC è lunga 14 e l'altezza AK è 12.



La costruzione e la sua descrizione sono poco comprensibili.

Una procedura pare contenere i seguenti passi:

- * moltiplicare la lunghezza di BC per sé stessa: $14 * 14 = 196$;
- * moltiplicare per $2/3$: $196 * 2/3 = (130 + 2/3)$;
- * estrarre la radice quadrata: $\sqrt{(130 + 2/3)} \approx 11,43$, lunghezza della corda HL.

Nel Trattato viene poi tracciata la corda FG che ha lunghezza uguale a:

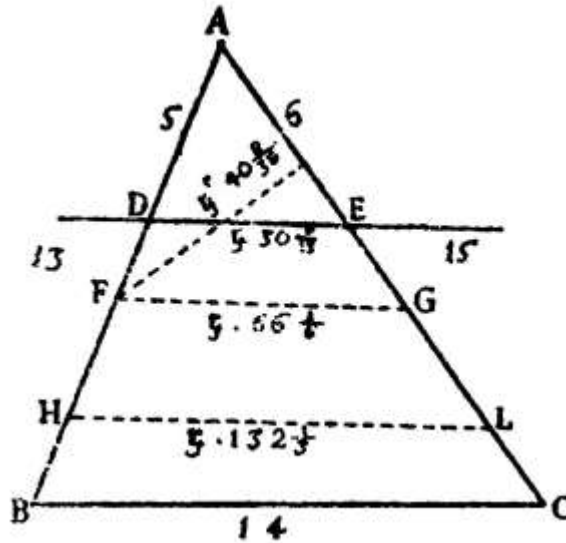
$$FG = \sqrt{(65 + 1/6)}.$$

È opportuno notare che:

$$(130 + 2/3) \approx 2 * (65 + 1/6).$$

Nello schema originale è tracciata una retta passante per i punti D e a distanze:

- * $AD = 5$;
- * $AE = 6$.



La retta non è parallela a BC, a FG e a HL.

Dal punto F è disegnata la perpendicolare al lato AC: è FP e taglia in R la retta De e l'altezza AK.

Nel trattato non è fornita alcuna informazione sullo scopo della costruzione.

Con una *notevole approssimazione*, il fine della costruzione potrebbe portare alla divisione del triangolo ABC in tre poligoni di area uguale:

- * il trapezio scaleno BHLC;
- * il trapezio scaleno HFGL;
- * il triangolo scaleno FAG.

TAVOLA XXI

La Tavola contiene *sei* esempi di triangoli di differenti tipi da dividere in parti uguali.

Divisione di un triangolo scaleno in 4 parti uguali usando un'altezza

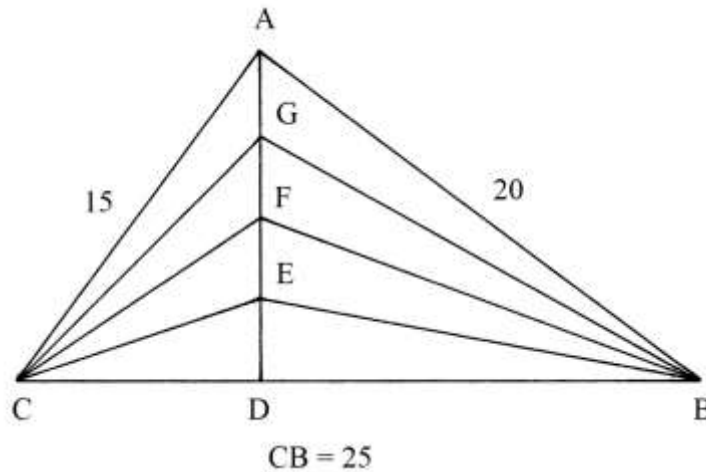
ABC è un triangolo scaleno che ha lati lunghi 15, 20 e 25.

Le lunghezze formano una terna derivata dalla primitiva 3-4-5.

AD è l'altezza relativa alla base CB ed è lunga 12.

L'area del triangolo ABC è:

$$S_{ABC} = CB * AD/2 = 25 * 12/2 = 150.$$



----- APPROFONDIMENTO -----

L'altezza AD divide ABC in due triangoli rettangoli che hanno in comune il cateto AD: ACD e ABD.

La lunghezza del cateto CD è data da:

$$CD^2 = AC^2 - AD^2 = 15^2 - 12^2 = 225 - 144 = 81 \quad e$$

$$CD = \sqrt{81} = 9.$$

La lunghezza di DB è data da:

$$DB = CB - CD = 25 - 9 = 16.$$

Torniamo al triangolo ABC.

Dividere in quattro parti uguali l'altezza AD:

$$AG = GF = FE = ED = AD/4 = 12/4 = 3.$$

Collegare i punti E, F e G con i vertici B e C.

I segmenti CE, BE, CF, BF, CG e BG dividono il triangolo in quattro poligoni che hanno aree uguali a un quarto di quella di ABC e cioè:

$$150/4 = 37,5 = 75/2.$$

I poligoni generati dalla divisione sono:

- * il triangolo scaleno CEB;
- * il quadrilatero CFBE;
- * il quadrilatero CGBF;
- * il quadrilatero CABG.

L'area del triangolo CEB è:

$$S_{CEB} = CB * ED/2 = 25 * 3/2 = 37,5.$$

L'area del quadrilatero CFBE può essere calcolata come la differenza fra le aree dei triangoli CFB e CEB:

$$S_{CFBE} = S_{CFB} - S_{CEB} = CB * FD/2 - 37,5 = 25 * 6/2 - 37,5 = 75 - 37,5 = 37,5.$$

Lo stesso metodo può essere usato per calcolare le aree degli altri due quadrilateri: CGBF e CABG.

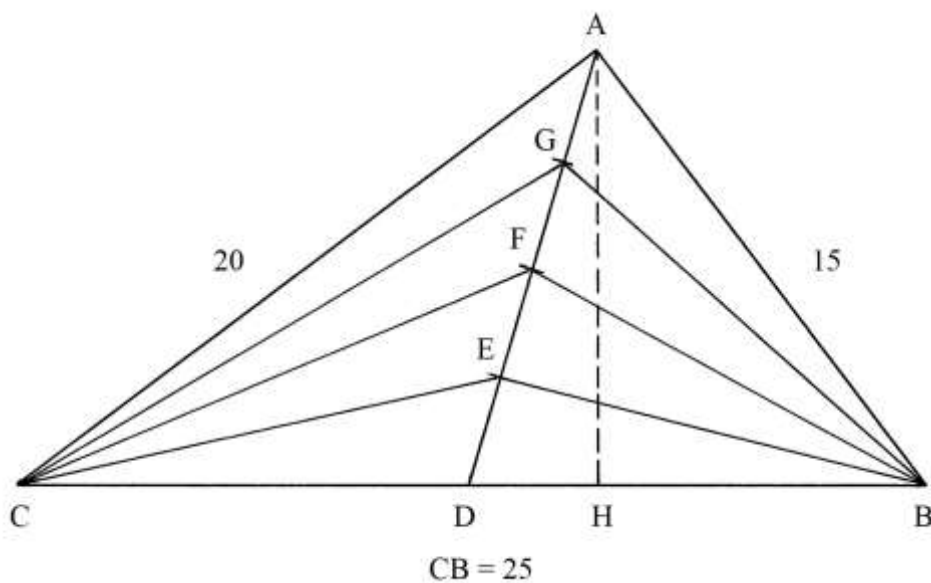
Sullo schema originale sono scritte le lunghezze dei segmenti che escono da C e da B:

- * $CE^2 = CD^2 + ED^2 = 9^2 + 3^2 = 81 + 9 = 90$ e
CE = $\sqrt{90}$;
- * $BE^2 = DB^2 + ED^2 = 16^2 + 3^2 = 256 + 9 = 265$ e
BE = $\sqrt{265}$;
- * $CF^2 + FD^2 = 9^2 + 6^2 = 81 + 36 = 117$ e

- $CF = \sqrt{117}$;
 * $BF^2 = DB^2 + FD^2 = 16^2 + 6^2 = 256 + 36 = 292$ e
 $BF = \sqrt{292}$;
 * $CG^2 = CD^2 + GD^2 = 9^2 + 9^2 = 81 + 81 = 162$ e
 $CG = \sqrt{162}$;
 * $BG^2 = DB^2 + GD^2 = 16^2 + 9^2 = 256 + 81 = 337$ e
 $BG = \sqrt{337}$.

Divisione di un triangolo scaleno utilizzando una mediana

ABC è un triangolo che ha lati lunghi 15-20-25, come nel caso del precedente problema: presenta una sola differenza: i lati obliqui, lunghi 15 e 25, sono scambiati di posizione.



AH è l'altezza relativa alla base BC ed è lunga 12.

D è il punto medio di CB ed è collegato al vertice A dalla *mediana* AD.

Quindi si ha:

$$CD = DB = CB/2 = 25/2 = 12,5.$$

ADH è un triangolo rettangolo e AD ne è l'ipotenusa.

La lunghezza del cateto DH è:

$$DH = CH - CD = 16 - 12,5 = 3,5.$$

La lunghezza di AD è data da:

$$AD^2 = AH^2 + DH^2 = 12^2 + 3,5^2 = 625/4 \quad e$$

$$AD = \sqrt{(625/4)} = 25/2 = 12,5.$$

Dividere AD in quattro parti uguali:

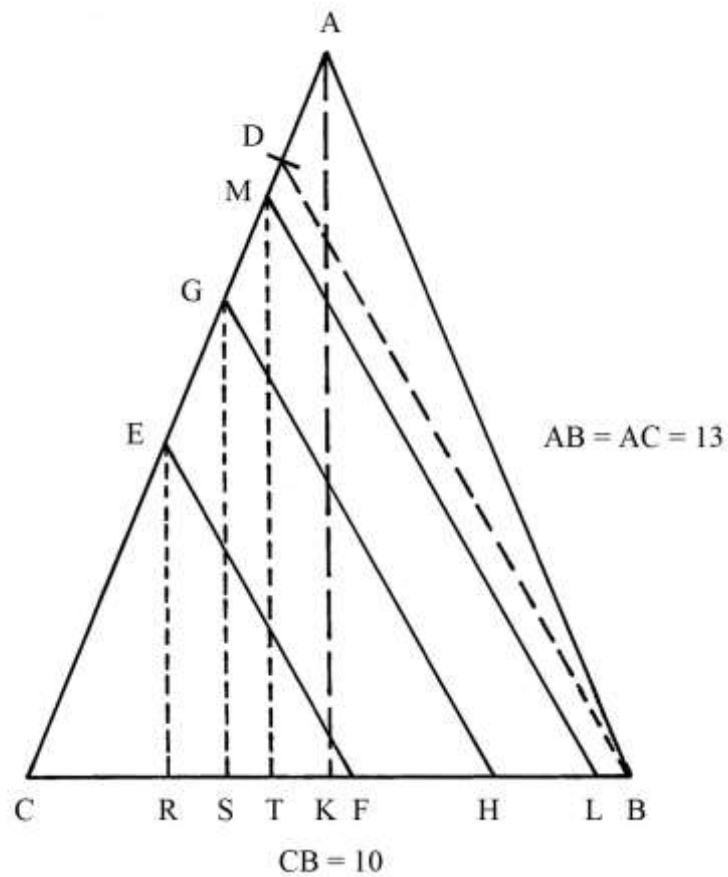
$$DE = EF = FG = GA = 12,5/4 = (3 + 1/8).$$

Nota: la descrizione del problema contenuta nel Trattato è errata e pare riferirsi al successivo *problema n. 3*.

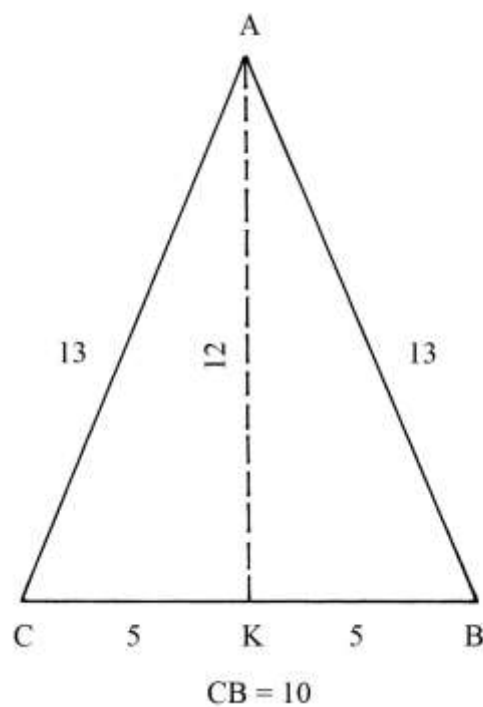
[3]

Divisione di un triangolo isoscele in 4 parti uguali

ABC è un triangolo isoscele che ha lati obliqui lunghi 13 e la base BC è 10.



L'altezza AK può essere ricavata in modo semplice: K è il punto medio della base e AK divide ABC in due triangoli rettangoli di uguali dimensioni, ABK e ACK .



La lunghezza di AK è data da:

$$AK^2 = AB^2 - KB^2 = AB^2 - (CB/2)^2 = 13^2 - (10/2)^2 = 169 - 25 = 144 \quad e$$

$$AK = \sqrt{144} = 12.$$

L'area dell'intero triangolo è:

$$S_{ABC} = CB * AK/2 = 10 * 12/2 = 60.$$

I due triangoli rettangoli ABK e ACK hanno entrambi area uguale a: $60/2 = 30$.

ABK e ACK possiedono lati con lunghezze che formano la terna primitiva 5 – 12 – 13.

Sul lato AC è fissato il punto D alle seguenti distanze:

* $AD = 2;$

* $DC = 11.$

Collegare D con B.

Il triangolo ABC deve essere diviso in quattro poligoni di aree uguali fra loro e con superficie di $60/4 = 15$, con corde *parallele* a DB.

La soluzione contenuta nel Trattato è abbastanza oscura e qui ne viene presentata una ricostruzione con alcune incertezze. Alcuni dati sono leggermente arrotondati per difetto all'intero più vicino.

* Moltiplicare la lunghezza dell'altezza AK per sé stessa: $12 * 12 = 144;$

* dividere per la lunghezza di AC: $144/13 = 11,077,$

arrotondato a 11;

* moltiplicare per sé stesso: $11 * 11 = 121;$

* sottrarre da 121 metà dell'area di ABC: $121 - 30 = 91;$

* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{91}$, lunghezza di MT;

* da M tracciare ML, parallela a DB;

* sottrarre da 91 metà dell'area di ABC: $91 - 30 = 61;$

* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{61}$, lunghezza di GS;

* da G disegnare GH, parallela a DB;

* sottrarre da 61 la metà dell'area di ABC: $61 - 30 = 31;$

* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{31}$, lunghezza di ER;

* da E tracciare la parallela a DB.

ABC è ora suddiviso fra quattro poligoni di area uguale a un quarto dello stesso triangolo:

* il quadrilatero AMLB;

* il trapezio MGHL;

* il trapezio GEFH;

* il triangolo ECF.

Le corde ML, GH e EF sono parallele a DB.

A loro volta, le altezze MT, GS e ER sono parallele a AK, altezza di ABC.

Infine, per conoscere la lunghezza di CF è sufficiente un semplice calcolo:

$$CF = 2 * S_{ECF}/ER = 2 * 15/\sqrt{31} \approx 5,39.$$

[4] Divisione di un triangolo scaleno in 5 parti uguali

ABC è un triangolo scaleno che ha lati lunghi 65, 70 e 75: la base CB è lunga 70.

Queste lunghezze formata una terna derivata da quella 13-14-15 i cui membri sono moltiplicati per 5.

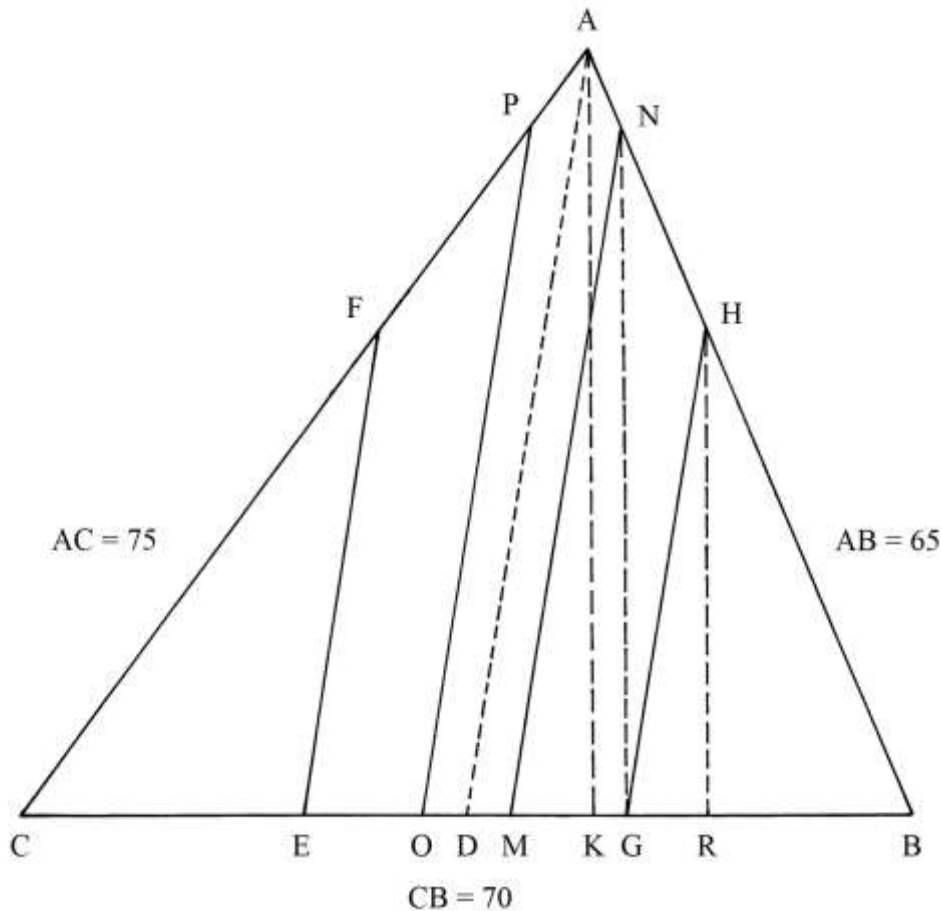
L'altezza AK è lunga 60 e cioè *cinque* volte quella del corrispondente triangolo 13-14-15.

L'area del triangolo è:

$$S_{ABC} = AK * CB/2 = 60 * 70/2 = 2100.$$

AD è la mediana relativa al lato CB:

$$CD = DB = CB/2 = 70/2 = 35.$$



La lunghezza di AD è data da:

$$AD^2 = AK^2 + DK^2.$$

Dobbiamo ricavare la lunghezza di DK. CK è lungo 45 e CD è 35:

$$DK = CK - CD = 45 - 35 = 10.$$

$$AD^2 = 60^2 + 10^2 = 3600 + 100 = 3700 \quad e$$

$$AD = \sqrt{3700}.$$

La procedura proposta nel Trattato per effettuare la divisione in cinque parti contiene i seguenti passi:

- * dividere per 2 l'area di ABC: $2100/2 = 1050$;
- * calcolare i $2/5$ dell'area di ABC: $2/5 * 2100 = 840$;
- * moltiplicare per sé stessa la lunghezza dell'altezza AK: $60 * 60 = 3600$;
- * calcolare la differenza fra i quadrati della mediana AD e dell'altezza AK:
 $AD^2 - AK^2 = 3700 - 3600 = 100$;
- * estrarre la radice quadrata: $\sqrt{100} = 10$;
- * risolvere la proporzione:
 $S_{ABC}/2 : AD^2 = 2/5 * S_{ABC} : PO^2$
 $1050 : 3700 = 840 : PO^2$
 $PO^2 = (3700 * 840)/1050 = 2960 \quad e$
 $PO = \sqrt{2960}$;
- * $NM = PO = \sqrt{2960}$;
- * dividere per 2 il quadrato di PO: $PO^2/2 = 2960/2 = 1480$;
- * estrarre la radice quadrata: $\sqrt{1480}$, lunghezza di FE e di HG.

ABC è diviso in cinque poligoni, tutti di area uguale a *un quinto* della sua:

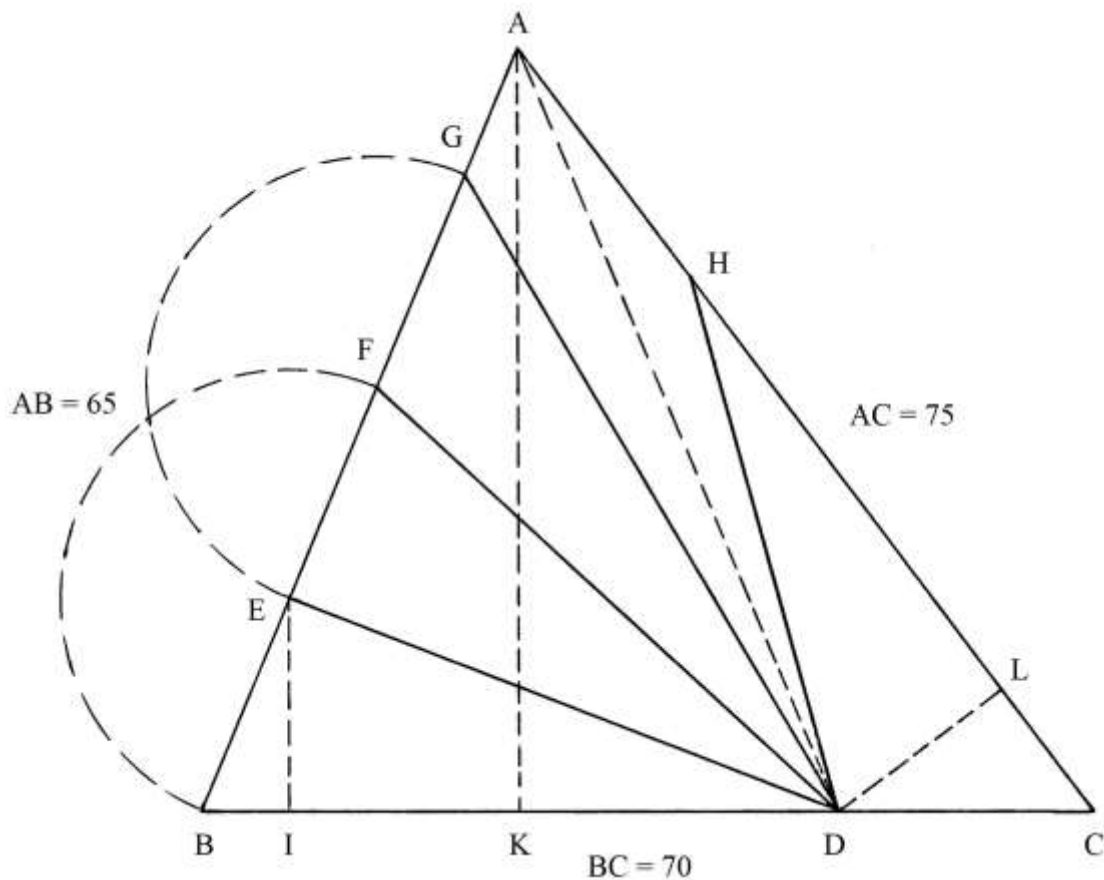
$$2100/5 = 420.$$

I cinque poligoni sono delimitati da corde parallele alla mediana AD:

- * il pentagono non regolare OPANM;
- * i trapezi scaleni EFPO e GHNM;
- * i triangoli scaleni CFE e BHG.

Divisione di un triangolo scaleno in 5 parti uguali con corde uscenti da un punto

ABC è un triangolo scaleno con lati lunghi 65-70-75, come nel caso del precedente problema.



L'altezza AK è lunga 60.

Il triangolo deve essere diviso in cinque poligoni di area uguale a un quinto di quella di ABC che, dal precedente problema, sappiamo essere

$$S_{ABC} = BC * AK/2 = 70 * 60/2 = 2100 \quad \text{e}$$

$$2100/5 = 420, \text{ area dei cinque poligoni.}$$

La divisione deve essere ottenuta tracciando quattro corde uscenti dal punto D, posizionato sul lato BC, a distanze:

- * DC = 20;
- * DB = 50.

Il primo poligono da costruire è il triangolo DEB: la sua altezza EI ha lunghezza che è data da:

$$EI = 2 * S_{DEB}/BD = 2 * 420/50 = (16 + 4/5).$$

Nel Trattato è indicata la lunghezza di BE, senza alcun calcolo: è $(18 + 1/5)$. Anche le lunghezze di EF e di FG sono uguali a quella di BE e i punti F e G sono fissati su AB con l'aiuto del compasso.

Tracciare le corde DF e DG.

Infine, da D condurre la perpendicolare a HC: l'altezza DL è, secondo gli Autori del Trattato, lunga 16.

Il triangolo DCH deve avere anch'esso area uguale a 420: la sua base HC ha lunghezza che è data da:

$$HC = 2 * S_{DCH}/DL = 2 * 420/16 = (52 + 1/2).$$

Anche il quadrilatero GAHD ha area uguale a un quinto di quella di ABC. I suoi lati AG e AH hanno lunghezze:

* $AG = AB - 3 * BE = 65 - 3 * (18 + 1/5) = 65 - (54 + 3/5) = (10 + 2/5);$

* $AH = AC - HC = 75 - (52 + 1/2) = (22 + 1/2).$

La sua diagonale maggiore è AD che è lunga:

$$AD^2 = AK^2 + KD^2.$$

KD è lungo:

$$KD = BC - BK - DC = 70 - 25 - 20 = 25.$$

$$AD^2 = 60^2 + 25^2 = 3600 + 625 = 4225 \quad e$$

$$AD = \sqrt{4225} = 65.$$

ABD è un *triangolo isoscele*.

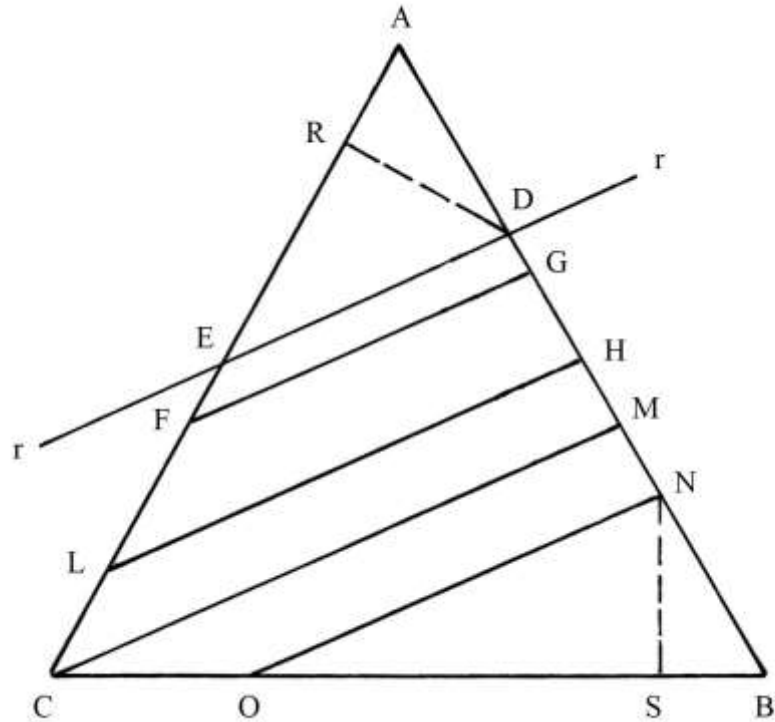
In conclusione, ABC è ripartito in cinque poligoni di area uguale a un quinto:

* i triangoli scaleni DEB, DEF, DFG e DCH;

* il quadrilatero GAHD.

Divisione di un triangolo equilatero in cinque parti uguali

ABC è un triangolo equilatero di cui non è fornita la lunghezza dei lati, né altra informazione numerica.



Il triangolo è attraversato da una retta, r , che non è parallela o perpendicolare ad alcuno dei lati: essa passa per i punti D e E.

Dal punto D è tracciata l'altezza DR di cui è fornita la lunghezza:

$$DR = \sqrt{6 + \frac{3}{4}}.$$

È anche disegnata l'altezza NS del triangolo ONB.

Nel Trattato viene suggerito di risolvere il problema con il metodo usato per il precedente problema n. 4 e non sono fornite altre informazioni.

Stando allo schema originale, sopra ridisegnato, ABC sembra diviso in cinque poligoni:

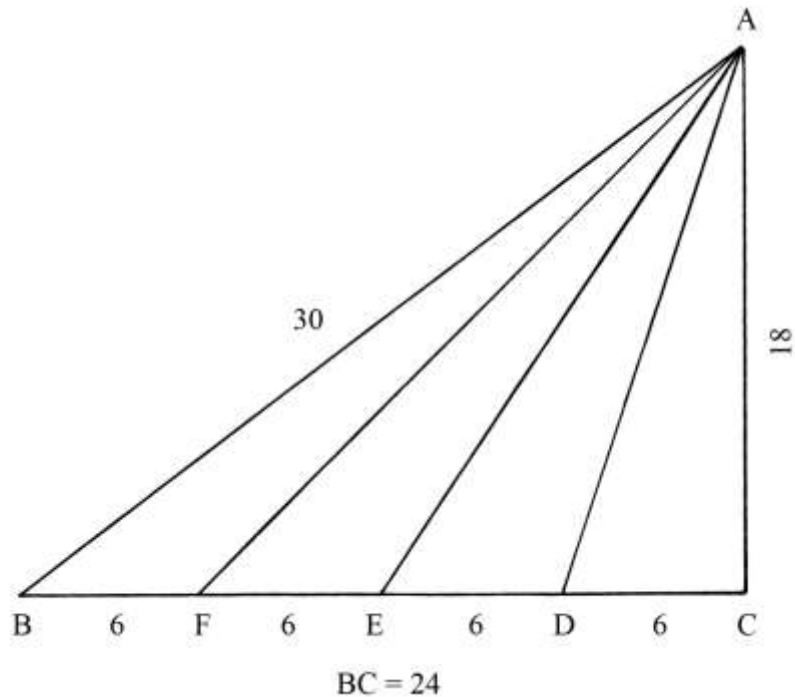
- * il triangolo scaleno AGF;
- * il trapezio scaleno FGHL;
- * il trapezio scaleno LHMC;
- * il trapezio scaleno CMNO;
- * il triangolo scaleno ONB.

TAVOLA XXII

La Tavola contiene *sette* esempi di triangoli di varie tipologie divisi in *quattro* parti uguali con differenti metodi.

Divisione di un triangolo rettangolo in 4 parti uguali

ABC è un triangolo rettangolo con cateti lunghi 18 e 24 e l'ipotenusa AB lunga 30.



Le lunghezze dei lati formano la terna 18-24-30 chiaramente derivata dalla primitiva 3-4-5.
L'area di ABC è:

$$S_{ABC} = AC * BC/2 = 18 * 24/2 = 216.$$

Il triangolo deve essere diviso in quattro parti uguali con tre corde uscenti dal vertice A.

Dividere in quattro parti uguali il cateto BC:

$$BF = FE = ED = DC = 24/4 = 6.$$

Tracciare le corde AD, AE e AF.

ABC è ora diviso in quattro triangoli di area uguale a:

$$S_{ABC}/4 = 216/4 = 54.$$

I quattro poligoni sono:

- * il triangolo rettangolo ACD;
- * i triangoli scaleni ADE, AEF e AFB.

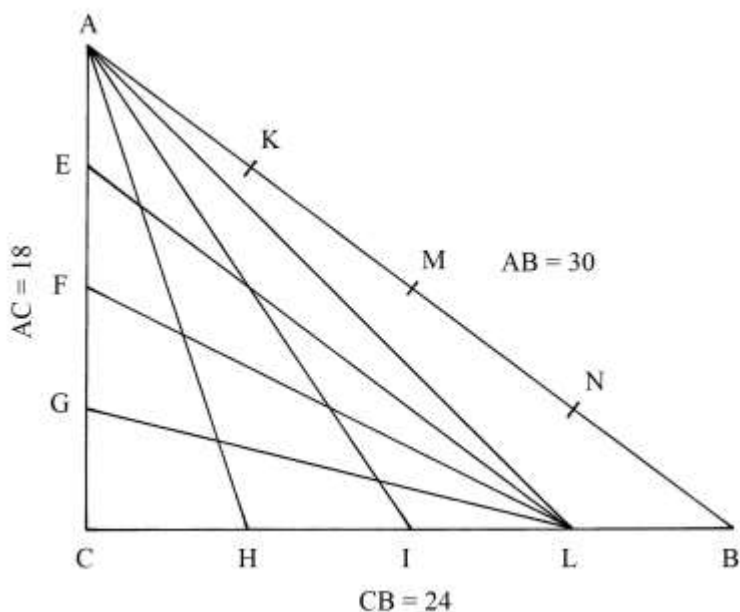
Verifichiamo l'area di due dei triangoli:

- * $S_{ACD} = AC * CD/2 = 18 * 6/2 = 54;$
- * $S_{ADE} = AC * DE/2 = 18 * 6/2 = 54.$

I quattro triangoli generati dalla divisione hanno in comune l'altezza AC.

Divisione di un triangolo rettangolo

ABC è un triangolo rettangolo che ha cateti lunghi 18 e 24 e l'ipotenusa AB lunga 30.



Anche questa terna 18-24-30 deriva dalla primitiva 3-4-5.

L'area del triangolo è:

$$S_{ABC} = AC * CB/2 = 18 * 24/2 = 216.$$

Dividere tutti e tre i lati in quattro parti uguali:

- * $AE = EF = FG = GC = AC/4 = 18/4 = (4 + 1/2);$
- * $AK = KM = MN = NB = AB/4 = 30/4 = (7 + 1/2);$
- * $CH = HI = IL = LB = CB/4 = 24/4 = 6.$

Dal vertice C sono tracciate tre corde: AH, AI e AL. Esse dividono ABC in quattro poligoni:

- * il triangolo rettangolo ACH;
- * i triangoli scaleni ottusangoli AHI, AIL e ALB.

I quattro triangoli hanno area uguale a un quarto di quella di ABC:

$S_{ACH} = AC * CH/2 = 18 * 6/2 = 54$ e lo stesso vale per gli altri tre perché i quattro triangoli hanno in comune un'altezza, AC.

ACL è un triangolo rettangolo che ha area:

$$S_{ACL} = AC * CL/2 = 18 * (6 * 3)/2 = 162.$$

Dal vertice L sono disegnate tre corde: LE, LF e LG. Esse determinano tre poligoni, di area uguale:

- * il triangolo rettangolo ACH;
- * i triangoli ottusangoli AHI e AIL.

L'area del triangolo ACH è:

$$S_{ACH} = AC * CH/2 = 18 * 6/2 = 54.$$

Anche i triangoli AHI e AIL hanno area uguale a 54.

----- APPROFONDIMENTO -----

Il triangolo ABC può scomposto in quattro triangoli tracciando tre corde uscenti dal vertice C: sono CK, CM e CN.

Le corde originano quattro triangoli: CAK, CKM, CMN e CNB.

L'area di ABC è, come calcolato sopra uguale a 216.

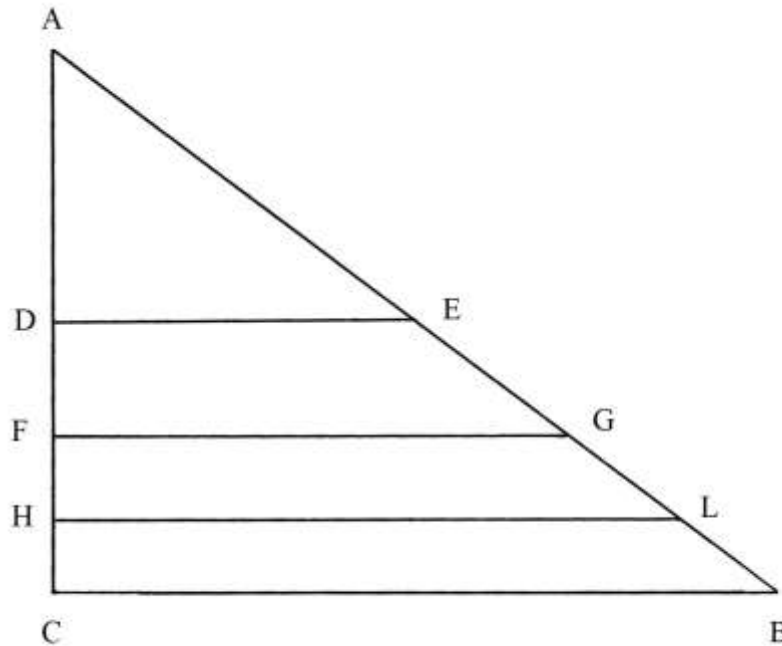
L'area di ciascuno dei quattro triangoli è: $216/4 = 54.$

Nello schema originale non è presente questa ulteriore ripartizione.

[3]

Divisione di un triangolo rettangolo in 4 parti uguali

ABC è un triangolo rettangolo che ha i lati lunghi 12 e 16 e l'ipotenusa è 20.
La terna 12-16-20 deriva dalla primitiva 3-4-5.



ABC deve essere diviso in quattro parti con aree uguali, per mezzo di corde parallele al cateto orizzontale BC.

L'area del triangolo ABC è:

$$S_{ABC} = AC * CB/2 = 12 * 16/2 = 96.$$

I quattro poligoni devono avere area uguale a: $96/4 = 24.$

La procedura usata contiene i seguenti passi:

- * moltiplicare per sé stessa la lunghezza di CB: $16 * 16 = 256;$
- * moltiplicare per $\frac{3}{4}$: $256 * \frac{3}{4} = 192;$
- * estrarre la radice quadrata: $\sqrt{192}$, lunghezza della corda HL;
- * dividere per 2 l'area di ABC: $256/2 = 128;$
- * estrarre la radice quadrata: $\sqrt{128}$, lunghezza della corda FG;
- * dividere per 4 l'area di ABC: $256/4 = 64;$
- * estrarre la radice quadrata: $\sqrt{64} = 8$, lunghezza della corda DE.

ABC è diviso in quattro poligoni:

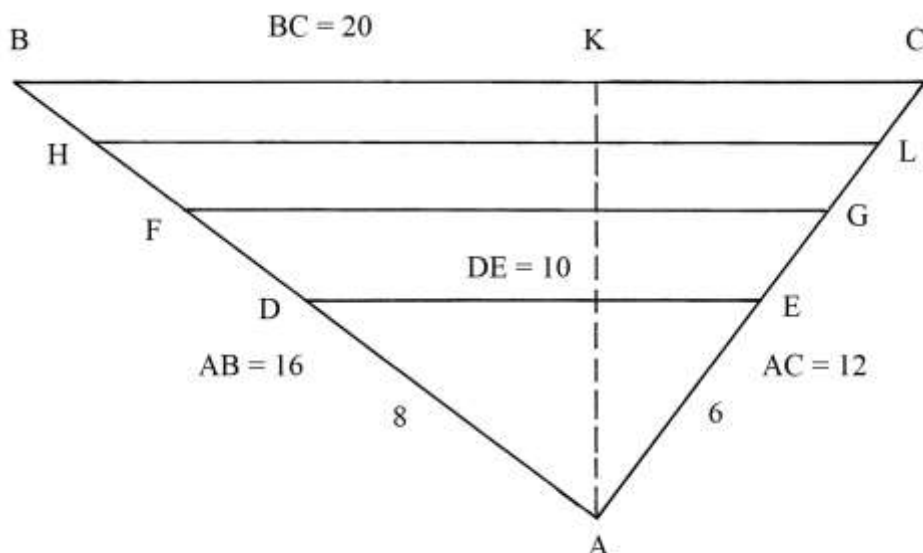
- * il triangolo rettangolo AED;
- * i trapezi rettangoli DEGF, FGLH e HLBC.

Divisione di un triangolo in 4 parti uguali con corde parallele alla base

ABC è un triangolo scaleno che ha la base BC disegnata in alto e lunga 20.

I due lati obliqui sono lunghi:

- * AB = 16;
- * AC = 12.



Le lunghezze dei lati formano la terna 12-16-20 che deriva dalla primitiva 3-4-5.

Il triangolo è *retto* con l'angolo in A ampio 90° .

L'area del triangolo è:

$$S_{ABC} = AB * AC / 2 = 16 * 12 / 2 = 96.$$

AK è l'altezza relativa all'ipotenusa BC ed è lunga:

$$AK = 2 * S_{ABC} / BC = 2 * 96 / 20 = 9,6.$$

ABC deve essere diviso in quattro poligoni con corde parallele a BC e con aree uguali a:
 $96 / 4 = 24$.

La procedura risolutiva è la seguente:

- * moltiplicare la lunghezza di BC per sé stessa: $20 * 20 = 400$;
- * moltiplicare per $\frac{3}{4}$: $400 * \frac{3}{4} = 300$;
- * estrarre la radice quadrata: $\sqrt{300} \approx 17,32$, lunghezza di HL;
- * dividere per 2 il quadrato della lunghezza di BC: $400 / 2 = 200$;
- * estrarre la radice quadrata: $\sqrt{200} \approx 14,14$, lunghezza di FG;
- * dividere per 4 il quadrato di BC: $400 / 4 = 100$;
- * estrarre la radice quadrata: $\sqrt{100} = 10$, lunghezza di DE.

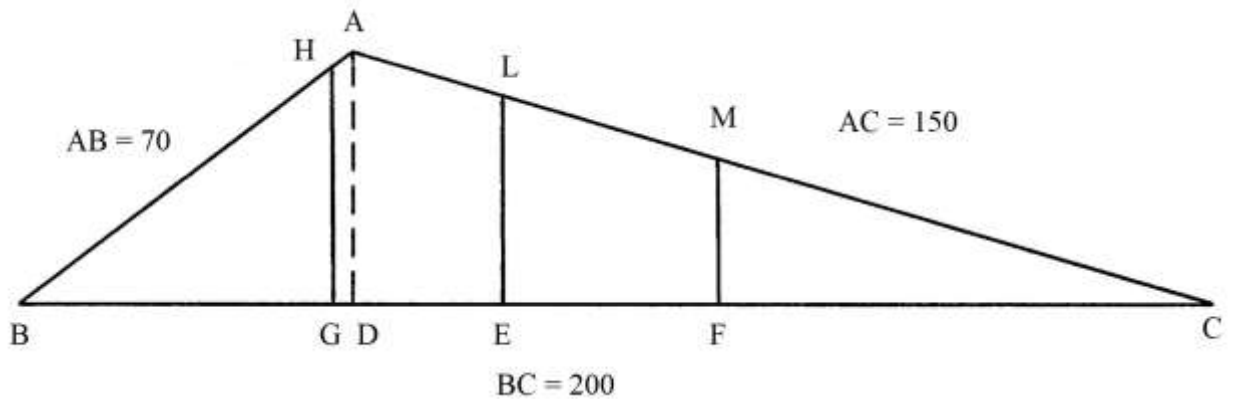
I triangoli ABC e ADE sono *simili* e le lunghezze dei loro lati stanno in proporzione

2 : 1:

$$AB : AD = AC : AE = BC : DE = 2 : 1.$$

Divisione di un triangolo scaleno in 4 parti uguali con corde parallele a un'altezza

ABC è un triangolo scaleno che deve essere diviso in quattro parti uguali con corde parallele all'altezza AD.



Le dimensioni sono:

- * $AB = 70$;
- * $AC = 150$;
- * $BC = 200$;
- * $AD = 42$.

L'area del triangolo è:

$$S_{ABC} = BC * AD/2 = 200 * 42/2 = 4200.$$

Nel Trattato, la lunghezza della proiezione BD è ricavata con la formula già incontrata:

$$CD = (BC^2 + AC^2 - AB^2)/(2 * BC) = (200^2 + 150^2 - 70^2)/(2 * 200) = \\ = (40000 + 22500 - 4900)/400 = 144.$$

La lunghezza di AD è data da:

$$AD^2 = AC^2 - DC^2 = 150^2 - 144^2 = 22500 - 20736 = 1764 \quad e \\ AD = \sqrt{1764} = 42.$$

Il triangolo ABC deve essere diviso in quattro poligoni con aree uguali a:

$$S_{ABC}/4 = 4200/4 = 1050.$$

Il triangolo ABD ha area:

$$S_{ABD} = BD * AD/2 = 56 * 42/2 = 1176, \text{ valore maggiore di } 1050.$$

Il triangolo HBG deve avere area uguale a 1050 e per ricavare la lunghezza di HG occorre risolvere la seguente proporzione:

$$S_{ABD} : AD^2 = S_{HBG} : HG^2 \\ 1176 : 42^2 = 1050 : HG^2 \\ 1176 : 1764 = 1050 : HG^2 \\ HG^2 = (1764 * 1050)/1176 = 1575 \quad e \\ HG = \sqrt{1575}.$$

Per calcolare la lunghezza di BG occorre risolvere un'altra proporzione:

$$S_{ABD} : BD^2 = S_{HBG} : BG^2 \\ 1176 : 56^2 = 1050 : BG^2 \\ 1176 : 3136 = 1050 : BG^2 \\ BG^2 = (3136 * 1050)/1176 = 2800 \quad e \\ BG = \sqrt{2800}.$$

L'area del triangolo ACD è:

$$S_{ACD} = AD * DC/2 = 42 * 144/2 = 3024.$$

L'area del triangolo LCE deve essere uguale a metà di quella di ABC:

$$S_{LCE} = S_{ABC}/2 = 4200/2 = 2100.$$

Per ottenere la lunghezza di LE occorre risolvere la proporzione che segue:

$$S_{ACD} : AD^2 = S_{LCE} : LE^2 \\ 3024 : 42^2 = 2100 : LE^2 \\ 3024 : 1764 = 2100 : LE^2 \\ LE^2 = (1764 * 2100)/3024 = 1225 \quad e$$

$$LE = \sqrt{1225} = 35.$$

Il triangolo MFC deve avere area uguale a un quarto di quella di ABC e cioè 1050.
Per ricavare la lunghezza di MF occorre risolvere la proporzione che segue:

$$S_{LCE} : LE^2 = S_{MFC} : MF^2$$

$$2100 : 35^2 = 1050 : MF^2$$

$$2100 : 1225 = 1050 : MF^2$$

$$MF^2 = (1225 * 1050) / 2100 = 612,5 \quad e$$

$$MF = \sqrt{612,5}.$$

La lunghezza di FC è data da:

$$FC = 2 * S_{MFC} / MF = 2 * 1050 / \sqrt{612,5} \approx 84,85.$$

La lunghezza di EC è data da:

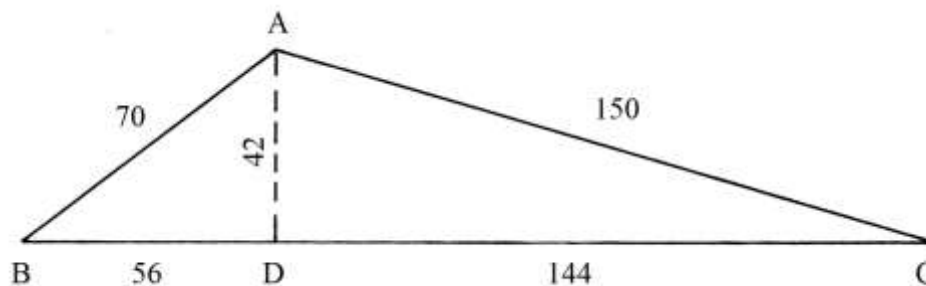
$$EC = 2 * S_{LCE} / LE = 2 * (2 * 1050) / 35 = 4200 / 35 = 120.$$

La lunghezza di EF è:

$$EF = EC - FC = 120 - 84,85 = 35,15.$$

----- APPROFONDIMENTO -----

L'altezza AD divide ABC in due triangoli rettangoli che hanno la stessa AD come comune cateto: sono ABD e ACD.



La lunghezza di BD è data da:

$$BD^2 = AB^2 - AD^2 = 70^2 - 42^2 = 4900 - 1764 = 3136 \quad e$$

$$BD = \sqrt{3136} = 56.$$

La lunghezza di DC è:

$$DC = BC - BD = 200 - 56 = 144.$$

Il triangolo rettangolo ABD ha lati lunghi:

* $AD = 42 = 3 * 14;$

* $BD = 56 = 4 * 14;$

* $AD = 70 = 5 * 14.$

La terna 42-56-70 deriva dalla primitiva 3-4-5.

Il triangolo rettangolo ACD ha lati lunghi:

* $AD = 42 = 7 * 6;$

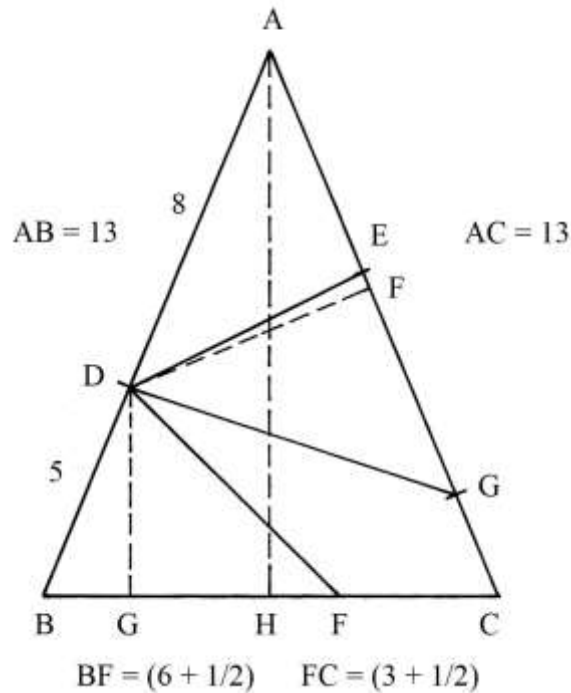
* $DC = 144 = 24 * 6;$

* $AC = 150 = 25 * 6.$

La terna 42-144-150 deriva dalla primitiva 7-24-25.

Divisione di un triangolo isoscele in 4 parti uguali

ABC è un triangolo isoscele che ha la base BC lunga 10 e i lati obliqui AB e AC lunghi 13.



Sul lato AB è fissato un punto, D, a distanze:

- * DB = 5;
- * DA = 8.

Il triangolo ABC deve essere diviso in quattro parti con aree uguali.

La lunghezza dell'altezza AH è data da:

$$\begin{aligned} AH^2 &= AB^2 - BH^2 = AB^2 - (BC/2)^2 = 13^2 - (10/2)^2 = 13^2 - 5^2 = \\ &= 169 - 25 = 144 \quad e \\ AH &= \sqrt{144} = 12. \end{aligned}$$

L'area di ABC è:

$$S_{ABC} = AH * BC/2 = 12 * 10/2 = 60.$$

I quattro poligoni nei quali va ripartito ABC devono tutti avere area uguale a:
 $60/4 = 15$.

Dal punto D tracciare le perpendicolari ai lati AC e BC: sono DF e DG.

La lunghezza di DG è ricavata da una proporzione:

$$\begin{aligned} AB : AH &= BD : DG \\ 13 : 12 &= 5 : DG \\ DG &= (12 * 5)/13 = 60/13 = (4 + 8/13). \end{aligned}$$

L'area del triangolo BDF è 15 e la lunghezza della sua base BF è data da:

$$BF = 2 * S_{BDF}/DG = (2 * 15)/(4 + 8/13) = (6 + 1/2).$$

Il segmento FC è lungo:

$$FC = BC - BF = 10 - (6 + 1/2) = (3 + 1/2).$$

Nel Trattato, la lunghezza di DF è ottenuta con la seguente procedura:

- * moltiplicare per sé stessa la lunghezza di AB: $13 * 13 = 169$;
- * moltiplicare per sé stessa la lunghezza di DA: $8 * 8 = 64$;
- * risolvere la seguente proporzione:
 $AB^2 : S_{ABC}/4 = DA^2 : DF$

$$13^2 : 15 = 8^2 : DF$$

$$169 : 15 = 64 : DF$$

$$DF = (15 * 64)/169 = 960/169 \approx 5,68.$$

Per stabilire la lunghezza di AG, base di due dei quattro poligoni divisori, occorre procedere come segue:

$$AG = 2 * S_{ADG}/DF = 2 * (2 * 15)/(960/169) = (10 + 18/32) \approx 60/5,68 \approx 10,56.$$

Determinare il punto medio di AG: è F e si colloca a distanza da A e da G che è:

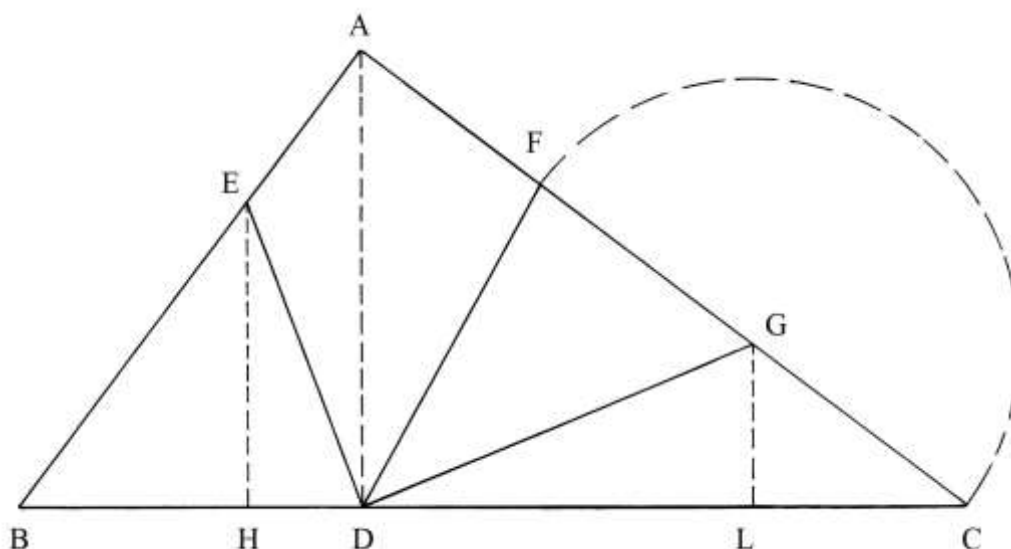
$$AE = EG = AG/2 = (10 + 18/32)/2 = (5 + 9/32).$$

ABC risulta diviso in quattro poligoni tutti di area 15:

- * i triangoli BDF, ADE e DEG;
- * il quadrilatero DGCF.

Divisione di un triangolo rettangolo in 4 parti uguali

ABC è un triangolo rettangolo, non espressamente riconosciuto come tale nel Trattato.



L'ipotenusa BC è disposta orizzontalmente ed è lunga 25. I cateti AB e AC sono lunghi rispettivamente 15 e 20.

Il triangolo è rettangolo e la riprova è:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

$$25^2 = 15^2 + 20^2$$

$$625 = 225 + 400$$

$$625 = 625.$$

15-20-25 formano una terna derivata dalla primitiva 3-4-5.

L'area del triangolo è data da:

$$S_{ABC} = AB * AC/2 = 15 * 20/2 = 150.$$

A partire dall'area è possibile ricavare la lunghezza dell'altezza AD:

$$AD = 2 * S_{ABC}/BC = 2 * 150/25 = 12.$$

La lunghezza di BD è data da:

$$BD^2 = AB^2 - AD^2 = 15^2 - 12^2 = 225 - 144 = 81 \quad e$$

$$BD = \sqrt{81} = 9.$$

La lunghezza di DC è:

$$DC = BC - BD = 25 - 9 = 16.$$

ABC deve essere diviso in quattro poligoni di area uguale a un quarto – $150/4 = 37,5$ – con tre corde uscenti da D.

Il triangolo BED ha area di 37,5: l'altezza EH ha lunghezza che è data da:

$$EH = 2 * S_{BED}/BD = 2 * 37,5/9 = 75/9 = (8 + 1/3).$$

La lunghezza di EB è calcolata con una proporzione:

$$AB : EB = AD : EH \quad \text{da cui:}$$

$$EB = (AB * EH)/AD = 15 * (8 + 1/3)/12 = (10 + 5/12).$$

AE è lungo:

$$AE = AB - EB = 15 - (10 + 5/12) = (4 + 7/12).$$

Il triangolo DCG è un altro dei poligoni con area uguale a 37,5. L'altezza GL ha lunghezza che è data da:

$$GL = 2 * S_{DCG}/DC = 2 * 37,5/16 = 75/16 = (4 + 11/16).$$

Per ricavare la lunghezza di GC occorre risolvere la proporzione che segue:

$$AD : AC = GL : GC$$

$$12 : 20 = (4 + 11/16) : GC$$

$$GC = 20 * (4 + 11/16)/12 = (7 + 13/16).$$

La lunghezza di GF è uguale a quella di GC ed è sufficiente riportarla con il compasso facendo centro in G con raggio GC.

Il triangolo ABC è diviso in quattro poligoni di area uguale a un quarto della sua e cioè $150/4 = 37,5$.

I poligoni sono:

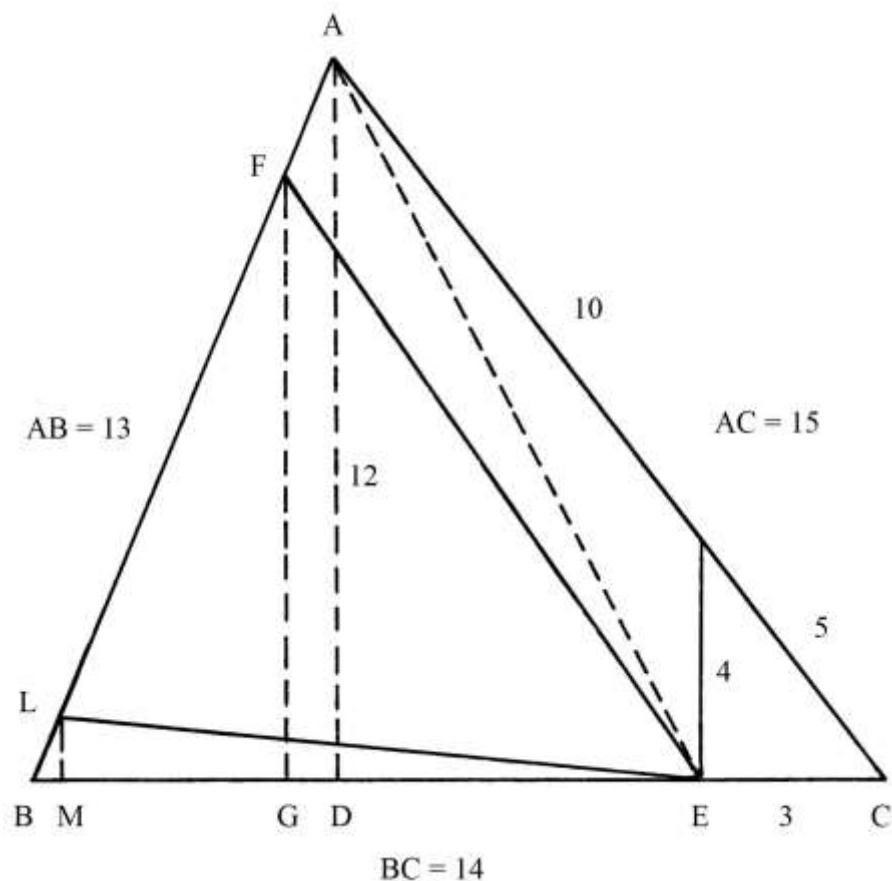
- * i triangoli BED; DCG e DFG;
- * il quadrilatero AFDE.

TAVOLA XXIII

La Tavola contiene *sette* esempi di triangoli e segmenti divisi in proporzioni differenti.

Divisione di un triangolo 13-14-15

ABC è un triangolo scaleno che ha i lati lunghi come la terna 13-14-15.



La base BC è lunga 14.

AD è l'altezza relativa alla base BC: dalle soluzioni di precedenti problemi relativi al triangolo 13-14-15 conosciamo la sua lunghezza:

$$AD = 12.$$

Sempre dai precedenti problemi sappiamo le lunghezze delle proiezioni BD e DC:

* $BD = 5;$

* $DC = 9.$

L'area di ABC è:

$$S_{ABC} = AD * BC/2 = 12 * 14/2 = 84.$$

Sulla base BC è fissato un punto, E, a distanze:

* $EC = 3;$

* $EB = 11.$

Dal punto E elevare la perpendicolare HE che nel Trattato è indicata come avere lunghezza di 4.

EHC è un triangolo rettangolo e HC è la sua ipotenusa la cui lunghezza è data da:

$$HC^2 = EC^2 + HE^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 \quad e$$

$$HC = \sqrt{25} = 5.$$

Il triangolo EHC ha lati con lunghezze che formano la terna primitiva 3-4-5.

L'area di EHC è:

$$S_{EHC} = EC * HE/2 = 3 * 4/2 = 6.$$

----- APPROFONDIMENTO -----

I triangoli ADC e EHC sono simili e entrambi rettangoli.

Vale la seguente proporzione:

$$AD : HE = DC : EC = AC : HC$$

$$12 : 4 = 9 : 3 = 15 : 5.$$

Tracciare la corda AE: essa è l'ipotenusa del triangolo rettangolo ADE ed è lunga:

$$AE^2 = AD^2 + DE^2 = AD^2 + (DC - EC)^2 = 12^2 + (9 - 3)^2 = 144 + 36 = 180 \quad e$$

$$AE = \sqrt{180}.$$

Per fissare il punto M sul lato AB, nel Trattato sono proposti i seguenti passi:

- * fissare la lunghezza di BE: $BE = BC - EC = 14 - 3 = 11$;
- * dividere l'area di EHC per la lunghezza di BE: $S_{EHC}/BE = 6/11$;
- * moltiplicare per 2: $6/11 * 2 = 12/11$ [lunghezza dell'altezza LM];
- * collegare L con E;
- * calcolare l'area di LBE: $S_{LBE} = BE * ML/2 = 11 * (12/11)/2 = 6$.

L'area di LBE è uguale a quella di EHC e tutta la procedura è servita a ricavare la lunghezza di LM.

Nella figura originale, la lunghezza di LB è indicata in $(1 + 2/11)$.

Deve essere ritagliato un poligono con area uguale a 30.

Ecco la procedura usata:

- * moltiplicare la lunghezza di AD per quella di BE: $AD * BE = 12 * 11 = 132$;
- * dividere per 2: $132/2 = 66$ [è l'area del triangolo EAB];
- * sottrarre l'area di LBE: $66 - 6 = 60$ [area di EAL];
- * risolvere la proporzione che segue:
 $S_{EAB} : AB = S_{EAL} : FB$
 $66 : 13 = 60 : FB$
 $FB = (13 * 60)/66 = (11 + 9/11)$;
- * sottrarre la lunghezza di LB da quella di FB:
 $FB - LB = (11 + 9/11) - (1 + 2/11) = (10 + 7/11) = LE$ [questa operazione suscita qualche dubbio].

Dato che nel Trattato alcuni passaggi sono un po' oscuri, proponiamo una soluzione alternativa.

Il quadrilatero ECAF deve avere area di 30:

$$S_{ECAF} = S_{EHAF} + S_{EHC} = 24 + 6 = 30.$$

L'area di FBE è:

$$S_{FBE} = S_{ABC} - S_{ECAF} = 84 - 30 = 54.$$

La lunghezza dell'altezza FG è:

$$FG = 2 * S_{FBE}/BE = 2 * 54/11 = 108/11 = (9 + 9/11).$$

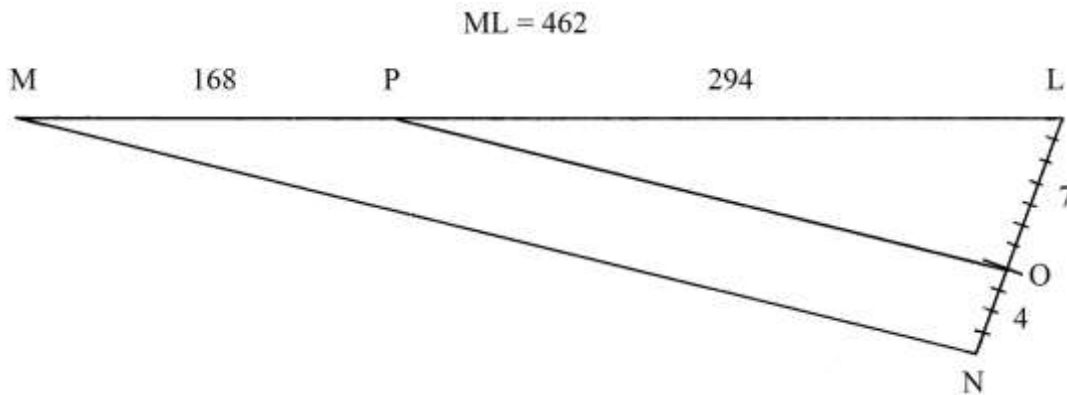
L'area di FLE è:

$$S_{FLE} = S_{FBE} - S_{LBE} = 54 - 6 = 48.$$

Sullo schema originale, la lunghezza di FA è indicata in " $2 + 4/11$ ".

Dividere un segmento in parti proporzionali a 7 e a 4

ML è un segmento lungo 462: deve essere diviso in due parti proporzionali a 7 e a 4.
La soluzione qui proposta è più semplice di quella contenuta nel Trattato.



Dal punto L tracciare una linea inclinata a piacere e riportarvi 7 + 4 volte una lunghezza:

- * LO = 7;
- * ON = 4;
- * LN = 11.

Collegare N con M e parallelamente a NM tracciare il segmento OP.

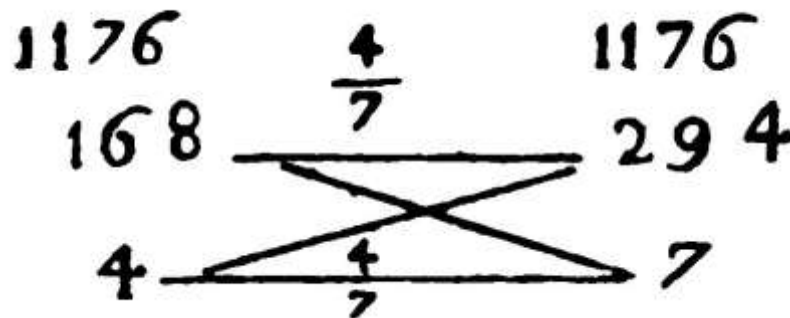
ML è diviso in due parti:

$$\begin{aligned} MP : 4 &= PL : 7 \\ MP &= ML * 4 / (4 + 7) = 462 * 4 / 11 = 168 \\ PL &= ML * 7 / (4 + 7) = 462 * 7 / 11 = 294 \\ 168 + 294 &= 462. \end{aligned}$$

Nel Trattato è pure proposta una soluzione *aritmetica* che contiene i seguenti passi:

- * sommare 4 e 7: $4 + 7 = 11$;
- * moltiplicare 4 per 7: $4 * 7 = 28$;
- * moltiplicare per 462: $28 * 462 = 12936$;
- * dividere per 11: $12936 / 11 = 1176$;
- * dividere per 4: $1176 / 4 = 294$ [lunghezza di PL];
- * dividere 1176 per 7: $1176 / 7 = 168$ [lunghezza di MP].

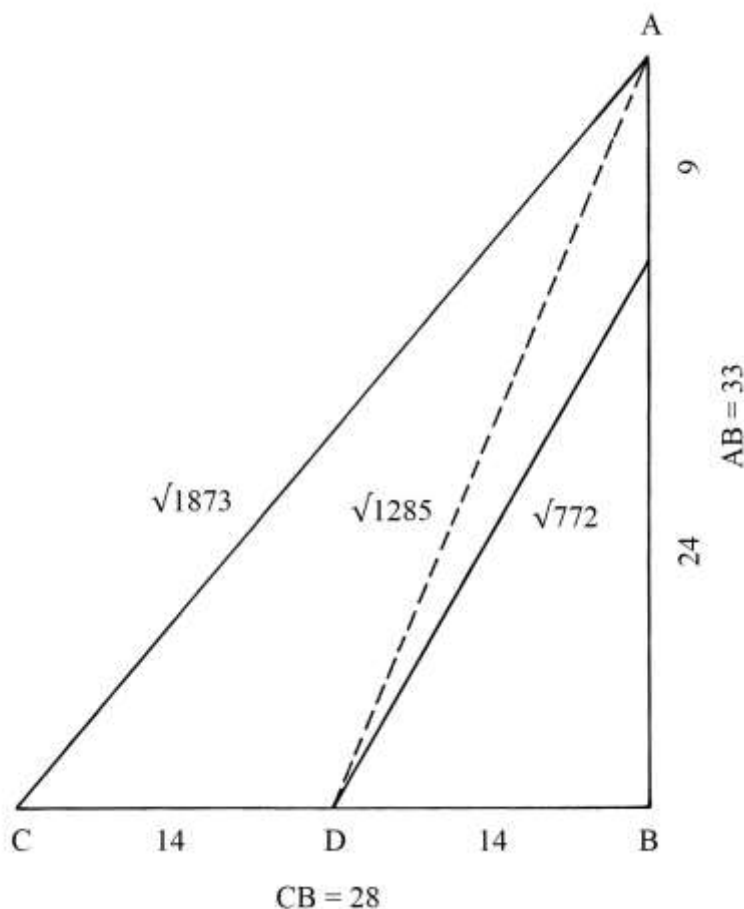
Nel Trattato è pure disegnato un piccolo grafico che spiega le operazioni contenuta nella procedura:



Divisione di un triangolo rettangolo in due parti proporzionali a 4 e a 7

ABC è un triangolo rettangolo: il cateto orizzontale CB è lungo 28 e quello verticale, AB, è lungo 33.

Il triangolo deve essere diviso in due poligoni con aree proporzionali a 4 e a 7.



Fissare il punto medio di CB: è D.

Tracciare la corda AD: la sua lunghezza è data da:

$$AD^2 = DB^2 + AB^2 = 14^2 + 33^2 = 196 + 1089 = 1285 \quad e$$

$$AD = \sqrt{1285}.$$

L'ipotenusa AC è lunga:

$$AC^2 = CB^2 + AB^2 = 28^2 + 33^2 = 784 + 1089 = 1873 \quad e$$

$$AC = \sqrt{1873}.$$

L'area del triangolo ABC è:

$$S_{ABC} = CB * AB/2 = 28 * 33/2 = 462.$$

La divisione del triangolo in due parti deve essere fatta con una corda uscente dal *punto medio D*.

Viene richiamata la procedura usata per risolvere il precedente problema:

- * sommare 4 e 7: $4 + 7 = 11$;
- * moltiplicare 4 per 7: $4 * 7 = 28$;
- * moltiplicare per l'area di ABC: $28 * 462 = 12936$;
- * dividere per 11: $12936/11 = 1176$;
- * dividere per 4: $1176/4 = 294$ [area di ACDE];
- * dividere 1176 per 7: $1176/7 = 168$ [area di DEB].

La lunghezza del cateto BE è data da:

$$BE = 2 * S_{DEB}/DB = 2 * 168/14 = 24.$$

L'area del triangolo DEB è:

$$S_{DEB} = DB * BE/2 = 14 * 24/2 = 168 = 4/11 * 462 = 4/11 * S_{ABC}.$$

L'ipotenusa DE è lunga:

$$DE^2 = DB^2 + BE^2 = 14^2 + 24^2 = 196 + 576 = 772 \quad e$$

$$DE = \sqrt{772}.$$

Per sottrazione, l'area del quadrilatero ACDE è:

$$S_{ACDE} = S_{ABC} - S_{DEB} = 462 - 168 = 294 = 7/11 * 462 = 7/11 * S_{ABC}.$$

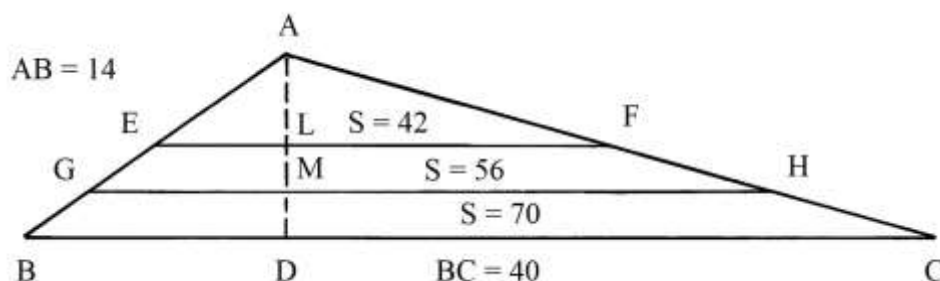
Infine, si ha:

$$S_{DEB} + S_{ACDE} = 168 + 294 = 462 = S_{ABC}.$$

Divisione di un triangolo scaleno in parti proporzionali a 3, 4 e 5

ABC è un triangolo scaleno: AB è lungo 14 e la base BC è 40.

L'altezza AD è lunga $(8 + 2/5)$.



L'area del triangolo è:

$$S_{ABC} = AD * BC/2 = (8 + 2/5) * 40/2 = 168.$$

Il triangolo deve essere diviso in tre poligoni con due corde parallele alla base BC e con aree proporzionali a 3, 4 e 5.

La soluzione che nel Trattato è proposta richiama quella usata nella soluzione del precedente secondo problema di questa Tavola: qui di seguito se ne dà un'interpretazione:

- * sommare 3, 4 e 5: $3 + 4 + 5 = 12;$
- * dividere l'area di ABC per 12: $168/12 = 14;$
- * moltiplicare per 3: $14 * 3 = 42,$ area del triangolo AEF;
- * moltiplicare 14 per 4: $14 * 4 = 56,$ area del trapezio EFHG;
- * moltiplicare 14 per 5: $14 * 5 = 70,$ area del trapezio GHCB.

La somma delle tre aree è:

$$S_{AEF} + S_{EFHG} + S_{GHCB} = 42 + 56 + 70 = 168 = S_{ABC}.$$

L'area del triangolo AGH è data da:

$$S_{AGH} = S_{AEF} + S_{EFHG} = 42 + 56 = 98.$$

La lunghezza di della base GH può essere calcolata con una proporzione:

$$S_{AGH} : GH^2 = S_{ABC} : BC^2$$

$$98 : GH^2 = 168 : 40^2$$

$$GH^2 = 98 * 1600/168 = 2800/3 = (933 + 1/3) \quad e$$

$$GH = \sqrt{(933 + 1/3)}.$$

Come calcolato sopra, l'area del triangolo AEF è 42. Con questo dato possiamo ricavare la lunghezza di EF con una proporzione:

$$S_{AEF} : EF^2 = S_{ABC} : BC^2$$

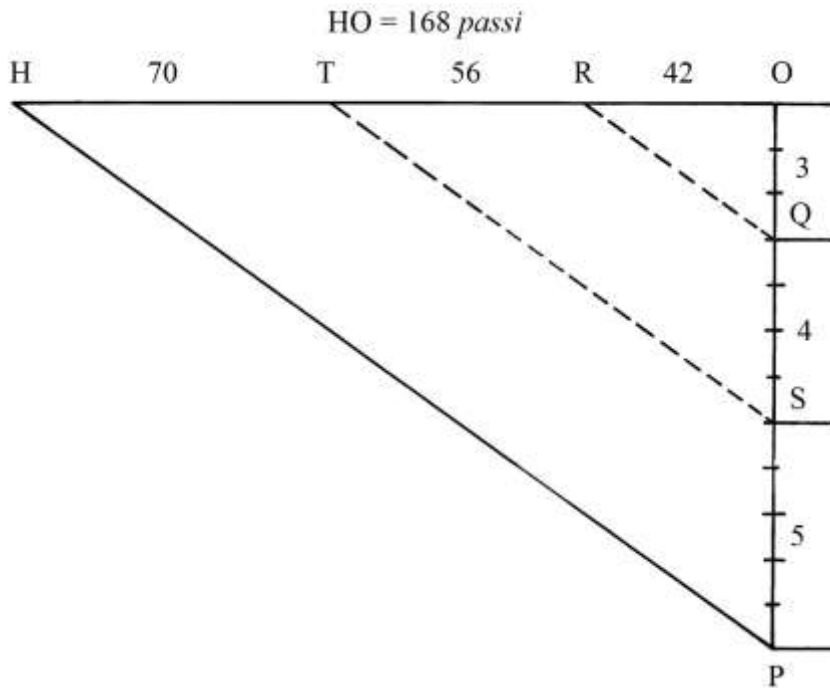
$$42 : EF^2 = 168 : 1600$$

$$EF^2 = 42 * 1600/168 = 400 \quad e$$

$$EF = \sqrt{400} = 20.$$

Divisione di un segmento in parti proporzionali a 3, 4 e 5

HO è un segmento lungo 168 *passi* che deve essere diviso in parti proporzionali a 3, 4 e 5.



Dal vertice O tracciare un segmento perpendicolare a HO e di lunghezza a piacere sul quale riportare dallo stesso O dodici lunghezze uguali. Sono fissati i seguenti segmenti:

- * OQ = 3;
- * QS = 4;
- * SP = 5.

Collegare P con H e parallelamente a PH disegnare due seguenti a partire dai punti S e Q: sono ST e QR.

HT è lungo 70, TR 56 e RO 42.

Vale la proporzione:

$$HT : 5 = TR : 4 = RO : 3$$

$$70 : 5 = 56 : 4 = 42 : 3.$$

Divisione di un segmento in parti proporzionali a 1, 3 e 4

GI è un segmento lungo 150 che deve essere diviso in tre parti con lunghezze proporzionali a 1, 3 e 4.

Dal vertice I disegnare verso il basso una linea inclinata e su di essa riportare in successione le seguenti lunghezze:

- * IM = 1;
- * MO = 3;
- * OH = 4.

Sommare i tre coefficienti:

$$1 + 3 + 4 = 8.$$

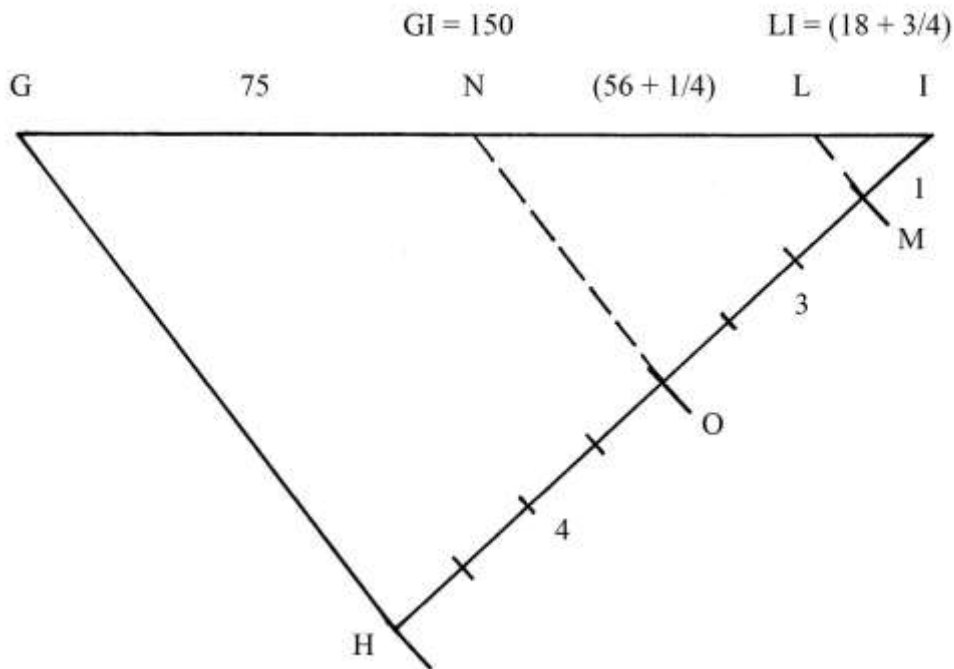
Dal vertice H tracciare il segmento HG e parallelo ad esso disegnare i segmenti ON e ML. GI è così diviso in tre parti:

- * $GN = 4/8 * GI = 4/8 * 150 = 75;$
- * $NL = 3/8 * GI = 3/8 * 150 = (56 + 1/4);$
- * $LI = 1/8 * GI = 150/8 = (18 + 3/4).$

Fra le tre lunghezze vale la proporzione:

$$GN : 4 = NL : 3 = LI : 1$$

$$75 : 4 = (56 + 1/4) : 3 = (18 + 3/4) : 1.$$



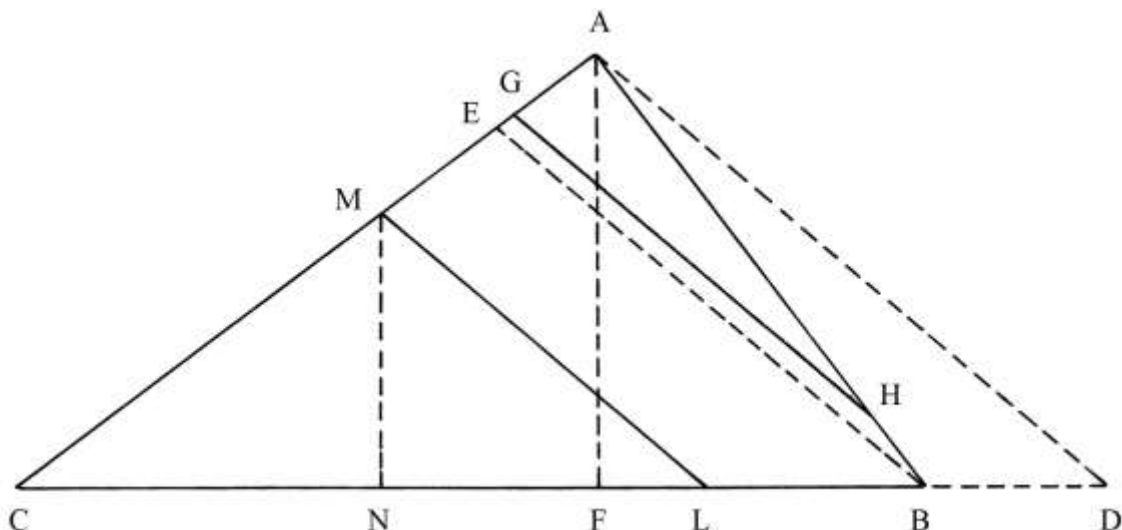
Divisione di un triangolo in parti proporzionali a 1, 3 e 4

ABC è un triangolo che ha lati lunghi 15, 20 e 25: queste lunghezze formano una terna derivata da quella primitiva 3-4-5:

- * $AB = 15;$
- * $AC = 20;$
- * $CB = 25.$

Il triangolo deve essere diviso in tre poligoni con aree proporzionali a 1, 3 e 4, con corde parallele a un segmento che collega il punto esterno D al vertice A: D è posizionato sul prolungamento verso destra della base AB, a distanza:

$$BD = 5.$$



L'altezza AF è lunga 12.

L'area del triangolo è:

$$S_{ABC} = AF * CB/2 = 12 * 25/2 = 150.$$

La procedura impiegata nel Trattato attribuisce valori convenzionali alle aree dei tre poligoni da stabilire per effetto della ripartizione:

- * il primo è 2;
- * il secondo è 3 volte il primo: $2 * 3 = 6$;
- * il terzo è 4 volte il primo: $2 * 4 = 8$;
- * sommare i tre nuovi coefficienti: $2 + 6 + 8 = 16$;
- * moltiplicare l'area di ABC per 2: $150 * 2 = 300$;
- * dividere per 16: $300/16 = (18 + \frac{3}{4})$, area del poligono più piccolo [AGH];
- * moltiplicare l'area di ABC per 6: $150 * 6 = 900$;
- * dividere per 16: $900/16 = (56 + \frac{1}{4})$, area del poligono intermedio [MGHBL];
- * moltiplicare l'area di ABC per 8: $150 * 8 = 1200$;
- * dividere per 16: $1200/16 = 75$, area del poligono più grande [CML].

La somma delle aree dei tre poligoni è:

$$(18 + \frac{3}{4}) + (56 + \frac{1}{4}) + 75 = 150 = S_{ABC}.$$

La successiva procedura i seguenti passi:

- * moltiplicare la lunghezza di BD per sé stessa: $5 * 5 = 25$;
- * moltiplicare la lunghezza di AB per sé stessa: $15 * 15 = 225$;
- * moltiplicare la lunghezza di FB per quella di BD: $9 * 5 = 45$;
- * moltiplicare per 2: $45 * 2 = 90$;
- * sommare con 25 e con 225: $90 + 25 + 225 = 340$;
- * estrarre la radice quadrata: $\sqrt{340}$, lunghezza di AD.

[Tutti questi passi sono stati usati nel trattato per calcolare la lunghezza di AD, che è l'ipotenusa del triangolo rettangolo AFD, e che più semplicemente può essere ricavata in altro modo:

$$AD^2 = AF^2 + FD^2 = AF^2 + (FB + BD)^2 = 12^2 + (9 + 5)^2 = 144 + 196 = 340 \quad e$$

$$AD = \sqrt{340}.$$

Dopo questo passo, il testo del Trattato non fornisce alcuna informazione sulla divisione di ABC in tre poligoni: dopo aver calcolato la lunghezza di AD, il testo si conclude con questa frase: "... fatto questo bisogna poi seguitare gli seguenti modi per havere le parti del triangolo."

Forse è stata tagliata una parte non trascurabile del testo.

Sullo schema originale sono scritte anche le seguenti lunghezze:

- * $CM = \sqrt{(166 + 2/3)}$;
- * $MN = \sqrt{60}$;
- * $EB = \sqrt{(236 + 1/3)}$;
- * $EA = (3 + 1/3)$;
- * $GA = \sqrt{(8 + 1/3)}$.

Nello schema in alto si è cercato di riprodurre la figura originale con la maggiore precisione possibile.

Le corde ML, EB e GH sono parallele all'ipotenusa AD.

Stando allo schema, ABC risulterebbe ripartito in tre poligoni:

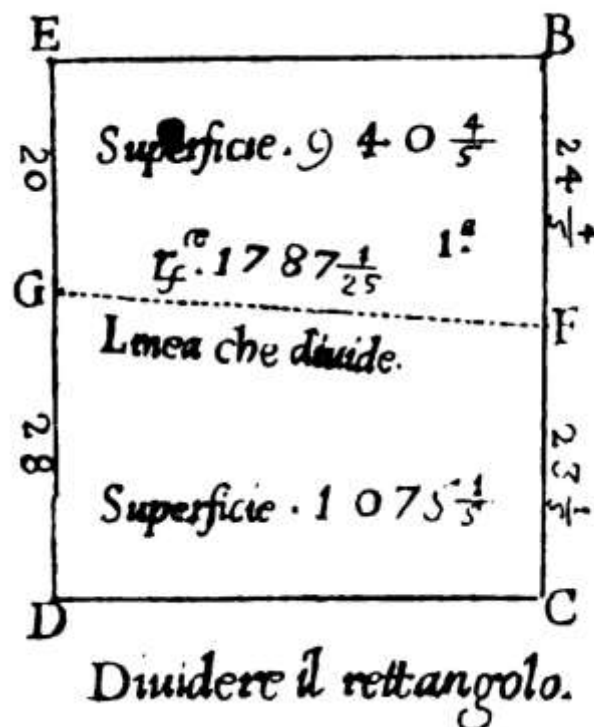
- * il triangolo CML, con area uguale a 4/8 di quella di ABC e cioè 75;
- * il pentagono non regolare MGHBL con area uguale a 3/8 di quella di ABC e cioè $(56 + 1/4)$;
- * il triangolo GAH, con area uguale a 1/8 di quella di ABC e cioè $(18 + 3/4)$.

TAVOLA XXIII

La Tavola contiene *sette* esempi di divisione di figure piane, regolari e irregolari, in più parti.

Aree di due trapezi rettangoli

Secondo il testo contenuto nel Trattato, EDBC sarebbe *un quadrato*, ma in realtà è un *rettangolo*, come è correttamente scritto sotto la figura originale:



Nel Trattato non è fornita la lunghezza dei due lati orizzontali, EB e DC.

Il rettangolo è diviso in due trapezi rettangoli con una corda, FG, obliqua rispetto a tutti i lati e lunga $\sqrt{(1787 + 1/25)}$.

Nel Trattato, l'area del trapezio EGFB è calcolata come segue:

$$S_{EGFB} = [(EG + BF)/2] * GF = [20 + (24 + 4/5)]/2 * \sqrt{(1787 + 1/25)} = (22 + 2/5) * \sqrt{(1787 + 1/25)} = \sqrt{946,92}.$$

Nel Trattato la lunghezza di GF è approssimata per difetto:

$$GF = \sqrt{(1787 + 1/25)} = 42.$$

L'area diviene:

$$S_{EGFB} = (EG + BF)/2 * 42 = (22 + 2/5) * 42 = (940 + 4/5).$$

L'area del trapezio GFCD sarebbe:

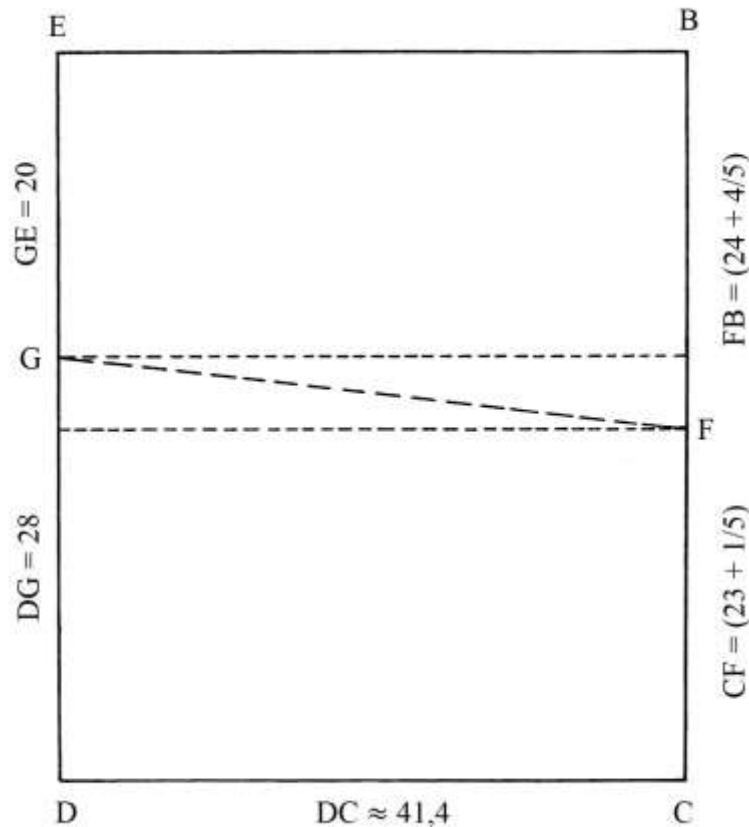
$$S_{GFCD} = (GD + FC)/2 * GF = [28 + (23 + 1/5)]/2 * GF = [28 + (23 + 1/5)]/2 * 42 = (25 + 3/5) * 42 = (1075 + 1/5).$$

Con gli ultimi dati, l'area del rettangolo EDBC è:

$$S_{EDBC} = S_{EGFB} + S_{GFCD} = (940 + 4/5) + (1075 + 1/5) = 2016.$$

----- APPROFONDIMENTO -----

Il quadrilatero EDBC è un rettangolo e non un quadrato.



La rielaborazione della figura effettuata sull'originale porta a individuare in EDBC un rettangolo alto 48 e largo 41,4.

L'area del rettangolo è:

$$S_{EDBC} = DE * DC = 48 * 41,4 = 1987,2.$$

Il metodo usato nel Trattato per calcolare le aree dei due trapezi è *errato*: l'area di un trapezio è data dal prodotto della semisomma delle lunghezze delle basi per quella dell'altezza.

L'area di EGFB è data da:

$$S_{EGFB} = [(GE + FB)/2] * EB = [20 + (24 + 4/5)]/2 * 41,4 = (22 + 2/5) * 41,4 = 927,36.$$

L'area di GFCD è:

$$S_{GFCD} = [28 + (23 + 1/5)]/2 * 41,4 = 1059,84.$$

L'area dell'intero rettangolo EDBC è:

$$S_{EDBC} = S_{EGFB} + S_{GFCD} = 927,36 + 1059,84 = 1987,2.$$

Nel Trattato è stata moltiplicata la semisomma delle basi di un trapezio per la lunghezza della corda GF: questa regola sembra derivare dall'antica *formula degli agrimensori*. Essa calcolava l'area di un quadrilatero moltiplicando le semisomme delle lunghezze dei lati opposti: nel caso del trapezio EBFG sarebbe:

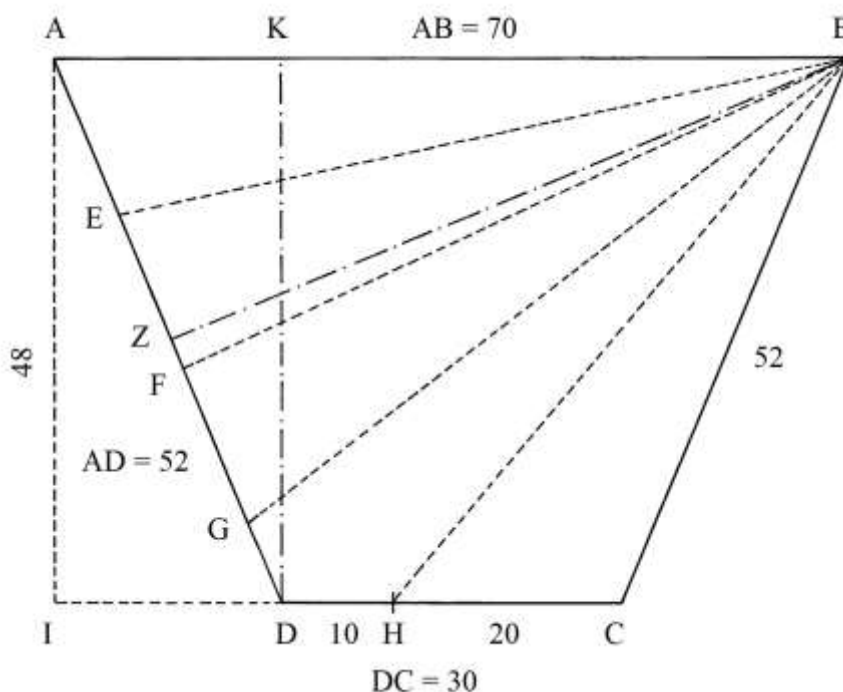
$$S_{EBFG} = [(EB + GF)/2] * [(EG + BF)/2] = (41,4 + 42)/2 * [20 + (24 + 4/5)]/2 = 41,7 * 22,4 = 934,08, \text{ valore maggiore di quello reale.}$$

La formula degli agrimensori è errata e l'errore diviene sensibile quando il quadrilatero si allontana dalla forma rettangolare.

Divisione in cinque parti di un trapezio isoscele

ABCD è un trapezio isoscele ("doppio capo tagliato") che la base maggiore AB posta in alto e lunga 70.

La base minore DC è 30 e i lati obliqui AD e BC sono entrambi lunghi 52.



Il trapezio deve essere diviso in cinque poligoni di area uguale.

Dal punto D elevare la perpendicolare a AB: è DK ed è un'altezza del trapezio.

Prolungare verso sinistra la base DC e dal punto A abbassare la perpendicolare AI: questo segmento è parallelo a DK ed ha la sua stessa lunghezza.

DI ha lunghezza che è data da:

$$DI = (AB - DC)/2 = (70 - 30)/2 = 20.$$

AI ha lunghezza che è data da:

$$AI^2 = AD^2 - DI^2 = 52^2 - 20^2 = 2704 - 400 = 2304 \text{ e}$$

$$AI = \sqrt{2304} = 48.$$

L'area del trapezio è:

$$S_{ABCD} = [(AB + CD)/2] * AI = [(70 + 30)/2] * 48 = 2400.$$

La divisione del trapezio in cinque parti deve essere effettuata per mezzo di *quattro* corde uscenti dal vertice B.

Sulla base DC è fissato il punto H che si trova a distanze:

- * HC = 20;
- * HD = 10.

La corda BH genera il triangolo ottusangolo BCH la cui area è:

$$S_{BCH} = HC * KD/2 = 20 * 48/2 = 480 = 1/5 * 2400 = 1/5 * S_{ABCD}.$$

BCH è il primo dei cinque poligoni fra i quali deve essere diviso il trapezio ABCD.

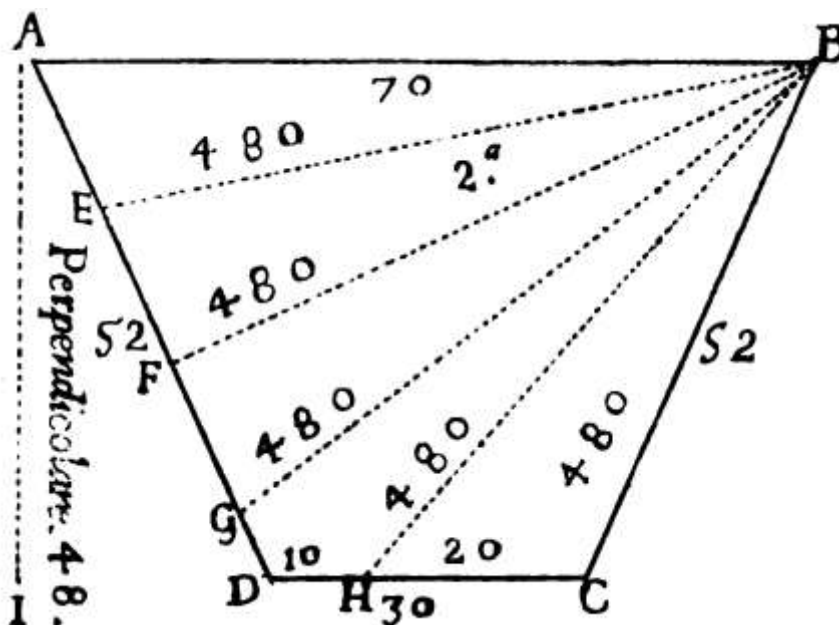
Nello schema originale contenuto nel Trattato sono disegnati altri quattro poligoni che

hanno tutti area uguale a 480 e sono:

- * il quadrilatero BGDH;
- * i triangoli ABE, EBF e FBG.

----- APPROFONDIMENTO -----

Nel Trattato non è fornita alcuna informazione sul modo di determinare le dimensioni dei lati di BGDH, ABE, EBF e FBG.



Forse, è stata tracciata l'altezza BZ relativa al lato AD (rivedere la precedente figura).

Il triangolo ABG contiene *tre* dei cinque poligoni cercati e la sua area è:

$$S_{ABG} = 3 * 480 = 1440 = AG * BZ/2.$$

Misurando sul disegno la lunghezza di BZ possiamo ricavare quella di AG:

$$AG = 2 * S_{ABG}/BZ = 2 * 1440/BZ = 2880/BZ.$$

AG deve essere diviso in *tre* parti uguali:

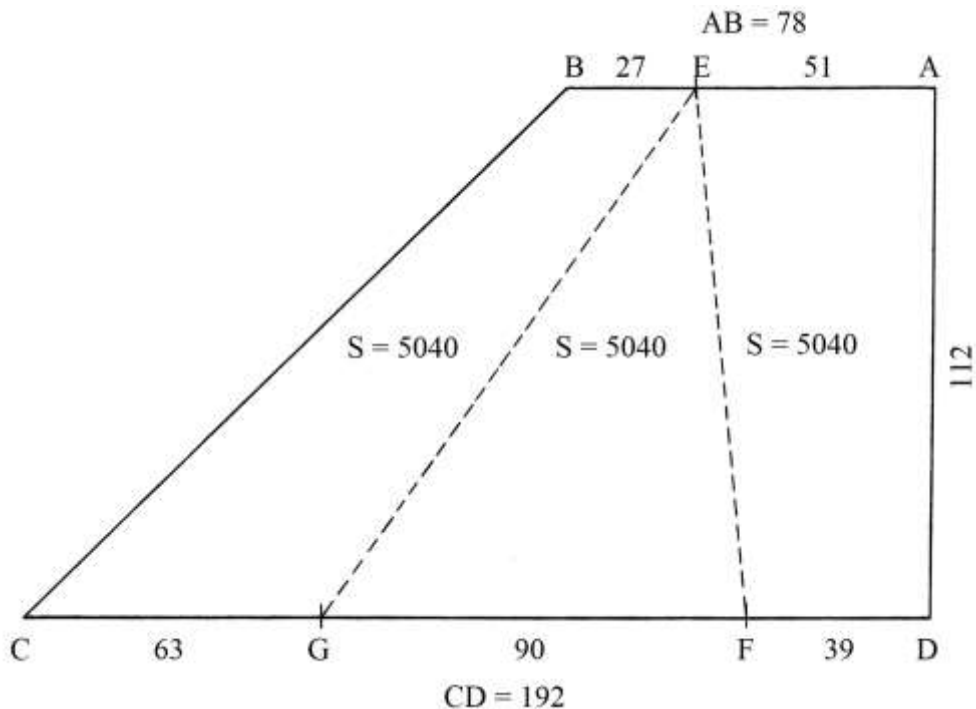
$$AE = EF = FG = AG/3 = (2880/BZ)/3 = 960/BZ.$$

L'altezza BZ è comune è comune ai triangoli ABG, ABE, EBF e FBG.

Il quadrilatero BGDE è il poligono residuale di area uguale a 480 – un quinto di quella di ABCD – ed è delimitato dalle corde BG e BH e dai lati GD e DH.

Divisione di un trapezio rettangolo in 3 parti uguali

ABCD è un trapezio rettangolo ("capo tagliato"). La base maggiore CD è lunga 192 e la minore è 78; l'altezza AD del quadrilatero è 112.



L'area del trapezio è data da:

$$S_{ABCD} = [(AB + CD)/2] * AD = [(78 + 192)/2] * 112 = (270/2) * 112 = 15120.$$

Il quadrilatero deve essere diviso in tre poligoni di area uguale a un terzo di quella di ABCD:

$$15120/3 = 5040.$$

La divisione deve essere effettuata per mezzo di due corde uscenti dal punto E, posizionato sulla base minore a distanze:

- * EA = 51;
- * EB = 27.

Il trapezio viene ripartito con le corde EF e EG.

EADF è un trapezio rettangolo che deve avere area uguale a 5040: la lunghezza della base FD è ricavata come segue:

$$S_{EADF} = [(BE + CG)/2] * AD = [(51 + FD)/2] * 112 = 5040$$

$$51 + FD = 2 * 5040/112$$

$$51 + FD = 90$$

$$FD = 90 - 51 = 39.$$

Il triangolo GEF ha area uguale a 5040 e la sua altezza è AD = 112: la sua base GF è lunga:

$$GF = 2 * S_{GEF}/AD = 2 * 5040/112 = 90.$$

La lunghezza di CG è:

$$CG = CD - GF - FD = 192 - 90 - 39 = 63.$$

Verifichiamo l'area del residuale trapezio scaleno BEGC:

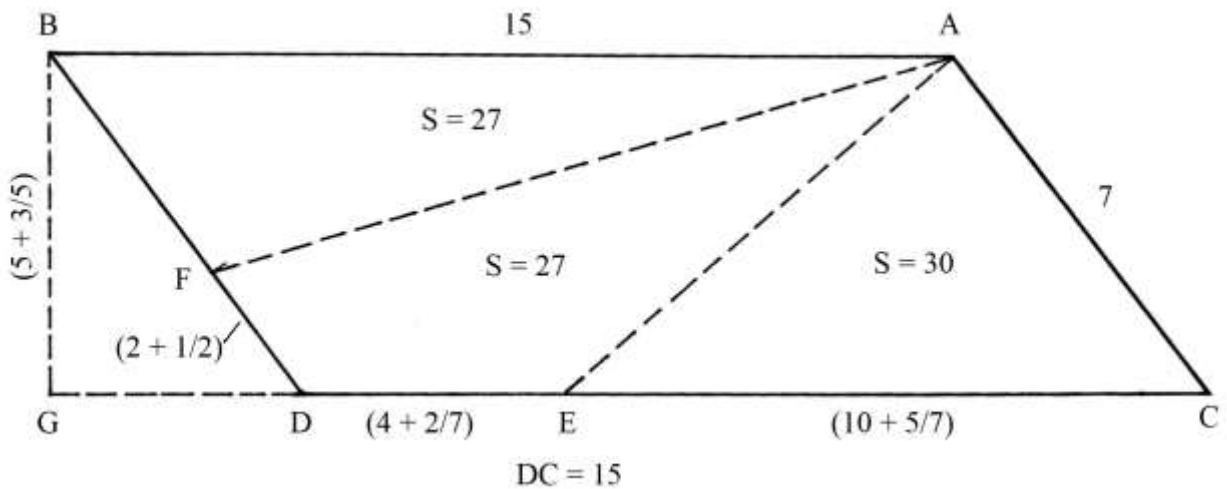
$$S_{BEGC} = [(BE + CG)/2] * AD = [(27 + 63)/2] * 112 = (90/2) * 112 = 5040.$$

Il trapezio ABCD è ora diviso fra tre poligoni con aree uguali:

- * i trapezi EADF e BEGC;
- * il triangolo GEF.

Divisione di un parallelogramma in 3 parti

ABDC è un parallelogramma le cui basi sono lunghe 15 e i lati obliqui 7.



L'altezza BG è lunga $(5 + 3/5)$.

L'area del quadrilatero è:

$$S_{ABDC} = DC * BG = 15 * (5 + 3/5) = 84.$$

Il parallelogramma è diviso in tre poligoni:

- * il triangolo AEC, con area uguale a 30;
- * il triangolo ABF, con area 27;
- * il quadrilatero AFDE con area 27.

Il testo del Trattato contiene alcuni calcoli assai discutibili che qui non sono considerati.

Sempre nel Trattato, la lunghezza di BF è ricavata con una proporzione:

$$S_{ABDC}/2 : BD = S_{ABDC}/3 : BF$$

$$84/2 = 7 = 84/3 : BF$$

$$42 : 7 = 28 : BF, \text{ da cui:}$$

$$BF = (28 * 7)/42 = (4 + 2/3).$$

Il risultato sarebbe esatto se nel Trattato fossero state calcolate correttamente in 28 (=84/3) le aree di ABF e di AFDE.

Sempre nel Trattato, la lunghezza di FD è indicata come $(2 + 1/2)$ e la somma delle lunghezze di BF e di FD non è 7:

$$BF + FD = (4 + 2/3) + (2 + 1/2) = 6 + (4 + 3)/6 = (7 + 1/6).$$

----- APPROFONDIMENTO -----

Nel testo del Trattato è mossa una critica alla divisione ineguale del parallelogramma ABDC in poligoni di aree 30, 27 e 27 e viene solo accennata alla possibilità di una divisione in tre parti uguali: ciascuna di esse deve avere area uguale a $84/3 = 28$.

Il triangolo ACE deve avere area 28 e la sua base EC è lunga:

$$EC = 2 * S_{ACE}/AH = 2 * S_{ACE}/BG = 2 * 28/(5 + 3/5) = 56/(5 + 3/5) = 10.$$

Il restante trapezio scaleno ABDE deve essere diviso in due poligoni con area entrambi di 28: esso ha area data da:

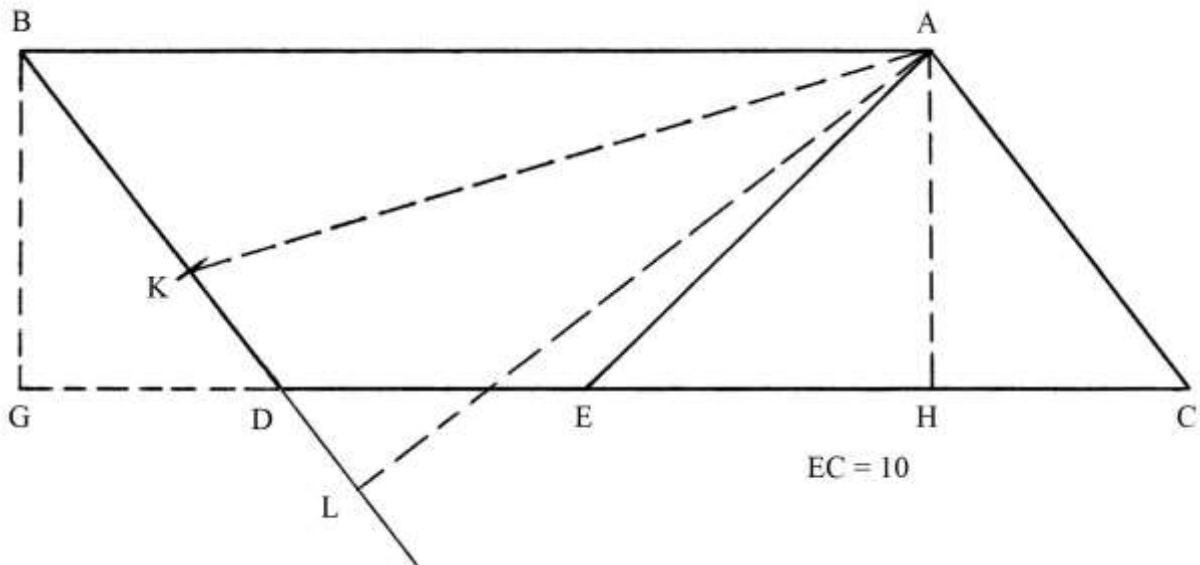
$$S_{ABDE} = S_{ABDC} - S_{ACE} = 84 - 28 = 56.$$

Prolungare verso il basso il lato BD e dal vertice A tracciare la perpendicolare AL.

Fissare il punto medio di BL: è K.

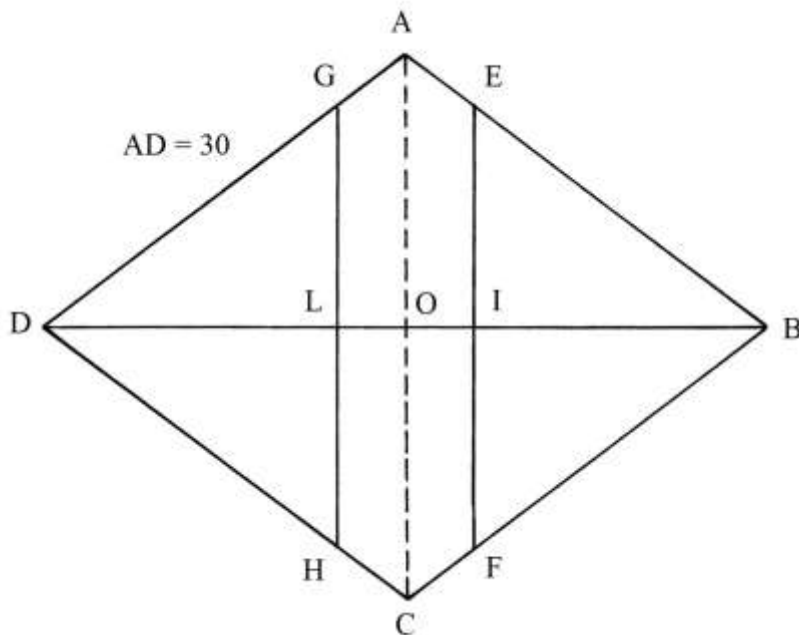
Il triangolo ABK ha area che è data da:

$S_{ABK} = BK * AL/2 = 28.$
 L'area del quadrilatero AKDE è, per differenza:
 $S_{AKDE} = S_{ABDC} - S_{ACE} - S_{ABK} = 84 - 28 - 28 = 28.$



Divisione di un rombo in parti uguali

ABCD è un rombo che ha i lati lunghi 30 e la diagonale maggiore DB 48.



La descrizione di questo problema è accompagnata da una precisazione contenuta nel Trattato e che si riproduce:

“L'Autore pone qui un Rombo il qual divide con linee prima in due parti uguali come li mostra per la retta D B, poi in quattro parti uguali mentre si tirasse una retta dal A, al C, & poi in tre parti uguali tirando le linee parallele EF, GH, nondimeno nella tavola la sotto scritta dimanda ò proposta non dice altro che partire il Rombo per mezzo, credo che questo sia stato errore dell'intagliatore il quale ha forse preso un titolo per un'altro, & non ha havuto i veri titoli ne di questa, ne di molte altre figure che sono in questo libro, nondimeno, io voglio che sia esplicato il tutto secondo l'intentione del Autore senza riguardo del titolo, & si cominciò...”

Cercheremo di dividere il rombo in parti uguali.

Dobbiamo ricavare la lunghezza della diagonale minore AC:

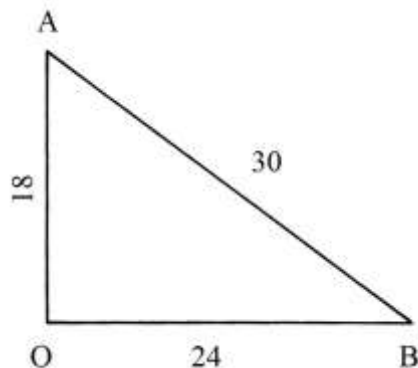
$$OA^2 = AB^2 - OB^2 = 30^2 - (48/2)^2 = 30^2 - 24^2 = 900 - 576 = 324 \quad e$$

$$OA = \sqrt{324} = 18.$$

La diagonale minore AC è lunga:

$$AC = 2 * OA = 18 * 2 = 36.$$

Il rombo è formato da quattro triangoli rettangoli i cui lati hanno lunghezze che costituiscono la terna derivata 18-24-30: essa deriva dalla terna primitiva 3-4-5 i cui membri sono moltiplicati per 6:



L'area del rombo è:

$$S_{ABCD} = DB * AC/2 = 48 * 36/2 = 864.$$

Il rombo deve essere diviso in parti uguali: la diagonale maggiore BD separa i triangoli isosceli BAD e BCD che hanno aree uguali a: $864/2 = 432$.

La diagonale minore AC divide il rombo in due triangoli isosceli: ADC e ABC, entrambi con aree uguali a: $864/2 = 432$.

La divisione del rombo in tre parti con aree uguali, con due corde parallele alla diagonale minore AC richiede alcuni calcoli: $864/3 = 288$.

EF e GH sono le corde che dividono il rombo in tre parti uguali. La lunghezza di EF (e di GH) è ricavata con una proporzione:

$$S_{ABC} : S_{EBF} = AC^2 : EF^2$$

$$432 : 288 = 36^2 : EF^2$$

$$432 : 288 = 1296 : EF^2$$

$$EF^2 = (288 * 1296)/432 = 864 \quad e$$

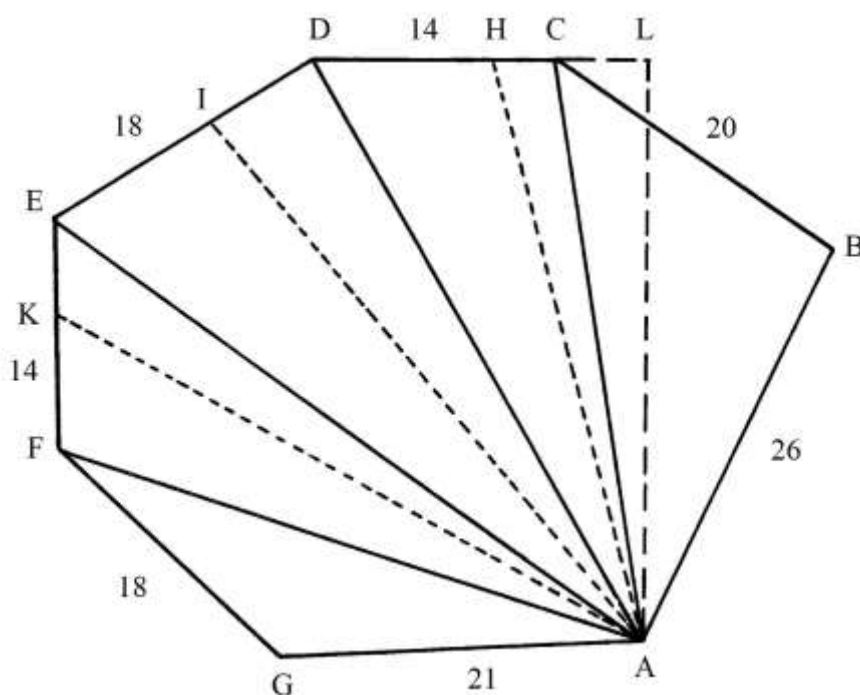
$$EF = \sqrt{864} = GH.$$

Con questa operazione, il rombo è ulteriormente ripartito:

- * i triangoli isosceli EBF e GDH e l'esagono non regolare GAEFCH hanno tutti area uguale a $864/3 = 288$;
- * i triangoli rettangoli DGL, DLH, EIB e BIF e i pentagoni non regolari LGAEI e LIFCH hanno tutti area uguale a $864/6 = 144$.

Divisione di una figura irregolare in 4 parti

ABCDEFG è un poligono irregolare delimitato da sette lati rettilinei: deve essere diviso in quattro parti.



Il calcolo dell'area è fatto dividendo la figura in *cinque* triangoli e ricavando l'area di ciascuno di essi.

La misura dell'altezza di uno dei triangoli, quale è ad esempio ACD, è fatta prolungando verso destra il lato DC e tracciando la perpendicolare AL: questo segmento è un'altezza di ACD e cade al suo esterno perché il triangolo è ottusangolo.

Stando al Trattato, le aree dei cinque triangoli sono:

- * ABC: 245;
- * ACD: 234;
- * ADE: 344;
- * AEF: $(236 + \frac{1}{2})$;
- * AFG: $(166 + \frac{1}{2})$.

L'area totale è 1226.

La divisione in 4 parti conduce alla creazione di 4 poligoni con aree uguali a:

$$1226/4 = (306 + \frac{1}{2}).$$

Nello schema originale, la ripartizione in quattro parti è fatta con la tracciatura di tre segmenti uscenti da A: AH, AI e AK.

I quattro poligoni ottenuti sono:

- * il quadrilatero ABCH;
- * il quadrilatero AHDI;
- * il quadrilatero AIEK;
- * il quadrilatero AKFG.

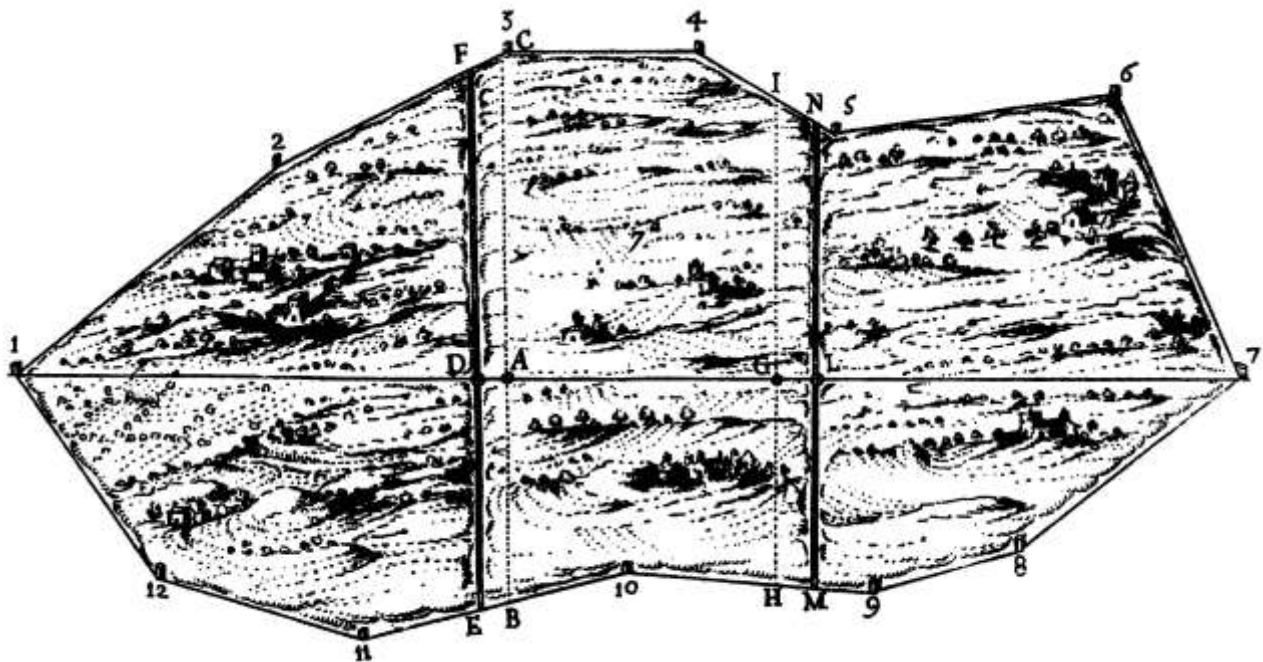
Nel Trattato non è fornita alcuna indicazione sui metodi usati per stabilire le posizioni di AH, AI e AK e le loro lunghezze.

Sullo schema originale sono soltanto scritte le lunghezze dei lati dell'ettagono irregolare ABCDEFG e le altre tre lunghezze:

- * $CH = (3 + 53/788)$;
- * $DI = (7 + 1/86)$;
- * $KF = (8 + 136/473)$.

Divisione di un terreno in 3 parti uguali

Lo schema che segue è riprodotto dal Trattato:



Il testo che l'accompagna è molto sintetico e fornisce soltanto il valore dell'area del terreno: 29206.

Deve essere diviso in tre parti di aree uguali:

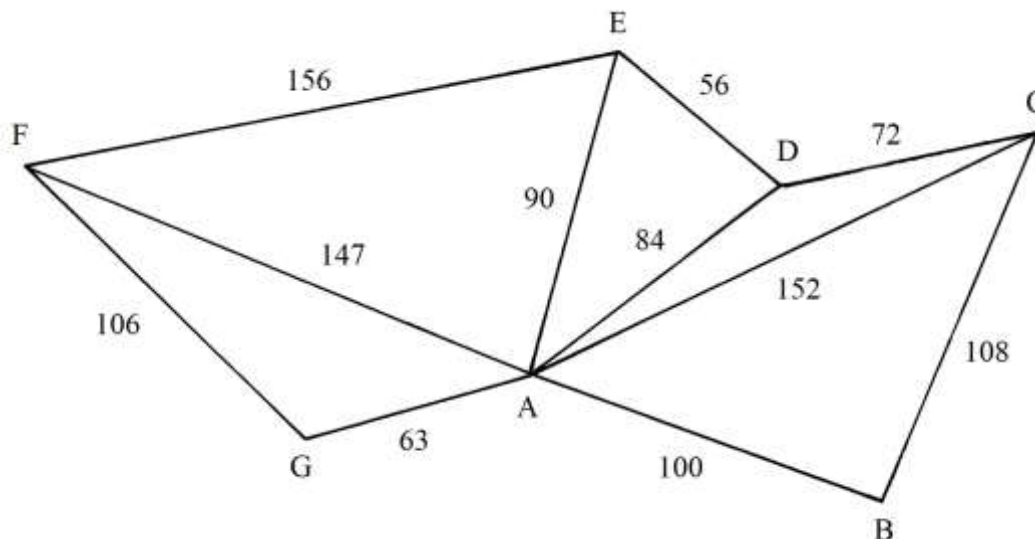
$$29206/3 = (9735 + 1/3).$$

TAVOLA XXV

La Tavola contiene *tre* esempi di misurazioni di terreni di forma irregolare, con i perimetri delimitati da segmenti.

Tutte le soluzioni prevedono la divisione in triangoli.

Nel *primo caso*, il poligono è diviso in *cinque* triangoli per mezzo di segmenti uscenti dal vertice A.



Sui lati delle figure sono riportate le lunghezze.

Le aree calcolate dei triangoli sono le seguenti:

- * ABC: 5388;
- * ACD: $(1329 + 12/19)$;
- * ADE: $(3764 + 5/12)$;
- * AEF: $(6585 + 18/25)$;
- * AFG: $(2930 + 1/7)$.

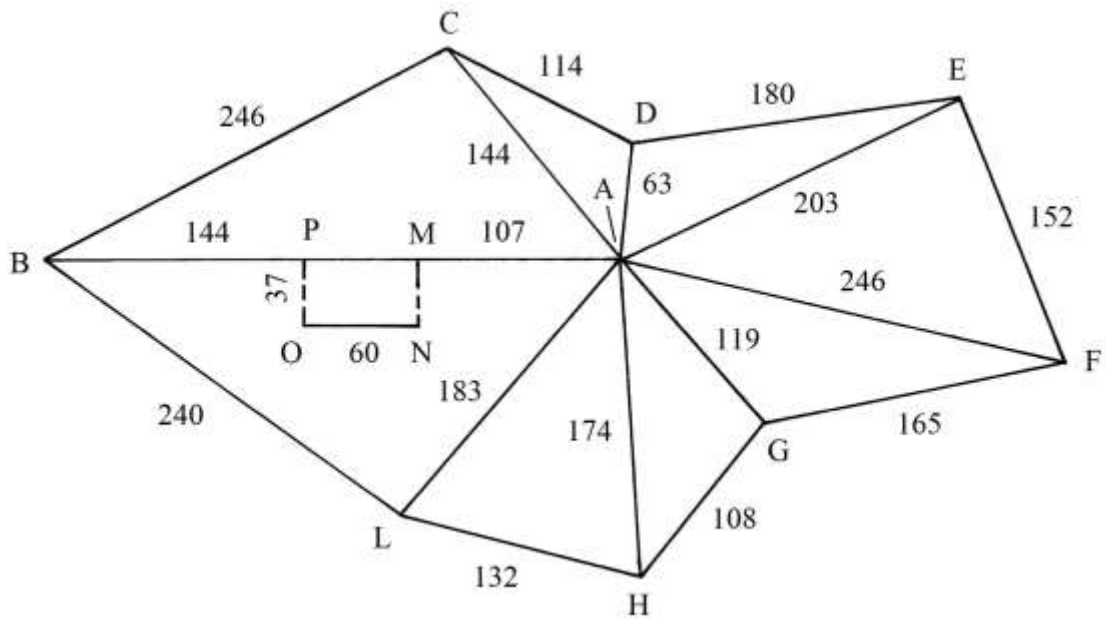
L'area totale è calcolata in 19998.

%%%%%%%%%

Nel secondo esempio, la divisione della figura è effettuata con la scelta di un punto interno, A, dal quale tracciare i segmenti che lo collegano ai vertici del poligono, che viene diviso in *otto* triangoli.

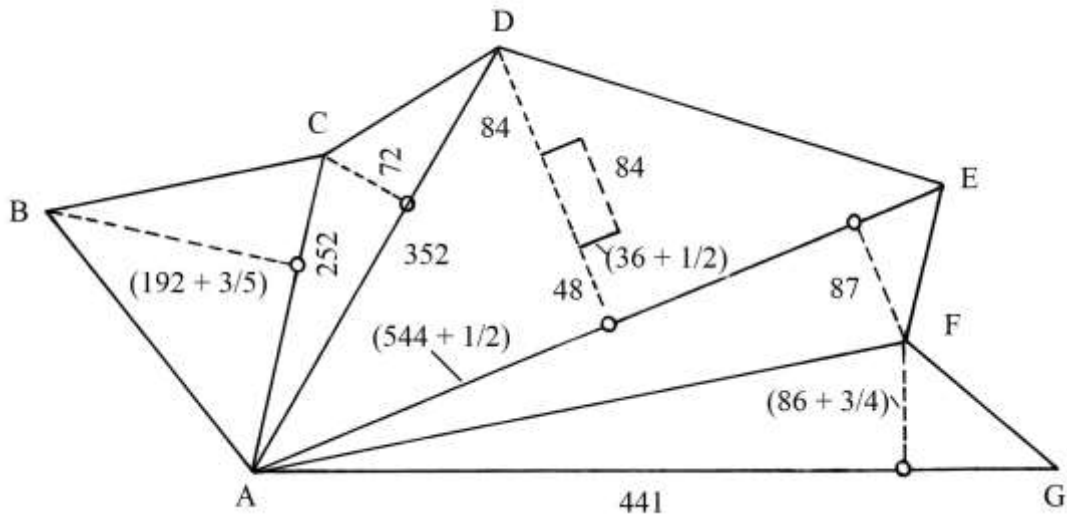
All'interno di ABL si trova un insieme di costruzioni, indicato con PMNO, che ha forma rettangolare.

Le aree degli otto triangoli non sono calcolate e non è neanche fornita l'area totale.



%%%

Nel terzo esempio, dal vertice A sono tracciate le corde AC, AD, AE e AF.



Ulteriori divisioni della figura sono ottenute disegnando le altezze uscenti dai vertici B, C, D e F.

All'interno del triangolo ADE si trova un blocco di dimensioni:

$$(36 + \frac{1}{2}) * 84.$$

Non sono misurate le lunghezze degli otto segmenti che formano il perimetro esterno.

Le aree dei cinque triangoli sono:

- * AFG: $(19128 + \frac{3}{8})$;
- * AFE: $(23685 + \frac{3}{4})$;
- * AED: 58806;
- * ADC: 12672;
- * ACB: 22229.

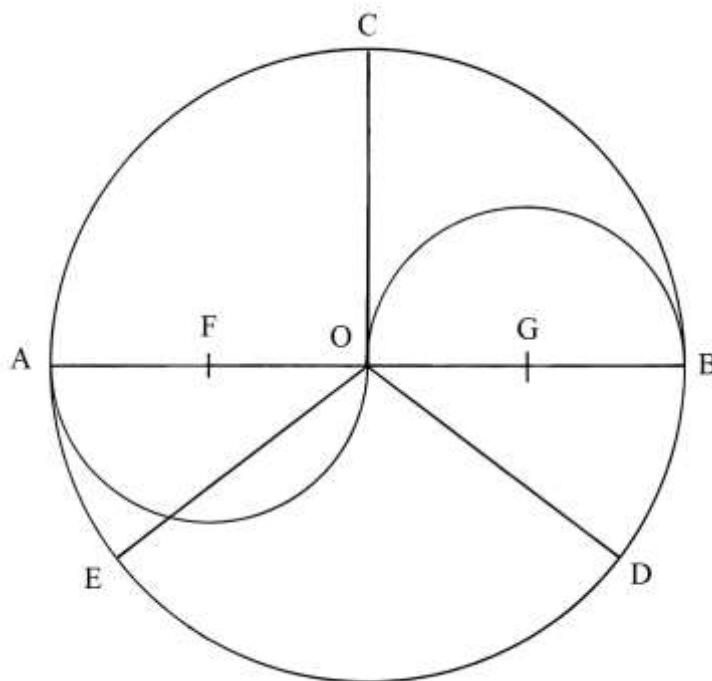
L'area totale è: $(136521 + \frac{29}{40})$.

TAVOLA XXVI

La Tavola contiene *nove* problemi dedicati alla misura del cerchio.

Nomenclatura del cerchio

Un cerchio ha diametro AB lungo 14 e centro in O . OC , OD e OE sono tre raggi lunghi 7.



La linea che racchiude il cerchio è la *circonferenza*.

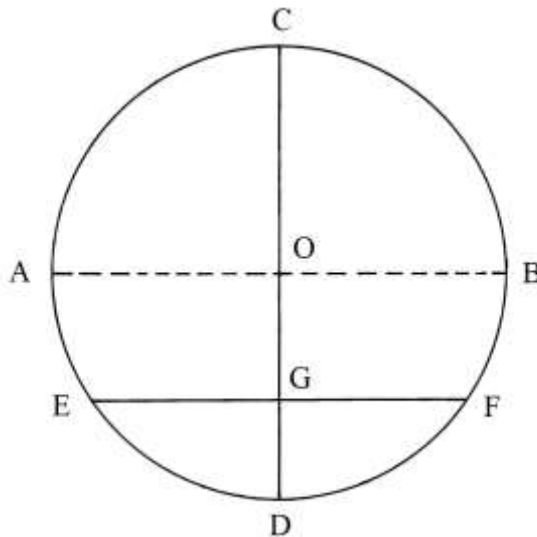
F e G sono i punti medi dei raggi OA e OB : con centro in F e in G sono disegnate due semicirconferenze che hanno diametro $OA = OB = 7$.

Corda e freccia in un cerchio

Un cerchio ha diametro $AB = CD$.

Parallelamente a AB è tracciata la *corda* EF che divide il cerchio in due parti che oggi sono chiamate *segmenti circolari*.

I segmenti *adiacenti* CG e GD , che uniti formano il diametro CD , sono chiamati entrambi *saetta*, come era consuetudine nei Trattati geometrici medievali e rinascimentali: il termine con il quale essi sono oggi definiti è *freccia*.



ECF è l'*arco maggiore* e EDF è l'*arco minore*.

Il segmento circolare ECFG è chiamato "porzione maggiore" e quello EDFG "porzione minore".

Diametro e circonferenza

Il diametro di un cerchio è diviso in 7 parti uguali e la circonferenza è ripartita in 22 archi di uguale lunghezza.

Il cerchio è così scomposto in 22 settori circolari che al centro hanno angoli di:

$$360^\circ/22 \approx 16,36^\circ, \text{ con } (36) \text{ periodo del numero decimale illimitato.}$$

Nel Trattato sono proposte alcune formulazioni sui rapporti fra lunghezze e fra queste e l'area del cerchio, secondo l'insegnamento di Archimede.

Moltiplicando la lunghezza c della circonferenza per 7 e dividendo il risultato per 22 si ottiene la lunghezza d del diametro:

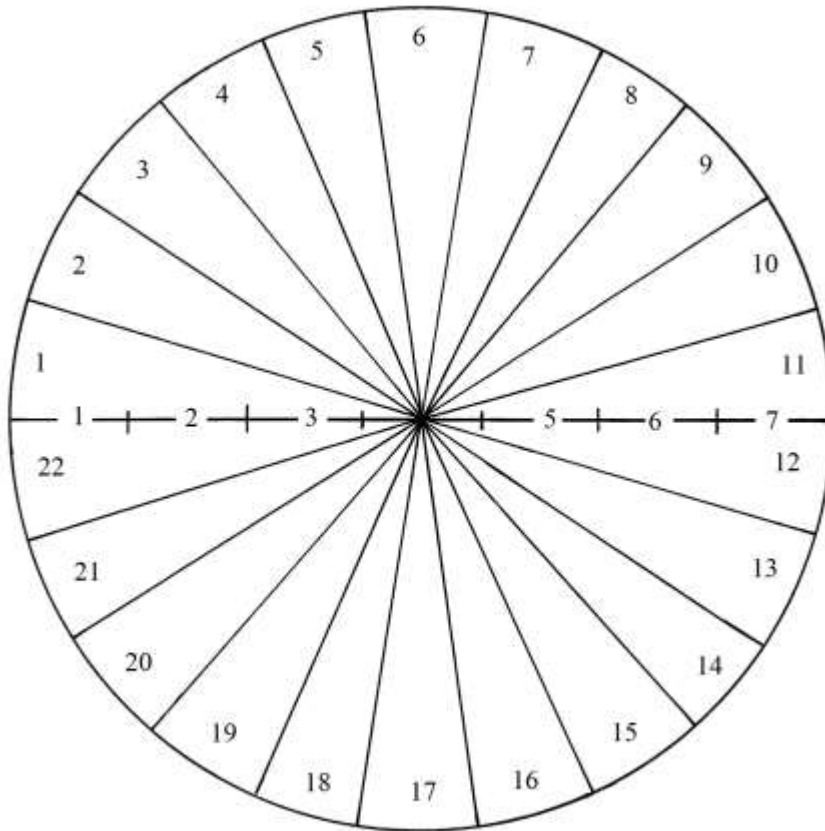
$$d * 7/22 = c.$$

Se la circonferenza è lunga 100, il diametro è lungo:

$$d = 100 * 7/22 = (31 + 18/22) = (31 + 9/11).$$

Se la circonferenza è lunga *100 passi*, il diametro è lungo:

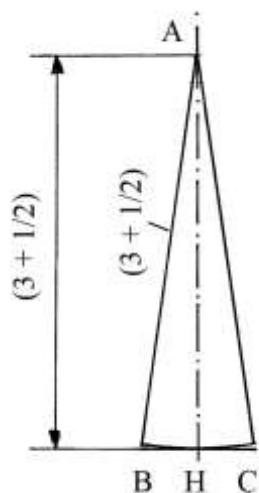
$$d = 31 \text{ passi} + 18/22 \text{ di un passo.}$$



Quadrilateri con area uguale a un cerchio

Tutte le costruzioni che portano alla costruzione di un quadrilatero con area uguale a quella di un cerchio sono *approssimate*.

Ciascuno dei 22 settori circolari che formano il cerchio del precedente problema ha la forma e le dimensioni che sono riportate nella figura che segue:



Il settore circolare ha altezza AH che è lunga $(3 + \frac{1}{2})$ e la base curvilinea BC è $\frac{1}{22}$ della lunghezza della circonferenza che ha diametro 7:

$$c = \frac{22}{7} * 7 = 22.$$

La lunghezza dell'arco BC è:

$$BC = c/22 = 22/22 = 1.$$

L'altezza AH è un raggio del cerchio del precedente problema.

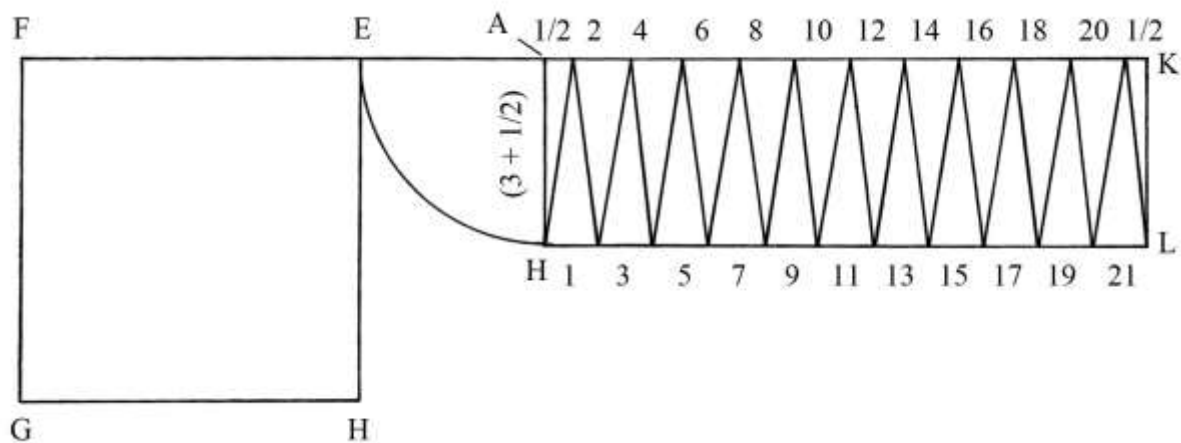
Con un'accettabile approssimazione, l'arco BC può essere assimilato al lato di base del triangolo isoscele ABC e l'area di ABC è:

$$S_{ABC} = AH * BC/2 = [(3 + 1/2) * 1]/2 = (1 + 3/4).$$

L'area dell'intero cerchio è:

$$S_{CERCHIO} = 22 * S_{ABC} = 22 * (1 + 3/4) = (38 + 1/2).$$

Un quadrato con area uguale a quella del cerchio è EFGH:



$$S_{CERCHIO} = S_{EFGH} = (38,5) = EF^2 \quad e$$

$$EF = \sqrt{(38,5)}.$$

Prolungare verso destra il lato FE. Dal punto E riportare in A la lunghezza dell'altezza AH misurata sulla penultima figura: $AH = (3 + 1/2)$; da A abbassare la perpendicolare a FA.

Fare centro in A e con raggio AH tracciare l'arco EH; dal punto H disegnare una linea parallela a FA.

Da H riportare le lunghezze delle basi dei settori con numeri dispari, da 1 a 21, fino a fissare il punto L.

Dal punto A riportare le lunghezze delle basi dei settori con numero pari, da 2 a 20, e alle estremità A e K includere le due metà del settore 22.

Il rettangolo AKLH ha area uguale a quella del quadrato EFGH e a quella del cerchio.

Il lato HL contiene 11 corde lunghe quanto quella BC della penultima figura:

$$HL = 11 * BC = 11 * 1 = 11.$$

L'area del rettangolo AKLH è:

$$S_{AKLH} = AH * HL = (3 + 1/2) * 11 = (38 + 1/2).$$

Cerchio inscritto in un quadrato

ACDB è un quadrato che ha lati lunghi $\sqrt{14}$. Al suo interno è inscritto un cerchio che ha centro O e diametro $\sqrt{14}$.

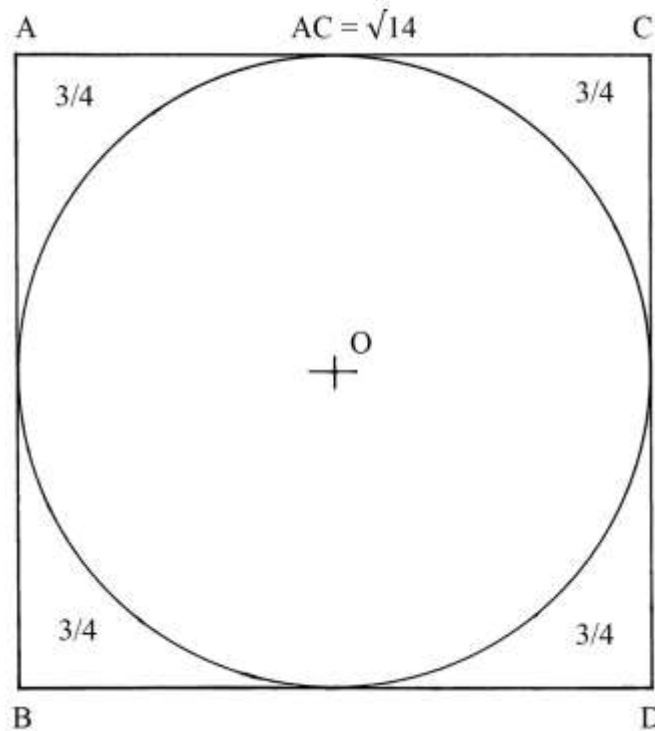
Nel Trattato queste lunghezze non sono specificate con sufficiente chiarezza.

L'area del quadrato è:

$$S_{ACDB} = AC^2 = (\sqrt{14})^2 = 14.$$

L'area del cerchio è uguale a 11/14 di quella del quadrato circoscritto:

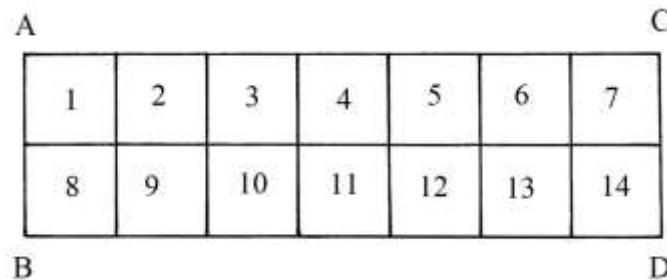
$$S_{\text{CERCHIO}} = 11/14 * S_{\text{ACDB}} = 11/14 * 14 = 11.$$



Nei vertici del quadrato si trovano quattro triangoli curvilinee di uguali dimensioni: l'area di ciascuno di essi è data da:

$$(S_{\text{ACDB}} - S_{\text{CERCHIO}})/4 = (14 - 11)/4 = 3/4.$$

L'area del quadrato è scomponibile in 14 quadrati con lati lunghi 1:



Un dettaglio: nel testo del Trattato l'area è espressa in "passi" senza precisare che si tratta di "passi quadrati".

Area di un cerchio dato il diametro

Un cerchio ha diametro AB che è lungo $\sqrt{14}$.

Ne è domandata l'area.

Nel Trattato la soluzione è ottenuta con la seguente procedura:

* moltiplicare 14 per 11:

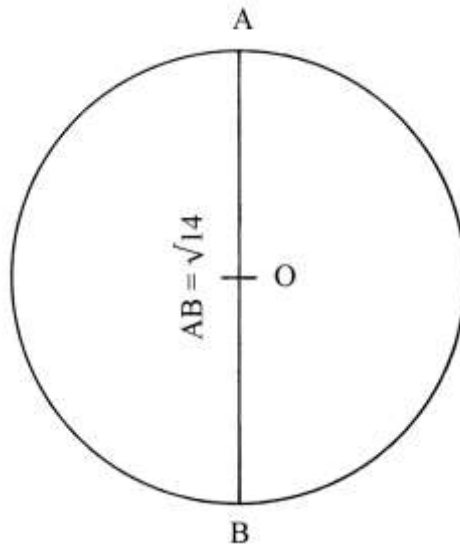
$$14 * 11 = 154;$$

* dividere per 14:

$$154/14 = 11, \text{ area del cerchio.}$$

Più semplicemente, l'area è data da:

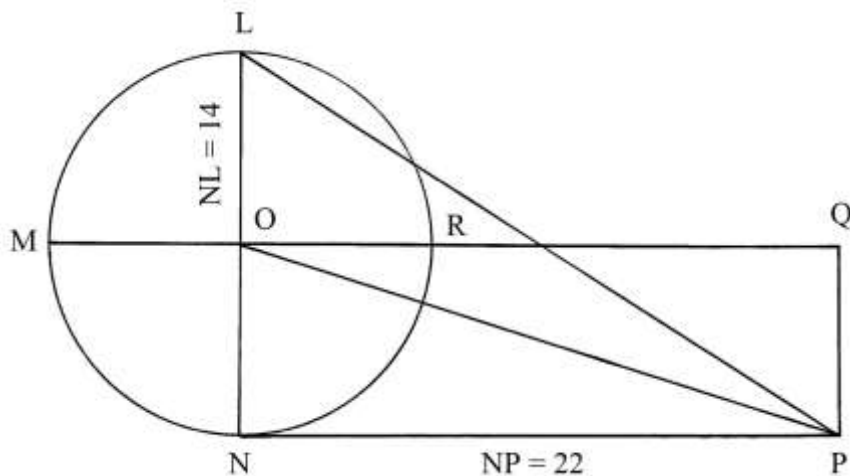
$$S_{\text{CERCHIO}} = 11/14 * (\sqrt{14})^2 = 11/14 * 14 = 11.$$



Area di un cerchio e di un triangolo equivalente

Anche questa costruzione è *approssimata*.

Un cerchio ha diametro orizzontale MR lungo 14. Nello schema è pure disegnato il diametro verticale LN: O è il centro.



Nel Trattato è soltanto calcolata l'area del cerchio con una procedura più lunga del necessario:

- * moltiplicare la lunghezza del diametro per sé stessa: $14 * 14 = 196$;
- * moltiplicare per 11: $196 * 11 = 2156$;
- * dividere per 14: $2156/14 = 154$, area del cerchio.

La procedura può essere riassunta in un formula, con d lunghezza del diametro:

$$S_{\text{CERCHIO}} = (d * d) * 11/14.$$

L'espressione $(d * d)$ è l'area del quadrato circoscritto a un cerchio con diametro lungo d . Il coefficiente "11/14" è il rapporto fra l'area del cerchio e quella del quadrato in cui è inscritto.

Lo schema sopra ridisegnato non è spiegato nel Trattato.

La lunghezza c della circonferenza di centro O è:

$$c = 22/7 * LN = 22/7 * 14 = 44.$$

Prolungare verso destra il diametro MR e dal punto N disegnare una linea parallela a MR. Fissare il punto P a distanza 22 da N: 22 è metà della lunghezza della circonferenza c :
 $c/2 = 44/2 = 22 = NP$.

Da P innalzare la perpendicolare PQ: anche OQ è lungo 22.

Collegare L e O con il punto P. LNP è un triangolo rettangolo e LOP è un triangolo ottusangolo.

Il rettangolo OQPN ha area:

$$S_{OQPN} = ON * NP = 7 * 22 = 154.$$

OQPN ha area uguale quella del cerchio di centro O.

Il triangolo rettangolo LNP ha area:

$$S_{LNP} = LN * NP/2 = 14 * 22/2 = 154.$$

Anche LNP ha area uguale a quella del cerchio.

Infine, il triangolo LOP ha un'altezza esterna che è NP: la sua area è:

$$S_{LOP} = LO * NP/2 = 7 * 22/2 = 77 = 154/2.$$

LOP ha area uguale a metà di quella del cerchio.

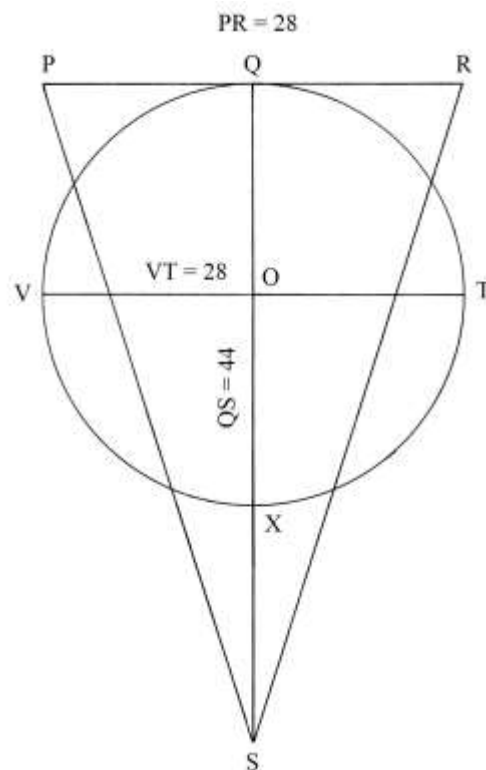
Non è stato considerato il triangolo rettangolo ONP: la sua area può essere calcolata in due modi:

* $S_{ONP} = S_{OQPN} - S_{LNP} = 154 - 77 = 77$, oppure:

* $S_{ONP} = ON * NP/2 = 7 * 22/2 = 7 * 11 = 77$.

Triangolo isoscele equivalente a un cerchio

Un cerchio ha diametro orizzontale VT che è lungo 28.



La sua area è:

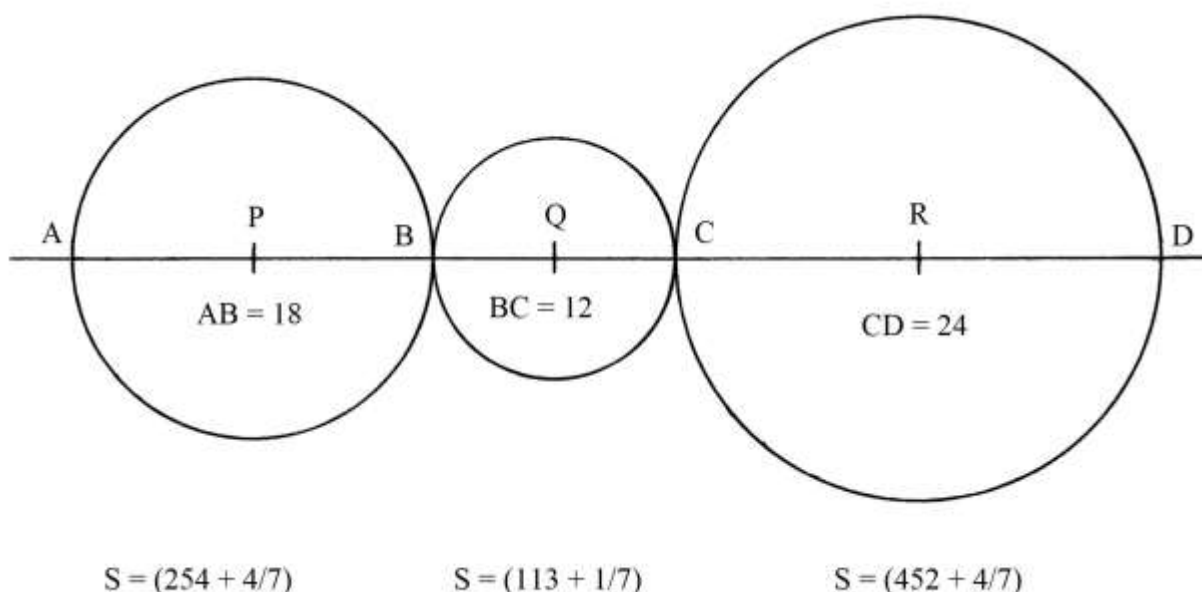
$$S_{CERCHIO} = 22/7 * (28/2)^2 = 22/7 * 14^2 = 22/7 * 196 = 616.$$

Deve essere disegnato un triangolo isoscele con la stessa area, 616.

Per il punto Q tracciare la parallela al diametro VT e fissare i punti P e R a distanza:
 $PR = VT = 28$, con $QP = QR = 14$.
 Prolungare verso il basso il diametro QX.
 Il triangolo equivalente è PRS e la sua altezza QS ha lunghezza che è data da:
 $QS = 2 * S_{PRS}/PR = 2 * 616/28 = 44$.

Aree di tre cerchi

Tre cerchi sono tangenti e i loro centri P, Q e R giacciono allineati su di una retta orizzontale.



Il cerchio a destra ha diametro CD lungo 24 e la sua area è:

$$S_{CD} = 11/14 * CD^2 = 11/14 * 24^2 = 11/14 * 576 = (452 + 4/7).$$

Il cerchio centrale ha diametro BC lungo 12, cioè la metà della lunghezza di CD, e la sua area è:

$$S_{BC} = 11/14 * BC^2 = 11/14 * 12^2 = 11/14 * 144 = (113 + 1/7) = (452 + 4/7)/4 = S_{CD}/4.$$

L'area di un cerchio è proporzionale al quadrato della lunghezza del suo diametro: dimezzando il diametro, l'area si riduce a un quarto.

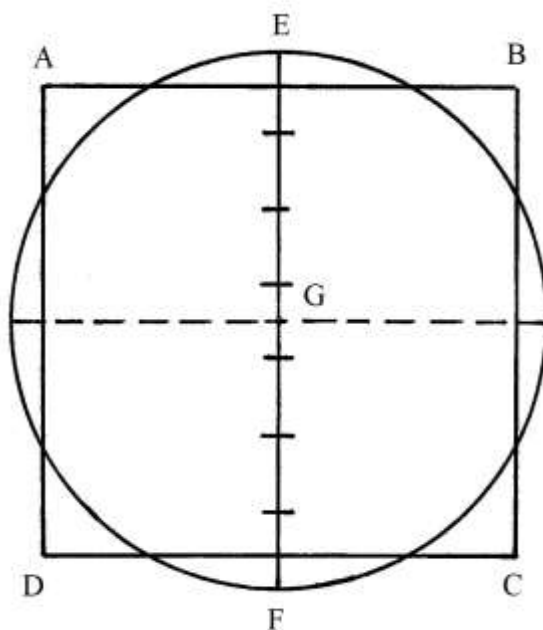
TAVOLA XXVII

La Tavola propone *dodici* costruzioni finalizzate al calcolo dell'area del cerchio conoscendo la lunghezza del diametro o quella della circonferenza.

Area di un cerchio con diametro lungo 7 e quadrato equivalente

Un cerchio ha diametro EF lungo 7 (passi o canne) e centro in G: la sua circonferenza c è lunga:

$$c = 22/7 * EF = 22/7 * 7 = 22.$$



Deve essere costruito un quadrato di area *uguale* a quella del cerchio e ad esso concentrico.

L'area del cerchio è:

$$S_{\text{CERCHIO}} = 22/7 * (7/2)^2 = 22/7 * 49/4 = (38 + 1/2).$$

L'area del quadrato equivalente deve essere $(38 + 1/2)$ e la sua lunghezza del suo lato è:

$$AB = \sqrt{(38 + 1/2)} \approx 6,2.$$

ABCD è il quadrato che ha area *quasi* uguale a quella del cerchio.

Nel Trattato, la lunghezza del lato del quadrato è approssimata a 6: l'area del quadrato è ridotta:

$$S_{\text{QUADRATO}} = 6 * 6 = 36, \text{ invece di } (38 + 1/2).$$

Cerchio di area uguale a quella di un quadrato

CDEF è un quadrato con lati lunghi 31.

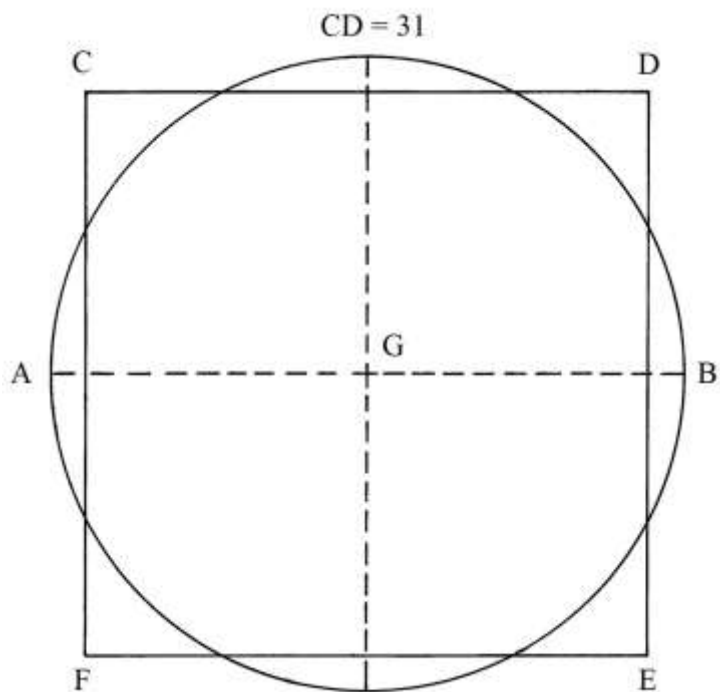
Deve essere costruito un cerchio di area uguale a quella del quadrato e con lo stesso centro

G.

Il diametro del cerchio è ricavato con una procedura che contiene i seguenti passi:

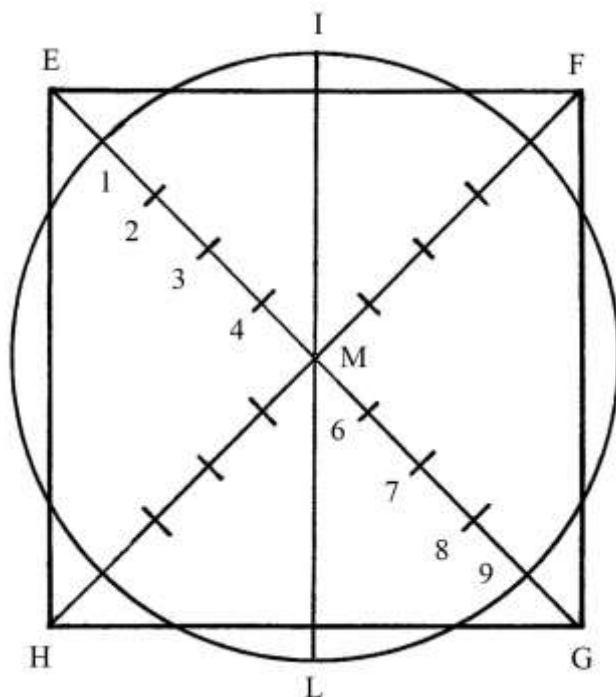
- * moltiplicare la lunghezza del lato del quadrato per sé stessa: $31 * 31 = 961$;
- * dividere per 11: $961/11 = (87 + 4/11)$;
- * moltiplicare per 14: $(87 + 4/11) * 14 = (1223 + 1/11)$;

* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{(1223 + 1/11)} \approx 34,97$ [valore che nel Trattato è arrotondato a 35], lunghezza del diametro AB del cerchio equivalente.
 Ovviamente, la costruzione è *approssimata*.



Cerchio di area uguale a quella di un quadrato

Il quadrato EFGH ha diagonali EG e FH lunghe 10: esse sono divise in 10 parti uguali.



M è il centro del quadrato e lo è anche del cerchio da costruire.

Fare centro in M e con raggio uguale a 4/10 della lunghezza di una diagonale (= M-1) e disegnare la circonferenza che ha diametro IL.

Il quadrato e il cerchio hanno aree *quasi* uguali.

L'area del quadrato è:

$$S_{EFGH} = FG^2/2 = 10^2/2 = 50.$$

Il diametro d del cerchio con area 50 è lungo:

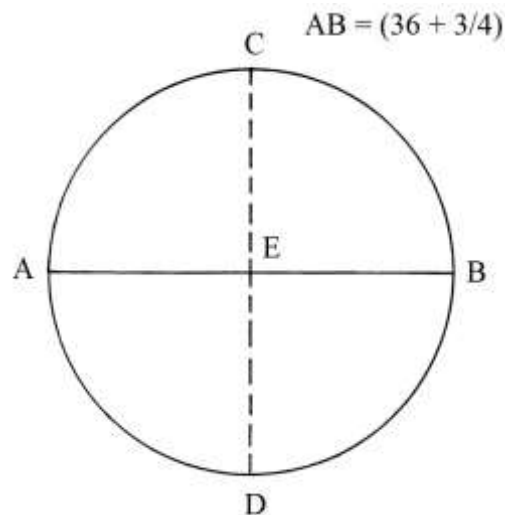
$$d = 8/10 * EG = (8/10) * 10 = 8.$$

L'area del cerchio è:

$$S_{CERCHIO} = 22/7 * (d/2)^2 = 22/7 * (8/2)^2 = 22/7 * 16 = (50 + 2/7).$$

Area di un cerchio

Un cerchio ha diametro AB lungo $(36 + \frac{3}{4})$.



Deve essere calcolata la sua area. Il testo del Trattato si limita a enunciare la regola, senza presentare dei calcoli:

* moltiplicare la lunghezza del diametro per sé stessa: $(36 + \frac{3}{4}) * (36 + \frac{3}{4}) = [21609/16];$

* moltiplicare per 11: $[21609/16] * 11 = [237699/16];$

* dividere per 14: $[237699/16]/14 = [33957/32] \approx [1061 + 5/32].$

Aree di quattro settori circolari

Un cerchio ha diametro d lungo 28 e raggio r 14.

La sua circonferenza c è lunga:

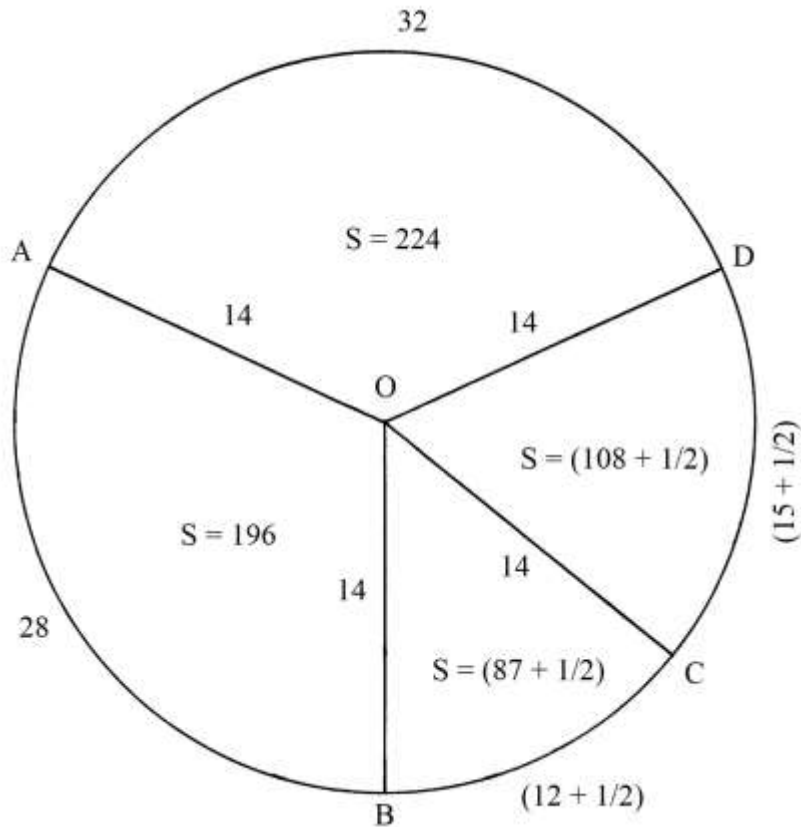
$$c = 22/7 * d = 22/7 * 28 = 88.$$

L'area dell'intero cerchio è data da:

$$S_{CERCHIO} = c * d/4 = 88 * 28/4 = 2464/4 = 616.$$

Le dimensioni possono essere espresse in passi, canne o altre unità, lineari o superficiali.

Il cerchio è diviso in *quattro* settori circolari, con vertice comune nel centro O: i loro archi hanno le lunghezze che sono scritte sullo schema.



Gli archi DC e CB hanno lunghezze che sommate danno la stessa lunghezza dell'arco AB:
 $DC + CB = (15 + \frac{1}{2}) + (12 + \frac{1}{2}) = 28 = AB$.

Nel Trattato sono calcolate le aree dei quattro settori circolari. L'area di quello AOD è ottenuta con la seguente procedura:

- * dividere per 2 la lunghezza dell'arco AD: $32/2 = 16$;
- * dividere per 2 la lunghezza del diametro del cerchio: $28/2 = 14$;
- * moltiplicare 16 per 14: $16 * 14 = 224$.

La procedura può essere riassunta in una formula nella quale a è la lunghezza dell'arco e r il raggio del cerchio:

$$S_{AOD} = (a/2) * (d/2) = (a/2) * r = (AD/2) * OA.$$

L'area del settore circolare AOB è:

$$S_{AOB} = (AB/2) * (d/2) = (28/2) * (28/2) = 14 * 14 = 196.$$

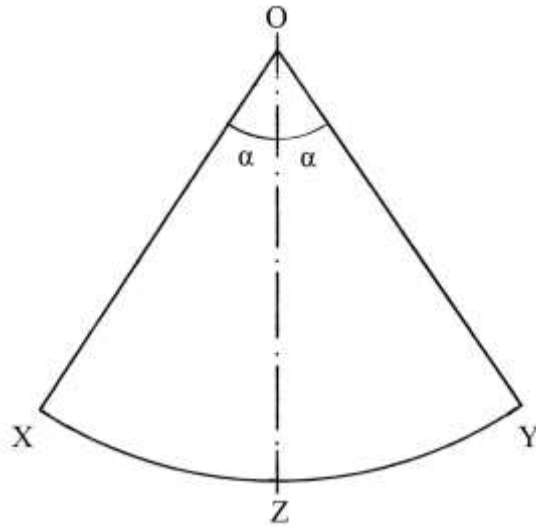
L'area del settore circolare OBC è:

$$S_{OBC} = (BC/2) * (d/2) = [(12 + \frac{1}{2})/2] * (28/2) = (6 + \frac{1}{4}) * 14 = (87 + \frac{1}{2}).$$

Infine, l'area del settore OCD è:

$$S_{OCD} = (CD/2) * (d/2) = [(15 + \frac{1}{2})/2] * (28/2) = (7 + \frac{3}{4}) * 14 = (108 + \frac{1}{2}).$$

In conclusione, l'area di un settore circolare è calcolata assimilando questa figura a un triangolo isoscele che ha lati obliqui OX e OY lunghi quanto il raggio centrale OZ:



$S_{OXY} = (XZY)/2 * OZ = a/2 * r/2 = a/2 * d/2$, dove r è il raggio e d il diametro del cerchio da cui è ricavato il settore circolare.

----- APPROFONDIMENTO -----

L'area di un settore circolare può essere calcolata anche con un altro metodo. Essa è proporzionale alla lunghezza dell'arco di circonferenza che delimita il settore. Nel caso del settore AOD si ha:

$$S_{AOD} : S_{CERCHIO} = AD : c, \text{ con } c \text{ lunghezza della circonferenza:}$$

$$S_{AOD} = S_{CERCHIO} * AD/c = (616 * 32)/88 = 224.$$

Il risultato è uguale a quello calcolato con il metodo utilizzato nel Trattato.

Diametro di un cerchio

Un cerchio di centro E ha area uguale a 616 e deve essere calcolata la lunghezza del suo diametro d .

La procedura usata contiene i seguenti passi:

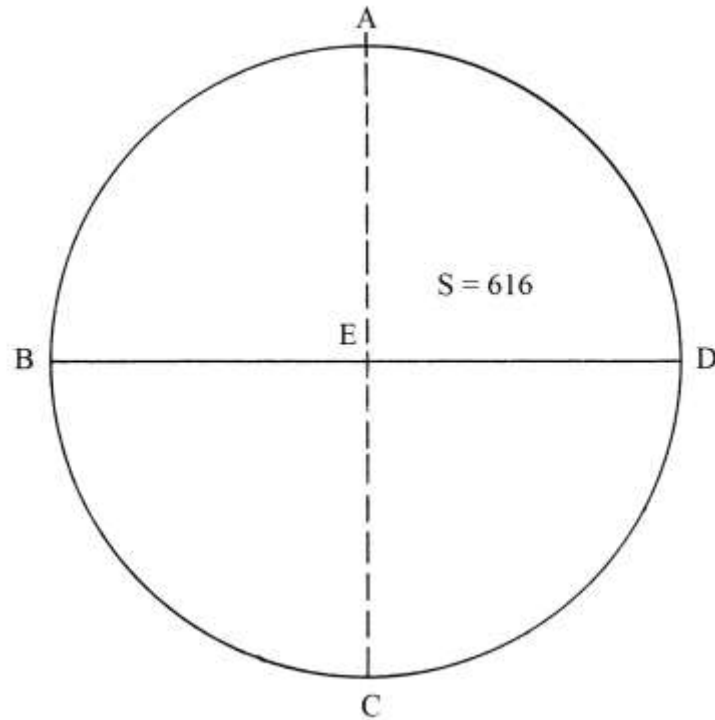
- * moltiplicare l'area per 14: 616 * 14 = 8624;
- * dividere per 11: 8624/11 = 784;
- * estrarre la radice quadrata: $\sqrt{784} = 28$, lunghezza del diametro BD.

La soluzione proviene dalla formula dell'area:

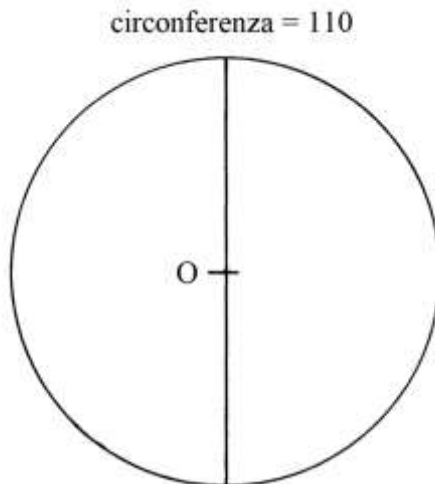
$$S_{CERCHIO} = 11/14 * d^2, \text{ da cui}$$

$$d^2 = 14/11 * S_{CERCHIO} \quad e$$

$$d = \sqrt{(14 * 11 * S_{CERCHIO})} = \sqrt{(14/11 * 616)} = \sqrt{784} = 28.$$



- [7] Diametro e superficie di un cerchio
 Un cerchio ha la circonferenza c lunga 110.



Sono chieste la lunghezza del diametro d e l'area S .

La lunghezza del diametro è data da:

- * $d = c / (3 + 1/7)$ oppure
- * $d = c * 7/22 = 110 * 7/22 = 35$.

L'area del cerchio è:

$$S_{\text{CERCHIO}} = (c/2) * (d/2) = (110/2) * (35/2) = (962 + 1/2).$$

----- APPROFONDIMENTO -----

L'ultima formula usata per calcolare l'area del cerchio ha un'origine che di seguito è approfondita.

L'area di un cerchio è data da:

$$S_{\text{CERCHIO}} = \pi * r^2, \text{ con } r \text{ raggio. Per } \pi \text{ usiamo l'approssimazione } 22/7.$$

La formula diviene:

$$S_{\text{CERCHIO}} = 22/7 * r^2.$$

Essa può essere trasformata come segue:

$$S_{\text{CERCHIO}} = (22/7 * r) * r.$$

L'espressione "22/7 * r" è uguale a metà della lunghezza della circonferenza c e il secondo r è metà del diametro d , per cui la formula può essere scritta come:

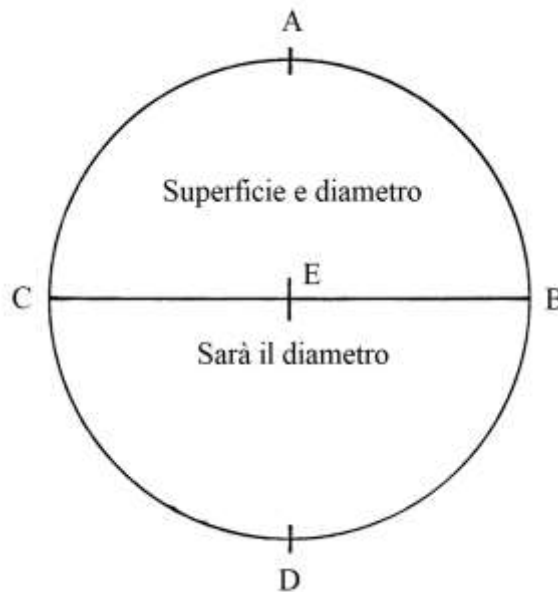
$$S_{\text{CERCHIO}} = (c/2) * (d/2), \text{ che è la formula corretta usata nel Trattato.}$$

[8] – [9] Superficie, diametro e circonferenza di due cerchi

I due esempi che seguono non sono descritti nel Trattato, ma soltanto disegnati.

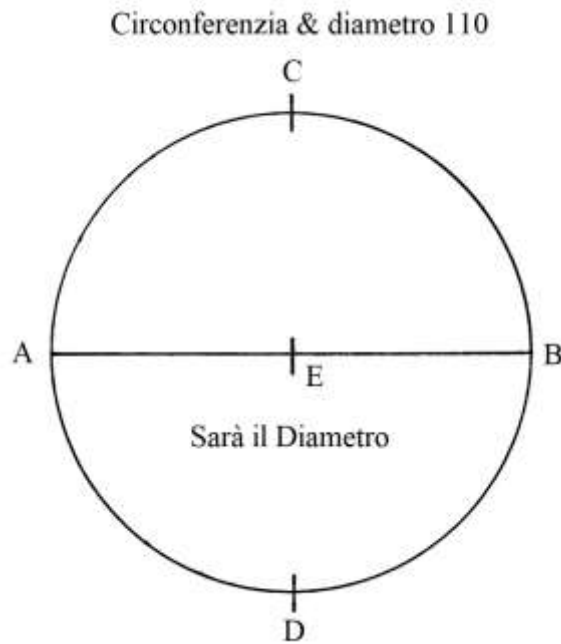
Conoscendo la superficie oppure la lunghezza del diametro o quella della circonferenza è facile ricavare i dati incogniti.

Nel primo schema sono riportate solo le scritte riprodotte nella figura che segue, senza alcuna indicazione numerica:



%%%%%%%%%

[9] Nel secondo schema sono scritte due diciture:



È evidente che 110 è la lunghezza della circonferenza c .

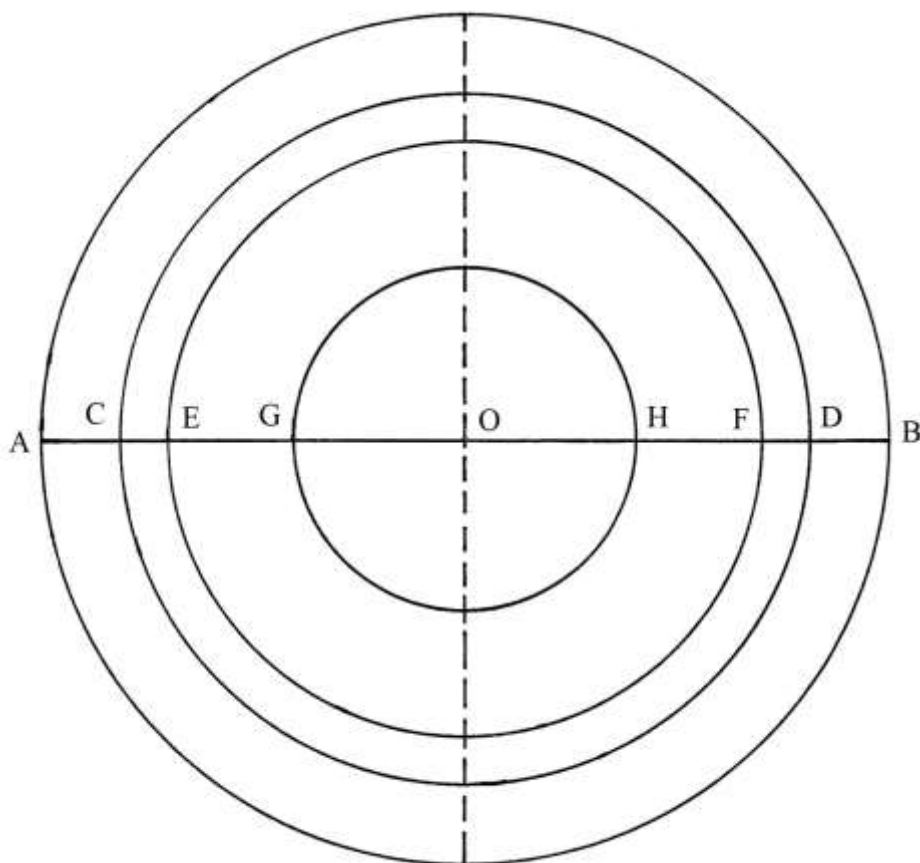
Il diametro AB è lungo:

$$AB = c / (3 + 1/7) = 110 / (22/7) = 110 * 7/22 = 35.$$

Il problema riproduce il precedente [7], con una sola differenza: il diametro è qui disegnato orizzontale.

Cerchi concentrici

Lo schema che segue è stato rielaborato sull'originale: lo scopo della costruzione sembra essere la tracciatura di cerchi concentrici a quello esterno e con aree in proporzione a frazioni: $2/3$, $1/2$ e $1/6$.



AB è il diametro del cerchio esterno ed è lungo d ; il cerchio esterno ha area S_{AB} che è data da:

$$S_{AB} = 22/7 * (d/2)^2 = 22/7 * r^2 = 22/7 * OA^2, \quad \text{con } r = OA = OB.$$

Deve essere disegnato un cerchio concentrico a quello esterno e che abbia area uguale a $2/3$:

$$S_{CD} = 2/3 * S_{AB} = 2/3 * (22/7 * OA^2) = 22/7 * OC^2, \quad \text{da cui:}$$

$$OC^2 = 2/3 * OA^2 \quad \text{e}$$

$$OC = OA * \sqrt{2/3}.$$

All'interno del cerchio di diametro CD deve poi essere costruito un cerchio con diametro EF che abbia area uguale a *metà* ($1/2$) di quella del cerchio di diametro AB:

$$S_{EF} = 1/2 * S_{AB} = 1/2 * (22/7 * OA^2) = 22/7 * EF^2, \quad \text{da cui:}$$

$$EF^2 = OA^2/2 \quad \text{e}$$

$$EF = OA/\sqrt{2}.$$

Infine, il quarto cerchio – il più interno – con diametro GH deve avere area uguale a $1/6$ di quella del cerchio esterno:

$$S_{GH} = S_{AB}/6 = (22/7 * OA^2)/6 = 22/7 * OG^2, \quad \text{da cui:}$$

$$OG^2 = OA^2/6 \quad \text{e}$$

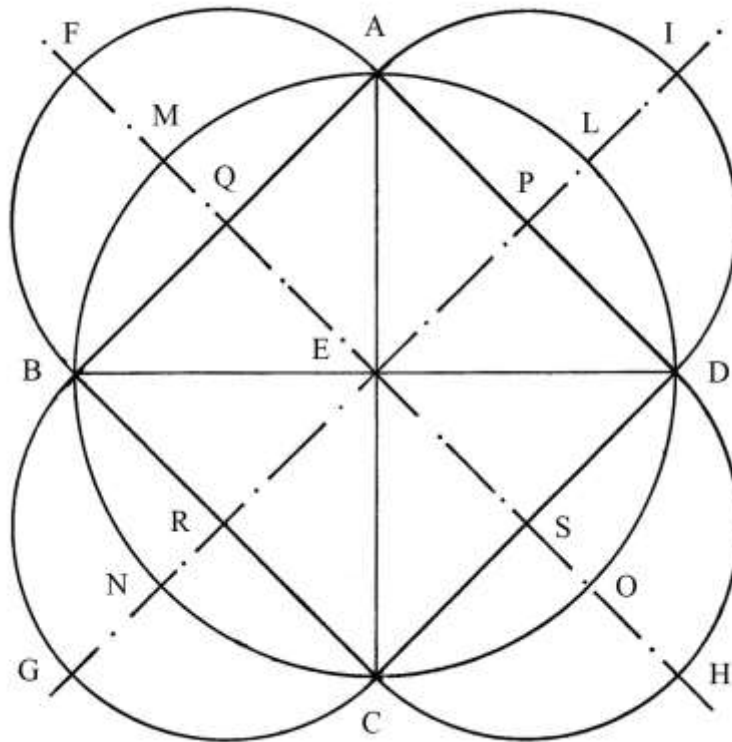
$$OG = OA/\sqrt{6}.$$

Partizioni di un cerchio

Gli ultimi due schemi contenuti in questa Tavola non sono spiegati.

Di seguito sono proposte due distinte ipotesi di interpretazione.

Nella figura è disegnato un cerchio di centro E e diametro $d = AC$, che riproduce lo schema che accompagna il primo problema.



BD è il diametro orizzontale.

ABCD è un quadrato inscritto nel cerchio.

Fissare i punti medi dei lati del quadrato: sono P, Q, R e S. Tracciare gli assi di simmetria passanti per le coppie di punti P-R e Q-S.

Con raggio PA fare centro nei punti P, Q, R e S e disegnare quattro semicirconferenze.

AIDL è una *lunula*, come lo sono le superfici BFAM, CGBN e DHCO: esse sono delimitate da due archi di circonferenza.

Il cerchio di diametro AC ha area che è data da:

$$S_{\text{CERCHIO}} = 11/14 * d^2.$$

Il quadrato ABCD ha lati che sono lunghi:

$$AB^2 = AE^2 + EB^2 = (d/2)^2 + (d/2)^2 = 2 * (d/2)^2 = d^2/2 \quad e$$

$$AB = \sqrt{(d^2/2)} = d/\sqrt{2}.$$

L'area del quadrato ABCD è:

$$S_{\text{ABCD}} = AB^2 = d^2/2.$$

Il triangolo rettangolo isoscele AED ha area:

$$S_{\text{AED}} = (AE * ED)/2 = (d/2 * d/2)/2 = d^2/8 = S_{\text{ABCD}}/4.$$

Il settore circolare ALDE ha area:

$$S_{\text{ALDE}} = S_{\text{CERCHIO}}/4 = (11/14 * d^2)/4 = 11/56 * d^2.$$

Il segmento circolare ALDP ha area:

$$S_{\text{ALDP}} = S_{\text{ALDE}} - S_{\text{AED}} = 11/56 d^2 - d^2/8 = d^2 * (11 - 7)/56 = d^2 * 4/56 = d^2/14.$$

Il segmento AP è lungo:

$$AP = AD/2 = (d/\sqrt{2})/2 = d/(2 * \sqrt{2}).$$

Il semicerchio AIDP ha area:

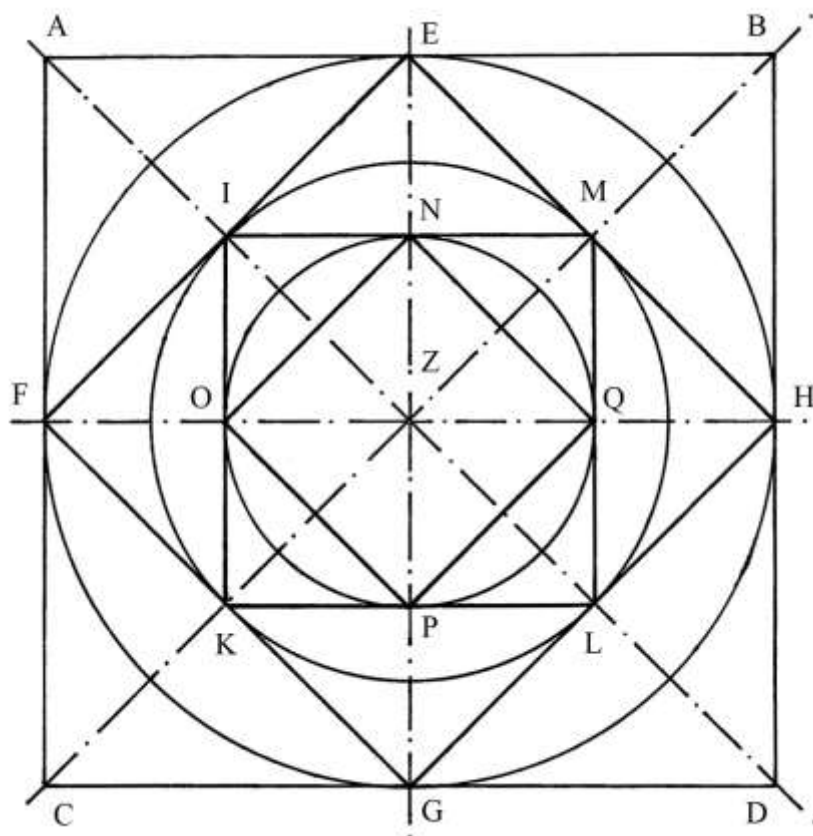
$$S_{\text{AIDP}} = (11/14 * AD^2)/2 = 11/14 * (d/\sqrt{2})^2/2 = (11/14 * d^2/2)/2 = 11/14 * d^2/4 = 11/56 * d^2.$$

L'area della lunula AIDL è data da:

$S_{AIDL} = S_{AIDP} - S_{ALDP} = 11/56 * d^2 - d^2/14 = d^2 * (11 - 4)/56 = d^2/8.$
 L'area della lunula AIDL è uguale a quella di un quadrato con lato lungo AP:
 $S_{AIDL} = AP^2$
 $d^2/8 = [d/(2 * \sqrt{2})]^2$
 $d^2/8 = d^2/8.$

%%%

ABDC è un quadrato con lati lunghi AB.
 Disegnare le due diagonali AD e BC: esse si incontrano nel centro Z.



Fare centro in Z e con raggio $ZF = AB/2$ disegnare una circonferenza inscritta e tangente al quadrato circoscritto nei punti medi dei suoi lati, E, F, G e H.

Tracciare i diametri passanti per le coppie di punti E-G e F-H.

Il quadrato ABDC ha area:

$$S_{ABDC} = AB^2.$$

Il cerchio di diametro HF ha area:

$$S_{FH} = 11/14 * FH^2 = 11/14 * AB^2.$$

Disegnare il quadrato EFGH, inscritto nel cerchio: il suo lato EF ha lunghezza:

$$EF^2 = ZF^2 + ZE^2 = 2 * ZF^2 = 2 * (AB/2)^2 = AB^2/2 \quad e$$

$$EF = \sqrt{AB^2/2} = AB/\sqrt{2}.$$

L'area di EFGH è uguale a:

$$S_{EFGH} = EF^2 = AB^2/2.$$

Le diagonali di ABCD tagliano i lati del quadrato EFGH nei suoi punti medi: I, K, L e M.

Fare centro in Z e con raggio ZI traccia una circonferenza inscritta nel quadrato EFGH: il suo diametro è lungo:

$$IL = KM = EF = AB/\sqrt{2}.$$

L'area di questo secondo cerchio è:

$$S_{IL} = 11/14 * IL^2 = 11/14 * (AB/\sqrt{2})^2 = 11/28 * AB^2.$$

Collegare i punti I, K, L e M: è disegnato il quadrato IKLM i cui lati sono lunghi:

$$IK = AC/2 = AB/2.$$

L'area di IKLM è:

$$S_{IKLM} = IK^2 = (AB/2)^2 = AB^2/4.$$

I lati del quadrato IKLM sono divisi a metà dai diametri EG e FH che fissano i punti medi N, O, P e Q.

Fare centro in Z e con raggio ZN tracciare una terza circonferenza: ZN è lungo:

$$ZN = IK/2 = (AB/2)/2 = AB/4 \quad \text{e}$$

$$NP = 2 * ZN = 2 * AB/4 = AB/2.$$

L'area del cerchio di diametro NP è:

$$S_{NP} = 11/14 * NP^2 = 11/14 * (AB/2)^2 = 11/14 * AB^2/4 = 11/56 * AB^2.$$

All'interno del terzo cerchio è infine inscritto il quadrato NOPQ. La sua area è:

$$S_{NOPQ} = NP^2/2 = [(AB/2)^2]/2 = AB^2/8.$$

Fra le aree dei quattro quadrati esistono delle proporzioni:

$$S_{ABDC} : S_{EFGH} : S_{IKLM} : S_{NOPQ} = AB^2 : AB^2/2 : AB^2/4 : AB^2/8 = \\ = 1 : 1/2 : 1/4 : 1/8 = 8 : 4 : 2 : 1.$$

Anche fra le aree dei tre cerchi intercorre una proporzione:

$$S_{FH} : S_{IL} : S_{NP} = 11/14 * AB^2 : 11/28 * AB^2 : 11/56 * AB^2 = \\ = 1 : 1/2 : 1/4 = 4 : 2 : 1.$$

TAVOLA XXVIII

La Tavola contiene *sette* esempi di superfici chiuse curvilinee.

Nel testo sono confusi l'*ovale* e l'*ellisse*.

Costruzione di un ovale

Un ovale è una curva chiusa delimitata da una linea generata dall'intersezione di due circonferenze di raggio uguale: il centro di una giace sulla circonferenza dell'altra.

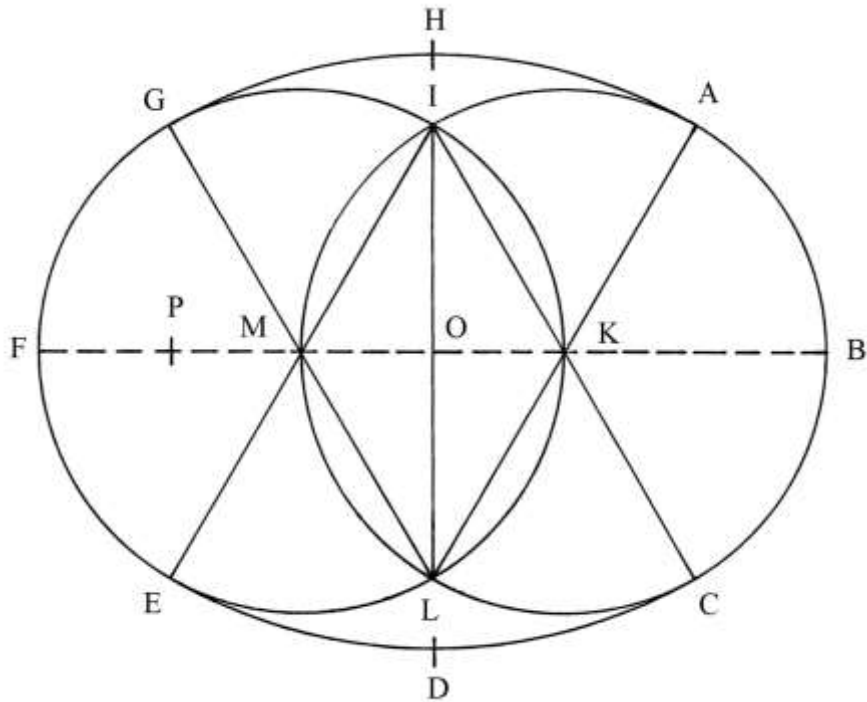
BF è l'asse maggiore dell'ovale, lungo 3 volte il raggio delle circonferenze che è 7.

K e M sono i due centri: $KM = 7$.

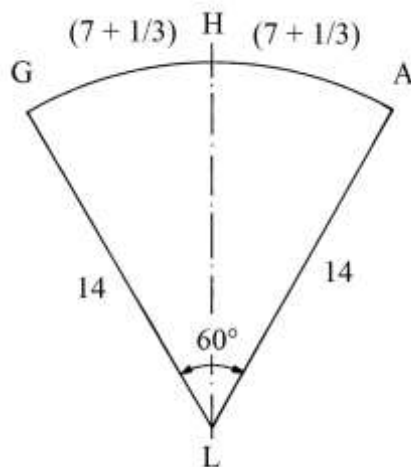
Tracciare i diametri passanti per K e per M e per le due intersezioni fra le circonferenze, I e L: sono i diametri AKL, CKI, EMI e GML.

Fare centro in I e poi in L e con raggio IE = 14 disegnare gli archi AG e CE.

ABCDEFGH è l'ovale.



GHAL è un settore circolare che angolo nel vertice L ampio 60° per costruzione:



La sua area è *un sesto* di quella di un cerchio di raggio $LG = 14$:

$$S_{GHAL} = S_{LG}/6 = (22/7 * 14^2)/6 = (102 + 2/3).$$

L'arco GHA è lungo *un sesto* della circonferenza c di cui fa parte e che è lunga:

$$c = 22/7 * (2 * LG) = 44/7 * 14 = 88 \quad e$$

$$GHA = c/6 = (14 + 2/3).$$

Sullo schema originale è correttamente scritto:

$$GH = HA = (7 + 1/3).$$

MIKL è un doppio triangolo equilatero con lati lunghi 7 e la sua area è:

$$S_{MIKL} = MK * IO.$$

IO è l'altezza del triangolo MIK ed è lunga:

$$IO = (\sqrt{3})/2 * MK = (\sqrt{3})/2 * 7.$$

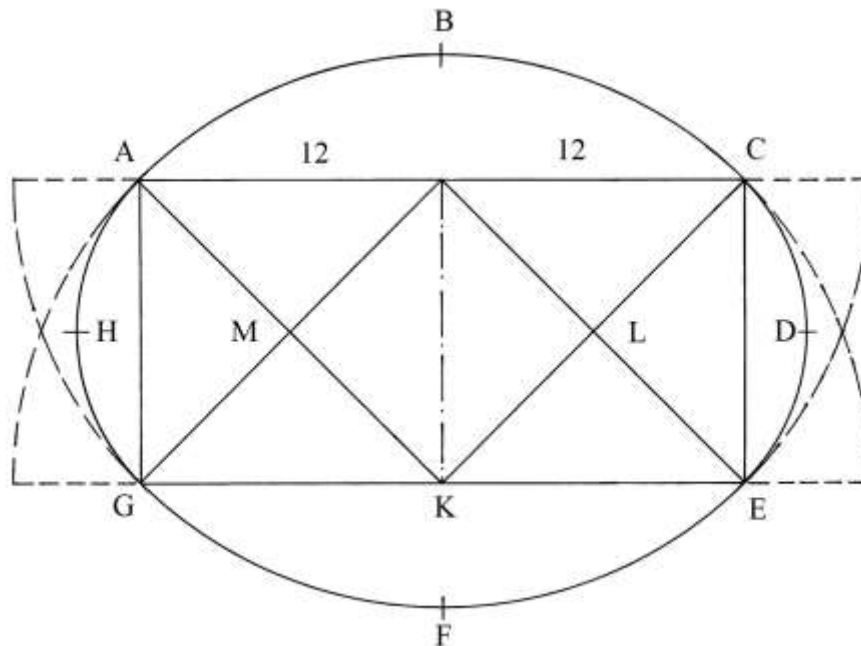
L'area di MIKL è:

$$S_{MIKL} = 7 * [(\sqrt{3})/2 * 7] = 49 * (\sqrt{3})/2.$$

L'area totale dell'ovale indicata nel Trattato è $(265 + 9/16)$: nel testo non è fornita alcuna procedura utile per ricavare questo risultato.

Ovale costruito con due quadrati

AIKG e ICEK sono due quadrati di uguali dimensioni, uniti lungo il comune lato IK.



Tracciare le diagonali dei due quadrati: AK, GI, IE e CK.

La lunghezza di una diagonale, ad esempio quella CK, è:

$$CK^2 = KE^2 + EC^2 = 12^2 + 12^2 = 144 + 144 = 288 \quad e$$

$$CK = \sqrt{288} \approx 17.$$

Fare centro in I e in K e con raggio IE disegnare gli archi di circonferenza EFG e ABC.

Poi, fare centro in L e in M e con raggio LE tracciare gli archi CDE e AHG.

La curva è completata.

ABCK e EFGI sono due settori circolari di uguali dimensioni.

Gli angoli AKC e EIG sono retti. L'area del settore circolare ABCK è:

$$S_{ABCK} = 22/7 * KA^2/4 = 22/7 * (\sqrt{288})^2/4 = 22/28 * 288 = (226 + 2/7).$$

Gli angoli CLE e AMC sono retti. Il settore circolare CDEL ha area uguale a quella di AHGM ed è data:

$$S_{CDEL} = 22/7 * LC^2/4.$$

LC è lungo la metà di CK:

$$LC = CK/2 = (\sqrt{288})/2 = \sqrt{(288/4)} = \sqrt{72}.$$

L'area di CDEL è:

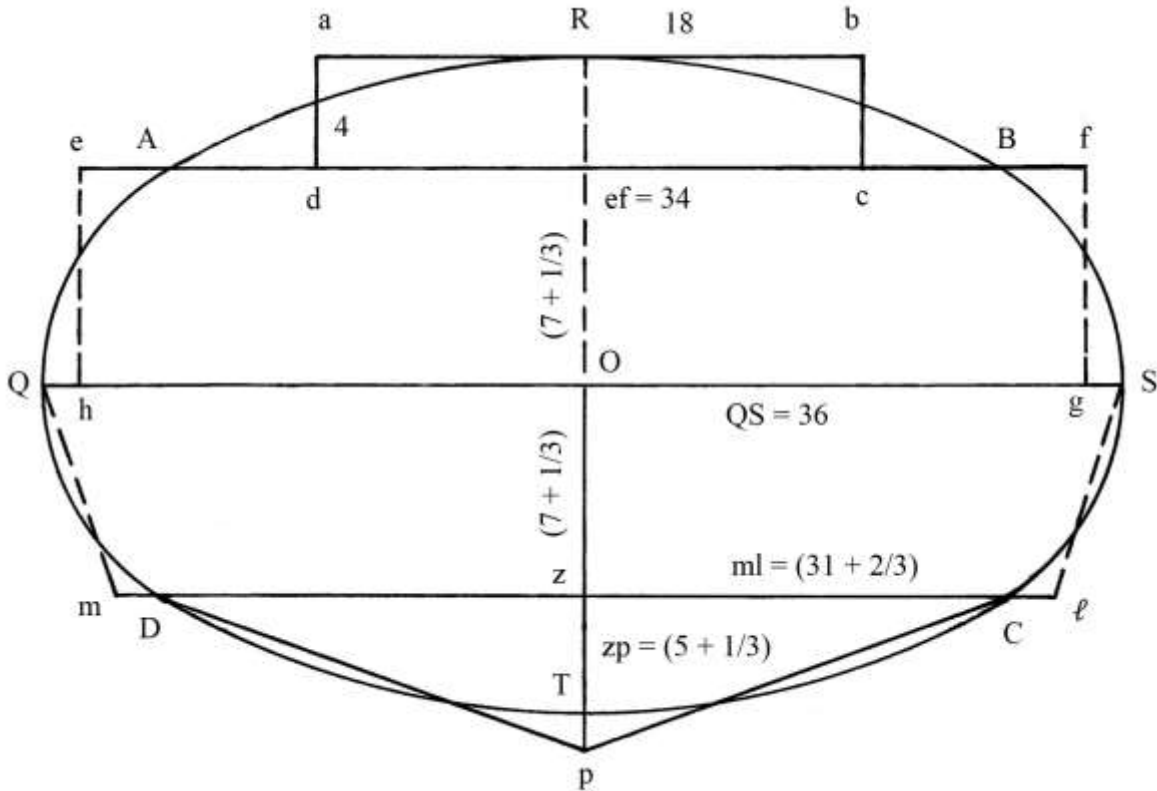
$$S_{CDEL} = 22/7 * (\sqrt{72})/4 = 22/28 * 72 = (56 + 4/7).$$

Nel Trattato l'area dell'ovale è calcolata in $(493 + 5/7)$.

Area di un ovale

QRST è un ovale e QS e RT sono i due assi, maggiore e minore.

Gli archi AB e CD sono tracciati facendo centro in due punti esterni all'ovale e posizionati sul prolungamento dell'asse minore RT.



Gli archi AD e BC sono ottenuti facendo centro in due punti posizionati sull'asse maggiore QS e fra loro simmetrici rispetto al centro O, come è mostrato nell'APPROFONDIMENTO che segue.

L'ovale è scomposto con approssimazioni e rettificazioni, in quattro poligoni:

- * il rettangolo $abcd$;
- * il rettangolo $efgh$;
- * il trapezio isoscele $QSlm$;
- * il triangolo isoscele $m\ell p$.

L'area dell'intero ovale è calcolata in $(642 + 2/3)$.

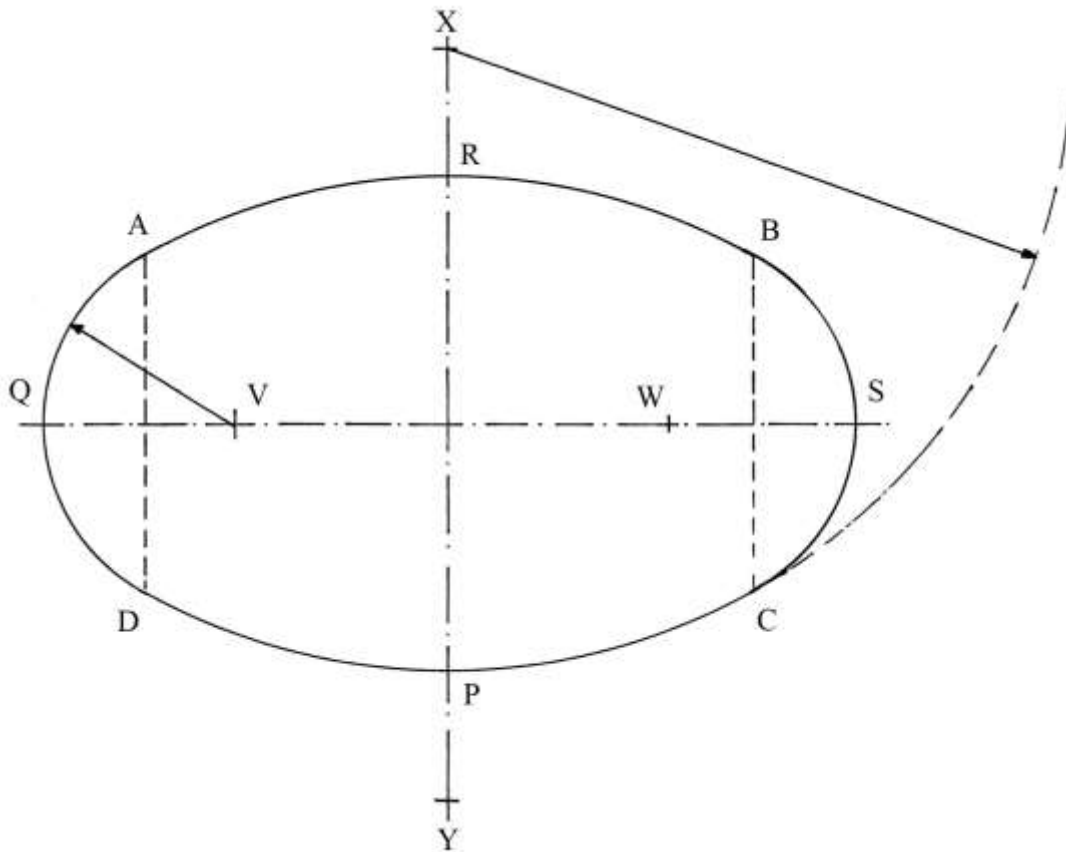
----- APPROFONDIMENTO -----

Nello schema che segue è ricostruito l'ovale e sono evidenziati i centri dei quattro archi di circonferenza che, raccordati, formano la curva.

L'arco DPC è tracciato con raggio $XC = XP$ e centro in X.

L'arco ARB è disegnato con raggio $YA = YC$ e centro in Y.

Infine, con centri in V e in W e raggio $VA = WB$ sono tracciati gli archi di raccordo AQD e BSC.



Area approssimata di un ovale

abcd sono i quattro vertici di un ovale. Deve essere calcolata la sua approssimando la figura curvilinea a un poligono con *otto* lati: questo ultimo è suddiviso in due trapezi isosceli e in due triangoli isosceli.

Per il centro O sono tracciati due assi perpendicolari: AB è lungo $(17 + 1/3)$ e l'asse orizzontale CG è 24.

Fissare i punti K e L alle seguenti distanze:

- * OK = 7 e KG = 5;
- * OL = 7 e LC = 5.

Per i punti K e L tracciare le perpendicolari a CG: sono fissati i punti F e H e B e D:

$$KH = KF = LB = LD = 6.$$

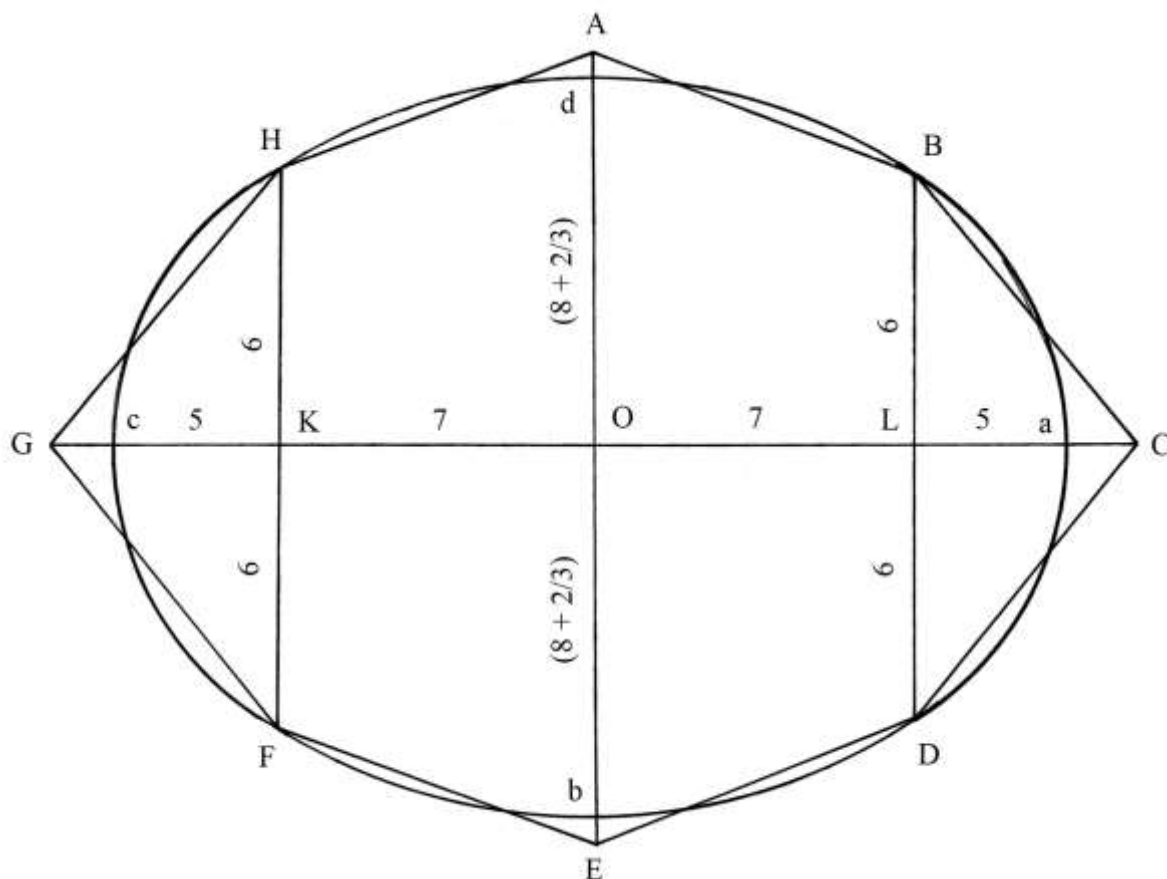
Collegare i vertici nel seguente ordine: ABCDEFGH. Il poligono risultante è un ottagono non regolare.

I trapezi AHFE e ABCD hanno dimensioni uguali. L'area di AHFE è:

$$S_{AHFE} = [(AE + HF)/2] * OK = \{[(17 + 1/3) + 12]/2\} * 7 = (102 + 2/3).$$

I triangoli FH e DCB hanno uguali dimensioni. L'area di FGH è:

$$S_{FGH} = FH * GK/2 = 12 * 5/2 = 30.$$



L'area S del poligono ABCDEFGH è:

$$S = S_{AHFE} + S_{ABCD} + S_{FGH} + S_{DCB} = 2 * S_{AHFE} + 2 * S_{FGH} = 2 * (102 + 2/3) + 2 * 30 = (265 + 1/3).$$

L'area dell'ovale è con buona approssimazione uguale a quella dell'ottagono ABCDEFGH.

Area di un ovolo

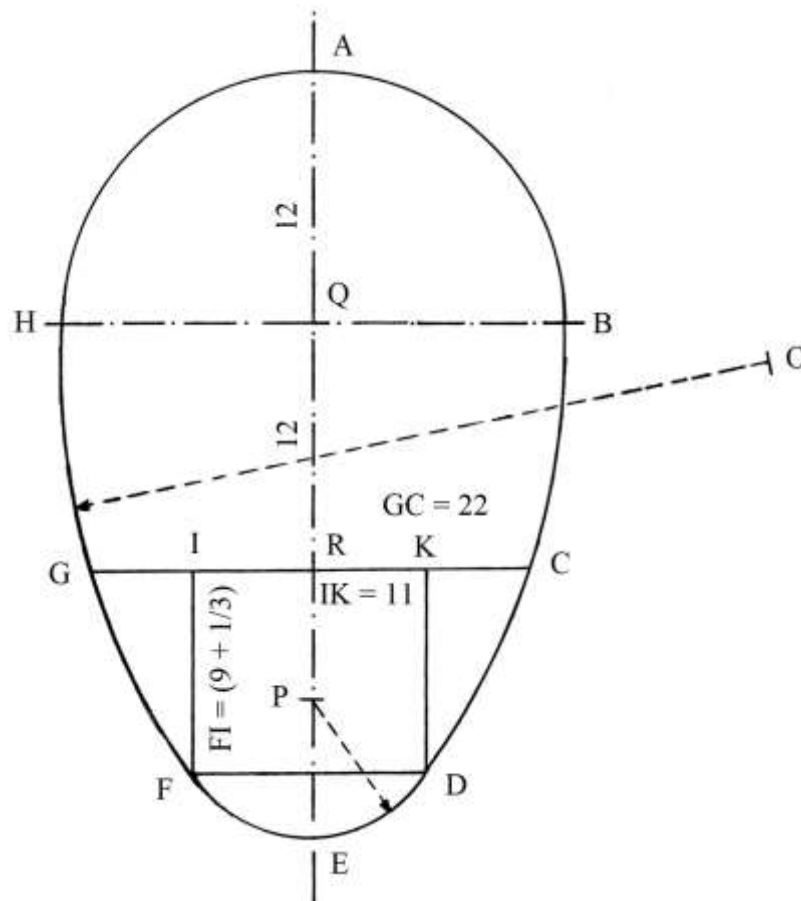
Nel Trattato è presentato un "ovale" attribuito a Albrecht Dürer: in geometria, questa figura curvilinea chiusa è oggi conosciuta come *ovolo* a causa della sua forma che lo porta a somigliare a un uovo.

HAB è un semicerchio di centro Q e raggio 12.

HBCG è una figura mista delimitata da due archi di circonferenza, BC e HG, e da due segmenti paralleli, HB e GC: questo ultimo è lungo 22 e l'altezza QR è 12.

La parte inferiore della curva è un arco di circonferenza con centro in P e raggio PF.

L'arco HG è tracciato con raggio OH e centro O, esterno all'ovolo. Anche l'arco BC è disegnato con raggio OH e centro in un punto posizionato a sinistra e esterno all'ovolo e simmetrico a O rispetto all'asse AE.



L'area del semicerchio HAB è:

$$S_{HAB} = \frac{22}{7} * \frac{QA^2}{2} = \frac{22}{7} * \frac{12^2}{2} = \frac{11}{7} * 144 = (226 + \frac{2}{7}).$$

Nel Trattato l'area della figura curvilinea HBCG pare essere calcolata assimilandola a un trapezio isoscele:

$$S_{HBCG} = \frac{(HB + GC)}{2} * QR = \frac{(24 + 22)}{2} * 12 = 276.$$

L'area del rettangolo IKDF è:

$$S_{IKDF} = IK * IF = 11 * (9 + \frac{1}{3}) = (102 + \frac{2}{3}).$$

L'area totale dell'ovolo è indicata in $(680 + \frac{5}{42})$.

----- APPROFONDIMENTO -----

Lo schema che segue mostra un esempio di costruzione di un *ovolo* dati le lunghezze dell'asse minore AB e dell'asse maggiore CD.

La curva è formata da archi di circonferenza raccordati.

Fare centro nel punto medio di AB, O, e disegnare una circonferenza di raggio OA.

Con il compasso misurare la lunghezza di ED, differenza fra le lunghezze dell'asse maggiore CD e dell'asse minore CE = AB:

$$ED = CD - CE = CD - AB.$$

Collegare A con D. Con il compasso riportare la lunghezza di ED da A in F:

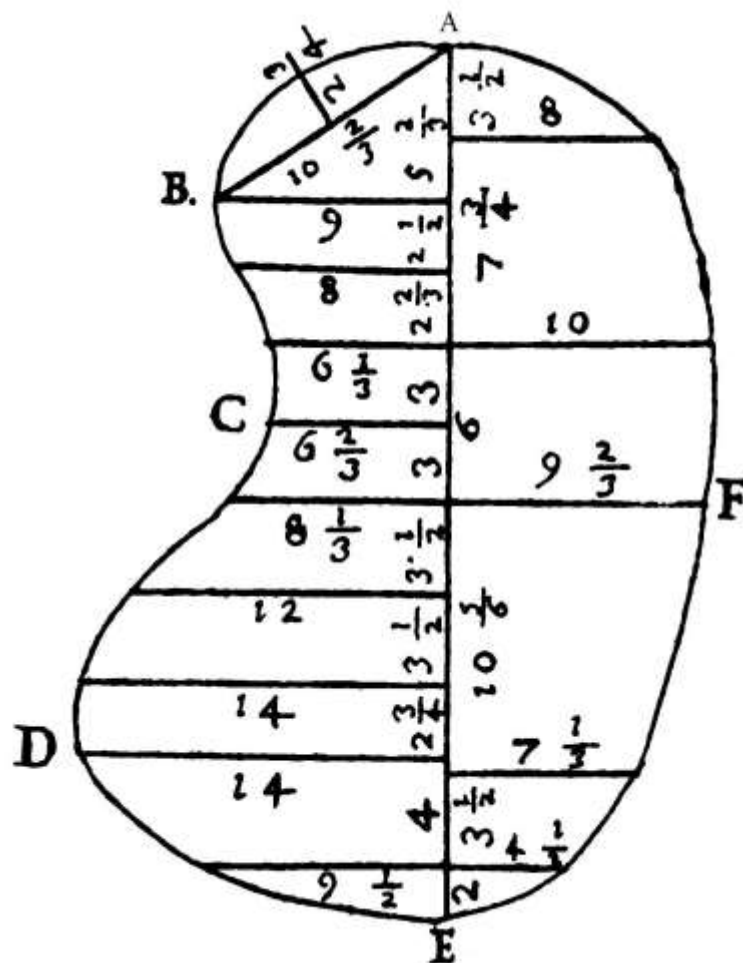
$$AF = ED.$$

Costruire l'asse del segmento FD: esso passa per i punti 1 e 2 e taglia il prolungamento dell'asse minore in G.

H è l'intersezione di 1-G con l'asse maggiore.

Fare centro in O e con raggio OG disegnare la semicirconferenza GI.

Dai punti G e I tracciare due rette passanti per H.



Area di un doppio segmento circolare

Nel Trattato, la curva AECF è chiamata “biangola”: un termine più diffuso per definirla è *mandorla*.

Essa è originata dall’unione di due segmenti circolari di uguali dimensioni, AEDG e ADCG, uniti lungo la loro comune *corda* AC.

AC è l’asse maggiore e EF quello minore: il primo è lungo 24 e il secondo è 12.

Prolungare l’asse minore: i punti B e D sono i centri dei due archi ADC e AEC, disegnati con raggio BA = DA.

GB è lungo quanto GD:

$$GB = GD = 9.$$

ABG è un triangolo rettangolo e la lunghezza della sua ipotenusa è data da:

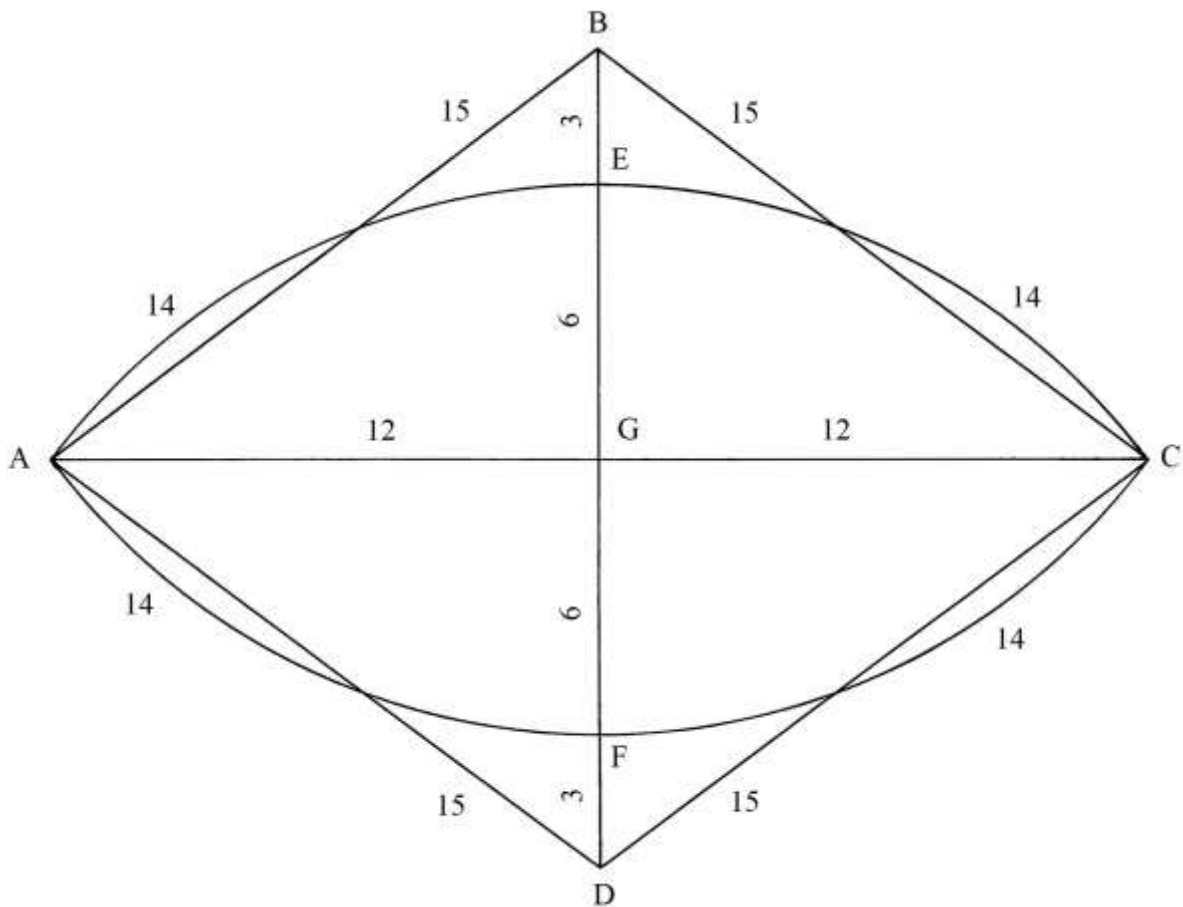
$$AB^2 = AG^2 + GB^2 = 12^2 + 9^2 = 144 + 81 = 225 \quad \text{e}$$

$$AB = \sqrt{225} = 15.$$

Nel testo, la lunghezza del raggio BA è indicata in 14 invece che in 15.

I due archi AEC e AFC sono entrambi lunghi 28.

Le aree calcolate nel Trattato paiono non corrette perché calcolate sulla base della lunghezza dei raggi BA e DA uguale a 14.



----- APPROFONDIMENTO -----

L'area del settore circolare AECD è:

$$S_{AECD} = AEC * AD/2 = 28 * 15/2 = 210.$$

Il settore circolare AFCB ha area uguale a quella di AECD.

Il triangolo ABC ha area:

$$S_{ABC} = AC * BG/2 = 24 * 9/2 = 108.$$

Nel Trattato, l'area del segmento circolare AECG è calcolata con il metodo seguente (qui con numeri corretti):

$$S_{AECG} = S_{AECD} - S_{ABC} = 210 - 108 = 102.$$

L'area del segmento circolare AFCG è uguale a quella di AECG.

L'area della *biangola* AECF è:

$$S_{AECF} = 2 * S_{AECG} = 2 * 102 = 204.$$

%%%%%%%%%

L'area di un segmento circolare può essere calcolata con la formula che segue:

$$S_{SEGMENTO\ CIRCOLARE} = [r * (a - c) + c * f]/2 \quad \text{dove:}$$

- * r è il raggio: $r = ED = 15;$
- * a è la lunghezza dell'arco AEC: $a = 28;$
- * c è la corda AC: $c = 24;$
- * f è la freccia EG: $f = 6.$

L'area di AECG è:

$$S_{AECG} = [15 * (28 - 24) + 24 * 6]/2 = (15 * 4 + 144)/2 = (60 + 144)/2 = 204/2 = 102.$$

L'area della *biangola* è:

$$S_{AECF} = 2 * S_{AECG} = 2 * 102 = 204.$$

Il metodo usato nel Trattato è corretto.

TAVOLA XXIX

La Tavola presenta esempi geometrici e aritmetici di costruzione di segmenti di lunghezza proporzionale, frazionaria, di uno di lunghezza espressa da un numero intero.

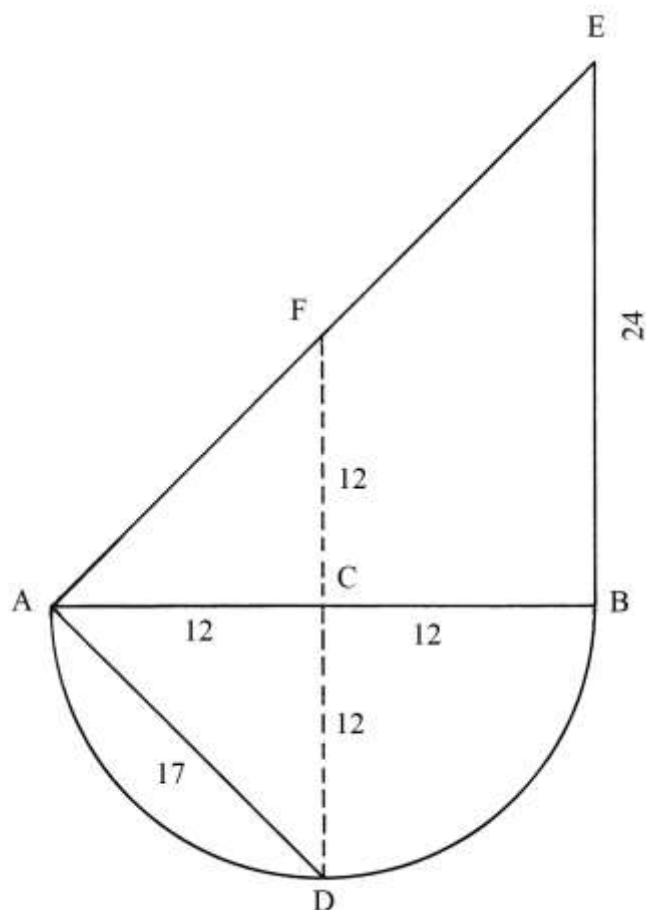
Nella pagina che contiene i disegni della Tavola è presentata la pianta di un edificio al cui centro è tracciato un segmento, AB, lungo 24 *passi*.

Volendo disegnare una pianta con area uguale a metà di quella che presenta una lunghezza di 24 *passi*, occorre procedere per via aritmetica o per via geometrica. La prima via prevede i seguenti passaggi:

- * moltiplicare 24 per sé stesso: $24 * 24 = 576$;
- * dividere per 2: $576/2 = 288$;
- * estrarre la radice quadrata: $\sqrt{288} \approx 17$ [il quadrato di 17 è 289].

La lunghezza del nuovo segmento collegato a un'area uguale a metà di quella originale basata sui 24 *passi* è quindi ≈ 17 .

La soluzione del problema può essere ottenuta anche per via geometrica. Nello schema che segue sono costruite la diagonale AE di un quadrato con lati lunghi 24 e la sua metà: AD = AE:



AB è lungo 24 e C è il suo punto medio. Fare centro in C e con raggio CA = CB = 12, tracciare una semicirconferenza. Per il punto C disegnare la perpendicolare al diametro AB che taglia in D la semicirconferenza.

Dal punto B elevare la perpendicolare a AB e da B riportare la lunghezza di BA in E:
 $BE = BA = 24$.

Collegare E con A: EA è la diagonale di un quadrato con lati lunghi 24; la sua lunghezza è:
 $AE^2 = AB^2 + BE^2 = 24^2 + 24^2 = 576 + 576 = 1152$ e
 $AE = \sqrt{1152}$.

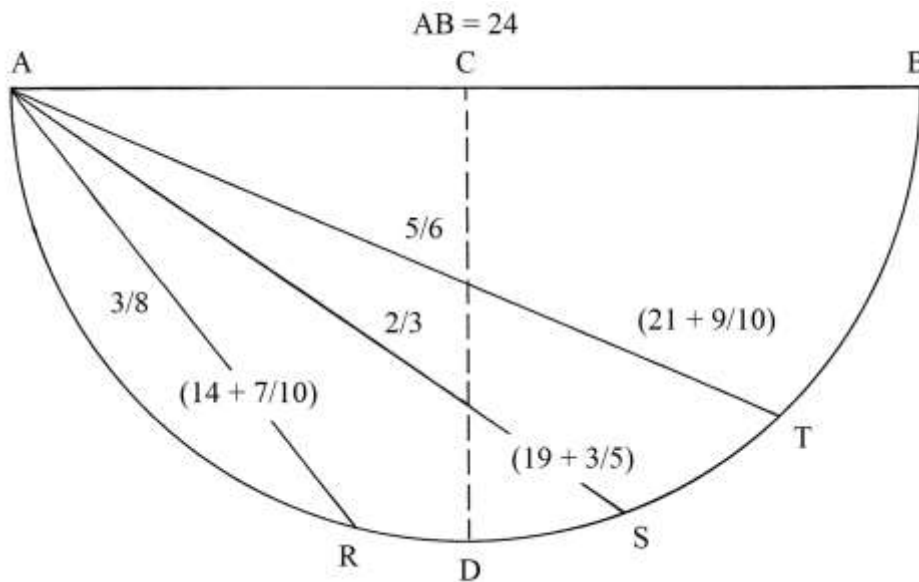
F è il punto medio della diagonale AE e CF è lungo 12, dato che è il cateto verticale del triangolo rettangolo isoscele ACF: AF è la sua ipotenusa e la sua lunghezza è data da:
 $AF^2 = AC^2 + FC^2 = 12^2 + 12^2 = 144 + 144 = 288$ e
 $AF = \sqrt{288}$.

Anche la corda AD è un'ipotenusa: lo è nel triangolo rettangolo isoscele ACDE e anche essa è lunga $\sqrt{288}$, lunghezza che – come detto in precedenza – nel Trattato è approssimata a 17.

Sono poi proposte altre soluzioni con differenti rapporti di scala:

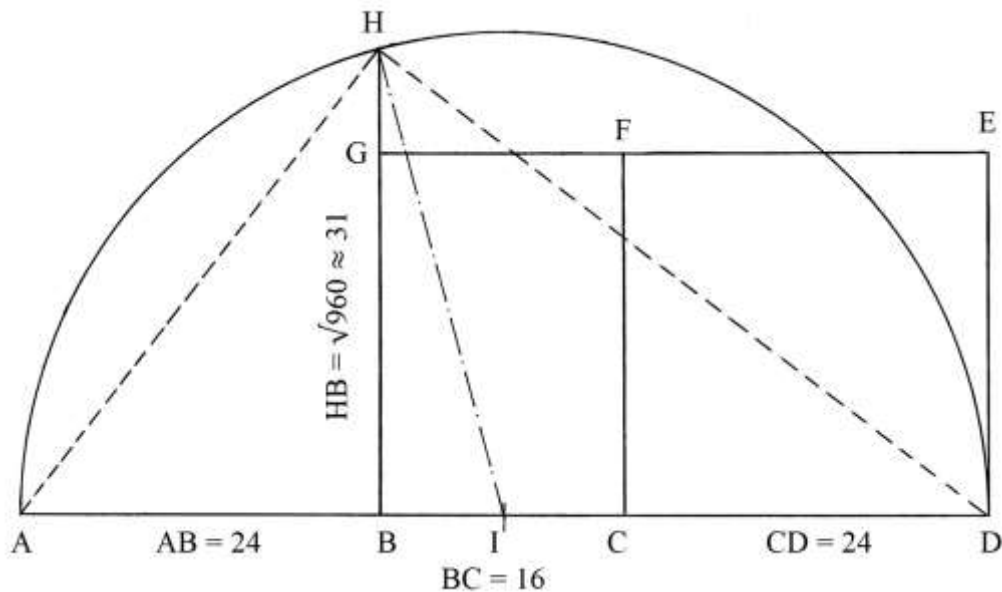
- a) Rapporto 3/8: $24^2 * 3/8 = 576 * 3/8 = 216$ e
 $\sqrt{216} \approx (14 + 7/10)$.
- b) Rapporto 2/3: $24^2 * 2/3 = 576 * 2/3 = 384$ e
 $\sqrt{384} \approx (19 + 3/5)$.
- c) Rapporto 5/6: $24^2 * 5/6 = 576 * 5/6 = 480$ e
 $\sqrt{480} \approx (21 + 9/10)$.

Lo schema che segue riassume le lunghezze degli ultimi tre rapporti di scala, tutti comparati con la lunghezza di AB che è 24:



%%%

Nella Tavola è contenuto uno schema, qui ridisegnato, senza alcuna descrizione:



Potrebbe trattarsi dell'ipotesi di un *ingrandimento* della lunghezza originaria di 24 passi.

Su di una retta è disegnato il segmento ABCD, lungo 64 e diviso in tre segmenti adiacenti:

- * AB = 24;
- * BC = 16;
- * CD = 24.

Sul segmento CD è costruito il quadrato CFED.

Su BC è disegnato il rettangolo BCFG che è alto 24.

Le aree dei due quadrilateri sono:

- * $S_{CFED} = 24^2 = 576$;
- * $S_{BCFG} = BC * BG = 16 * 24 = 384$.

La somma delle due aree è:

$$S_{CFED} + S_{BCFG} = 576 + 384 = 960.$$

L'area totale 960 può essere scritta come segue:

$$960 = 576 * 5/3.$$

La lunghezza del segmento che corrisponde a un rapporto di scala uguale a 5/3 è:

$$\sqrt{960} \approx 31: \quad \text{infatti } 31^2 = 961.$$

La lunghezza del segmento che corrisponde a $\sqrt{960}$ è ricavabile per via geometrica, come spiega lo schema qui sopra.

Determinare il punto medio di AD: è I. Fare centro in I e con raggio $IA = ID = 64/2 = 32$ tracciare una semicirconfenza da A a D. Essa taglia in H il prolungamento di BG.

Per il secondo teorema di Euclide sui triangoli rettangoli, l'altezza HB è medio proporzionale fra le lunghezze delle proiezioni dei cateti AH e DH sull'ipotenusa AD:

$$AB : HB = HB : BD$$

$$HB^2 = AB * BD$$

$$HB^2 = 24 * 40 = 960 \quad e$$

$$HB = \sqrt{960} \approx 31.$$

HB è la lunghezza del segmento che genera una superficie ampia i 5/3 di quella creata da un segmento lungo 24 passi.

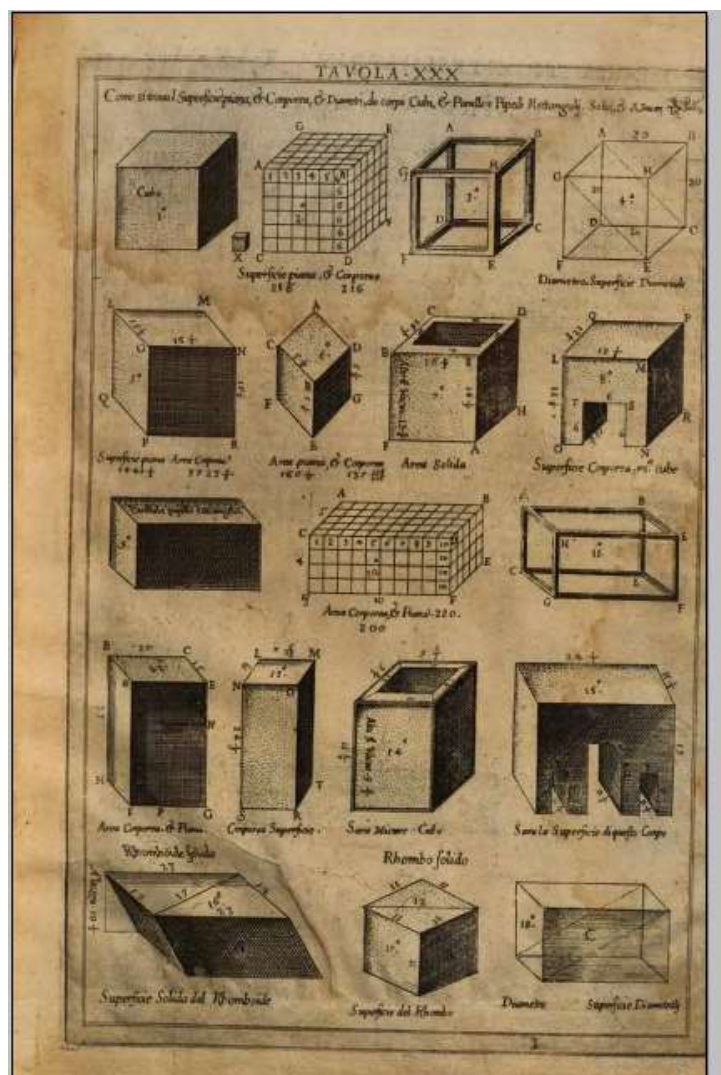
TAVOLA XXX

La Tavola contiene *diciotto* esempi di solidi pieni e vuoti. Sono descritti i metodi impiegati per calcolare le superfici delle loro facce, le lunghezze di alcune diagonali e i volumi.

Particolarmente interessanti sono i metodi di rappresentazione usati: si tratta dell'assonometria cavaliere e dell'assonometria militare.

Nella Tavola originale, alcune facce sono riempite: negli schemi che seguono esse sono state lasciate bianche.

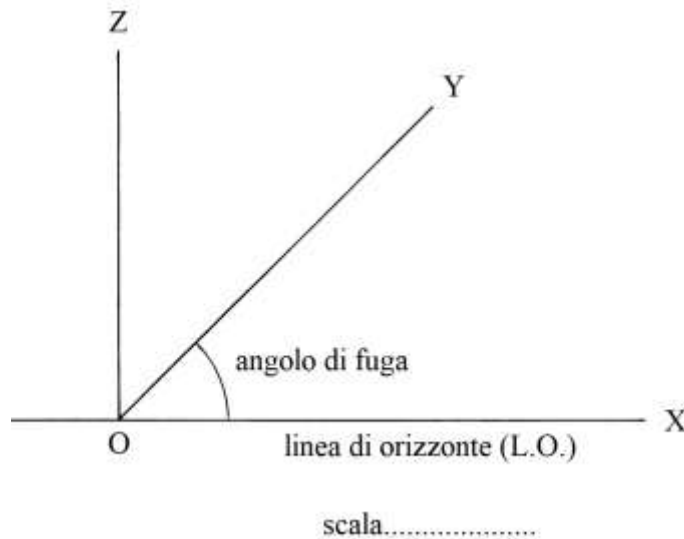
Tre solidi presenti nella Tavola non sono considerati in questo articolo.



----- APPROFONDIMENTO -----

Alcune definizioni dell'assonometria

Un solido rappresentato in assonometria è disegnato rispettando alcune regole:



Sono usati tre assi – X, Y e Z – fra loro variamente ruotati in relazione al metodo scelto e tutti con origine nel punto O.

Nel caso dell'assonometria cavaliera, l'asse X è orizzontale, quello Z è perpendicolare a X (e verticale) e l'asse Y è inclinato, spesso di 45°: su questo asse viene misurata la lunghezza degli spigoli obliqui che sono scorciati.

Il *rapporto di fuga*, RF, è il rapporto fra le lunghezze misurate sull'asse Y e quelle reali.

L'angolo formato fra l'asse Y e l'asse X è l'*angolo di fuga*.

Il disegno è effettuato su di un foglio di carta che rappresenta il piano di proiezione (che può essere sostituito dallo schermo di un monitor).

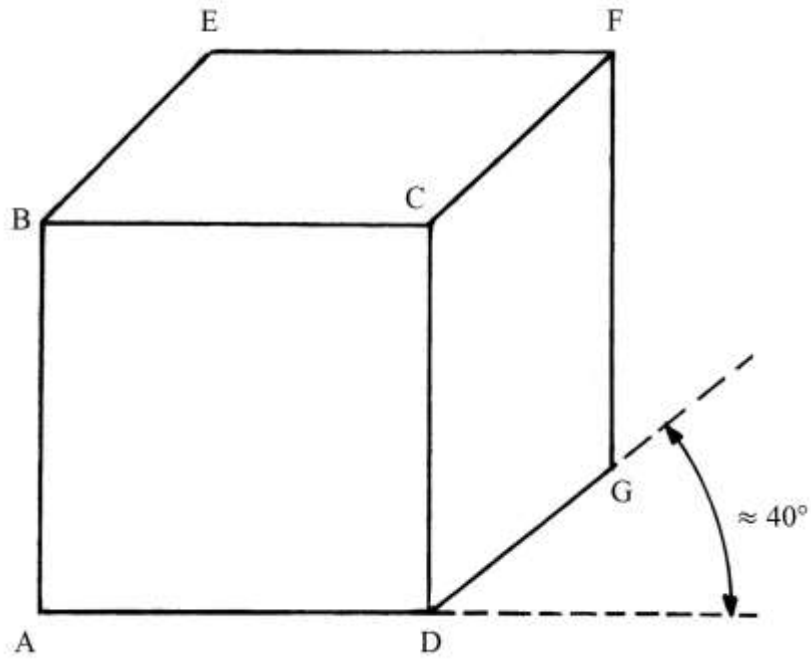
Infine, è fissata una scala di proporzione: 1 : 1, 1 : 2, 1 : 5, ecc.

Un cubo in assonometria cavaliera

Il cubo è rappresentato in assonometria cavaliera. L'angolo di fuga è $\approx 40^\circ$ e il rapporto di fuga vale:

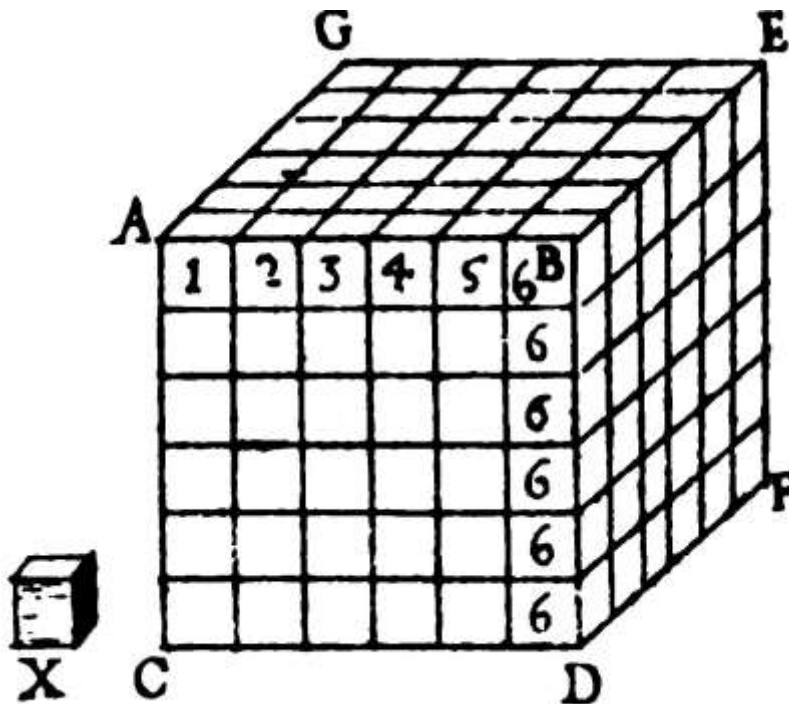
$$RF = DG/AD \approx 0,625.$$

Nel Trattato non sono indicate le dimensioni del solido.



Un cubo composto

Un cubo è formato dall'unione di un certo numero di piccoli cubi come quello indicato con "X":



La faccia anteriore è formata da un quadrato costituito da una matrice di $6 * 6 = 36$ piccoli quadrati.

Il cubo mostra sei facce uguali.

Il solido è formato da: $N = 6 * 6 * 6 = 216$ piccoli cubi.

Il cubo "X" ha spigoli lunghi 1 e la faccia anteriore ABDC ha area:

$$S_{ABDC} = 6 * 6 = 36.$$

Il cubo ha sei facce uguali e la sua area totale è:

$$S_{CUBO} = S_{ABDC} * 6 = 36 * 6 = 216.$$

Il volume del cubo "X" è:

$$V_X = 1^3 = 1.$$

Il volume dell'intero cubo è:

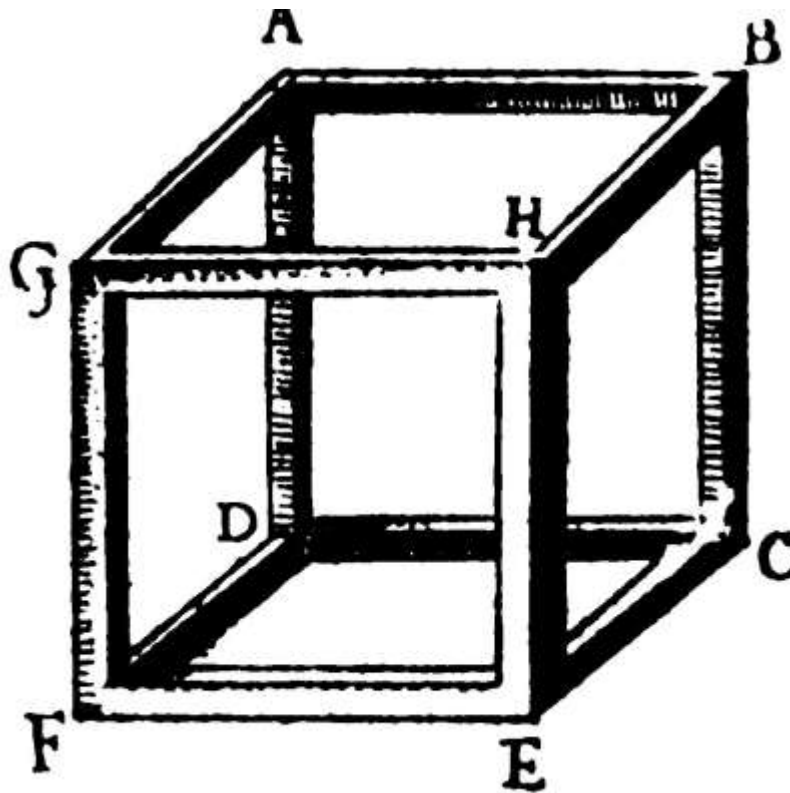
$$V_{CUBO} = N * V_X = 216 * 1 = 216.$$

Lo spigolo DF è inclinato di $\approx 40^\circ$ e la sua lunghezza è approssimativamente uguale a 0,6 volte quella degli spigoli del cubo:

$$DF/CD = RF \approx 0,6.$$

Un cubo vacuo

Il terzo cubo descritto nella Tavola è *vacuo*: è formato da 12 regoli di uguali dimensioni e fra loro collegati.



Il solido è vuoto.

Nel Trattato non sono fornite informazioni sulle sue dimensioni.

Diagonali delle facce di un cubo

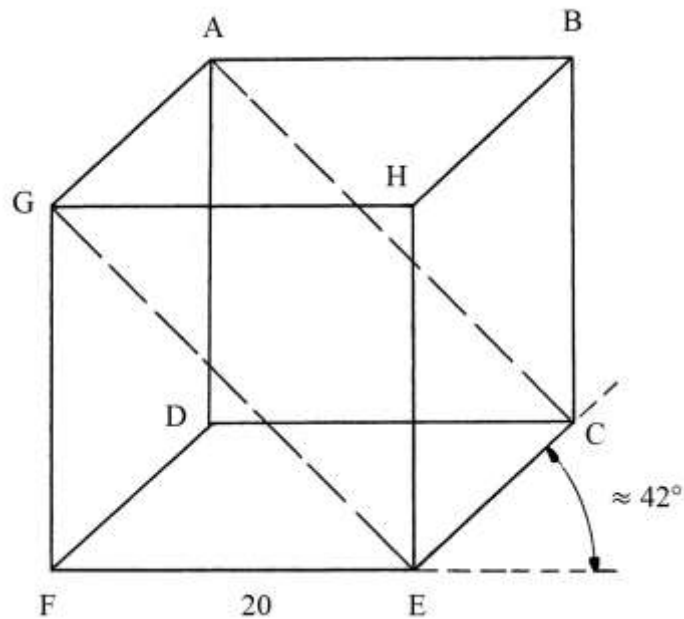
Il cubo considerato nel quarto problema ha spigoli lunghi 20 e sono disegnate due diagonali nelle facce verticali anteriore (EFGH) e posteriore (ABCD), senza alcuna indicazione riguardo alle loro dimensioni.

La lunghezza di EG è:

$$EG^2 = GF^2 + FE^2 = 20^2 + 20^2 = 400 + 400 = 800$$

e

$$EG = \sqrt{800} = 10 * \sqrt{8} = 20 * \sqrt{2}.$$

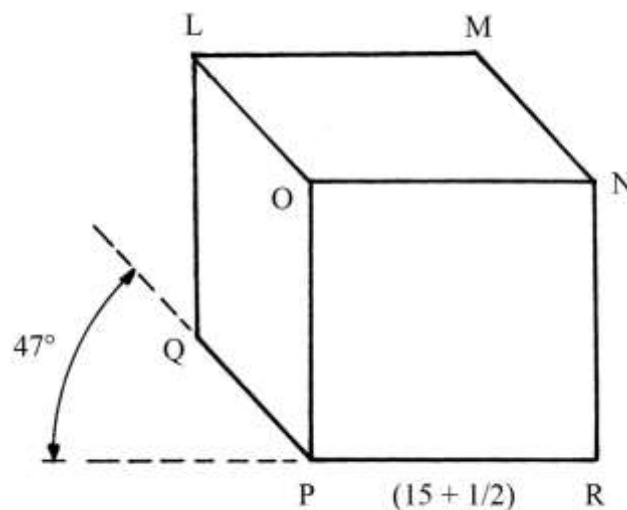


Gli spigoli obliqui sono inclinati di $\approx 42^\circ$ e hanno lunghezza ridotta, con *rapporto di fuga*, RF, uguale a $\approx 0,6$.

Volume di un cubo

Un cubo ha spigoli lunghi $(15 + \frac{1}{2})$.

Nello schema, il solido è visto da sinistra verso destra e dall'alto verso il basso:



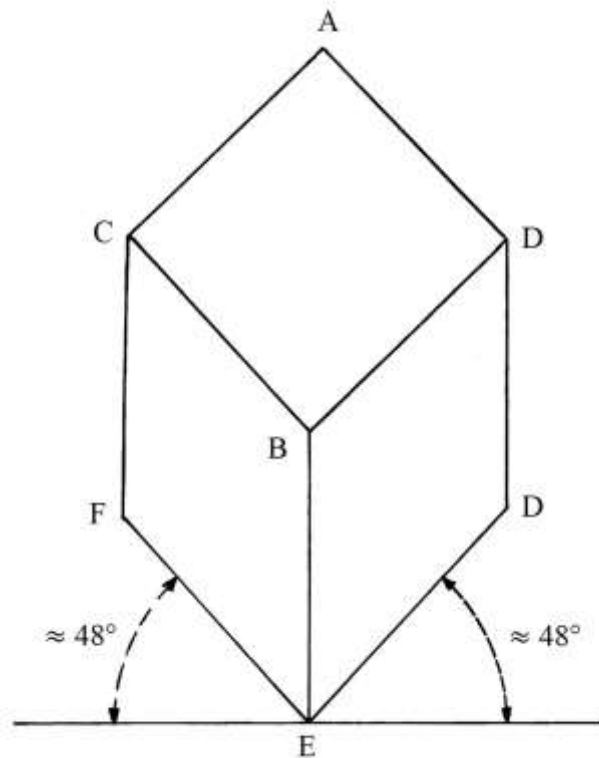
Gli spigoli obliqui sono inclinati di circa 47° e hanno lunghezze ridotte, con $RF = 0,6$.

Il volume del cubo è:

$$V_{\text{CUBO}} = (15 + \frac{1}{2})^3 = 3723,875 \text{ piedi cubici.}$$

Volume di un altro cubo

Il solido che è l'oggetto del sesto problema è un cubo con spigoli lunghi $(5 + 1/6)$ piedi.



Esso è disegnato con un metodo che la norma UNI EN ISO 5456-3 del febbraio 2001 definisce “*assonometria planometrica normale*” e che nei testi di disegno geometrico e tecnico è nota come “*assonometria militare*”.

Le lunghezze degli spigoli obliqui non sono scorciate.

Perpendicolarmente allo spigolo BE è tracciata una retta orizzontale, la *linea di orizzonte* (L.O.).

Rispetto alla L.O. gli spigoli ED e EF sono ruotati di circa 48° .

Il volume del cubo è:

$$V_{\text{CUBO}} = (5 + 1/6)^3 = 137,92 \text{ piedi cubici.}$$

Volume di un cubo cavo

Un cubo ha spigoli esterni lunghi $(16 + 2/3)$ e al suo interno è praticato un vuoto che ha la forma di un prisma a base quadrata.

Lo spessore del muro che delimita la cavità interna è 3 e il lato del quadrato vuoto è lungo:

$$(16 + 2/3) - 3 - 3 = (10 + 2/3).$$

Deve essere calcolato il volume del cubo al netto di quello della cavità interna.

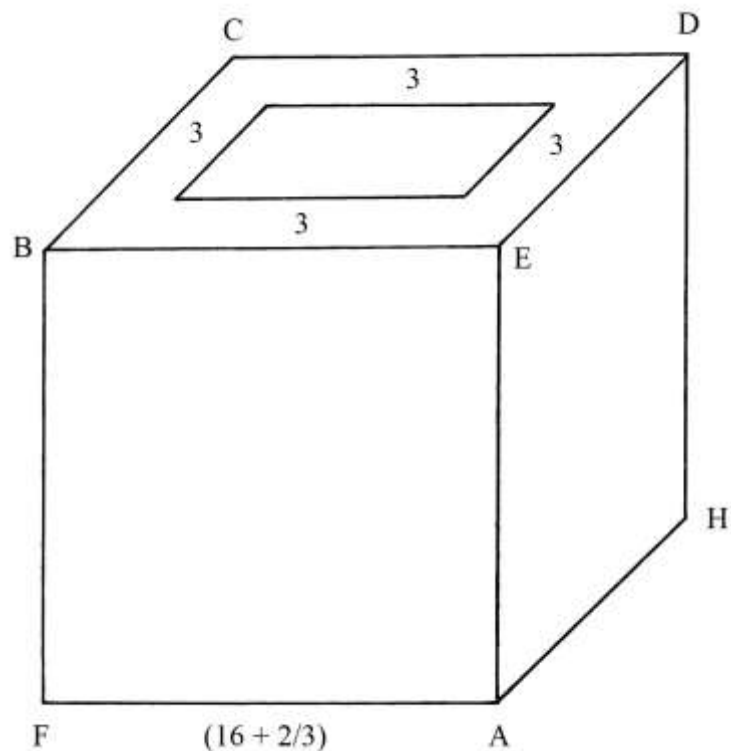
Il volume lordo del cubo è:

$$V_{\text{LORDO}} = (16 + 2/3)^3 = 4630.$$

L'area della base del prisma cavo è:

$$S_{\text{PRISMA}} = (10 + 2/3)^2 = (113 + 7/9).$$

Il prisma cavo è alto quanto lo spigolo del cubo e cioè $(16 + 2/3)$.



Il volume del prisma cavo è:

$$V_{\text{PRISMA}} = S_{\text{PRISMA}} * (16 + 2/3) = (113 + 7/9) * (16 + 2/3) \approx 1896.$$

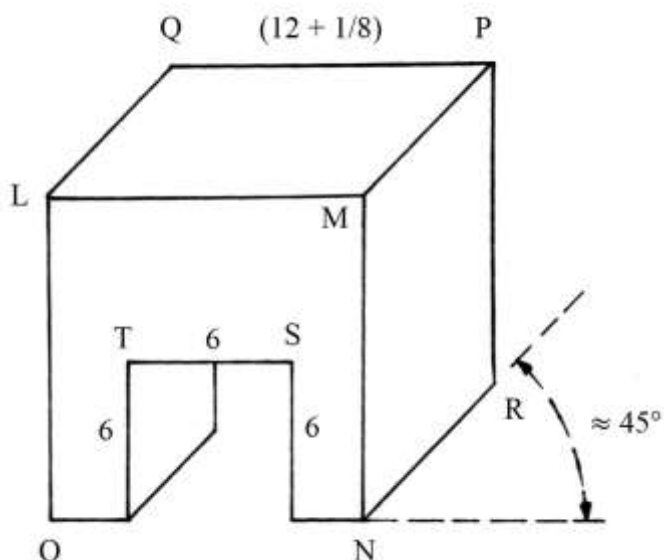
Il volume netto del cubo è:

$$V_{\text{NETTO}} = V_{\text{LORDO}} - V_{\text{PRISMA}} = 4630 - 1896 = 2734.$$

Volume di un cubo con un corridoio

Un cubo ha spigoli lunghi $(12 + 1/8)$.

Alla base è praticata un'apertura quadrata che ha larghezza e altezza di 6 e lunghezza uguale a quella dello spigolo del cubo.



Lo schema originale è disegnato in assonometria cavaliere con spigoli obliqui inclinati di $\approx 45^\circ$ e con lunghezza ridotta di $RF = 0,6$.

Il problema chiede il volume *netto* del solido.

Il volume *lordo* del cubo è:

$$V_{\text{CUBO}} = (12 + 1/8)^3 = (1782 + 289/512).$$

Il volume dell'apertura ("vacuo") è:

$$V_{\text{VACUO}} = 6 * 6 * (12 + 1/8) = (436 + 1/2).$$

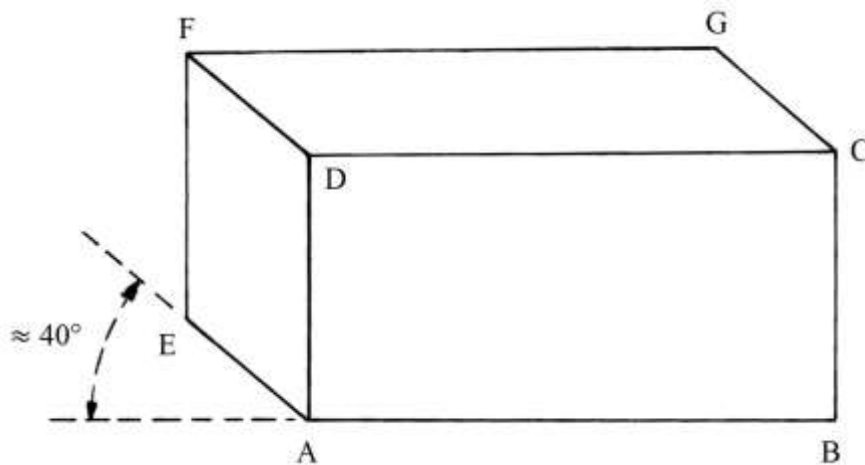
Il volume netto del solido a forma di cubo è:

$$V_{\text{NETTO}} = V_{\text{CUBO}} - V_{\text{VACUO}} = (1782 + 289/512) - (436 + 1/2) = (1346 + 33/512).$$

Volume di un parallelepipedo

L'area della base del solido è:

$$S_{\text{BASE}} = AB * AE.$$



Il volume è:

$$V = S_{\text{BASE}} * AD = AB * AE * AD.$$

Nel Trattato non sono fornite le dimensioni.

Lo spigolo AE è inclinato di 40° rispetto alla linea di orizzonte.

Volume di una pietra

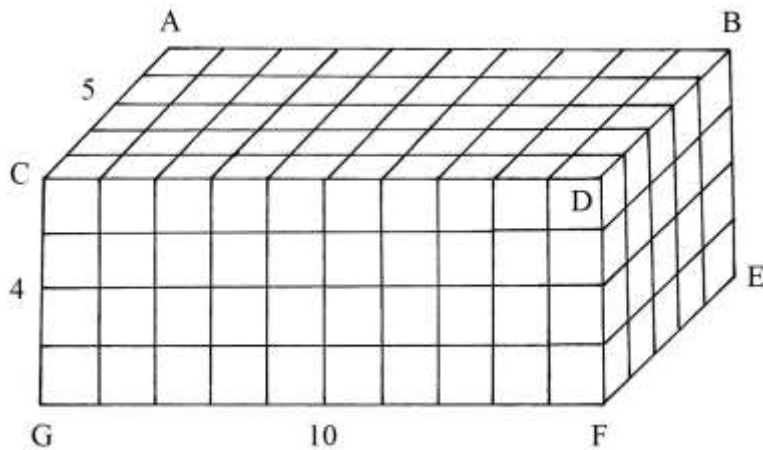
Una pietra ha la forma di un parallelepipedo lungo 10, largo 5 e alto 4.

L'area della base è:

$$S_{\text{BASE}} = GF * FE = 10 * 5 = 50 \text{ [piedi quadrati]}.$$

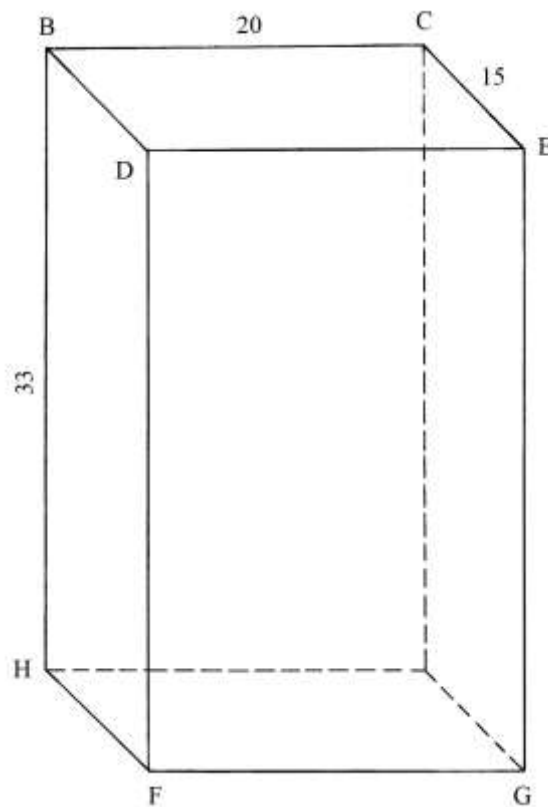
Il volume del solido è:

$$V = S_{\text{BASE}} * CG = 50 * 4 = 200 \text{ piedi cubici}.$$



Volume di un parallelepipedo

Una pietra ha la forma di un parallelepipedo con la base lunga 20 piedi e larga 15.
Il solido è alto 33 piedi.



L'area della base è:

$$S_{\text{BASE}} = 20 * 15 = 300 \text{ piedi quadrati.}$$

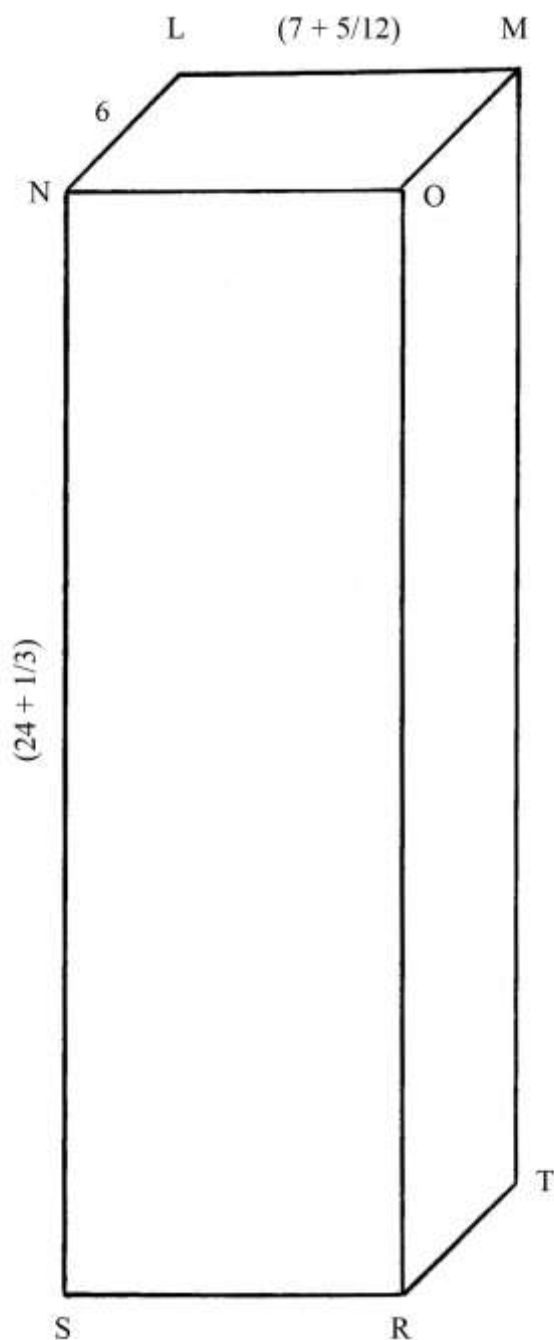
Il volume del solido è:

$$V = S_{\text{BASE}} * 33 = 300 * 33 = 9900 \text{ piedi cubici.}$$

Nonostante la poca precisione del disegno originale, sembra che gli spigoli obliqui abbiano lunghezza ridotta a *metà* e siano inclinati di $\approx 42^\circ$.

Volume di un altro parallelepipedo

Un parallelepipedo ha la base formata da un rettangolo lungo $(7 + 5/12)$ e largo 6.
Il solido è alto $(24 + 1/3)$.



L'area della base è:

$$S_{\text{BASE}} = (7 + 5/12) * 6 = (44 + 1/2).$$

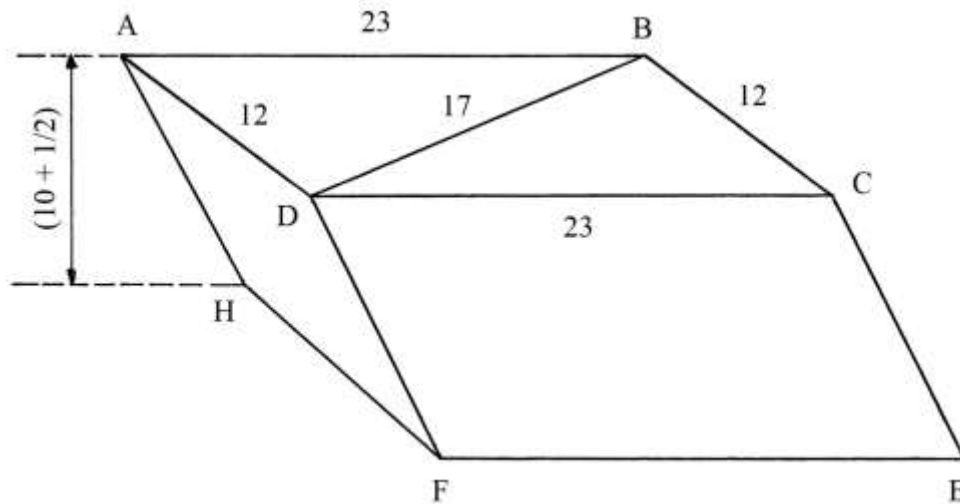
Il volume del solido è:

$$V = S_{\text{BASE}} * (24 + 1/3) = (44 + 1/2) * (24 + 1/3) = (1082 + 5/6).$$

Volume di un solido con base un parallelogramma

Il solido ha come base un parallelogramma con lati paralleli lunghi 12 e 23: la diagonale minore è lunga 17.

Il solido è inclinato e la altezza misurata in verticale fra i vertici A e H è $(10 + \frac{1}{2})$.



I parallelogrammi che formano le due basi sono divisi dalla diagonale minore in due triangoli di uguali dimensioni: 12 – 17 – 23.

Nel Trattato sono mostrate solo le dimensioni ma non sono calcolate né le aree né il volume del solido.

L'area del triangolo ABD può essere calcolata con la formula di Erone:

* il perimetro $2 * p$ è: $AD + DB + AB = 12 + 17 + 23 = 52$;

* il semiperimetro è: $2 * p/2 = p = 52/2 = 26$.

L'area è data da:

$$\begin{aligned} S_{ABD} &= \sqrt{[p * (p - AD) * (p - BD) * (p - AB)]} = \\ &= \sqrt{[26 * (26 - 12) * (26 - 17) * (26 - 23)]} = \sqrt{(26 * 14 * 9 * 3)} = \\ &= \sqrt{9828} \approx 99,13. \end{aligned}$$

L'area del parallelogramma è:

$$S_{PARALLELOGRAMMA} = 2 * S_{ABD} = 2 * \sqrt{9828} \approx 198,27.$$

Il volume del solido è:

$$V = S_{PARALLELOGRAMMA} * (10 + \frac{1}{2}) = 198,27 * (10,5) \approx 2081,86.$$

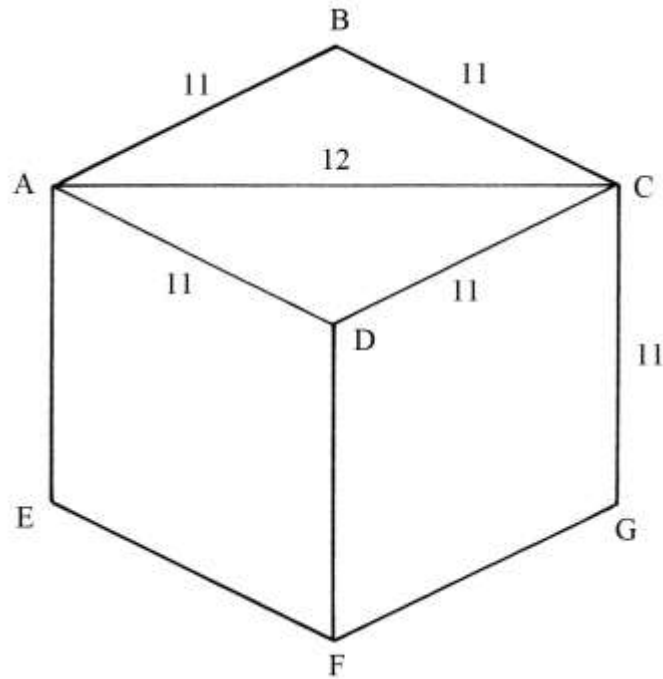
Volume di un “rombo solido”

Il solido ha basi formate da rombi con lati lunghi 11 ed è alto 11. La diagonale AC è lunga 12.

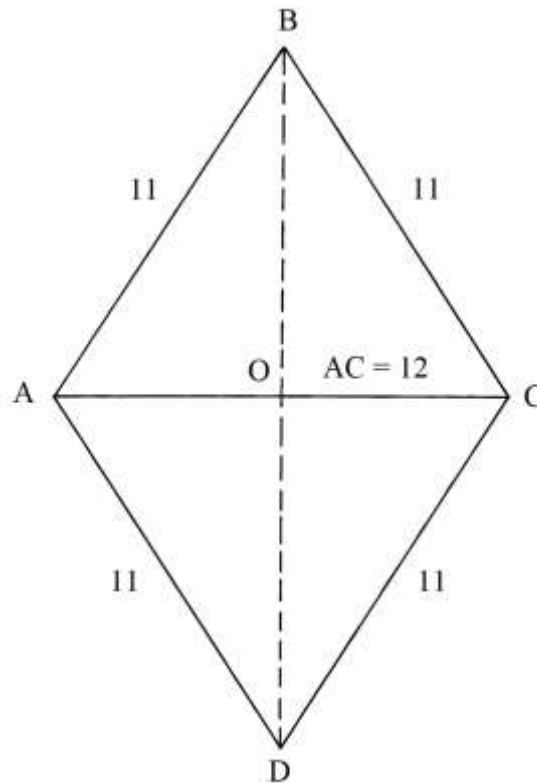
Nel Trattato il solido è chiamato “rombo solido”, ma una definizione più corretta sembra essere quella di *romboide*.

Lo schema che segue è stato ridisegnato sull'originale, con l'aggiunta delle lettere ai vertici.

Il solido è rappresentato in assonometria militare.



Lo schema originale deforma la corretta forma del rombo: la figura che segue rappresenta con esattezza il rombo che forma la faccia superiore e la base:



AC è la *diagonale minore*. La lunghezza della semidiagonale maggiore OB è data da:

$$OB^2 = BC^2 - OC^2 = 11^2 - (12/2)^2 = 11^2 - 6^2 = 121 - 36 = 85 \quad \text{e}$$

$$OB = \sqrt{85} \approx 9,2.$$

L'area del rombo ABCD è:

$$S_{ABCD} = AD * (BD/2) = AC * OB = 12 * \sqrt{85} \approx 12 * 9,2 = 110,4.$$

Il volume dell'intero solido è:

$$V = S_{ABCD} * CG = 110,4 * 11 = 1214,4.$$

TAVOLE XXXI – XLIV

Le Tavole dalla XXXI alla XLIV sono sempre opera di Giovanni Pomodoro: esse contengono esempi di misurazioni di terreni con l'aiuto di strumenti.

Il loro contenuto non è qui considerato.

APPENDICE

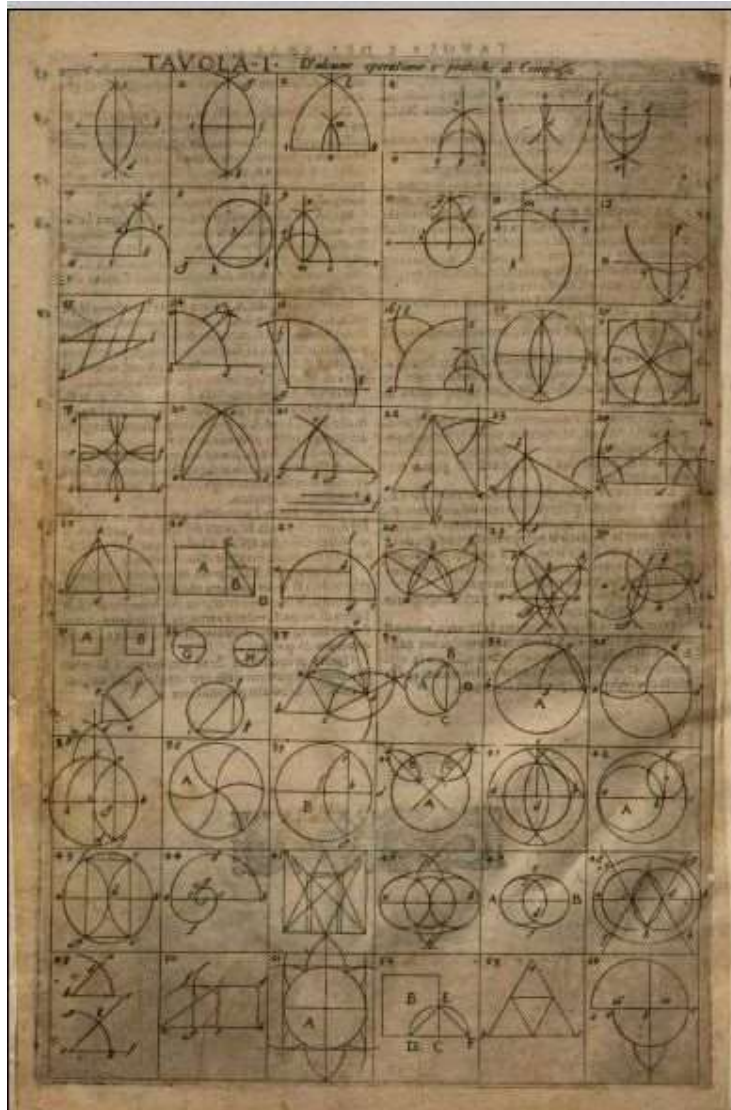
L'Appendice contiene *sette* tavole, numerate da I a VII, aggiunte da Giovanni Scala.

TAVOLA I

La Tavola contiene *54* costruzioni geometriche.

In molte di esse i vertici della figure sono contrassegnati con lettere minuscole: *a, b, c, d* ecc.: per praticità, qui di seguito sono usate lettere maiuscole.

Lo schema che segue riproduce la Tavola I con tutti gli schemi.



Gran parte di queste costruzioni sono assai semplici e sono presenti in qualsiasi testo di disegno geometrico e non sono qui riprodotte.

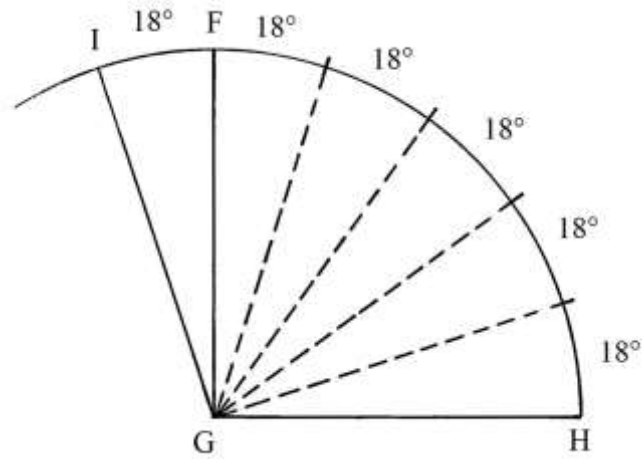
Alcune costruzioni sono sembrate di un certo interesse e sono qui riprodotte, talvolta con leggere modifiche. È stata conservata la numerazione originale, indicata fra parentesi quadre: [...].

[15] Costruzione dell'angolo interno del pentagono

FGH è un angolo retto che viene diviso in *cinque* angoli di ampiezza uguale a:
 $90^\circ/5 = 18^\circ$.

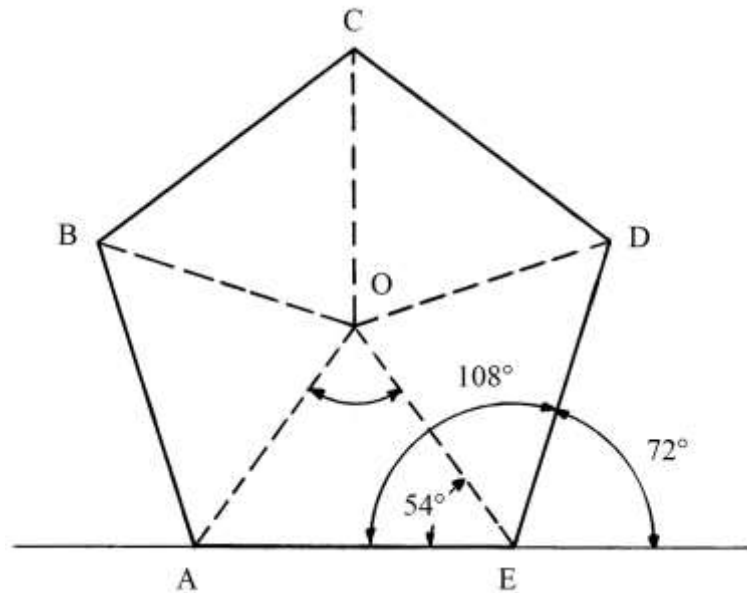
La costruzione richiede l'uso di un goniometro, strumento che non è citato nel testo del Trattato.

FGI è un altro angolo ampio 18° , per cui l'angolo IGH è ampio 108° .



----- APPROFONDIMENTO -----

Lo schema che segue presenta il pentagono regolare ABCDE diviso in *cinque* triangoli isosceli di uguali dimensioni e con il vertice comune nel centro O.



L'angolo di 108° è formato da due lati consecutivi del pentagono regolare. Nel Trattato non è presentato alcun impiego della precedente costruzione.

[25] Quadrato equivalente a un triangolo isoscele

ABC è un triangolo isoscele e BD è una sua altezza.

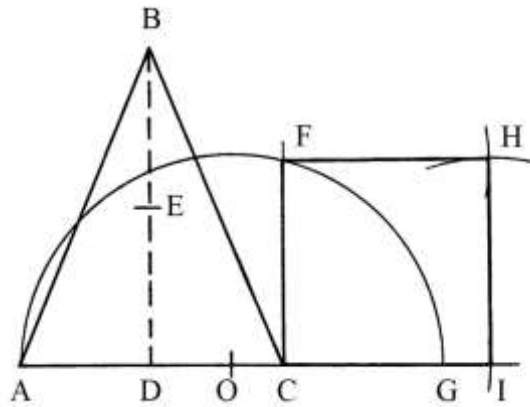
Prolungare verso destra la base AC.

Stabilire il punto medio di BD: è E.

Riportare la lunghezza di DE da C in G:

$$DE = CG.$$

Dal punto C elevare la perpendicolare a AC.



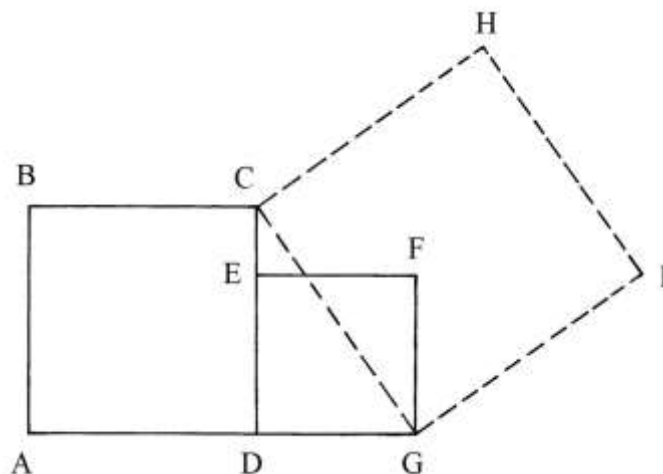
Fissare il punto medio di AG: è O. Fare centro in O e con raggio $OA = OG$ disegnare una semicirconfenza da A a G: essa taglia in F la perpendicolare innalzata da C.

CF è un lato del quadrato CFHI che ha area uguale a quella del triangolo isoscele ABC:

$$S_{ABC} = S_{CFHI}.$$

[26] Quadrato somma di altri due

ABCD e DEFG sono due quadrati con le loro basi AD e DG allineate sulla stessa retta e il lato DE costruito sul lato CD.



Collegare C con G: GC è il primo lato del quadrato GCHI che ha area uguale alla somma delle aree dei due quadrati iniziali.

CDG è un triangolo rettangolo: i suoi cateti sono lati dei due quadrati da unire: CD lo è del più grande e DG del più piccolo.

L'area di ABCD è:

$$S_{ABCD} = CD^2.$$

L'area di DEFG è:

$$S_{DEFG} = DG^2.$$

L'area di GCHI è:

$$S_{GCHI} = GC^2.$$

La lunghezza di GC è data da:

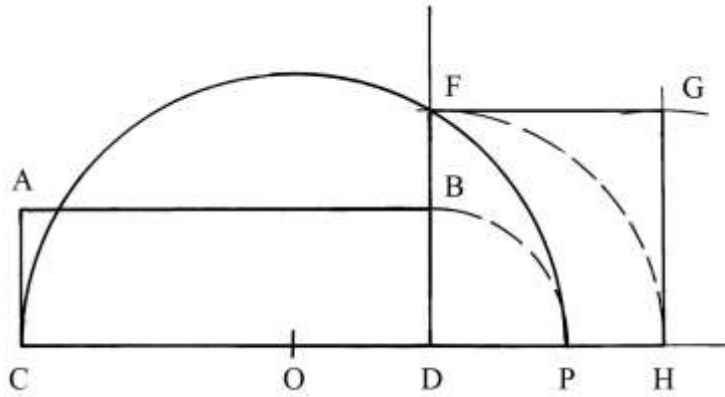
$$GC^2 = CD^2 + DG^2, \text{ uguaglianza che può essere scritta come segue:}$$

$$S_{GCHI} = S_{ABCD} + S_{DEFG}.$$

[27]

Quadratura di un rettangolo

ABDC è un rettangolo che deve essere trasformato in un quadrato avente la stessa area.



Prolungare verso destra la base CD e verso l'alto il lato DB.

Fare centro in D e con raggio DB disegnare l'arco BP.

Fissare il punto medio di CP: è O.

Fare centro in O e con raggio $OC = OP$ tracciare la semicirconfenza da C a P: essa taglia in F il prolungamento di DB.

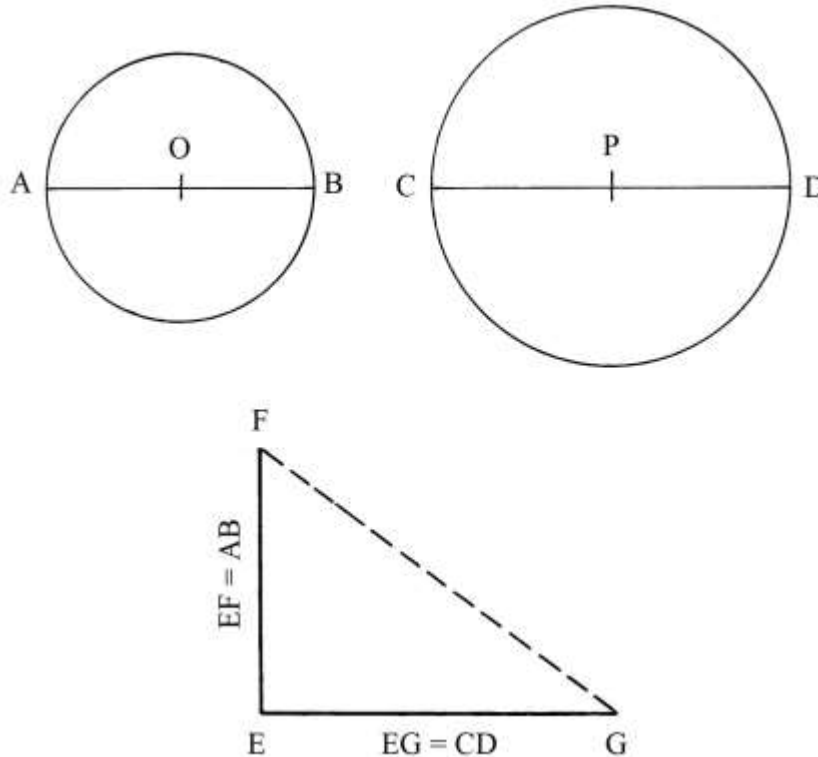
DF è un lato del quadrato DFGH che ha area uguale a quella del rettangolo ABDC:

$$S_{ABDC} = S_{DFGH} = DF^2.$$

[32]

Diametro di un cerchio somma di altri due cerchi

Sono dati due cerchi di diametri AB e CD.



Deve essere costruito un cerchio che abbia area uguale alla somma delle aree dei primi due. Costruire il triangolo rettangolo EFG: il cateto EF è lungo quanto il diametro AB e il cateto EG è lungo quanto il diametro CD.

FG è l'ipotenusa del triangolo FEG e la sua lunghezza è data da:

$$FG^2 = FE^2 + EG^2 = AB^2 + CD^2.$$

L'area S di un cerchio è proporzionale al quadrato della lunghezza del suo diametro d :

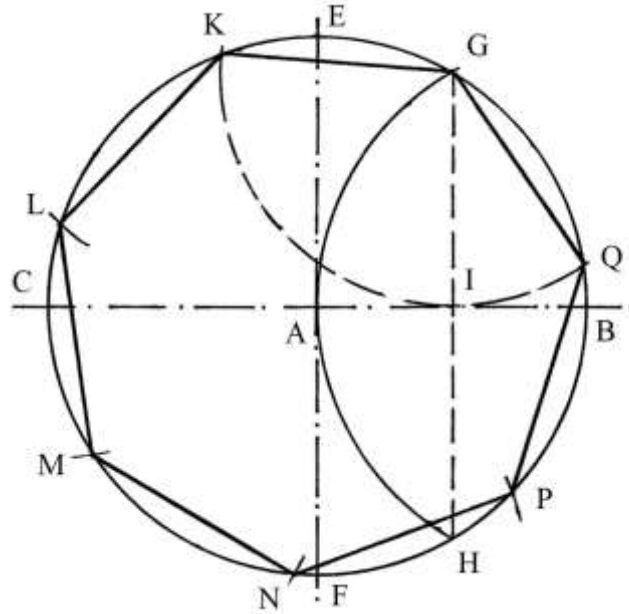
$$S_{\text{CERCHIO}} = 11/14 * d^2.$$

Moltiplicando per la costante 11/14 tutti i membri della precedente uguaglianza si ha:

$$11/14 * FG^2 = 11/14 * AB^2 + 11/14 * CD^2.$$

FG è la lunghezza del diametro del cerchio che ha area uguale alla somma delle aree dei primi due.

[34] Lato di un ettagono inscritto
 È dato un cerchio di centro A e raggio AB.



Tracciare i due diametri fra loro perpendicolari BC e EF.

Con raggio BA fare centro in B e disegnare l'arco da G a H: la corda GH divide il raggio AB in due parti uguali e I è il suo punto medio.

Il segmento GI è la lunghezza *approssimata* del lato dell'ettagono inscritto nel cerchio.

Nel Trattato, la costruzione si interrompe a questo passaggio e non è disegnato l'ettagono.

Il metodo è attribuito a Erone di Alessandria (I secolo d.C.).

Completiamo la costruzione. Riportare la lunghezza di GI lungo la circonferenza:

GKLMNPQ è l'ettagono inscritto nel cerchio di centro A.

[37]

Costruzione del pentagono regolare inscritto

AB è il diametro orizzontale di un cerchio di centro O.

Fare centro in B e con raggio BO disegnare l'arco CD e poi la corda CD che taglia OB nel suo punto medio E.

Con la stessa apertura BO fare centro in C e tracciare un arco che taglia la circonferenza in F: poi fare centro in questo ultimo punto e disegnare un arco da C fino a fissare il punto G.

Per G e per O passa il diametro verticale HI.

$$BE = EC.$$

La corda BC è lunga:

$$BC^2 = OC^2 + OB^2 = R^2 + R^2 = 2 * R^2, \text{ con } R \text{ raggio del cerchio.}$$

BC è lunga:

$$BC = R * \sqrt{2}.$$

L'area del triangolo rettangolo OBC è data da:

$$S_{OBC} = OB * OC/2 = R * R/2 = R^2/2.$$

Essa può essere calcolata anche in altro modo:

$$S_{OBC} = BC * OE/2, \text{ da cui è possibile ricavare la lunghezza di OE:}$$

$$OE = (2 * S_{OBC})/BC = (2 * R^2/2)/(R * \sqrt{2}) = R^2/(R * \sqrt{2}) = R/\sqrt{2}.$$

Le aree dei due cerchi sono proporzionali al quadrato della lunghezza dei loro raggi:

$$S_{\text{CERCHIO OB}} : S_{\text{CERCHIO OE}} = OB^2 : OE^2 = R^2 : (R/\sqrt{2})^2 = R^2 : R^2/2 = 2 : 1.$$

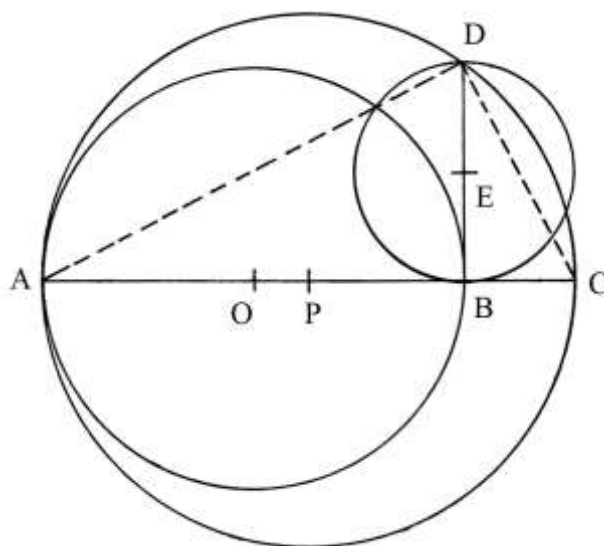
L'area del cerchio i raggio OE è *metà* di quella del cerchio di raggio OB.

[42]

Cerchio di area uguale a un quarto di quella di un altro

Un cerchio ha centro in O e diametro AB.

Deve essere costruito un altro cerchio con area uguale a *un quarto* di quella del primo.



Prolungare verso destra il diametro AB. Da B riportare in C la lunghezza di *un quarto* di quella di AB:

$$BC = AB/4.$$

Dal punto B elevare la perpendicolare a AC.

Stabilire il punto medio di AC: è P.

Fare centro in P e, con raggio PA = PC, disegnare una semicirconferenza da A a C: essa incontra in D la perpendicolare alzata da B. E è il punto medio di DB; fare centro in E e con raggio EB = ED tracciare una circonferenza.

DB è un'altezza del triangolo rettangolo ADC e la sua lunghezza è data dalla proporzione che segue:

$$AB : DB = DB : BC$$

$$AB : DB = DB : AB/4$$

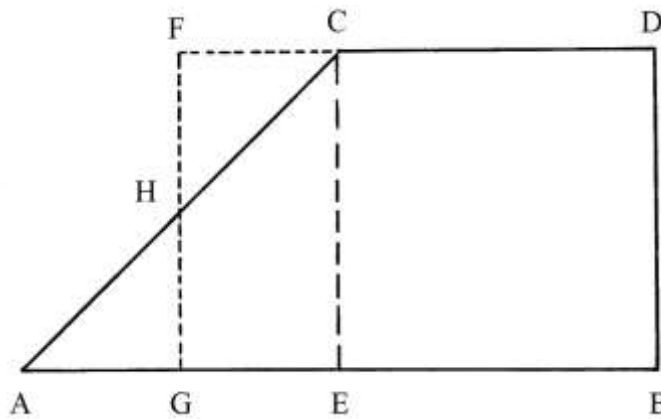
$$DB^2 = AB^2/4$$

$$DB = AB/2.$$

Come già ricordato, l'area di un cerchio è proporzionale al quadrato della lunghezza del suo diametro (o del suo raggio): il cerchio di diametro DB ha area che è *un quarto* di quella del cerchio di diametro AB.

Lo stesso metodo può essere applicato alla costruzione di cerchi con altre proporzioni, ad esempio *un terzo*.

[50] Rettangolo equivalente a un trapezio rettangolo
 ABDC è un trapezio rettangolo (“capo tagliato”).



Deve essere trasformato in un rettangolo con area uguale.

L'area del trapezio è:

$$S_{ABDC} = [(AB + CD)/2] * DB.$$

Dal punto C abbassare la perpendicolare alla base maggiore AB: CE è un'altezza del trapezio e ha lunghezza uguale a quella di DB.

Prolungare verso sinistra la base minore CD.

Determinare il punto medio di AE: è G.

Da G tracciare la perpendicolare a AB: è GF.

I triangoli rettangoli HFC e HAG hanno uguali dimensioni: e il rettangolo FGEC ha area uguale a quella del triangolo rettangolo ACE.

La lunghezza di BG è:

$$BG = AB - AG = AB - (AE/2).$$

L'area di FGEC è:

$$S_{FGEC} = BG * DB = S_{ABDC}.$$

[52] Quadrato costruito su di un cateto

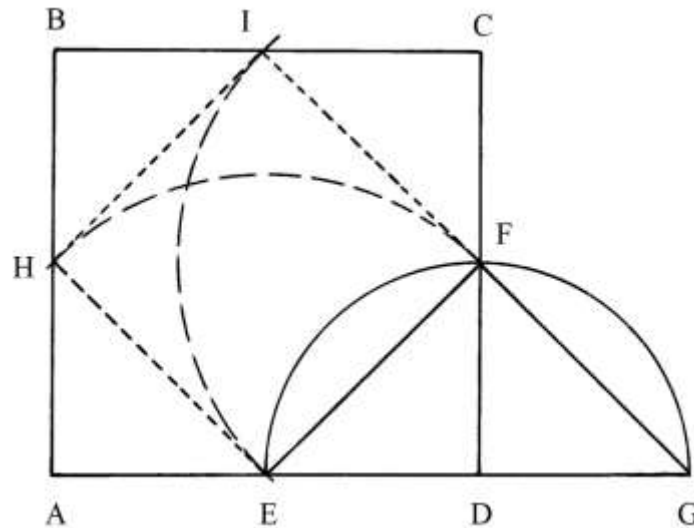
Nel Trattato, la costruzione è descritta in modo poco chiaro.

ABCD è un quadrato e E e F sono i punti medi rispettivamente dei lati AD e CD.

Prolungare verso destra il lato AD.

Fare centro in D e con raggio DE = DF disegnare un arco da E fino a G.

EF è l'ipotenusa del triangolo rettangolo isoscele EFD.



DFG è un secondo triangolo rettangolo isoscele, di dimensioni uguali a quelle di EFD.

Fare centro in E e in F con raggio EF e tracciare due archi di circonferenza che tagliano i lati AB e BC nei punti H e I.

EHIF è un quadrato inscritto nel quadrato ABCD.

EF è lungo:

$$EF^2 = ED^2 + DF^2 = 2 * ED^2 = 2 * (AD/2)^2 = 2 * AD^2/4 = AD^2/2.$$

L'area di EHIF è:

$$S_{EHIF} = EF^2 = AD^2/2 = S_{ABCD}/2.$$

[54] Lunghezza medio proporzionale fra due lunghezze date

Sono dati due segmenti:

- * AB = 16;
- * BC = 10.

Nello schema che segue, AB e BC sono due *segmenti adiacenti*.

Per il punto B costruire la perpendicolare a AC.

Determinare il punto medio di AC: è O.

Fare centro in O e con raggio OA = OC tracciare una semicirconferenza da A a C: essa incontra in D la perpendicolare passante per B.

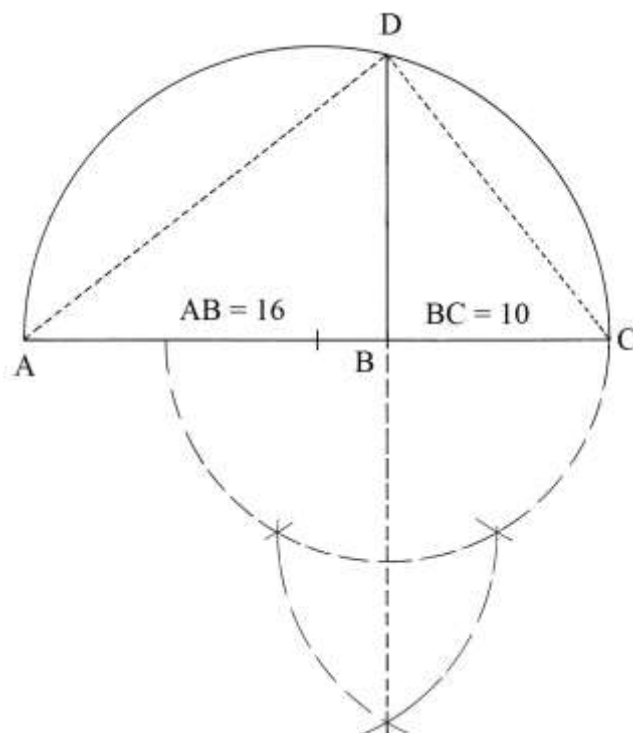
ADC è un triangolo rettangolo inscritto nel semicerchio ADCO.

DB è un'altezza del triangolo rettangolo ADC e la sua lunghezza è medio proporzionale fra quelle di AB e di BC:

$$AB : DB = DB : BC$$

$$DB^2 = AB * BC = 16 * 10 = 160 \quad e$$

$$DB = \sqrt{160} = 4 * \sqrt{10}.$$



TAVOLE II – VII

In queste Tavole sono talvolta usate alcune unità di misura lineari, superficiali e volumetriche, impiegate a Roma a cavallo del 1600: la cosa è spiegabile perché il Trattato è stato pubblicato in questa città.

Sulla scorta delle equivalenze proposte da Angelo Martini nel suo “Manuale di Metrologia”, citato in Bibliografia, le unità lineari avevano le seguenti corrispondenze con il nostro *metro*:

- * 1 canna [architettonica] = 10 palmi romani = 2,234218 m;
- * 1 passo = 5 piedi = $(6 + \frac{2}{3})$ palmi romani = 1,489479 m;
- * 1 piede romano = $(1 + \frac{1}{3})$ palmi romani = 0,297896 m;
- * 1 palmo romano = 0,223422 m.

Infine, si avevano le seguenti equivalenze:

$$1 \text{ canna [architettonica]} = (1 + \frac{1}{2}) \text{ passi} = (7 + \frac{1}{2}) \text{ piedi romani.}$$

TAVOLA II

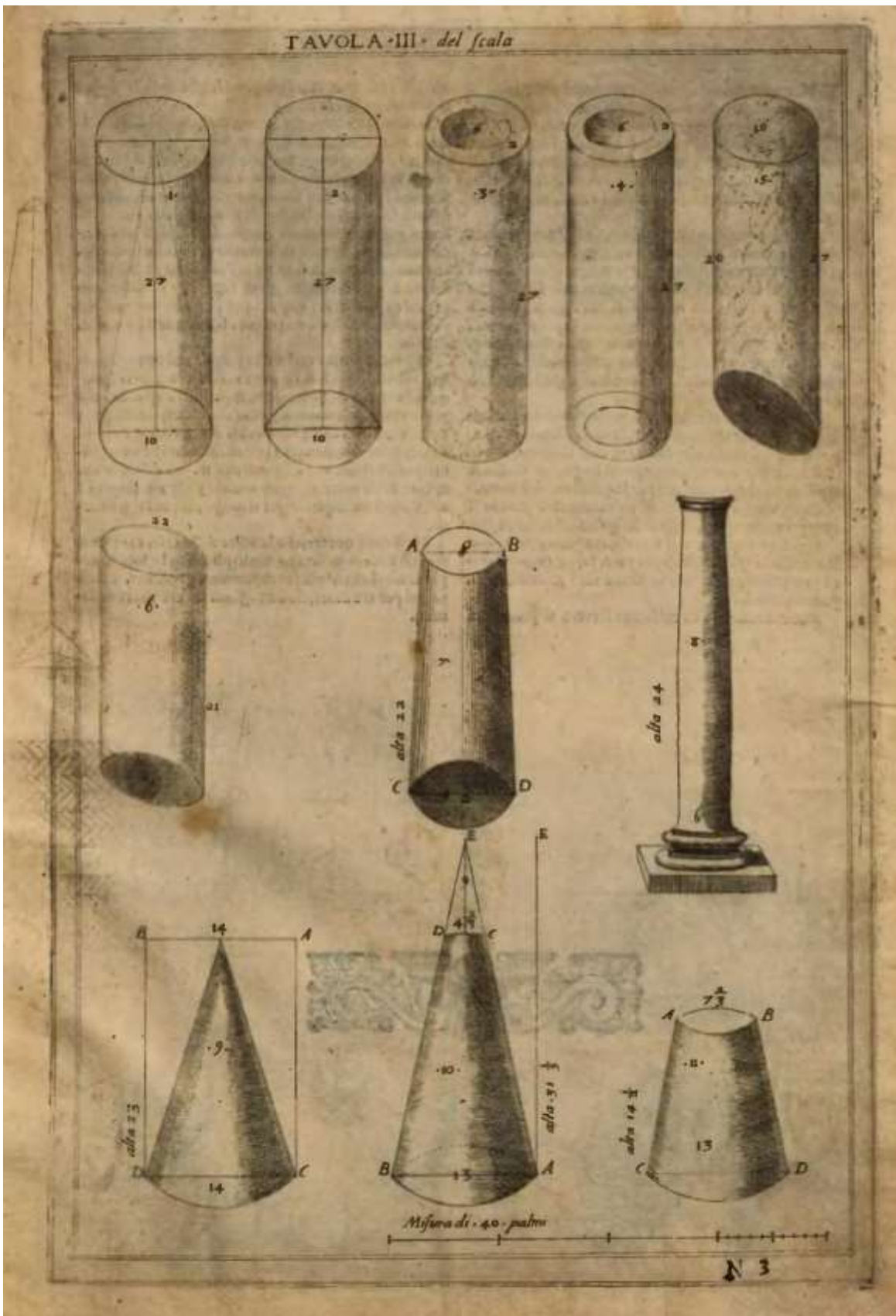
La Tavola contiene *otto* esempi di solidi a base rettangolare, con profili vari: trapezio isoscele, trapezio rettangolo, doppio trapezio rettangolo e altri.

Essi sono rappresentati in assonometria.

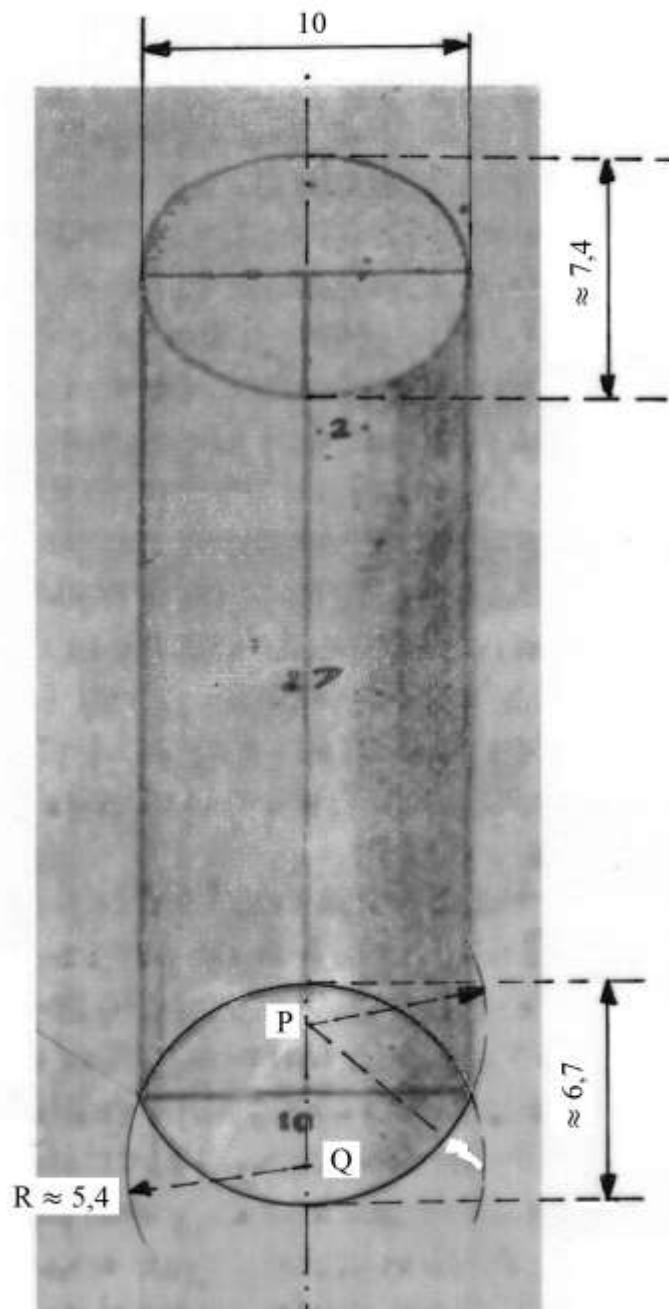
Sono calcolati i loro volumi.

TAVOLA III

La Tavola mostra *undici* esempi di solidi di forma circolare: cilindri, coni e tronchi di cono.



Lo schema n. 2 rappresenta un cilindro in assonometria:



Il cerchio superiore è correttamente deformato in una figura chiusa che si avvicina a un'ellisse. Il rapporto di fuga RF è:

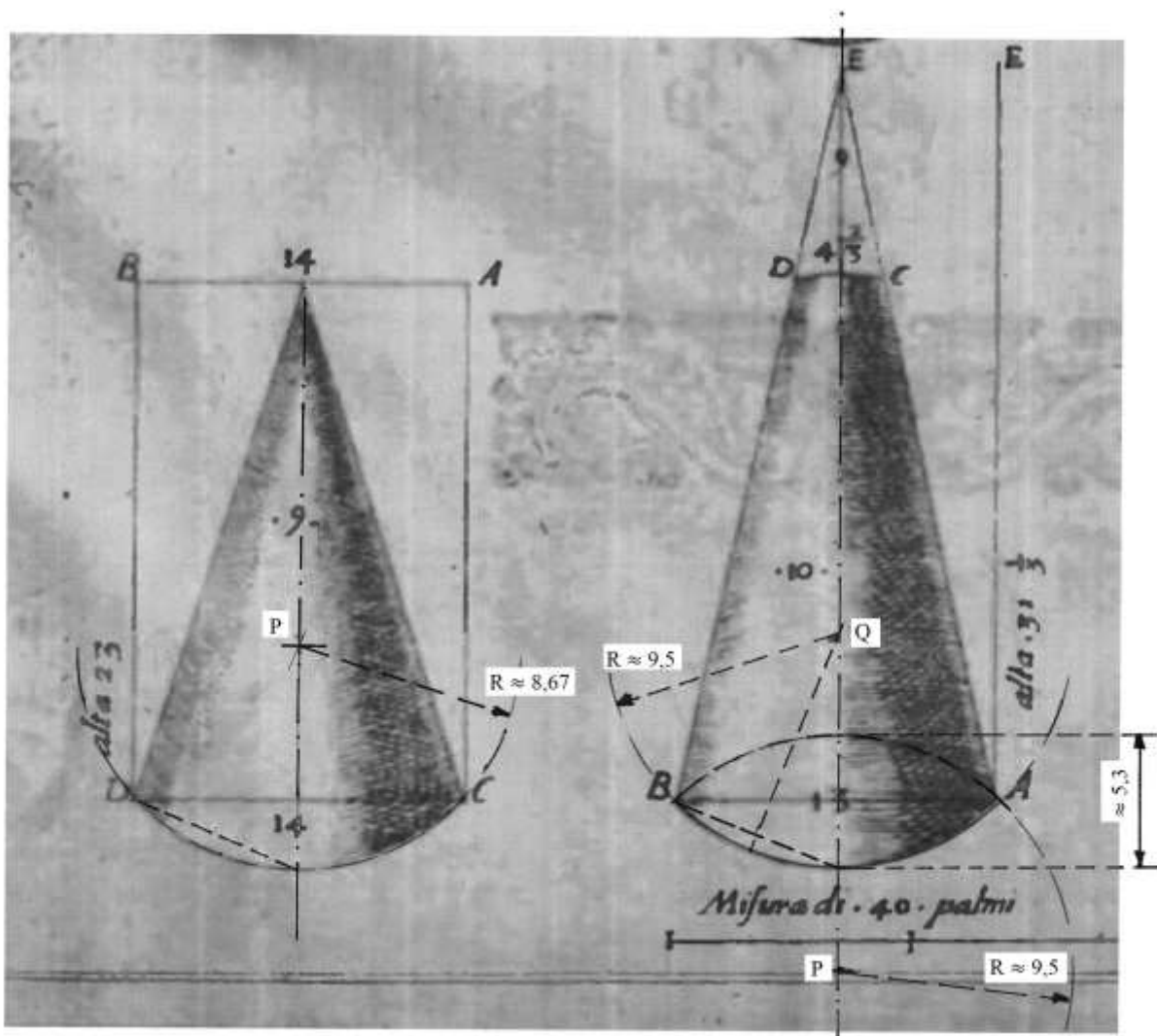
$$RF \approx 7,4/10 \approx 0,74.$$

Il cerchio inferiore è rappresentato come una *mandorla* delimitata da due archi di circonferenza con raggio $R \approx 5,4$ e centri nei punti P e Q posizionati sull'asse di simmetria.

Il rapporto di fuga della mandorla è:

$$RF \approx 6,7/10 \approx 0,67.$$

Lo schema che segue presenta i coni indicati con i numeri 9 e 10:



Il cono della figura 9 ha la base deformata in una *mandorla*: ne è mostrata soltanto metà, ottenuta con un arco di circonferenza con centro in P e raggio $\approx 8,67$.

Il tronco di cono della figura 10 (a destra nello schema qui sopra) ha la faccia superiore praticamente ridotta al segmento CD lungo $(4 + \frac{2}{3})$. La faccia inferiore è una mandorla definita da due archi di circonferenza di raggio $R \approx 9,5$ e centri nei punti P e Q collocati sull'asse di simmetria verticale e equidistanti dal centro della base.

Il rapporto di fuga della mandorla è:

$$RF \approx \frac{5,3}{13} \approx 0,4.$$

TAVOLA IV

Nella Tavola sono contenuti *diciotto* esempi di disegni di solidi e di costruzioni di edifici e scale.

I sei solidi sono quattro piramidi, un cono e un tronco di cono e sono tutti disegnati in assonometria.

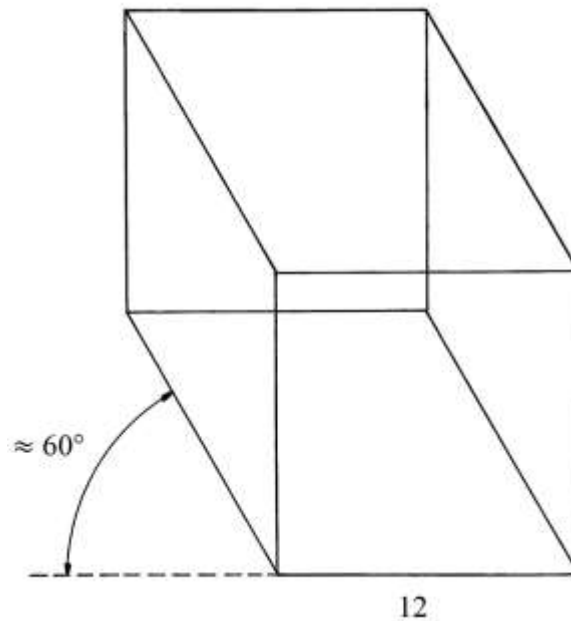
TAVOLA V

La Tavola contiene *undici* schemi di varia natura: piante, rilievi e due solidi geometrici, un cubo e un parallelepipedo.

Entrambi sono disegnati a “*filo di ferro*” e i due schemi mostrano tutti gli spigoli.

Giovanni Scala fa un esplicito richiamo al contenuto della precedente Tavola XXX nella quale sono presenti *diciotto* esempi di solidi, pieni e vacui, disegnati in diversi metodi assometrici.

Il cubo ha spigoli lunghi 12:



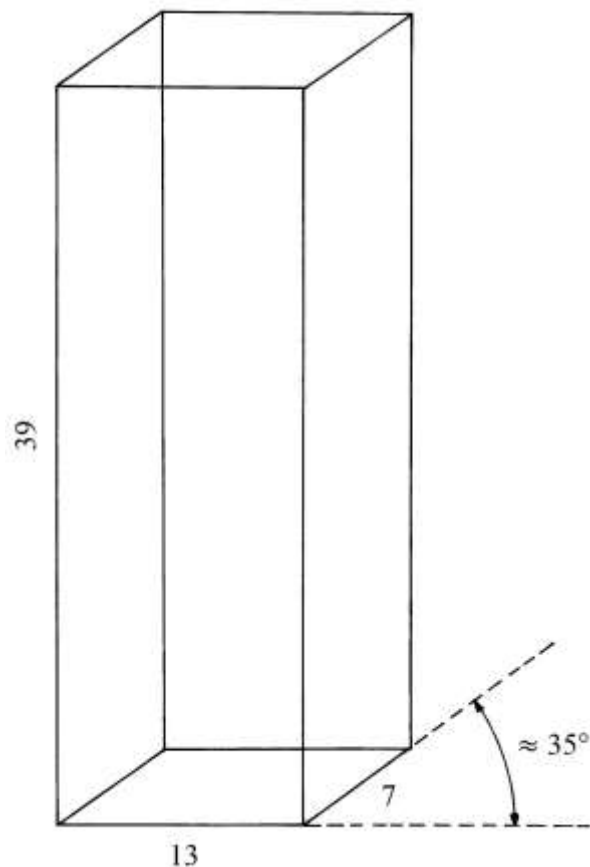
Gli spigoli obliqui sono inclinati di circa 60° e non sono scorciati perché la loro lunghezza è conservata uguale a quella degli altri spigoli.

Il rapporto di fuga RF vale 1.

Il parallelepipedo ha come base un rettangolo lungo 13 e largo 7; il solido è alto 39.

Tutti gli spigoli obliqui conservano la lunghezza originaria e non sono scorciati.

Gli spigoli obliqui sono inclinati di circa 35° .



----- APPROFONDIMENTO -----

Gli esempi di rappresentazioni assonometriche contenuti nella Tavola XXX, dovuta a Giovanni Pomodoro, e nella Tavola V dell'appendice curata da Giovanni Scala, possono fornire importanti informazioni sull'introduzione e sulla diffusione di queste tecniche grafiche presso tecnici e autori Italiani del Rinascimento.

Uno dei nostri maggiori studiosi dei metodi assonometrici, Massimo Scolari, nel suo importante testo, citato in Bibliografia, non fa alcun cenno al lavoro di Giovanni Pomodoro e di Giovanni Scala.

TAVOLE VI e VII

La Tavola VI presenta rilievi di mura e di interi edifici disegnati in assonometria o in prospettiva.

La Tavola VII contiene alcuni esempi di edifici e di murature rappresentati prevalentemente in assonometria.

Bibliografia

1. Bartoli Cosimo, “Del Modo di Misurare le Distantie, le Superficie, i Corpi, le Piante, le Provincie, le Prospettive, e Tutte le Altre Cose Terrene, Che Possono Occorrere a Gli Huomini, Secondo le Vere Regole d’Euclide, e De Gli Altri Più Lodati Scrittori”, Venezia, Francesco Franceschi, 1564, pp. 301.
2. Brusaporci Stefano, “Giovanni Pomodoro (XVI Century)”, in “Distinguished Figures in Descriptive Geometry and Its Applications for Mechanism Science. From the Middle Ages to 17th Century”, a cura di Michela Cigola, Springer International Publishing Switzerland, 2016, pp. 211-222.
3. Calzolani Sergio, “appuntiassonometrie.pdf”, 2019, pp. 133, in www.geometriapratica.it.
4. Martini Angelo, “Manuale Di Metrologia: Ossia, Misure, Pesi e Monete in Uso Attualmente E Anticamente Presso Tutti I Popoli”, Torino, Ermanno Loescher, 1883, pp. VIII+904.
5. Pomodoro Giovanni, “Geometria pratica tratta dagl’Elementi di Euclide et altri auttori da giovanni Pomodoro venetiano mathematico eccellentissimo descritta et dichiarata da Giovanni Scala mathematico. ...”, Roma, Stefano Paolini, 1599, pp. 117.
6. Pomodoro Giovanni, “Geometria pratica tratta dagl’Elementi di Euclide et altri auttori da giovanni Pomodoro venetiano mathematico eccellentissimo descritta et dichiarata da Giovanni Scala mathematico. ...”, Roma, Giovanni Angelo Ruffinelli, 1623, pp. 119.
7. Scolari Massimo, “Il disegno obliquo. Una storia dell’antiprospectiva”, Marsilio, Venezia, 2005, pp. 348.