Parole chiave: unità di misura usate a Nizza aree di terreni a forma di poligoni regolari aree di terreni a forma di trapezi; quadrilateri; triangoli; triangolo 13-14-15; problemi sui cerchi; poligoni inscritti

Note

* Il "*Compendion de l'Abaco*" è un testo scritto dal matematico nizzardo Francés Pellos utilizzando la variante locale dell'occitano: il nizzardo. Esso fu pubblicato a Torino nel 1492 dagli stampatori Nicolò Benedetti e Giacomo Suigo di San Germano.

L'unica informazione biografica sull'Autore è fornita da lui stesso: nell'ultima pagina del testo si definisce come un nobile e cittadino di Nizza, all'epoca parte del Ducato di Savoia.

L'edizione del trattato di Pellos è stata curata da un insigne studioso dell'occitano (e delle lingue minoritarie parlate in Europa): Robert Lafont (Nîmes 1923 – Firenze 2009).

Nell'edizione è trascritto il testo in occitano nizzardo: solo i commenti curati da Lafont e da Tournerie sono in francese.

* Pellos esprime i risultati delle sue operazioni aritmetiche con numeri misti, formati da una parte intera e da una frazionaria: qui i numeri sono tutti convertiti in numeri reali con parti intere e cifre decimali. Egli non usa il simbolo infisso "+", per cui il numero 11,2 viene scritto "11 ½".

* La maggior parte delle figure è stata ridisegnata cercando di rispettare forme e proporzioni.

* Ai vertici delle figure sono state apposte lettere maiuscole: Pellos non le ha mai scritte.

* Alcuni argomenti sono ampliati con appositi riquadri graficamente evidenziati e contrassegnati con la dicitura APPROFONDIMENTO.

* Nel testo di Pellos, i problemi geometrici sono risolti in forma discorsiva, un'operazione dopo l'altra: qui le soluzioni sono state descritte sotto forma di procedure contenenti passi distinti e con i relativi calcoli parziali.

* Fra parentesi quadre […] sono talvolta inseriti commenti o aggiunte, assenti nel trattato, utili per chiarire le procedure proposte dall'Autore.

* Alcune figure sono riprodotte dall'edizione del trattato di Pellos curata da Robert Lafont e da Guy Tournerie, citata in bibliografia.

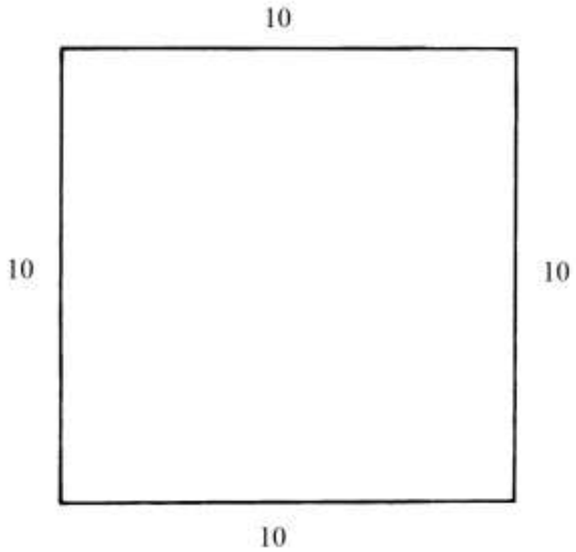
Il capitolo riservato alla Geometria

Il trattato di Francés Pellos contiene *diciotto* capitoli, l'ultimo dei quali è riservato alla Geometria. Questo articolo prende in considerazione soltanto il capitolo 18.

Le figure non recano lettere ai vertici: su di esse sono scritte le dimensioni.

Primo Esempio

Un terreno ha forma quadrata con lati formanti angoli retti.



La lunghezza dei lati, 10, può essere espressa in *palmi* (*pals*) oppure in *canne* (*canas*).

L’area S del quadrato è:

S = 10 * 10 = 100.

- APPROFONDIMENTO -

Le immagini che seguono sono riprodotte dalle pagine 413 e 414 del Manuale di Metrologia di Angelo Martini, citato in Bibliografia.

Esse informano sulle unità di misura usate a Nizza prima della sua annessione alla Francia.

NIZZA (Possesso francese in Italia), *Vedi Parigi.*

Intorno ai nomi italiani delle Misure, Pesi e Monete decimali, attualmente in uso, *Vedi Roma.*

ANTICHE MISURE, PESI E MONETE.

Il Sistema metrico decimale delle Misure e dei Pesi fu reso obbligatorio per tutti gli Stati Sardi (in cui fu compresa Nizza fino al 1859) a partire dal primo aprile 1850; *Vedi Torino.* Fino a detta epoca erano in uso a Nizza le Misure e i Pesi seguenti:

Misure di lunghezza	metri
Rango pei tessitori = 18 Palmi	4,716000
Trabucco = 12 Palmi	3,144000
Canna = 8 Palmi	2,096000
Auna (Aune antica di Parigi) .	1,188446
Palmo = 12 Pollici	0,262000
Pollice = 12 Linee	0,021833
Linea	0,001819

Misure di superficie	ari
Starata = 2 Eminate	15,444900
Eminata = 8 Moturali . . .	7,722450
Moturale = 8 Ottave	0,965306
Ottava	0,120663
	metri qu.
Canna quadra = 64 Palmi q.	4,393216
Palmo quadro	0,068644

Misure di volume	metri c.
Trabucco cubo = 1728 Palmi cubi	31,077610
Canna cuba = 4 Canne solide o 512 Palmi cubi	9,208181
Canna solida per le legna da ardere = 128 Palmi cubi .	2,302045
Palmo cubo	0,017985

Misure di capacità

Per gli aridi:	litri
Carica = 4 Sestieri	161,750000
Sestiere (Staro) = 2 Emine	40,437500
Emina = 2 Quartieri . . .	20,218750
Quartiere = 4 Moturali . . .	10,109375
Moturale	2,527344

Usualmente la Carica di Nizza si fa


414 NORIMBERGA

pari a quella di Marsiglia = litri 160. Quindi il Sestiere = litri 40. L'Emina = litri 20. Il Quartiere = litri 10. Il Moturale = litri 2 1/2.

Per i liquidi:

	litri
Carica = 2 Barili	94,350000
Barile = 60 Pinte	47,175000
Pinta (Penta)	0,786250

Il vino e l'acquavite si vendevano pure a peso (l'olio esclusivamente a peso). La Carica corrisponde a 2 Cantara o 12 Rubbi = chilogr. 93,488541. Il Barile corrisponde al Cantaro di 6 Rubbi = chilogr. 46,744270. Il Rubbo di vino corrisponde a 10 Pinte o 25 Libbre = chilogr. 7,790712. La Pinta corrisponde in peso al Rotolo di 2 1/2 Libbre = chilogr. 0,779071.

L'olio si vendeva comunemente a Rubbo di 25 Libbre.

Pesi

	chilogr.
Cantaro = 6 Rubbi o 60 Rotoli (150 Libbre)	46,744270
Rubbo = 10 Rotoli o 25 Libbre	7,790712
Rotolo = 2 1/2 Libbre . . .	0,779071
Libbra = 12 Once	0,311628
Oncia = 8 Ottavi	0,025969
Ottavo = 3 Denari	0,003246
Denaro = 24 Grani . . .	0,001082
Grano	0,000045

Per l'oro, l'argento e le monete usavasi il Peso di marco di Parigi; *Vedi Parigi*.

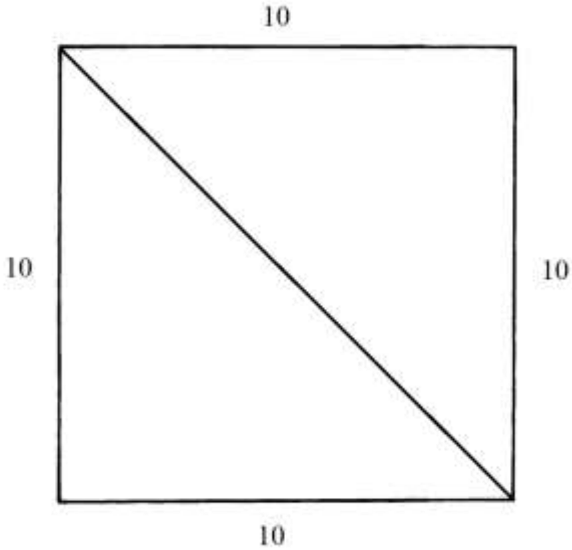
Monete — Vedi Torino.

Ne risulta che la *canna* valeva *8 palmi*.

- -

<u>Secondo Esempio – Lunghezza della diagonale di un quadrato</u>

Nel quadrato del precedente problema è tracciata una delle due diagonali:

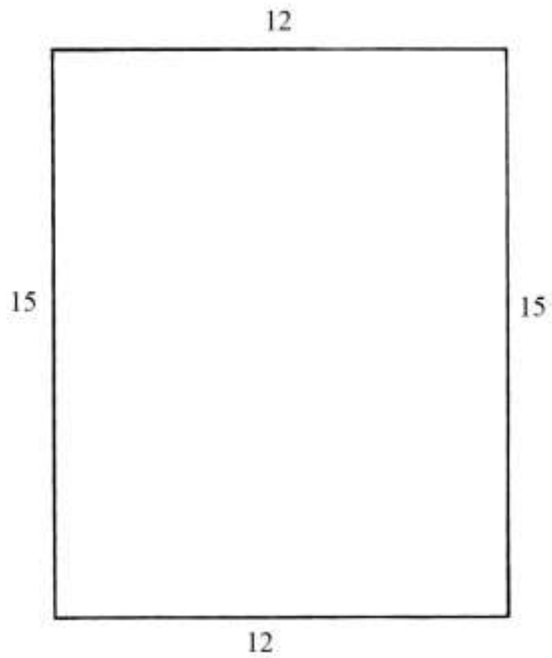


È chiesta la lunghezza della diagonale. La soluzione offerta da Pellos contiene i seguenti passi:

* moltiplicare la lunghezza di un lato per sé stessa: $10 * 10 = 100$;
* moltiplicare per 2: $100 * 2 = 200$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{200} = (14 + 4/29)$.

Terzo Esempio – Area di un rettangolo

Un rettangolo è largo 12 e alto 15.



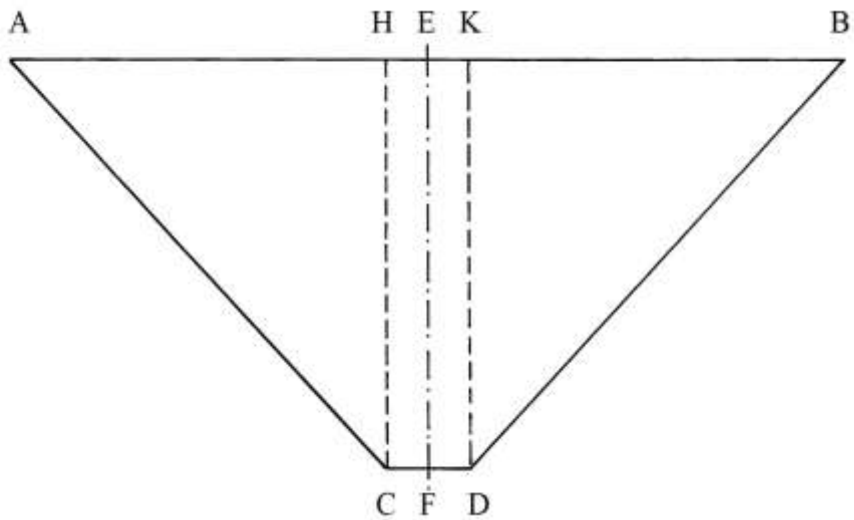
Il quadrilatero è disposto con i lati più corti orizzontali.

L’area S del rettangolo è:

S = 12 * 15 = 180.

Quarto Esempio – Area di un trapezio isoscele

Un quadrilatero ha la forma di un trapezio isoscele con la base maggiore posizionata in alto e lunga 60.



La base minore CD è lunga 6 e i due lati obliqui, AC e BD, sono entrambi lunghi 40.

Deve essere calcolata l’area del quadrilatero.

Per facilitare la soluzione del problema sullo schema sono state aggiunte le lettere, *maiuscole*, ai vertici più importanti.

Riassumiamo le lunghezze:

* AB = 60;
* CD = 6;
* AC = BD = 40.

EF è l'asse di simmetria verticale del trapezio che fissa le seguenti relazioni:

* AE = EB = AB/2 = 60/2 = 30;
* CF = FD = CD/2 = 6/2 = 3.

HC e KD sono due *altezze* per trapezio, parallele a EF, di uguale lunghezza e simmetriche rispetto a EF.

Occorre ricavare la lunghezza di HC = KD.

Consideriamo il triangolo rettangolo AHC:

$$HC^2 = AC^2 – AH^2$$

AH è lungo:

AH = AE – HE = AB/2 – CF = 60/2 – 3 = 30 – 3 = 27.

$HC^2 = 40^2 – 27^2 = 1600 – 729 = 871$ e

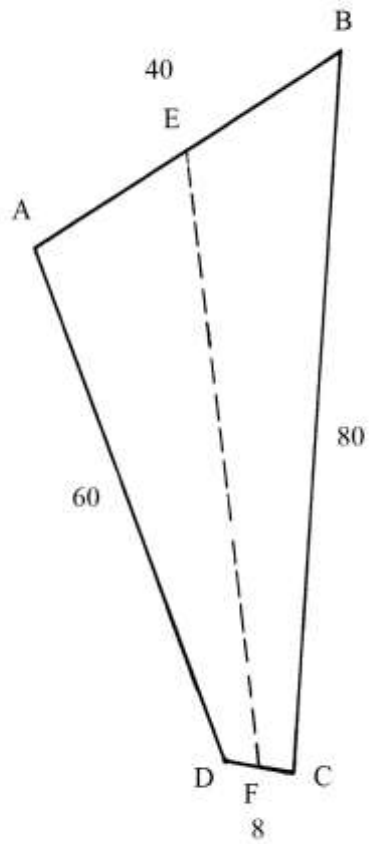
HC = √871, valore che Pellos approssima a (29 + 30/59).

L'area S del trapezio è data dal prodotto della semisomma delle basi per l'altezza:

S = [(AB + CD)/2] * HC = [(60 + 6)/2] * √871 = 33 * (29 + 30/59) =
= (973 + 46/59).

<u>Quinto Esempio – Area di un quadrilatero</u>

Un terreno ha la forma di un quadrilatero



Deve essere calcolata l'area del terreno.

Per semplificare la soluzione del problema, ai vertici sono state aggiunte le lettere.

Le lunghezze dei quattro lati sono:

* AB = 40;
* BC = 80;
* DC = 8;
* AD = 60.

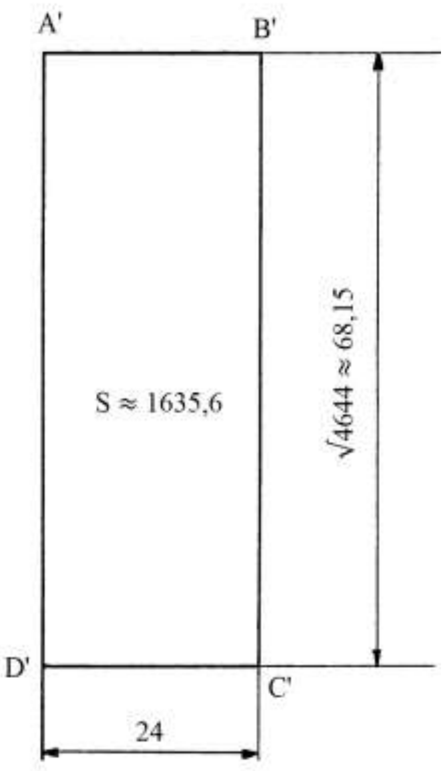
Sono fissati i punti medi dei lati AB e DC: sono E e F.

La mediana EF divide ABCD in due quadrilateri: AEFD e EBCF.

La soluzione del problema proposta da Pellos contiene i seguenti passi:

* sommare le lunghezze di AB e di DC: AB + DC = 40 + 8 = 48;
* dividere per 2: (AB + DC)/2 = 48/2 = 24;
* sottrarre metà della lunghezza di DC da metà di quella di AB: (AB/2) – (DC/2) = (40/2) – (8/2) = 20 – 4 = 16;
* moltiplicare 16 per sé stesso: 16 * 16 = 256;
* sommare le lunghezze di BC e di AD: BC + AD = 80 + 60 = 140;
* dividere per 2: (BC + AD)/2 = 140/2 = 70;
* moltiplicare 70 per sé stesso: 70 * 70 = 4900;
* sottrarre 256 da 4900: 4900 – 256 = 4644;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{4644} \approx 68{,}15$ [lunghezza ipotetica di EF];
* moltiplicare per 24 [e cioè per (AB + CD)/2]: 68,15 * 24 = 1635,6 = S [area del quadrilatero ABCD].

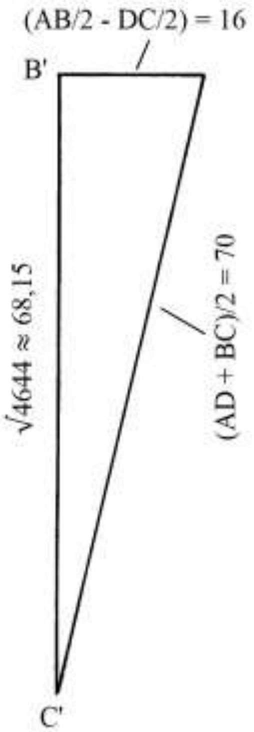
La procedura impiegata da Pellos assimila il quadrilatero ABCD a un rettangolo A'B'C'D' con lunghezza A'D' uguale a 68,15 e larghezza D'C' uguale a 24:



La procedura per la determinazione della lunghezza di B'C' può essere riassunta in una formula:

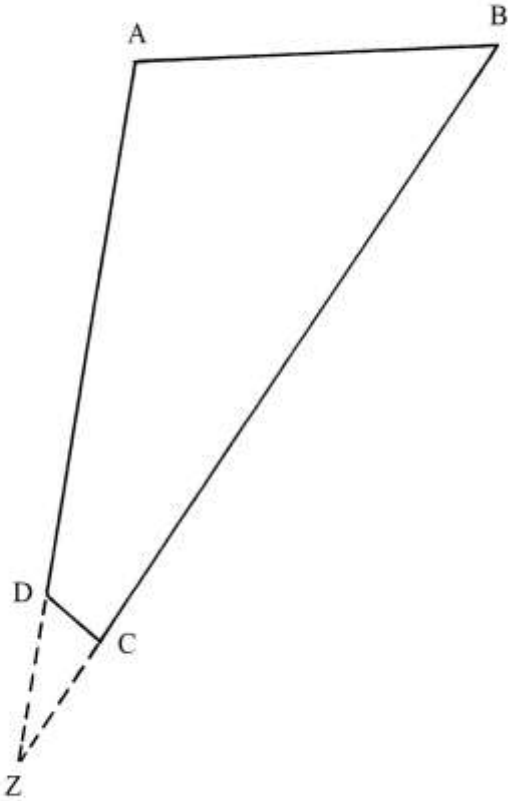
$$(B'C')^2 = [(AD + BC)/2]^2 – (AB/2 – DC/2)^2 = 4900 – 256 = 4644.$$

La lunghezza di B’C’ è il cateto di un triangolo rettangolo che ha l’ipotenusa lunga [(AD + BC)/2] = 70 e il cateto minore lungo (AB/2 – DC/2) = 16.



- APPROFONDIMENTO -

Il quadrilatero ABCD è ricavato dal triangolo scaleno ABZ dal quale è stato tagliato il triangolo DCZ:



Misurando con la maggiore accuratezza possibile le dimensioni dei triangoli ABZ e DCZ si ottengono le seguenti lunghezze:

* AZ = 78;
* DZ = ≈ 18;
* AD = AZ – DZ = 78 – 18 = 60;
* BZ = 96;
* CZ = ≈ 16;
* BC = BZ – CZ = 96 – 16 = 80;
* AB = 40;
* DC = 8.

Applichiamo la formula di Erone per calcolare le aree dei due triangoli.

Nel caso di ABZ, il perimetro $2 * p$ è:

$2 * p = AZ + AB + BZ = 78 + 40 + 96 = 214$ e

il semiperimetro p è: $p = 214/2 = 107$.

L'area di ABZ è:

$S_{ABZ} = \sqrt{[p * (p – AZ) * (p – AB) * (p – BZ)]} =$

$= \sqrt{[107 * (107 – 78) * (107 – 40) * (107 – 96)]} = \sqrt{(107 * 29 * 67 * 11)} =$

$= \sqrt{2286911} \approx 1512,25$.

Nel caso di DCZ il perimetro $2 * p$ è:

$2 * p = DZ + DC + CZ = 18 + 8 + 16 = 42$ e

il semiperimetro p è: $p = 42/2 = 21$.

L'area di DCZ è:

$S_{DCZ} = \sqrt{[p * (p – DZ) * (p – DC) * (p – CZ)]} =$

$= \sqrt{[21 * (21 – 18) * (21 – 8) * (21 – 16)]} = \sqrt{(21 * 3 * 13 * 5)} = \sqrt{4095} =$

≈ 64.

L'area ipotetica di ABCD è data dalla differenza fra le aree dei due triangoli:

$S_{ABCD} = S_{ABZ} – S_{DCZ} = 1512,25 – 64 = 1448,25$.

Questo valore è assai inferiore a quello calcolato da Pellos.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

L'eventuale applicazione dell'antica *formula degli agrimensori* alla soluzione di questo problema porta a un altro risultato.

Essa calcola l'area di un quadrilatero moltiplicando fra loro le semisomme delle lunghezze dei lati opposti:

$S_{ABCD} = [(AB + CD)/2] * [(AD + BC)/2] = [(40 + 8)/2] * [(60 + 80)/2] =$

$= 24 * 70 = 1680$.

Come noto, la formula fornisce risultati approssimati che sono accettabili quanto più il quadrilatero si avvicina alla forma del rettangolo e ciò non accade a ABCD.

Il risultato errato che fornisce l'uso di questa formula, 1680, si avvicina a quello, errato, calcolato da Pellos: (1635,6).

Pellos è stato influenzato dalla *formula degli agrimensori*?

- -

Nota: a partire dal *sesto Esempio* ("problema"), Pellos utilizza i *numeri romani*.

VI Esempio – Area di un quadrilatero

Un terreno ha la forma di un quadrilateri privo di lati paralleli e di angoli retti.

L’Autore ha disegnato una mediana che collega i punti medi dei lati AB e DC, ma non sembra che sia utilizzata.

Le lettere ai vertici dei lati sono qui aggiunte per facilitare la soluzione del problema che chiede l’area del terreno.

Senza citarla espressamente, Pellos calcola l’area del quadrilatero applicando la *formula degli agrimensori*, già citata:

* sommare metà delle lunghezze del *capo alto* (AB) e del *capo basso* (DC):

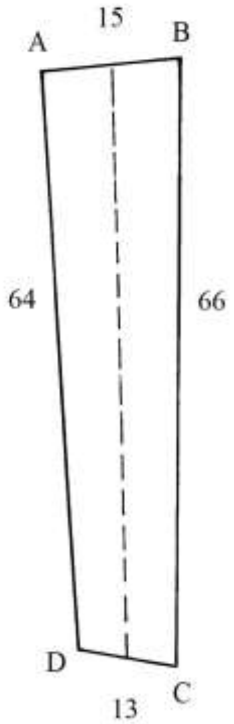
  AB/2 + DC/2 = 15/2 + 13/82 = 14;

* sommare metà delle lunghezze dei due lati verticali:

  AD/2 + BC/2 = 64/2 + 66/2 = 32 + 33 = 65;

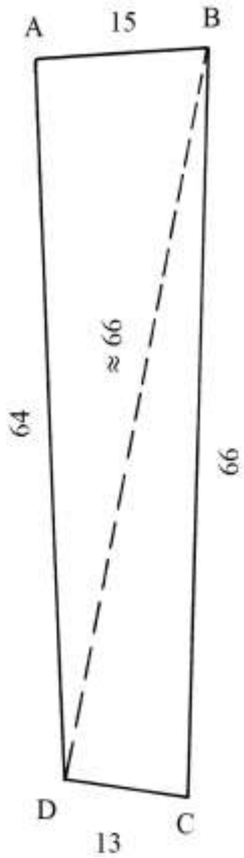
* moltiplicare 14 per 65: 14 * 65 = 910, area di ABCD.

L’errore generato dall’applicazione della formula degli agrimensori non dovrebbe essere significativo perché ABCD ha una forma abbastanza vicina a quella rettangolare.



- APPROFONDIMENTO -

BD è una diagonale del quadrilatero:



Misurando BD con accuratezza risulta che la sua lunghezza è 66, quanto il lato BC.
BD divide il quadrilatero in due triangoli: ABD e BDC; il secondo è isoscele.
Applichiamo la formula di Erone per ricavare le aree dei due triangoli.
Nel caso di ABD il perimetro *2 * p* è:

$2 * p = AB + AD + BD = 15 + 64 + 66 = 145$ e il semiperimetro *p* è:

$p = 145/2 = 72,5$.

L'area di ABD è:

$S_{ABD} = \sqrt{[p * (p - AB) * (p - AD) * (p - BD)]} =$
$= \sqrt{[72,5 * (72,5 - 15) * (72,5 - 64) * (72,5 - 66)]} = \sqrt{(72,5 * 57,5 * 8,5 * 6,5)} =$
$= \sqrt{230323,4375} = 479,92$.

Nel caso di BDC il perimetro *2 * p* è:

$2 * p = BD + DC + BC = 66 + 13 + 66 = 145$ e il semiperimetro *p* è:

$p = 145/2 = 72,5$.

L'area di BDC è:

$S_{BDC} = \sqrt{[p * (p - BD) * (p - DC) * (p - BC)]} =$
$= \sqrt{[72,5 * (72,5 - 66) * (72,5 - 13) * (72,5 - 66)]} =$
$= \sqrt{(72,5 * 6,5 * 59,5 * 6,5)} = \sqrt{182255,9375} = 426,91$.

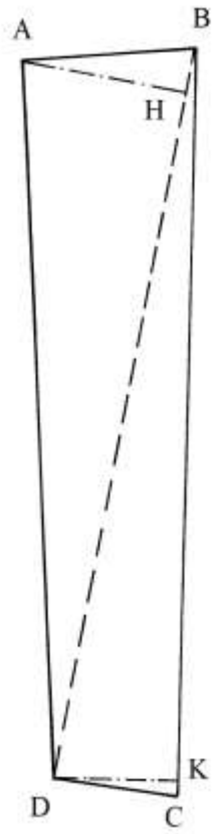
L'area del quadrilatero ABCD è:

$S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BDC} = 479,92 + 426,91 = 906,83$.

Il valore calcolato da Pellos, 910, è quasi uguale a quello calcolato con la formula di Erone: 906,83.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Una soluzione ancora più semplice è presentata nello schema che segue:



+

Sono tracciate due altezze, AH nel triangolo ABD e DK nel triangolo BDC.

Le aree dei due triangoli sono così calcolate:

* $S_{ABD} = BD * AH/2$;
* $S_{BDC} = BD * DK/2$.

L'area del quadrilatero ABCD è data dalla somma delle aree dei due triangoli:

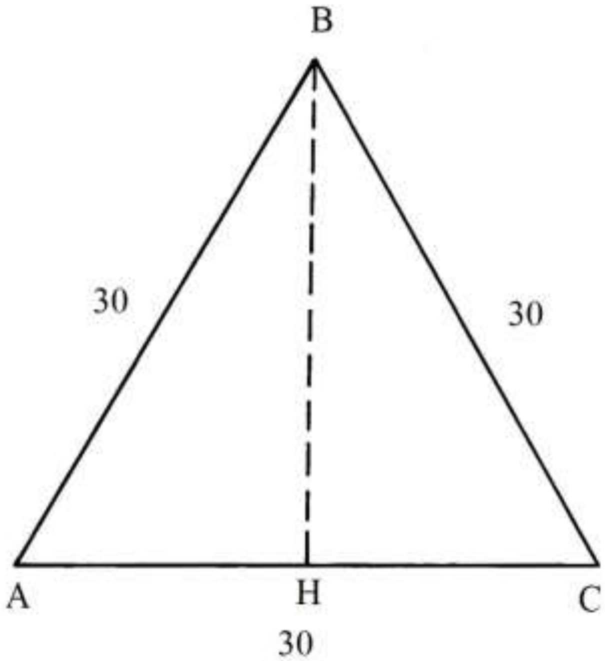
$$S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BDC} = BD * AH/2 + BD * DK/2 = BD * (AH + DK)/2.$$

Questa soluzione elimina l'applicazione della formula di Erone con le complicazioni dovute alle estrazioni di radici quadrate.

- -

VII Esempio – Area di un triangolo equilatero

Un triangolo equilatero ha lati lunghi 30.



Deve essere calcolata la sua area; occorre ricavare la lunghezza dell'altezza BH che è data da:

$BH^2 = AB^2 – AH^2 = 30^2 – (30/2)^2 = 900 – 225 = 675$ e

$BH = \sqrt{675} \approx 25{,}98$, valore che Pellos approssima a (25 + 50/51).

L'area del triangolo ABC è:

$S_{ABC} = AC * BH/2 = 30 * (\sqrt{675})/2 = 389{,}71$ che Pellos approssima a (389 + 36/51) [= (389 + 12/17)].

VIII Esempio – Area di un triangolo isoscele

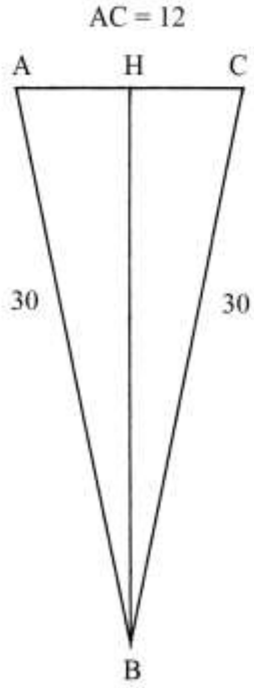
Un triangolo isoscele ha la base lunga 12e i lati obliqui lunghi 30.

Deve essere calcolata l'area.

Occorre ricavare la lunghezza dell'altezza BH:

$BH^2 = AB^2 – AH^2 = 30^2 – (12/2)^2 = 900 – 36 = 864$ e

$BH = \sqrt{864} \approx 29{,}39$.



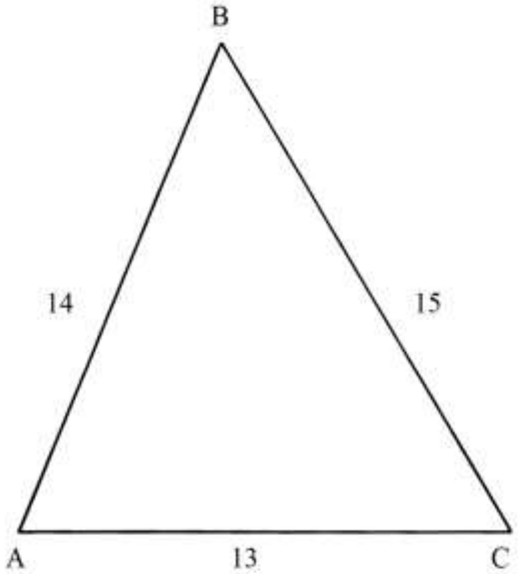
L'area del triangolo ABC è:

$S_{ABC} = BH * AC/2 = \sqrt{864} * 12/2 = 176{,}34$, valore che Pellos indica in (176 + 20/59).

<u>VIIII Esempio – Il triangolo 13-14-15</u>

Il triangolo ABC ha lati lunghi:

* AB = 14;
* BC = 15;
* AC = 13.



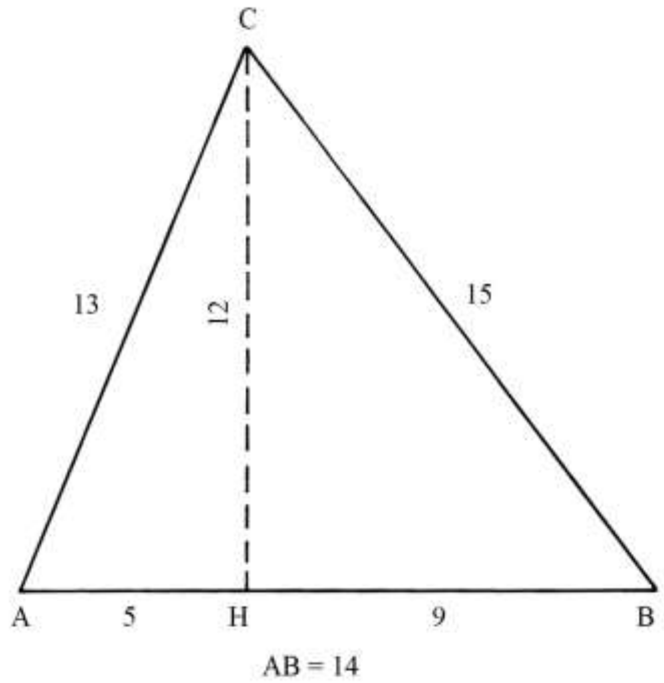
Il problema domanda l'area, le lunghezze delle altezze e quelle delle proiezioni dei lati generate dalle altezze stesse.

Sembra che Pellos proponga due diversi metodi.

Ecco i passi del *primo metodo*:

* moltiplicare la lunghezza di AC, il lato più corto, per sé stessa: 13 * 13 = 169;
* moltiplicare la lunghezza di BC, il lato più lungo, per sé stessa: 15 * 15 = 225;
* sottrarre 169 da 225: $BC^2 – AC^2 = 225 – 169 = 56$;
* dividere per 2: 56/2 = 28;
* dividere per la lunghezza del lato AB: 28/14 = 2;

[a questo passo, Pellos afferma che il *lato di base* - *cap bas* - è lungo 14 e non è più quello lungo 13: occorre ruotare l'intero triangolo, come mostra lo schema che segue:



];

* dividere per 2 la lunghezza di AB, lato orizzontale, che è 14: 14/2 = 7;
* sommare con il quoziente di 28/14 = 2: 7 + 2 = 9,
  lunghezza della proiezione HB del lato BC su AB;
* sottrarre il quoziente di 28/14 = 2 da 7: 7 – 2 = 5,
  lunghezza della proiezione AH del lato AC su AB.

Riassumiamo i passi della procedura per ricavare la lunghezza di HB:

$$HB = [(BC^2 – AC^2)/(2 * AB)] + AB/2.$$

Pellos indica la lunghezza dell'altezza CH dell'ultimo schema uguale a 12, ma non presenta alcun calcolo.

L'altezza CH divide ACB in due triangoli rettangoli:

* ACH che ha lati lunghi 5, 12 e 13, numeri che formano la seconda terna primitiva;
* CHB che ha lati lunghi 9, 12 e 15, numeri che formano una terna derivata dalla prima primitiva 3-4-5, i cui membri sono moltiplicati per 3.

L'altezza CH ha lunghezza che è data da:

$$CH^2 = AC^2 – AH^2 = 13^2 – 5^2 = 169 – 25 = 144 \quad \text{e}$$

$$CH = \sqrt{144} = 12.$$

Oppure la lunghezza di CH può essere ricavata in altro modo:

$CH^2 = BC^2 – HB^2 = 15^2 – 9^2 = 225 – 81 = 144$ e
$CH = \sqrt{144} = 12$.

L'area del triangolo ABC è:

$S_{ABC} = AB * CH/2 = 14 * 12/2 = 84$.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Il *secondo metodo* proposto da Pellos contiene i seguenti passi [il riferimento è all'ultimo schema, con il lato AB, lungo 14, disposto orizzontalmente]:

* moltiplicare la lunghezza di AB per sé stessa: 14 * 14 = 196;
* moltiplicare la lunghezza di BC per sé stessa: 15 * 15 = 225;
* sommare i due quadrati: 196 + 225 = 421;
* moltiplicare la lunghezza di AC per sé stessa: 13 * 13 = 169;
* sottrarre 169 da 421: 421 – 169 = 252;
* dividere per 2: 252/2 = 126;
* dividere per la lunghezza di AB: 126/14 = 9, lunghezza di HB;
* sottrarre 9 dalla lunghezza di AB: 14 – 9 = 5, lunghezza di AH.

Pellos suggerisce un'ulteriore procedura per ricavare la lunghezza di AH:

* moltiplicare la lunghezza di AB per sé stessa: 14 * 14 = 196;
* moltiplicare la lunghezza di AC per sé stessa: 13 * 13 = 169;
[Pellos usa i quadrati delle lunghezze dei due lati più corti, AB e AC];
* sommare i due quadrati: 196 + 169 = 365;
* moltiplicare la lunghezza di BC per sé stessa: 15 * 15 = 225;
* sottrarre 225 da 365: 365 – 225 = 140;
* dividere per 2: 140/2 = 70;
* dividere per la lunghezza di B: 70/14 = 5, lunghezza di AH;
* sottrarre la lunghezza di AH da quella di AB: AB – AH = 14 – 5 = 9, lunghezza di HB.

Anche i passi di questa ultima procedura possono essere riassunti in una formula:

$AH = (AB^2 + AC^2 – BC^2)/(2 * AB)$.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

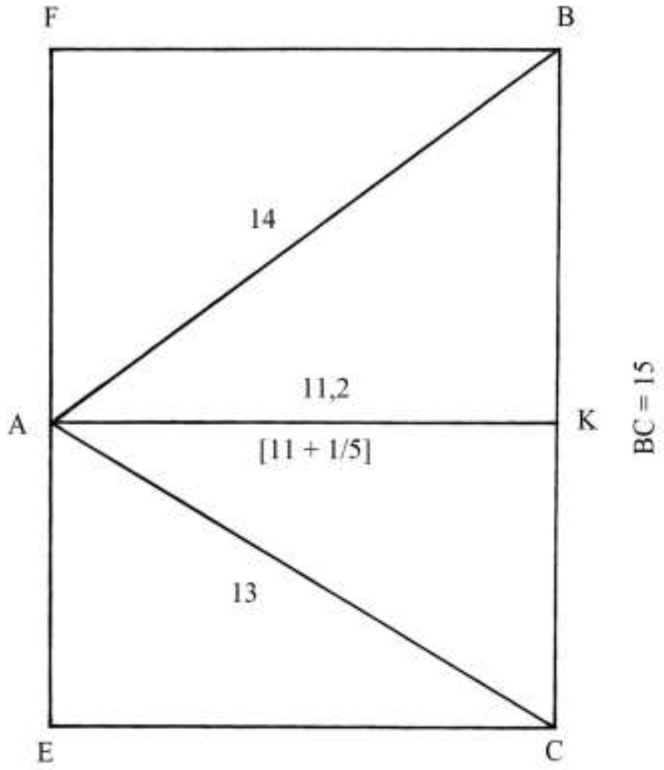
Successivamente, Pellos inscrive il triangolo ABC in un rettangolo che ha lati lunghi quanto BC (e cioè 15) e con larghezza uguale a AK.

AK è l'altezza del triangolo ABC relativa al lato BC e la sua lunghezza è data da:

$AK = 2 * S_{ABC}/BC = 2 * 84/15 = 11,2$, valore che Pellos esprime con "11 + 1/5".

L'area del rettangolo EFBC è:

$S_{EFBC} = BC * AK = 15 * 11,2 = 168 = 2 * 84 = 2 * S_{ABC}$.



- APPROFONDIMENTO -

Il triangolo 13-14-15 è stato studiato da molti geometri dell'antichità e dai maestri d'abaco medievali e rinascimentali: fra i primissimi fu il matematico e ingegnere egizio Erone di Alessandria, vissuto nel primo secolo d.C.

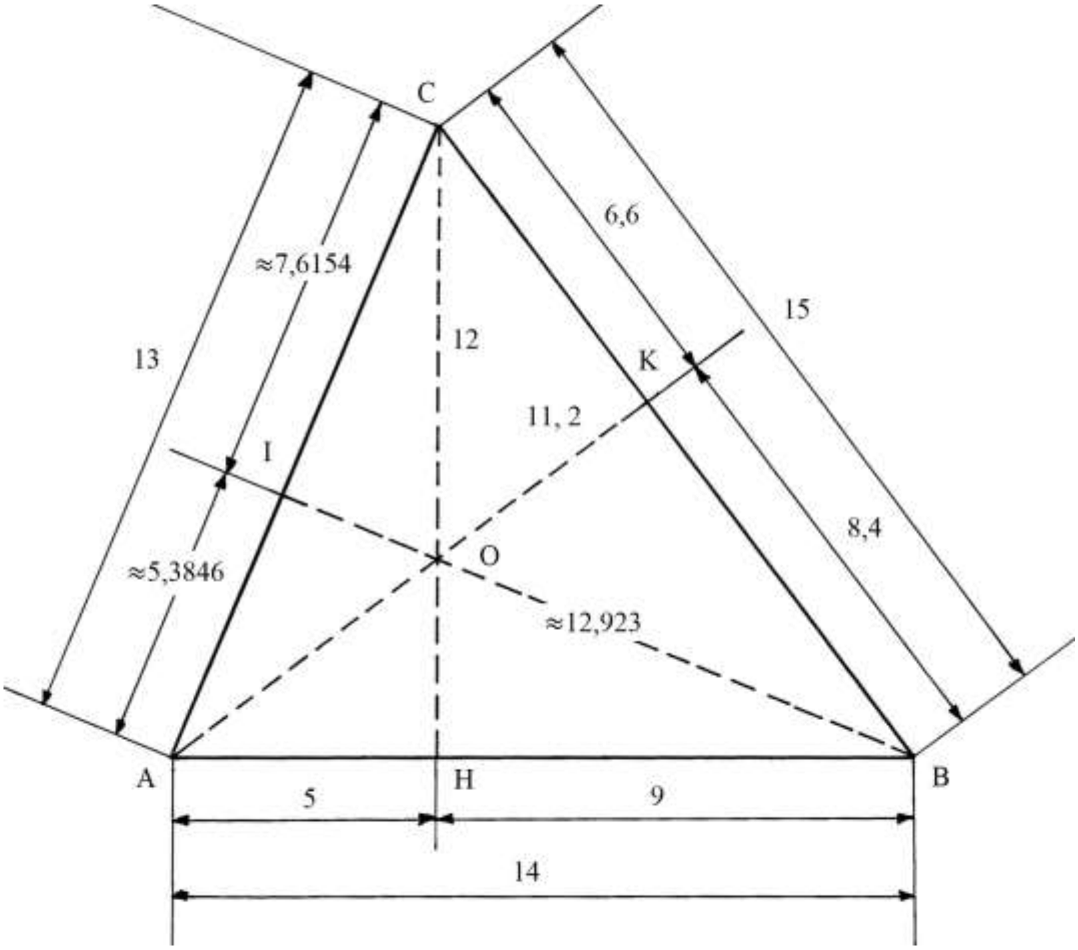
Il triangolo possiede alcune interessanti proprietà geometriche:

la lunghezza di un'altezza (quella relativa al lato lungo 14) e quelle dei tre lati sono espresse da numeri interi e i quattro formano una progressione aritmetica di ragione *uno*:

12 (altezza CH) – 13 (lato AC) – 14 (lato AB) – 15 (lato BC).

Anche l'area del triangolo è un numero intero: 84.

Le altre due altezze non sono espresse da numeri interi.



%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

L'altezza CH scompone ABC in due triangoli rettangoli:

* ACH che ha lati lunghi 5, 12 e 13;
* CHB con lati lunghi 9, 12 e 15.

5-12-13 formano una terna primitiva; 9-12-15 sono una terna derivata dalla primitiva 3-4-5.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Nel precedente schema sono disegnate le tre altezze: AK, BI e CH. Esse si incrociano nell'ortocentro O.

L'altezza AK è lunga:

$$AK = 2 * S_{ABC}/BC = 2 * 84/15 = 11,2.$$

L'altezza BI è lunga:

$$BI = 2 * S_{ABC}/AC = 2 * 84/13 \approx 12,923.$$

Applicando i metodi utilizzati per ricavare le lunghezze delle proiezioni AH e HB, sono calcolate le lunghezze delle proiezioni sugli altri due lati:

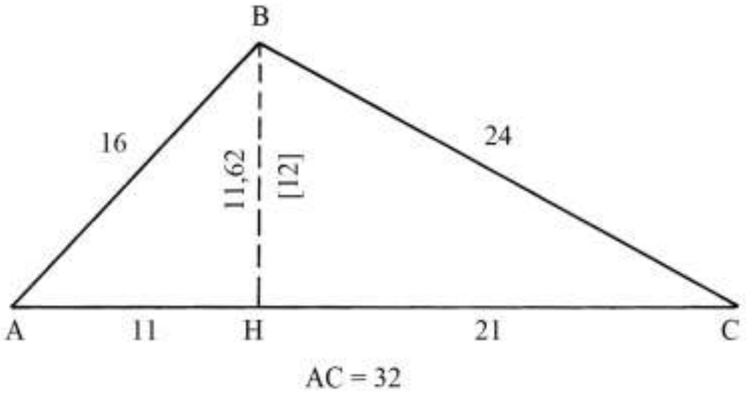
* AI ≈ 5,3846 e IC ≈ 7,6154;
* BK = 8,4 e KC = 6,6.

- -

X Esempio – Area di un triangolo scaleno

Un terreno ha la forma di un triangolo scaleno: la base è lunga 32 e gli altri due lati sono 16 e 24.

Nel trattato di Pellos il triangolo è disposto con la base AC verticale.



L'altezza relativa alla base AC è BH e secondo Pellos sarebbe lunga 12.

Verifichiamo l'esattezza di questo dato.

BH è un cateto comune ai due triangoli rettangoli ABH e BHC. Fissiamo la lunghezza di AH uguale a *x* e quella di HC vale:

$HC = AC – AH = 32 – x$.

La lunghezza di BH è data da:

$BH^2 = AB^2 – AH^2 = 16^2 – x^2 = 256 – x^2$ oppure

$BH^2 = BC^2 – HC^2 = 24^2 – (32 – x)^2 = 576 – (32 – x)^2$.

Le due espressioni sono equivalenti:

$256 – x^2 = 576 – (32 – x)^2$

$256 – x^2 = 576 – (1024 – 64 * x + x^2)$

$256 – x^2 = 576 – 1024 + 64 * x – x^2$

$256 – 576 + 1024 = 64 * x$

$704 = 64 * x$

$x = 704/64 = 11$.

HC è lungo:

$HC = AC – AH = 32 – 11 = 21$.

L'altezza BH è:

$BH^2 = AB^2 – AH^2 = 16^2 – 11^2 = 256 – 121 = 135$ e

$BH = \sqrt{135} \approx 11,62$.

Pellos ha arrotondato la lunghezza di BH a 12.

L'area di ABC è:

$S_{ABC} = AC * BH/2 = 32 * 11,62 = 185,92$.

Inizialmente, Pellos calcola l'area di ABC come segue:

$S_{ABC} = AC * BH/2 = 32 * 12/2 = 192$.

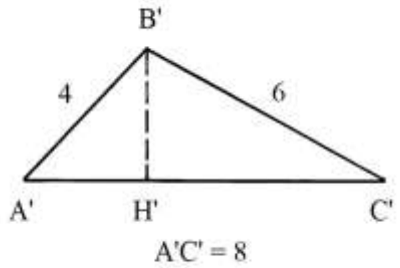
Poi si corregge e la determina fissando la lunghezza di BH uguale a (11 + 5/8) e la calcola in:

$S_{ABC} = 32 * (11 + 5/8)/2 = 186$.

L'espressione (11 + 5/8) vale: (11 + 5/8) = 11,625, valore vicinissimo a quello di ≈ 11,62 calcolato sopra.

- APPROFONDIMENTO -

Il triangolo ABC è simile al più piccolo triangolo A'B'C' i cui lati sono *quattro* volte più corti dei corrispondenti lati del primo:

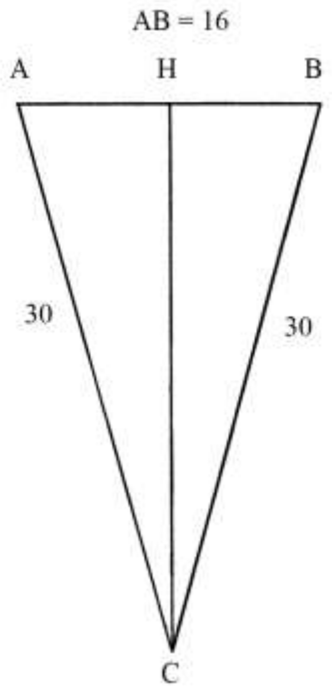


Il successivo problema ("Esempio") XIIII considera un terreno che ha la forma di un triangolo scaleno con lati lunghi 4, 6 e 8.

- -

<u>XI Esempio – Area di un triangolo isoscele</u>

Il triangolo isoscele ABC ha la base AB lunga 16 e i due lati obliqui sono 30.



Deve essere calcolata la sua area.

L'altezza CH è lunga:

$CH^2 = AC^2 – AH^2 = 30^2 – (16/2)^2 = 900 – 64 = 836$ e

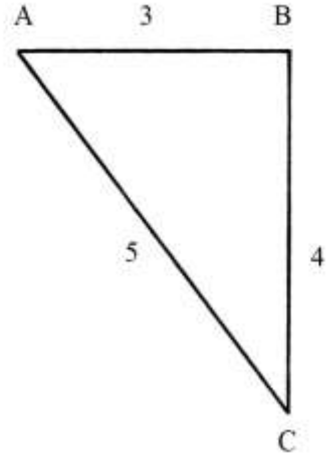
$CH = \sqrt{836} = 28,91$, valore che Pellos arrotonda a 29.

L'area S è:

$S_{ABC} = AB * CH/2 = 16 * 29/2 = 232$.

XII Esempio – Area di un triangolo rettangolo

ABC è un triangolo scaleno che ha lati lunghi 3, 4 e 5: è un triangolo rettangolo e le lunghezze dei suoi lati formano la prima terna primitiva.



AB e BC sono i due *cateti* e AC è l'*ipotenusa*, termini geometrici che Pellos non usa.

L'Autore verifica i rapporti fra le lunghezze:

* $AC^2 – BC^2 = 5^2 – 4^2 = 25 – 16 = 9$ e
  $\sqrt{9} = 3$, lunghezza di AB;
* $AC^2 – AB^2 = 5^2 – 3^2 = 25 – 9 = 16$ e
  $\sqrt{16} = 4$, lunghezza di BC;
* $AB^2 + AC^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$ e
  $\sqrt{25} = 5$, lunghezza di AC.

L'area di ABC è:

$S_{ABC} = AB * BC/2 = 3 * 4/2 = 12/2 = 6.$

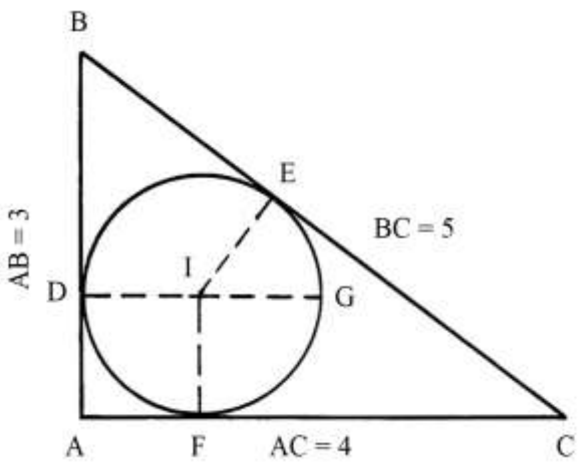
Le lunghezze dei lati e l'area sono espresse da numeri interi in progressione aritmetica di 1:

3 – 4 – 5 – 6.

- APPROFONDIMENTO -

Il triangolo 3-4-5 possiede una serie di importanti proprietà geometriche e aritmetiche.

Le *bisettrici* dei tre angoli interni si incontrano in un punto interno, l'*ortocentro I*, che è il centro del cerchio inscritto e tangente ai tre lati del triangolo nei punti D, E e F.



Il raggio del cerchio inscritto, ID = IE = IF, è lungo 1 e il diametro del cerchio, DG, è lungo 2.

L'area del triangolo è

$\text{Area}_{ABC} = AB * AC/2 = 3 * 4/2 = 6$.

La tabella che segue riassume i valori caratteristici di questo speciale triangolo rettangolo:

Entità geometrica	*Valore*
Raggio ID	1
Diametro DG	2
Cateto minore AB	3
Cateto maggiore AC	4
Ipotenusa BC	5
Area ABC	6
Somma lunghezze cateti AB e AC	7
Somma lunghezze cateto minore e ipotenusa	8
Somma lunghezze cateto maggiore e ipotenusa	9
Perimetro	12

Il triangolo 3-4-5 nasconde al suo interno i primi *nove* numeri interi.

- -

XIII Esempio – Area di un triangolo isoscele

Il triangolo ABC è isoscele e ha la base AC lunga 50. I lati obliqui AB e BC sono 30.

Deve essere calcolata l'area.

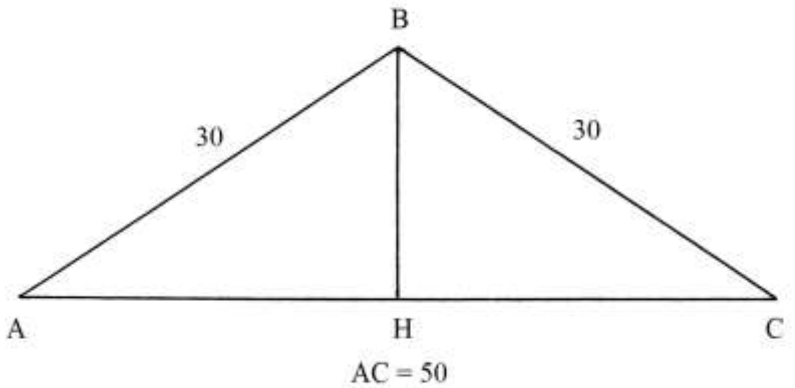
La lunghezza dell'altezza BH è data da:

$BH^2 = AB^2 - AH^2 = 30^2 - (AC/2)^2 = 30^2 - (50/2)^2 = 900\ 625 = 275$ e

$BH = \sqrt{275} \approx 16{,}58$ che Pellos arrotonda a (16 + 19/33).

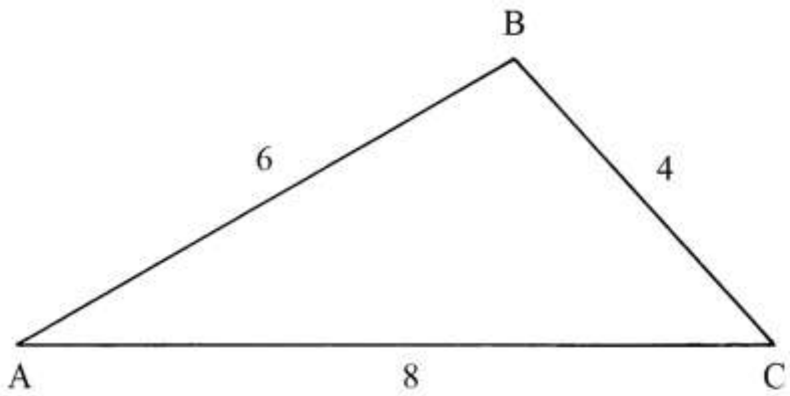
L'area è:

$S_{ABC} = BH * AC/2 = (16 + 19/33) * 50/2 = (16 + 19/33) * 25 = (414 + 13/33)$.



XIIII Esempio – Area di un triangolo scaleno

ABC è un triangolo scaleno con lati lunghi 4, 6 e 8.



Deve essere calcolata la sua superficie.

La procedura usata da Pellos applica, senza citarla espressamente, la formula di Erone per ricavare l'area del triangolo. Ecco i passi:

* sommare le lunghezze dei lati: AB + BC + AC = 6 + 4 + 8 = 18 [perimetro];
* dividere per 2: 18/2 = 9 [semiperimetro];
* sottrarre la lunghezza di BC da 9: 9 – 4 = 5;
* moltiplicare 5 per 9 [semiperimetro]: 5 * 9 = 45;
* sottrarre la lunghezza di AB da 9: 9 – 6 = 3;
* moltiplicare 3 per 45: 3 * 45 = 135;

[Pellos omette due passi:

  * sottrarre la lunghezza di AC da 9: 9 – AC = 9 – 8 = 1;
  * moltiplicare 1 per 135: 1 * 135;

  la doppia omissione non ha conseguenze aritmetiche perché il risultato parziale, 135, resta invariato];

* estrarre la radice quadrata: √135 ≈ 11,62, valore che Pellos approssima a (11 + 20/33).

La procedura può essere riassunta come segue:

* sommare le lunghezze dei lati: AB + BC + AC = 6 + 4 + 8 = 18 [perimetro];
* dividere per 2: 18/2 = 9 [semiperimetro];
* estrarre la radice quadrata:

  $S_{ABC} = \sqrt{}[9 * (9 – BC) * (9 – AB) * (9 – AC)] =$

  $= \sqrt{}[9 * (9 – 4) * (9 – 6) * (9 -8)] = \sqrt{}(9 * 5 * 3 * 1 = \sqrt{}135 \approx 11{,}62.$

XV Esempio – Area di un cerchio

Un cerchio ha circonferenza lunga 88.

Deve essere calcolata la sua area.

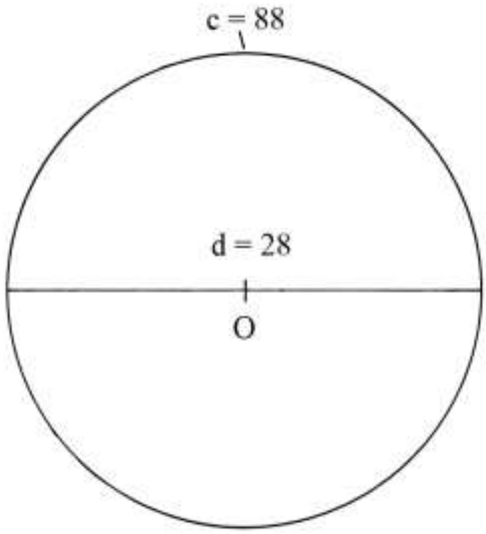
Il diametro *d* ha lunghezza che è ricavata come segue:

d = c/(3 + 1/7) = 88/(22/7) = 28.

L'area S è calcolata da Pellos con due differenti metodi, fra loro equivalenti:

a) S = (c/2) * (d/2) = (88/2) * (28/2) 0 44 * 16 = 616;
b) S = d^2 * (1 -1/7 – 1/14) = d^2 * (14 – 2 – 1)/14 = d^2 * 11/14 = 28^2 * 11/*14 = = 784 * 11/14 = 616.

La seconda formula calcola l'area di un cerchio inscritto in un quadrato con lati lunghi 28: il diametro del cerchio è anch'esso lungo 28 e il rapporto fra l'area del cerchio e quella del quadrato è esattamente 11/14.



- APPROFONDIMENTO -

Il secondo metodo usato da Pellos richiede un chiarimento.

L'area S di un cerchio è data da:

$$S = \pi * r^2 = 22/7 * (d/2)^2 = 22/7 * d^2/4 = 22/28 * d^2 = 11/14 * d^2.$$

La frazione 11/14 può essere così trasformata:

$$11/14 = 14/14 – 3/14 = 1 – 3/14 = (1 – 2/14 – 1/14) = (1 – 1/7 – 1/14).$$

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

La scelta della lunghezza della circonferenza uguale a 88 richiama a soluzioni di calcolo dell'area di un cerchio dovute al matematico ebreo catalano Abraham Bar Hiyya, nato a Barcellona (fra il 1065 e il 1070) e morto in Provenza (intorno al 1136). È noto con il nome di *Savasorda*, corruzione del titolo arabo di "Capo della Guardia". Con l'aiuto del matematico e astronomo italiano Platone da Tivoli (attivo almeno fra il 1110 e il 1145) a Barcellona tradusse dall'ebraico in latino il suo trattato geometrico con il titolo *Liber Embadorum* ("Il libro delle aree").

Il numero 88 compare in quel trattato.

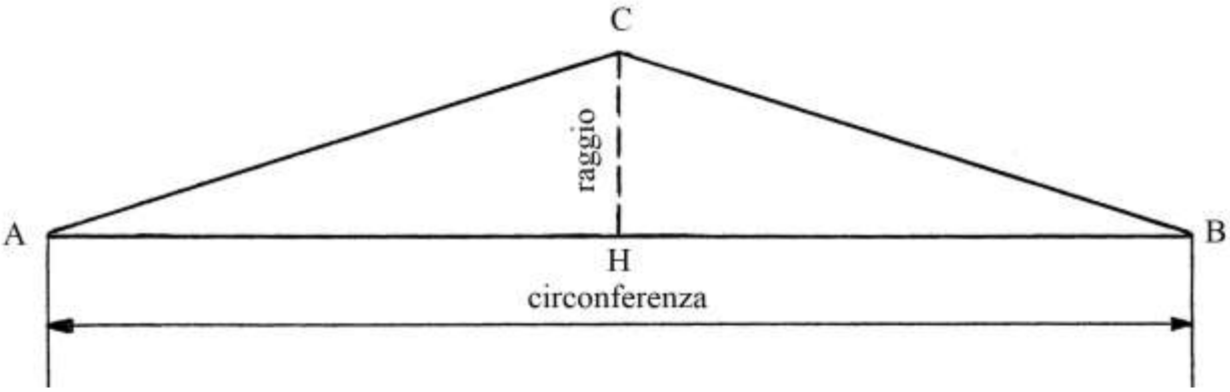
Il *moltiplicatore* 88/7

La frazione 88/7 equivale al *numero misto* (12 + 4/7).

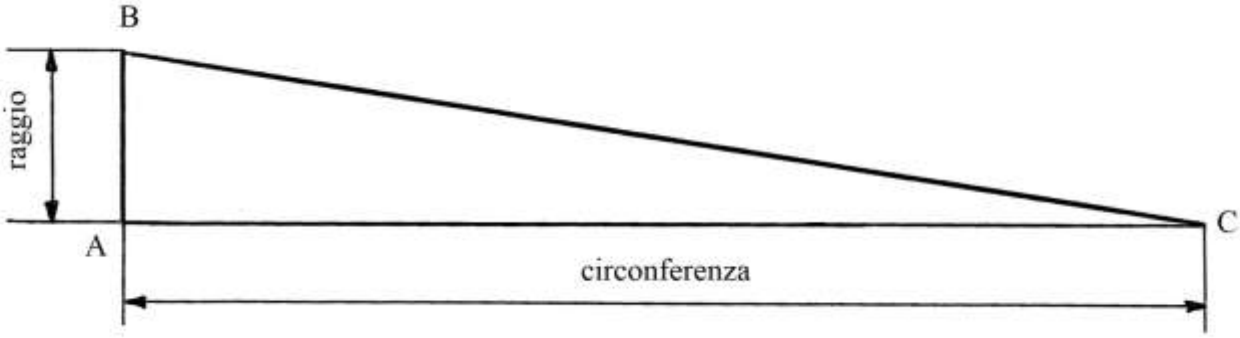
Questa espressione è il *moltiplicatore della superficie* e si ritrova – senza essere citato con questa espressione – in alcuni successivi trattati degli abacisti toscani del Medioevo e del Rinascimento (ad esempio in quelli di Paolo Gherardi, di Orbetano da Montepulciano e dei successivi fratelli Pier Maria Calandri e Filippo Maria Calandri).).

Approfondiamo l'origine e il significato del *moltiplicatore*.

L'area di un cerchio è assimilabile a quella di un triangolo isoscele che ha la base AB lunga quanto la circonferenza e altezza CH lunga quanto il raggio:



oppure a quella di un triangolo rettangolo con cateti lunghi quanto la circonferenza e il raggio:



Nel primo caso (triangolo isoscele) l'area è data da:

S_{ACB} = (AB * CH)/2 = (circonferenza * raggio)/2.

Ma:

circonferenza = diametro * 22/7 = (2 * raggio) * 22/7 = 44/7 * raggio = AB.

Inversamente:

raggio = circonferenza/(44/7) = circonferenza * 7/44 = CH.

Sostituendo il valore appena trovato del raggio nella formula dell'area del cerchio si ha:

$S_{CERCHIO}$ = (circonferenza) * (circonferenza * 7/44)/2 = circonferenza^2 * 7/88.

Da questa formula si può ricavare la lunghezza della circonferenza:

circonferenza = √($S_{CERCHIO}$ * 88/7).

La frazione 88/7 vale:

88/7 = (12 + 4/7) ed è il *moltiplicatore della superficie*: esso corrisponde al rapporto fra il quadrato della lunghezza della circonferenza e l'area del cerchio e cioè:

circonferenza^2 = $S_{CERCHIO}$ * 88/7 e

(circonferenza^2)/($S_{CERCHIO}$) = 88/7.

Un'altra via permette di giungere allo stesso risultato: l'area di un cerchio di raggio *r* è data da:

Area cerchio = π * r^2, mentre la circonferenza è lunga:
circonferenza = 2 * π * r.

Ne consegue che:

$$\text{circonferenza}^2/S_{\text{CERCHIO}} = (4 * \pi^2 * \text{raggio}^2)/(\pi * \text{raggio}^2) = 4 * \pi.$$

Sostituendo nell'ultima formula al valore di π quello approssimato di 22/7, risulta:

$$4 * 22/7 = 88/7 = (12 + 4/7).$$

In conclusione, la frazione 88/7 è il valore approssimato di 4*π.

- -

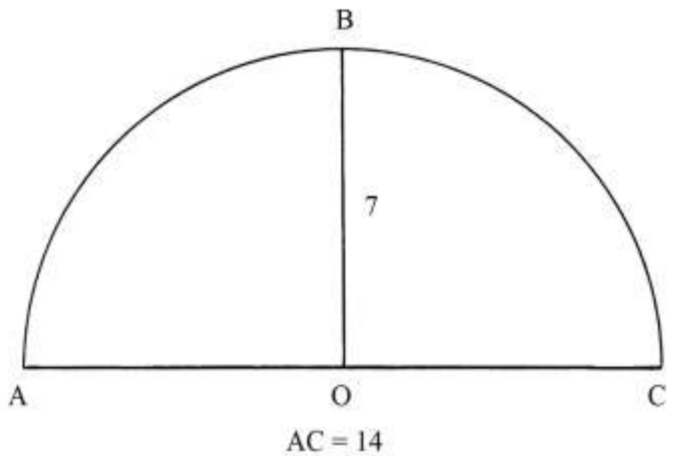
XVI Esempio – Area di un semicerchio

Un terreno ha la forma di un semicerchio la cui curva è disegnata con il compasso.
Il diametro AC è lungo 14 e il raggio OB è 7.
L'arco ABC è lungo:

$$ABC = 22/7 * OB = 22/7 * 7 = 22.$$

L'area del semicerchio è data da:

$$S_{ABCO} = (AC^2 * 11/14)/2 = (14^2 * 11/14)/2\ 14 * 11/2 = 77.$$



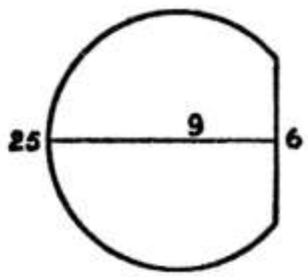
La formula usata calcola correttamente l'area del semicerchio come metà di quella di un cerchio di diametro 14.

XVII Esempio – Area di un cerchio sezionato

Un cerchio è sezionato e gli è stato asportato un *segmento circolare*, CBDH: anche la parte restante del cerchio, delimitata dall'arco CAD, è un segmento circolare.

CD è la corda che opera il taglio ed è lunga 6. La *freccia* AH è lunga 9.

L'arco CAD è lungo 25, come mostra lo schema originale:



Senza citarlo, Pellos applica il *teorema delle corde* per ricavare la lunghezza della freccia HB:

CH : HB = AH : HD

CH e HD sono lunghi: CH = HD = CD/2 = 6/2 = 3.

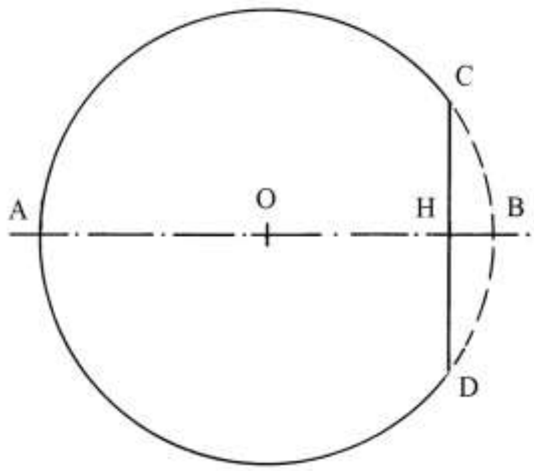
La proporzione diviene:

3 : HB = 9 : 3

HB = 3 * 3/9 = 1.

Il diametro AB è lungo:

AB = AH + HB = 9 + 1 = 10.



La circonferenza *c* dell'intero cerchio è lunga:

c = 22/7 * AB = 22/7 * 10 = 220/7 = (31 + 3/7).

Secondo Pellos, la lunghezza dell'arco CAD è 25.

Procediamo con l'aiuto della trigonometria elementare. Lo schema che segue è la riproduzione del settore circolare OCBD e del segmento circolare CBDH.

La tangente dell'angolo COH è:

tg COH = CH/OH = ¾ = 0,75.

COH è ampio ≈ 36,87°.

L'angolo COD è il doppio di quello COH:

COD = 2 * COH = 2 * 36,87 = 73,74°.

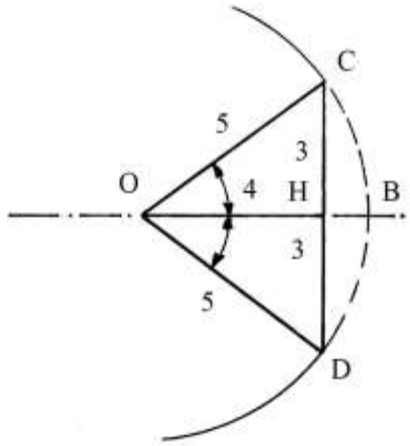
La lunghezza dell'arco CBD è proporzione all'ampiezza dell'angolo COD:

c : 360° = CBD : 73,74°

CBD = c * 73,74°/360° ≈ 6,44.

L'arco CAD è lungo:

CAD = c – CBD = (31 + 3/7) – 6,44 = 24,988, valore che si avvicina a quello fornito da Pellos, che è 25.



L'area S di un segmento circolare è data dalla formula:

$S = [r * (a – k) + k * f]/2$, dove:

* *r* è il raggio del cerchio: $r = 5$;
* *a* è la lunghezza dell'arco CBD: $a = CBD = 6,44$;
* *k* è la lunghezza della corda CD: $k = CD = 6$;
* *f* è la lunghezza della freccia HB: $f = HB = 1$.

L'area del segmento circolare CBDH è:

$S_{CBDH} = [5 * (6,44 – 6) + 6 * 1]/2 = (2,2 + 6)/2 = 8,2/2 = 4,1$.

L'area dell'intero cerchio di diametro AB = 10 è:

$S_{CERCHIO} = 11/14 * AB^2 = 11/14 * 10^2 = 11/14 * 100 = (78 + 4/7)$.

L'area del segmento circolare ACDA è:

$S_{ACDA} = S_{CERCHIO} – S_{CBDH} = (78 + 4/7) – 4,1 = 74,47$.

Pellos calcola l'area di ACDA uguale a 74: egli usa una procedura un po' contorta: ad esempio fissa in 12 la metà della lunghezza dell'arco CAD quando in realtà esso è 25/2 = 12,5.

XVIII Esempio – Area di un segmento circolare

ABCD è un segmento circolare: l'arco ABC è lungo (9 + ½), la freccia BD è 2 e la corda AC è 8.

O è il centro del cerchio dal quale è ricavato il segmento circolare.

Deve essere calcolata la sua area.

Pellos applica di nuovo il *teorema delle corde* allo scopo di ricavare la lunghezza del diametro del cerchio:

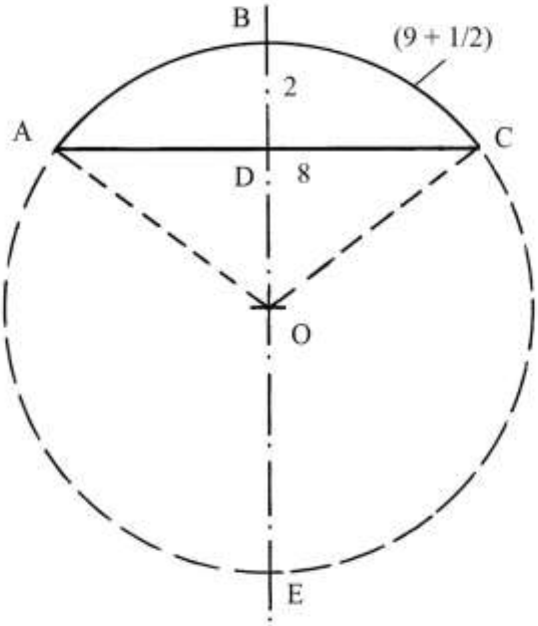
AD : BD = DE : DC

4 : 2 = DE : 4 da cui

DE = 4 * 4/2 = 16/2 = 8.

Il diametro BE è lungo:

BE = BD + DE = 2 + 8 = 10.



Pellos utilizza una procedura per calcolare l'area del segmento circolare ABCD:

* dividere per 2 la lunghezza dell'arco ABC: (9 + ½)/2 = (4 + ¾);
* moltiplicare per la lunghezza del raggio del cerchio:
  (4 + ¾) * 10/2 = (4 + ¾) * 5 = (23 + ¾);
* sottrarre la lunghezza della freccia BD da quella del raggio OB:
  OB – BD = 5 – 2 = 3;
* moltiplicare per metà della lunghezza della corda AC:
  3 * AC/2 = 3 * 8/2 = 3 * 4 = 12;
* sottrarre da (23 + ¾):
  (23 + ¾) – 12 = (11 + ¾), area del segmento circolare ABCD.

La procedura può essere riassunta in una formula:

$S_{ABCD} = (a/2) * r – (r – f) * k/2.$

Nella formula:

* *a* = ABC = (9 + ½);
* *r* = OB = 5;
* *f* = BD = 2 (*freccia*);
* *k* = AC = 8 (*corda*).

- APPROFONDIMENTO -

La procedura usata da Pellos fornisce un risultato uguale a quello ottenibile con la formula utilizzata nella soluzione del precedente XVII Esempio:

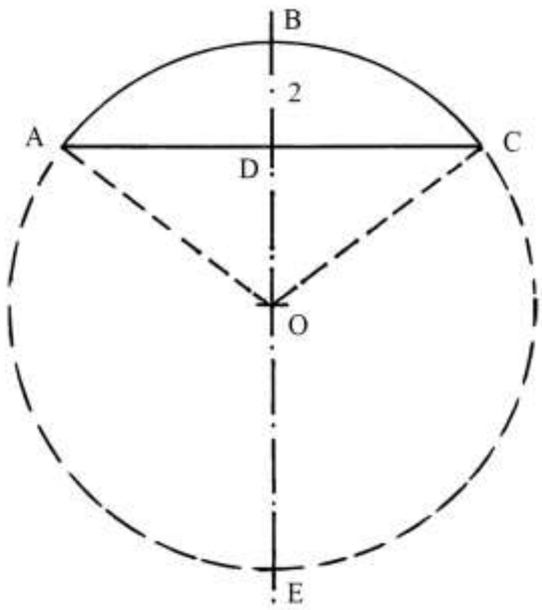
$S_{ABCD} = [r * (a – k) + k * f]/2 = [5 * (9 + ½ – 8) + 8 * 2]/2 =$
$= (5 * 1,5 + 16)/2 = (7,5 + 16)/2 = 23,5/2 = 11,75 = (11 + ¾).$

- -

XVIIII Esempio – Lunghezza della corda di un segmento circolare

Il problema è strettamente collegato al precedente XXVIII Esempio.

La freccia BD è lunga 2 ed è nota la lunghezza del diametro BE del cerchio dal quale è tagliato il segmento circolare.



Il problema chiede la lunghezza della corda AC.

La soluzione è data dalla seguente procedura:

* moltiplicare la lunghezza del raggio OB per sé stessa: 5 * 5 = 25;
* sottrarre la lunghezza della freccia BD da quella del raggio OB: 5 – 2 = 3;
* moltiplicare per sé stesso: 3 * 3 = 9;
* sottrarre 9 da 25: 25 – 9 = 16;
* estrarre la radice quadrata: √16 = 4, lunghezza di AD = DC;
* moltiplicare per 2: 4 * 2 = 8, lunghezza della corda AC.

I passi della procedura sono riassunti nella formula che segue:

$$AC = 2 * \sqrt{[OB^2 – (OB – BD)^2]}.$$

XX Esempio – Lunghezza della freccia di un segmento circolare

Il problema utilizza il segmento circolare dei due precedenti problemi (XVIII e XVIIII Esempi), con gli stessi dati.

Non è qui riprodotta alcuna figura: è sufficiente rifarsi alle ultime due.

Sono date le lunghezze della corda AC che è 8 e il raggio del cerchio, OB, che è 5.

Deve essere ricavata la lunghezza della freccia BD.

La soluzione contiene i seguenti passi:

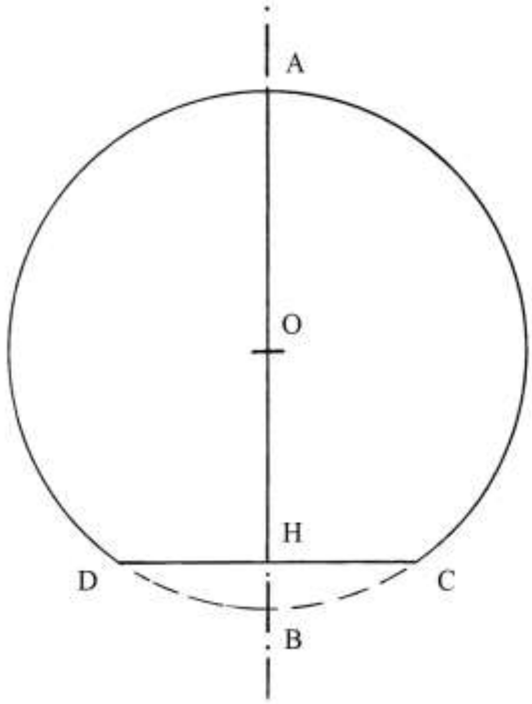
* moltiplicare per sé stessa la lunghezza del raggio del cerchio: 5 * 5 = 25;
* dividere per 2 la lunghezza della corda AC: 8/2 = 4;
* moltiplicare per sé stesso: 4 * 4 = 16;
* sottrarre 16 da 25: 25 – 16 = 9;
* estrarre la radice quadrata: √9 = 3;
* sottrarre dalla lunghezza del raggio: 5 – 3 = 2, lunghezza della freccia BD.

La soluzione è riassunta nella formula che segue:

$BD = OB - \sqrt{[OB^2 - (AC/2)^2]} = 5 - \sqrt{[5^2 - (8/2)^2]} = 5 - \sqrt{(25 - 16)} =$
$= 5 - \sqrt{9} = 5 - 3 = 2.$

<u>XXI Esempio – Lunghezza della corda di un segmento circolare</u>

Il problema richiama i precedenti e, in particolare, quello del XVII Esempio, con i suoi stessi dati.



È dato un segmento circolare che ha la freccia AH lunga 9 e diametro del cerchio, AB, lungo 10.

Deve essere ricavata la lunghezza della corda CD.

La soluzione contiene i seguenti passi:

* dividere per 2 la lunghezza del diametro del cerchio: $AB/2 = 10/2 = 5$;
* moltiplicare per sé stesso: $5 * 5 = 25$;
* sottrarre la lunghezza del raggio OA da quella della freccia: $AH - OA = 9 - 5 = 4$;
* moltiplicare per sé stesso: $4 * 4 = 16$;
* sottrarre da 25: $25 - 16 = 9$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{9} = 3$;
* moltiplicare per 2: $3 * 2 = 6$, lunghezza della corda DC.

La procedura è riassunta nella seguente formula:

$$DC = 2 * \sqrt{[(AB/2)^2 - (AH - OA)^2]}.$$

<u>XXII Esempio – Area di un quadrato inscritto in un cerchio</u>

Un cerchio di centro O ha diametro AB lungo 10. CD è il diametro verticale.

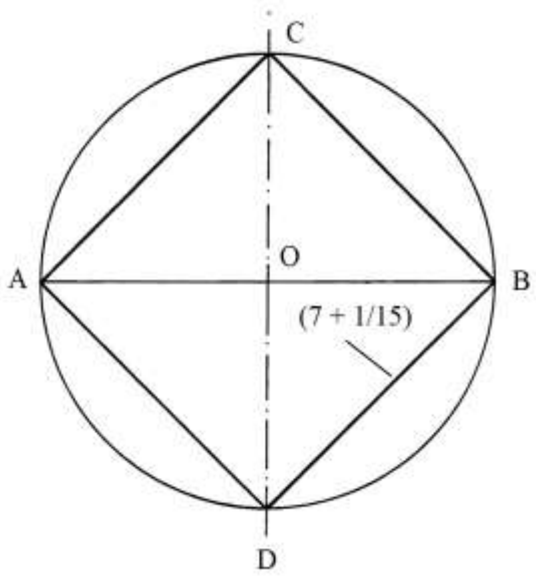
Nel cerchio è inscritto il quadrato ACBD.

È chiesta la lunghezza dei lati del quadrato.

La soluzione contiene i seguenti passi:

*	moltiplicare la lunghezza del diametro AB per sé stessa:	$10 * 10 = 100$;
*	dividere per 2:	$100/2 = 50$;
*	estrarre la radice quadrata:

$\sqrt{50} = (7 + 1/15)$ lunghezza dei lati del quadrato.



\- APPROFONDIMENTO -

AB e CD sono due diagonali del quadrato ACBD.
Una diagonale di un quadrato è lunga $\sqrt{2}$ volte la lunghezza di un lato:

$AB = AC * \sqrt{2}$.

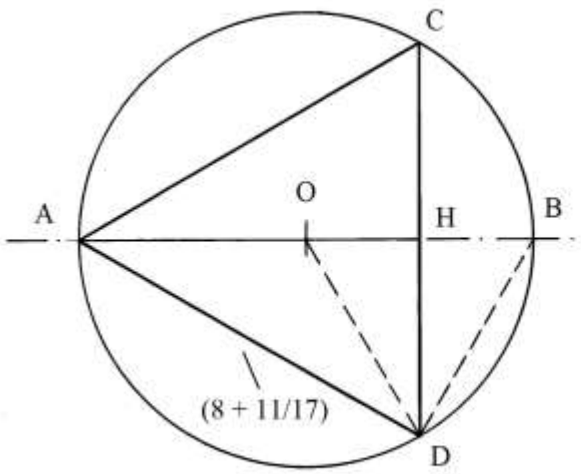
Ne consegue:

$AB^2 = 2 * AC^2$
$AB^2 = 2 * S_{ACBD}$ e
$S_{ACBD} = AB^2/2 = 10^2/2 = 100/2 = 50$ e
$AB = \sqrt{S_{ACBD}} = \sqrt{50} = (7 + 1/15)$.

\- -

XXIII Esempio – Triangolo equilatero inscritto in un cerchio

È dato un cerchio con centro in O e diametro AB lungo 10.



Vi è inscritto il triangolo equilatero ACD.
Deve essere ricavata la lunghezza dei lati del triangolo.
La soluzione contiene i seguenti passi:

* moltiplicare la lunghezza del diametro del cerchio per sé stessa: $10 * 10 = 100$;
* moltiplicare per sé stessa la lunghezza del raggio OB: $5 * 5 = 25$;
* sottrarre 25 da 100: $100 – 25 = 75$;
* estrarre la radice quadrata:
  $\sqrt{75} = (8 + 11/17)$, lunghezza dei lati del triangolo equilatero;
* dividere 75 per la lunghezza del diametro AB:
  $75/10 = 7,5$, lunghezza dell'altezza AH.

\- APPROFONDIMENTO -

BD è uno dei lati dell'esagono regolare inscritto nello stesso cerchio: esso è lungo quanto il raggio OB.

HD è metà del lato CD del triangolo e la sua lunghezza è data da:

$HD^2 = BD^2 – HB^2$

HB è lungo la metà del raggio OB e cioè: $5/2 = 2,5$.

Ne consegue:

$HD^2 = 5^2 – 2,5^2 = 25 – 6,25 = 18,75$ e

$HD = \sqrt{18,75}$.

Il lato CD è lungo:

$CD = 2 * HD = 2 * \sqrt{18,75} = \sqrt{(4 * 18,75)} = \sqrt{75} \approx (8 + 11/17)$.

L'altezza AH è un cateto del triangolo rettangolo AHD e la sua lunghezza è:

$AH^2 = AD^2 – HD^2$.

Ma AD è lungo quanto CD, quindi si ha:

$AH^2 = (\sqrt{75})^2 – (\sqrt{18,75})^2 = 75 – 18,75 = 56,25$ e

$AH = \sqrt{56,25} = 7,5$.

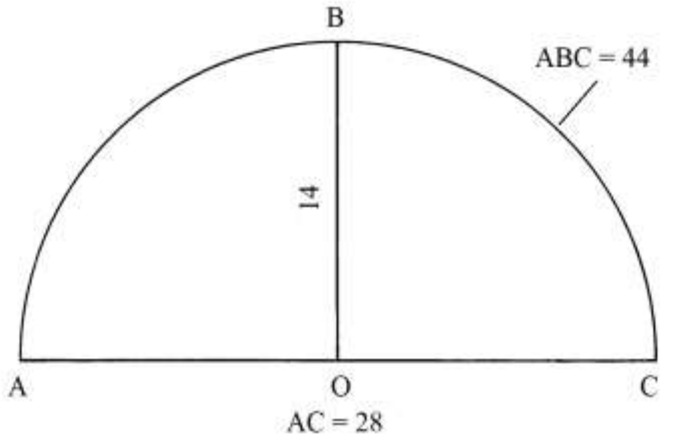
La lunghezza di AH può essere calcolata più semplicemente:

$AH = AB – HB = 10 – 5/2 = 10 – 2,5 = 7,5$.

\- -

XXIIII – Area di un semicerchio

Un semicerchio ha diametro AC lungo 28 e raggio OB 14.



L'arco ABC è lungo 44.

Il problema chiede l'area del semicerchio:

$S_{ABCO} = (ABC/2) * (AC/2) = (44/2) * (28/2) = 22 * 14 = 308.$

XXV Esempio – Area di un terreno ellittico

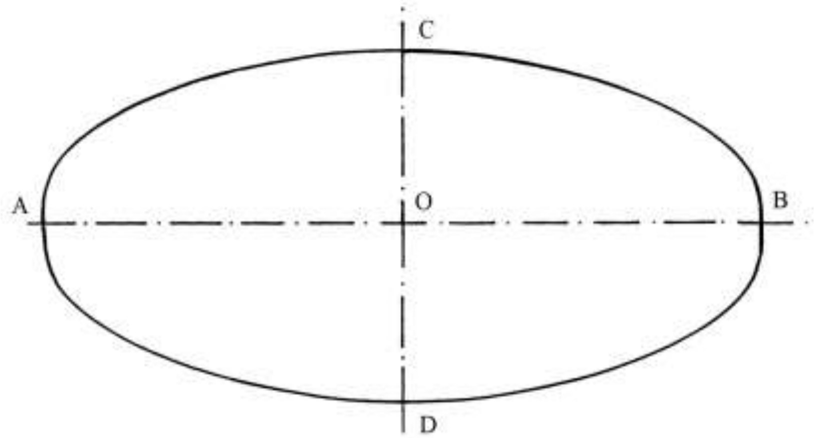
Un terreno ha apparentemente la forma di un'*ellisse*.

Nel trattato di Pellos, l'asse maggiore AB è verticale: qui è disegnato orizzontalmente.

L'asse maggiore AB è lungo 80 e l'asse minore, CD, è 40.

Il rapporto fra le lunghezze dei due assi è:

AB : CD = 80 : 40 = 2 : 1.



Il testo è un po' confuso ma sembra ragionevole affermare che Pellos abbia calcolato l'area moltiplicando le lunghezze dei due assi e poi per la costante 11/14:

$S_{ACBD} = AB * CD * 11/14 = 80 * 40 * 11/14 = (2514 + 2/7).$

L'ellisse è assimilata a un cerchio inscritto in quadrato: i lati del poligono e il diametro *d* del cerchio sono dati da:

$d^2 = AB * CD = 80 * 40 = 3200$ e

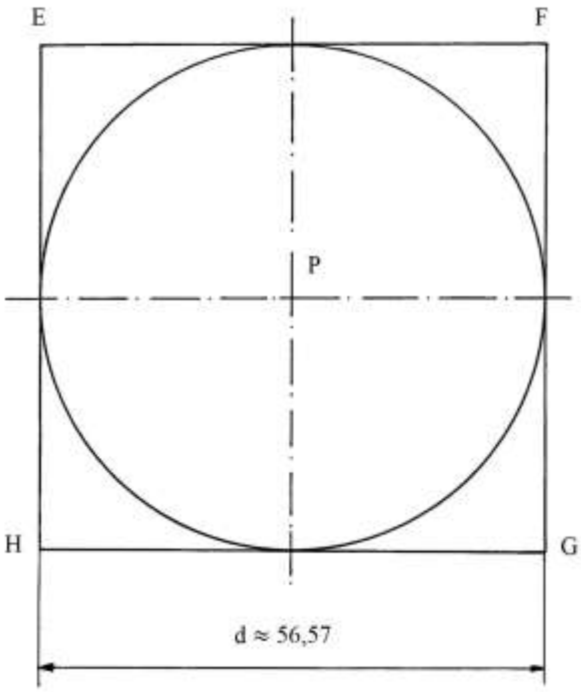
$d = \sqrt{3200} \approx 56{,}57.$

L’area del quadrato EFGH è:

$S_{EFGH} = GH^2 = 56{,}57^2 = 3200$.

L’area del cerchio di centro P e diametro GH è:

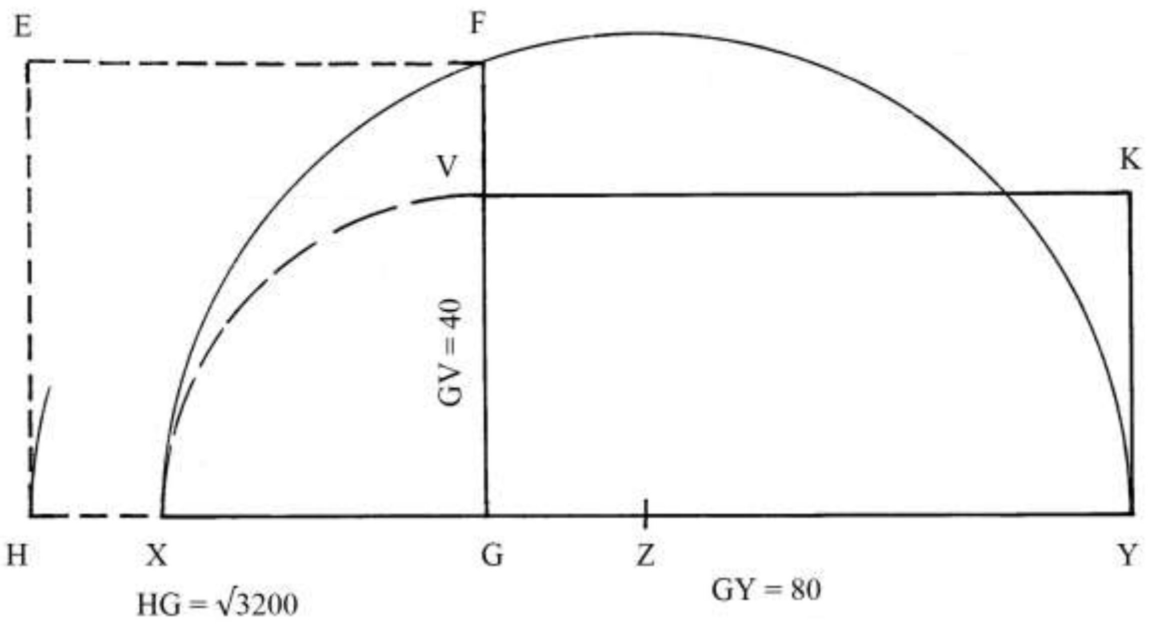
$S_{CERCHIO} = GH^2 * 11/14 = S_{EFGH} * 11/14 = 3200 * 11/14 = (2514 + 2/7)$.



- APPROFONDIMENTO -

La costruzione del quadrato EFGH può essere ottenuta, con maggiore precisione rispetto a una soluzione aritmetica, per via geometrica.

GYKV è un rettangolo lungo 80 e largo 40:



Prolungare verso sinistra il lato GY. Fare centro in G e con raggio GV tracciare l'arco VX. Z è il punto medio di XY: fare centro in Z e con raggio ZX = ZY disegnare una semicirconferenza da X a Y.

Il prolungamento verso l'alto del lato GV incontra in F la semicirconferenza. GF è un lato del quadrato EFGH che ha area 3200 e lati lunghi √3200.

Per il 2° teorema di Euclide sui triangoli rettangoli la lunghezza di GF è medio proporzionale fra quelle di GY e di GX:

GY : GF = GF : GX.

Ma GX = GV, per cui la proporzione può essere scritta come segue:

GY : GF = GF : GV   e

$GF^2 = GY * GV = 80 * 40 = 3200$ e

$GF = \sqrt{3200} \approx 56{,}57$.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

La formula per il calcolo dell'area di un ellisse è attribuita a Archimede:

$S_{\text{ELLISSE}} = \pi * (AB/2) * (CD/2) = 22/7 * 80/2 * 40/2 =$

$= 22/7 * 40 * 20 = (2514 + 2/7)$.

La procedura usata da Pellos equivale all'applicazione della formula di Archimede.

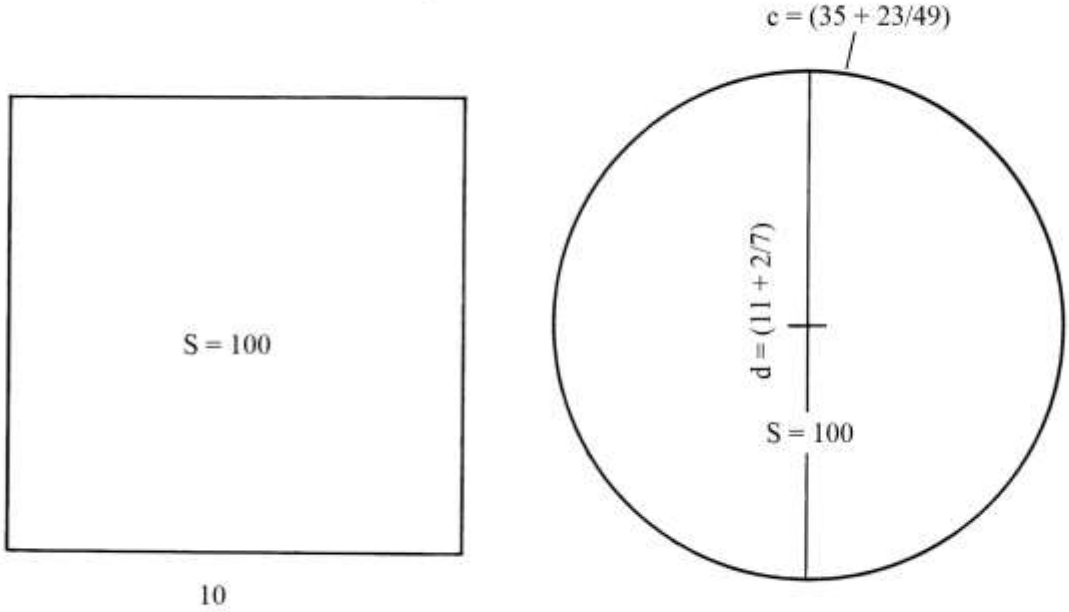
- -

<u>XXVI Esempio – Cerchio di area uguale a quella di un quadrato</u>

Un terreno ha la forma di un quadrato con lati lunghi 10.

Deve essere disegnato un cerchio che abbia la stessa superficie:

S_{QUADRATO} 10 * 10 = 100.



La procedura usata da Pellos è piuttosto lunga e si propone di ricavare un numero – qui indicato come "N" – che, tolti i suoi 3/14, abbia resto uguale a 100:

N – N * 3/14 = 11/14 * N = 100.

Ecco i passi:

* applicare il metodo della *falsa posizione,* attribuendo un valore qualsiasi – anche falso – a un'incognita da ricavare: Pellos sceglie 70;
* dividere 70 per 7: 70/7 = 10;
* dividere 10 per 2: 10/2 = 5;
* sommare i due ultimi quozienti: 10 + 5 = 15;
* sottrarre da 70: 70 – 15 = 55;
* risolvere la proporzione:
  55 : 70 = 100 : x [Pellos non usa il simbolo "x"] da cui:
  x = 70 * 100/55 = (127 + 3/11), che è il vero valore di "N";

Pellos propone anche una soluzione più rapida:

* calcolare i 3/11 di 100: 100 * 3/11 = (27 + 3/11);
* sommare con 100: (27 + 3/11) + 100 = (127 + 3/11);
* calcolare (1/7 + 1/14): 1/7 + 1/14 = 3/14;
* moltiplicare 3/14 per (127 + 3/11): 3/14 * (127 + 3/11) = (27 + 3/11);
* sottrarre da (127 + 3/11): (127 + 3/11) – (27 + 3/11) = 100, area del quadrato e del cerchio da tracciare;
* estrarre la radice quadrata di (127 + 3/11): √(127 + 3/11) = (11 + 2/7), diametro del cerchio di area 100;
* moltiplicare la lunghezza del diametro per (3 + 1/7): (11 + 2/7) * (3 + 1/7) = = (35 + 23/49), lunghezza della circonferenza.

Ovviamente, la soluzione è approssimata stante l'impossibilità di ricavare la quadratura del cerchio.

\- APPROFONDIMENTO -

La procedura impiegata da Pellos può essere accorciata e semplificata in maniera consistente.

L'area di un cerchio è data da:

$S_{\text{CERCHIO}} = 22/7 * (d/2)^2 = 100$,   con *d* diametro.

$100 = 22/7 * d^2/4$

$d^2 = 28 * 100/22 = 1400/11 = (127 + 3/11)$ e

$d = \sqrt{(127 + 3/11)} = (11 + 2/7)$.

La circonferenza *c* è lunga:

$c = 22/7 * d = 22/7 * (11 + 2/7) = 22/7 * 79/7 = 1738/49 = (35 + 23/49)$.

- -

<u>XXVII Esempio – Triangolo equilatero di area uguale a quella di un quadrato</u>

Un terreno ha la forma di un quadrato con lati lunghi 10, come nel caso del precedente Esempio.

Il quadrato deve essere trasformato in un triangolo equilatero con uguale area.

Il terreno ha area:

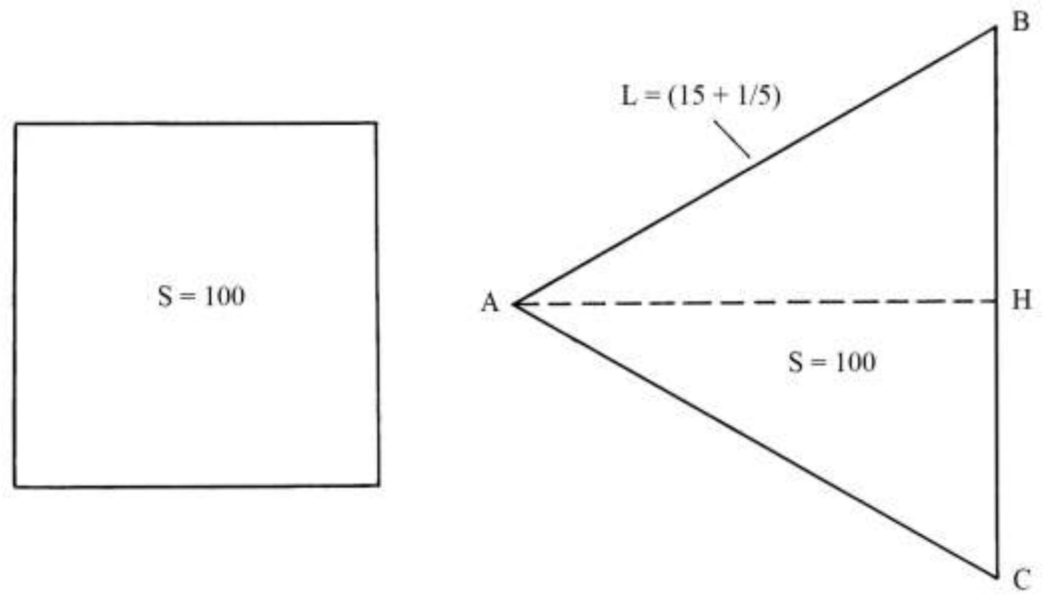
$S_{\text{QUADRATO}} = 10 * 10 = 100$.

La procedura usata da Pellos contiene i seguenti passi:

* moltiplicare per 2 l'area del quadrato: 100 * 2 = 200;
* calcolare 1/6 di 200: 200/6 = (33 + 1/3);
* calcolare 1/7 di 200: 200/7 = (28 + 4/7);

[*sommare i due ultimi quozienti: (33 + 1/3) + (28 + 4/7) = 61,90;*
dividere per 2: 61,90/2 = (30,95), valore che Pellos approssima a 31: questi due passi non sono presenti nel testo originale e sono qui aggiunti per giustificare l'esistenza del numero 31];

* sommare 31 con 200: 200 + 31 = 231 [poco meno, secondo Pellos: (231 – 1/21)];
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{231} = (15 + 1/5)$, lunghezza dei lati del triangolo.



- APPROFONDIMENTO -

L'area di un triangolo equilatero con lati lunghi L è data da:

$S = L * (\sqrt{3})/2 * L/2 = = L^2 * (\sqrt{3})/4$.

L'origine di questa formula richiede una spiegazione.

L'area di ABC è data da:

$S_{ABC} = AH * BC/2 = AH * L/2.$

AH è l'altezza relativa alla base BC e la sua lunghezza è:

$AH^2 = AB^2 – BH^2 = L^2 – (L/2)^2 = ¾ * L^2$ e

$AH = \sqrt{(¾ * L^2)} = L * (\sqrt{3})/2.$

Sostituendo, nella formula della superficie, si ha:

$S_{ABC} = [L * (\sqrt{3})/2] * L/2 = L^2 * (\sqrt{3})/4.$

Conoscendo l'area S – che è 100, come l'area del quadrato – è possibile ricavare la lunghezza L dei lati del triangolo con la formula inversa:

$L^2 = 4 * S_{ABC}/\sqrt{3}$ e

$L = \sqrt{(4 * S_{ABC}/\sqrt{3})} = 2 * \sqrt{(100/1,732)} = (15 + 1/5).$

Verifichiamo la correttezza del risultato:

$S_{ABC} = (15 +1/5)^2 * (\sqrt{3})/4 = 100.$

La complessa procedura impiegata da Pellos può così essere semplificata.

- -

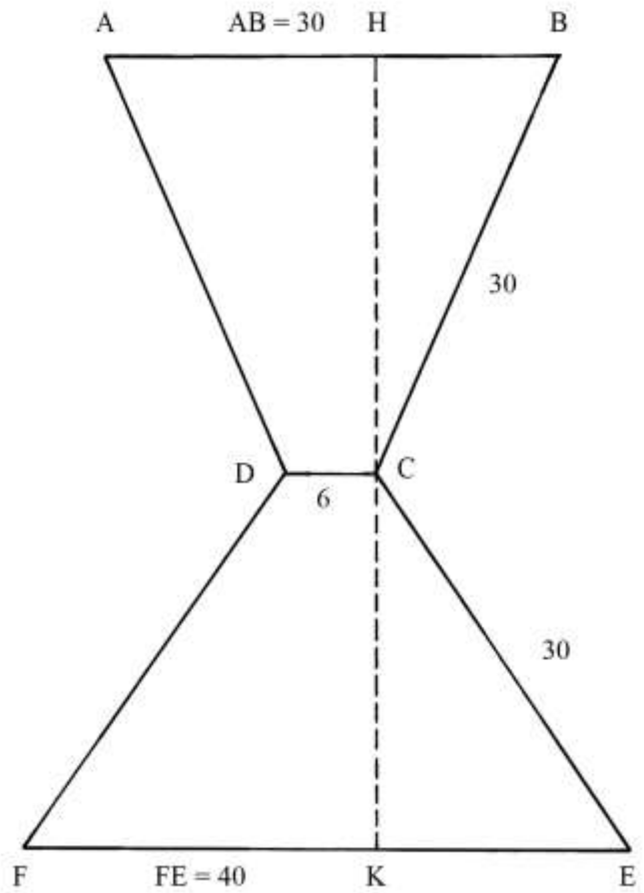
XXVIII Esempio – Area di un doppio trapezio

Un terreno ha la forma di due trapezi isosceli uniti per la loro comune base minore.

È chiesta l'area del terreno.

Per il punto C tracciare il segmento HCK: HC è un'altezza del trapezio ABCD e CK è un'altezza del trapezio DCEF:

Occorre ricavare le lunghezze di HC e di CK.



HBC è un triangolo rettangolo: HB ha lunghezza che è data da:

$HB = (AB – DC)/2 = (30 – 6)/2 = 12.$

La lunghezza di HC è:

$HC^2 = BC^2 – HB^2 = 30^2 – 12^2 = 900 – 144 = 756$ e

$HC = \sqrt{756} = (27 + 27/55).$

L'area del trapezio ABCD è:

$S_{ABCD} = [(AB + DC)/2] * HC = [(30 + 6)/2] * (27 + 27/55) = (494 + 46/55).$

CKE è un altro triangolo rettangolo e deve essere ricavata la lunghezza di CK. KE ha lunghezza data da:

$KE = (FE – DC)/2 = (40 – 6)/2 = 17.$

La lunghezza di CK è data da:

$CK^2 = CE^2 – KE^2 = 30^2 – 17^2 = 900 – 289 = 611$ e

$CK = \sqrt{611} = (24 + 35/49) = (24 + 5/7).$

L'area del trapezio DCEF è:

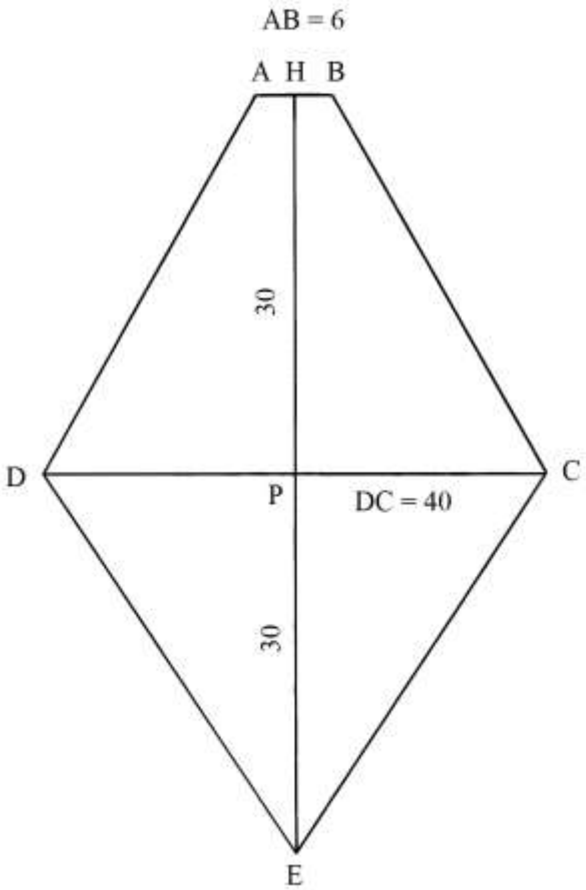
$S_{DCEF} = [(DC + FE)/2] * CK = [(6 + 40)/2] * (24 + 5/7) = 23 * (24 + 5/7) =$
$= (568 + 21/49) = (568 + 3/7).$

L'area S dell'intero terreno è:

$S = S_{ABCD} + S_{DCEF} = (494 + 46/55) + (568 + 3/7) = (1064 + 102/385).$

XXIX Esempio – Area di un terreno formato da un trapezio e da un triangolo isosceli

Il trapezio ABCD forma la parte superiore del terreno e il triangolo DCE ne è la parte inferiore: entrambi i poligoni sono isosceli e hanno in comune DC.



La base AB è lunga 6 e quella DC è 40.Il segmento HE è lunga 60 e dal testo si comprende che le lunghezze delle altezze HP e EP sono uguali:

$HP = EP = HE/2 = 60/2 = 30.$

L'area del trapezio ABCD è:

$S_{ABCD} = [(AB + DC)/2] * HP = [(6 + 40)/2] * 30 = 23 * 30 = 690.$

L'area del triangolo DCE è:

$S_{DCE} = DC * EP/2 = 40 * 30/2 = 1200/2 = 600.$

L'area S dell'intero terreno è data dalla somma delle aree dei due poligoni:

$S = S_{ABCD} + S_{DCE} = 690 + 600 = 1290.$

XXX Esempio – Pietre cubiche

Un blocco di pietra ha forma cubica con spigoli lunghi 10.

Il problema chiede quanti piccoli cubi con lati lunghi 2 possono essere ricavati dal blocco.

Un singolo cubetto ha volume:

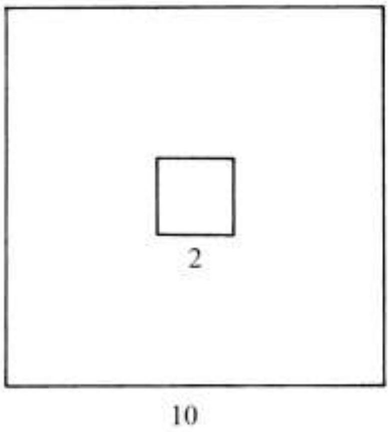
$V_{CUBETTO} = 2^3 = 8.$

L'intero blocco di pietra ha volume:

$V_{CUBO} = 10^3 = 1000.$

Il numero N di cubetti che possono essere ricavati è:

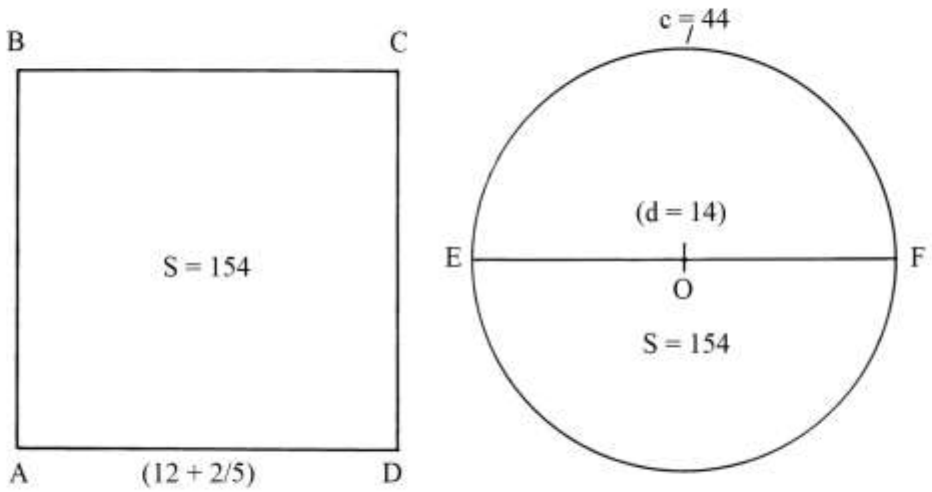
$N = V_{CUBO}/V_{CUBETTO} = 1000/8 = 125.$



<u>XXXI Esempio – Cerchio equivalente a un quadrato</u>

Un terreno triangolare o quadrato ha area 154. Nel caso del quadrato, i suoi lati hanno lunghezza L che è data da:

$L = \sqrt{154} = (12 + 2/5)$.



Sullo schema originale, Pellos scrive la lunghezza dei lati del quadrato uguale a (12 + 5/12): vediamo la differenza:

$\sqrt{154} = 12{,}4096 \approx 12{,}41 \approx (12 + 2/5)$.

Il dato di Pellos equivale a:

$(12 + 5/12) = 12{,}41(66)$.

L'ultimo numero è *periodico*.

Devono essere ricavate le lunghezze del diametro, del raggio e della circonferenza del cerchio di area 154.

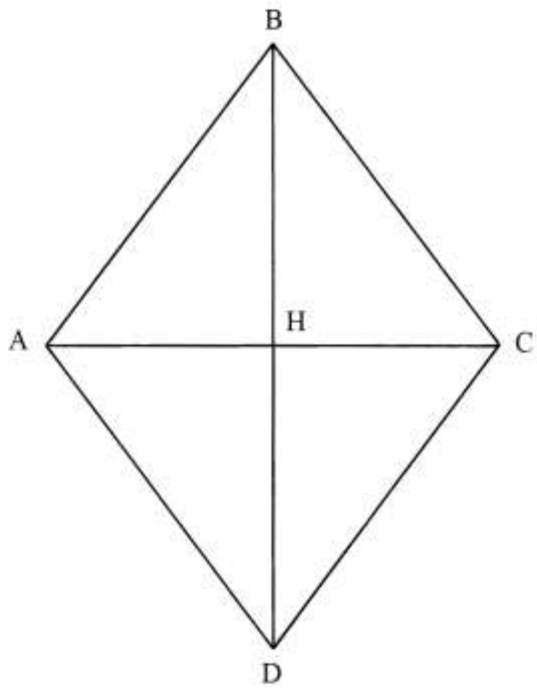
La procedura usata contiene i seguenti passi:

* calcolare i 3/11 di 154: $154 * 3/11 = 42$;
* [giunto a questo passaggio, Pellos utilizza di nuovo il metodo della *falsa posizione*];
* scegliere un numero, qui chiamato N, uguale a 70:

moltiplicare N per 3/14: 70 * 3/14 = 15;
* sottrarre da 70: 70 – 15 = 55;
* risolvere la proporzione: 55 : 70 = 154 : x [Pellos non usa il simbolo “x”]:
da cui: x = (70 * 154)/55 = 196;
* estrarre la radice quadrata: √196 = 14, lunghezza del diametro EF del cerchio;
* moltiplicare per (3 + 1/7): 14 * (3 + 1/7) = 44 lunghezza *c* della circonferenza del cerchio.

XXXII Esempio – Area di un rombo

Un terreno ha la forma di un rombo:



La diagonale maggiore BD è lunga 16 e quella minore AC è 12.

I lati del rombo sono lunghi 10.

Le diagonali scompongono il quadrilatero in quattro triangoli uguali: le lunghezze dei loro lati formano la terna derivata 6-8-10, che proviene dalla terna primitiva 3-4-5.

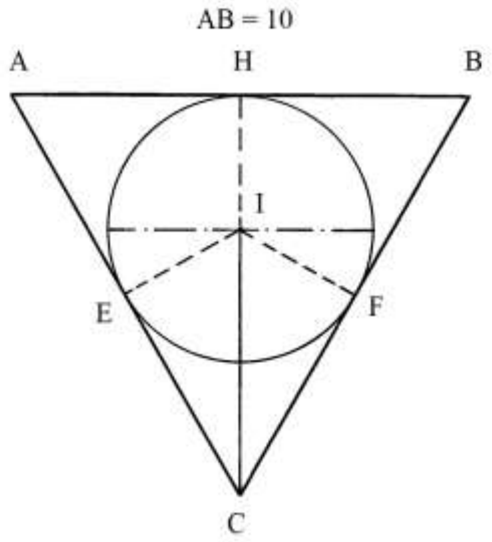
Deve essere calcolata l’area del terreno e Pellos suggerisce due metodi:

* con il primo, moltiplicare le lunghezze delle diagonali e dividere il risultato parziale per 2:
$S_{ABCD} = (AC * BD)/2 = (16 * 12)/2 = 96$;
* con il secondo, calcolare l’area di uno dei quattro triangoli e poi moltiplicare il risultato parziale per 4:
$S_{ABCD} = S_{ABH} * 4 = (AH * BH/2) * 4 = (6 * 8/2) * 4 = (48/2) * 4 = 24 * 4 = 96$.

XXXIII Esempio – Cerchio inscritto in un triangolo equilatero

Un triangolo equilatero ha lati lunghi 10.

Vi deve essere inscritto il più grande cerchio possibile.



La procedura usata per ricavare il diametro del cerchio contiene i seguenti passi:

* moltiplicare la lunghezza di un lato del triangolo per sé stessa: 10 * 10 = 100;
* dividere per 2 la lunghezza di un lato: 10/2 = 5;
* moltiplicare per sé stesso: 5 * 5 = 25;
* sottrarre 25 da 100: 100 – 25 = 75;
* moltiplicare per 4/9: 75 * 4/9 = (33 + 1/3);
* estrarre la radice quadrata: √(33 + 1/3) =(5 + 7/9) lunghezza del diametro del cerchio inscritto.

Pellos suggerisce una seconda soluzione, più rapida:

* moltiplicare la lunghezza di un lato per sé stessa: 10 * 10 = 100;
* dividere per 3: 100/3 = (33 + 1/3);
* estrarre la radice quadrata: √(33 + 1/3) = (5 + 7/9) lunghezza del diametro del cerchio inscritto.

- APPROFONDIMENTO -

Il centro del cerchio inscritto, I, è chiamato *incentro*: esso è determinato dall'intersezione delle bisettrici degli angoli interni del triangolo.

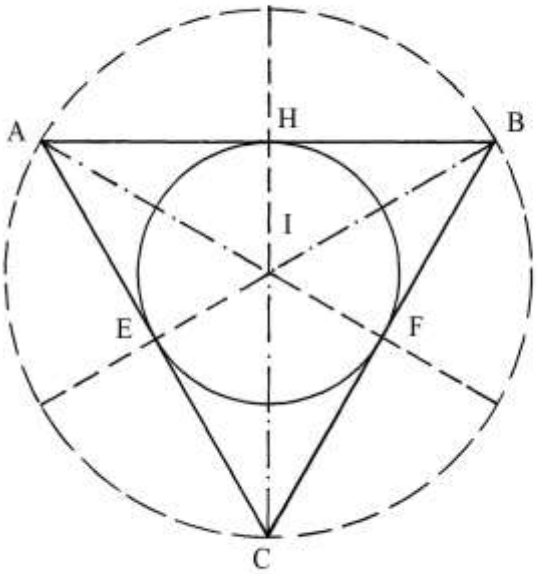
Nel caso del triangolo equilatero il punto I coincide anche con l'incrocio delle altezze, delle mediane e degli assi dei tre lati.

Il punto I divide l'altezza in due parti:

* HI = CH/3;
* IC = CH * 2/3.

HI è il raggio del cerchio inscritto.

IC è il raggio del cerchio circoscritto al triangolo, cerchio non disegnato nella precedente figura; lo schema che segue lo mostra:



L'altezza CH ha lunghezza che è data da:

$CH^2 = AC^2 – AH^2 = 10^2 – (10/2)^2 = 100 – 25 = 75$ e

$CH = \sqrt{75}$.

HI è lungo:

$HI = CH/3 = (\sqrt{75})/3 = \sqrt{(75/9)} = \sqrt{(25/3)}$.

Il diametro *d* del cerchio inscritto è:

$d = 2 * HI = 2 * \sqrt{(25/3)} = \sqrt{(4 * 25/3)} = \sqrt{(100/3)} = 5{,}77 \rightarrow (5 + 7/9)$.

Il raggio IC è lungo il doppio di HI:

$IC = 2 * HI = 2 * \sqrt{(25/3)} = (5 + 7/9)$.

Il raggio IC è lungo quanto il diametro del cerchio inscritto.

- -

<u>XXXIIII Esempio – Area di un terreno esagonale</u>

La descrizione del problema non è del tutto chiara.

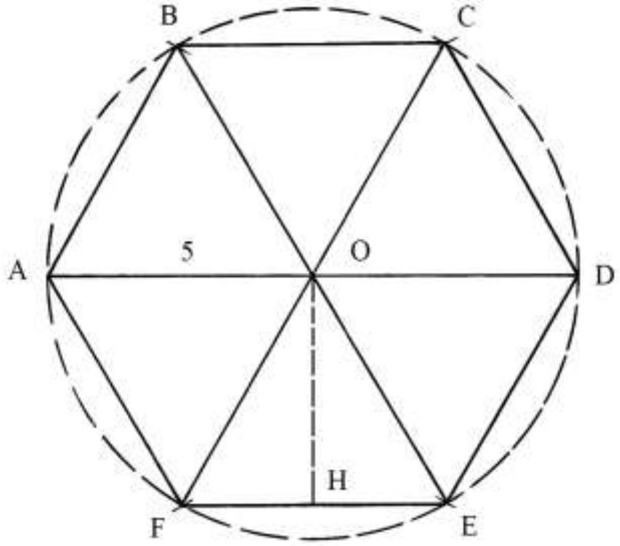
Un terreno pare avere i confini tracciati con il compasso e quindi richiamante la forma circolare.

Esso è diviso in 6 parti uguali che sono triangoli equilateri con lati lunghi 5.

Nel testo non è presente alcuno schema.

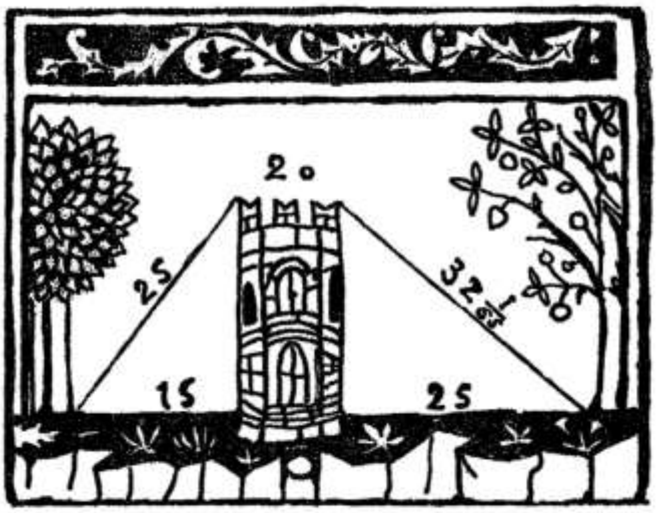
Deve essere calcolata l'area del terreno che è ricavata con la procedura che segue:

* moltiplicare la lunghezza di un lato per sé stessa: 5 * 5 = 25;
* dividere per 4: 25/4 = (6 + ¼);
* sottrarre da 25: 25 – (6 + ¼) = (18 + ¾);
* estrarre la radice quadrata: √(18 + ¾) = 4,33 lunghezza di OH, altezza del triangolo equilatero OFE;
* moltiplicare per metà della lunghezza di FE: 4,33 * 5/2 = 10,83, area del triangolo equilatero OFE;
* moltiplicare per 6: 10,83 * 6 ≈ 64,95 area del terreno esagonale ABCDEF.



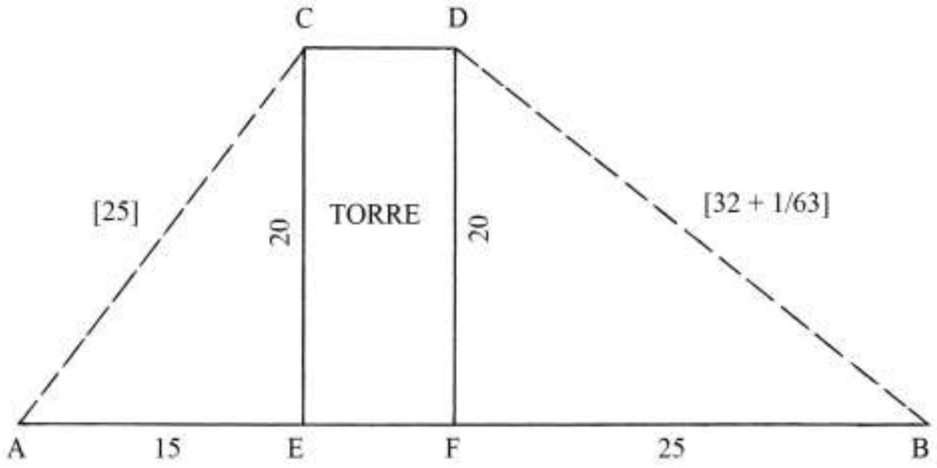
XXXV Esempio – Torre e alberi in una pianura

Una torre è alta 20: alla sua sinistra e alla sua destra si trova un albero.



Il problema chiede di calcolare le lunghezze di AC e di DB.

In A e in B sono piantati i due alberi:



AEC è un triangolo rettangolo e AC è la sua ipotenusa: la sua lunghezza è data da:

$AC^2 = AE^2 + CE^2 = 15^2 + 20^2 = 225 + 400 = 625$ e

$AC = \sqrt{625} = 25.$

Il triangolo AEC ha lati lunghi quanto la terna 15-20-25, derivata dalla primitiva 3-4-5.

Anche DFB è un triangolo rettangolo di cui è ignota la lunghezza dell'ipotenusa DB, lunghezza che è ottenuta da:

$DB^2 = DF^2 + FB^2 = 20^2 + 25^2 = 400 + 625 = 1025$ e

$DB = \sqrt{1025} = (32 + 1/63) \approx 32{,}015.$

Problemi simili erano comuni nei trattati d'abaco italiani: le ipotenuse AC e DB erano spesso costituite da funi fissate agli estremi.

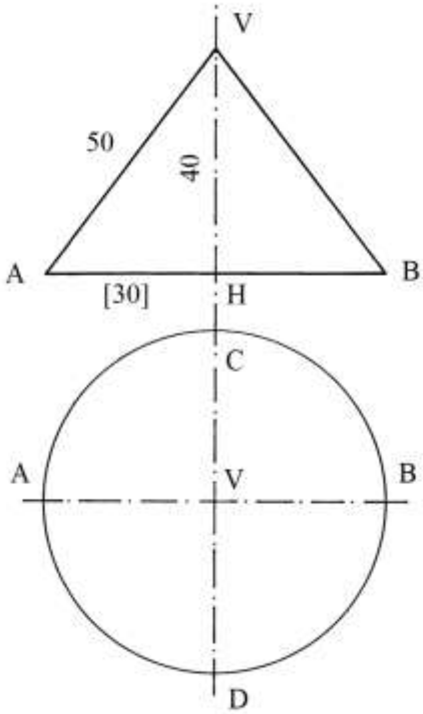
XXXVI Esempio – Superficie di un padiglione

Un padiglione è coperto da un panno ed è sostenuto da un palo alto 40.

La sua base è circolare.

La copertura ha la forma di un cono.

Con l’aiuto dello schema che segue procediamo con i calcoli: nella figura è contenuta una doppia proiezione ortogonale.



Il testo di Pellos fornisce la lunghezza dell’*apotema* (*a*):

VA = VB = 50.

L’altezza è 40.

VAH è un triangolo rettangolo: AH è il raggio del cerchio di base. La sua lunghezza è data da:

$AH^2 = AV^2 – VH^2 = 50^2 – 40^2 = 2500 – 1600 = 900$ e

AH = √900 = 30.

Il diametro *d* = AB è lungo 60 e la circonferenza *c* del cerchio di base è:

c = 22/7 * AB = 22/7 * 60 = (188 + 4/7).

L’area S del cerchio di base è data da:

S = (d/2) * (c/2) = (AB/2) * (c/2) = (60/2) * (188 + 4/7)/2 = 30 * (94 + 2/7) =
= (2828 + 4/7).

La superficie SP del padiglione è calcolata da Pellos moltiplicando l’altezza per metà della circonferenza di base:

SP = 40 * (188 + 4/7)/2 = 40 * (94 + 2/7) = (3771 + 3/7).

\- APPROFONDIMENTO -

La superficie laterale SL di un cono è data dalla formula:

SL = π * r * a dove *r* è il raggio della base (r = 30) e *a* è la lunghezza dell’apotema VA: VA = a = 50.

L’area è:

SL = 22/7 * 30 * 50 = (4714 + 2/7).

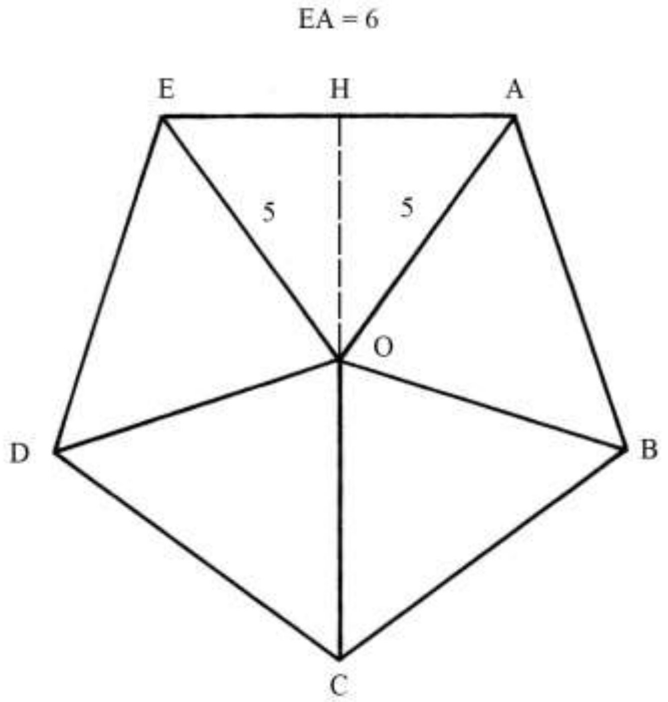
Pellos ha ottenuto un valore della superficie laterale che è errato per difetto.

Il problema del padiglione è stato affrontato da altri Autori toscani: Filippo Calandri, Giovanni Sfortunati e Lorenzo Forestani.

\- -

XXXVII Esempio – Area di un terreno pentagonale

Un terreno ha la forma di un pentagono regolare: i suoi lati sono lunghi 6.



Il poligono è scomposto in cinque triangoli isosceli di uguali dimensioni: i due lati dei triangoli sono lunghi 5.

Deve essere calcolata l'area dell'intero terreno.

Per ricavare l'area di uno dei cinque triangoli isosceli, ad esempio quello AOE, occorre tracciare l'altezza OH e calcolare la sua lunghezza. Essa è un prolungamento di CO: CH è un'altezza del pentagono.

La lunghezza di OH è data da:

$OH^2 = OA^2 – AH^2 = 5^2 – (6/2)^2 = 5^2 – 3^2 = 25 – 9 = 16$ e

$OH = \sqrt{16} = 4$.

Il triangolo rettangolo OAH ha lati con lunghezze che formano la terna primitiva 3-4-5.

L'area di AOE è:

$S_{AOE} = AE * OH/2 = 6 * 4/2 = 12$.

L'area S dell'intero terreno è:

$S = 5 * S_{AOE} = 12 * 5 = 60$.

- APPROFONDIMENTO -

Lo schema che segue amplia la precedente rappresentazione del terreno pentagonale.

I vertici del pentagono ABCDE giacciono su una circonferenza che ha raggio *r*.

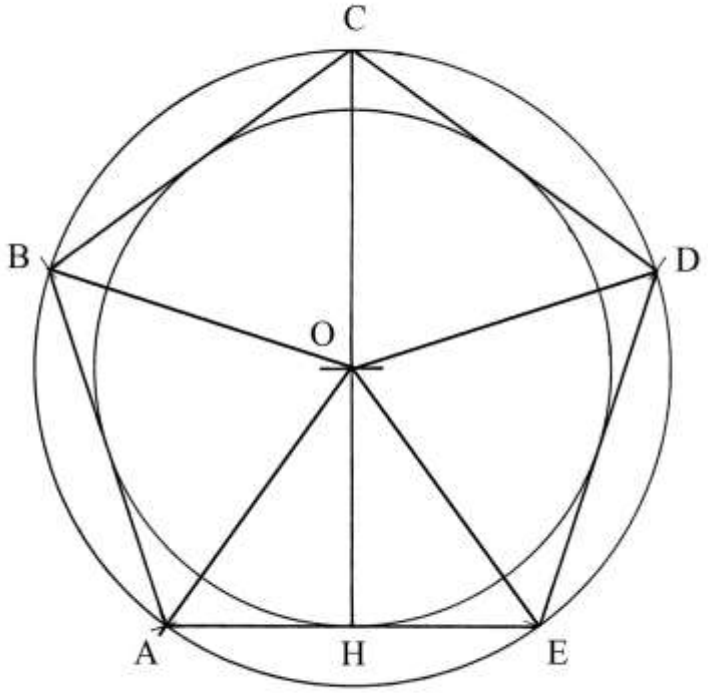
Se il raggio OA = r è lungo 5, i lati del pentagono hanno lunghezza esatta data dalla formula che segue:

$AE = OA * \sqrt{[(5 - \sqrt{5})/2]} \approx 5 * 1,175570504 \approx 5,8779$.

Pellos ha approssimato la lunghezza dei lati del pentagono a 6.

Nella nota (2) a p. 218 dell'edizione del "*Compendion de l'Abaco*" curata da Robert Lafont e da Guy Tournerie, citata in Bibliografia, viene fatto notare che la corretta lunghezza dei lati sarebbe (5 + 8/9) anziché 6:

(5 + 8/9) ≈ 5,(88), valore che si avvicina a quello calcolato sopra con la formula corretta.



L'altezza OH è l'*apotema* del pentagono: è il raggio della circonferenza di centro O, concentrica a quella di raggio OA, passante per i vertici del poligono.

La circonferenza interna è inscritta nel pentagono ed è tangente ai lati del poligono che tocca nei punti medi, come lo è H per il lato AE.

- -

XXXVIII Esempio – Due lance conficcate nel terreno

Due lance sono conficcate verticalmente nel terreno a distanza di 20.

Una lancia è alta 17 e l'altra è 10.

Il problema chiede di calcolare la distanza fra le due punte.

ABC è un triangolo rettangolo del quale BC è l'ipotenusa, della quale deve essere determinata la lunghezza.

Il cateto AB è lungo:

AB = BD – AD = BD – CE = 17 – 10 = 7.

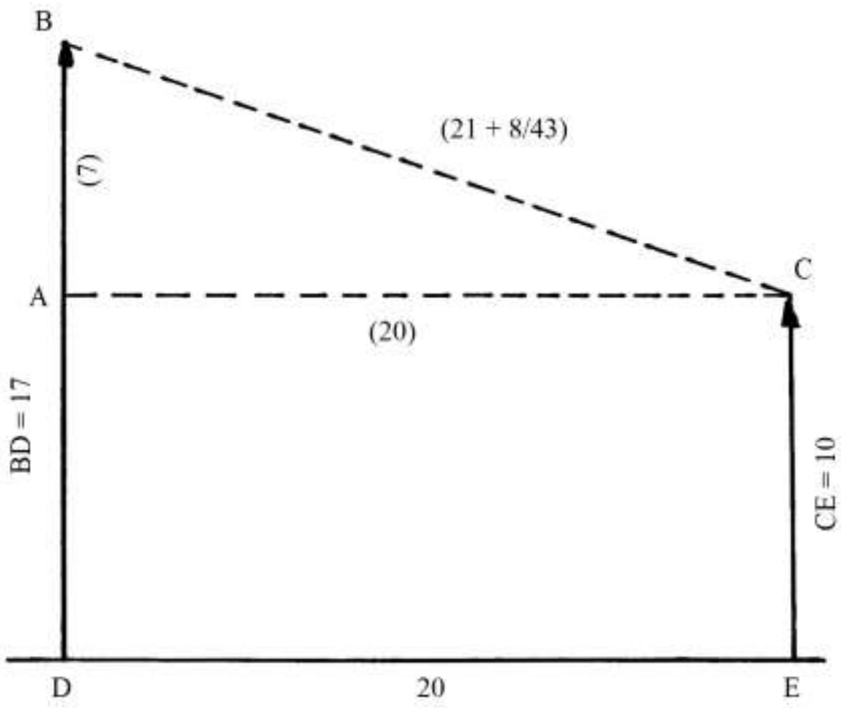
Il cateto maggiore AC è lungo quanto DE:

AC = DE = 20.

La lunghezza di BC è:

$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 7^2 + 20^2 = 49 + 400 = 449$ e

$BC = \sqrt{449} = (21 + 8/43)$.



<u>Bibliografia</u>

1. Calzolani Sergio, “formulaagrimensori.pdf”, 2017, pp. 75, in www.geometriapratica.it
2. Martini Angelo, “Manuale Di Metrologia: Ossia, Misure, Pesi e Monete in Uso Attualmente E Anticamente Presso Tutti I Popoli”, Torino, Ermanno Loescher, 1883, pp. VIII+904.
3. Pellos Francés, “Compendion de l’Abaco”, a cura di Robert Lafont e di Guy Tournerie, Montpellier, Editions de la Revue des Langues Romanes, MCMLXVII (1967), pp. 252 + II.
4. Zupko Ronald Edward, “Italian Weights and measures from the Middle Ages to the Nineteenth Century”, Philadelphia, American Philosophical Society, 1981, pp. lxxxiv+339.