© Sergio Calzolani, Firenze, 2022
sergio(punto)calzolani(at)outlook(punto)it

Parole chiave: problemi sulle torri, problemi sugli alberi, scale poggiate alle torri, alberi e fiumi, sfere di cera, triangoli, problemi sui cerchi, granai cubici, problemi sui quadrati e sui rettangoli, pozzi, trapezi, divisione di una ruota in tre parti di uguale superficie

LO ZIBALDONE RICCARDIANO 2161

Il Codice è conservato nella Biblioteca Riccardiana di Firenze con il numero 2161.

È stato trascritto e pubblicato da Andrea Bocchi (Ricercatore di Storia della lingua italiana nell'Università degli Studi di Udine), nel libro citato in bibliografia.

Il manoscritto è stato compilato da un Anonimo, probabilmente in area veneziana entro il primo terzo del XIV secolo.

In questo articolo sono considerate *soltanto* le "Ragioni" di natura geometrica.

NOTE

* I disegni sono stati rifatti cercando di rispettare i rapporti di scala. Ai vertici delle figure sono state scritte le lettere *maiuscole* (assenti nel manoscritto originale), seguendo una disposizione quasi sempre *oraria*.
* Sono stati aggiunti dei grafici anche nei problemi che ne erano privi.
* I problemi sono definiti dall'Anonimo autore "Ragioni": "Fame questa raxon…". In questo articolo è stato quasi sempre usato il termine equivalente "problema".
* La numerazione qui usata segue quella delle pagine del manoscritto: numero pagina/r(ecto) o v(erso) e una lettera maiuscola progressiva: A, B, C, D…
* I problemi sono risolti pure usando metodi moderni, cercando di non discostarsi troppo dal testo originale.
* Per semplicità, il simbolo della divisione è stato reso con quello della barra: "/".
* In alcune Ragioni le lunghezze non sono espresse in alcuna unità di misura: qui, talvolta si è aggiunta la generica dizione "unità".
* Alcune delle Ragioni contenute nello Zibaldone Riccardiano sono contenute in un altro manoscritto, lo "Zibaldone da Canal", anch'esso di area veneziana e che, grazie all'analisi delle filigrane della carta, è attribuito agli ultimi decenni del Trecento. Il manoscritto è attualmente conservato presso l'Università di Yale (a New Haven nel Connecticut, USA). Altri problemi sono presenti nei testi degli abacisti toscani e umbri (come è il caso de "*Lo livero de l'abbecho*").

PREMESSA METROLOGICA

Uno degli studi più attendibili sulle unità di misura usate a Venezia dal Medioevo in poi è quello di monsignor Vittorio Piva, citato in bibliografia.

Le equivalenze con le unità del sistema metrico decimale devono essere prese con una certa approssimazione stante il tempo, espresso in secoli, trascorso dalla prima introduzione delle unità medievali. Alcune ricalcano le più antiche unità di misura romane.

Dallo studio di Vittorio Piva sono riportate le unità di seguito descritte.

Unità di misura della lunghezza

Il sistema era basato sul piede, più lungo di quello romano (pari a 0,2957 m):

* 1 piede [da fabbrica e da terra]= 12 once= 0,347735 m.

I sottomultipli del piede:

* 1 oncia = 0,028978 m = 12 linee;
* 1 linea = 10 decimi = 2,415 mm;
* 1 decimo = 0,2415 mm.

I multipli del piede:

* 1 pertica piccola o *ghebbo* = (4 + ½) piedi = 1,564807 m;
* 1 passo = 5 piedi = 1,738674 m;
* 1 pertica grande o *cavezzo* = 6 piedi = 2,086409 m;
* 1 miglio veneto = 1000 passi = 1738,674 m.

Le *braccia*:

* 1 braccio da lana = 4 quarte da lana = 0,683366 m;
* 1 quarta da lana = 4 quartini da lana = 0,170841 m;
* 1 quartino da lana = 0,042710 m.

* 1 braccio da seta = 4 quarte da seta = 0,638721 m;
* 1 quarta da seta = 4 quartini da seta = 0,159680 m;
* 1 quartino da seta = 0,03992 m.

Unità di misura di superficie

* 1 campo = 4 quarti = 3656,605680 m^2;
* 1 quarto = 210 tavole = 914,151420 m^2;
* tavola o cavezzo quadrato = 36 $piedi^2$ = 4,353102 m^2;
* 1 piede quadrato = 0,120919 m^2;
* 1000 passi quadrati = 3022,988060 m^2;
* 1000 ghebbi quadrati = 2448,60975 m^2;
* 1 passo quadrato = 25 piedi quadrati = 3,022988 m^2;
* 1 ghebbo quadrato = (20 + ¼) piedi quadrati = 2,44861 m^2.

Unità di misura di volume

* 1 passo cubico = 125 piedi cubici = 5,256 m^3;
* 1 piede cubico = 0,042048 m^3.

Unità di misura dei pesi

Erano usati due sistemi di unità di misura:

* *peso grosso* per i metalli, la lana, il cotone, l'uva passa e l'olio;
* *peso sottile* per i medicinali, il sapone, il caffè, lo zucchero, il riso.

Fra il peso grosso e quello sottile esisteva il rapporto di 12 a 19: 12 libbre grosse valevano 19 libbre sottili.

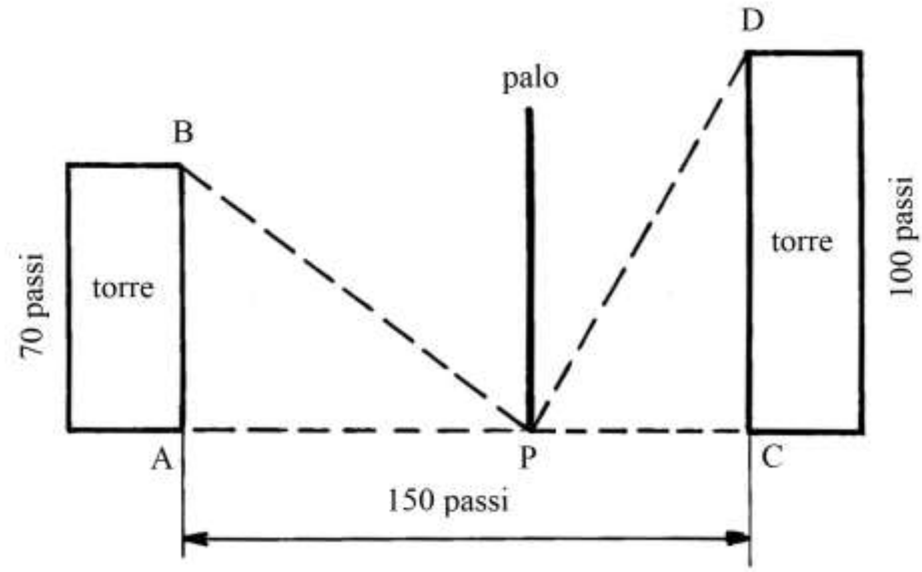
* 1 libbra grossa = 12 once grosse = 0,476999 kg;
* 1 oncia grossa = 0,03975 kg;
* 1 libbra sottile = 12 once sottili = 0,301230 kg;
* 1 oncia sottile = 0,025102 kg.

[49 r A] Due torri

Due torri sono collocate in un prato e sono distanziate di 150 passi.

Una torre è alta 70 passi e l'altra 100.

Un palo deve essere conficcato nel terreno a uguale distanza dalle cime delle due torri: il problema chiede di calcolare la distanza del suo piede dalle basi delle due torri.



ABP e PDC sono due triangoli rettangoli che hanno le lunghezze delle ipotenuse uguali; la soluzione qui adottata richiede l'applicazione del c.d. teorema di Pitagora ai due triangoli rettangoli.

Si ha:

$BP = PD$

Fissiamo: $AP = x$ e $PC = AC – AP = 150 – x$.

$BP^2 = AB^2 + AP^2 = 70^2 + x^2$.

$PD^2 = CD^2 + PC^2 = 100^2 + (150 – x)^2$.

Le due ultime espressioni sono equivalenti:

$70^2 + x^2 = 100^2 + (150 – x)^2$

$400 + x^2 = 10000 + 22500 – 300*x + x^2$

$22500 + 10000 – 4900 = 300*x$

$300*x = 27600$ e $x = 92$ passi.

Risulta: $PC = 150 – 92 = 58$ passi.

[49 r B] Taglio di un albero

Un albero è alto 20 passi e ogni giorno viene tagliato 1 passo. Il problema chiede il numero dei giorni occorrenti per farlo cadere a terra.

Il problema è presente nel *Livero de l'abbecho*, di un anonimo Maestro Umbro, antecedente a questo Zibaldone, perché attribuito al 1288-1290: sono evidenti gli stretti contatti fra i mercanti italiani, autori dei due manoscritti.

La soluzione contiene i seguenti passi:

* moltiplicare l'altezza per 3: $20 * 3 = 60$;
* dividere 20 per 7: $20/7 = (2 + 6/7)$;
* sommare a 20: $20 + (2 + 6/7) = (22 + 6/7)$.

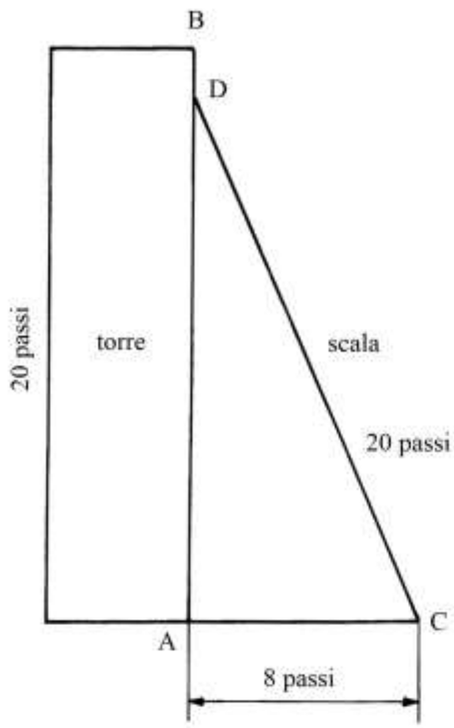
Non sono presenti ulteriori passi: l'Autore fornisce il risultato di (31 + 1/7) giorni, perfettamente uguale alla soluzione contenuta nel *Livero de l'abbecho*.

L'unica differenza fra i due testi è data dalle unità di misura: il *Livero de l'abbecho* misura in *braccia* mente lo Zibaldone Riccardiano usa il *passo*.

[49 v A] <u>Scala appoggiata a una torre</u>

Una torre è alta 20 passi e vi è appoggiata una scala che è anch'essa 20 passi.

Il piede della scala viene allontanato di 8 passi dalla base della torre. Il problema chiede di quanto si è abbassata la cima della scala.



ACD è un triangolo rettangolo; la lunghezza del cateto AD è:

$AD^2 = CD^2 - AC^2 = 20^2 - 8^2 = 400 - 64 = 336$ e

$AD = \sqrt{336} \approx (18 + 1/3)$ passi.

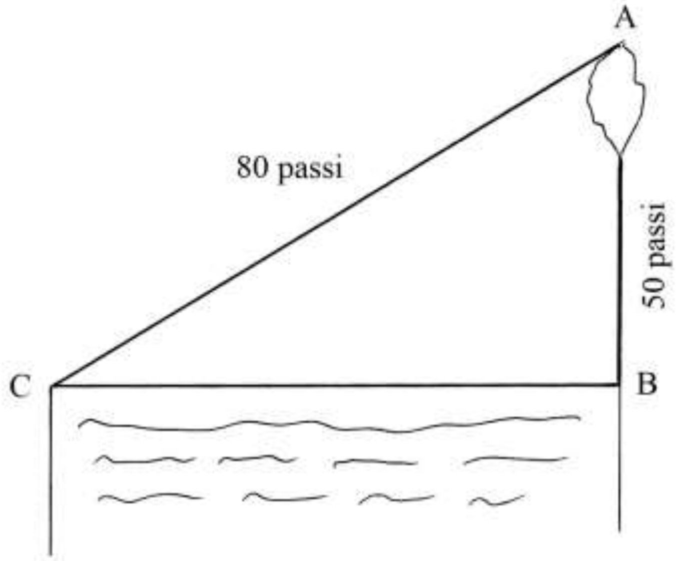
La lunghezza di BD è:

$BD = AB - AD = 20 - (18 + 1/3) = (1 + 2/3)$ passi.

[49 v B] <u>Albero e fiume</u>

Un albero è alto 50 passi ed è piantato sulla riva di un fiume. Dalla cima dell'albero alla riva opposta sono misurati 80 passi.

Il problema chiede la larghezza del fiume.



ABC è un triangolo rettangolo. La larghezza del fiume, BC, è data da:

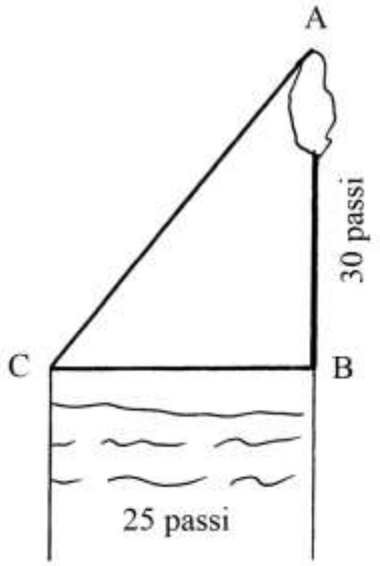
$BC^2 = AC^2 - AB^2 = 80^2 - 50^2 = 6400 - 2500 = 3900$ e

$BC = \sqrt{3900} \approx (62 + 9/20)$ passi. Il testo dà $(62 + 28/31)$ passi.

[49 v C] <u>Albero lungo un fiume</u>

Un albero è situato sulla riva di un fiume ed è alto 30 passi. Il fiume è largo 25 passi: inizialmente, il testo indica la larghezza uguale a *35* passi, ma i successivi calcoli sono basati sul valore 25.

Il problema chiede la distanza fra la cima dell'albero e la riva opposta del fiume e cioè la lunghezza dell'ipotenusa AC del triangolo rettangolo ABC.



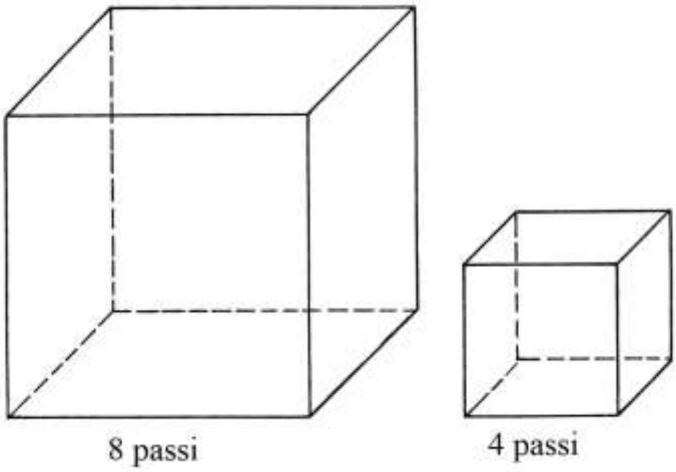
Anche in questo caso, la soluzione richiede l'applicazione del teorema di Pitagora:

$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 30^2 + 25 = 900 + 625 = 1525$ e

$AC = \sqrt{1525} \approx (39 + 2/39)$ passi.

[50 r] Due edifici per i cereali

Due solidi hanno forma cubica: il primo ha lato lungo 8 passi e il secondo 4.



Il secondo solido è riempito di frumento.

Il problema chiede il numero N dei volumi contenuti nel secondo cubo che occorre per riempire il primo.

I due volumi sono:

$V_{PICCOLO} = 4^3 = 64$ passi^3;

$V_{GRANDE} = 8^3 = 512$ passi^3.

Il numero N cercato è:

$N = V_{GRANDE}/V_{PICCOLO} = 512/64 = 8$.

[50 r] Due pani di cera

Un pane di cera ha forma sferica, ha diametro 3 palmi e pesa 5 libbre.

Un secondo pane ha diametro 5 palmi: il problema chiede il suo peso.

Il peso (o massa) è proporzionale al volume e al cubo del diametro.

Il volume della prima sfera è:

$V_{PRIMA} = 3^3 = 27$ palmi^3.

Il volume della seconda sfera è:

$V_{SECONDA} = 5^3 = 125$ palmi^3.

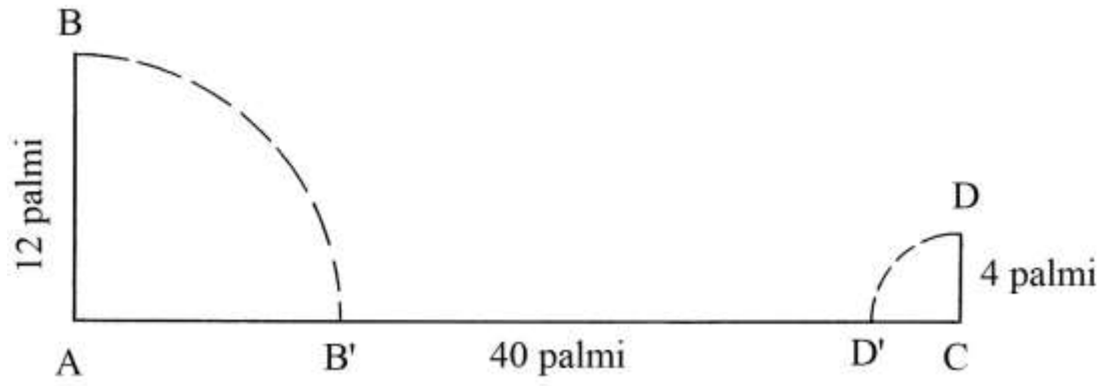
La soluzione è data da una proporzione:

$V_{PRIMA} : V_{SECONDA} = Peso_{PRIMA} : Peso_{SECONDA}$

$P_{SECONDA} = (V_{SECONDA} * Peso_{PRIMA})/V_{PRIMA} = (125 * 5)/27 = (23 + 4/7)$ libbre [l’Autore indica quale unità di misura l’*oncia* che nel sistema metrico veneziano era 1/12 della libbra].

[50 v] Un terreno triangolare

Un terreno possiede tre lati (“*facce*”) lunghe 40, 12 e 4 palmi: non può avere forma di un triangolo perché la regola fondamentale per l’esistenza di questo poligono è che la somma delle lunghezze di due lati deve essere maggiore della lunghezza del terzo.



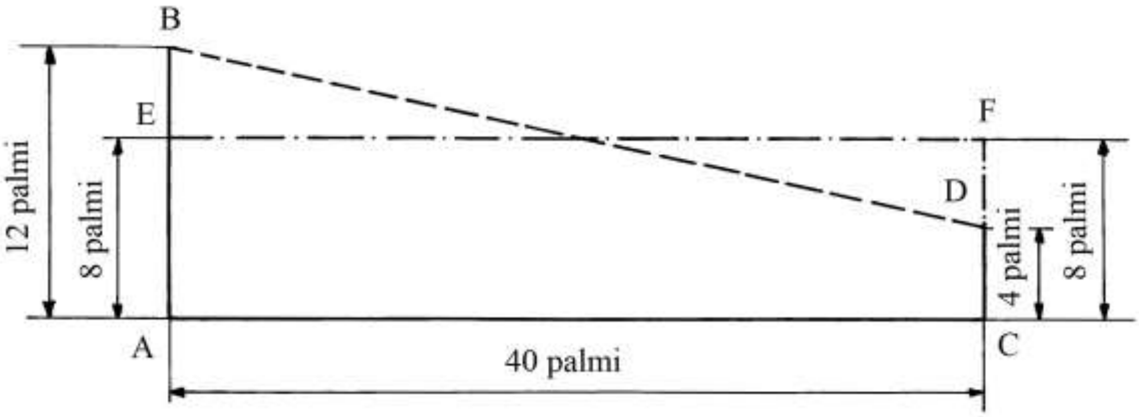
La soluzione che l'Autore presenta è la seguente:

* sommare le lunghezze dei due lati più corti: $12 + 4 = 16$;
* dividere per 2: $16/2 = 8$;
* moltiplicare per 40: $8 * 40 = 320$ [palmi^2?].

Infine, l'Autore conferma che la figura non ha la forma di uno *scudo* e cioè non è un triangolo.

\- APPROFONDIMENTO -

Proponiamo un'ipotesi. I tre lati formano due angoli retti nei punti A e C:



Il segmento BD chiude l'area fino a formare il trapezio rettangolo ABDC.

La soluzione proposta dall'Autore sembra suggerire la tracciatura del segmento EF che collega due lati verticali, AE e CF, di uguale lunghezza, pari a 8 palmi.

L'area dell'ipotetico trapezio ABDC è:

$$A_{ABDC} = AC * (AB + DC)/2 = 40 * (12 + 4)/2 = 40 * 16/2 = 320 \text{ palmi}^2.$$

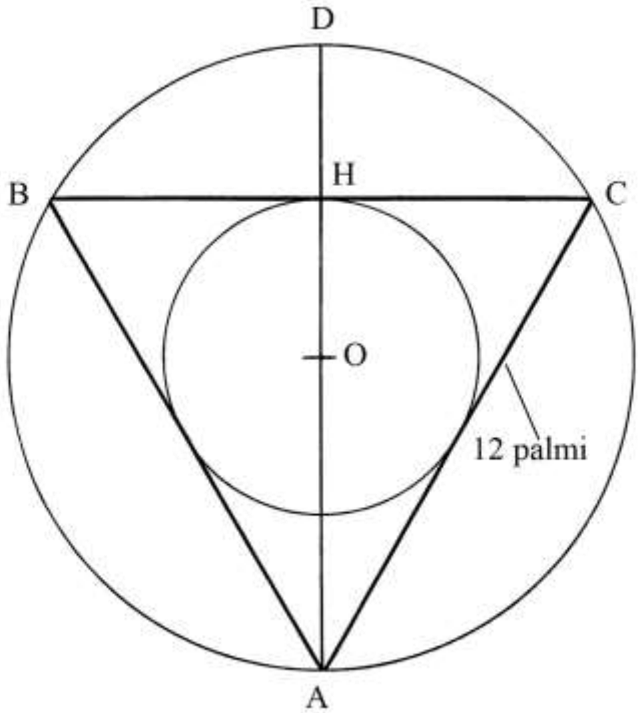
L'area del rettangolo AEFC è:

$$A_{AEFC} = AC * AE = 40 * 8 = 320 \text{ palmi}^2.$$

\- -

[50 v] <u>Triangolo equilatero</u>

Un terreno ha la forma di uno *scudo* con tre "facce" lunghe 12 [palmi]: il triangolo è equilatero.



Il testo presenta difficoltà interpretative: pare che l'Autore intenda calcolare l'altezza AH e le lunghezze delle circonferenze inscritta e circoscritta al triangolo.

Non fornisce alcuna descrizione dei calcoli occorrenti e si limita a offrire solo un risultato.

L'altezza è legata alla lunghezza del lato da una relazione:

$AH = (\sqrt{3})/2 * BC = \sqrt{3} * 12/2 \approx (10 + 2/5)$ palmi.

Il raggio del cerchio inscritto, OH = r, è lungo 1/3 dell'altezza AH:

$OH = AH/3 = (10 + 2/5)/3 = (3 + 7/15) \approx 3{,}464$ palmi.

La circonferenza interna è lunga:

$22/7 * OH * 2 = (44/7) * (3 + 7/15) = (21 + 83/105)$ palmi.

Il raggio del cerchio circoscritto, OA = R, è lungo:

$OA = 2/3 * AH = (6 + 14/15)$ palmi.

La circonferenza esterna è lunga:

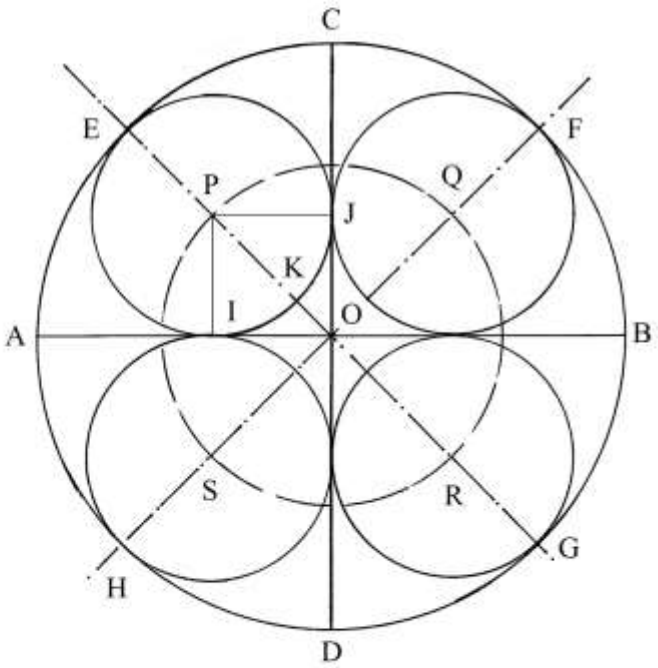
$22/7 * OA * 2 = (44/7) * (6 + 14/15) = (43 + 61/105)$ palmi.

[51 r] <u>Cerchi inscritti</u>

Il problema è piuttosto oscuro. Un cerchio ha diametro AB lungo 14 palmi.

Con i diametri perpendicolari AB e CD esso è diviso in quattro identici settori circolari. EG e FH sono le bisettrici dei quattro angoli retti.

Nel cerchio sono inscritti quattro più piccoli cerchi di uguali dimensioni, fra loro tangenti e tangenti pure al cerchio esterno:



P, Q, R e S sono i centri dei quattro cerchi interni: essi sono collocati sulle bisettrici EG e FH, a uguale distanza dal centro della figura, O.

Secondo l'Autore il diametro dei quattro cerchi sarebbe lungo 6 palmi.

Verifichiamo questa affermazione.

Per i quattro centri passa una circonferenza di centro O e raggio OP = OQ = OR = OS.

OIPJ è un quadrato i cui lati sono lunghi quanto il raggio PI: questa lunghezza è l'incognita "x".

EO è lungo 7 [palmi] ed è dato da:

$EO = EP + PO \quad \rightarrow \quad 7 = EP + PO = x + PO$

Ma PO è la diagonale OIPJ i cui lati sono lunghi quanto il raggio PK = PI = x. Quindi si ha:

$PO = \sqrt{2} * PK = \sqrt{2} * x$.

Sostituendo questo valore nella penultima espressione si ha:

$7 = x + \sqrt{2} * x = x * (\sqrt{2} + 1)$ da cui:

$x = 7/(\sqrt{2} + 1) \approx 2,89949 \rightarrow 2,9$ palmi.

La lunghezza dei raggi dei quattro cerchi inscritti non è esattamente 3 palmi.

[51 v] Un albero

Un albero ha altezza sconosciuta. Per 1/3 più ¼ più 1/5 del totale è lungo 70 passi.

L'Autore fissa in 60 il più piccolo numero che ha come divisori i denominatori delle tre frazioni:

$3 * 4 * 5 = 60$.

I passi successivi della soluzione sono i seguenti:

* calcolare: $(1/3 + ¼ + 1/5) * 60 = [(20 + 15 + 12)/60] * 60 = 47$;
* sommare 60 e 47: $60 + 47 = 107$;
* risolvere la proporzione $107 : 60 = 70 : x$ da cui
  $x = (60 * 70)/107 = (39 + 27/107)$ palmi, lunghezza dell'albero.

- APPROFONDIMENTO -

La soluzione è poco chiara: se (1/3 + ¼ + 1/5) dell'altezza dell'albero valgono 70 passi, la sua lunghezza totale può essere ricavata come segue:

(1/3 + ¼ + 1/5) = (20 + 15 + 12)/60 = 47/60.

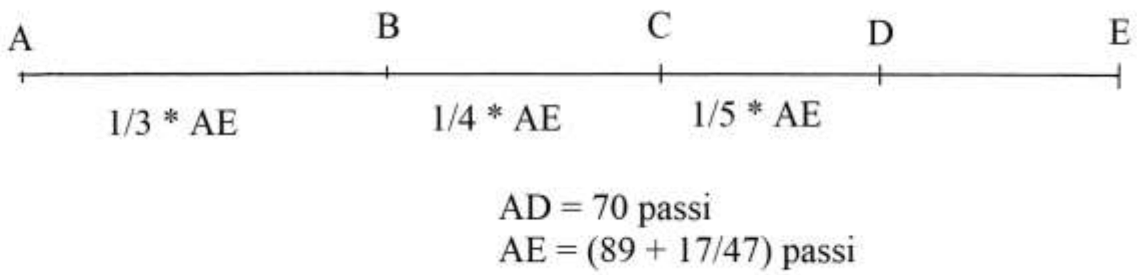
Se i 47/60 della lunghezza corrispondo a 70 passi, 60/60 valgono:

47/60 : 70 = 60/60 : x

47 : 70 = 60 : x dove "x" è la lunghezza totale.

x = (70 * 60)/47 = 4200/47 = (89 + 17/47) passi.

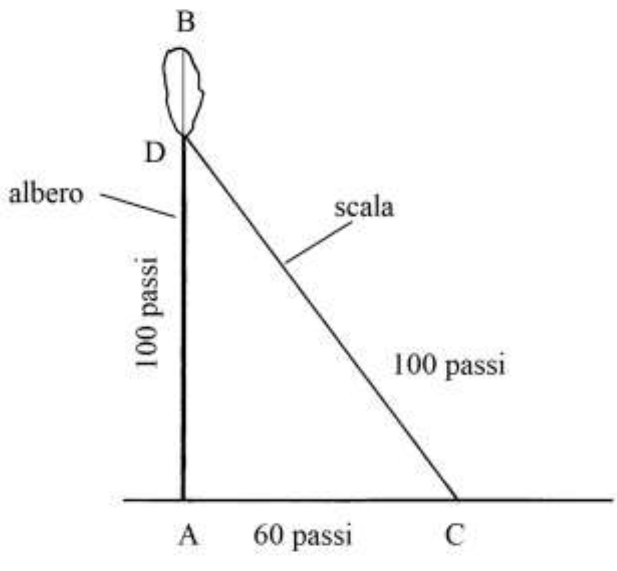
Il grafico che segue riassume i calcoli appena presentati:



- -

[53 v] <u>Un albero e una scala</u>

Un albero è alto 100 passi e vi è appoggiata una scala che uguale lunghezza.



Il piede della scala è allontanato di 60 passi dalla base dell'albero.

Il problema chiede di quanto si è abbassata la cima della scala.

La soluzione è ottenuta con il teorema di Pitagora applicato al triangolo rettangolo ADC:

$AD^2 = DC^2 – AC^2 = 100^2 – 60^2 = 10000 – 3600 = 6400$ e

AD = √6400 = 80 passi.

La cima della scala si è abbassata di:

DB = AB – AD = 100 – 80 = 20 passi.

[55 r] Altezza di un albero

Con l'aggiunta di 1/3 e di ¼ l'altezza di un albero diviene 51 passi. Il problema chiede la sua altezza originaria.

La procedura risolutiva è la seguente:

* moltiplicare i denominatori delle due frazioni: 3 * 4 = 12;
* calcolare (1/3 + ¼) di 12: (1/3 + ¼) * 12 = [(4 + 3)/12] * 12 =7;
* sottrarre 7 da 12: 12 – 7 = 5;
* sommare con 12: 5 + 12 = 17;
* risolvere la proporzione:

12 : 17 = x : 51 da cui

x = (51 * 12)/17 = 36 passi, altezza dell'albero.

- APPROFONDIMENTO -

La soluzione è errata. Infatti:

* 1/3 di 36 è 12;
* ¼ di 36 è 9.

Sommando questi due dati all'altezza calcolata, 36, si ha:

12 + 9 + 36 = 57 passi e non 51.

Il problema può essere risolto con l'algebra elementare: "x" è la lunghezza incognita:

(1/3 + ¼) * x + x = 51

7/12 * x + x = 51

19/12 * x = 51 da cui

x = 12 * 51/19 = (36 + 4/19) ≈ 32,21 passi.

Infatti: (36 + 4/19) + 7/12 * (36 + 4/19) = 19/12 * (36 + 4/19) = 51 passi.

- -

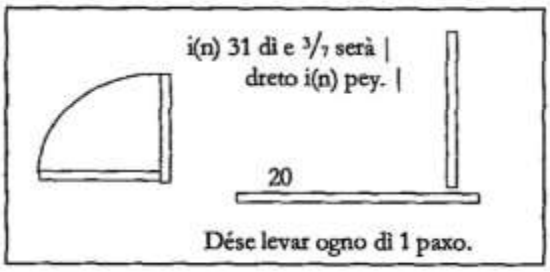
[57 r] Taglio di un albero

Il problema presenta il caso di un albero disteso sul terreno e lungo 20 passi.

Ogni giorno viene tagliata la lunghezza di un passo.

Viene chiesto di calcolare dopo quanti giorni sarà in piedi.

Il problema è poco comprensibile. Lo schema che segue è riprodotto da pagina 113 del volume di Andrea Bocchi:



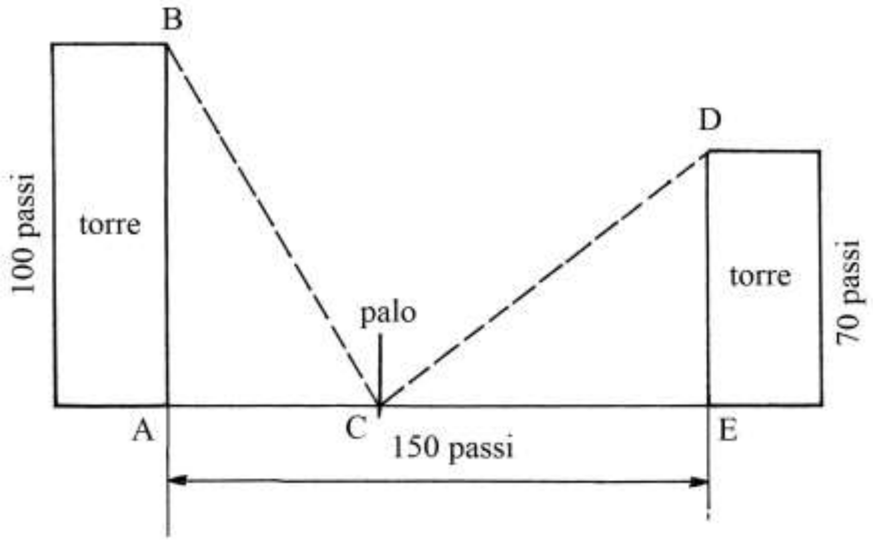
La soluzione contenuta nel manoscritto è la seguente:

* moltiplicare 20 per (3 + 1/7) [valore approssimato di π]: 20 * (3 + 1/7) = (62 + 6/7);
* dividere per 2: (62 + 6/7)/2 = (31 + 3/7) giorni occorrenti.

[57 v A] <u>Due torri</u>

Due torri sono erette in un prato e distano 150 passi. Una è alta 100 passi e l'altra è 70.

Un palo viene conficcato nel terreno e le distanze della sua cima da quelle delle torri sono uguali. Il problema chiede la distanza del palo dai piedi delle due torri.



ABC e CDE sono due triangoli rettangoli: le loro ipotenuse BC e CD hanno uguale lunghezza.

Attribuiamo alla lunghezza del cateto AC il valore "x": il cateto CE è lungo:

$CE = AE – AC = 150 – x$.

Applichiamo il teorema di Pitagora ai due triangoli rettangoli:

$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 100^2 + x^2$

$DC^2 = DE^2 + CE^2 = 70^2 + (150 – x)^2$.

Le due equazioni si equivalgono perché

$BC^2 = DC^2$ quindi:

$100^2 + x^2 = 70^2 + (150 – x)^2$

$10000 + x^2 = 4900 + 22500 – 300 * x + x^2$

$300 * x = 4900 + 22500 – 10000$

$300 * x = 17400$

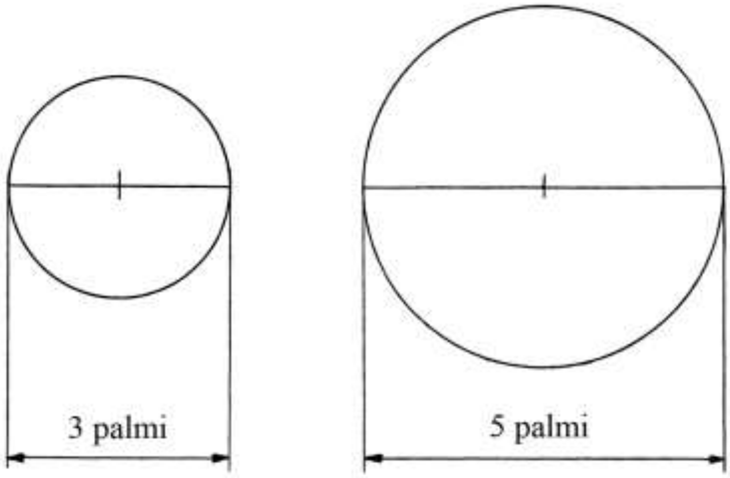
$x = 17400/300 = 58$ passi.

Ne consegue:

$CE = 150 – 58 = 92$ passi.

[57 v B] <u>Due sfere di cera</u>

Una sfera di cera ha diametro 3 palmi e pesa 5 libbre. Una seconda ha diametro 5 palmi: il problema chiede il peso di questa seconda palla.



Il peso (o massa) di una sfera è proporzionale al cubo del suo diametro.

L'Autore calcola il cubo del diametro della prima sfera: $3^3 = 27$. Poi calcola quello della seconda: $5^3 = 125$.

Infine, con una proporzione ricava il peso P della seconda:

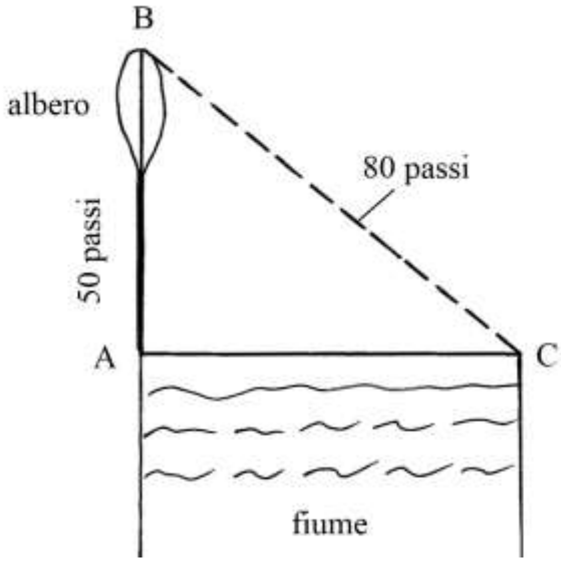
$V_{\text{PRIMA}} : V_{\text{SECONDA}} = P_{\text{PRIMA}} : P_{\text{SECONDA}}$ da cui:

$P_{\text{SECONDA}} = (V_{\text{SECONDA}} * P_{\text{PRIMA}})/V_{\text{PRIMA}} = (125 * 5)/27 = 625/27 = (23 + 4/27)$ libbre.

[58 r A] <u>Albero lungo un fiume</u>

Un albero è piantato sulla riva di un fiume ed è alto 50 passi.

Il problema chiede la larghezza del fiume conoscendo la distanza della cima dell'albero dalla riva opposta: 80 passi.



L'Autore applica il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo ABC. La lunghezza di AC è:

$AC^2 = BC^2 – AB^2 = 80^2 – 50^2 = 6400 – 2500 = 3900$ e

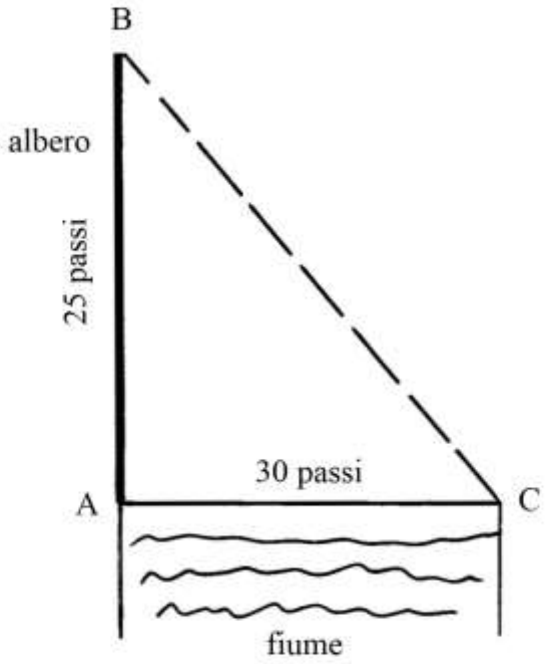
$AC = \sqrt{3900} \approx (62 + 14/31)$ passi.

Nel testo è dato (62 + *28/31*) passi.

[58 r B] <u>Altro albero piantato sulla riva di un fiume</u>

Un fiume è largo 25 passi e su di una riva è piantato un albero alto 30 passi.

Il problema chiede di calcolare la distanza fra la cima dell'albero e la riva opposta del fiume: il problema è chiaramente l'opposto del precedente.



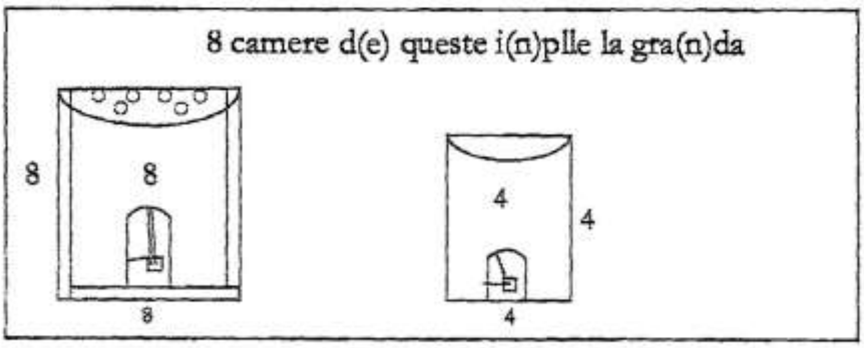
ABC è il consueto triangolo rettangolo e la sua ipotenusa è lunga:

$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 25^2 + 30^2 = 625 + 900 = 1525$ e

$BC = \sqrt{1525} \approx (39 + 2/39)$ passi.

[58 v A] <u>Due granai</u>

Due granai hanno forma di cubi: il primo ha lati lunghi 8 passi e il secondo 4 passi, come spiega la figura che segue, riprodotta da pagina 116 del testo di Andrea Bocchi:



Il granaio più piccolo è riempito di frumento. Il problema chiede quanti granai piccoli occorrono per riempire quello più grande.

Il volume del granaio grande è:

$8 * 8 * 8 = 512$ passi^3.

Il volume del granaio più piccolo è:

$4 * 4 * 4 = 64$ passi^3.

Il rapporto fra i due volumi è:

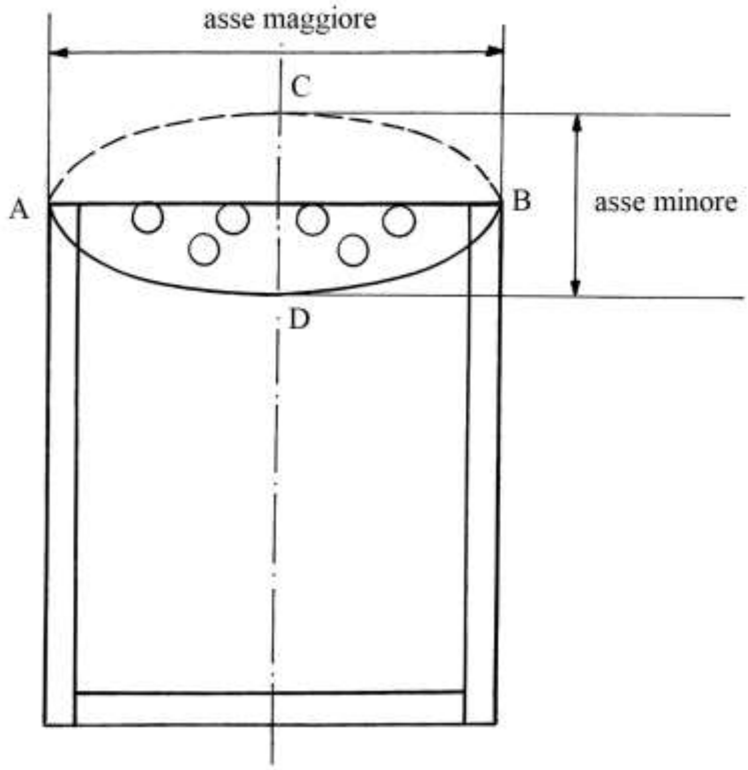
512/64 = 8, per cui occorrono 8 granai piccoli per riempire quello grande.

- APPROFONDIMENTO -

La tecnica usata dall'Anonimo autore di questo Zibaldone per rappresentare la terza dimensione merita un cenno: oltre alla vista frontale dei due solidi, in alto è disegnata una figura che si avvicina a una mezza ellisse.

La parte più interessante è quella che rappresenta il granaio più grande, disegnato a sinistra. La sua faccia superiore è un quadrato e non un cerchio.

Lo schema che segue aggiunge la parte mancante dell'ellisse: essa è una proiezione assonometrica di un cerchio di diametro 8 passi:

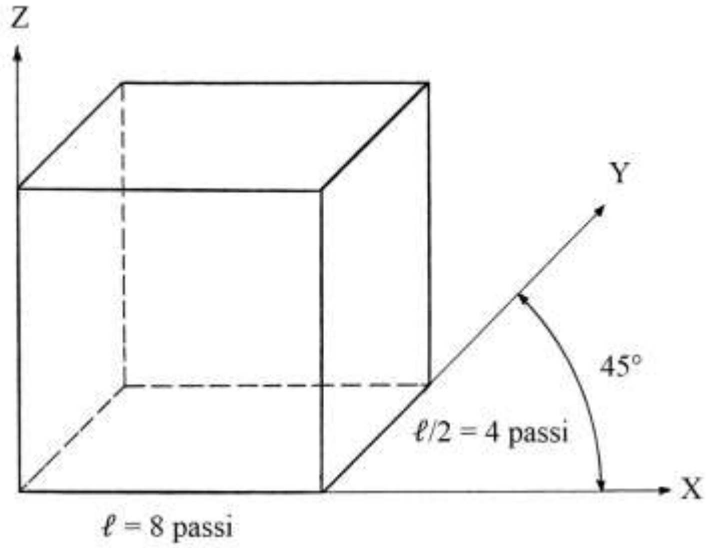


Il rapporto di fuga, RF, è dato da:

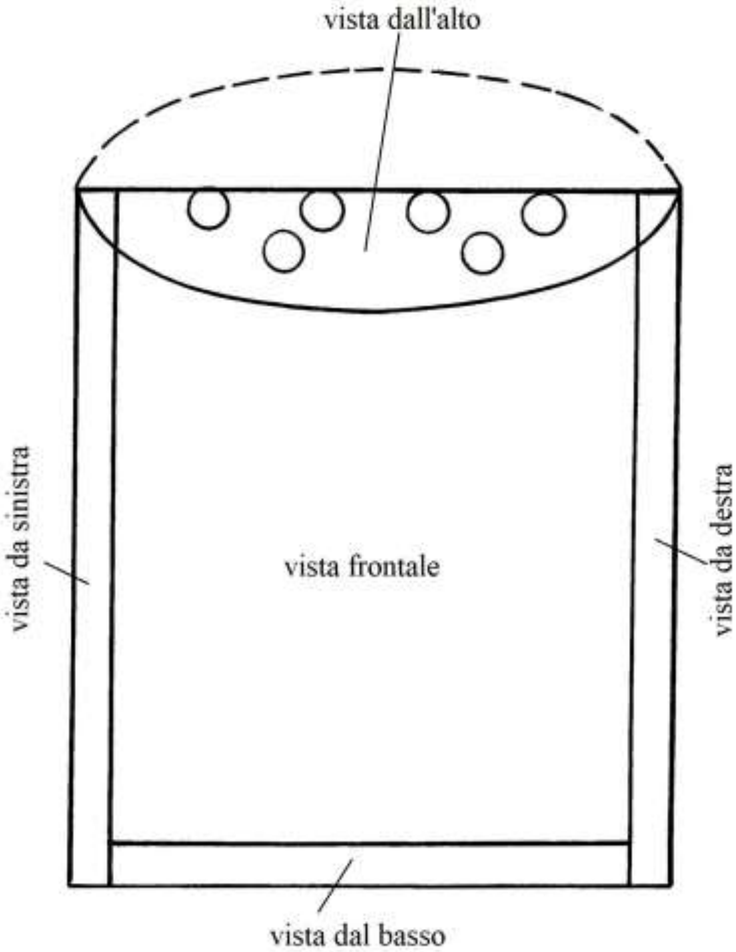
RF = CD/AB ≈ 0,4.

L'Autore dello Zibaldone aveva una vaga conoscenza dell'assonometria? Secondo Massimo Scolari la "proiezione parallela" comparve nella cultura occidentale fin dal IV secolo a.C. ed egemonizzò la rappresentazione in Cina: nei testi dei Gromatici Romani sono presenti disegni realizzati in assonometria ("Il disegno obliquo", p. 25).

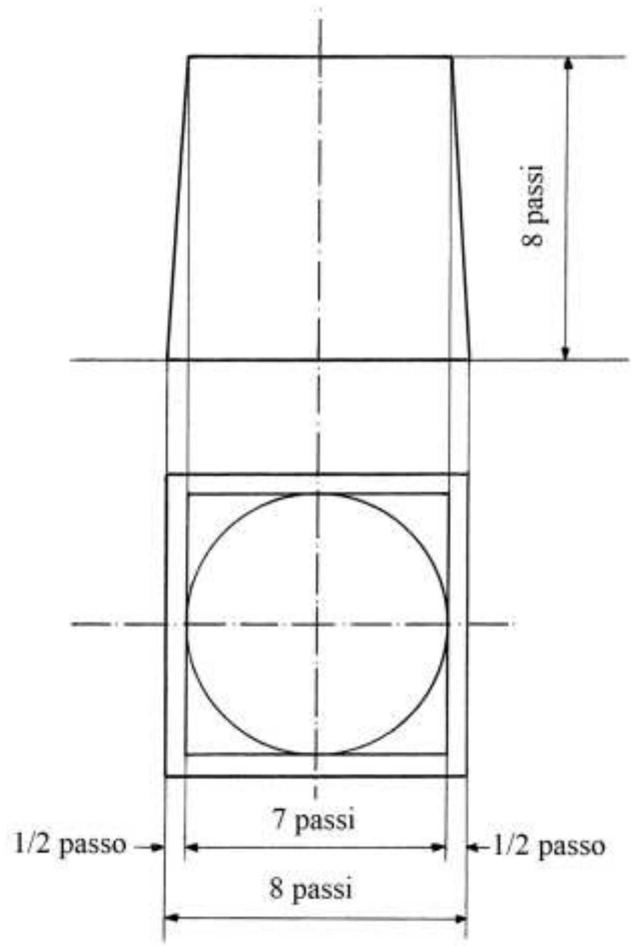
Il granaio più grande ha spigoli lunghi 8 passi e, in assonometria cavaliera, è rappresentato come segue:



I tre rettangoli posti a destra, a sinistra e in basso sono indicazioni per segnalare la presenza di altre facce del solido oltre quelle frontale e superiore?



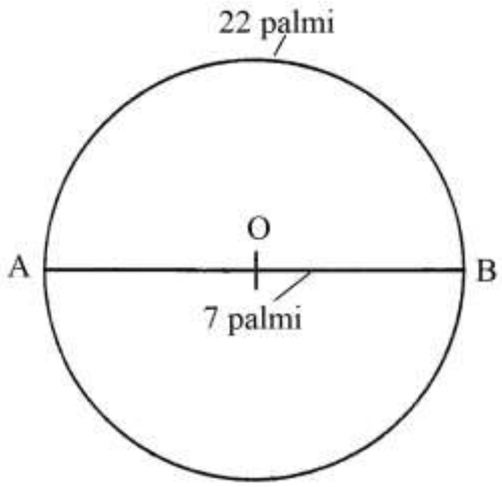
Lo schema originale contenuto nello Zibaldone potrebbe essere interpretato, *erroneamente*, come un'unica vista di un solido a forma di tronco di piramide quadrata con all'interno una cavità cilindrica:



- -

[58 v B] <u>Cerchio</u>

Un cerchio ha diametro lungo 7 palmi:



La lunghezza della circonferenza è calcolata moltiplicando quella del diametro per la costante (3 + 1/7):

circonferenza = 7 * (3 + 1/7) = 22 palmi.

È considerata anche l'operazione inversa: data la lunghezza circonferenza, c, è facile ricavare quella del diametro, d:

$$d = c/(3 + 1/7) = 22/(3 + 1/7)\ 7 \text{ palmi}.$$

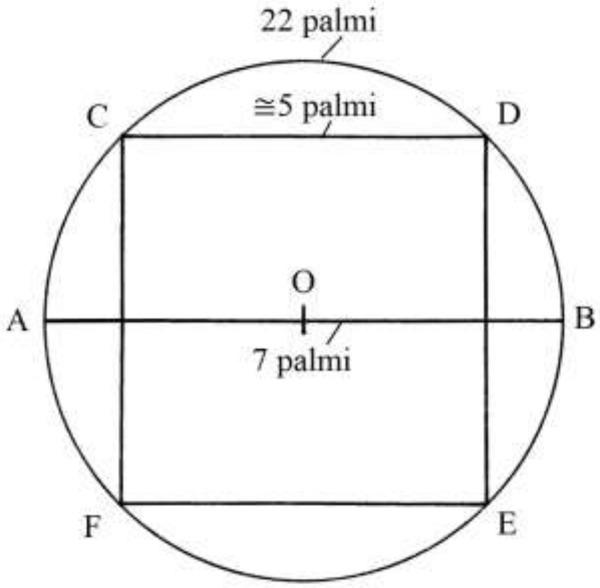
<u>Nota</u>

È da notare che l'Autore usa la congiunzione "e" per unire la parte intera (3) e quella frazionaria (1/7) di un numero che contiene sia una parte intera che una frazionaria:

3 "e" 1/7.

[58 v C] <u>Quadrato inscritto in un cerchio</u>

Nel cerchio presentato nella precedente Ragione è inscritto il più grande quadrato possibile:



I lati del quadrato CDEF hanno lunghezza che è ricavata con i seguenti passi:

* moltiplicare la lunghezza del diametro per sé stessa: $7 * 7 = 49$;
* dividere per 2: $49/2 = (24 + ½)$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{(24 + ½)} \approx 5$ palmi, lunghezza dei lati del quadrato. Il risultato è leggermente arrotondato per eccesso.

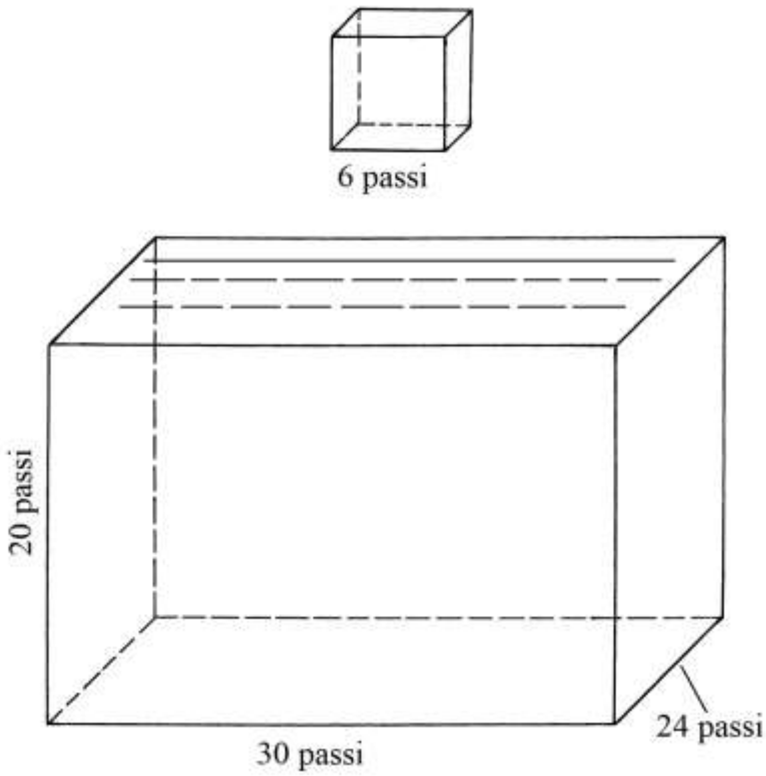
La soluzione è corretta: le diagonali del quadrato, CE e FD, sono due diametri del cerchio: il lato CD è lungo:

$$CD = CE/\sqrt{2}.$$

[59 r A] <u>Pietra in una vasca piena d'acqua</u>

Una vasca (una "camera") è lunga 30 passi, larga 24 e alta 20 passi ed è piena d'acqua.

Vi viene deposta una pietra che ha la forma di un cubo con spigoli lunghi 6 passi.



Il problema chiede il volume dell'acqua che fuoriesce.

Il volume della vasca è:

$V_{\text{VASCA}} = 20 * 30 * 24 = 14400$ passi^3.

Il volume della pietra è:

$V_{\text{PIETRA}} = 6^3 = 216$ passi^3.

Il rapporto fra i due volumi è:

$V_{\text{VASCA}} / V_{\text{PIETRA}} = 14400/216 = (66 + 2/3)$.

La pietra fa uscire 216 passi^3 di acqua.

Il testo originale contiene probabilmente dei seri errori di calcolo.

L'Autore introduce una nuova unità di misura dei volumi, il *bigoncio* o *bigoncia*: per la Treccani si tratta di un'antica unità di misura di capacità per liquidi, usata a Venezia fino al 1866.

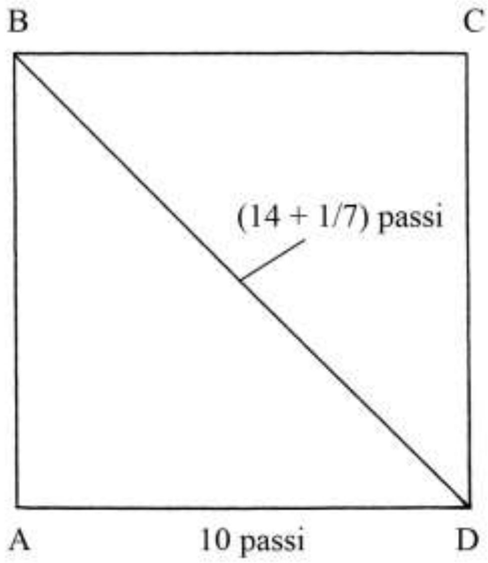
Secondo il testo, l'acqua fuoriuscita misurerebbe *15 bigonce*.

[59 r B] <u>Quadrato e diagonale</u>

Un quadrato ha lati lunghi 10 passi: il problema chiede la lunghezza delle diagonali.

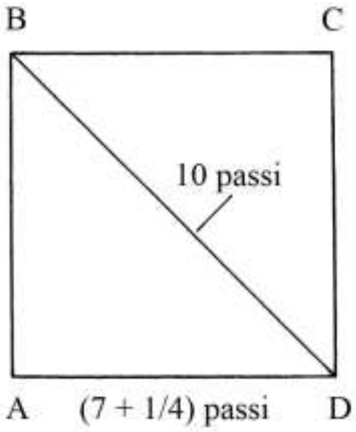
La soluzione è:

* moltiplicare la lunghezza di un lato per sé stessa: $10 * 10 = 100$;
* moltiplicare per 2: $100 * 2 = 200$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{200} \approx (14 + 1/7)$ passi, lunghezza delle diagonali.



[59 r C] Altro quadrato

Un quadrato ha la diagonale [BD] lunga 10 passi: il problema chiede di calcolare la lunghezza dei suoi lati.



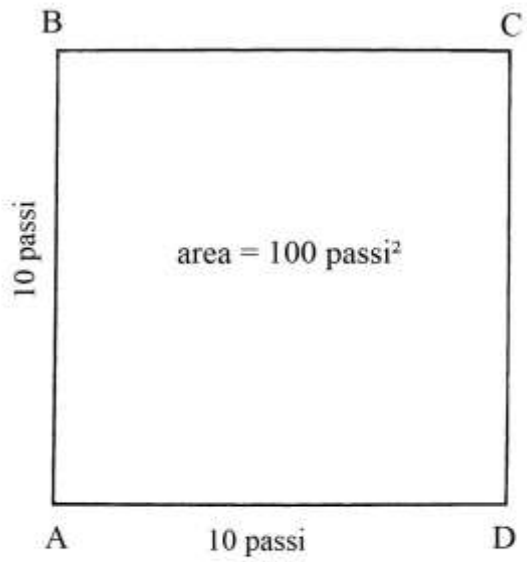
La soluzione è:

* moltiplicare la lunghezza della diagonale per sé stessa: 10 * 10 = 100;
* dividere per 2: 100/2 = 50;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{50} \approx (7 + 1/14)$ passi, lunghezza dei lati del quadrato.

Nella figura originale, l'Autore scrive il risultato errato (*7 e ¼*).

[59 v A] Area di un quadrato

Un quadrato ha lati lunghi 10 passi. Il problema chiede la sua area.

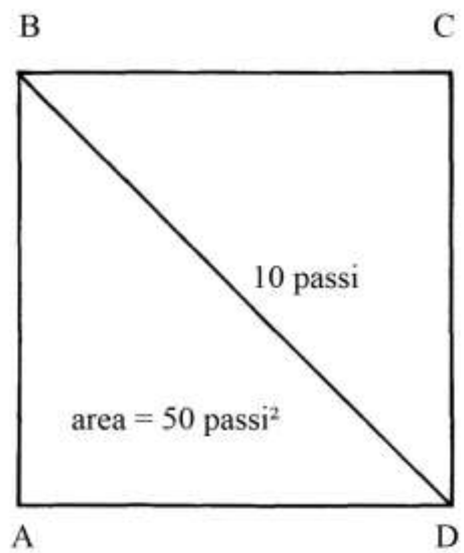


L'Autore moltiplica la lunghezza [AD] per l'altezza [AB]:

$A_{ABCD} = AD * AB = 10 * 10 = 100$ passi^2.

[59 v B] Area di un quadrato

Un quadrato ha diagonali lunghe 10 passi e non è nota la lunghezza dei suoi lati.



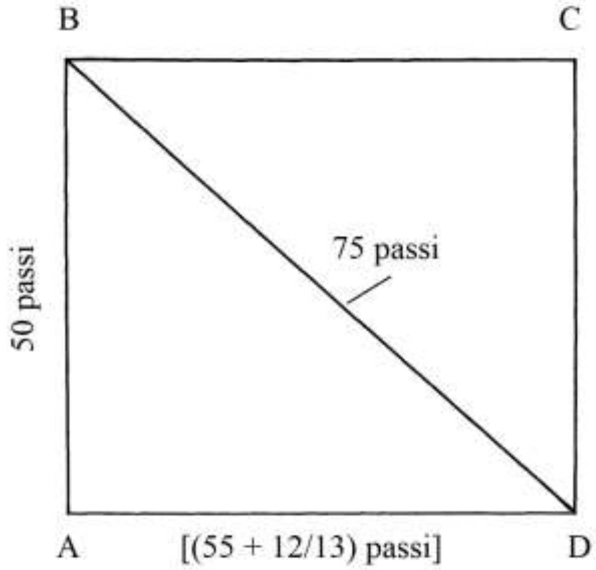
Il problema chiede l'area del poligono.

La soluzione è la seguente:

* moltiplicare la lunghezza di una diagonale per sé stessa: $10 * 10 = 100$;
* dividere per 2: $100/2 = 50$ passi^2, area del quadrato.

[59 v C] Lati di un rettangolo

Un rettangolo ha una diagonale [BD] lunga 75 passi e altezza [AB] uguale a 50 passi.



Il problema chiede la lunghezza dei lati maggiori [AD e BC].

La soluzione è:

* moltiplicare la lunghezza della diagonale per sé stessa: 75 * 75 = 5625;
* moltiplicare la lunghezza dell'altezza per sé stessa: 50 * 50 = 2500;
* sottrarre l'ultimo quadrato dal primo: 5625 – 2500 = 3125;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{3125} \approx (55 + 12/13)$ passi, lunghezza di AB e BC.

L'Autore dà il risultato di (*55 + 10/13*) passi.

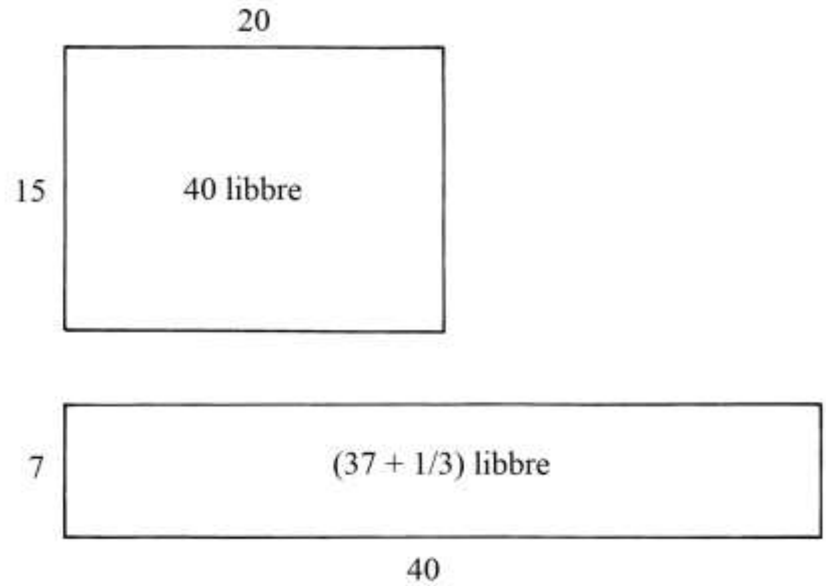
La soluzione è basata sull'applicazione del teorema di Pitagora al triangolo rettangolo ABD.

[59 v D] Valore di due terreni

Un terreno è lungo 20 [unità] e largo 15: viene venduto a 40 libbre.

Un secondo terreno è lungo 40 e largo 7.

Il problema chiede il valore del secondo terreno.



La soluzione è:

* moltiplicare le dimensioni del primo terreno: 20 * 15 = 300, area del primo terreno;
* moltiplicare le dimensioni del secondo terreno: 40 * 7 = 280, area del secondo terreno.

Il valore del secondo terreno è ricavato da:

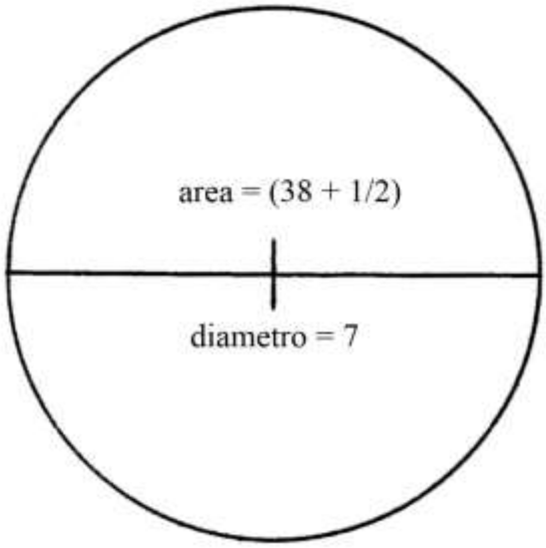
valore secondo = (valore primo) * (area secondo)/(area primo) = (40 * 280)/300 =
= (37 + l/3) libbre = 678 soldi = 37 libbre + 6 soldi + 8 denari.

Sembra che in questa Ragione l'Autore abbia usato le seguenti equivalenze:

1 libbra = 18 soldi
1 soldo = 12 denari.

[60 r B] <u>Area di un cerchio</u>

Un cerchio ha diametro lungo 7: anche in questo caso non è indicata un'unità di misura.
Il problema chiede di calcolare la sua area.



La soluzione contiene i seguenti passi:

* moltiplicare la lunghezza del diametro per la costante (3 + 1/7): 7 * (3 + 1/7) = 22, lunghezza della circonferenza;
* dividere per 2: 22/2 = 11;
* dividere per 2 la lunghezza del diametro: 7/2 = (3 + ½);
* moltiplicare 11 per (3 + ½): 11 * (3 + ½) = (38 + ½) area del cerchio.

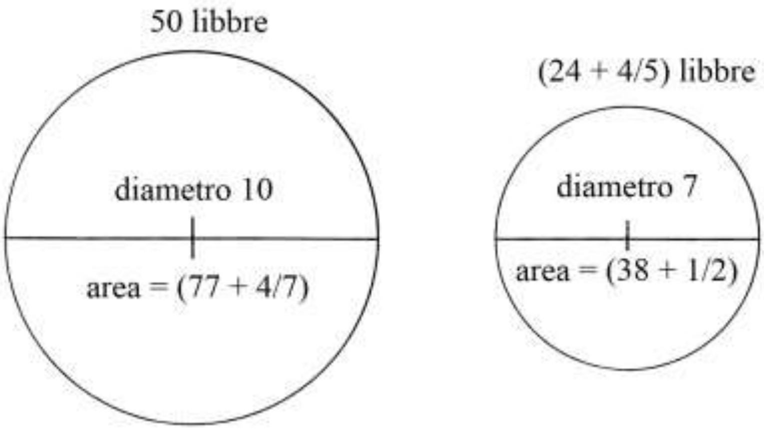
La procedura può essere spiegata come segue:

* *d* è il diametro;
* *r* è il raggio;
* *c* è la lunghezza della circonferenza;
* *A* è l'area;
* *(3 + 1/7)* è l'approssimazione di π.

$$A = \pi * r^2 = \pi * (r * r) = (\pi * r) * r = c/2 * d/2.$$

[60 r C] Due cerchi

Un cerchio ha diametro lungo 10 unità e vale 50 libbre. Un secondo cerchio ha diametro di 7 unità: il problema domanda il valore di questo secondo cerchio.



La soluzione è la seguente:

* calcolare l'area del primo cerchio: $A_{\text{PRIMO}} = (10/2)^2 * (3 + 1/7) = 25 * (3 + 1/7) =$
$= (77 + 4/7)$ [l'Autore dà il risultato errato di (77 + 6/77)];
* calcolare l'area del secondo cerchio: $A_{\text{SECONDO}} = (7/2)^2 * (3 + 1/7) = (38 + ½)$.

Il valore dei due cerchi è proporzionale alle loro aree.

$V_{\text{PRIMO}} : V_{\text{SECONDO}} = A_{\text{PRIMO}} : A_{\text{SECONDO}}$.

Il valore del secondo cerchio è:

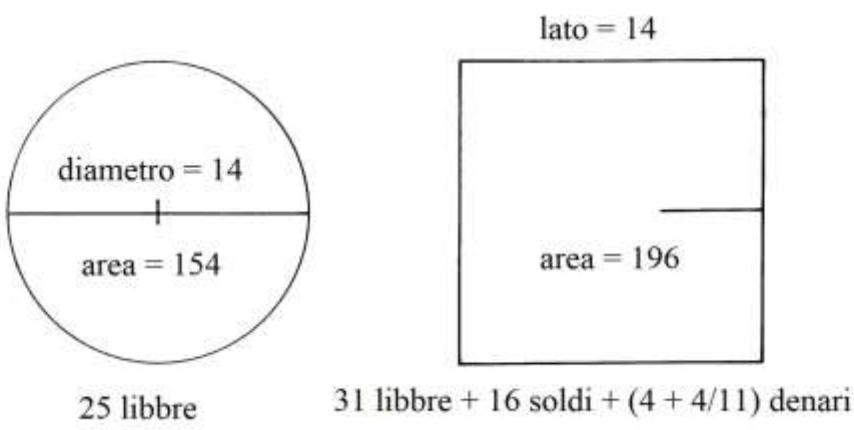
$V_{\text{SECONDO}} = (V_{\text{PRIMO}} * A_{\text{SECONDO}})/A_{\text{PRIMO}} = 50 * (38 + 1/2)/(77 + 4/7) =$
$= (24 + 4/5)$ libbre.

L'Autore fornisce un diverso risultato:

24 libbre + 14 soldi + (25 + 103/109) denari. Probabilmente contiene un errore perché (25 + 103/109) denari corrispondono a: 2 soldi + (1 + 103/109) denari.

[60 v A] Cerchio e quadrato

Un cerchio ha diametro lungo 14 e vale 25 libbre e un quadrato ha lati lunghi 14.
Il problema chiede il valore V del quadrato.



La soluzione richiede il calcolo delle aree delle due figure:

* la circonferenza del cerchio è lunga: 14 * (3 + 1/7) = 44;
* dividere per 2: 44/2 = 22;
* dividere per 2 la lunghezza del diametro: 14/2 = 7;
* moltiplicare 22 per 7: 22 * 7 = 154, area del cerchio;
* moltiplicare la lunghezza dei lati del quadrato per sé stessa: 14 * 14 = 196, area del quadrato.

Risolvere la proporzione:

$A_{\text{CERCHIO}} : A_{\text{QUADRATO}} = V_{\text{CERCHIO}} : V_{\text{QUADRATO}}$

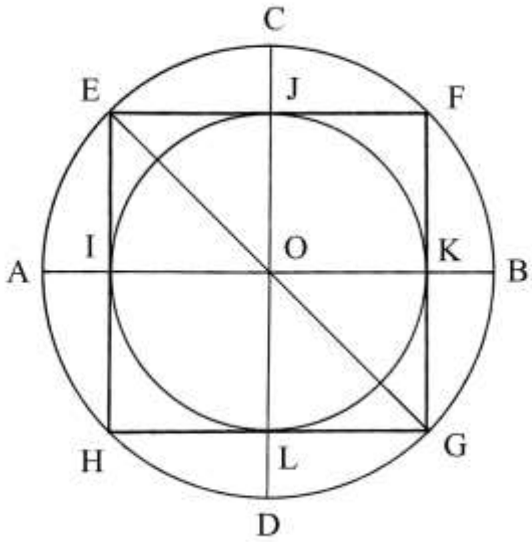
$V_{\text{QUADRATO}} = (A_{\text{QUADRATO}} * V_{\text{CERCHIO}})/A_{\text{CERCHIO}} = (196 * 25)/154 =$
$= (31 + 9/11)$ libbre = 31 libbre + 16 soldi + (4 + 3/11) denari.

Nella soluzione di questa Ragione, l'Autore ha usato le seguenti equivalenze:

1 libbra = 20 soldi = 240 denari.

[60 v B] Cerchi concentrici e quadrato inscritto

Due cerchi sono concentrici con un quadrato: il punto O è il centro comune.



AB e CD sono due diametri fra loro perpendicolari.

EFGH è il quadrato inscritto nel cerchio esterno: al suo interno è il secondo cerchio che è tangente nei punti medi dello stesso poligono.

L'Autore afferma che l'area del quadrato è uguale a 7/11 di quella del cerchio esterno e l'area del cerchio interno è pari a 11/14 di quella del quadrato.

\- APPROFONDIMENTO -

Verifichiamo la fondatezza di queste ultime affermazioni.

L'area del cerchio esterno è data da:

$A_{\text{ESTERNO}} = \pi * OA^2 = 22/7 * (d/2)^2 = 22/28 * d^2 = 11/14 * d^2$,

con OA = AB/2 = D/2.

L'area del quadrato EFGH è:

$A_{\text{EFGH}} = EF^2$.

EG è un diametro, *d*, del cerchio esterno e anche una delle due diagonali del quadrato; HEG è un triangolo rettangolo isoscele. I cateti HE e HG hanno uguale lunghezza che è data da:

$EG^2 = HE^2 + HG^2 = 2 * HE^2 = 2 * \ell^2$, con ℓ lunghezza dei lati del quadrato.

$HE^2 = EG^2/2$ e $HE = EG/\sqrt{2} = d/\sqrt{2}$.

L'area del quadrato è:

$A_{\text{EFGH}} = HE * HG = d^2/2$.

Il rapporto fra l'area del cerchio esterno e quella del quadrato è:

$A_{\text{ESTERNO}}/A_{\text{EFGH}} = (11/14 * d^2)/(d^2/2) = 11/14 * 2 = 7/11$.

Il cerchio interno ha area:

$A_{\text{INTERNO}} = \pi * OI^2 = 22/7 * (IK/2)^2 = 22/7 * (HE/2)^2 = 22/7 * HE^2/4 =$

$= 22/7 * (EG^2/2 * 1/4) = 22/56 * EG^2 = 11/28 * d^2$.

Fra l'area del cerchio interno e quella del quadrato vi è il seguente rapporto:

$A_{\text{INTERNO}}/A_{\text{EFGH}} = (11/28 * d^2)/(d^2/2) = 11/14$.

Le affermazioni dell'Autore sono confermate.

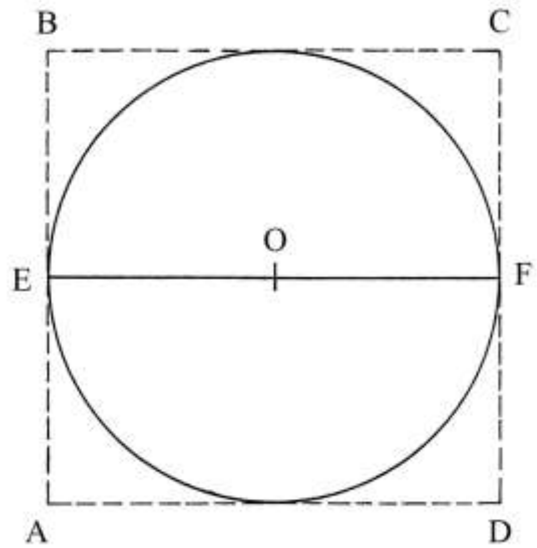
Infine, il rapporto fra le aree dei due cerchi è:

$A_{\text{ESTERNO}}/A_{\text{INTERNO}} = (11/14 * d^2)/(11/268 * d^2) = 2$.

\- -

[60 v C] <u>Cerchio di area data</u>

Un cerchio ha area uguale a 100 [unità]: il problema chiede la lunghezza del suo diametro.



L'Autore applica la regola secondo la quale il cerchio ha area uguale a 11/14 di quella del quadrato circoscritto, ABCD nella figura.

Calcola l'area del quadrato:

$A_{ABCD} = 14/11 * A_{CERCHIO} = 14/11 * 100 = (127 + 3/11)$.

Poi estrae la radice quadrata:

$\sqrt{(127 + 3/11)} \approx (11 + 3/11) = AD = EF$, diametro del cerchio.

[61 r A] <u>Due corde e le lance</u>

Una corda è lunga 5 palmi e lega un gruppo di 40 lance. Una seconda corda è lunga 8 palmi: il problema chiede il numero di lance che può tenere insieme.

Le due corde assumono la forma di circonferenze.

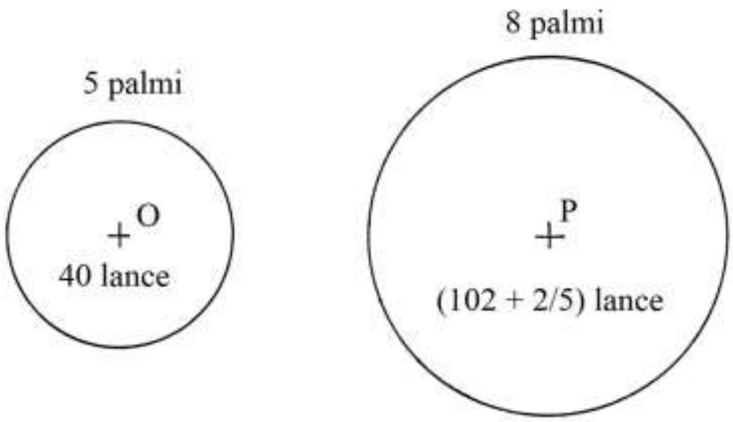
L'area di un cerchio è proporzionale al quadrato della lunghezza della circonferenza.

La procedura risolutiva contiene i seguenti passi:

* moltiplicare la lunghezza della prima circonferenza per sé stessa: 5 * 5 = 25;
* moltiplicare la lunghezza della seconda circonferenza per sé stessa: 8 * 8 = 64;
* risolvere la proporzione:

  25 : 64 = 40 : numero lance seconda corda

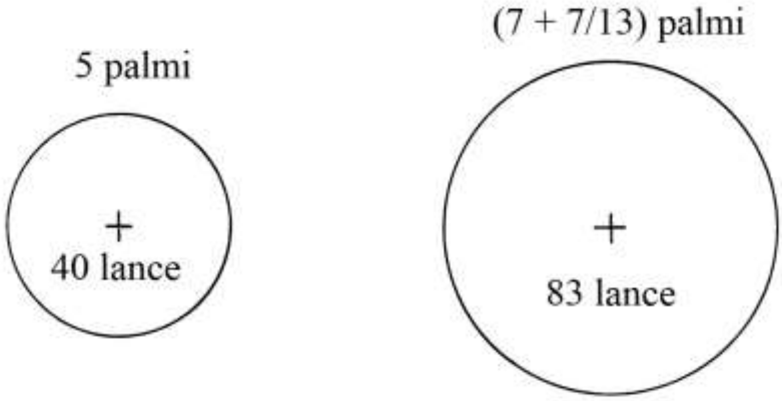
  numero lance seconda corda = (64 * 40)/25 = (102 + 2/5).



[61 r B] Altro problema di corde e lance

La solita corda lunga 5 palmi trattiene 40 lance. Una seconda corda ne tiene 83.

Il problema chiede la lunghezza della seconda corda.



La soluzione ricalca quella della precedente Ragione:

(lunghezza prima corda)^2 : (lunghezza seconda corda)^2 = 40 : 83

5^2 : (lunghezza seconda corda)^2 = 40 : 83

(lunghezza seconda corda)^2 = (25 * 83)/40

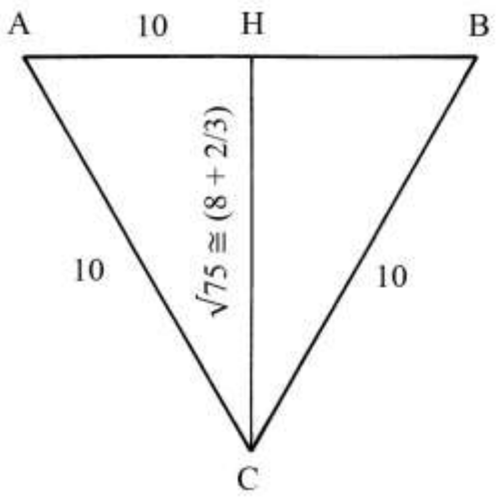
(lunghezza seconda corda)^2 = (51 + 7/8)

(lunghezza seconda corda) = $\sqrt{}$(51 + 7/8) ≈ (7 + 7/13) palmi.

[61 r C] Triangolo equilatero

Uno *scudo*, un triangolo, ha lati lunghi 10 [unità]: è equilatero.

Come spesso accade nei testi medievali, il triangolo è disegnato con la base [AB] in alto e il terzo vertice [C], in basso:



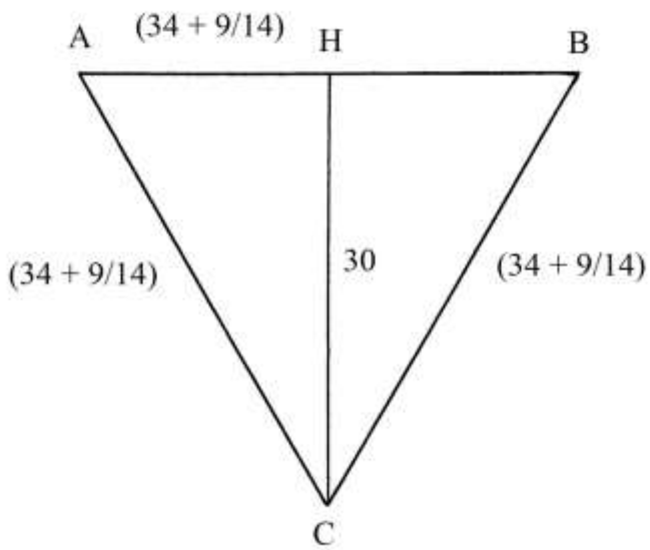
Il problema chiede la lunghezza dell’altezza, CH.
La soluzione è la seguente:

* moltiplicare la lunghezza di un lato per sé stessa: 10 * 10 = 100;
* dividere per 2 la lunghezza di un lato: 10/2 = 5;
* moltiplicare per sé stesso: 5 * 5 = 25;
* sottrarre da 100: 100 – 26 = 75;
* estrarre la radice quadrata: √75 = (8 + 2/3), lunghezza di CH, che l’Autore chiama “*meço dello cavo de soto*”.

La radice √75 è *sorda* perché 75 non è un quadrato perfetto.

[61 v A] Un altro triangolo equilatero

Uno scudo a forma di triangolo equilatero ha l’altezza [CH] lunga 30 unità.
Il problema chiede la lunghezza dei lati.



La soluzione è:

* moltiplicare la lunghezza dell'altezza CH per sé stessa: $30 * 30 = 900$;
* dividere per 3: $900/3 = 300$;
* sommare a 900: $300 + 900 = 1200$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{1200} \approx (34 + 9/14)$, lunghezza dei lati del triangolo equilatero.

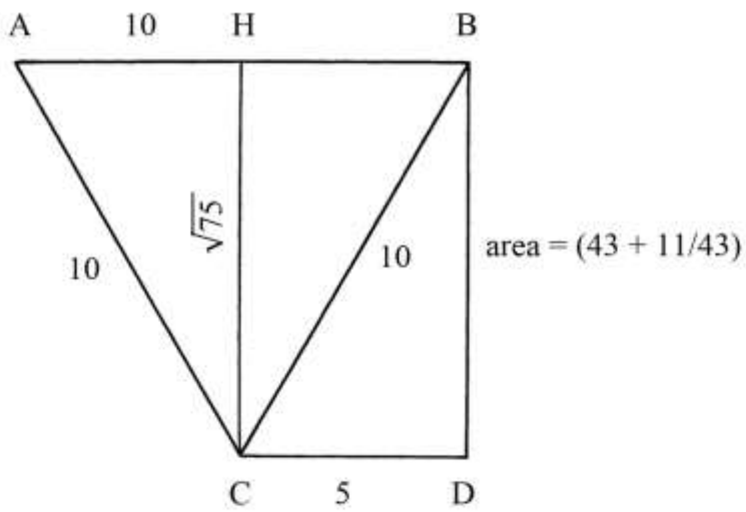
L'Autore ha applicato il teorema di Pitagora a uno dei due triangoli rettangoli creati dall'altezza CH, AHC e HBC:

$CH^2 = AC^2 - AH^2 = AC^2 - (AC/2)^2 = ¾ * AC^2$ da cui:
$AC^2 = 4/3 * CH^2 = 4/3 * 30^2 = 1200$.

[61 v B] Area di un triangolo equilatero

Un triangolo equilatero ha lati lunghi 10 unità: anche in questo caso l'Autore non specifica alcuna unità di misura.

Il problema chiede l'area del triangolo.



L'Autore fornisce in $\sqrt{75}$ la lunghezza dell'altezza, senza presentare alcun calcolo: il dato è esatto.

Lo schema originale, qui sopra riprodotto con l'aggiunta delle lettere maiuscole ai vertici, suggerisce una considerazione: l'area del rettangolo CHBD è uguale a quella del triangolo ABC.

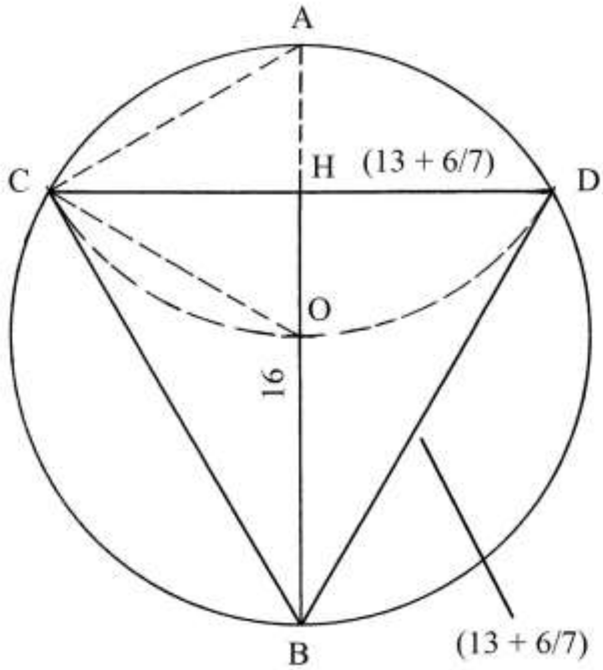
L'area di CHBD è:

$A_{CHBD} = CD * CH = (10/2) * \sqrt{75} = 5 * \sqrt{75} = \sqrt{(25 * 75)} = \sqrt{1875} \approx (43 + 3/10)$, area di ABC.

L'Autore dà un diverso risultato: (43 + 11/43).

[61 v C] Triangolo equilatero inscritto in un cerchio

Un cerchio ha diametro lungo 16 e vi deve essere inscritto il più grande triangolo equilatero.



Nello schema qui sopra è stata completata la costruzione del triangolo inscritto.

AB è un diametro del cerchio di centro O ed è lungo 16.

Il problema chiede la lunghezza dei lati del triangolo BCD.

Fare centro in A e con raggio AO (lungo 16/2 = 8) tracciare un arco che taglia la circonferenza nei punti C e D che sono due dei tre vertici del triangolo, lo scudo disegnato con il vertice B in basso.

BCD è il triangolo equilatero.

CD è una corda del cerchio che taglia OA nel suo punto medio, H. Quindi:

AH = HO = ¼ * AB = ¼ * 16 = 4.

Ne consegue che l'altezza BH è lunga:

BH = BA – HA = 16 – 4 = 12.

La lunghezza di un lato del triangolo è così ricavata dall'Autore:

$CD^2 = BH^2 + 1/3 * BH^2 = 4/3 * BH^2 = 4/3 * 12^2 = 4/3 * 192$ e

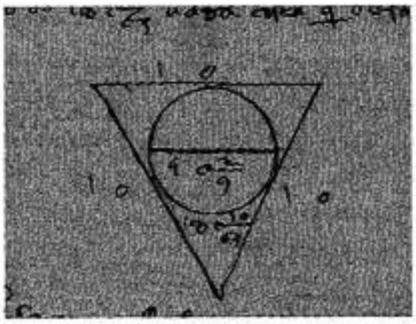
$CD = \sqrt{192} = (13 + 6/7)$.

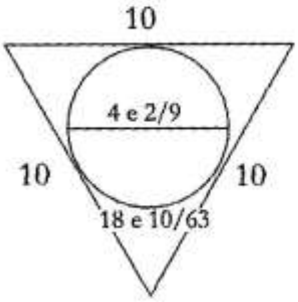
[62 r A] Cerchio inscritto in un triangolo equilatero

Un triangolo equilatero ha lati lunghi 10 [unità]. Deve esservi inscritto il cerchio più grande possibile: la sua circonferenza deve essere tangente al triangolo nei punti medi dei suoi lati.

Il problema chiede la lunghezza della circonferenza.

Lo schema che segue è riprodotto da p. 126 del testo di Andrea Bocchi:

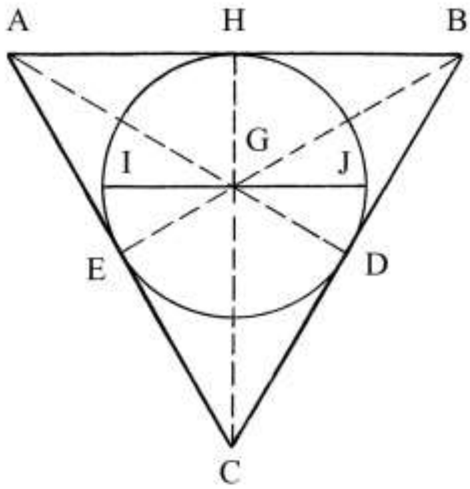




Il testo originale contiene errori: ad esempio indica in (18 + 2/3) la lunghezza dell'altezza [CH] e sullo schema a destra è scritta in (18 + 100/63).

La corretta misura di CH è:

$$CH = (\sqrt{3})/2 * AB = (\sqrt{3})/2 * 10 \approx (8 + 2/3).$$



AD, BE e CH sono le tre altezze (e mediane, bisettrici e assi) del triangolo equilatero ABC: esse si intersecano nel punto G e si dividono reciprocamente in due parti:

$$HG : GC = 1 : 2.$$

Quindi, HG è lungo:

$$HG = 1/3 * CH = 1/3 * (8 + 2/3) = (2 + 8/9).$$

HG è il raggio del cerchio inscritto

Il diametro del cerchio è:

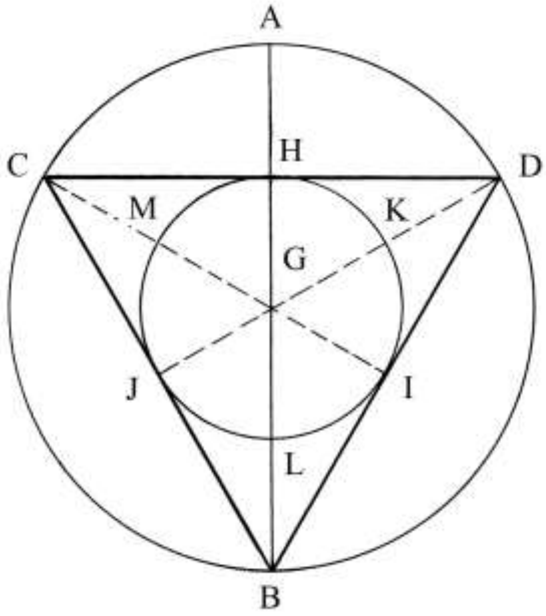
$$IJ = 2 * HG = 2 * (2 + 8/9) = (5 + 7/9).$$

La circonferenza *c* del cerchio è lunga:

$$c = \pi * IJ = 22/7 * (5 + 7/9) = (18 + 10/63).$$

[62 r B] <u>Triangolo equilatero e cerchio inscritto</u>

Un cerchio ha centro in G e diametro AB. Al suo interno è inscritto il triangolo equilatero BCD; a sua volta, nel triangolo è disegnato un secondo cerchio, sempre con centro in G.



Il problema chiede la lunghezza del diametro interno, HL nella figura.

Il testo contiene un errore perché afferma che il "…*il diamitro dello schudo gran(do)*…" è lungo 16 unità: la descrizione della soluzione è basata sulla lunghezza del diametro AB uguale a 16 unità.

L'altezza BH è lunga ¾ del diametro AB:

BH = ¾ * 16 = 12.

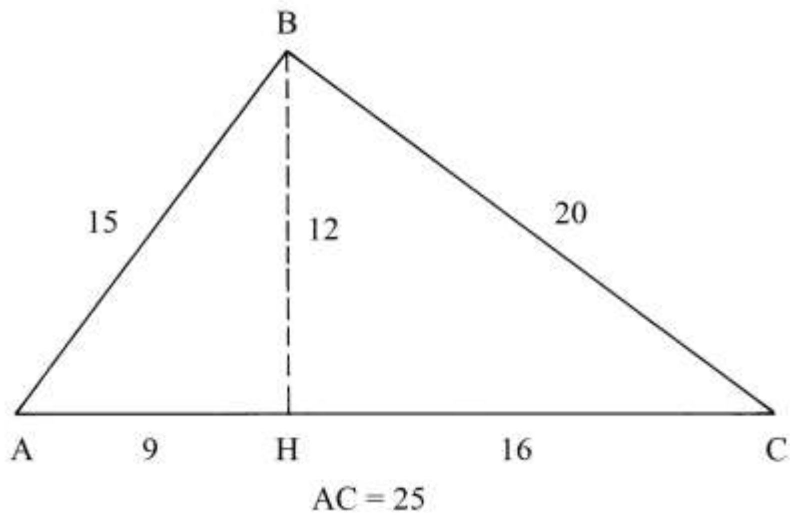
Il diametro del cerchio interno, HL, è lungo 2/3 dell'altezza BH:

HL = 2/3 * 12 = 8.

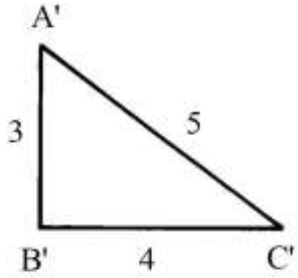
[62 v A] <u>Triangolo 15 – 20 – 25</u>

ABC è un triangolo che ha lati lunghi come segue:

* AB = 15;
* BC = 20;
* AC = 25.



L'Autore non lo scrive espressamente, ma ABC è un triangolo rettangolo nel vertice B: le lunghezze dei suoi lati formano la terna derivata 15-20-25 che deriva dalla primitiva 3-4-5 moltiplicando i suoi elementi per la costante 5:



BH è l'altezza relativa al lato AC: essa scompone ABC in due triangoli rettangoli, ABH e BCH. BH è un cateto comune ai due triangoli rettangoli.

Il problema chiede la lunghezza di BH.

La procedura usata dall'Autore contiene i seguenti passi:

* moltiplicare la lunghezza di AC per sé stessa: 25 * 25 = 625;
* moltiplicare la lunghezza di AB per sé stessa: 15 * 15 = 225;
* sommare i due quadrati: 625 + 225 = 850;
* moltiplicare la lunghezza di BC per sé stessa: 20 * 20 = 400;
* sottrarre 400 da 850: 850 – 400 = 450;
* dividere per il doppio della lunghezza di AC: 450/(2 * 25) = 450/50 = 9, lunghezza di AH;
* sottrarre dalla lunghezza di AC: 25 – 9 = 16, lunghezza di HC.

Tutti questi passi possono essere riassunti con una formula:

$$AH = (AC^2 + AB^2 – BC^2)/(2 * AC).$$

Sulle formule del matematico e ingegnere Erone di Alessandria (I secolo d.C.) rimando al mio articolo citato in bibliografia.

La procedura si conclude con l'applicazione del teorema di Pitagora al triangolo rettangolo ABH:

$$BH^2 = AB^2 – AH^2 = 15^2 - 9^2 = 225 – 81 = 144 \quad e$$
$$BH = \sqrt{144} = 12.$$

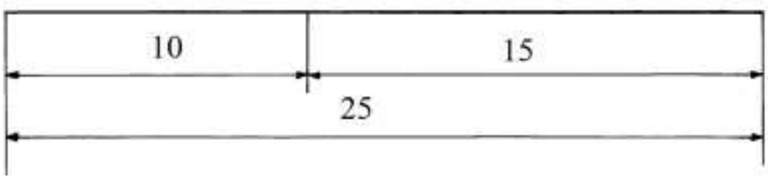
L'area del triangolo ABC è:

$$A_{ABC} = AC * BH/2 = (25 * 12)/2 = 150.$$

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

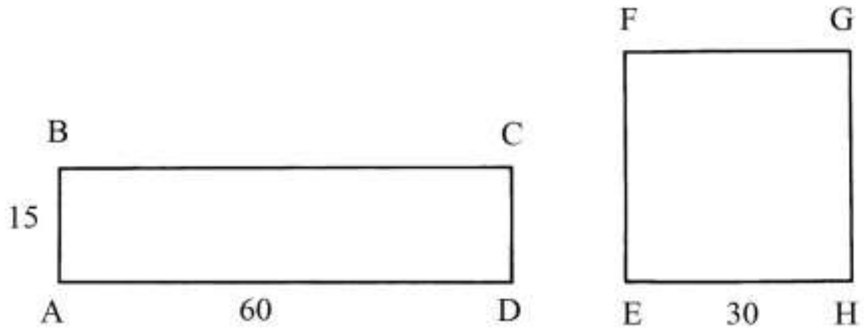
Un'ultima considerazione conclude questa Ragione: un triangolo con lati lunghi 10, 15 e 25 è impossibile da costruire perché questi dati violano la regola fondamentale di un triangolo: la somma delle lunghezze di due lati qualsiasi deve essere più grande della lunghezza del terzo lato:

$$10 + 15 = 25.$$



[62 v B] <u>Quadrato equivalente a un rettangolo</u>

Un rettangolo è lungo 60 e largo 15.
Il problema chiede la lunghezza dei lati di un quadrato di area equivalente.



L'area del rettangolo ABCD è:

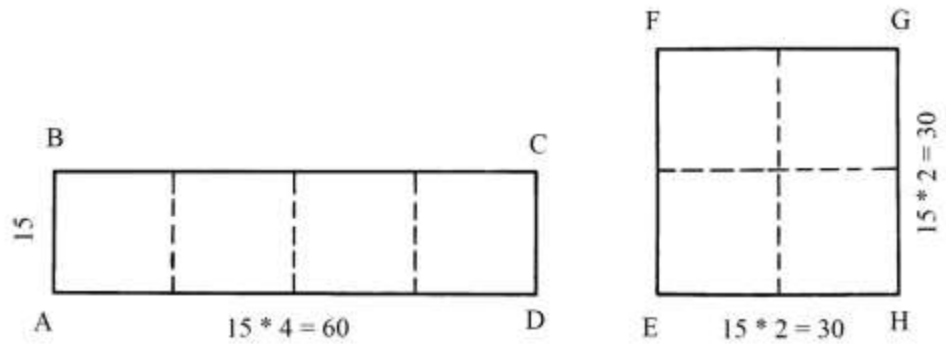
$A_{ABCD} = AB * AD = 15 * 60 = 900.$

L'area del quadrato EFGH è identica, per cui il lato EH è lungo:

$EH = \sqrt{900} = 30.$

- APPROFONDIMENTO -

I due quadrilateri sono scomponibili in quattro quadrati di dimensioni 15 * 15:

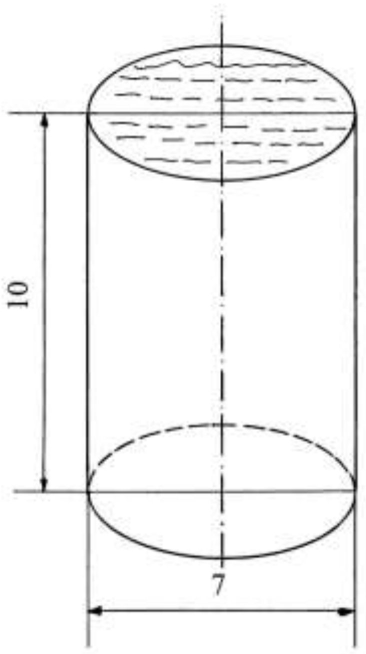


- -

[63 r A] <u>Una pietra in un pozzo</u>

Un pozzo circolare, pieno d'acqua, ha diametro *d* lungo 7 e ha profondità *h* di 10.
Vi viene gettata una pietra sferica con diametro lungo 6.
Il problema chiede il volume dell'acqua che fuoriesce dal pozzo.
L'Autore chiama "area" anche il volume.
La circonferenza *c* della bocca del pozzo è:

$c = \pi * d = 22/7 * 7 = 22.$



L'area della bocca circolare del pozzo è:

$A_{\text{CERCHIO}} = d/2 * c/2 = (7/2) * (22/2) = (38 + ½)$.

Il volume del pozzo (e dell'acqua in esso contenuta) è:

$V_{\text{POZZO}} = A_{\text{CERCHIO}} * h = (38 + ½) * 10 = 385$.

La pietra ha volume:

$V_{\text{PIETRA}} = 4/3 * \pi * r^3 = 4/3 * 22/7 * (\text{diametro}/2)^3 = 88/21 * (6/2)^3 =$
$= 88/21 * 216/8 = 11/21 * 216 = (113 + 1/7)$.

Il volume dell'acqua che fuoriesce è (113 + 1/7).

- APPROFONDIMENTO -

La costante 88/21 e il volume di una sfera

In alcuni trattati medievali può incontrarsi la costante "88/21" usata nella soluzione di problemi relativi al calcolo del volume di una sfera di raggio *r*.

Il suo volume è dato da:

$V = 4/3 * \pi * r^3$.

Alla costante π veniva attribuito il valore approssimato di 22/7 (o 3 + 1/7).

La formula del volume diveniva:

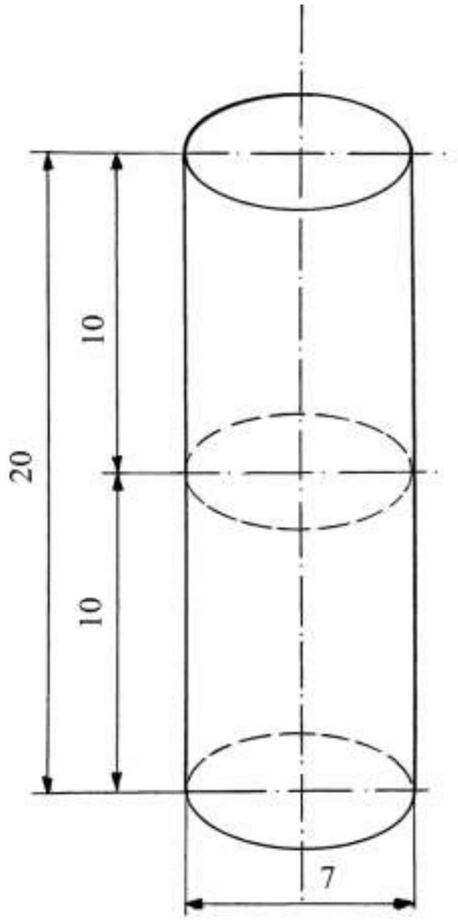
$V = 4/3 * 22/7 * r^3 = (88/21) * r^3$.

Ecco spiegata l'origine della costante 88/21 e di quella ad essa collegata 11/21.

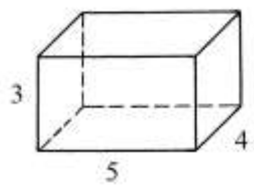
- -

[63 r B] Altra pietra in un pozzo

Un pozzo ha diametro $d = 7$ ed è profondo 20. È riempito di acqua fino a metà altezza e cioè fino a -10.



Una pietra ha la forma di un parallelepipedo lungo 5, largo 4 e alto 3:



Essa viene gettata nel pozzo.

Il problema chiede la misura dell'innalzamento dell'acqua nel pozzo.

L'area della bocca del pozzo (che l'Autore chiama "pè" e cioè "piede") è:

$A_{\text{BOCCA}} = 11/14 * d^2 = 11/14 * 7^2 = (38 + ½)$.

Il volume della pietra è:

$V_{\text{PIETRA}} = 5 * 4 * 3 = 60$.

La pietra sposta verso l'alto un volume di acqua uguale al suo e cioè 60. Il volume dell'acqua spostata è un cilindro che ha area di base di (38 + ½) e altezza *h* sconosciuta:

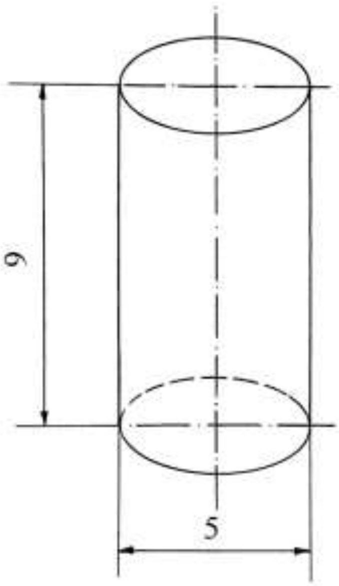
$h = V_{\text{PIETRA}}/A_{\text{BOCCA}} = 60/(38 + ½) = (1 + 43/77)$, misura dell'innalzamento dell'acqua dal livello di –10 al livello di – (8 + 34/77).

[63 v A] <u>Una colonna caduta in un pozzo</u>

Un pozzo cilindrico ha diametro lungo 7 ed è profondo 20: è pieno d'acqua per metà e cioè per la profondità di – 10.

Il pozzo ha dimensioni uguali a quelle del manufatto della precedente Ragione.

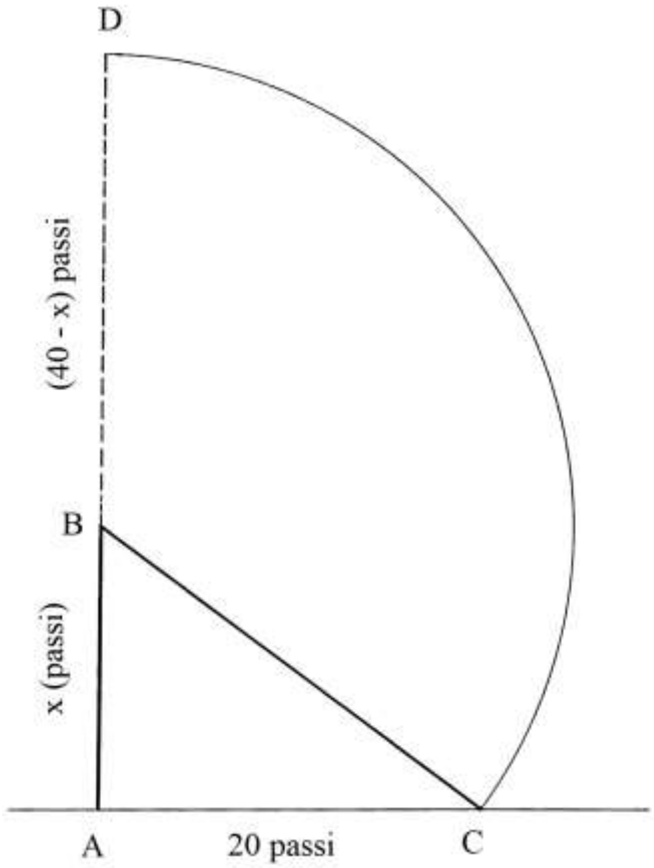
L'area della bocca è (38 + ½).
Nel pozzo viene calata una colonna cilindrica (di pietra) con diametro d = 5 e altezza h = 9:



Il problema la misura dell'innalzamento del livello dell'acqua nel pozzo.
La circonferenza *c* della base della colonna è:
$c = \pi * d = 22/7 * 5 = (15 + 4/7)$.
L'area della base della colonna è:
$A_{BASE} = c/2 * d/2 = (15 + 4/7)/2 * 5/2 = (19 + 9/14)$.
Il volume della colonna è:
$V_{COLONNA} = A_{BASE} * \text{altezza} = (19 + 9/14) * 9 = (176 + 11/14)$.
L'innalzamento H dell'acqua è:
$H = V_{COLONNA}/A_{BOCCA} = (176 + 11/14)/(38 + ½) = (4 + 319/539)$,

[64 r A] <u>Albero piegato</u>

Un albero alto 40 passi si è piegato verso terra e la sua cima si trova a 20 passi dal suo piede. La Ragione chiede la lunghezza del tronco (AB nella figura) rimasto in piedi:



La procedura usata dall'Autore contiene i seguenti passi:

* moltiplicare l'altezza originale per sé stessa: 40 * 40 = 1600;
* moltiplicare per sé stessa la distanza fra il piede dell'albero (A) e la nuova posizione della sua cima (C): 20 * 20 = 400;
* sottrarre da 1600: 1600 – 400 = 1200;
* dividere per 2: 1200/2 = 600;
* dividere per l'altezza originaria dell'albero: 600/40 = 15 passi, altezza residua dell'albero (AB in figura).

La procedura è riassunta nella formula che segue:

$$AB = [(AD^2 – AC^2)/2]/AD = (AD^2 – AC^2)/(2 * AD).$$

- APPROFONDIMENTO -

Usando una soluzione più semplice, con l'aiuto dell'algebra elementare, fissiamo i seguenti dati:

* AD = 40
* AC = 20
* $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Indichiamo con "x" la lunghezza rimanente dell'albero: AB = x.

Ne consegue: BD = AD – AB = (40 – x) = BC.

Sostituendo i valori nella penultima espressione si ha:

$$(40 – x)^2 = x^2 + 20^2$$
$$1600 – 80*x + x^2 = x^2 + 400$$
$$1200 = 80*x \quad e$$
$$x = 1200/80 = 15.$$

L'ultima espressione equivale a:

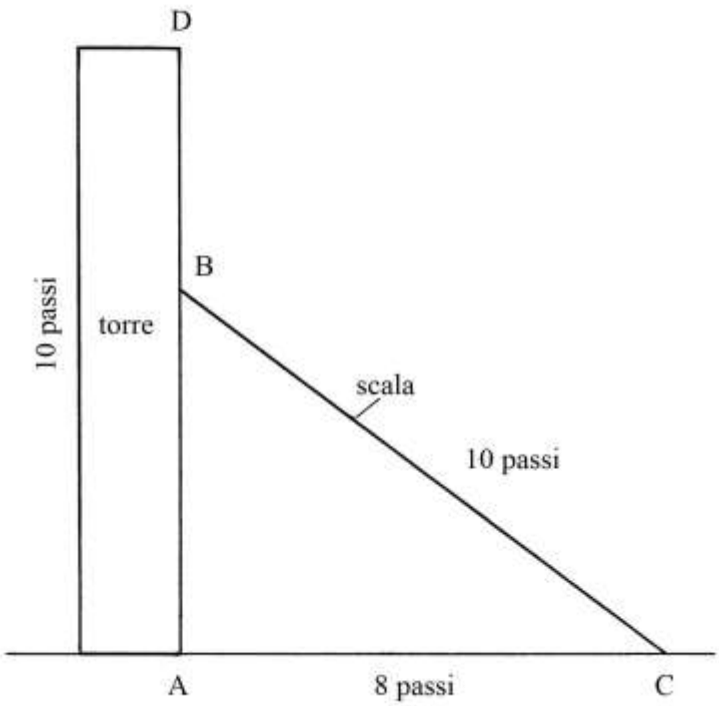
$$x = (40^2 – 20^2)/(2 * 40) = (AD^2 – AC^2)/(2 * AD).$$

- -

[64 r B] Scala appoggiata a una torre

Una torre è alta 10 passi e ad essa è appoggiata una scala anch'essa lunga 10 passi.

La cima della scala scende lungo la parete della torre e la sua base viene a trovarsi sul terreno a 8 passi dal piede della torre.



Il problema chiede di quanto si è abbassata in senso verticale la scala.

La soluzione applica il teorema di Pitagora (senza citarlo), al triangolo rettangolo ABC:

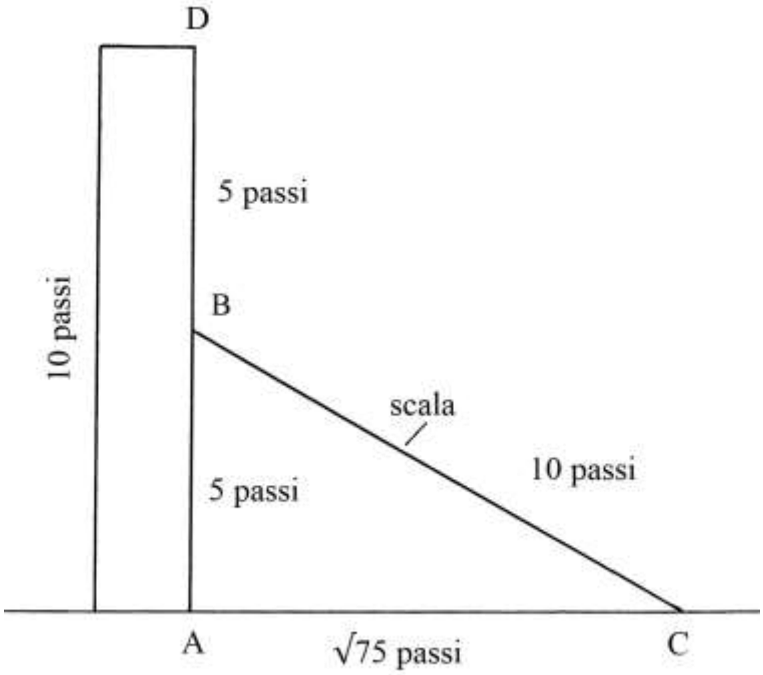
* moltiplicare per sé stessa la lunghezza della scala: 10 * 10 = 100;
* moltiplicare per sé stessa la lunghezza del cateto AC: 8 * 8 = 64;
* sottrarre dal primo quadrato: 100 – 64 = 36;
* estrarre la radice quadrata: √36 = 6 passi, lunghezza del cateto AB;
* sottrarre dall'altezza della torre: 10 – 6 = 4 passi, abbassamento della cima della scala (DB in figura).

[64 r C] Altra scala appoggiata a una torre

Una torre è alta 10 passi e una scala anch'essa lunga 10 passi vi è appoggiata.

I dati sono gli stessi della precedente Ragione.

La scala viene allontanata di 5 passi dalla cima della torre:



Ne consegue che il cateto AB è lungo:

AB = AD – BD = 10 – 5 = 5 passi.

Il problema chiede la lunghezza della distanza del piede della scala dalla base della torre: è AC nella figura.

La procedura risolutiva è la seguente:

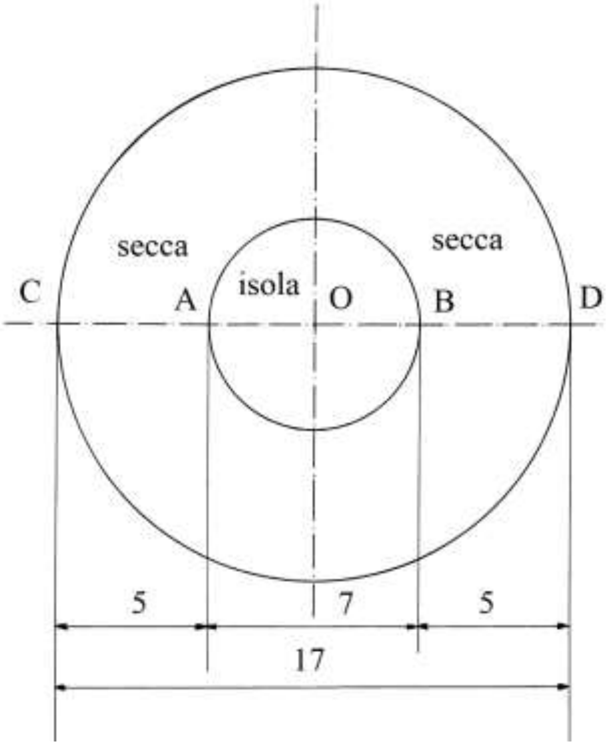
* moltiplicare la lunghezza della scala per sé stessa: 10 * 10 = 100;
* moltiplicare la lunghezza del cateto AB per sé stessa: 5 * 5 = 25;
* sottrarre da 100: 100 – 25 = 75;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{75}$ = (8 + 2/3) passi, lunghezza di AC.

L'Autore ha applicato il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo ABC.

[64 v A] <u>Isola circondata da una secca</u>

Un'isola ha diametro 7. Essa è circondata da una secca che ha una larghezza di 5.

Il problema chiede la lunghezza della circonferenza della secca.



Il diametro esterno è:

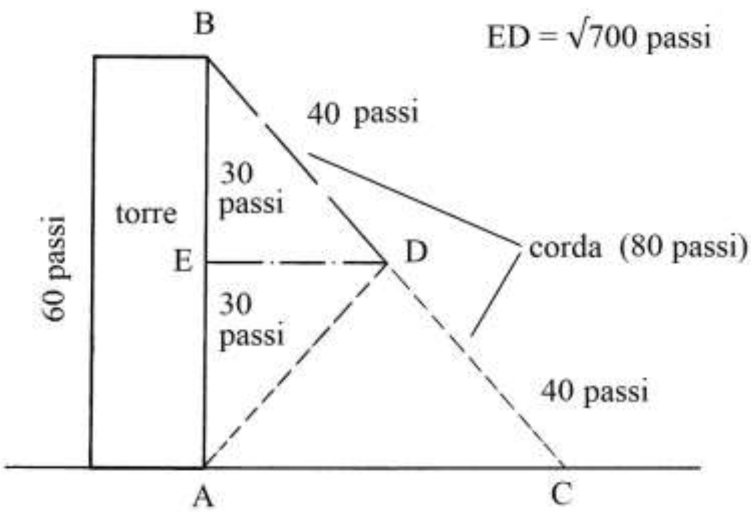
CD = CA + AB + BD = 5 + 7 + 5 = 17.

La circonferenza esterna, *c*, è lunga:

c = π * CD = 22/7 * 17 = (53 + 3/7).

[64 v B] <u>Una torre e una corda</u>

Una torre è alta 60 passi e alla sua cima è legato il capo di una corda lunga 80 passi.



La corda BC viene tirata a partire dal suo punto medio, D: il problema chiede la distanza fra il punto D e la torre (qui rappresentata dal punto E) e cioè la lunghezza di DE.

ABC è un triangolo rettangolo di cui sono note le lunghezze del cateto AB (60 passi) e dell'ipotenusa BC (80 passi). DE è un cateto del triangolo rettangolo EBD.

La lunghezza di ED è data da:

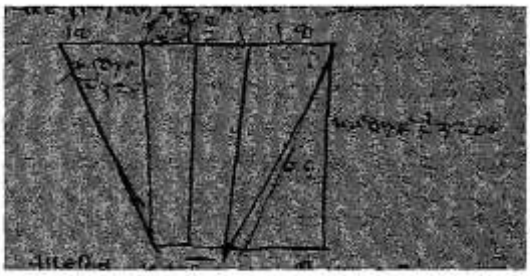
$ED^2 = BD^2 - BE^2 = 40^2 - 30^2 = 1600 - 900 = 700$ e

$ED = \sqrt{700} \approx (26 + 23/50)$ passi.

[65 r A] Area di un trapezio

Il problema presenta uno *scudo moço* e cioè un trapezio: tre suoi lati sono lunghi 48, 60 e 12.

È chiesta l'area del quadrilatero.



radixe |[26] d(e) 320 |[27]
radixe d(e) 3200 |[28]

La figura qui sopra è riprodotta da p. 134 del testo di Andrea Bocchi.

La soluzione introduce un segmento non documentato con lunghezza uguale a 20, con la seguente operazione:

$60^2 - 20^2 = 3600 - 400 = 3200.$

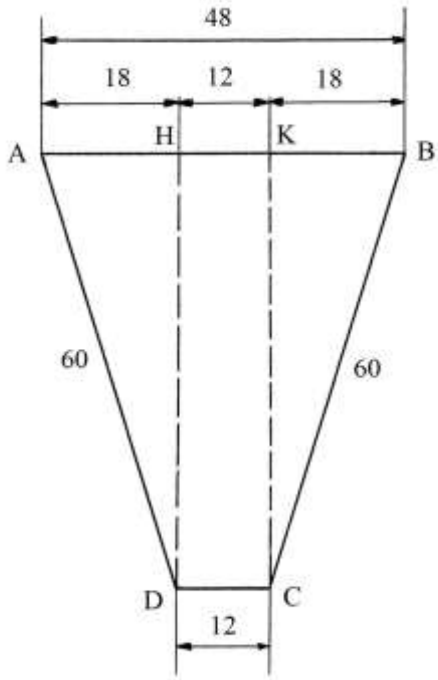
L'Autore determina così il quadrato della lunghezza di "2 facce" e cioè due lati.

A cascata è calcolata l'area del quadrilatero:

Area = $\sqrt{2880000}$.

- APPROFONDIMENTO -

Lo schema che segue propone un'interpretazione del problema:



Il trapezio è isoscele e i suoi lati obliqui, AD e BC, sono lunghi 60.

Le altezze DH e CK hanno uguale lunghezza e scompongono il trapezio in tre poligoni:

* il rettangolo DHKC;
* i triangoli rettangoli AHD e KBC, di uguali dimensioni.

L'altezza CK è lunga:

$CK^2 = BC^2 – KB^2 = 60^2 – 18^2 = 3600 – 324 = 3276$ e

$CK = DH = \sqrt{3276}$.

L'area del trapezio è:

$A_{ABCD} = [(AB + DC)/2] * CK = [(48 + 12)/2] * \sqrt{3276} = 30 * \sqrt{3276} =$

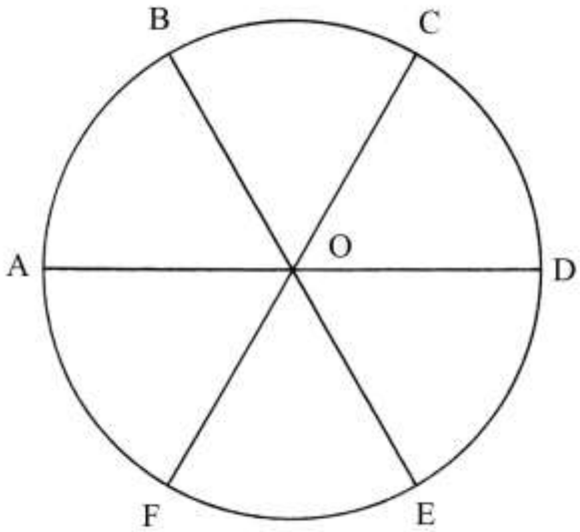
$= \sqrt{(900 * 3276)} = \sqrt{2948400} \approx (1717 + 1/11)$.

- -

[65 v] <u>Cerchio diviso in sei parti</u>

Un cerchio ha diametro AD lungo 7. Esso è diviso in sei settori di uguali dimensioni.

Il problema chiede l'area di un settore.



L'area del cerchio è:

$A_{CERCHIO} = 11/14 * AD^2 = 11/14 * 7^2 = (38 + ½)$.

L'area di un singolo settore è:

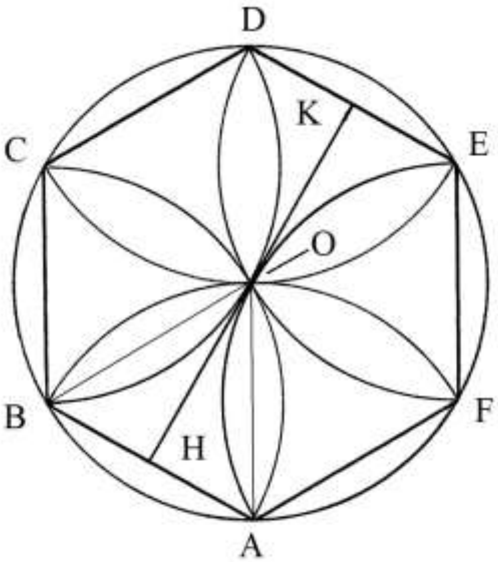
$A_{AOB} = 1/6 * A_{CERCHIO} = 1/6 * (38 + 1/2) = (6 + 5/12)$.

[66 r A] <u>Un altro cerchio diviso in sei parti</u>

Un cerchio ha le stesse dimensioni di quello della precedente Ragione: il diametro è lungo 7.

Nel cerchio è una costruzione che conduce alla tracciatura di sei triangoli equilateri inscritti: i loro vertici giacciono sulla circonferenza e sono pure vertici dell'esagono regolare inscritto ABCDEF.

Il problema chiede l'area di uno dei sei triangoli isosceli.



OH e OK sono due altezze dei triangoli equilateri ABO e DEO.

Senza fornire alcuna informazione, l'Autore afferma che l'area di uno dei sei triangoli equilateri è:

$\sqrt{(28 + 35/256)} \approx 5{,}0344$.

Verifichiamo il risultato mostrando tutti i passaggi occorrenti.

L'area di un triangolo equilatero, ad esempio quello ABO, è data da:

$A_{ABO} = AB * OH/2$.

L'altezza OH è facilmente ricavabile:

$OH^2 = OA^2 – AH^2 = OA^2 – (OA/2)^2 = ¾ * OA^2$ e

$OH = OA/2 * \sqrt{3} = AB/2 * \sqrt{3}$.

È noto che la lunghezza dei lati di un esagono regolare inscritto in un cerchio è uguale a quella del raggio. Oltre ad essere un lato dell'esagono, AB è pure un lato del triangolo equilatero ABO.

I lati di ABO sono lunghi metà del diametro:

$AB = 7/2 = (3 + ½)$.

L'area di ABO è data da:

$A_{ABO} = (AB + AB/2 * \sqrt{3})/2 = AB^2/4 * \sqrt{3} = (3 + ½)^2/4 * \sqrt{3} \approx 5{,}3044$.

Il quadrato dell'area di ABO è:

$(A_{ABO})^2 = 3 * AB^4/16 = (3{,}5^2/4 * \sqrt{3})^2 = 3 * 3{,}5^4/16 = 3 * [(7/2)^4]16 =$

$= 3 * 2401/(16 * 16) = 7203/256 = (28 + 35/256)$ che è il dato presentato dall'Autore.

L'area di uno dei sei settori circolari, come quello OAB è:

$A_{OAB} = 1/6 * A_{CERCHIO} = 1/6 * 11/14 * 7^2 = (6 + 5/12)$.

Infine, l'Autore calcola l'area di un segmento circolare come quello BHAB:

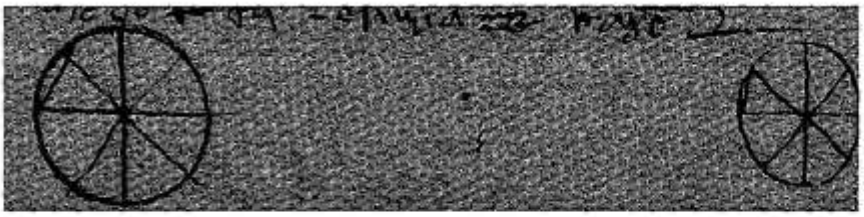
$A_{BHAB} = A_{OAB} – A_{ABO} = (6 + 5/12) – \sqrt{(28 + 35/256)}$.

[66 r B] <u>Ottagono regolare inscritto in un cerchio</u>

Un cerchio è diviso in otto parti uguali: può esservi inscritto un ottagono regolare.

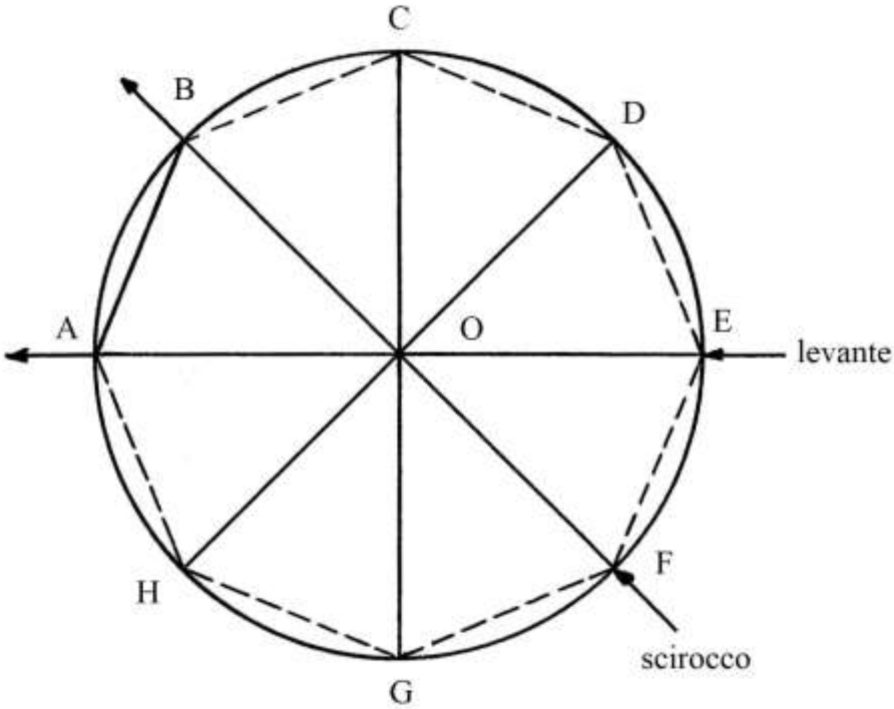
Il diametro del cerchio è lungo 20.

La figura che segue riproduce l'originale, contenuto a p. 136 del testo di Andrea Bocchi:



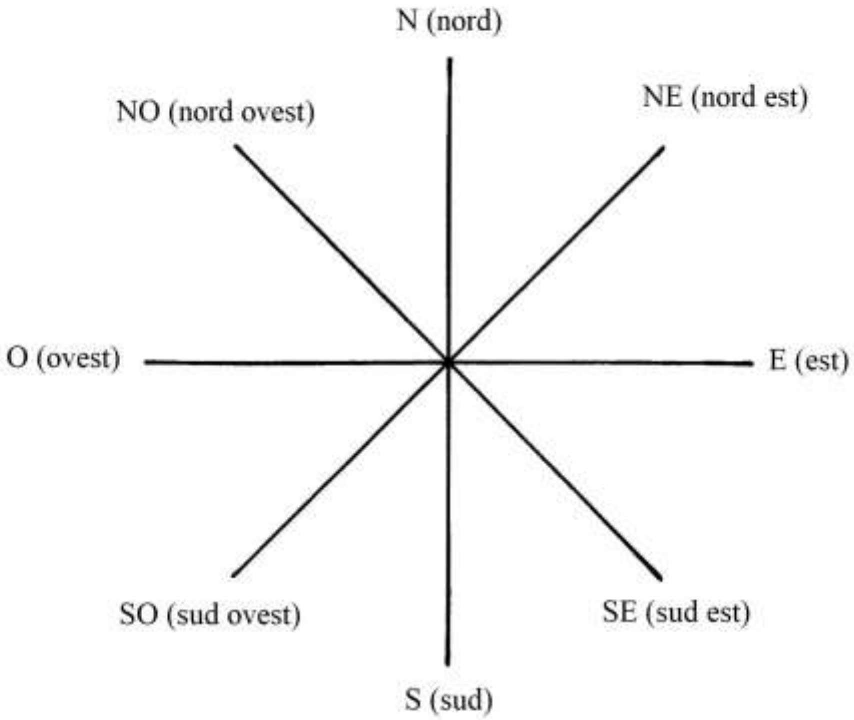
Il problema chiede la distanza fra i punti sulla circonferenza che indicano i venti di *levante* e di *scirocco*.

Lo schema che segue cerca di interpretare il problema:



Dal disegno originale pare di capire che è richiesta la lunghezza del lato AB. A e B sono allineati ai punti E e F dai quali entrano i due venti.

Lo schema ricalca la tradizionale *rosa dei venti*: essa è un diagramma che mostra la provenienza geografica dei venti che interessano una data regione:



Nel grafico sono indicati i quattro punti cardinali (N, E, S e O) e quattro punti intermedi (NE, SE, SO e NO).

La direzione Nord è il riferimento degli angoli fra le direzioni, misurati in senso orario. Fra le diverse direzioni si hanno angoli di 45°.

La tabella che segue associa i punti cardinali con gli angoli e i nomi dei venti presenti nel Mediterraneo:

Direzioni	Abbreviazioni	Angoli rispetto al Nord	Venti
Nord	N	0°	Tramontana
Nord - est	NE	45°	Grecale
Est	E	90°	Levante
Sud - est	SE	135°	Scirocco
Sud	S	180°	Ostro o Mezzogiorno
Sud – ovest	SO	225°	Libeccio
Ovest	O	270°	Ponente
Nord - ovest	NO	315°	Maestrale

Il problema si riduce a calcolare la lunghezza del lato AB.

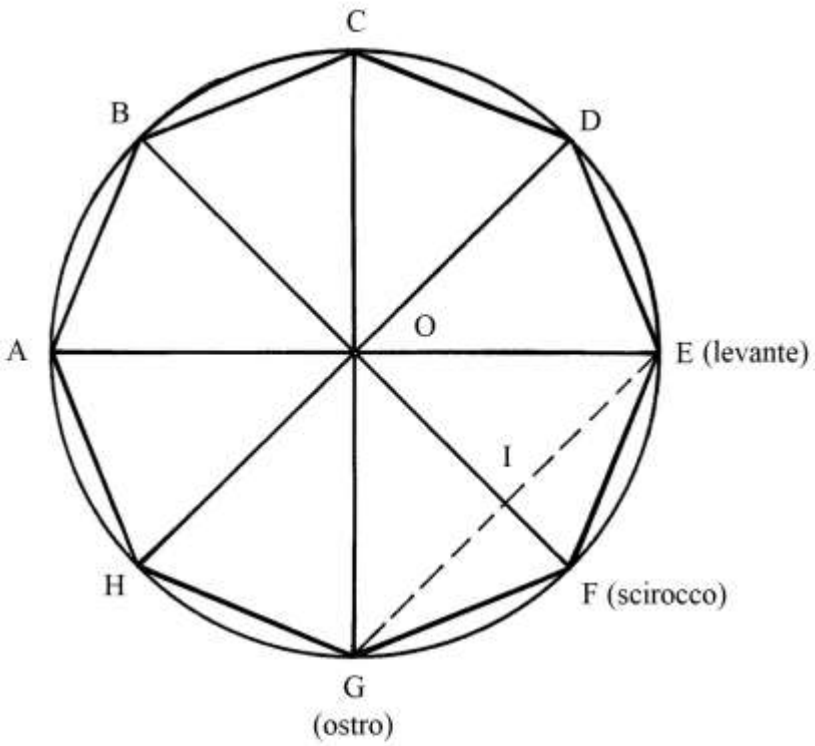
La soluzione offerta dall'Autore è assai confusa: egli giunge alla conclusione che la lunghezza cercata è:

$$[AB] = (200 - \sqrt{20000}) \approx (200 - 141{,}42) \approx 58{,}58.$$

È probabile che la corretta lunghezza di [AB] sia data dalla radice quadrata di quella espressione:

$$[AB] = \sqrt{(200 - \sqrt{20000})} \approx \sqrt{58{,}58} \approx 7{,}65.$$

Presentiamo un'ipotesi sulla procedura usata dall'Autore. Il grafico che segue può aiutare allo scopo:



EG è una corda che svolge la funzione di ipotenusa del triangolo rettangolo isoscele OEG. La sua lunghezza è data da:

$EG^2 = OE^2 + OG^2 = 10^2 + 10^2 = 200$ e

$EG = \sqrt{200}$.

La corda EG genera altri due triangoli rettangoli isosceli: sono OEI e OGI. Essi hanno uguali dimensioni: i raggi OE e OG sono le loro ipotenuse.

Si hanno le seguenti uguaglianze: OI = EI = GI.

La lunghezza di GI è data da:

$GI = EG/2 = (\sqrt{200})/2 = \sqrt{(200/4)} = \sqrt{50}$.

Il segmento IF è lungo:

$IF = OF - OI = 10 - \sqrt{50}$.

Elevare al quadrato la lunghezza di IF:

$(10 - \sqrt{50})^2 = 100 - 20 * \sqrt{50} + 50 = 150 - 20 * \sqrt{50} = 150 - \sqrt{(400 * 50)} =$
$= 150 - \sqrt{20000}$.

Elevare al quadrato la lunghezza di GI:

$GI^2 = (\sqrt{50})^2 = 50$.

Sommare al quadrato della lunghezza di IF:

$IF^2 + GI^2 = 50 + (150 - \sqrt{20000}) = (200 - \sqrt{20000})$, che è l'espressione ricavata dall'Autore quale *quadrato* della lunghezza di AB.

- APPROFONDIMENTO -

La lunghezza ℓ dei lati di un ottagono regolare inscritto in un cerchio di raggio *r* è oggi calcolata con la formula che segue:

$\ell = r * \sqrt{(2 - \sqrt{2})}$.

Nel caso concreto si ha:

$r = 20/2 = 10$

$\ell = 10 * \sqrt{(2 - 1{,}4142)} \approx 10 * 0{,}76537 \approx 7{,}65$.

Il risultato è uguale a quello sopra ipotizzato.

Trasformiamo l'ultima formula portando all'interno della radice la lunghezza del raggio:

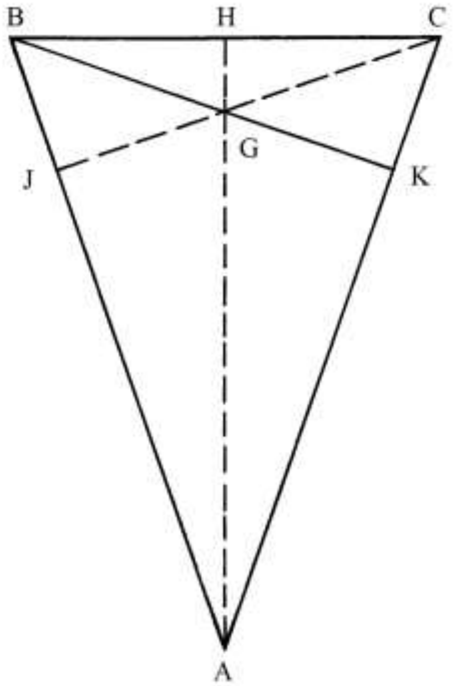
$\ell = \sqrt{(100 * 2 - 100 * \sqrt{2})} = \sqrt{(200 - \sqrt{10000 * 2})} = (\sqrt{200 - \sqrt{20000}})$.

La formula è uguale all'espressione usata dall'Autore dello Zibaldone: la sua soluzione è corretta.

- -

[66 v A] <u>Triangolo isoscele</u>

Uno scudo, un triangolo, è isoscele e ha i lati obliqui (AB e AC) lunghi 6 e quello orizzontale (BC) lungo 4:



AH, BK e CJ sono le tre altezze che si incontrano nell'*ortocentro* G.

Sembra che il problema chieda la lunghezza dell'altezza BK.

La soluzione contenuta nel manoscritto è poco comprensibile.

L'altezza AH divide ABC in due triangoli rettangoli: ABH e AHC. L'altezza AH è lunga:

$AH^2 = AB^2 - BH^2 = 6^2 - (4/2)^2 = 36 - 4 = 32$ e

$AH = \sqrt{32}$.

L'area del triangolo è:

$A_{ABC} = AH * BC/2 = \sqrt{32} * 4/2 = 2 * \sqrt{32} = \sqrt{(4 * 32)} = \sqrt{128}$.

L'area è pure data da:

$A_{ABC} = BK * AC/2 = CJ * AB/2$.

È possibile ricavare le altezze BK = CJ che hanno uguale lunghezza perché il triangolo è isoscele:

$BK = 2 * A_{ABC}/AC = (2 * \sqrt{128})/6 = (\sqrt{128})/3 = \sqrt{(128/9)} \approx 3{,}77$.

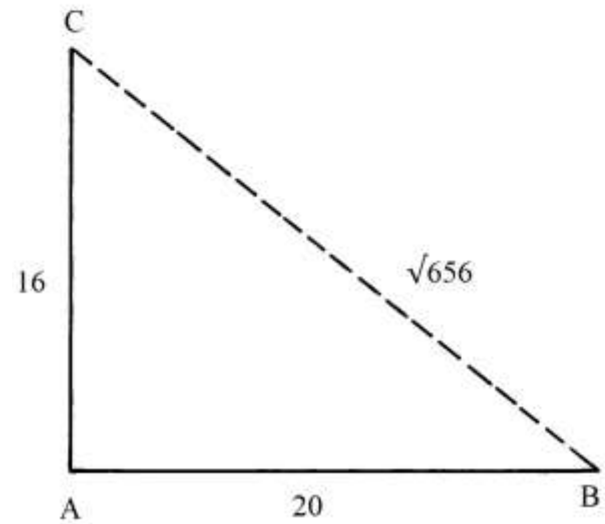
[66 v B] Cerchio inscritto in un triangolo

Il testo di questa Ragione è chiaramente incompleto.

La parte esistente chiede di inscrivere un cerchio in un triangolo di cui fornisce la lunghezza soltanto di due lati: la "faça de xoto" lunga 20 e un "oltro cha(n)to(n)" lungo 16.

Sono possibili diverse soluzioni.

Nel caso che i due lati siano i cateti di un triangolo rettangolo si ha lo schema seguente:



AB è il cateto "di sotto", lungo 20. AC è il cateto verticale, perpendicolare a AB nel vertice ("canto") A.

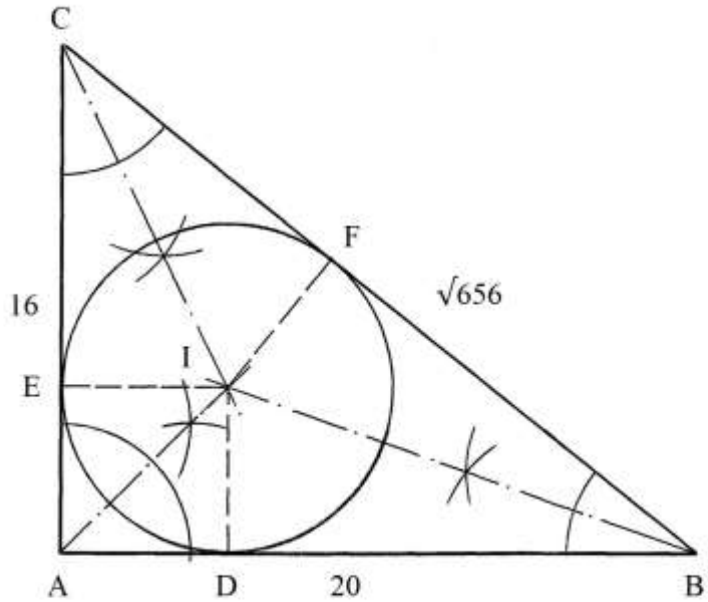
L'ipotenusa BC è lunga:

$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 20^2 + 16^2 = 400 + 256 = 656$ e

$BC = \sqrt{656} \approx 25{,}61 \rightarrow (25 + 3/5)$.

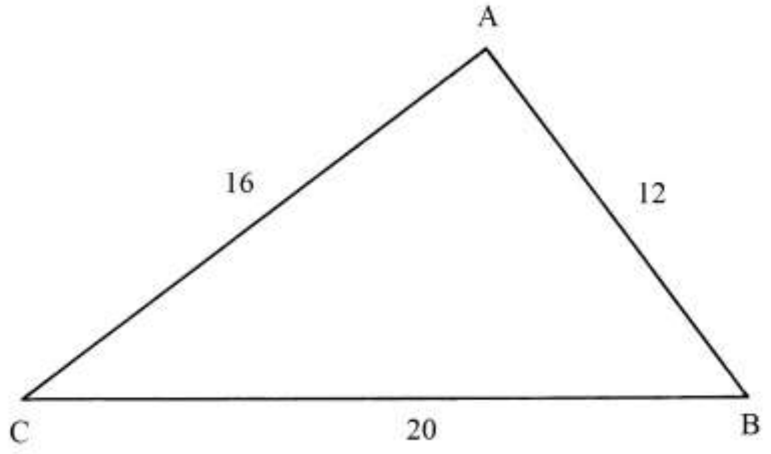
Potrebbe darsi che l'Autore non abbia completato il problema e la sua soluzione per possibili difficoltà nei calcoli.

Un cerchio inscritto in un triangolo ha il suo centro nell'*incentro* I, il punto di intersezione delle bisettrici dei tre angoli:

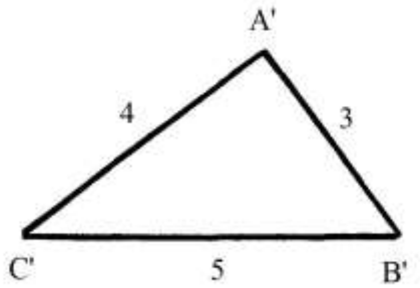


Da I sono disegnati tre raggi perpendicolari ai lati: ID, IE e IF.

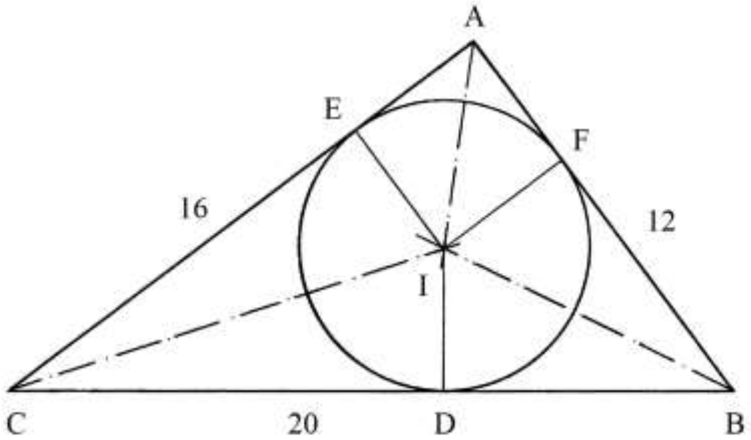
Una seconda soluzione è da data da un triangolo rettangolo con ipotenusa orizzontale lunga 20:



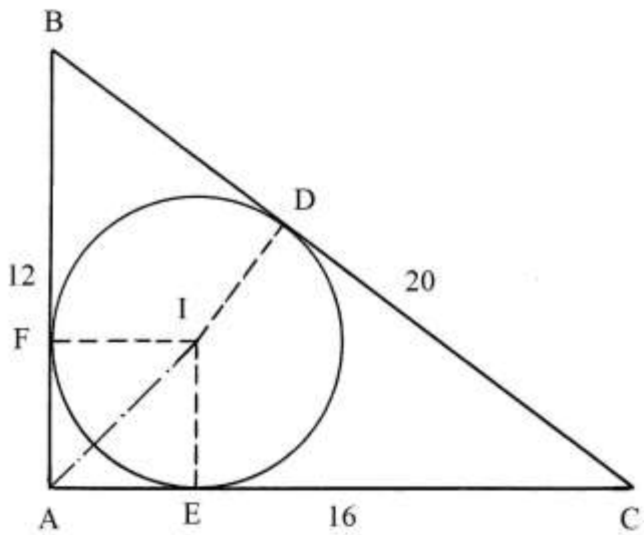
Il triangolo è rettangolo in A. Le lunghezze dei lati formano la terna 12-16-20, derivata dalla primitiva 3-4-5:



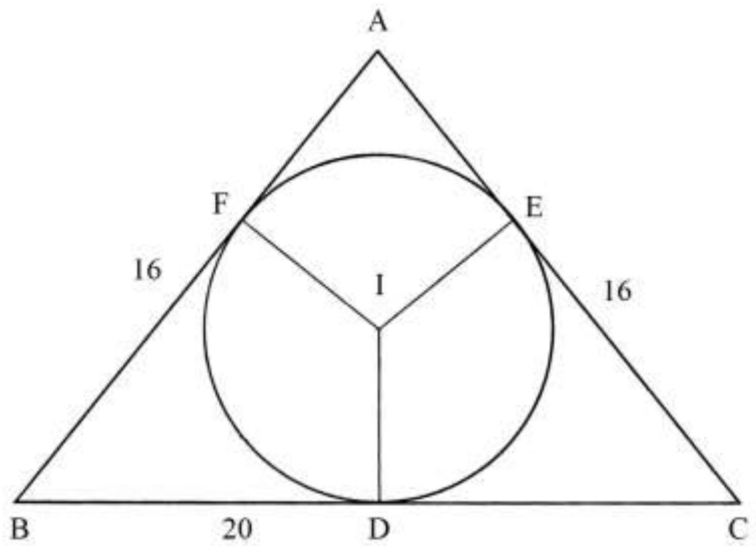
Il punto I è l'incentro di questa soluzione:



Questo triangolo può essere ruotato per disporre orizzontalmente il cateto AC:



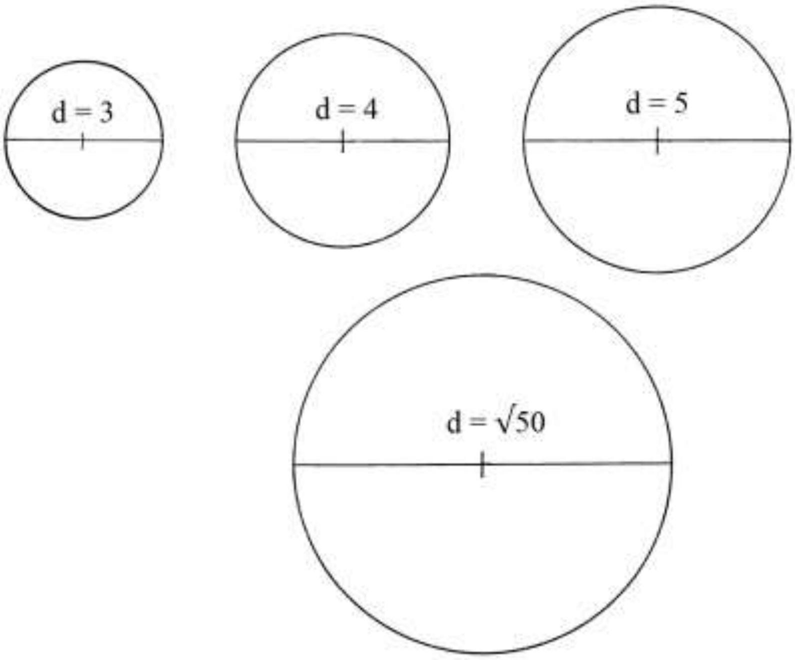
Infine, un’ultima ipotesi è quella di un triangolo isoscele con la base BC lunga 20 e i due lati obliqui lunghi 16:



[67 v A] <u>Unione di tre cerchi</u>

Tre cerchi hanno diametri lunghi 3, 4 e 5.

Essi devono essere uniti per formare un unico cerchio: il problema chiede il suo diametro.



L'area del cerchio risultante deve essere uguale alla somma delle aree dei tre cerchi di origine.

Le aree dei tre cerchi sono le seguenti:

$A_{PRIMO} = 11/14 * 3^2 = 99/14$;

$A_{SECONDO} = 11/14 * 4^2 = 176/14$;

$A_{TERZO} = 11/14 * 5^2 = 275/14$.

L'area del cerchio finale è:

$A_{FINALE} = A_{PRIMO} + A_{SECONDO} + A_{TERZO} = 99/14 + 176/14 + 275/14 = 550/14$.

L'area di questo cerchio è:

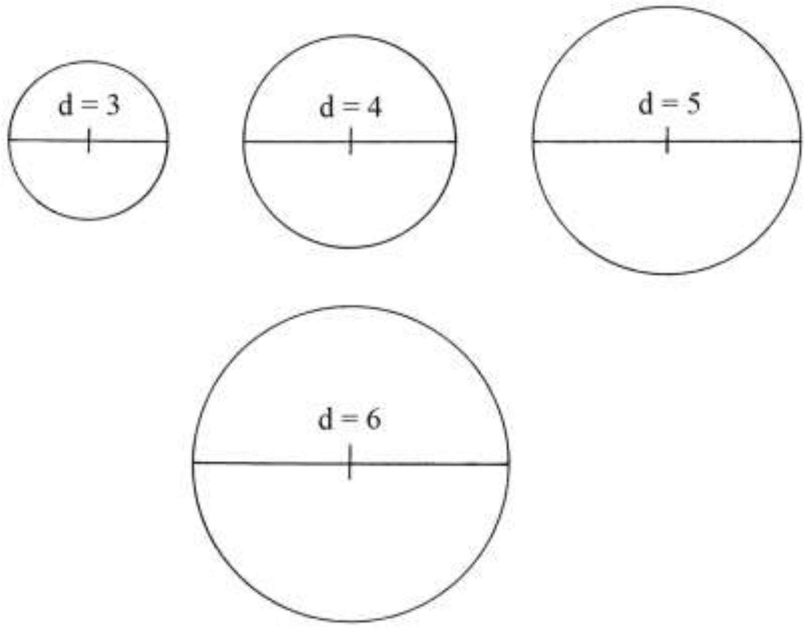
$A_{FINALE} = 11/14 * d^2$ da cui possiamo ricavare la lunghezza del diametro *d*:

$d^2 = 14/11 * A_{FINALE} = 14/11 * 550/14 = 50$ da cui

$d = \sqrt{50} \approx 7,07$.

[68 r A] Unione di tre sfere di cera

Tre sfere di cera hanno diametri lunghi 3, 4 e 5. Devono essere unite per formare un'unica sfera: il problema chiede il suo diametro.



L'Autore calcola i volumi utilizzando la costante 11/21 già utilizzata in precedenza (rivedere la Ragione [63 r A]):

$V = 4/3 * \pi * r^3 = 11/21 * r^3$.

I volumi delle tre sfere sono:

* $V_{PRIMA} = 11/21 * 3^3 = 11/21 * 27$;
* $V_{SECONDA} = 11/21 * 4^3 = 11/21 * 64$;
* $V_{TERZA} = 11/21 * 5^3 = 11/21 * 125$.

Il volume totale, che è quello della sfera finale, è:

$V_{TOTALE} = V_{PRIMA} + V_{SECONDA} + V_{TERZA} = 11/21 * 27 + 11/21 * 64 + 11/21 * 125 =$
$= 11/21 * (27 + 64 + 125) = 11/21 * 216$.

A questo volume corrisponde il diametro D:

$V_{TOTALE} = 11/21 * D^3$ da cui:
$D^3 = V_{TOTALE} * 21/11 = (216 * 11/21) * 21/11 = 216$ e
$D = (216)^{1/3} = 6$.

L'Autore non fa alcun cenno all'interessante proprietà che emerge nella soluzione di questa Ragione e relativa alla somma di tre cubi:

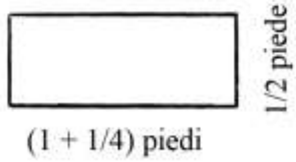
$3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$.

I quattro numeri – 3, 4, 5 e 6 – formano una progressione aritmetica di *ragione 1*.

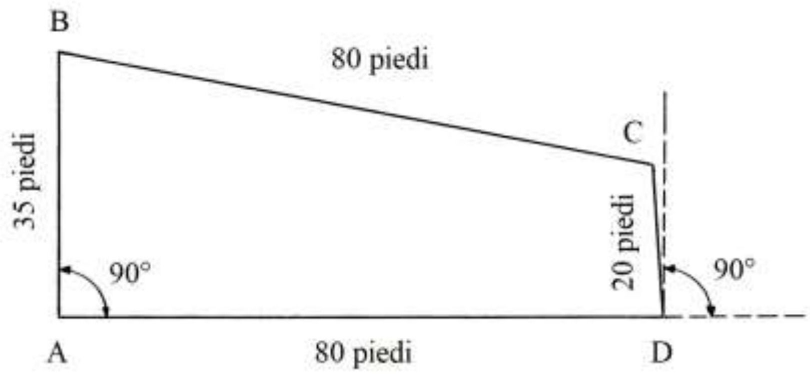
[69 v A] <u>Pavimentazione di una calle</u>

Una *salliçada* – una calle veneziana ricoperta con pietre – ha forma di un quadrilatero i cui lati hanno le seguenti dimensioni misurate in *piedi*: 80, 35, 80 e 20.

Deve essere ricoperta con pietre che hanno forma rettangolare: (1 + ¼) piedi per ½ piede. Esse hanno lati le cui lunghezze sono in proporzione 5:2:



Il problema chiede il numero di pietre occorrenti.
La soluzione proposta dall'Autore dello Zibaldone appare piuttosto oscura.
Ipotizziamo che la forma della calle sia quella mostrata nello schema che segue:



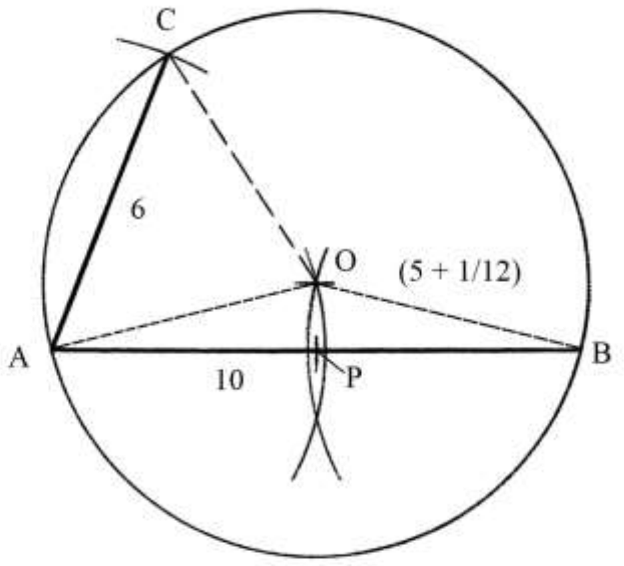
Si tratta di un *quasi* trapezio scaleno, rettangolo nel vertice A e non in quello D.
L'area massima, leggermente approssimata per eccesso, è qui ricavata con l'antica *formula degli agrimensori*:

$A_{ABCD} = (AB + CD)/2 * (AD + BC)/2 = (35 + 20)/2 * (80 + 80)/2 = 55/2 * 160/2 \approx$
≈ 2200 piedi^2.

L'Autore dello Zibaldone calcola l'area del quadrilatero in
$\sqrt{(1067046 + 3/4)} \approx 1033$ piedi^2. Andrea Bocchi segnala correttamente che il risultato è sbagliato.
L'area di una singola pietra è:
$A_{PIETRA} = (1 + 1/4) * 1/2 = 5/8$ piedi^2.
Il numero N di pietre occorrenti è:
$N_{PIETRE} = A_{ABCD}/A_{PIETRA} = 2200/(5/8) = 3520$ pietre.
Per l'Autore occorrerebbero
$\sqrt{(2651639 + 21/25)} \approx 1629$ pietre.

[70 r A] Circonferenza passante per 3 punti

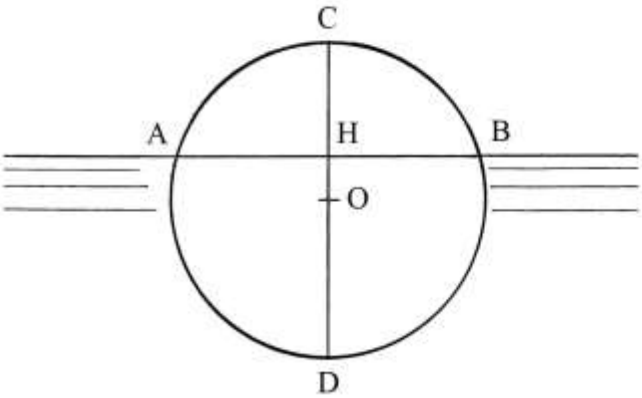
Un segmento è lungo 10 e un secondo è 6: questo ultimo è un "*cholomelo*" e cioè un segmento obliquo.
Questa Ragione non è accompagnata da alcuno schema.
Il problema chiede la posizione del centro di una circonferenza passante per "*tute le 3 ponte*": da questo vincolo segue che i due segmenti hanno un vertice in comune.
La procedura risolutiva è assai oscura e pare richiamare la regola della *falsa posizione*. Al termine, sembra che l'Autore affermi che il raggio della circonferenza è lungo (5 + 1/12).
Lo schema che segue presenta un'ipotesi, peraltro assai discutibile:



In questo esempio, l'angolo CAB è ampio 69°.
I raggi OA, OB e OC sono lunghi (5 + 1/12).

[71 v A] Colonna cilindrica parzialmente interrata

Una colonna cilindrica è parzialmente interrata: la *corda* che emerge (AB in figura) è lunga 4. L'altezza della colonna che sporge dal terreno (la *freccia* CH) è lunga (1 + ½) = 3/2.



Il problema chiede la lunghezza della circonferenza.

Possiamo risolvere il problema con l'applicazione del *teorema delle corde*, ben conosciuto dagli abacisti Toscani del Trecento e del Quattrocento.

Esso è sintetizzato nella formula:

CH : AH = HB : HD.

AH e HB sono lunghi la metà di AB: AH = HB = AB/2 = 4/2 = 2.

HD è l'incognita e la sua lunghezza è data da:

HD = (AH * HB)/CH = (2 * 2)/(3/2) = 8/3 = (2 + 2/3).

Il diametro CD è lungo:

CD = CH + HD = 3/2 + 8/3 = 25/6 = (4 + 1/6).

La lunghezza della circonferenza, *c*, è data da:

c = 22/7 * CD = 22/7 * 25/6 = (13 + 2/21).

- APPROFONDIMENTO -

Anche l'Autore fornisce lo stesso risultato. La procedura da lui impiegata contiene i seguenti passi:

* aggiungere 7/12 a (1 + ½) [lunghezza della freccia CH]: 7/12 + (1 + ½) = 25/12 = = (2 + 1/12) [l'Autore afferma che questo numero è la lunghezza di metà del diametro];
* moltiplicare per 2: (2 + 1/12) * 2 = (4 + 1/6), lunghezza del diametro;
* moltiplicare per (3 + 1/7): (4 + 1/6) * (3 + 1/7) = (13 + 2/21) lunghezza della circonferenza.

L'Autore non spiega l'origine della frazione "7/12" da lui aggiunta alla lunghezza della freccia CH: forse, è un'ipotesi, egli ha applicato *a ritroso* il *teorema delle corde*.

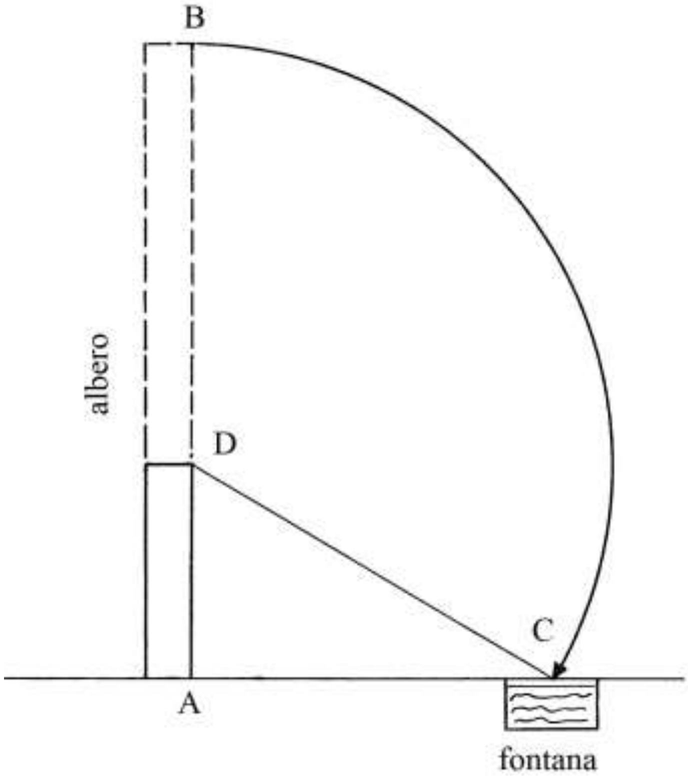
- -

[72 r A] <u>Cima di un albero caduto in una fontana</u>

Un albero è alto 70 braccia: nel terreno, a 40 braccia dal suo piede è una fontana.

L'albero si spezza e la sua cima cade nella fontana.

Il problema chiede la lunghezza della parte di tronco che è rimasta in piedi.



Risolviamo il problema con un metodo moderno.

L'altezza residua del tronco, AD, è l'incognita:

$AD = x$.

Valgono le seguenti relazioni:

$DB = DC$

$DB = AB – AD = 70 – x$

$DC^2 = AD^2 + AC^2 = x^2 + 40^2$

$DC^2 = BD^2 = (70 – x)^2$

Eguagliando le due espressioni di DC^2 si ha:

$x^2 + 40^2 = (70 - x)^2$

$x^2 + 1600 = 4900 - 140 * x + x^2$

$140 * x = 3300$

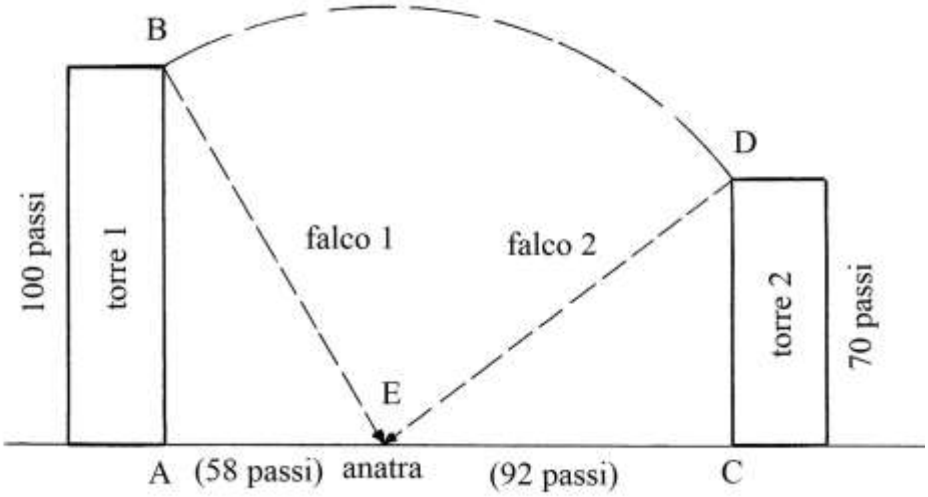
$x = 3300/140 = (23 + 4/7)$ braccia, lunghezza della parte di tronco rimasta in piedi.

La lunghezza che cade, BD, è:

$BD = 70 - (23 + 4/7) = (46 + 3/7)$ braccia.

[73 r A] <u>Due torri, due falchi e un'anatra</u>

Due torri sono alte 100 e 70 passi e distano fra loro 150 passi. Sulle cime di entrambe vi è un falco: sul terreno fra le torri è un'anatra. I due falchi giungono su questa ultima contemporaneamente: il problema chiede la distanza dell'anatra dai piedi delle due torri.



ABE e EDC sono due triangoli rettangoli: le loro ipotenuse, BE e DE, hanno uguale lunghezza.

La soluzione di questa Ragione è ottenuta applicando il teorema di Pitagora ai due triangoli rettangoli.

Fissiamo $AE = x$. Ne consegue: $EC = AC - AE = 150 - x$.

I percorsi compiuti dai due falchi hanno uguale lunghezza perché giungono nello stesso istante sull'anatra: $BE = DE$.

Valgono le seguenti espressioni:

$BE^2 = AB^2 + AE^2 = 100^2 + x^2$

$DE^2 = DC^2 + EC^2 = 70^2 + (150 - x)^2$

Le due espressioni sono equivalenti:

$BE^2 = DE^2$

$100^2 + x^2 = 70^2 + (150 - x)^2$

$10000 + x^2 = 4900 + 22500 - 300 * x + x^2$

$300 * x = 17400$ e

$x = 17400/300 = 58$ passi $= AE$.

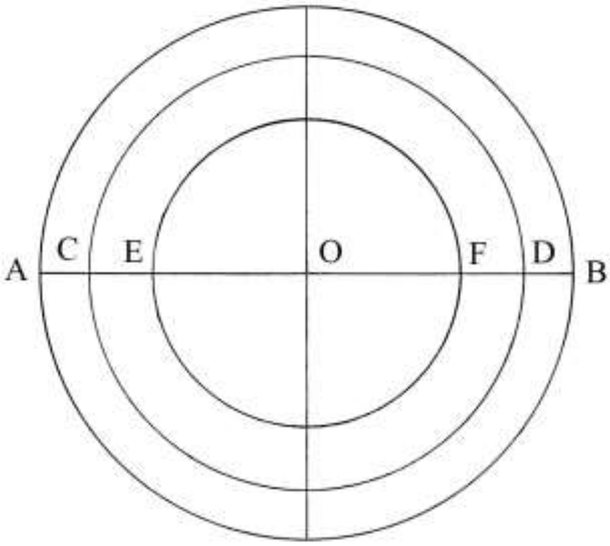
EC è lungo: $EC = 150 - 58 = 92$ passi.

[74 v A] <u>Divisione di una ruota in tre parti uguali</u>

La descrizione del problema è piuttosto oscura e lo è anche la soluzione.

Il problema della divisione di una mola in parti uguali fra più artigiani è stato affrontato, con grande chiarezza e altrettanta semplicità, da alcuni abacisti toscani: fra di essi vanno ricordati Paolo dell'Abaco (o Paolo Dagomari, 1282-1374) che affrontò l'argomento nel "*Trattato d'Aritmetica*" e Orbetano da Montepulciano (XV secolo) nelle sue "*Regole di geometria pratica*".

La mola descritta in questa Ragione dello Zibaldone ha diametro 7 piedi. Nel manoscritto non è presente alcuno schema.



L'Autore impiega una procedura che contiene i seguenti passi:

a) dividere la lunghezza del diametro [AB] per 2: 7/2 = (3 + ½);
b) moltiplicare per 22: (3 + ½) * 22 = 77;
c) dividere per 2: 77/2 = (38 + ½) piedi^2 [area del cerchio che forma la mola];
d) calcolare i 2/3 dell'area: (38 + ½) * 2/3 = (25 + 2/3);
e) moltiplicare per 14/11: (25 + 2/3) * 14/11 = (32 + 2/3);
f) dividere l'area dell'intero cerchio per 3: (38 + ½)/3 = (12 + 5/6);
g) moltiplicare per 14/11: (12 + 5/6) * 14/11 = (16 + 1/3);
h) estrarre la radice quadrata di (32 + 2/3): √(32 + 2/3) piedi [diametro CD];
i) estrarre la radice quadrata di (16 + 1/3): √(16 + 1/3) piedi [diametro EF].

- APPROFONDIMENTO -

Risolviamo il problema applicando il metodo proposto da Paolo dell'Abbaco:

* moltiplicare la lunghezza del diametro per sé stessa: 7 * 7 = 49;
* dividere per 3: 49/3 = (16 + 1/3);
* sottrarre da 49: 49 – (16 + 1/3) = (32 + 2/3);
* estrarre la radice quadrata: √(32 + 2/3) piedi, diametro interno della prima corona circolare (CD nella figura sopra);
* dividere (32 + 2/3) per 2: (32 + 2/3)/2 = (16 + 1/3);
* estrarre la radice quadrata: √(16 + 1/3) piedi, diametro del cerchio interno (EF nella figura).

Sebbene con un percorso più complicato, i risultati ottenuti dall'Autore dello Zibaldone sono uguali a quelli ricavati con il metodo di Paolo dell'Abbaco.

Al primo artigiano va la corona circolare esterna, delimitata dalle circonferenze di diametri AB e CD. Al secondo viene assegnata la corona circolare interna, racchiusa dalle circonferenze di diametri CD e EF. Infine, al terzo artigiano resta il cerchio centrale che ha diametro EF.

Tutte e tre le superfici hanno uguale area che è:

$(11/14 * 7^2)/3 = (11/14 * 49)/3 = (38 + ½)/3 = (12 + 5/6)$ piedi^2.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Ai punti e) e g) della sua procedura, l'Autore moltiplica per la costante 14/11 i rispettivi risultati parziali (25 + 2/3) e (12 + 5/6). Spieghiamone il significato: l'area A di un cerchio di diametro *d* è data da:

$A = 11/14 * d^2$.

Il quadrato del diametro, d^2, è:

$d^2 = A * 14/11$ e il diametro è:

$d = \sqrt{(A * 14/11)}$.

- -

Bibliografia

1. Bocchi Andrea (a cura di), "Lo livero de l'abbecho", Pisa, Edizioni ETS, Vol. I – Introduzione e testo critico, 2017, pp. 524.
2. Bocchi Andrea, "Lo Zibaldone Riccardiano 2161". Una pratica di mercatura veneziana del primo Trecento, Udine, FORUM, 2021, pp. 299.
3. Calzolani Sergio, "Terne pitagoriche", 2018, pp. 41, terne_pitagoriche.pdf in www.geometriapratica.it.
4. Calzolani Sergio, "Erone.pdf", 2021, pp. 84, in www.geometriapratica.it.
5. Ferraro Alfredo, "Dizionario di metrologia generale", Bologna, Zanichelli, 1959, pp. XVI+270.
6. Istituto Centrale di Statistica, "Misure locali per le superfici agrarie", Roma, A.B.E.T.E., 1950, seconda edizione, pp. 191.
7. Martini Angelo, "Manuale Di Metrologia: Ossia, Misure, Pesi e Monete in Uso Attualmente E Anticamente Presso Tutti I Popoli", Torino, Ermanno Loescher, 1883, pp. VIII+904.
8. Ministero di Agricoltura, "Tavole di Ragguaglio dei Pesi e delle Misure Già in Uso Nelle Varie Provincie del Regno Col. Peso Metrico Decimale Approvate con Decreto Reale 20 Maggio 1877, N. 3836", Roma, Stamperia Reale, 1877, pp. 767.
9. Piva Vittorio, "Manuale di Metrologia delle Tre Venezie e della Lombardia", Venezia, Tipografia S. Marco, 1935, pp. XVI+200.
10. Scolari Massimo, "Il disegno obliquo. Una storia dell'antiprospettiva", Venezia, Marsilio Editori, 2005, pp. 348.
11. "Tavole di Ragguaglio dei pesi e delle misure già in uso nelle varie provincie del Regno col peso metrico decimale", R.D. 20 maggio 1877 n. 3836, Roma, Stamperia Reale, 1877, pp. VIII+768.
12. "Zibaldone da Canal. Manoscritto mercantile del sec. XIV", Venezia, Comitato per la pubblicazione delle fonti relative alla storia di Venezia, 1967, a cura di Alfredo Stussi, con studi di F. C. Lane, Th. E. Marston, O. Ore, 1967, pp. LXXVI+159, con 21 tavole f.t.
13. Zupko Ronald Edward, "Italian Weights and measures from the Middle Ages to the Nineteenth Century", Philadelphia, American Philosophical Society, 1981, pp. lxxx.