sergio(punto)calzolani(at)outlook(punto)it

Parole chiave: cerchio; circonferenza; unità di misura lineari, superficiali e volumetriche usate a Firenze; area dei quadrilateri; area di un triangolo con la formula di Erone; triangoli; triangolo 13-14-15; pentagono; esagono; ettagono; ottagono; ennagono; segmenti circolari; teorema delle corde; volume dei solidi; sfera; cilindro; piramide; cono; tetraedro; poligoni inscritti; altezza di torri; altezza di alberi; corone circolari; uso archipendolo; uso quadrante

IL "TRATTATO DI GEOMETRIA PRATICA"
(di ANONIMO FIORENTINO, dal codice L.IV.18
della Biblioteca Comunale di Siena)

- NOTE -

* Negli schemi contenuti nell'edizione di Annalisa Simi, le lettere e le cifre sono scritte in carattere *corsivo*. In questo articolo le lettere e le cifre apposte sui disegni sono quasi sempre in carattere tondo.

* I problemi o *ragioni* sono contrassegnati con la numerazione attribuita da Annalisa Simi nella sua trascrizione, citata in bibliografia.

* Alcuni argomenti sono trattati con maggiore ampiezza in appositi APPROFONDIMENTI separati da un punto vista grafico.

* I numeri indicati con delle cifre racchiuse fra *parentesi* tonde, come 0,(66), sono *periodici*: ,(66) è il periodo.

* Allo scopo di semplificare l'esposizione, per la divisione è usata la barra " / " invece della barra orizzontale "----- " o dei due punti " : ".

Per la moltiplicazione è usato il simbolo "*", invece dei più comuni " x " o " • ".

* Nel testo, l'Anonimo ha usato i simboli "i/c", "co." e "1/z" per rappresentare nell'ordine le prime due l'incognita che oggi viene indicata con "x" e la terza, "z", per il quadrato dell'incognita: "$1/c^2$" = "1/z": in questo articolo, in luogo di "1/z" è impiegato il simbolo "x^2".

Le Ragioni interessate al loro uso sono: 12, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56 e 57.

Nella sua trascrizione, la curatrice Annalisa Simi ha conservato i simboli originali usati dall'Anonimo Fiorentino.

* Dato che nel manoscritto i problemi non sono stati numerati dall'Autore, qui sono utilizzati i numeri che Annalisa Simi ha introdotto nella sua trascrizione inserendoli fra parentesi quadre […].

* Gli schemi originali sono stati quasi tutti ridisegnati, cercando di conservare le lettere – maiuscole o minuscole – apposte nell'originale, e aggiungendo altre lettere maiuscole ove ritenute necessarie.

* In alcuni casi sono stati riprodotti i disegni originali.

* Le aggiunte e i commenti di chi scrive sono racchiusi fra parentesi quadre: […].

* L'Autore usa numeri misti, come somma di un numero naturale e di una frazione propria (5 + 2/5) invece del corrispondente (5,4): egli non usa mai il simbolo infisso dell'addizione (+) che qui è stato sempre inserito. L'Autore scrive (5 2/5) invece di (5 + 2/5).

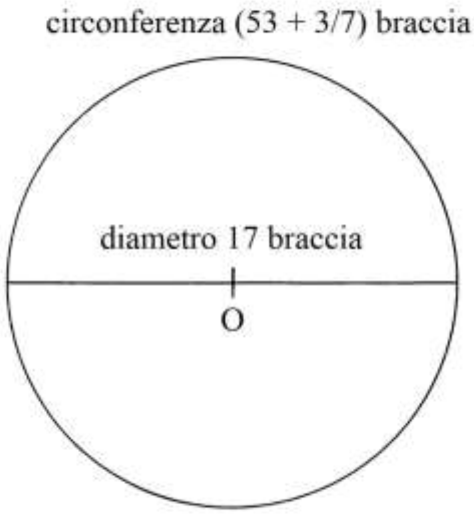
*	Gli argomenti delle Ragioni non seguono un ordine logico: problemi di geometria piana e di geometria solida si susseguono senza un apparente criterio. Sono anche presenti alcune ripetizioni. Il manuale potrebbe essere il frutto di una serie di appunti raccolti sia allo scopo di ricordare soluzioni impiegate in casi concreti sia quale testo per l'insegnamento. Occorrerebbe verificare quale conoscenza o circolazione abbia avuto.

- -

Ragione 1

Il problema affronta il calcolo della lunghezza della circonferenza di un cerchio di cui è conosciuta la lunghezza del diametro.

Sono accennati diversi casi, ma solo di uno è presente lo schema:



Il diametro *d* è lungo 17 braccia. La circonferenza *c* è lunga:

c = d * (3 + 1/7).

L'Autore indica il numero misto (3 + 1/7) che scrive nella forma (3 1/7) senza l'operatore infisso "+". In questo articolo sarà sempre inserito il simbolo dell'addizione "+".

L'espressione (3 + 1/7) equivale a 22/7 ed è il valore approssimato di π, introdotto da Archimede.

La circonferenza è lunga:

c = 17 * (3 + 1/7) = 17 * 22/7 = (53 + 3/7) braccia.

La riprova che l'Autore suggerisce è semplice e unica: è la misura di quanto gira intorno.

Altri casi sono suggeriti nel testo:

*	un cerchio ha diametro 20 braccia e la circonferenza è data da:
	c = d * (3 + 1/7) = 20 * 22/7 = (62 + 6/7) braccia;
*	un cerchio ha diametro 28 braccia e la sua circonferenza è lunga:
	c = 28 * (3 + 1/7) = 28 * 22/7 = 88 braccia;
*	infine, un terzo cerchio ha diametro 50 braccia e la sua circonferenza vale:
	c = 50 * (3 + 1/7) = 50 * 22/7 = (157 + 1/7) braccia.

Lo schema che segue è riprodotto dall'edizione della Simi:

L’unità di misura è abbreviata con la sigla “br” ed è scritta prefissa al suo valore: oggi il simbolo di una unità di misura segue il modulo numerico che esprime la grandezza.

L’unità di misura usata è il *braccio*: con ogni probabilità si tratta del *braccio da panno fiorentino*.

Nei successivi schemi l’unità di misura “braccio” sarà talvolta abbreviata in “br”.

È da notare che la lettera “b” di “br” che compare negli schemi è tagliata orizzontalmente, come è visibile nello schema qui sopra riprodotto.

Il carattere può essere ottenuto in Word con la combinazione di tasti

048C, Alt + X: Ҍ.

Esso fa parte del set di caratteri cirillici.

- APPROFONDIMENTO -

<u>Le unità di misura lineari usate a Firenze</u>

L’Autore del trattato è probabilmente fiorentino e lo completò nel 1460. Vediamo di conoscere le unità di misura che egli usò.

Nel Medioevo, a Firenze erano usate due unità di misura della lunghezza:

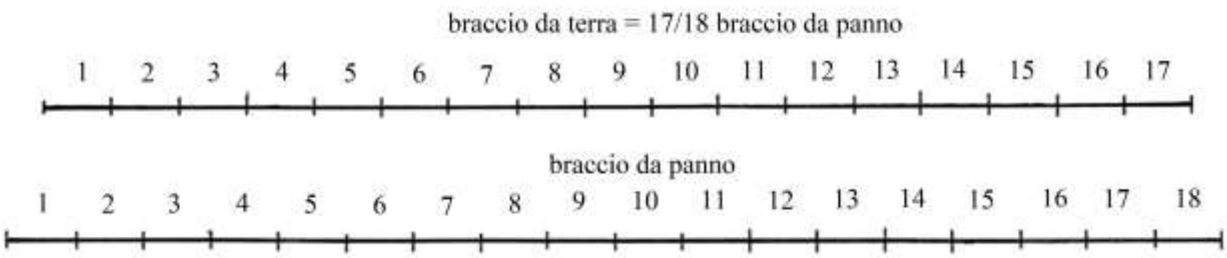
* il *braccio da panno* o *braccio a panno* (“braccio di Calimala”, dal nome della strada fiorentina che ospitava molte botteghe di artigiani tessili): esso era lungo l’equivalente di 58,3626 cm;
* al suo fianco, per le misure itinerarie era usato il *braccio da terra* o *braccio a terra*.

Le due unità di misura lineare erano legate da un rapporto fisso:

$$1 \text{ braccio da terra} = (17/18) * \text{braccio da panno} \approx$$
$$\approx 58{,}3626 * (17/18) \approx 55{,}1202 \text{ cm} .$$

Molte grandi opere edilizie furono progettate con misure espresse in *braccia da panno* e suoi multipli e sottomultipli.

Il *braccio da terra* ebbe limitata importanza e fu soppresso con l’editto granducale del 13 marzo 1781. Fu usato nella misurazione dei terreni agricoli e nella stesura delle relative mappe catastali.



Non è chiara la ragione che portò a fissare il rapporto 17/18 fra le lunghezze delle unità fiorentine del *braccio a terra* e del *braccio a panno*.

Alcune mappe catastali toscane risalenti agli ultimi secoli del Granducato contengono riferimenti a misure di terreni effettuate con una *canna di sei braccia a terra*: era uno strumento di legno, metallico o di corda? Essa aveva lunghezza uguale a:

canna di sei braccia a terra = 6 * (17/18 di braccio a panno) = 5 + 2/3 braccia da panno ≈ ≈ 3,307 metri.

Come avveniva per il *fiorino*, il *braccio da panno* fiorentino era diviso in 20 *soldi* e ciascun soldo era ripartito in 12 *denari*: per le monete e per le unità di misura lineari furono usati gli stessi termini e uguali rapporti, sempre secondo la doppia base 20 e 12.

La tabella che segue elenca i multipli (il *miglio*, la *pertica*, la *canna mercantile*, il *passetto*) e molti sottomultipli del *braccio da panno*:

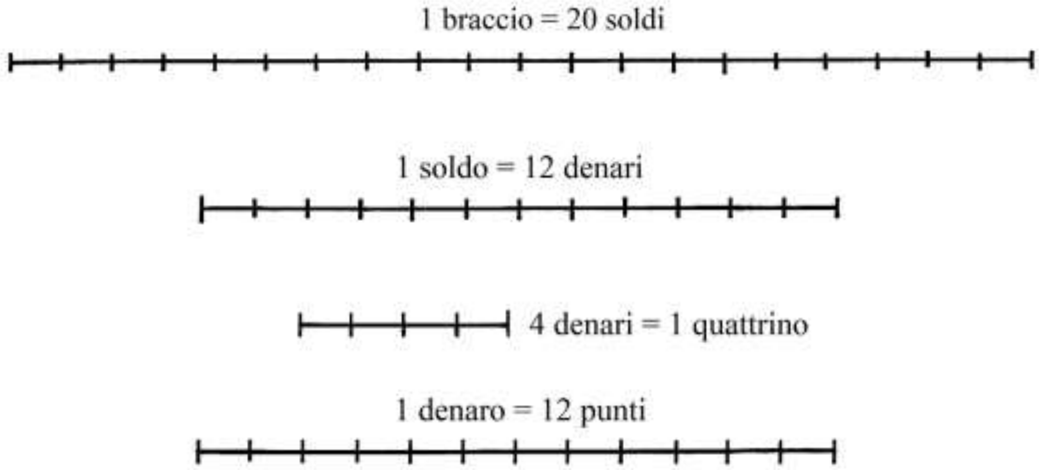
Unità	Rapporti	Equivalenze in metri o in centimetri
Miglio	2833,33 braccia da panno	1653,607 m (*)
Pertica (canna agrimensoria)	5 braccia	2,918 m
Canna mercantile	4 braccia	2,3345 m
Passetto	2 braccia	1,1673 m
Braccio da panno	20 soldi	58,3626 cm
Palmo	½ braccio	29,1813 cm
Oncia o crazia	1/12 di braccio	4,863 cm
Soldo	12 denari	2,9181 cm
Quattrino	4 denari = 1/60 di braccio	0,9727 cm
Denaro	12 punti	0,2432 cm
Punto		0,0203 cm
1 braccio e 1/4		72,9532 cm
16 soldi		46,69008 cm
¾ di braccio	15 soldi	43,7718 cm
2/3 di braccio		38,9084 cm
3/10 di braccio	18 quattrini	17,50778 cm

(*) Il *miglio* era lungo 3000 *braccia da terra* e quindi:

1 miglio = 3000 braccia da terra = 17/18 * 3000 = 2833,33 braccia da panno.

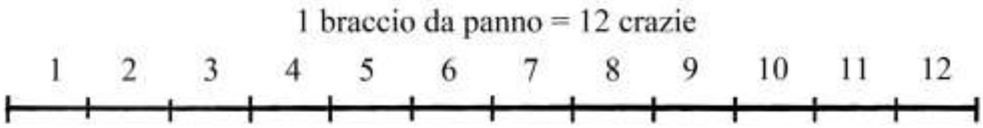
Braccio era sinonimo di *cubito*.

La *canna ferrata*, usata in edilizia, era lunga quanto una canna mercantile e cioè 4 braccia da panno: probabilmente essa recava incise le tacche rappresentative dei sottomultipli della canna e del braccio.



Il braccio da panno prevedeva un doppio sistema di sottomultipli:

* 1 braccio = 20 soldi; 1 soldo = 12 denari; 1 braccio = 240 denari (che è il sistema contenuto nella precedente tabella).
* 1 braccio = 12 once o *crazie*; 1 oncia = 20 denari; 1 braccio = 240 denari.



I due metodi condividevano la proporzione 1 braccio da panno = 240 denari.
Il rapporto fra il soldo e l'oncia (o crazia) era:

1 soldo : 1 oncia (o crazia) = 12 denari : 20 denari   e quindi
1 soldo : 1 oncia (o crazia) = 3 : 5 .

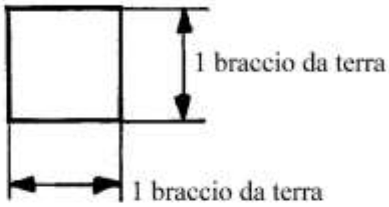
Stando alla tradizione la lunghezza del braccio da panno fu ritenuta equivalente a quella di *2 piedi romani*, lunghi ciascuno 29,57 cm:

1 braccio ≈ 2 piedi → 58,3626 cm ≈ 2*29,57 cm → 58,3626 cm ≈ 59,14 cm.

Anche il *panno da terra* si divideva in 20 soldi e ciascun soldo in 12 denari, con lunghezze pari ai 17/18 di quelle dei corrispondenti soldi e denari del braccio da panno.

<u>Le unità di misura delle superfici a Firenze anteriori alla riforma del 1781-1782</u>

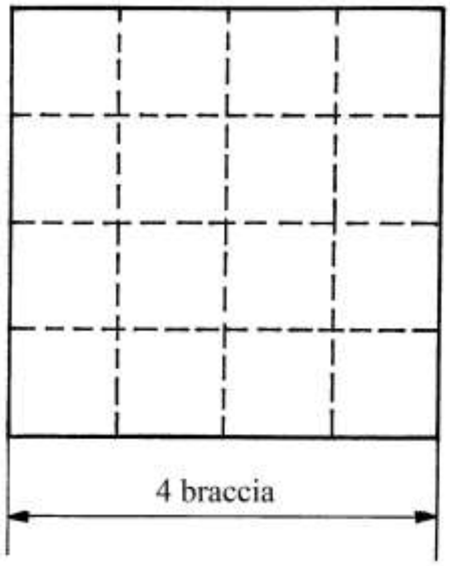
Fino alla riforma del 1781-1782, le unità di misura delle superfici agrarie usate a Firenze erano basate sul *braccio quadro da terra*.



La sua area era:

1 braccio^2 da terra = (1 braccio a terra)^2 ≈ (0,551202 m)^2 ≈ 0,303824 m^2.

Era pure usato un multiplo del braccio quadro, la *canna quadra*, equivalente all'area di un quadrato con lati lunghi 4 braccia:



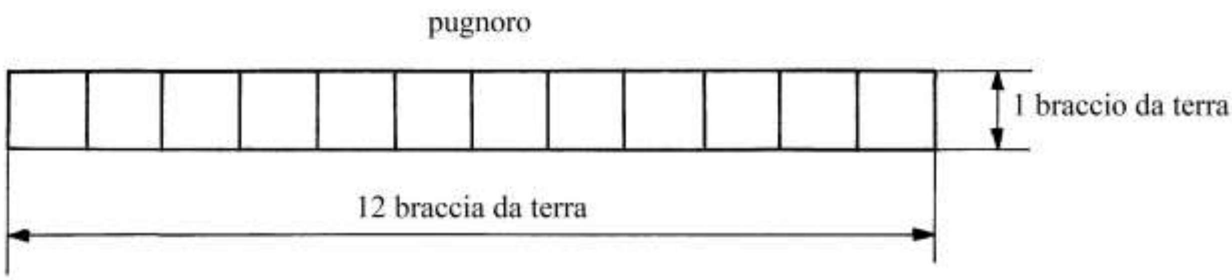
La canna quadra poteva essere basata sia sul braccio da terra sia su quello da panno (e dopo la riforma leopoldina del 1781-1782 solo questo ultimo braccio poteva essere usato):

* 1 canna quadra (da terra) = (4 braccia da terra)^2 ≈ (4 * 0,551202)^2 ≈ 4,8612 m^2.
* 1 canna quadra (da panno) = (4 braccia da panno)^2 ≈ (4 * 0,583626)^2 ≈ 5,45 m^2.

Come accadeva alle unità di misura di Pisa, la serie dei multipli del braccio quadro da terra fiorentino formava una progressione di ragione 12.

Il primo multiplo era il *pugnoro* che valeva 12 braccia^2:

1 pugnoro = 12 braccia^2 a terra ≈ 12*0,3038 ≈ 3,6459 m^2.



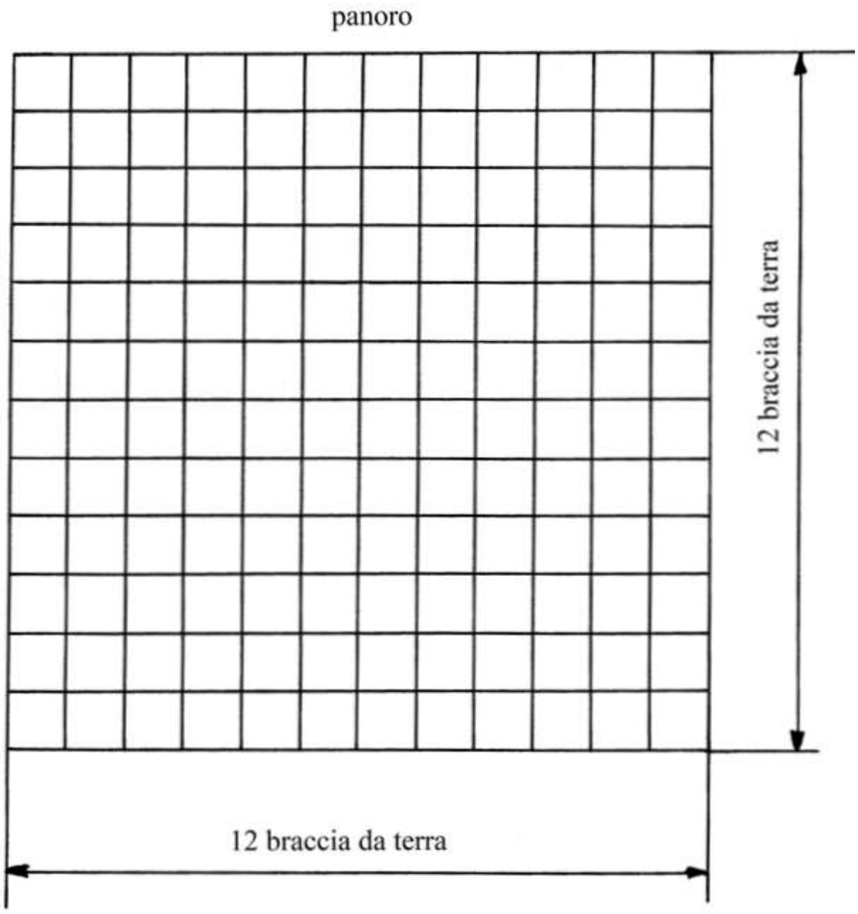
Il pugnoro è qui rappresentato come un rettangolo di dimensioni

(12*0,551202) * 0,551202 = 6,614424 * 0,551202 m.

Nello schema qui sopra i quadrati rappresentanti le dodici braccia quadre sono stati disegnati affiancati: anche il pugnoro costituiva un'applicazione del metodo delle *linee larghe*?

Il successivo multiplo era il *panoro*, uguale a 12 pugnora e quindi uguale a

$(12 \text{ braccia da terra})^2 = 144 \text{ braccia}^2 \approx 144 * 0{,}3038 \approx 43{,}75 \text{ m}^2$:

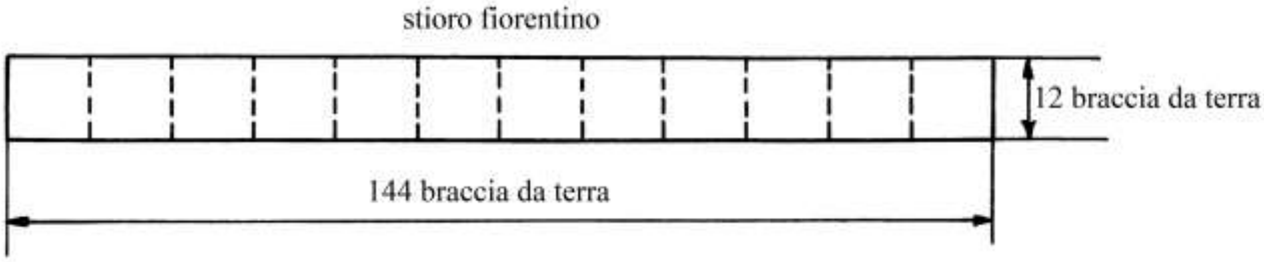


Il panoro poteva essere rappresentato, come fatto qui sopra, come un quadrato con lati lunghi

12 braccia da terra ≈ 12 * 0,551202 ≈ 6,614424 m.

Lo *stioro fiorentino* (o *staioro a corda*) era la superficie contenente 12 panora e quindi

$12*12^2 \text{ braccia}^2 = 12^3 \text{ braccia}^2 = 1728 \text{ braccia}^2$, equivalenti a $12 * 43{,}75 \approx 525 \text{ m}^2$.

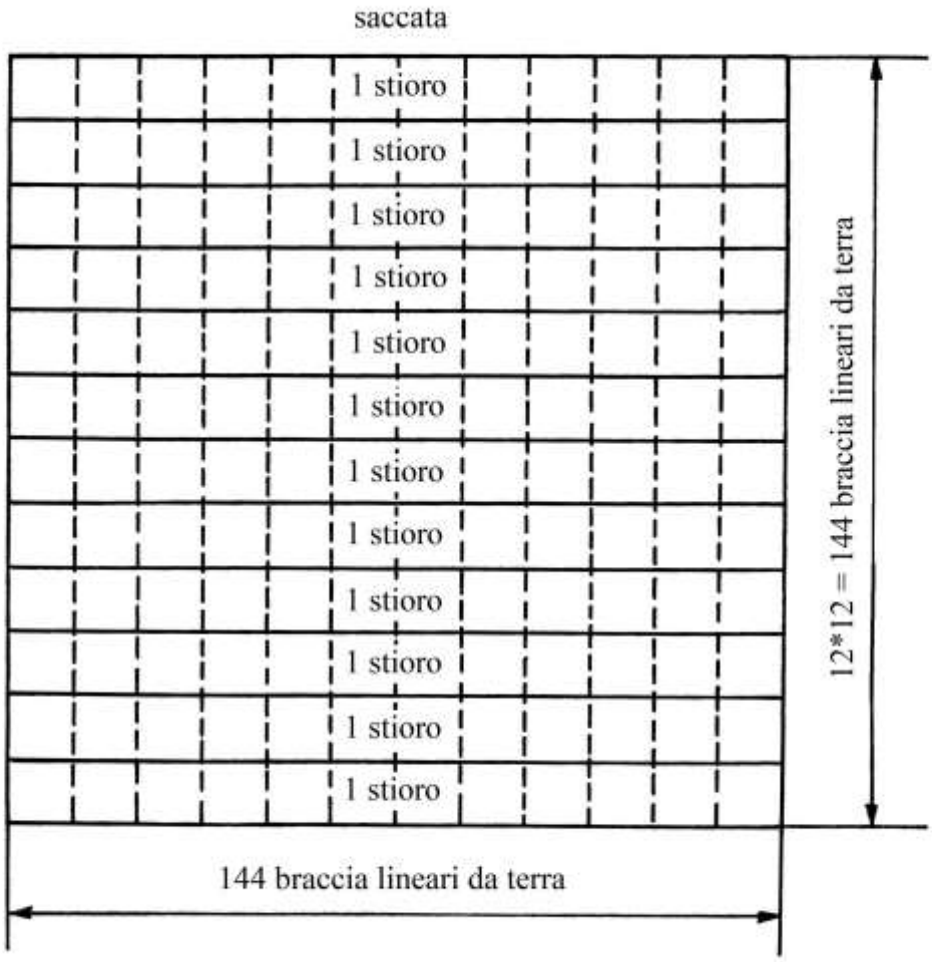


Lo stioro era un rettangolo di dimensioni

144*12 braccia = (144*0,551202) * (12*0,551202) ≈ 79,373088 * 6,614424 m.

Anche questa rappresentazione dello stioro riporta a un'applicazione del metodo delle *linee larghe*?

Infine, la *saccata* era il multiplo più grande e equivaleva a 12 stiora:



La saccata aveva area uguale a:

1 saccata = 12 stiora ≈ 12*525 ≈ 6300 m^2.

Essa era rappresentabile come un quadrato con lati lunghi 144 braccia lineari da terra:

lato ≈ 144 * 0,551202 ≈ 79,373088 m.

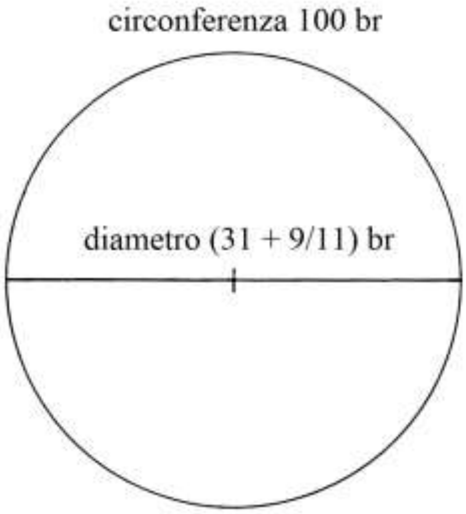
La tabella che segue riassume i rapporti fra le unità di misura superficiali in uso a Firenze fino alla riforma del 1781-1782:

Unità di misura	Rapporti con il braccio quadro da terra
Braccio^2 da terra	1
Pugnoro	12
Panoro	12^2 = 144
Stioro fiorentino (staioro a corda)	12^3 = 1728
Staioro a seme (= 3 stiora)	3*12^3 = 5184
Saccata	12^4 = 20736

- -

Ragione 2

Un cerchio ha circonferenza lunga 100 braccia: deve essere ricavata la lunghezza del suo diametro.



Dato che nella soluzione della precedente Ragione è stata introdotta la regola secondo la quale a 1 braccio della lunghezza del diametro corrisponde una lunghezza della circonferenza di (3 + 1/7) braccia, in questo caso va impiegata la regola inversa:

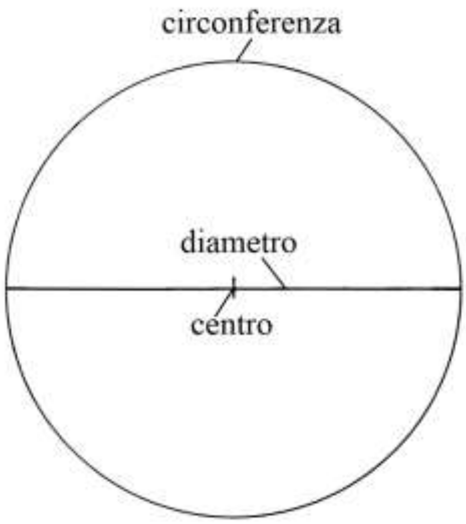
d = c/(3 + 1/7) = 100/(22/7) = 700/22 = (31 + 9/11) braccia.

Il testo propone altri casi (non accompagnati da schemi):

* un cerchio ha circonferenza *c* lunga 44 braccia: il suo diametro *d* è:
  d = c/(3 + 1/7) = 44/(22/7) = 14 braccia;
* un terzo cerchio ha circonferenza *c* lunga 88 braccia: il suo diametro *d* è:
  d = c/(3 + 1/7) = 88/(22/7) = 28 braccia.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

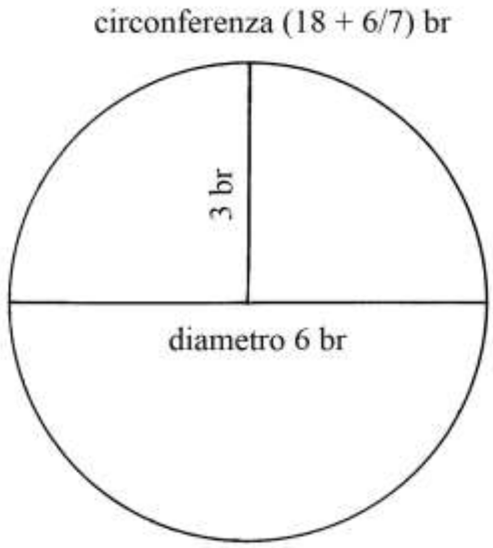
In un cerchio sono distinte tre entità geometriche: un punto, il *centro*, nel quale va posto l'ago del compasso, la *circonferenza* che delimita l'area del cerchio e il *diametro* che va da un estremo all'altro della circonferenza passando per il centro.



Infine, tutte le linee che si dipartono dal centro e vanno alla circonferenza hanno uguale lunghezza, sono i *raggi* che sono infiniti.

<u>Ragione 3</u>

Un compasso ha apertura uguale a 3 braccia e con esso è misurata una circonferenza:



Il diametro *d* è lungo il doppio del raggio *r* e cioè è 6 braccia.
La circonferenza *c* è lunga:

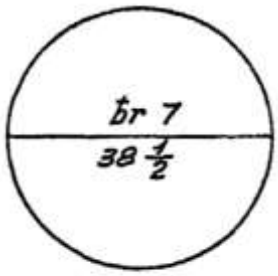
$c = d * (3 + 1/7) = 3 * 22/7 = (18 + 6/7)$ braccia.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

La stessa Ragione affronta poi un problema:

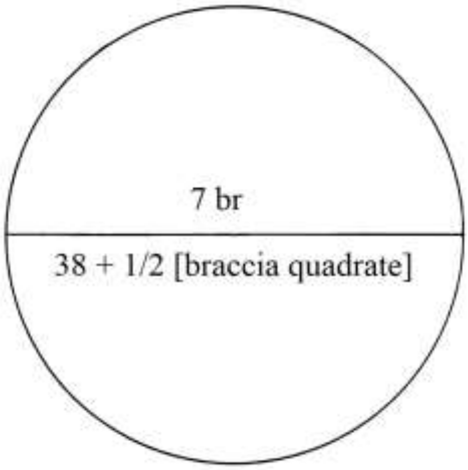
"*Per 12 modi rechare il tondo a quadro*" e cioè offre dodici diversi metodi per calcolare l'area di un cerchio.

I dodici metodi sono accompagnati da altrettanti identici schemi, qui riprodotti una sola volta:



Il diametro è lungo 7 braccia e negli schemi è scritta l'area, (38 + ½) senza alcuna indicazione dell'unità di misura impiegata, che è il *braccio quadrato*.

Lo schema che segue contiene le unità di misura:



Prima regola

L'area del cerchio è così calcolata:

*	moltiplicare la lunghezza del diametro per sé stessa:	7 * 7 = 49;
*	moltiplicare per 11:	49 * 11 = 539;
*	dividere per 14:	539/14 = (38 + ½) braccia^2.

In formula:

Area = d^2 * 11/14.

Seconda regola

L'area del cerchio è ottenuta con la seguente procedura:

* moltiplicare la lunghezza del diametro per la costante (3 + 1/7):

7 * (3 + 1/7) = 7 * 22/7 = 22 (lunghezza della circonferenza);

* moltiplicare la lunghezza del diametro per quella della circonferenza: 7 * 22 = 154;

* dividere per 4: 154/4 = (38 + ½) braccia^2.

La formula è:

Area = [d * (3 + 1/7)] * d/4 = d^2 * (22/7)/4.

Terza regola

Questa regola richiede un'unica moltiplicazione:

* moltiplicare metà della lunghezza della circonferenza *c* per la metà di quella del diametro *d*:

Area = c/2 * d/2 = (22/2) * (7/2) = 154/4 = (38 + ½) braccia^2.

Quarta regola

La regola impiega una variante della precedente:

* moltiplicare un quarto della lunghezza della circonferenza per la lunghezza del diametro:

Area = c/4 * d = (22/4) * 7 = 154/4 = (38 + ½) braccia^2.

Quinta regola

Questa regola porta a usare numeri più grandi di quelli incontrati nella descrizione delle precedenti regole.

La procedura contiene i seguenti passi:

* moltiplicare la lunghezza della circonferenza per sé stessa: c * c = 22 * 22 = 484;
* moltiplicare per la lunghezza del diametro *d*: 484 * 7 = 3388;
* dividere per 88: 3388/88 = (38 + ½) braccia^2, area del cerchio.

Sesta regola

La regola contiene i seguenti passi:
* moltiplicare la lunghezza della circonferenza per sé stessa: 22 * 22 = 484;
* dividere per (12 + 4/7): 484/(12 + 4/7) = (38 + ½) braccia^2.

La costante (12 + 4/7) equivale a:

(12 + 4/7) = 88/7.

Settima regola

La regola è un po' curiosa perché introduce il coefficiente ¾:
* moltiplicare la lunghezza della circonferenza per ¾: 22 * ¾ = (16 + ½);
* sommare l'ultimo numero e la lunghezza della circonferenza:

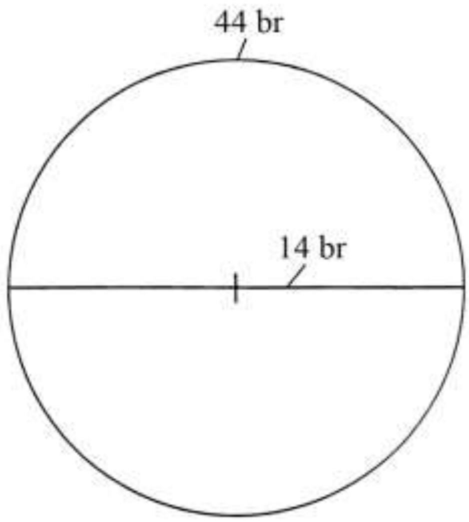
(16 + ½) + 22 = (38 + ½) braccia^2, area del cerchio.

In formula:

Area = ¾ * c + c = 7/4 * c.

\- APPROFONDIMENTO -

La soluzione proposta dall'Autore presenta due evidenti errori:
* egli ha sommato due lunghezze – *¾ * c* e *c* – : la loro addizione, *7/4 * c*, è un'altra lunghezza misurata in braccia lineari e non un'area espressa in braccia^2;
* in secondo luogo, la soluzione non è generalizzabile. Facciamo un esempio: un cerchio ha diametro lungo 14 braccia:



La sua circonferenza *c* è lunga:

c = 14 * 22/7 = 44 braccia.

L'area è data da:

Area = 22/7 * (d/2)^2 = 22/7 * (14/2)^2 = 22/7 * 49 = 154 braccia^2.

Applicando la formula dell'Anonimo si ha:

Area = ¾ * c + c = ¾ * 44 + 44 = 33 + 44 = 77, che in valore assoluto, è la metà della superficie effettiva.

\- -

Ottava regola

La procedura comprende i seguenti passi:

* moltiplicare la lunghezza del diametro per 11/14: $d * 11/14 = 7 * 11/14 = (5 + ½)$;
* moltiplicare per la lunghezza del diametro: $(5 + ½) * 7 = (38 + ½)$ $braccia^2$, area del cerchio.

Nona regola

La soluzione prevede i seguenti passi:

* moltiplicare la lunghezza del diametro per sé stessa: $d * d = 7 * 7 = 49$;
* dividere per il doppio della lunghezza del diametro: $49/(2 * d) = 49/14 = (3 + ½)$;
* moltiplicare per metà della lunghezza della circonferenza: $(3 + ½) * c/2 = (3 + ½) * 22/2 =$
$= (3 + ½) * 11 = (38 + ½)$ $braccia^2$.

In formule:

$$Area = d^2/(2 *d) * c/2 = d/2 * c/2 = (d * c)/4.$$

Decima regola

La soluzione proposta è un po' contorta:

* dividere per 4 la lunghezza della circonferenza: $22/4 = (5+ ½)$;
* moltiplicare per sé stesso: $(5 + ½) * (5 + ½) = (30 + ¼)$;
* dividere per la metà della lunghezza della circonferenza: $(30 + ¼)/(c/2) =$
$= (30 + ¼)/11 = (2 + ¾)$;
* moltiplicare per 3: $(2 + ¾) * 3 = (8 + ¼)$;
* aggiungere a (30 + ¼): $(8 + ¼) + (30 + ¼) = (38 + ½)$ $braccia^2$, area del cerchio.

In formule:

$$Area = [(c/4)^2/(c/2)] * 3 + (c/4)^2.$$

- APPROFONDIMENTO -

Verifichiamo la validità di questa procedura applicandola al caso già incontrato nell'APPROFONDIMENTO in calce alla *Settima regola*.

Il diametro *d* è lungo 14 braccia, la circonferenza è 44 braccia e l'area vale 154 $braccia^2$:

$$Area = [(44/4)^2/(44/2)] * 3 + (44/4)^2 = (11^2 * 2/44) * 3 + 11^2 = (11 * 2 * 3)/4 + 121 =$$
$$= 5,5 * 3 + 121 = 16,5 + 121 = 137,5\ braccia^2, \text{ invece di } 154\ braccia^2.$$

Anche questa formula non sembra avere validità generale.

- -

Undicesima regola

La procedura prevede i seguenti passi:

* moltiplicare la lunghezza del diametro per sé stessa: $7 * 7 = 49$;
* moltiplicare per 1/7: $49 * 1/7 = 7$;
* moltiplicare il quadrato della lunghezza del diametro per 1/14: $49 * 1/14 = (3 + ½)$;
* sottrarre 7 e (3 + ½) da 49: $49 – 7 – (3 + ½) = (38 + ½)$ $braccia^2$, area del cerchio.

In formula, la procedura è così sintetizzata:

$$Area = d^2 – d^2/7 – d^2/14 = d^2 * (1 – 1/7 – 1/14) = d^2 * 11/14.$$

Dodicesima regola

L'Autore prevede i seguenti passi:

* moltiplicare la lunghezza della circonferenza per ¼: $c * ¼ = 22/4 = (5 + ½)$;
* moltiplicare per sé stesso: $(5 + ½) * (5 + ½) = (30 + ¼)$;
* moltiplicare per 3/11: $(30 + ¼) * 3/11 = (8 + ¼)$;
* sommare gli ultimi due numeri: $(30 + ¼) + (8 + ¼) = (38 + ½)$ braccia^2, area del cerchio.

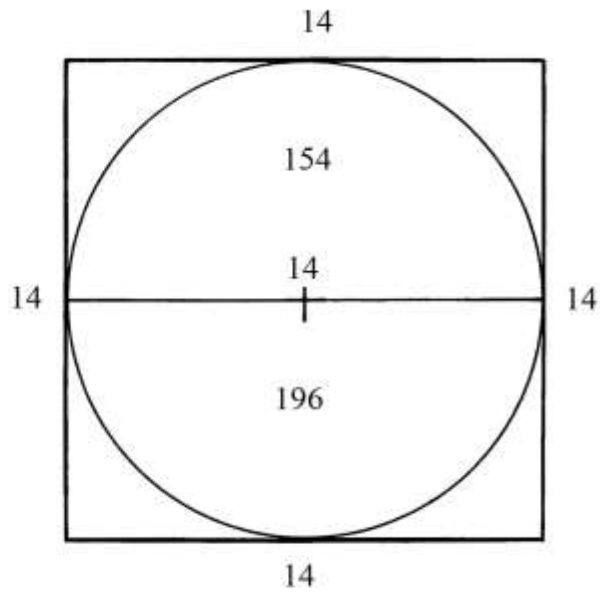
La formula che segue riassume la procedura:

$$\text{Area} = (c/4)^2 * (1 + 3/11) = (c/4)^2 * 14/11.$$

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Al termine della presentazione delle *dodici regole*, l'Autore torna sulla prima di queste che lui giustamente ritiene la più facile e anche la più usata.

Un cerchio di diametro 14 braccia è inscritto in un quadrato che ha lati lunghi anche essi 14 braccia. Quindi il diametro del cerchio e i lati del quadrato hanno uguale lunghezza:



L'area del quadrato è:

$$\text{Area}_{\text{QUADRATO}} = \text{lato}^2 = 14^2 = 196 \text{ braccia}^2.$$

L'area del cerchio è:

$$\text{Area}_{\text{CERCHIO}} = \pi * r^2 = \pi * (d/2)^2 \approx (22/7) * (14/2)^2 = 22/7 * 7^2 = 22 * 7 =$$
$$= 154 \text{ braccia}^2.$$

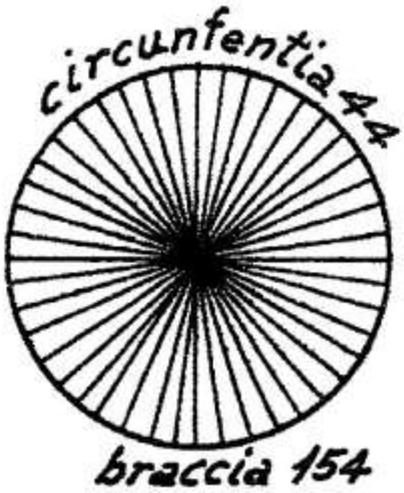
Cerchiamo di determinare l'esistenza di una proporzione fra le aree del cerchio e del quadrato:

$$\text{Area}_{\text{CERCHIO}}/\text{Area}_{\text{QUADRATO}} = \pi * (d/2)^2/(d^2) \approx 22/7 * (d/2)^2/(d^2) = 22/7 * ¼ =$$
$$= 22/28 = 11/14.$$

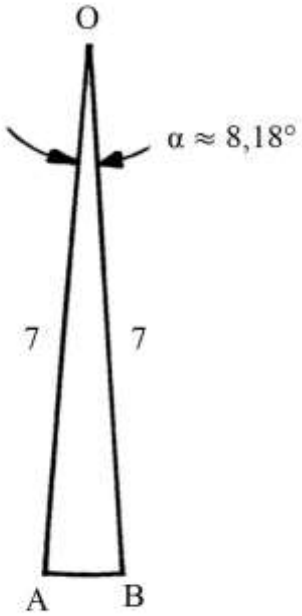
Questa ultima costante è il rapporto approssimato fra l'area del cerchio e quella del quadrato ad esso circoscritto ed è una diretta conseguenza dell'impiego del valore approssimato di $(3 + 1/7) = 22/7$ per π.

Le due costanti 22/7 e 11/14 furono largamente usate nei trattati di abaco medievali e rinascimentali.

La circonferenza di questo cerchio è lunga 44 braccia. L'Autore propone di suddividere il cerchio in 44 *settori circolari*:



I settori circolari hanno per lati i raggi dello stesso cerchio:



L'angolo nel centro O è ampio:

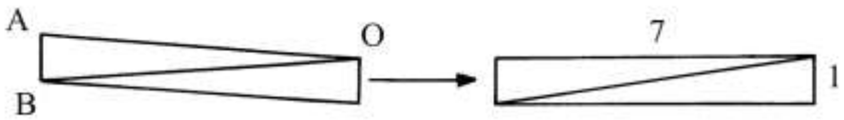
$\alpha = 360°/44 \approx 8,18°$.

I lati OA e OB sono due raggi del cerchio e sono lunghi 7 braccia. L'arco AB + lungo:

AB = circonferenza/44 = 44/44 = 1 braccio.

L'arco tende a coincidere con la corda AB per cui OAB è assimilabile a un triangolo isoscele.

Unire due settori circolari lungo due lati:



La figura che ne risulta è un parallelogramma che può essere trasformato in un rettangolo con lati lunghi 7 e 1 braccia.

Questo rettangolo ha area uguale a:

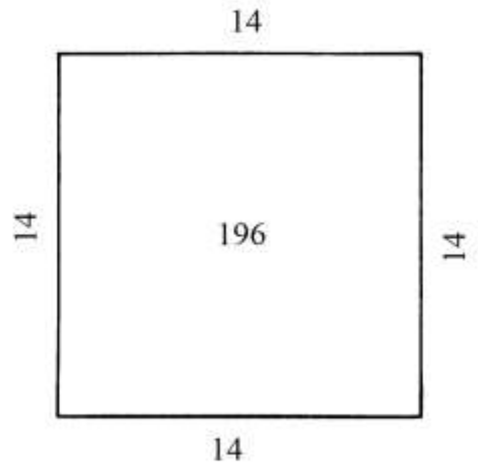
Area $_{\text{RETTANGOLO}}$ = 7 * 1 = 7 braccia^2.

I 44 settori circolari possono essere uniti in 22 rettangoli di dimensioni 7 x 1 braccia. L'area di questi 22 rettangoli è:

Area $_{\text{22 RETTANGOLI}}$ = 22 * 7 = 154 braccia^2.

L'area di questi 22 rettangoli è uguale a quella dell'intero cerchio.

L'Autore conclude presentando il quadrato che ha lati lunghi 14 braccia e area 196 braccia^2:



- APPROFONDIMENTO -

La costante 88/7

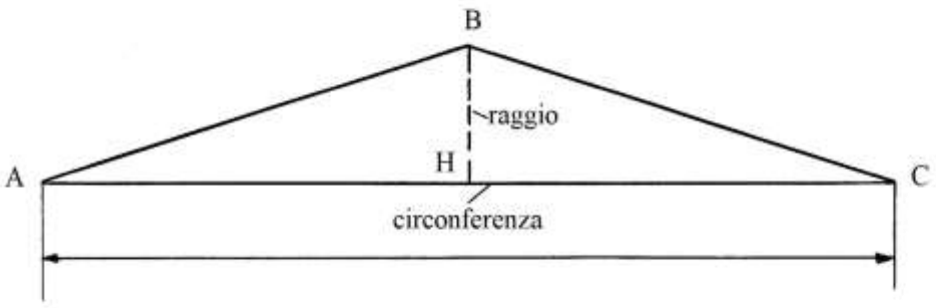
Nella descrizione della *Sesta regola* ha fatto la sua comparsa la costante (12 + 4/7), che equivale alla frazione 88/7:

(12 + 4/7) = (84 + 4)/7 = 88/7.

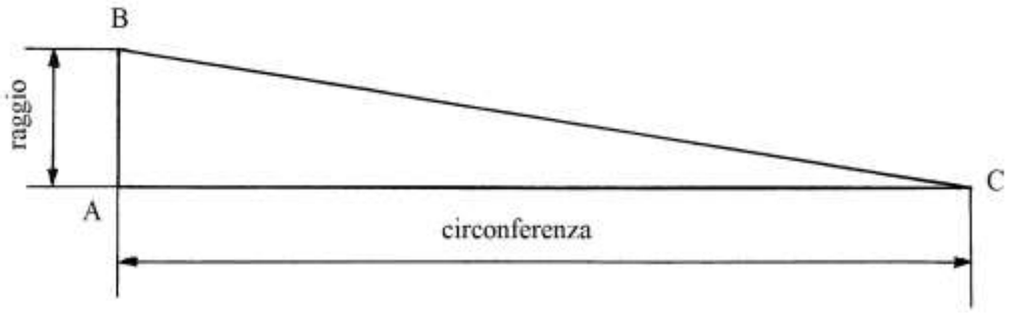
La sua origine è spiegata di seguito.

Essa può essere definita con l'espressione *moltiplicatore della superficie*.

L'area di un cerchio è assimilabile a quella di un triangolo isoscele che ha la base AB lunga quanto la circonferenza e altezza CH lunga quanto il raggio:



oppure a quella di un triangolo rettangolo con cateti lunghi quanto la circonferenza e il raggio:



Nel primo caso (triangolo isoscele) l'area è data da:

$$\text{Area}_{\text{ABC}} = (AC * BH)/2 = (\text{circonferenza} * \text{raggio})/2.$$

Nel secondo caso:

$$\text{Area}_{\text{ABC}} = (AB * AC)/2 = (\text{raggio} * \text{circonferenza})/2.$$

Ma:

$$\text{circonferenza} = \text{diametro} * 22/7 = 2 * \text{raggio} * 22/7 = 44/7 * \text{raggio}.$$

Da cui:

$$\text{raggio} = \text{circonferenza} * 7/44.$$

Sostituendo il valore appena trovato del raggio nella formula dell'area del cerchio si ha:

$$\text{Area CERCHIO} = [\text{circonferenza} * (\text{circonferenza} * 7/44)]/2 = \\ = \text{circonferenza}^2 * 7/88.$$

La lunghezza della circonferenza è data da:

$$\text{circonferenza} = \sqrt{}(\text{Area}_{\text{CERCHIO}} * 88/7).$$

La frazione 88/7 può essere riportata a:

$$88/7 = 84/7 + 4/7 = (12 + 4/7).$$

Il *moltiplicatore della superficie* fu usato Paolo Gherardi nel suo "*Liber habaci*" (prima del 1328), da Jacopo da Firenze nel "*Tractatus Algorismi*" (1307) e da Orbetano da Montepulciano nel suo trattato "*Regole di geometria pratica*" (circa 1464); esso corrisponde al rapporto fra il quadrato della circonferenza e l'area del cerchio e cioè:

$$\text{circonferenza}^2 = \text{Area cerchio} * 88/7.$$

Un'altra via permette di giungere allo stesso risultato: l'area di un cerchio di raggio r è data da:

$$\text{Area cerchio} = \pi * r^2,$$

mentre la circonferenza è lunga:

$$\text{circonferenza} = 2 * \pi * r.$$

Ne consegue che:

$$\text{circonferenza}^2/\text{Area}_{\text{CERCHIO}} = (2 * \pi + r)^2/(\pi * r^2) = 4 * \pi^2 * r^2/(\pi * r^2) = 4 * \pi.$$

Sostituendo nell'ultima formula al valore di π quello approssimato di 22/7, risulta:

$$4 * 22/7 = 88/7.$$

In conclusione, la frazione 88/7 è il valore approssimato di 4*π.

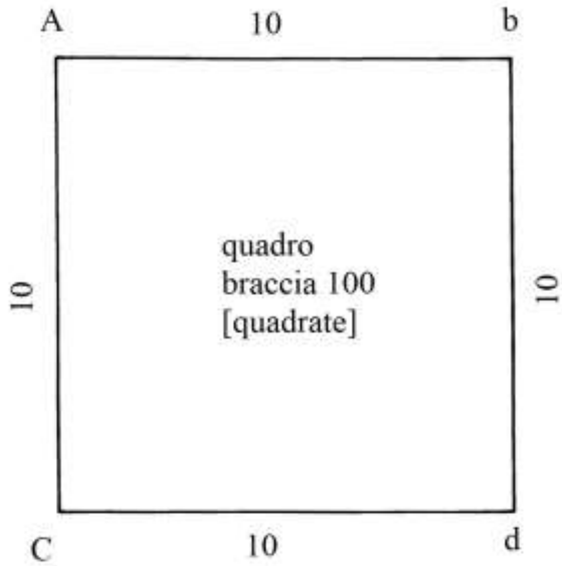
Nel Medioevo per i calcoli era più facile usare la frazione 88/7 invece dell'equivalente *numero misto* (12 + 4/7).

- -

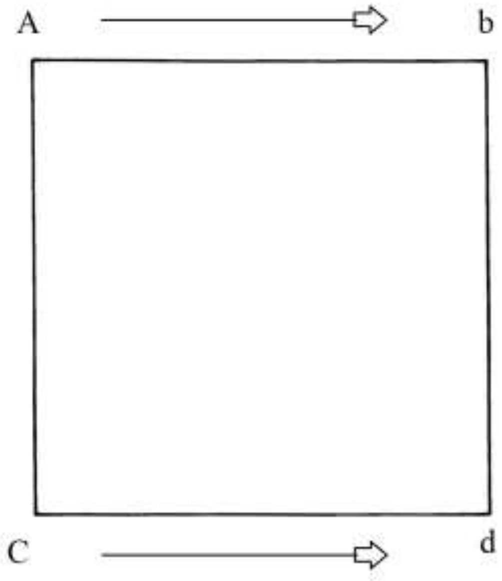
I "QUADRANGOLI"

Per determinare l'area ("*possessione*" o "*quadratura*", secondo l'Autore) di un quadrilatero occorre stabilire se i suoi quattro angoli interni sono tutti retti: in caso affermativo e se i lati ("le *faccie*") hanno uguale lunghezza, la sua area è ottenuta moltiplicando per sé stessa la lunghezza di un lato:

Area $_{\text{QUADRATO}}$ = 10 * 10 = 100 braccia^2.

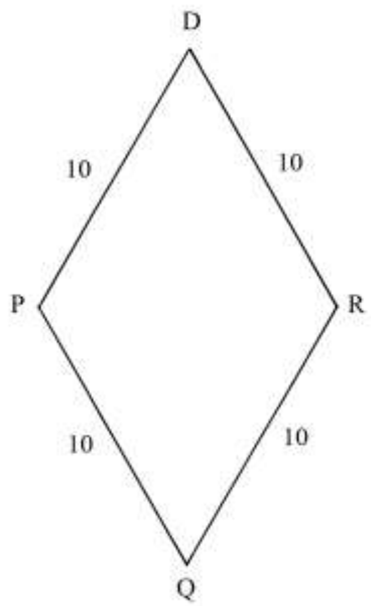


È da notare il particolare metodo di scrittura delle lettere: *A* e *C* sono maiuscole mentre *b* e *d* sono minuscole. La loro posizione rispetta l'ordine alfabetico soltanto in senso orizzontale:

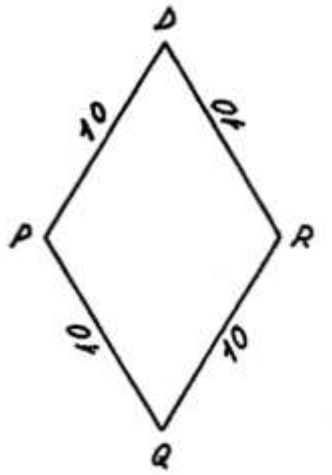


%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

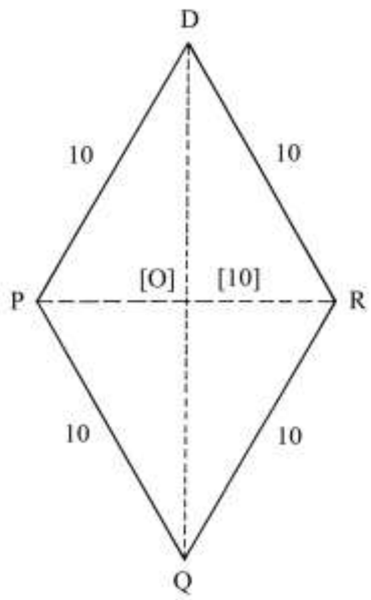
Il quadrilatero successivo è un rombo:



Per verificare che tutti i lati siano della stessa lunghezza, l'Autore propone di usare un compasso:



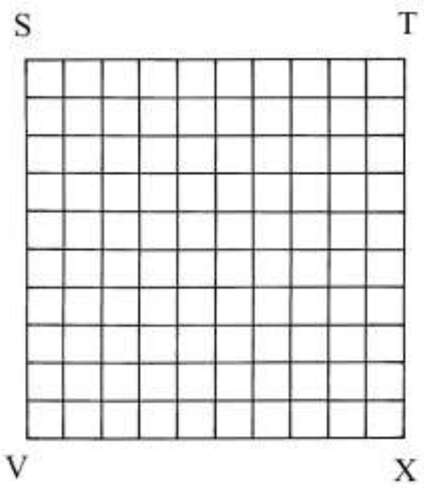
Nel testo non è esplicitamente spiegato che il rombo è formato da due triangoli equilateri uniti lungo il lato comune PR che è lungo 10 braccia, come i quattro lati del poligono:



L'Autore si limita a notare che il rombo ha un'area più piccola di quella del quadrato con lati lunghi 10 braccia. Inoltre accenna a una proprietà del rombo: più corta è la diagonale minore e più piccola è la superficie racchiusa dal quadrilatero. Non fornisce alcuna indicazione sul metodo applicabile al calcolo dell'area del poligono che, semplicemente, è data dalla formula:

$$\text{Area}_{\text{ROMBO}} = \text{prodotto delle diagonali}/2 = PR * DQ/2.$$

Viene infine presentata la scomposizione del precedente quadrato AbdC in 100 piccoli quadrati che hanno lati lunghi 1 braccio, come è STVX:

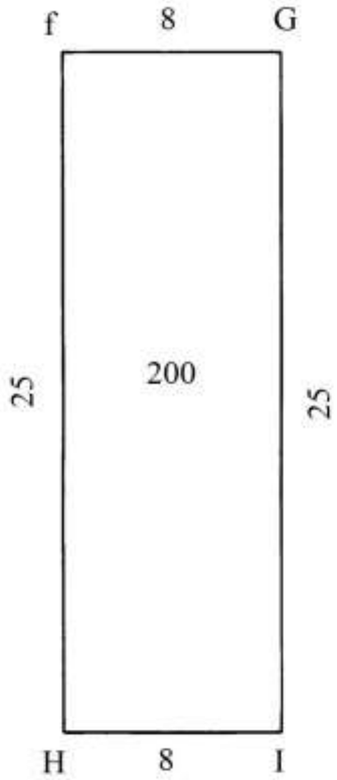


L'area di ciascun piccolo quadrato è uguale a 1 braccio^2. I cento quadratini hanno area totale di 100 braccia^2, uguale a quella di un quadrato che ha lati lunghi 10 braccia, come quelli AbdC e STVX: la cosa è ovvia.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

La tavola usata per mangiare è un piano orizzontale che ha forma di un rettangolo con quattro angoli retti ed è più lunga che larga.

Un pezzo di terra di forma rettangolare quale è fGHI è simile alla tavola da cucina: è lungo 25 braccia e largo 8 braccia:

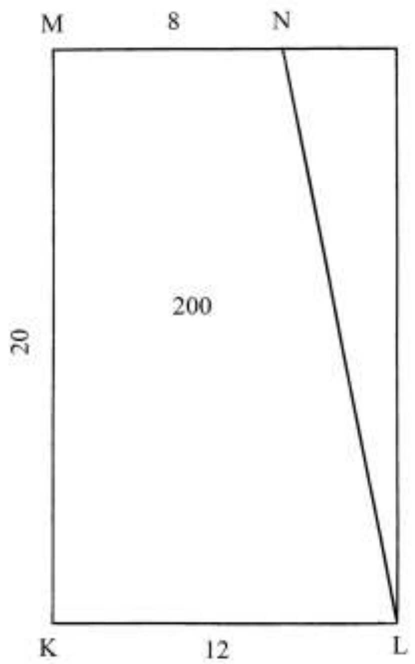


La sua area è:

Area $_{fGHI}$ = fg * Hf = 8 * 25 = 200 braccia^2.

Ragione 4

KLMN è un poligono con quattro lati, due angoli retti e altri due non retti. Il quadrilatero è oggi noto come *trapezio rettangolo*:

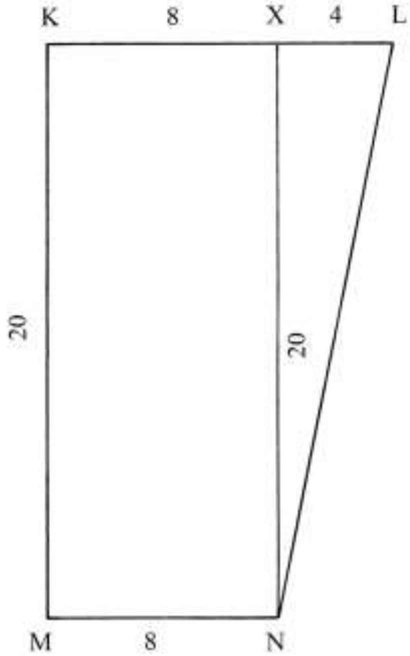


L'area del trapezio è correttamente calcolata moltiplicando l'altezza MK per la semisomma delle due basi, KL e MN:

$$\text{Area}_{KLMN} = MK * (KL + MN)/2 = 20 * (12 + 8)/2 = 20 * (20/2) = 200 \text{ braccia}^2.$$

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Nello schema che segue è mostrato un secondo trapezio rettangolo:



L'altezza MK è lunga 20 braccia. Le basi sono lunghe:

* MN = 8 br;
* KL = 12 br.

Con la tracciatura dell'altezza NX, il poligono è scomposto in due figure:

* il rettangolo KXMN;
* il triangolo rettangolo XLN.

La base KL viene divisa in due segmenti adiacenti, KX e XL:

* KX = MN = 8 braccia;
* XL = KL – KX = 12 – 8 = 4 braccia.

Calcolare le aree dei due poligoni:

$$\text{Area}_{KXMN} = KM * MN = 20 * 8 = 160 \text{ braccia}^2 \quad \text{e}$$

$$\text{Area}_{XLN} = XN * XL/2 = 20 * 4/2 = 40 \text{ braccia}^2.$$

L'area del trapezio KLNM è data dalla somma di queste aree:

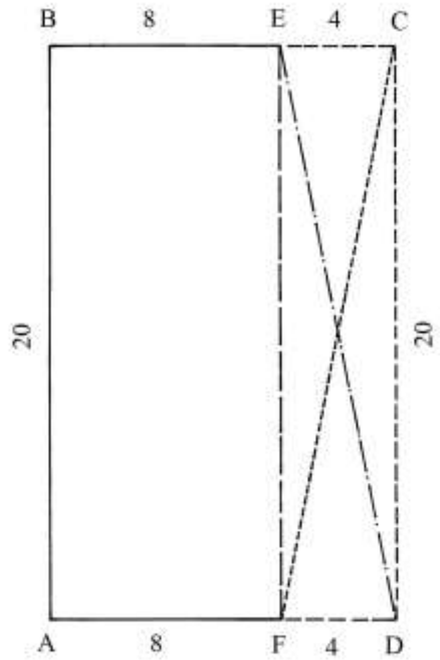
$$\text{Area}_{KLNM} = \text{Area}_{KXMN} + \text{Area}_{XLN} = 160 + 40 = 200 \text{ braccia}^2.$$

L'Autore indica un'altra soluzione per il calcolo dell'area di XLN: dividere per due la lunghezza di XL e moltiplicare per la lunghezza del cateto XN:

$$A_{XLN} = (XL/2) * XN = (4/2) * 20 = 2 * 20 = 40 \text{ braccia}^2.$$

- APPROFONDIMENTO -

I due casi presentati sono basati sullo stesso rettangolo ABCD che ha dimensioni 20 x 8 braccia:

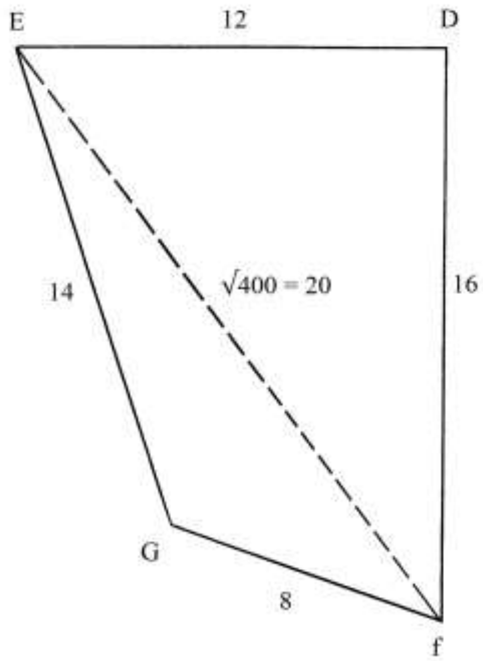


Il primo caso è dato dal trapezio rettangolo ABED e il secondo è il trapezio ABCF.

- -

<u>Ragione 5</u>

DEfG è un terreno a forma di quadrilatero che possiede soltanto un angolo retto nel vertice D:



I quattro lati hanno le dimensioni in braccia riportate sulla figura.

Il problema chiede di calcolare l'area di questo terreno.

Tracciare la diagonale Ef: essa divide il quadrilatero nei triangoli DEf e EfG; il primo è rettangolo e la sua area è:

$$\text{Area}_{DEf} = ED * Df/2 = 12 * 16/2 = 96 \text{ braccia}^2.$$

Occorre ora ricavare la lunghezza della diagonale Ef che è anche l'ipotenusa del triangolo DEf:

$$Ef^2 = ED^2 + Df^2 = 12^2 + 16^2 = 144 + 256 = 400 \quad \text{e}$$

$$Ef = \sqrt{400} = 20 \text{ braccia}.$$

Per calcolare l'area del triangolo EfG l'Autore applica il metodo di Erone di Alessandria, senza citarlo. Ecco i passi della procedura impiegata:

* sommare le lunghezze dei tre lati, Ef, EG e Gf: 20 + 14 + 8 = 42 braccia [perimetro];
* dividere per 2: 42/2 = 21braccia [semiperimetro];
* sottrarre la lunghezza di Ef dal [semiperimetro] 21: 21– 20 = 1;
* sottrarre la lunghezza di EG da 21: 21 – 14 = 7;
* sottrarre la lunghezza di Gf da 21: 21 – 8 = 13;
* moltiplicare gli ultimi tre numeri: 1 * 7 * 13 = 91;
* moltiplicare per il [semiperimetro] 21: 91 * 21 = 1911;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{1911}$ braccia^2, area di EfG.

L'area del quadrilatero è:

$$\text{Area}_{DEfG} = \text{Area DEf} + \text{Area EfG} = (96 + \sqrt{1911}) \text{ braccia}^2.$$

Il triangolo DEf ha lati lunghi 12, 16 e 20 braccia: si tratta di un terna derivata dalla primitiva 3-4-5 i cui numeri sono moltiplicati per l'intero 4.

\- APPROFONDIMENTO -

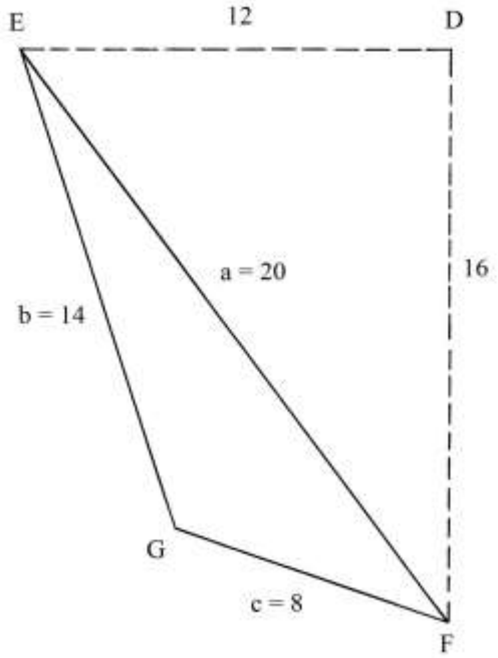
<u>La formula di Erone per il calcolo dell'area di un triangolo</u>

Erone di Alessandria (I secolo d.C.) scrisse diverse opere di matematica applicata, geometria e meccanica. La versione inglese della voce dedicata a Erone su Wikipedia lo qualifica come "*a Greco-Egyptian mathematician and engineer*".

Non esistono informazioni sulla sua vita. Egli è ritenuto un "greco" soltanto perché scriveva in questa lingua. Ma nei secoli successivi e fino almeno al Settecento, ad esempio, in Europa la lingua scientifica più usata era il *latino*, ma ciò non porta a concludere che tutti gli scienziati fossero di nazionalità italiana. E che dire dell'inglese e dell'americano, lingue oggi prevalenti nella comunicazione scientifica e tecnica: non tutti gli scriventi sono di nazionalità inglese o americana.

Erone introdusse una serie di formule *approssimate* per calcolare l'area dei più comuni *poligoni regolari*.

Si deve a Erone una formula per calcolare l'area A di un qualsiasi triangolo di cui sono note le lunghezze dei tre lati, a, b e c, e quindi la lunghezza del *semiperimetro* m. Riprendiamo in considerazione il triangolo EFG:



Infatti: $a + b + c$ = perimetro EFG = $2 * m$.

La formula è la seguente:

$$A_{EFG} = \sqrt{[m * (m - a) * (m - b) * (m - c)]} =$$

$$= \sqrt{\{(a + b - c)/2 * [(a + b + c)/2 - a] * [(a + b + c)/2 - b] * [a + b + c)/2 - c]\}} =$$

$$= \sqrt{[(a + b - c)/2 * (b + c - a)/2 * (a + c - b)/2 * (a + b - c)/2]} =$$

$$= \{\sqrt{[(a + b + c) * (b + c - a) * (a + c - b) * (a + b - c)]}\}/4.$$

Utilizziamo i dati:

$a + b + c = 20 + 14 + 8 = 42 = 2*m$

$42/2 = 21 = m$

$A_{EFG} = \sqrt{[21 * (21 - 20) * (21 - 14) * (21 - 8)]} = \sqrt{(21 * 1 * 7 * 13)} = \sqrt{1911}$ braccia^2.

La formula calcola l'area di un qualsiasi triangolo senza che occorra misurare l'altezza relativa a un lato.

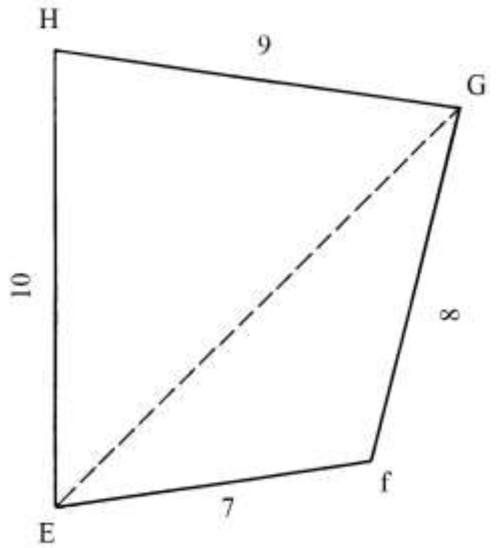
Nota: alcuni storici della matematica attribuiscono a Archimede il merito dell'invenzione di questa importante formula.

- -

Ragione 6

A conclusione del testo relativo alla precedente Ragione, l'Autore introduce il caso di un quadrilatero che non possiede alcun angolo retto e del quale si deve calcolare l'area. Non conoscendo la lunghezza di una delle due diagonali, non è possibile determinare la sua area.

La figura che segue mostra un quadrilatero di cui sono note le lunghezze dei lati ma non quella della diagonale EG (o della seconda diagonale Hf):



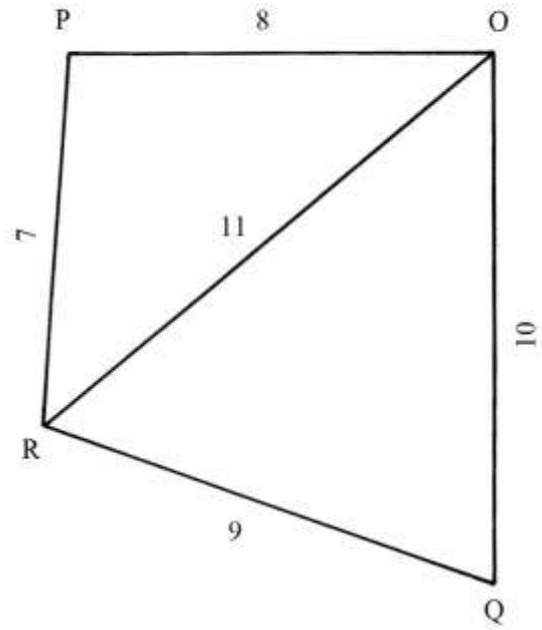
Con le conoscenze disponibili all'epoca non era possibile calcolare l'area.

È da notare la particolare disposizione antioraria delle lunghezze dei lati di questo poligono:
Ef → fG → GH → HE
7 → 8 → 9 → 10.

Ragione 7

Il quadrilatero OPQR ha lati di differente lunghezza, come nel caso precedente: essi sono però disposti in modo diverso.

La diagonale OR è lunga 11 braccia.



OR divide il quadrilatero in due triangoli, OQR e OPR, dei quali sono calcolabili le aree, applicando nuovamente il metodo di Erone.

Per il triangolo OQR l'Autore procede come segue:

* sommare le lunghezze dei tre lati: RQ + QO + OR = 9 + 10 + 11 = 30 [perimetro];

* dividere per 2: 30/2 = 15 [semiperimetro];
* sottrarre dal semiperimetro la lunghezza di RQ: 15 – 9 = 6;
* sottrarre dal semiperimetro la lunghezza di QO: 15 – 10 = 5;
* sottrarre dal semiperimetro la lunghezza di OR: 15 – 11 = 4;
* moltiplicare gli ultimi tre numeri: 6 * 5 * 4 = 120;
* moltiplicare per il semiperimetro: 120 * 15 = 1800;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{1800}$ braccia^2, area di OQR.

Per il triangolo OPR la procedura è simile:

* sommare le lunghezze dei tre lati: PR + PO + OR = 7 + 8 + 11 = 26;
* dividere per 2: 26/2 = 13 [semiperimetro];
* sottrarre la lunghezza di PR dal semiperimetro: 13 – 7 = 6;
* sottrarre la lunghezza di PO dal semiperimetro: 13 – 8 = 5;
* sottrarre la lunghezza di OR dal semiperimetro: 13 – 11 = 2;
* moltiplicare gli ultimi tre numeri: 6 * 5 * 2 = 60;
* moltiplicare per il semiperimetro: 60 * 13 = 780;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{780}$ braccia^2, area di OPR.

L'area del quadrilatero è:

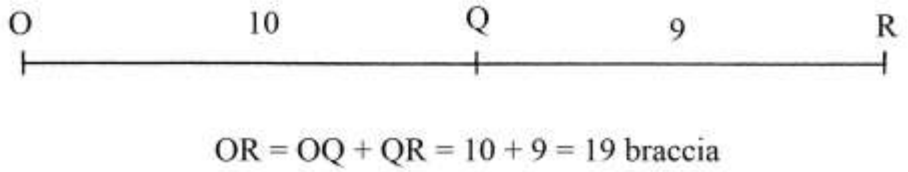
$$\text{Area}_{OPQR} = \text{Area}_{OQR} + \text{Area}_{OPR} = \sqrt{1800} + \sqrt{780} \text{ braccia}^2.$$

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Alla fine della soluzione del problema, l'Autore introduce una serie di considerazioni sulle lunghezze dei lati del triangolo OQR: la *traversa* e cioè il lato OR non deve essere più corta degli altri due lati (OQ e QR) e non deve essere più lunga della somma delle loro lunghezze:

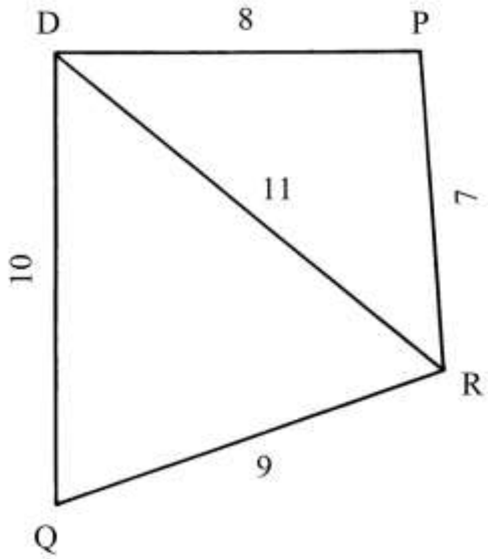
$OR < (OQ + QR)$
$11 < (10 + 9)$
$11 < 19.$

Nel caso di OR = (OQ + QR) non si avrebbe più un triangolo:



%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

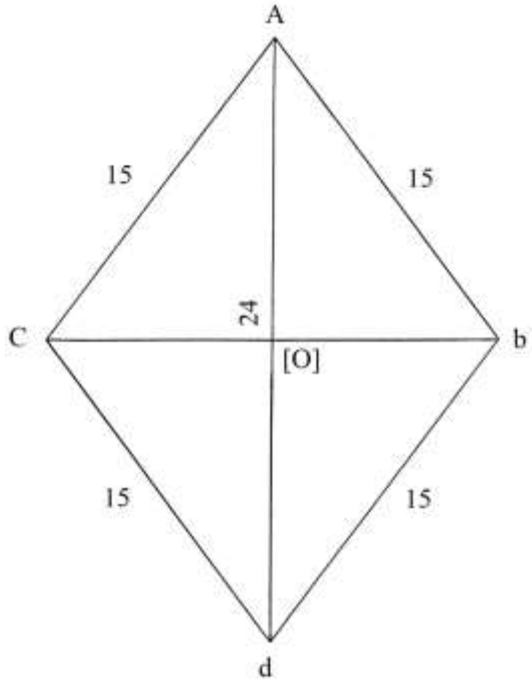
La stessa regola si applica anche a una diagonale di un quadrilatero:



Lo schema che l'Autore chiama erroneamente *ronbo* ha una *traversa* o diagonale DR lunga 11 braccia e tutti lati del poligono sono più corti della stessa diagonale.

Ragione 8

Il problema chiede di calcolare l'area di un terreno a forma di *rombo*:



I suoi lati sono tutti lunghi 15 braccia e la diagonale maggiore ("*traversa*") Ad è lunga 24 braccia.

Ad divide il rombo in due parti uguali che sono i triangoli ACd e Abd.

L'Autore calcola l'area di uno dei due triangoli, ad esempio quello ACd, applicando nuovamente il metodo di Erone:

* sommare le lunghezze dei tre lati: Ad + AC + Cd = 24 + 15 + 15 = 54 [perimetro];

* dividere per 2: 54/2 = 27 [semiperimetro];
* sottrarre da 27 la lunghezza di Ad: 27 – 24 = 3;
* sottrarre da 27 la lunghezza di AC: 27 – 15 = 12;
* sottrarre da 27 la lunghezza di Cd: 27 – 15 = 12;
* moltiplicare gli ultimi tre numeri: 3 * 12 * 12 = 432;
* moltiplicare per il semiperimetro 27: 432 * 27 = 11664;
* estrarre la radice quadrata: √11664 = 108 braccia2, area di ACd.

L'area dell'intero rombo è:

$$\text{Area}_{AbdC} = 2 * \text{Area}_{ACd} = 2 * 108 = 216 \text{ braccia}^2.$$

- APPROFONDIMENTO -

La soluzione adottato dall'autore non è l'unico metodo possibile.

L'area di un rombo è data da:

Area ROMBO = (diagonale maggiore) * (diagonale minore)/2.

La diagonale minore, *Cb*, ha lunghezza incognita.

Le due diagonali si intersecano formando quattro triangoli rettangoli di uguali dimensioni.

Consideriamo il triangolo rettangolo AC[O]. La lunghezza incognita del cateto minore C[O] è ricavata da:

$$C[O]^2 = AC^2 - A[O]^2 = 15^2 - (24/2)^2 = 225 - 144 = 81 \quad \text{e}$$
$$C[O] = \sqrt{81} = 9 \text{ braccia.}$$

CA[O] è un triangolo rettangolo che ha lati lunghi secondo la terna derivata 9-12-15 ottenuta dalla terna primitiva 3-4-5 moltiplicata per l'intero 3.

La lunghezza della diagonale minore Cb è:

$$Cb = 2 * C[O] = 2 * 9 = 18 \text{ braccia.}$$

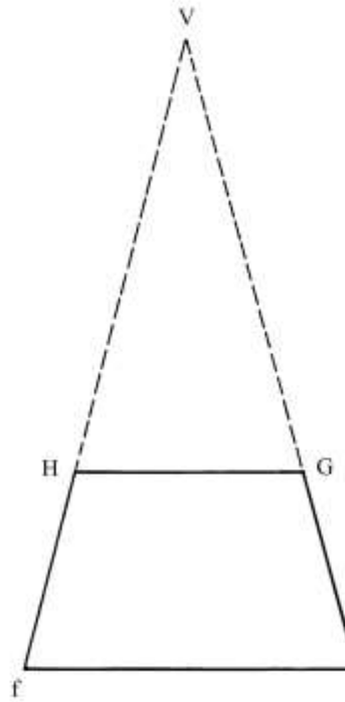
Ne consegue che l'area del rombo è:

$$\text{Area}_{AbdC} = Ad * Cb/2 = 24 * 18/2 = 216 \text{ braccia}^2.$$

- -

Interessante è il poligono poi presentato dall'Autore:

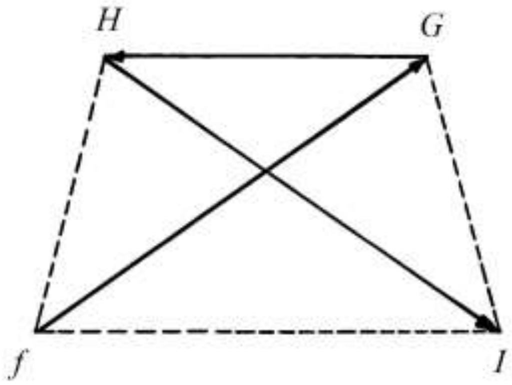
Il quadrilatero è un trapezio isoscele che è definito, come aveva fatto Fibonacci, "*capo taglato*" o più correttamente "capo tagliato"; questa definizione attribuita a un trapezio è facilmente comprensibile osservando lo schema che segue:



Il poligono fGHI è originato dal triangolo isoscele fVI al quale è *tagliato il capo* e cioè è asportato il triangolo isoscele HVG. Ciò che resta è il nostro trapezio.

Il calcolo dell'area di fGHI richiede la presenza di una delle due diagonali, ad esempio quella fG, per scomporre il poligono in due triangoli dei quali calcolare l'area. Un'altra soluzione è data dalla conoscenza dell'altezza abbassata dal vertice H verso la base maggiore fI.

Nel testo, il trapezio è definito come fGHI: fG è una diagonale, GH è la base minore e HI è la seconda diagonale:



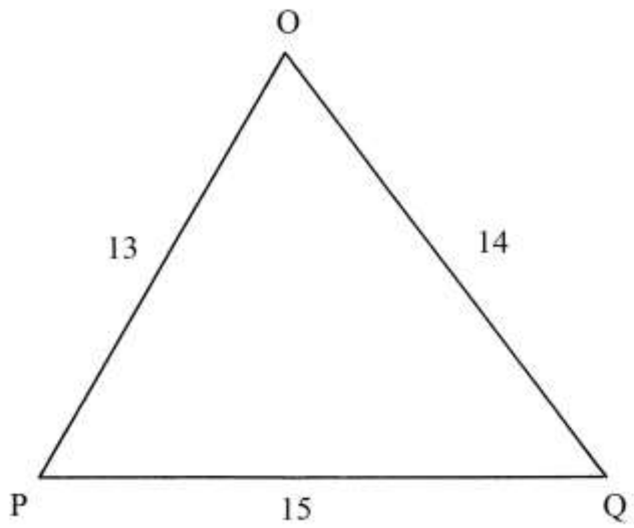
Oggi quel poligono è definito fHGI (in senso orario) o fIGH (in senso antiorario).

TRIANGOLI

La *quadratura* di un triangolo e cioè il calcolo della sua area viene di nuovo ottenuta con l'applicazione della formula di Erone, senza citare il suo Autore.

Ragione 9

OPQ è un triangolo scaleno che ha lati lunghi 13, 14 e 15 braccia:



Ecco i passi della procedura secondo Erone:

* sommare le lunghezze dei tre lati: PO + OQ + PQ = 13 + 14 + 15 = 42 [perimetro];
* dividere per 2: 42/2 = 21 [semiperimetro];
* sottrarre la lunghezza di PO da 21: 21 – 13 = 8;
* sottrarre la lunghezza di OQ da 21: 21 – 14 = 7;
* sottrarre la lunghezza di PQ da 21: 21 – 15 = 6;
* moltiplicare gli ultimi tre numeri: 8 * 7 * 6 = 336;
* moltiplicare per 21: 336 * 21 = 7056;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{7056}$ = 84 braccia^2, area del triangolo OPQ.

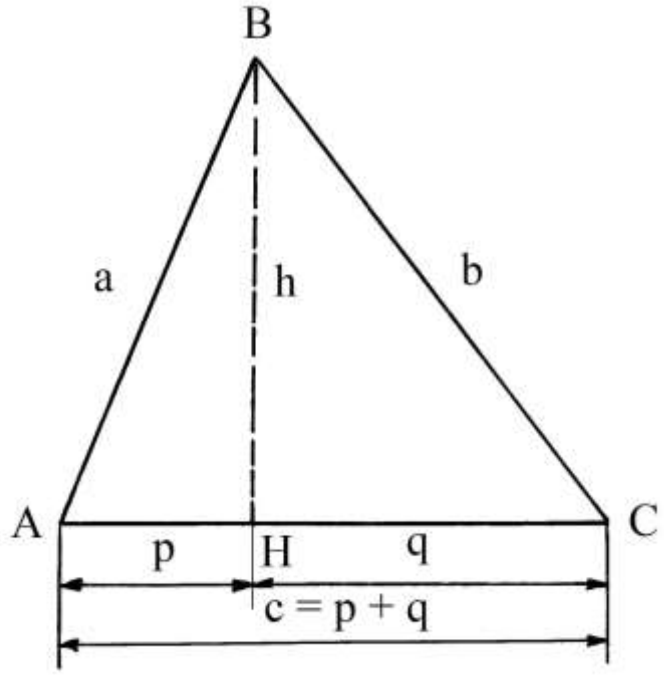
- APPROFONDIMENTO -

Le proprietà del triangolo 13-14-15 furono approfondite dal già citato Erone di Alessandria.

Lo studio delle proprietà del triangolo scaleno con lati lunghi 13, 14 e 15 fornì a Erone lo spunto per definire una formula di valore generale, per calcolare le lunghezze delle proiezioni dei lati inclinati sulla base.

Nella figura che segue i lati hanno le seguenti lunghezze:

- AB = a = 13
- BC = b = 15
- AC = c = 14



BH è l'altezza relativa alla base AC.

Il punto H divide il lato di base in due parti, p e q, che sono rispettivamente le *proiezioni* dei lati AB e BC su AC:

$$AC = AH + HC \quad \leftrightarrow \quad c = p + q$$

Applicando il teorema di Pitagora ai due triangoli rettangoli ABH e BCH si ha:

$BH^2 = AB^2 – AH^2$
$h^2 = a^2 – p^2$

$BH^2 = BC^2 – HC^2$
$h^2 = b^2 – q^2$

Le due formule si equivalgono:

$a^2 – p^2 = b^2 – q^2$

Ma $p = c – q$ e sostituendo

$a^2 – (c – q)^2 = b^2 – q^2$
$a^2 – (c^2 – 2cq – q^2) = b^2 – q^2$
$a^2 – c^2 + 2cq – q^2 = b^2 – q^2$
$2cq = b^2 + c^2 – a^2$

Ne consegue:

$q = (b^2 + c^2 – a^2)/(2 * c)$

Quest'ultima è la formula trovata da Erone per risolvere il problema.
Sostituendo nella formula precedente i valori noti si ha:

$q = (15^2 + 14^2 – 13^2)/(2 * 14) = (225 + 196 – 169)/28 = 252/28 = 9$.

Il valore di p è:

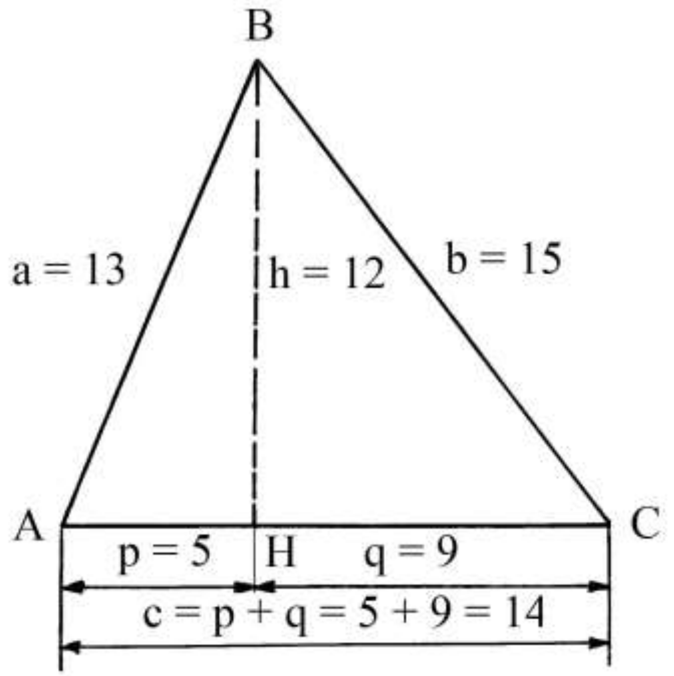
$p = c – q = 14 – 9 = 5$.

La formula di Erone usata per determinare p è la seguente:

$$p = (a^2 + c^2 - b^2)/(2 * c) = (13^2 + 14^2 - 15^2)/(2 * 14) = 140/28 = 5.$$

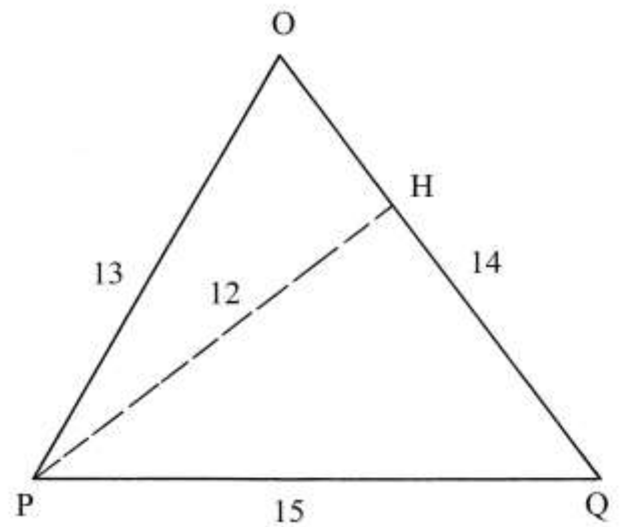
L'altezza $BH = h$ è uguale a:

$$BH^2 = AB^2 - AH^2 .$$
$$BH = \sqrt{(AB^2 - AH^2)} = \sqrt{(13^2 - 5^2)} = \sqrt{(169 - 25)} = \sqrt{144} = 12.$$



%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Torniamo al triangolo OPQ; tracciare l'altezza relativa al lato OQ: il segmento PH è lungo 12 braccia:

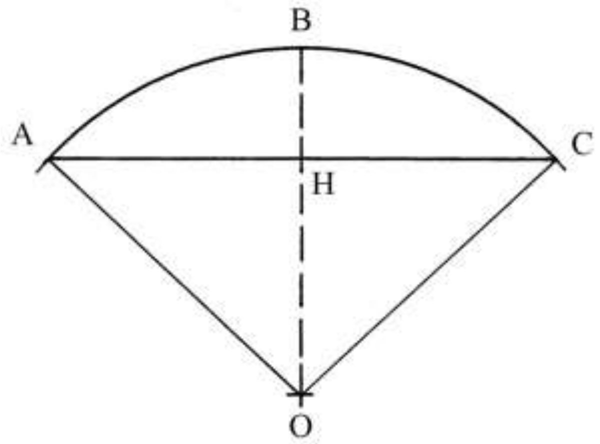


L'area del triangolo è:

Area $_{OPQ}$ = PH * OQ/2 = 12 * 14/2 = 84 braccia^2.

- -

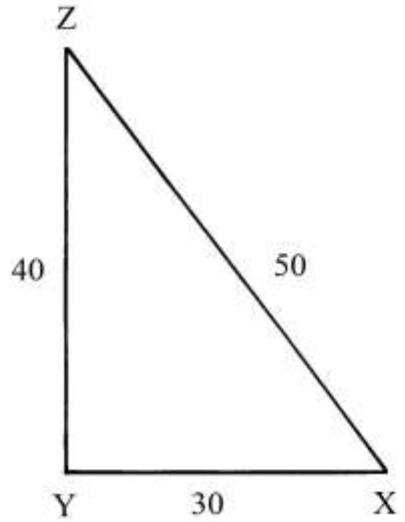
L'Anonimo fiorentino conclude questa Ragione con la presentazione di un presunto triangolo con lati lunghi 30, 14 e 13 braccia: il poligono è impossibile. A conferma, egli fa l'esempio dell'arco che è sempre più lungo della corda che lo sottende:



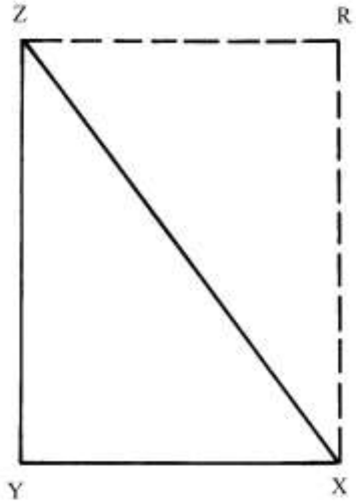
Infatti, l'arco ABC è più lungo della corda AHC.

<u>Ragione 10</u>

Un triangolo rettangolo ha i lati con le dimensioni scritte sulla figura:



Il triangolo ha lati lunghi secondo la terna 30-40-50 che deriva dalla terna primitiva 3-4-5.
Il triangolo è il risultato del sezionamento del rettangolo ZRXY lungo una diagonale:



L’area del triangolo è metà di quella del rettangolo:

Area $_{XYZ}$ = (YX * YZ)/2 = (40 * 30)/2 = 600 braccia^2.

L’Autore fornisce pure una soluzione corretta ma un po’ contorta:

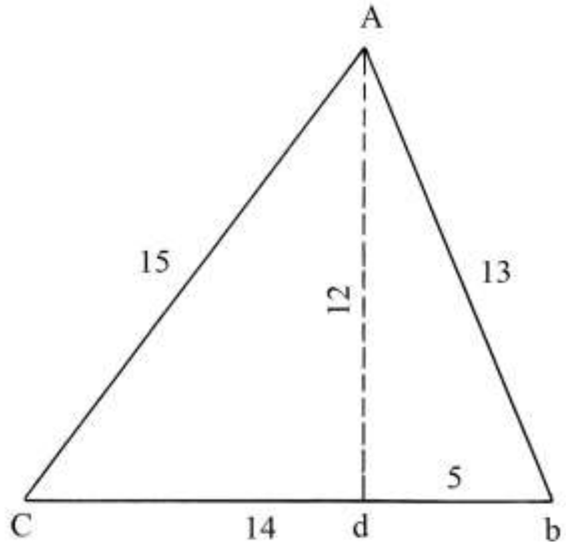
Area $_{XYZ}$ = YX * YZ – (YX/2) * YZ = 30 * 40 – (30/2) * 40 =
= 1200 – 600 = 600 braccia^2.

<u>Ragione 11</u>

Oggetto di questa Ragione è il triangolo 13-14-15, che è già stato considerato nella precedente Ragione 9.

Il lato lungo 14 braccia, Cb, è collocato orizzontalmente.

Il problema che l’Autore intende risolvere è il calcolo della lunghezza dell’altezza Ad.



In primo luogo, occorre stabilire la posizione del punto *d* sul lato Cb.

La procedura impiegata contiene i seguenti passi:

* moltiplicare la lunghezza di bC per sé stessa: 14 * 14 = 196;
* moltiplicare la lunghezza di AC per sé stessa: 15 * 15 = 225;
* sommare i due quadrati: 196 + 225 = 421;
* moltiplicare la lunghezza di Ab per sé stessa: 13 * 13 = 169;

*	sottrarre l'ultimo quadrato dalla somma dei primi due:	$421 - 169 = 252$;
*	dividere per il doppio della lunghezza di Cb:

$$252/(2 * 14) = 252/28 = 9 \text{ braccia, lunghezza di Cd.}$$

Il segmento *db* è lungo:

$$db = Cb - Cd = 14 - 9 = 5 \text{ braccia.}$$

L'Autore propone poi di verificare la correttezza del risultato calcolando direttamente la lunghezza di *db* con l'applicazione del metodo usato per ricavare quella di *Cd*. Ecco i passi:

*	moltiplicare la lunghezza di bC per sé stessa:	$14 * 14 = 196$;
*	moltiplicare la lunghezza di Ab per sé stessa:	$13 * 13 = 169$;
*	sommare i due prodotti:	$196 + 169 = 365$;
*	moltiplicare la lunghezza di AC per sé stessa:	$15 * 15 = 225$;
*	sottrarre l'ultimo quadrato dalla somma dei primi due:	$365 - 225 = 140$;
*	dividere per il doppio della lunghezza di Cb:

$$140/(2 * 14) = 140/28 = 5 \text{ braccia, lunghezza di } db.$$

L'altezza *Ad* crea nel piede *d* due angoli retti e genera due triangoli rettangoli: ACd e Adb.

Consideriamo il triangolo rettangolo ACd: l'ipotenusa AC è lunga 15 braccia e il cateto Cd è 9 braccia. La lunghezza di *Ad* è data da:

$$(Ad)^2 = AC^2 - (Cd)^2 = 15^2 - 9^2 = 225 - 81 = 144 \quad \text{e}$$
$$Ad = \sqrt{144} = 12 \text{ braccia.}$$

L'area del triangolo ACb è:

$$\text{Area}_{ACb} = (Cb) * (Ad)/2 = 14 * 12/2 = 84 \text{ braccia}^2.$$

\- APPROFONDIMENTO -

<u>Triangoli di Erone</u>

Un triangolo di Erone deve avere le lunghezze dei lati e di almeno un'altezza e l'area espressi da *numeri interi* o *razionali*: un numero razionale è ottenuto dal rapporto di due numeri interi, quali ad esempio:

$\frac{1}{2} = 0,5$ e $10/4 = 2,5$. Sono numeri *irrazionali* $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ e π.

Solo i triangoli isosceli e quelli scaleni possono essere triangoli di Erone. Un triangolo equilatero non può esserlo.

Il triangolo 13-14-15 è un triangolo di Erone e fu utilizzato da:

- Erone;
- Varrone (Marco Terenzio Varrone, 116-27 a.C.);
- i Gromatici *Marcus Iunius Nipsus* (II secolo d.C.) e Epafrodito (II – III secolo);
- Boezio (475-526);
- forse Gerberto di Aurillac (Papa Silvestro II, 940 circa – 1003);
- Leonardo Fibonacci (1170 circa – dopo il 1242), nella *Practica Geometrie*;
- Piero della Francesca (1412? – 1492), nel *Trattato d'abaco* (fogli 80 *recto*, 80 *verso*, 81 *recto*-a, 81 *verso*, 82 *recto*);
- Giorgio Valla (1447 – 1500) nel "*De expetendis et fugiendis rebus opus*", pubblicato a Venezia nel 1501;
- Niccolò Fontana, detto Tartaglia (circa 1499 – 1557).

La costanza nel tempo e presso numerosi e importanti geometri dell'uso di questo triangolo può essere spiegata con le sue interessanti proprietà geometriche (possesso di lunghezze e aree rappresentate da numeri interi) che evitavano il ricorso a complesse operazioni quali l'estrazione di radici quadrate.

Essendo caratterizzati da lunghezze e aree espresse con numeri interi, i triangoli di Erone furono e sono importanti per le applicazioni tecniche poiché semplificano calcoli e misurazioni.

Anche il perimetro e il semiperimetro sono numeri interi.

L'area è sempre un numero multiplo di 6.

La tabella che segue descrive i primi triangoli di Erone con i lati più corti lunghi fino a 17; essi sono i triangoli *primitivi*: quelli *derivati* sono ottenuti dai primi moltiplicando le lunghezze dei lati per una uguale costante.

I triangoli sono indicati per lunghezza crescente del lato più corto:

Lunghezze dei lati	Perimetro	Semiperimetro	Area del triangolo	Tipo di triangolo
3 – 4 – 5	12	6	6	Rettangolo (terna primitiva)
3 – 25 – 26	54	27	36	Scaleno
4 – 13 – 15	32	16	24	Scaleno
4 – 51 – 53	108	54	90	Scaleno
5 – 5 – 6	16	8	12	Isoscele
5 – 5 – 8	18	9	12	Isoscele
5 – 12 – 13	30	15	30	Rettangolo (terna primitiva)
5 – 29 – 30	64	32	72	Scaleno
6 – 25 – 29	60	30	60	Scaleno
7 – 15 – 20	42	21	42	Scaleno
7 – 24 – 25	56	28	84	Rettangolo (terna primitiva)
8 – 15 – 17	40	20	60	Rettangolo (terna primitiva)
8 – 29 – 35	72	36	84	Scaleno
9 – 10 – 17	36	18	36	Scaleno
9 – 40 – 41	90	45	330	Rettangolo (terna primitiva)
10 – 13 – 13	36	18	60	Scaleno
10 – 17 – 21	48	24	84	Scaleno
11 – 13 – 20	44	22	66	Scaleno
11 – 60 – 61	132	66	330	Rettangolo (terna primitiva)
12 – 17 – 25	54	27	90	Scaleno
12 – 35 – 37	84	42	210	Rettangolo (terna primitiva)
13 – 13 – 24	50	25	60	Scaleno
13 – 14 – 15	42	21	84	Scaleno
13 – 15 – 4	32	16	24	Scaleno
13 – 20 – 21	54	27	126	Scaleno
13 – 35 - 37	84	42	210	Rettangolo (terna primitiva)
13 – 37 – 30	80	40	180	Scaleno
13 – 37 – 40	90	45	240	Scaleno
13 – 40 – 45	98	49	252	Scaleno
13 – 68 – 75	156	78	390	Scaleno

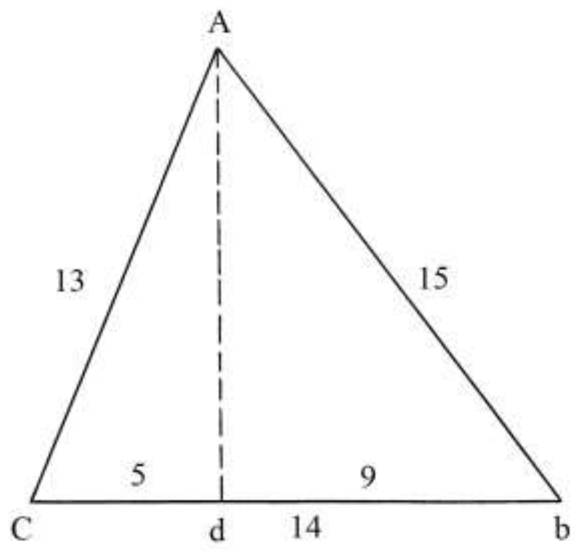
13 – 84 – 85	182	91	546	Rettangolo (terna primitiva)
15 – 28 – 41	84	42	126	Scaleno
15 – 34 – 35	84	42	252	Scaleno
15 – 37 – 44	96	48	264	Scaleno
15 – 41 – 52	108	54	234	Scaleno
16 – 63 – 65	144	72	504	Rettangolo (terna primitiva)
17 – 10 – 21	48	24	84	Scaleno
17 – 25 – 26	68	34	204	Scaleno
17 – 25 – 28	70	35	210	Scaleno
17 – 28 – 39	84	42	210	Scaleno
17 – 39 – 44	100	50	330	Scaleno
17 – 55 – 60	132	66	462	Scaleno

I numeri che esprimono le aree dei triangoli elencati nella tabella sono tutti divisibili per 6 (e per 1, 2 e 3).

- -

Ragione 12

Il problema è una variante della precedente Ragione. Il triangolo è ruotato rispetto all'altezza Ad ed è simmetrico rispetto al precedente triangolo.



L'Autore indica la lunghezza incognita di *Cd* con l'espressione "*1/c*": qui è sostituita con "x".

Il quadrato della lunghezza di *Cd* è indicato nel testo originale con la frazione "1/z": qui è usato il simbolo "x^2".

La lunghezza di *db* è:

db = Cb – Cd = 14 – x.

La procedura impiegata è la seguente:

* moltiplicare la lunghezza di Ab per sé stessa: 15 * 15 = 225;
* moltiplicare la lunghezza di db per sé stessa:

$(14 – x) * (14 – x) = (196 – 28*x + x^2)$
[l'Autore indica erroneamente *Cb* invece di *db*];
* sottrarre l'ultima espressione dal quadrato di Ab:
$225 – (196 – 28*x + x^2) = (29 + 28*x – x^2)$ [l'Autore ha applicato il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo Abd e ha ricavato il quadrato della lunghezza di Ad];
* moltiplicare la lunghezza di AC per sé stessa: 13 * 13 = 169;
* moltiplicare la lunghezza di Cd per sé stessa: $x * x = x^2$;
* sottrarre il quadrato di Cd dal quadrato di AC: $(169 – x^2)$ [l'Autore ha di nuovo applicato il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo ACd e ha ottenuto il quadrato della lunghezza di Ad];
* uguagliare le due espressioni del quadrato della lunghezza di *Ad*:
$(29 + 28*x – x^2) = (169 – x^2)$
28*x = 140
X = 140/28 = 5 braccia.

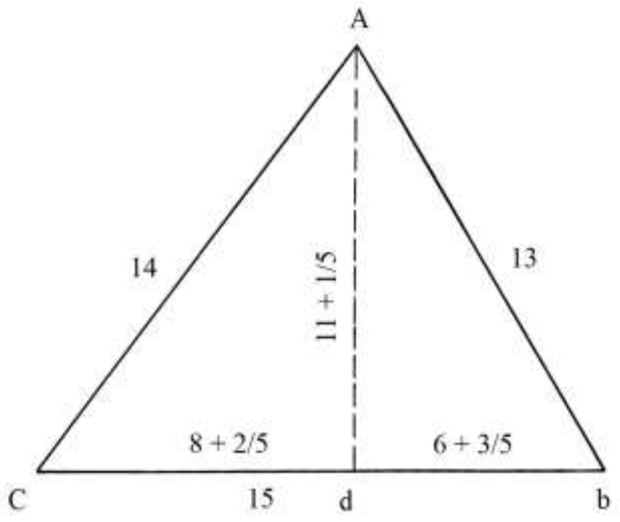
La lunghezza di *db* è:
db = Cb – Cd = 14 – 5 = 9 braccia.

L'Autore conclude con il calcolo della lunghezza di *Ad*, altezza relativa alla base Cb. Ecco la procedura:
* moltiplicare la lunghezza di Ab per sé stessa: 15 * 15 = 225;
* moltiplicare la lunghezza di *db* per sé stessa: 9 * 9 = 81;
* sottrarre il secondo quadrato dal primo: 225 – 81 = 144;
* estrarre la radice quadrata: √144 = 12 braccia, lunghezza di *Ad*.

Oppure:
* moltiplicare la lunghezza di AC per sé stessa: 13 * 13 = 169;
* moltiplicare la lunghezza di *Cd* per sé stessa: 5 * 5 = 25;

Ragione 13

Il problema presenta il solito triangolo 13-14-15 con il lato più lungo disposto orizzontalmente:



Il problema chiede di determinare la posizione del piede *d* dell'altezza Ad. L'Autore calcola la lunghezza di *Cd* con i passi che seguono:
* moltiplicare la lunghezza di Cb per sé stessa: 15 * 15 = 225;
* moltiplicare la lunghezza di AC per sé stessa: 14 * 14 = 196;
* sommare i due prodotti: 225 + 196 = 421;
* moltiplicare la lunghezza di Ab per sé stessa: 13 * 13 = 169;
* sottrarre l'ultimo quadrato dalla somma dei primi due: 421 – 169 = 252;

*	dividere per il doppio della lunghezza della base Cb:

$252/(2 * Cb) = 252/(2 * 15) = 252/30 = (8 + 2/5)$ braccia, lunghezza di *Cd*.

La lunghezza di *db* è:

$db = Cb – Cd = 15 – (8 + 2/5) = (6 + 3/5)$ braccia.

Per verificare l'esattezza del risultato, l'Autore calcola la lunghezza di *db* con una procedura simile a quella appena impiegata:

*	moltiplicare la lunghezza di Cb per sé stessa: $15 * 15 = 225$;
*	moltiplicare la lunghezza di Ab per sé stessa: $13 * 13 = 169$;
*	sommare i due quadrati: $225 + 169 = 394$;
*	moltiplicare la lunghezza di Ac per sé stessa: $14 * 14 = 196$;
*	sottrarre l'ultimo quadrato dalla somma dei primi due: $394 – 196 = 198$;
*	dividere per il doppio della lunghezza della base Cb:

$198/(2 * Cb) = 198/(2 * 15) = 198/30 = (6 + 3/5)$ braccia, lunghezza di *db*.

Procede poi a calcolare la lunghezza di *Ad*:

*	moltiplicare la lunghezza di *AC* per sé stessa: $14 * 14 = 196$;
*	moltiplicare la lunghezza di *Cd* per sé stessa: $(8 + 2/5) * (8 + 2/5) = (70 + 14/25)$;
*	sottrarre l'ultimo quadrato dal primo: $196 – (70 + 14/25) = (125 + 11/25)$;
*	estrarre la radice quadrata: $\sqrt{(125 + 11/25)} = (11 + 1/5)$ braccia, lunghezza di *Ad*

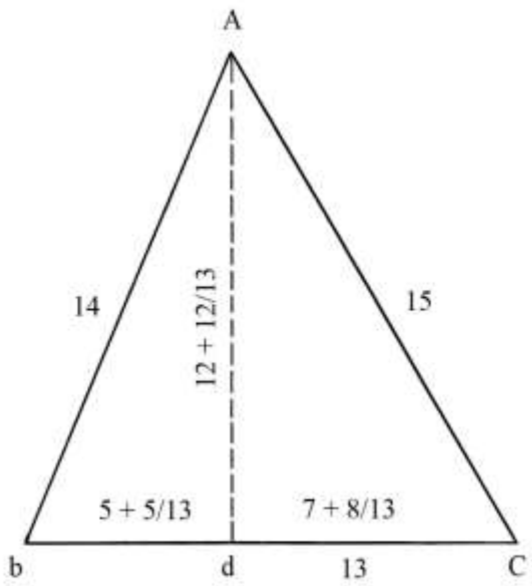
[l'Autore ha applicato il c.d. teorema di Pitagora al triangolo rettangolo *ACd*].

Infine, l'Anonimo procede a calcolare l'area di *ACb*:

Area $_{ACb} = (Ad * Cb)/2 = (11 + 1/5) * 15/2 = 84$ braccia^2, che è il risultato uguale a quello già calcolato per il triangolo della Ragione 11.

Ragione 14

Il solito triangolo 13-14-15 assume una nuova posizione: il lato lungo 14 braccia rimane al suo posto mentre i lati lunghi 13 e 15 braccia si scambiano le posizioni rispetto al caso precedente con la conseguenza che il lato più corto diviene orizzontale:



Il problema chiede per primo di calcolare la lunghezza dell'altezza *Ad*. L'Autore indica il triangolo con la sigla "AbCd", quasi fosse un quadrilatero e non un triangolo scaleno.

Ecco i passi della procedura impiegata:

* moltiplicare la lunghezza della base *bC* per sé stessa: 13 * 13 = 169;
* moltiplicare la lunghezza di AC per sé stessa: 15 * 15 = 225;
* sommare i due quadrati: 169 + 225 = 394;
* moltiplicare la lunghezza di *Ab* per sé stessa: 14 * 14 = 196;
* sottrarre l'ultimo quadrato dalla somma dei primi due: 394 – 196 = 198;
* dividere per il doppio della lunghezza della base *bC*:

198/(2 * *bC*) = 198/(2 * 13) = 198/26 = (7 + 8/13) braccia, lunghezza di *dC*.

I passi che seguono servono a calcolare, per riprova, la lunghezza di *bd*:

* moltiplicare la lunghezza di *bC* per sé stessa: 13 * 13 = 169;
* moltiplicare la lunghezza di *Ab* per sé stessa: 14 * 14 = 196;
* sommare i due quadrati: 169 + 196 = 365;
* moltiplicare la lunghezza di AC per sé stessa: 15 * 15 = 225;
* sottrarre l'ultimo quadrato dalla somma dei primi due: 365 – 225 = 140;
* dividere per il doppio della lunghezza della base *bC*:

140/(2 * *bC*) = 140/(2 * 13) = 140/26 = (5 + 5/13) braccia, lunghezza di *bd*.

L'ultima procedura serve a calcolare la lunghezza di *Ad*:

* moltiplicare la lunghezza di AC per sé stessa: 15 * 15 = 225;
* moltiplicare la lunghezza di *dC* per sé stessa: (/ + 8/13) * (7 + 8/13) = (57 + 168/169);
* sottrarre l'ultimo quadrato dal primo: 225 – (57 + 168/169) = (167 + 1/169);
* estrarre la radice quadrata: √(167 + 1/169) = (12 + 12/13) braccia, lunghezza di *Ad*.

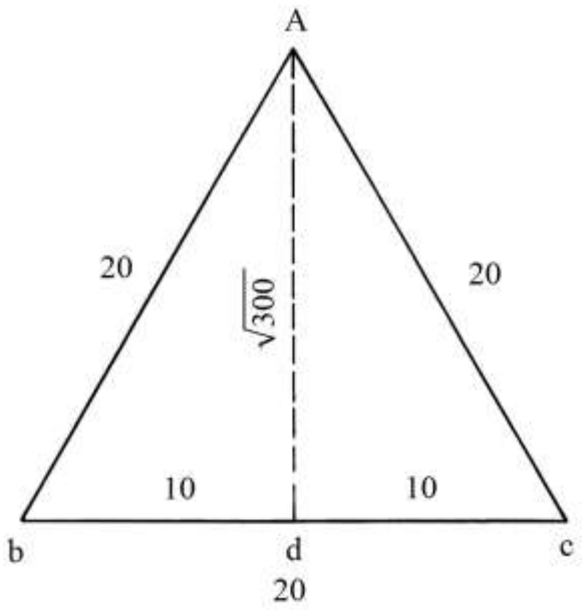
Infine, l'Autore calcola l'area del triangolo:

Area $_{AbC}$ = (bC * Ad)/2 = 13 * (12 + 12/13)/2 = (156 + 12)/2 = 168/2 = 84 braccia^2.

Ragione 15

Il problema provvede a calcolare l'area di due distinti triangoli: il primo è equilatero e il secondo isoscele.

L'altezza *Ad* del triangolo equilatero *Abc* divide la base bC in due segmenti di uguale lunghezza, *bd* e *dC*, entrambi di 10 braccia:



√

Ad divide il triangolo equilatero in due triangoli equilateri di uguali dimensioni: Abd e Adc. Applicando il teorema c.d. di Pitagora al triangolo Abd, con i seguenti passi viene ricavata la lunghezza di *Ad*:

* moltiplicare la lunghezza di *Ab* per sé stessa: $20 * 20 = 400$;
* moltiplicare la lunghezza di *db* per sé stessa: $10 * 10 = 100$;
* sottrarre il secondo quadrato dal primo: $400 – 100 = 300$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{300}$ braccia, lunghezza dell'altezza *Ad*.

L'Autore non semplifica il risultato a:

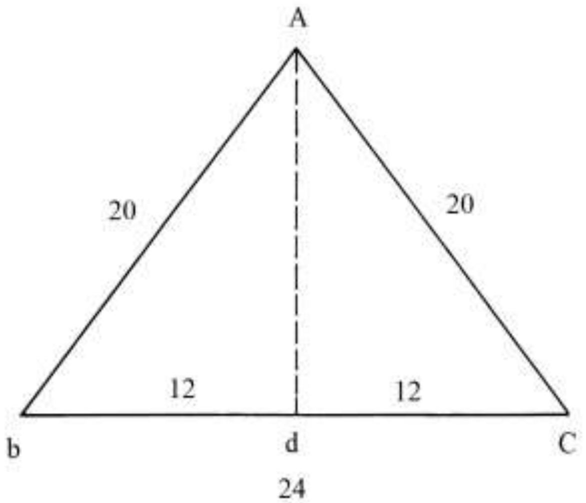
$\sqrt{300} = 10 * \sqrt{3}$ braccia.

L'area del triangolo equilatero è:

Area $_{Abc} = (bc/2) * Ad = 10 * \sqrt{300} = \sqrt{(100 * 300)} = \sqrt{30000} = [100 * \sqrt{3}]$ braccia^2.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Il secondo triangolo è isoscele:



L'altezza *Ad* divide la base *bC* in due segmenti, *bd* e *dC*, di uguale lunghezza:

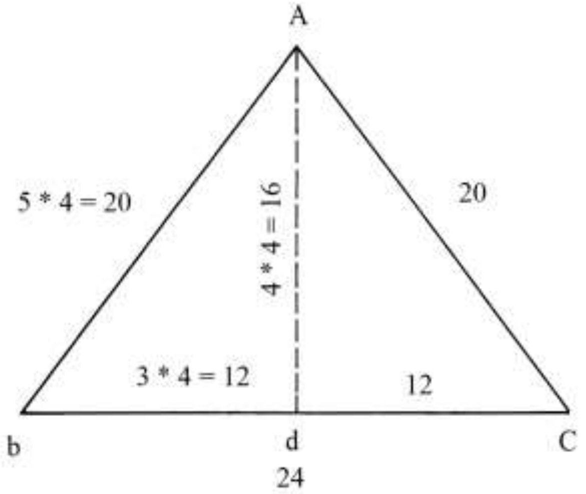
$bd = dC = bC/2 = 24/2 = 12$ braccia.

La sua lunghezza è correttamente calcolata applicando il teorema c.d. di Pitagora al triangolo rettangolo Abd:

$Ad^2 = Ab^2 – bd^2 = 20^2 – 12^2 = 400 – 144 = 256$ e

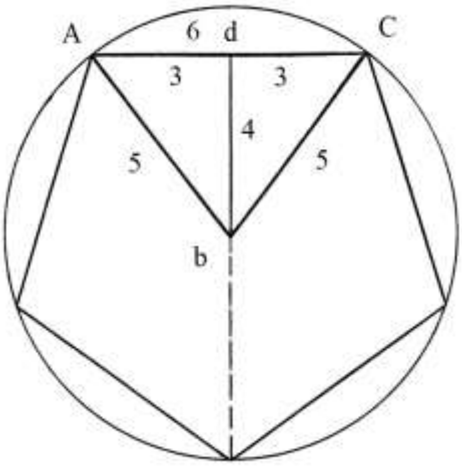
$Ad = \sqrt{256} = 16$ braccia.

I lati dei due triangoli Abd e AdC hanno lunghezze che formano la terna 12-16-20, derivata dalla primitiva 3-4-5:



Ragione 16

È dato un terreno che ha la forma di un pentagono inscritto in un cerchio: i suoi lati sono lunghi 6 braccia.



Nel poligono è fissato il triangolo AbC che è scomposto in due triangoli rettangoli Abd e dbC che hanno lati lunghi 3, 4 e 5 braccia: riappare la prima terna primitiva.

L'Autore ricava la lunghezza di *bd* (che è l'*apotema* del pentagono) applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo Abd:

$bd^2 = Ab^2 – Ad^2 = 5^2 – 3^2 = 25 – 9 = 16$ e

$bd = \sqrt{16} = 4$ braccia.

L'area del triangolo AbC è:

$\text{Area}_{\text{AbC}} = (AC * db)/2 = (6 * 4)/2 = 12$ braccia^2.

L'area del pentagono è data da:

$\text{Area}_{\text{PENTAGONO}} = 5 * \text{Area}_{\text{AbC}} = 5 * 12 = 60$ braccia^2.

- APPROFONDIMENTO -

La costruzione del pentagono mostrata nello schema qui sopra è approssimata.

Erone di Alessandria suggerì la seguente formula approssimata per il calcolo dell'area di un pentagono regolare:

$$\text{Area}_{\text{PENTAGONO}} = 5/3 * \text{lato}^2.$$

Applicando questa formula al caso di cui sopra si ha un risultato identico:

$$\text{Area}_{\text{PENTAGONO}} = 5/3 * 6^2 = 5/3 * 36 = 60 \text{ braccia}^2.$$

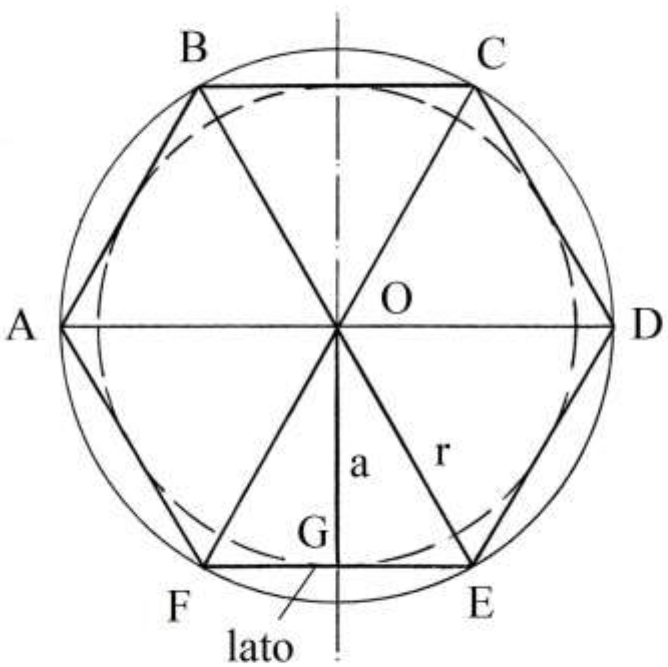
L'Autore del Trattato ha avuto modo di conoscere almeno in parte l'opera di Erone di Alessandria? Sembrerebbe di sì, visto che utilizza più volte la sua formula per calcolare l'area di un triangolo.

Il risultato ottenuto con la formula di Erone è approssimato per difetto. L'area di un pentagono è oggi calcolata in modo semplificato con un'accettabile approssimazione impiegando il relativo numero fisso F = 1,72:

$$\text{Area}_{\text{PENTAGONO}} = F * \text{lato}^2 = 1{,}72 * 6^2 = 1{,}72 * 36 = 61{,}92 \text{ braccia}^2.$$

I poligoni regolari e i numeri fissi *f* e *F*

In un generico poligono regolare si chiama *apotema* – a – l'altezza del triangolo isoscele che ha per base un lato e per vertice il centro O, centro del poligono e dei due cerchi, circoscritto e inscritto. L'apotema OG è il raggio del cerchio inscritto e i segmenti OF e OE sono i raggi del cerchio circoscritto al poligono (in questo caso un *esagono*): nell'esempio, il triangolo OFE è equilatero e OG è una sua altezza e un apotema del poligono.



La lunghezza dell'apotema, *a*, è calcolabile con il teorema di Pitagora applicato ai triangoli rettangoli OGF e OGE:

$$OG = \sqrt{[OE^2 - (EF/2)^2]}$$

$$a = \sqrt{[r^2 - (\ell/2)^2]}$$ dove:

* *a* è l'apotema;

* $\ell/2$ è la lunghezza dei segmenti FG e GE che sono lunghi metà del lato FE.

In un poligono regolare la lunghezza del lato ℓ e quella del raggio r sono direttamente proporzionali.

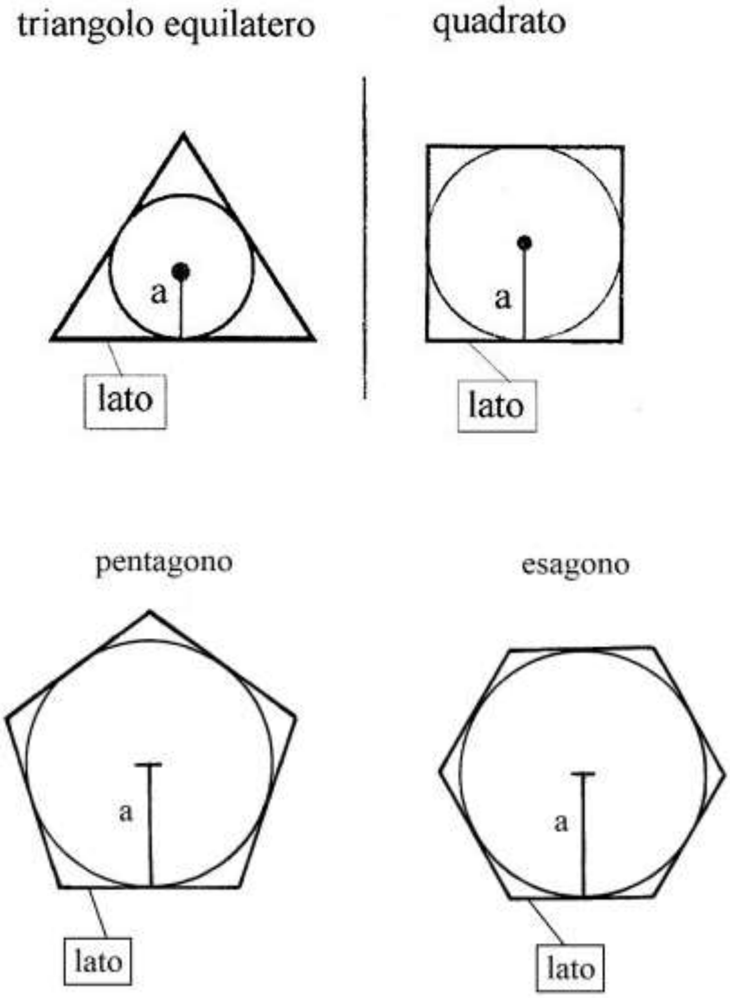
Il rapporto fra la lunghezza dell'apotema e quella del lato è un *numero fisso* f:

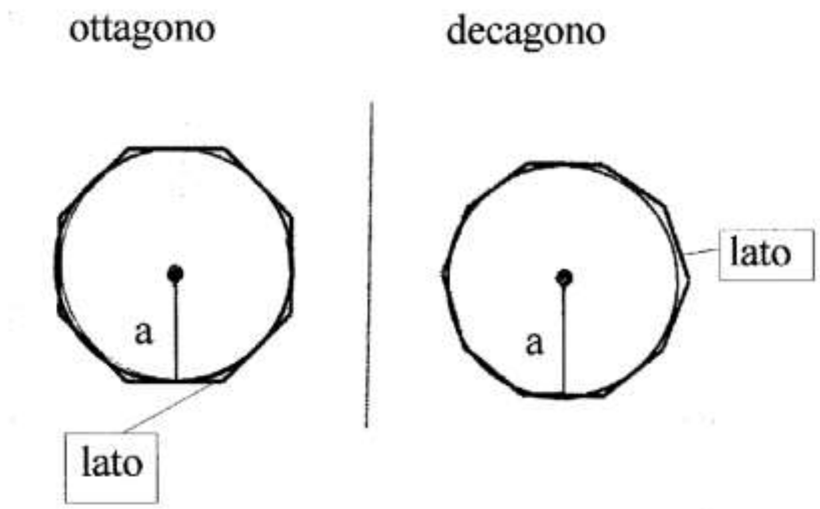
$$f = a/\ell \qquad \text{e} \qquad a = f * \ell.$$

f è una costante tipica di ciascun poligono regolare.

<u>Gli apotemi di alcuni poligoni regolari</u>

Le figure che seguono descrivo gli apotemi dei sei più comuni poligoni regolari:





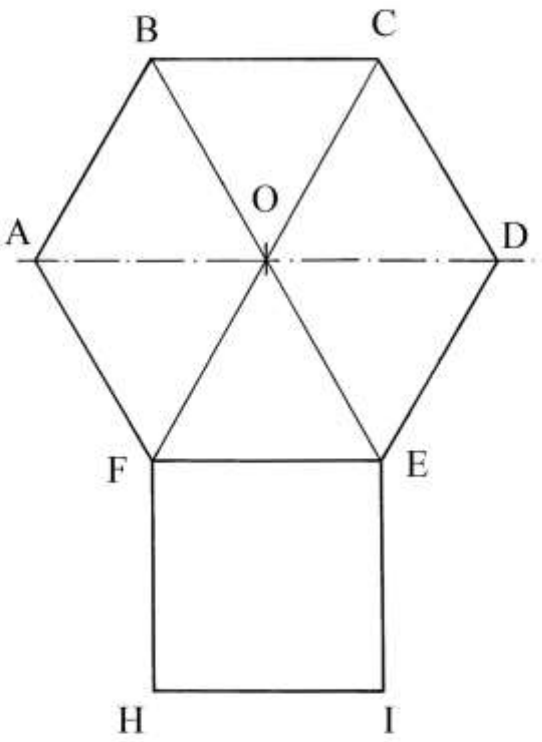
La tabella che segue fornisce i *numeri fissi f* per i più comuni poligoni: conoscendo la lunghezza del lato ℓ essi permettono di calcolare rapidamente il valore di a con la formula, già vista:

$$a = f * \ell$$

Poligono regolare	*Numero fisso f*
Triangolo equilatero	0,289
Quadrato	0,5
Pentagono	0,688
Esagono	0,866
Ettagono	1,038
Ottagono	1,207
Ennagono	1,374
Decagono	1,539
Endecagono	1,703
Dodecagono	1,866

In un qualsiasi poligono regolare il rapporto fra la sua area e quella del quadrato costruito su un suo lato (ℓ) è costante ed è un altro *numero fisso*, indicato con la lettera *F* maiuscola, per distinguerlo dall'altro numero fisso (f):

$$\text{Area} = F * \ell^2$$



Anche *F* è un numero fisso caratteristico di ciascun poligono regolare: esso indica quante volte il quadrato EFHI è contenuto nel poligono regolare ABCDEF.

La regola vale per tutti i poligoni regolari.

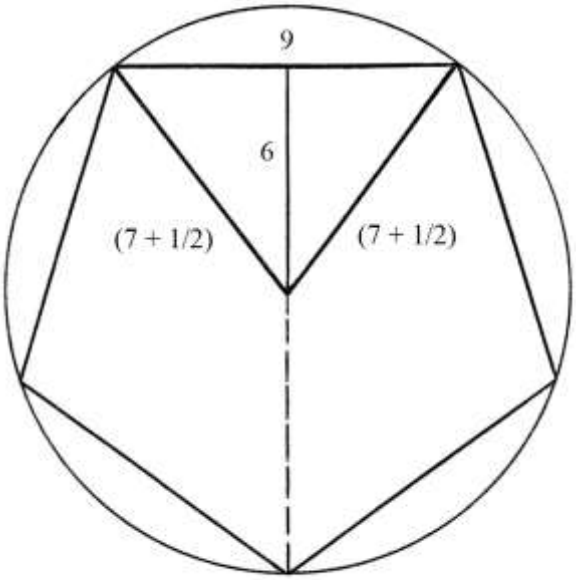
La tabella che segue riporta i valori di *F* per i più comuni poligoni:

Poligono regolare	*Numero fisso F*
Triangolo equilatero	0,433
Quadrato	1
Pentagono	1,72
Esagono	2,598
Ettagono	3,634
Ottagono	4,828
Ennagono	6,182
Decagono	7,694
Endecagono	9,366
Dodecagono	11,196

- -

Ragione 17

Un altro terreno ha la forma di un pentagono con lati lunghi 9 braccia:



La soluzione del problema è legata a quella della precedente Ragione.

La lunghezza del raggio del cerchio in cui è inscritto il pentagono non è nota e viene ricavata con una semplice proporzione: se un lato del pentagono è lungo 6 ed è inscritto in un cerchio di raggio 5, il raggio di questo nuovo cerchio è:

(lato : raggio) = (nuovo lato : nuovo raggio)

6 : 5 = 9 : (nuovo raggio) e

(nuovo raggio) = (5 * 9)/6 = 45/6 = (7 + ½) braccia.

L'Autore procede poi a calcolare la lunghezza dell'*apotema* (che egli chiama *catetto*) e cioè dell'altezza del nuovo triangolo isoscele e sempre usando una proporzione:

(lato : apotema) = (nuovo lato : nuovo apotema)

6 : 4 = 9 : (nuovo apotema)

(nuovo apotema) = (4 * 9)/6 = 6 braccia.

L'area di un triangolo di questo nuovo pentagono è:

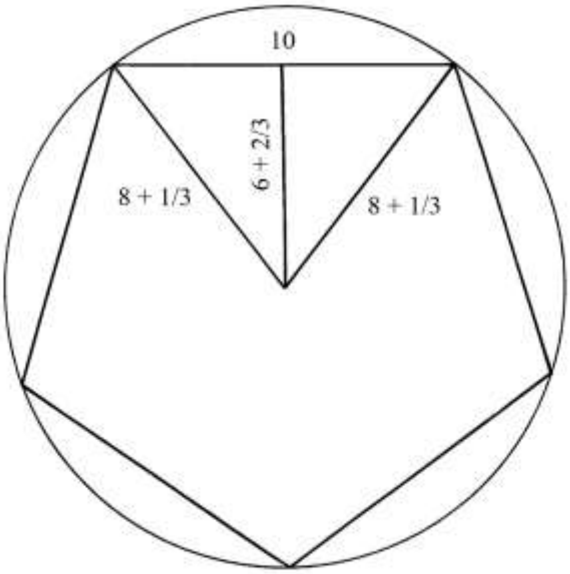
Area $_{\text{TRIANGOLO}}$ = (lato * apotema)/2 = (9 * 6)/2 = 27 braccia^2.

L'area dell'intero pentagono è data da:

Area $_{\text{PENTAGONO}}$ = 5 * Area $_{\text{TRIANGOLO}}$ = 5 * 27 = 135 braccia^2.

Ragione 18

Un terreno ha di nuovo la forma di un pentagono inscritto:



Conoscendo soltanto la lunghezza del lato di questo terzo pentagono, l'Autore ricava la lunghezza dell'altezza del triangolo isoscele (o apotema) e del raggio del cerchio circoscritto ricorrendo di nuovo alle proporzioni:

lato primo pentagono : raggio primo pentagono = lato terzo pentagono : raggio terzo pentagono

6 : 5 = 10 : (raggio terzo pentagono)

(raggio terzo pentagono) = (5 * 10)/6 = (8 + 1/3) braccia.

In modo simile viene ricavata la lunghezza dell'altezza del triangolo (o *apotema* del poligono):

lato primo pentagono : altezza primo pentagono = lato terzo pentagono : altezza terzo pentagono

6 : 4 = 10 : (altezza terzo pentagono)

(altezza terzo pentagono) = (4 * 10)/6 = 40/6 = (6 + 2/3) braccia.

L'area del triangolo è:

Area $_{\text{TRIANGOLO}}$ = (lato * altezza)/2 = 10 * (6 + 2/3)/2 = (33 + 1/3) braccia^2.

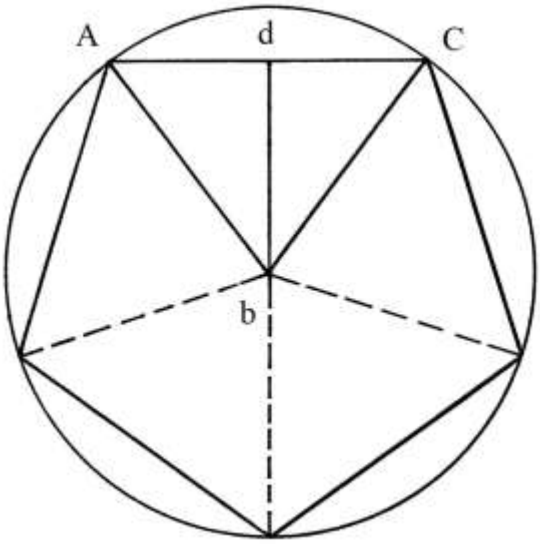
L'area dell'intero pentagono è:

Area $_{\text{PENTAGONO}}$ = 5 * Area $_{\text{TRIANGOLO}}$ = 5 * (33 + 1/3) = (166 + 2/3) braccia^2.

- APPROFONDIMENTO -

Riconsideriamo la figura relativa alla Ragione 16.

Il triangolo AbC è uno dei cinque triangoli che compongono il pentagono:



bd è un'altezza del triangolo isoscele AbC ed è anche l'apotema del pentagono.

La tabella che segue riassume le lunghezze di lati, altezze (o apotemi) e raggi relativi ai tre pentagoni delle Ragioni 16, 17 e 18 e i loro rapporti:

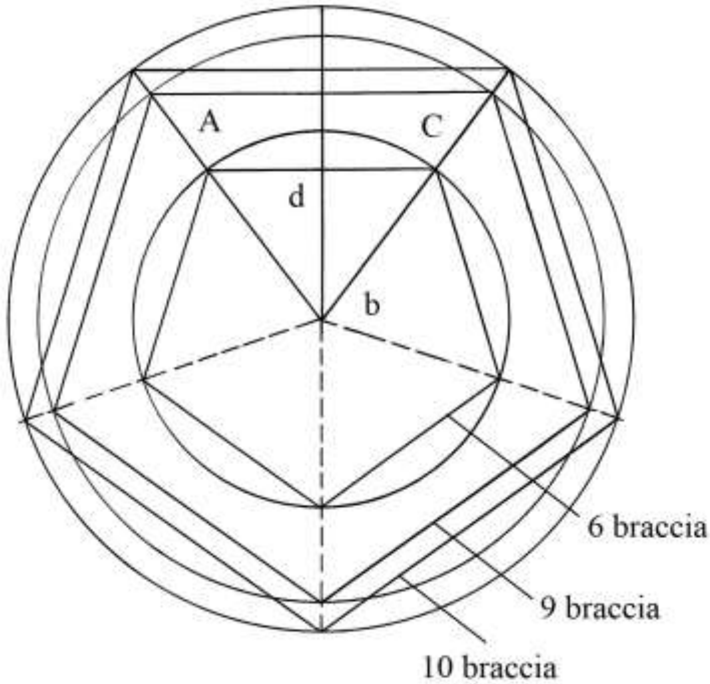
Ragioni	Lati (braccia)	Altezze (Apotemi) (braccia)	Raggio cerchio (braccia)	Apotema/lato	Lato/Raggio	Apotema/Raggio
16	6	4	5	2/3	1,2	0,8
17	9	6	7 + ½	2/3	1,2	0,8
18	10	6 + 2/3	8 + 1/3	2/3	1,2	0,8

L'Autore ha approssimato il rapporto fra le lunghezze dell'apotema e del lato a 2/3 ≈ 0,(66), a fronte del valore f ≈ 0,688: la differenza è minima.

Egli ha impiegato per il rapporto fra la lunghezza del lato e quella del raggio del cerchio circoscritto il valore 1,2, a fronte di quello esatto di 1,17557. Anche in questo caso, ai fini pratici, la differenza è minima.

Infine, per il rapporto

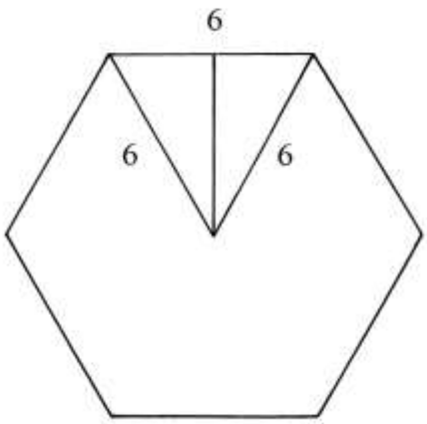
I tre pentagoni sono *simili*:



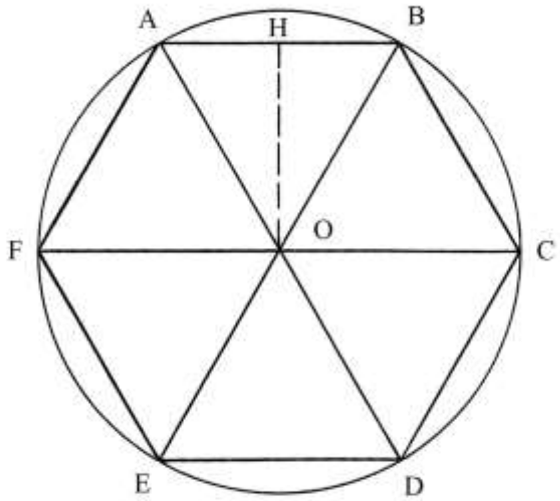
- -

Ragione 19

Un terreno ha la forma di un esagono regolare con lati lunghi 6 braccia:



Una proprietà geometrica dell'esagono è importante: il raggio del cerchio in cui è inscritto è lungo quanto i lati del poligono. Questo è inoltre scomponibile in *sei* triangoli equilateri che hanno lati lunghi quanto i lati dell'esagono e del raggio.



OH è l’altezza del triangolo OAB rispetto al lato AB ed è anche un apotema dell’esagono.

L’Autore calcola l’area di un triangolo applicando di nuovo il metodo di Erone di Alessandria:

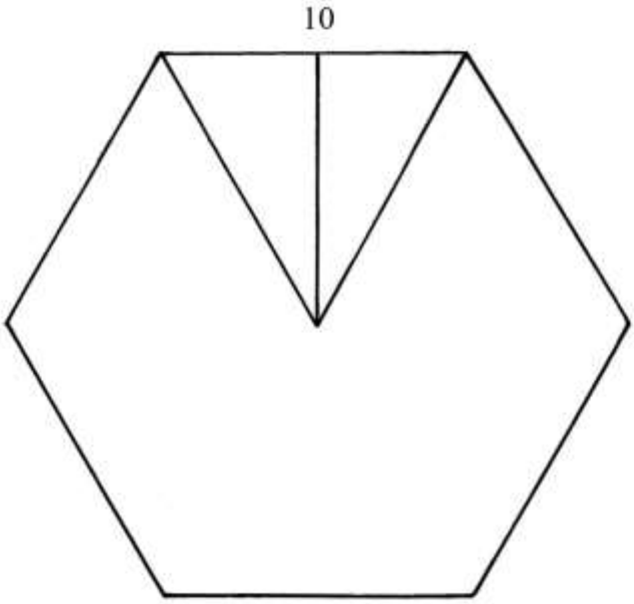
* sommare le lunghezze dei lati: 6 + 6 + 6 = 18 [perimetro];
* dividere per 2: 18/2 = 9 [semiperimetro];
* sottrarre la lunghezza del primo lato del triangolo dal semiperimetro 9: 9 – 6 = 3;
* sottrarre la lunghezza del secondo lato del triangolo dal semiperimetro: 9 – 6 = 3;
* sottrarre la lunghezza del terzo lato del triangolo dal semiperimetro: 9 – 6 = 3;
* moltiplicare gli ultimi tre numeri: 3 * 3 * 3 = 27;
* moltiplicare per il semiperimetro: 27 * 9 = 243;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{243}$ $braccia^2$, area di un triangolo equilatero;
* moltiplicare per 6: $\sqrt{243} * 6 = \sqrt{(243 * 36)} = \sqrt{8748}$ [= 54 * $\sqrt{3}$] $braccia^2$, area dell’esagono.

L’Anonimo non ha calcolato l’area di OAB semplicemente moltiplicando la lunghezza dell’apotema OH per metà della lunghezza del lato AB:

* $OH^2 = OA^2 – AH^2 = 6^2 – (6/2)^2 = 39 – 9 = 27$ e
  OH = $\sqrt{27}$ braccia
* Area OAB = OH * (AB/2) = $\sqrt{27}$ * (6/2) = $\sqrt{(27 * 9)} = \sqrt{243}$ $braccia^2$.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Un secondo esagono regolare ha lati lunghi 10 braccia. La sua area è calcolata con la procedura già impiegata per il caso precedente:



Il perimetro di un triangolo equilatero è:

$10 + 10 + 10 = 30$ e il semiperimetro è: $30/2 = 15$.

Effettuare il seguente calcolo:

$(15 – 10) * (15 – 10) * (15 – 10) * 15 = 5 * 5 * 5 * 15 = 1875$.

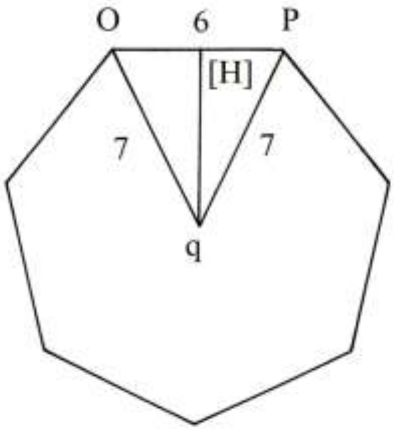
Estrarre la radice quadrata: $\sqrt{1875}$ braccia^2, area di un triangolo equilatero.

L'area dell'intero esagono è:

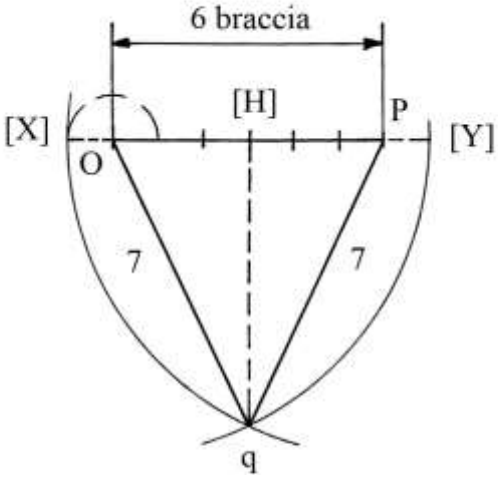
Area $_{\text{ESAGONO}} = 6 *$ Area $_{\text{TRIANGOLO}} = 6 * \sqrt{1875} = \sqrt{(36 * 1875)} =$
$= \sqrt{67500}$]$= 150 * \sqrt{3}$] braccia^2.

Ragione 20

Questa Ragione descrive due problemi sull'ettagono.

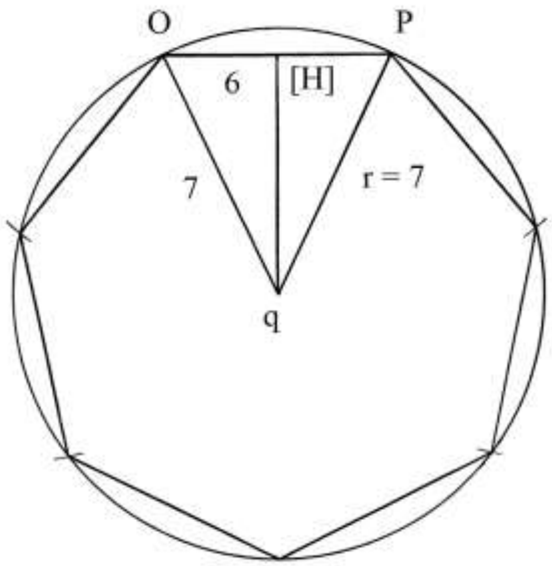


Nel primo caso non è chiaro come l'Autore costruisca la figura: pare che egli proponga di dividere – con l'aiuto di un compasso – in *sei* parti uguali il lato OP, lungo 6 braccia, per poi riportare verso sinistra la lunghezza di 1 braccio da O a [X].



Con raggio P[X] = 7 braccia, fare centro in P e in O e tracciare due archi che si incontrano nel punto *q*.

Questo ultimo è il centro del cerchio in cui è inscritto (o inscrivibile) l'ettagono: il suo raggio, qO = qP, è lungo 7 braccia:



Nel *Trattato* non vi è traccia del cerchio, né alcun indizio sulla sua esecuzione.

Occorre calcolare l'area del triangolo OPq.

q[H] è l'*apotema* dell'ettagono e un'altezza del triangolo. La sua lunghezza è:

$q[H] = \sqrt{[Oq^2 - (OP/2)^2]} = \sqrt{[7^2 - (6/2)^2]} = \sqrt{(49 - 9)} = \sqrt{40}$ braccia.

L'area del triangolo OPq è:

$\text{Area}_{OPq} = q[H] * OP/2 = \sqrt{40} * 6/2 = \sqrt{40} * 3 = \sqrt{(40 * 9)} = \sqrt{360}$ braccia^2.

L'area dell'intero ettagono è data da:

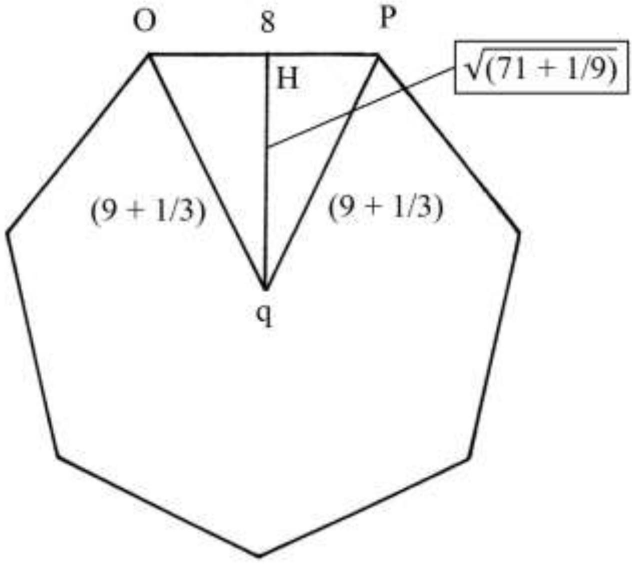
$\text{Area}_{ETTAGONO} = 7 * \text{Area}_{OPq} = 7 * \sqrt{360} = \sqrt{(49 * 360)} = \sqrt{17640}$ braccia^2.

L'autore non semplifica i calcoli. L'ultima radice quadrata può essere ridotta come segue:

$\sqrt{17640} = \sqrt{(40 * 9 * 49)} = \sqrt{(4 * 10 * 9 * 49)} = 2 * 3 * 7 * \sqrt{10} = 42 * \sqrt{10}$ braccia^2.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Il secondo terreno di forma ettagonale ha le dimensioni riportate sulla figura:



L’Autore fornisce inizialmente solo la lunghezza dei lati del poligono: 8 braccia.

Le lettere sono assenti nell’originale: qui sono aggiunte per fare chiarezza.

Il rapporto fra le lunghezze del lato del poligono (OP) e dei lati del triangolo (qO = qP) vale:

$OP/Oq = 8/(9 + 1/3) = 8/(28/3) = (8 * 3)/28 = 24/28 = 6/7$.

Il rapporto è uguale a quello esistente nel primo ettagono.

La lunghezza dei lati (qO = qP) dei lati del triangolo isoscele è ricavata con una proporzione:

$6 : 7 = 8 : qO$ da cui

$qO = (7 * 8)/6 = 56/6 = (9 + 1/3)$ braccia.

L’altezza qH del triangolo è:

$qH^2 = qO^2 – (OP/2)^2 = (9 + 1/3)^2 – (8/2)^2 = (28/3)^2 – 16 = (784 – 144)/9 =$
$= 640/9$ e

$qH = \sqrt{(640/9)} = \sqrt{(71 + 1/9)}$ braccia.

L’area del triangolo OPq è:

$Area_{OPq} = qH * OP/2 = \sqrt{(71 + 1/9)} * 4 = \sqrt{[(71 + 1/9) * 16]} = \sqrt{(1137 + 7/9)}$ braccia^2.

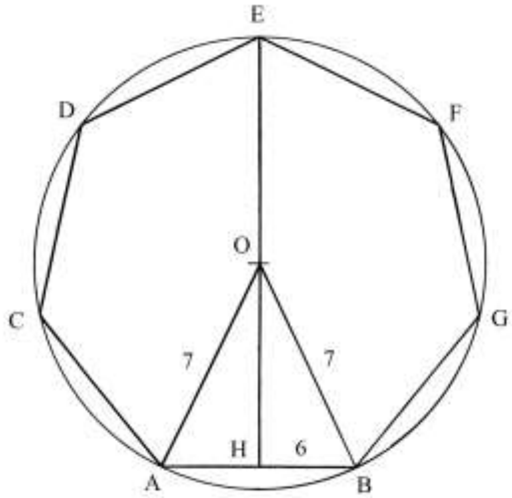
L’area dell’intero poligono è data da:

$Area_{ETTAGONO} = 7 * Area_{OPq} = 7 * \sqrt{(1137 + 7/9)} = \sqrt{[49 * (1137 + 7/9)]} =$
$= \sqrt{(55751 + 1/9)}$ braccia^2.

- APPROFONDIMENTO -

I due ettagoni studiati dall’Autore sono simili e leggermente approssimati.

Secondo il ricercatore Alpay Özdural la costruzione sottostante a questi ettagoni è da attribuire ai Babilonesi:



Il poligono è ricavato a partire da un triangolo isoscele, OAB, con la base AB lunga 6 e i lati obliqui OA e OB lunghi 7.

La base AB è uno dei lati dell'ettagono.

Fare centro in O e con raggio OA = OB = 7 disegnare una circonferenza: a partire da A e da B riportare la lunghezza di AB.

ACDEFGB è l'ettagono inscritto approssimato: due lati, DE e EF, sono leggermente più lunghi degli altri cinque.

In teoria, il perimetro dell'ettagono è lungo:

perimetro = 7 * AB = 7 * 6 = 42.

Esso corrisponde a 6 volte il raggio del cerchio OA:

6 * OA = 6 * 7 = 42.

In un ettagono regolare, l'*apotema* OH è lungo ≅ 1,038 volte il lato:

OH ≅ 1,038 * 6 ≅ 6,228.

Nel poligono della figura OH è l'apotema che è lungo:

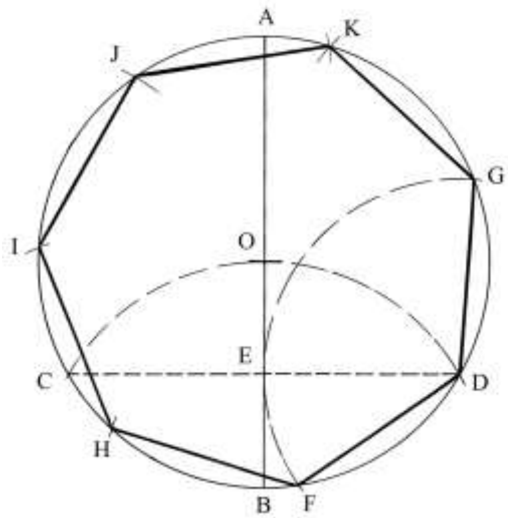
$OH^2 = OA^2 - AH^2 = 7^2 - 3^2 = 49 - 9 = 40$ e

OH = √40 = 2 * √10 ≅ 6,3245 braccia.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

A Erone di Alessandria è attribuita la costruzione dell'ettagono inscritto: essa muove dalla preliminare tracciatura della circonferenza, all'opposto del metodo attribuito ai Babilonesi che, come scritto sopra, è costruito a partire da un triangolo isoscele.

Disegnare una circonferenza di centro O e raggio lungo 7. AB è un diametro, verticale.



Con la stessa apertura OA fare centro in B e tracciare un arco che taglia la circonferenza nei punti C e D: A, C e D sono i vertici di un triangolo equilatero inscritto, non disegnato.

Tracciare la corda CD: essa è un lato del triangolo equilatero e il diametro AB la taglia nel suo punto medio E.

Entrambi i segmenti CE e ED sono la lunghezza approssimata del lato dell'ettagono: essa è uguale a metà del lato del triangolo equilatero.

Fare centro in D e con raggio DE disegnare un arco che sulla circonferenza fissa i punti F e G: a partire da questi ultimi riportare sulla circonferenza la lunghezza di DE.

DFHIJKG è l'ettagono inscritto.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

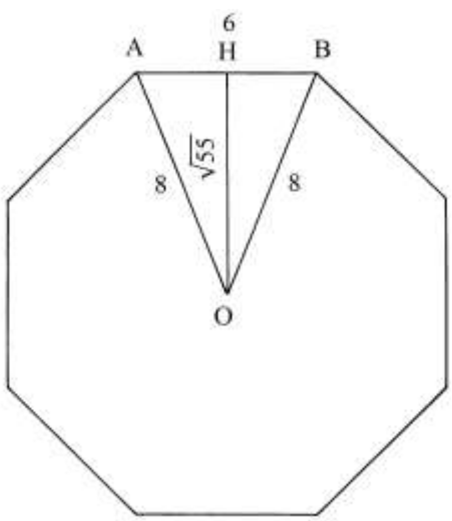
Fra il metodo attribuito ai Babilonesi e quello di Erone di Alessandria si intravede un filo conduttore.

I due ettagoni considerati nella ragione 20 sono senz'altro basati su quelle due costruzioni.

- -

<u>Ragione 21</u>

Un terreno ha la forma di un ottagono regolare inscritto in un cerchio (non disegnato nell'originale): il lato è lungo 6 braccia e il raggio è 8 braccia.



L'ottagono costruito a partire dal triangolo isoscele OAB è leggermente approssimato.
L'altezza HO è lunga:

$HO^2 = AO^2 – AH^2 = 8^2 – (6/2)^2 = 64 – 9 = 55$ e

$HO = \sqrt{55}$ braccia.

L'area di OAB è data da:

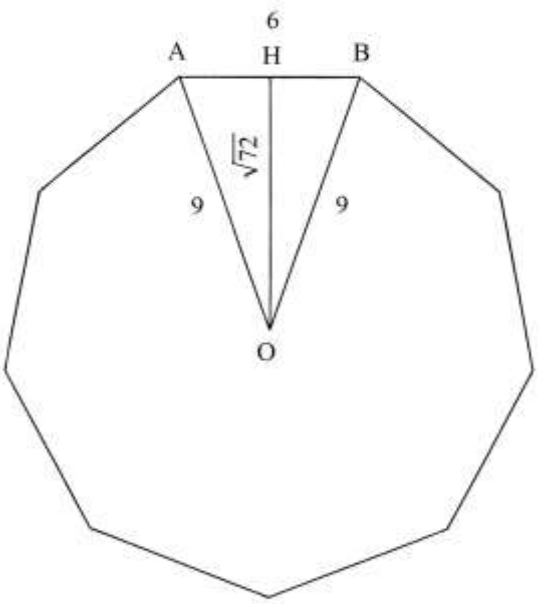
$\text{Area}_{OAB} = HO * AH = \sqrt{55} * 3 = \sqrt{(55 * 9)} = \sqrt{495}$ braccia^2.

L'area dell'intero ottagono è:

$\text{Area}_{OTTAGONO} = 8 * \text{Area}_{OAB} = 8 * \sqrt{495} = \sqrt{(64 * 495)} = \sqrt{31680}$ braccia^2.

<u>Ragione 22</u>

L'ultimo poligono considerato è l'*ennagono*. Anche questo poligono ha lati lunghi 6 braccia e il raggio del cerchio in cui è inscritto è 9 braccia.



L'Autore fornisce soltanto l'area dell'intero poligono: $\sqrt{524}$ braccia^2.
Ricostruiamo il suo risultato.
L'altezza OH (che è l'apotema dell'ennagono) è lunga:

$OH^2 = OA^2 – AH^2 = 9^2 – (6/2)^2 = 81 – 9 = 72$ e

$OH = \sqrt{72}$ braccia.

L'area del triangolo OAB è:

$\text{Area}_{OAB} = OH * AH = \sqrt{72} * 3 = \sqrt{(72 * 9)} = \sqrt{648}$ braccia^2.

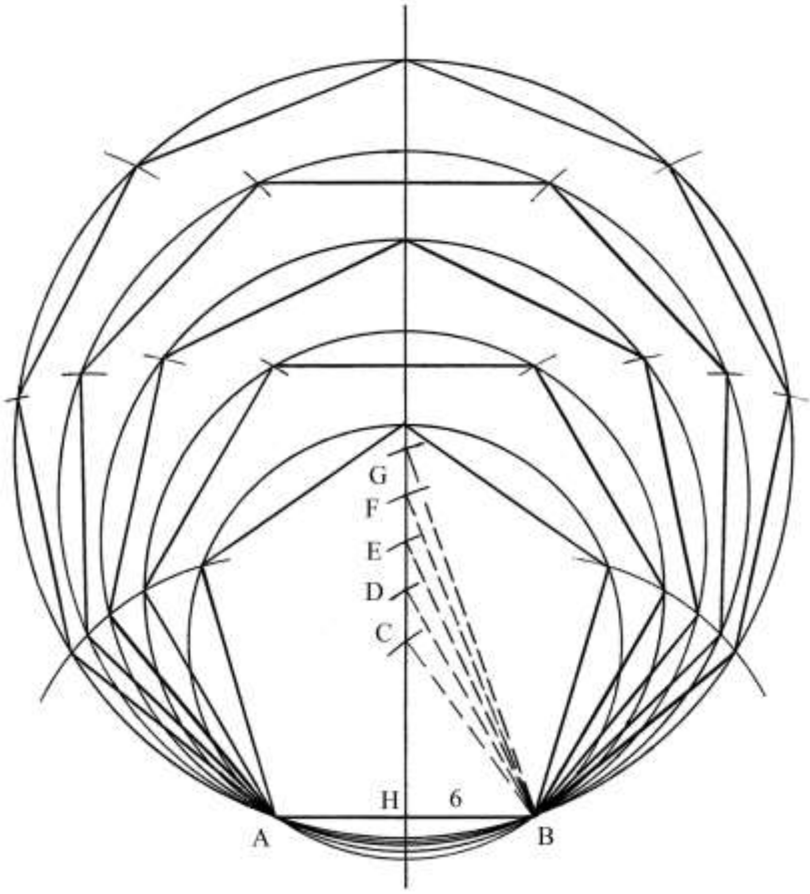
L'area dell'intero poligono è data da:

$\text{Area}_{ENNAGONO} = 9 * \text{Area}_{OAB} = 9 * \sqrt{648} = \sqrt{(81 * 648)} = \sqrt{52488}$ braccia^2.

Evidentemente, l'Autore ha omesso le ultime due cifre: $\sqrt{(524\underline{\mathit{88}})}$.
Pure questo poligono è leggermente approssimato.

- APPROFONDIMENTO -

Lo schema che segue confronta i cinque poligoni, dal pentagono all'ennagono, tutti con lati lunghi 6 braccia; le lunghezze dei raggi dei cerchi nei quali i poligoni sono inscritti sono, in braccia, uguali al numero dei lati:



I cinque poligoni condividono l’asse di simmetria passante per il punto H.

C, D, E, F e G sono i centri dei cerchi nei quali sono inscritti nell’ordine il pentagono, l’esagono, l’ettagono, l’ottagono e l’ennagono e le loro lunghezze sono:

* BC = 5 braccia;
* BD = 6 braccia;
* BE = 7 braccia;
* BF = 8 braccia;
* BG = 9 braccia.

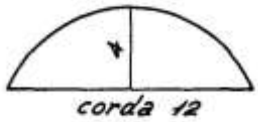
In tutti i poligoni regolari esiste un rapporto costante fra la lunghezza del lato e quella del cerchio circoscritto. La tabella che segue confronta i valori impiegati dall’Anonimo Fiorentino e quelli corretti:

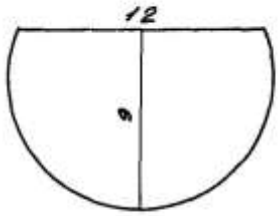
Poligoni	Numero lati	Rapporto fra lunghezza lato e lunghezza raggio (nel Trattato)	Rapporto esatto (valori arrotondati)
Pentagono	5	6/5 = 1,2	1,176
Esagono	6	6/6 = 1	1
Ettagono	7	6/7 ≈ 0,857	0,868
Ottagono	8	6/8 = 0,75	0,765
Ennagono	9	6/9 = 0,(66)	0,684

- -

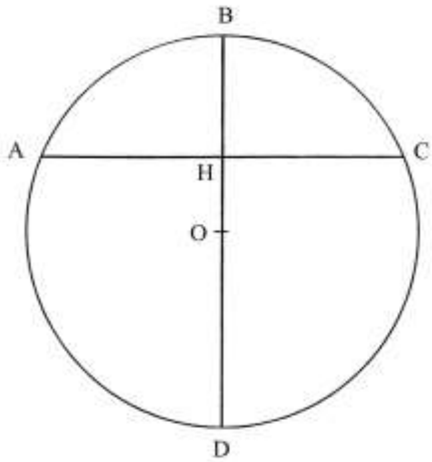
<u>Ragione 23</u>

Un cerchio è diviso in due segmenti circolari:





I due segmenti possiedono la corda comune, lunga 12 braccia.
Il settore superiore ha freccia (o *saetta*) lunga 4 braccia.
Il problema chiede di calcolare il diametro del cerchio originario.
A questo scopo, l'Autore utilizza più metodi.
Il primo è un'applicazione del *teorema delle corde*:



$BH : AH = HC : HD$

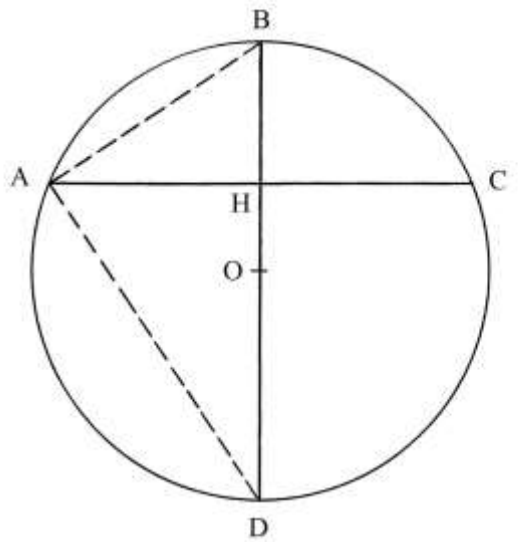
La lunghezza di HD è l'incognita:

$HD = (AH * HC)/BH = (AH * AH)/BH = AH^2/BH = (12/2)^2/4 =$
$= 36/4 = 9$ braccia.

L'intero diametro, BD, è lungo:

$BD = BH + HD = 4 + 9 = 13$ braccia.

Le corde AB e AD sono due cateti del triangolo rettangolo ABD, che ha il diametro BD come ipotenusa:



I tre metodi successivi sono basati sui due teoremi di Euclide relativi ai triangoli rettangoli:

Il secondo metodo è riassunto con la formula che segue:

$$BD = [(AC/2)^2 + BH^2]/BH = (6^2 + 4^2)/4 = (36 + 16)/4 = 52/4 = 13 \text{ braccia.}$$

La formula può essere scritta in altro modo:

$$BD = (AH^2 + BH^2)/BH = AB^2/BH.$$

Il terzo metodo è sintetizzato con la formula che segue:

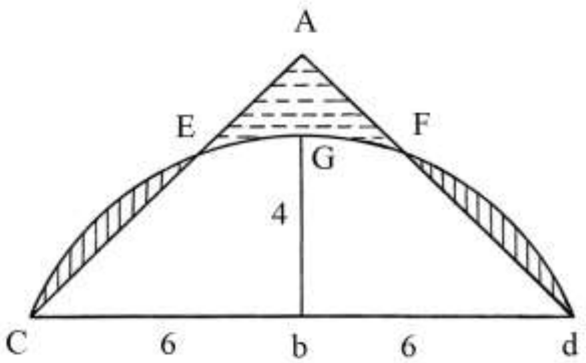
$$BD = (AC/2)^2/BH + BH = (6^2)/4 + 4 = 36/4 + 4 = 9 + 4 = 13 \text{ braccia.}$$

Il quarto metodo è:

$$BD = [(AC/2)^2 + HD^2]/HD = (6^2 + 9^2)/9 = (36 + 81)/9 = 117/9 = 13 \text{ braccia.}$$

Ragione 24

Il problema riprende in considerazione il più piccolo dei due segmenti circolari della precedente Ragione.



L'Autore suggerisce un metodo pratico per calcolare l'area del segmento: il triangolo isoscele *CAd* avrebbe area equivalente a quella del segmento circolare CGdb.

L'area del triangolo curvilineo EAFG è, grosso modo, equivalente alla somma delle aree dei due segmenti circolari CE e Fd.

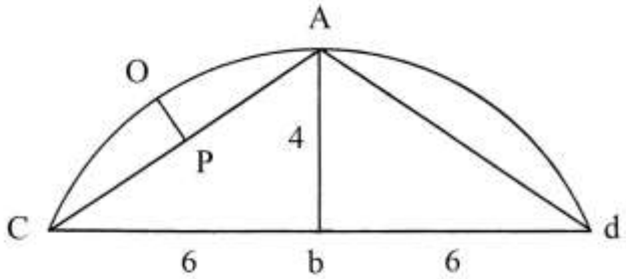
L'Autore spiega il metodo con la pratica degli agrimensori o *misuratori*, dei quali afferma di far parte: aggiungere terreno da una parte (EAFG) e toglierne da un'altra (i segmenti circolari CE e Fd).

L'area di CAd è data da:

$$Area_{CAd} = Ab * (Cd)/2.$$

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

La seconda soluzione proposta dall'Autore è presentata in questo schema:



Nel segmento circolare è inscritto il triangolo isoscele CAd. Ab è la freccia che divide il triangolo in due triangoli rettangoli di uguali dimensioni: ACb e Abd.

L'area di Abd è data da:

$$Area_{Abd} = Ab * bd/2 = 4 * 6/2 = 12 \text{ braccia}^2.$$

L'area di CAd è:

$$Area_{CAd} = 2 * Area_{Abd} = 2 * 12 = 24 \text{ braccia}^2.$$

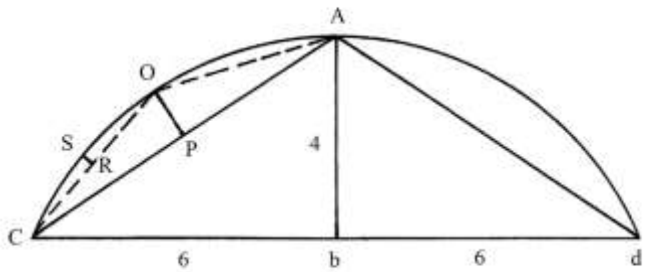
L'area di CAd è più piccola di quella del segmento circolare CAdb.

La lunghezza delle corde AC e Ad è:

$$AC^2 = Ab^2 + Cb^2 = 4^2 + 6^2 = 16 + 36 = 52 \quad e$$

$$AC = \sqrt{52} \text{ braccia}.$$

Il punto medio della corda AC è P: da questo condurre la perpendicolare PO che è un'altezza del triangolo isoscele COA rispetto alla base CA.



L'area di COA è facilmente calcolabile:

$$Area_{COA} = CA * OP/2.$$

R è il punto medio della corda CO e un'altezza del triangolo CSO, non disegnato.

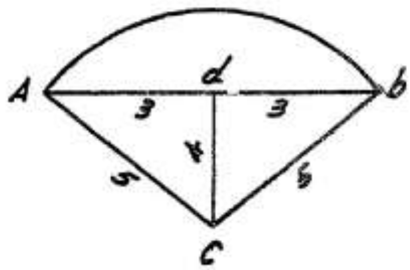
Calcolando le aree dei sempre più piccoli triangoli come quello CSO e sommandole a quelle di CAd e di COA (e del suo simmetrico non disegnato) ci avviciniamo all'area dell'intero segmento circolare CAdb.

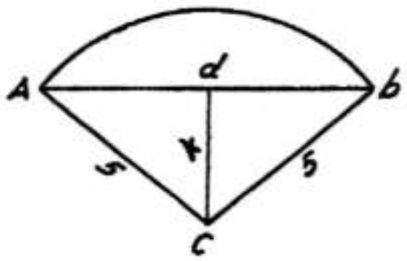
<u>Ragione 25</u>

Il problema rimanda al caso del pentagono considerato nella Ragione 16.

Ab è un lato del pentagono inscritto in un cerchio di raggio CA = Cb = 5 braccia.

Le due figure originali sono imprecise:

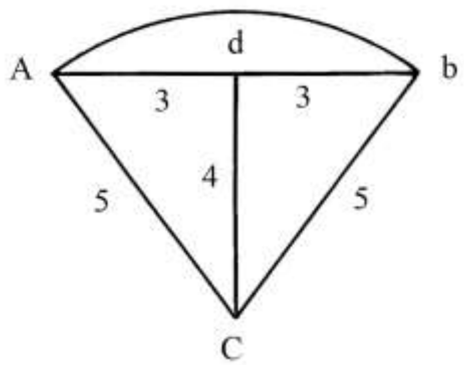




L'altezza *dC* è lunga 4 braccia ed è disegnata *più corta* dei segmenti Ad e db che sono lunghi 3 braccia.

La figura rappresenta un settore circolare di centro C. Ab è una corda che delimita il segmento circolare Abd.

Di nuovo fa la sua comparsa la terna primitiva 3-4-5.



CA è il raggio del cerchio e il diametro D è lungo:

$D = 2 * CA = 2 * 5 = 10$ braccia.

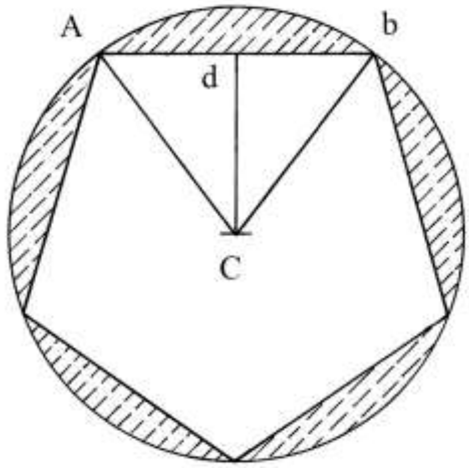
L'area del cerchio è:

$\text{Area}_{\text{CERCHIO}} = D^2 * 11/14 = 10^2 * 11/14 = (78 + 4/7)$ braccia^2.

L'area del pentagono calcolata nella ricordata Ragione 16 è di 60 braccia^2; la differenza fra l'area del cerchio circoscritto e quella del pentagono è data da:

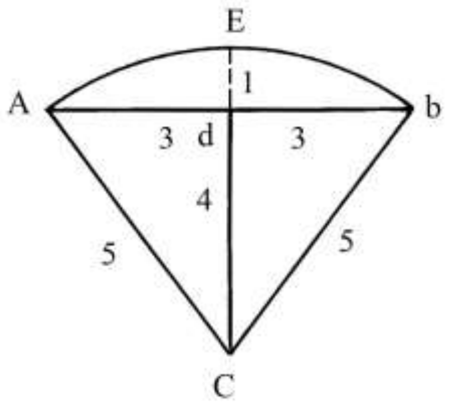
$\text{Area}_{\text{CERCHIO}} - \text{Area}_{\text{PENTAGONO}} = (78 + 4/7) - 60 = (18 + 4/7)$ braccia^2.

Questa differenza è l'area totale dei cinque segmenti circolari delimitati dalla circonferenza e dal pentagono:



I cinque segmenti possiedono tutti una corda, come quella Ab, lunga 6 braccia e una freccia, come quella dE lunga:

dE = CE – Cd = 5 – 4 = 1 braccio.



L'area di ciascuno dei cinque segmenti circolari è data da:

$\text{Area}_{\text{AEbd}} = (18 + 4/7)/5 = (3 + 5/7)$ braccia^2.

I SOLIDI

Questa parte è introdotta da alcune informazioni sulle unità di misura:

* 1 braccio quadro = 10 staia di grano;
* 1 braccio quadro = 10 staia di calcina;
* 1 braccio quadro = 11 staia + 2 metadelle + (3 + 10/11) di quartuccio di vino o di acqua;
* in 1 braccio quadro entrano 64 mattoni lunghi ½ braccio, larghi ¼ e di spessore uguale a 1/8 di braccio;
* 1 braccio quadro di marmo pesa 1800 libbre.

È bene chiarire che l'Autore chiama, erroneamente, il *braccio cubico* "braccia quadro". Il primo è un'unità di misura del volume e il secondo della superficie.

Come spiegato qui sotto, lo staio, la metadella e il quartuccio sono unità di misura del volume.

L'Anonimo ha poi talvolta chiamato "braccia quadre corporee" le braccia cubiche o braccia^3. Egli non è stato l'unico abacista o geometra toscano a seguire questa strana consuetudine di chiamare "braccio quadro" o "braccio quadro corporeo il "braccio cubico". Nel seguito, faremo sempre riferimento al "braccio cubico" abbreviandolo con *braccio*^{3}.

Ricordiamo che la lunghezza del braccio da panno di Firenze era equivalente a 0,583626 metri. Pertanto, un braccio quadrato, $braccio^2$, valeva:

$1\ braccio^2 = (0{,}583626\ m)^2 \approx 0{,}34062\ m^2$.

A sua volta, il braccio cubico era il volume di un cubo con lati lunghi 1 braccio da panno:

$1\ braccio^3 = (0{,}583626\ m)^3 \approx 0{,}1988\ m^3$.

Lo *staio* era un'unità di misura usata per misurare i volumi di grano:

$1\ braccio^3 = 10$ staia.

Quindi lo staio valeva:

$1\ staio = 1\ braccio^3/10 \approx 0{,}1988/10\ m^3 \approx 0{,}01988\ m^3$.

Come visto sopra, lo staio usato per misurare i volumi dei liquidi (vino e acqua) aveva un valore più piccolo dello staio da grano: in termini semplificati sembra esistesse questo rapporto:

$1\ staio_{\text{GRANO}} \approx 1{,}2\ staio_{\text{VINO-ACQUA}}$.

Lo staio possedeva i seguenti sottomultipli, tutti in base 2:

1 staio = 2 mine = 4 quarti = 8 mezzi quarti = 16 metadelle = 32 mezzette = 64 quartucci.

I nomi di buona parte delle unità di misura medievali derivano da quelle dell'Impero Romano. Accanto al sistema duodecimale, per la misura dei liquidi nel Medioevo furono introdotte le ricordate unità "a base 2".

Ragione 26

Una sala è lunga 15 braccia, larga 10 e alta 8: il problema chiede di calcolare il suo volume in *braccia quadre corporee* e cioè in $braccia^3$.

Il suo volume V è:

$V = 15 * 10 * 8 = 1200\ braccia^3$.

La sala potrebbe contenere un volume di grano dato da:

$V_{\text{GRANO}} = 1200 * 10 = 12000$ staia.

L'Autore converte poi le staia in *moggia*: il *moggio* era un multiplo dello staio secondo il rapporto

1 moggio = 24 staia.

Quindi, la sala potrebbe contenere un volume di grano uguale a:

$V_{\text{GRANO}} = 12000/24 = 500$ moggia.

Ragione 27

Un pozzo circolare ha diametro d = 3 braccia ed ha profondità h = 12 braccia.

Il problema chiede di calcolare il volume del pozzo e quello dell'acqua contenuto quando è pieno.

L'area del cerchio è:

$Area_{\text{CERCHIO}} = d^2 * 11/14 = 3^2 * 11/14 = (7 + 1/14)\ braccia^2$.

Il volume del pozzo è:

$V = Area_{\text{CERCHIO}} * h = (7 + 1/14) * 12 = (84 + 6/7)\ braccia^3$.

A questo punto, l'Autore utilizza il valore equivalente del $braccio^3$ per il vino e per l'acqua per convertire il precedente risultato:

$Volume_{\text{ACQUA}}$ = V * [11 staia + 2 metadelle + (3 + 10/11) quartucci] =
= (84 + 6/7) * [11 staia + 2 metadelle + (3 + 10/11) quartucci] =
= 939 staia + 10 metadelle + 4/11 quartucci.

Infine, converte il risultato in moggia:

$Volume_{\text{ACQUA}}$ = 39 moggia + 3 staia + 10 metadelle + 4/11 quartucci.

Ragione 28

Un locale ("*una archa*") è lungo (4 + ½) braccia, è lardo (2 + ¾) e alto (2 + ¼).

Il problema chiede di calcolare quante staia di grano può contenere.

Il suo volume è:

$$V = (4 + ½) * (2 + ¾) * (2 + ¼) = (27 + 27/32) \text{ braccia}^3.$$

L'Autore ha arrotondato il risultato per difetto a 27 braccia^3, corrispondenti a 270 staia di grano.

Ragione 29

Un *vivaio* è lungo 45 braccia e largo 24: al suo interno l'acqua è profonda 8 braccia.

Il problema chiede di calcolare il volume dell'acqua contenuta, approssimando per difetto il risultato sulla base dell'equivalenza:

$$1 \text{ braccio}^3 \approx 11 \text{ staia}.$$

Il volume del vivaio è:

$$V_{\text{VIVAIO}} = 45 * 24 * 8 = 8640 \text{ braccia}^3.$$

Il volume dell'acqua è dato da:

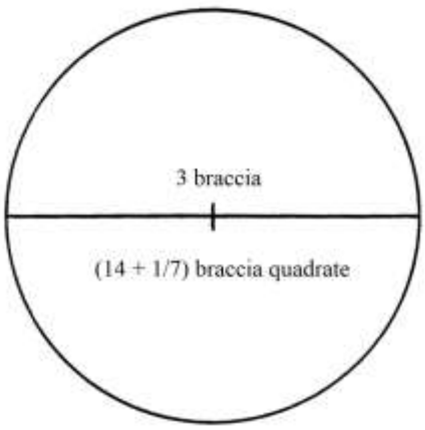
$$V_{\text{ACQUA}} = V_{\text{VIVAIO}} * 11 = 8640 * 11 = 95040 \text{ staia}.$$

Ragione 30

Una sfera cava ha il diametro di 3 braccia. Il problema chiede di calcolare la quantità di vino che può contenere.

La procedura impiegata per calcolare il volume della sfera contiene i seguenti passi:

* moltiplicare la lunghezza del diametro per sé stessa e il risultato di nuovo per la stessa lunghezza: (3 * 3) * 3 = 9 * 3 = 27;
* moltiplicare per 11/21: 27 * 11/21 = (14 + 1/7) braccia^3, volume della sfera.



La costante 11/21 ha una precisa origine. La formula corretta per il calcolo del volume di una sfera di raggio r e diametro $d = 2*r$ è:

$$V_{\text{SFERA}} = 4/3 * \pi * r^3 = 4/3 * \pi * (d/2)^3.$$

Sostituendo a π il valore approssimato di 22/7 si ha:

$$V_{\text{SFERA}} = 4/3 * 22/7 * d^3/8 = 11/21 * d^3 = 11/21 * 27 = (14 + 1/7) \text{ braccia}^3.$$

La quantità di vino contenuta nella sfera è:

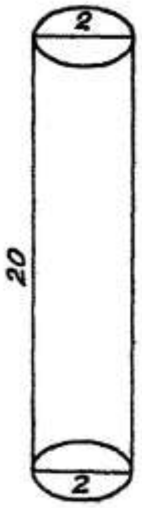
$$V_{\text{VINO}} = 11 * (14 + 1/7) = (155 + 4/7) \text{ staia}.$$

Anche in questo caso l'Autore ha approssimato per difetto a 11 staia l'equivalenza del braccio^3.

Ragione 31

Una colonna rotonda ha diametro 2 braccia e altezza 20. Il problema chiede il volume e il peso della colonna: il materiale di cui è composta pesa 1500 libbre a braccio^3.

Il disegno originale è leggermente fuori scala per quanto riguarda l'altezza.



L'area della base è:

Area $_{\text{BASE}}$ = 11/14 * diametro^2 = 11/14 * 2^2 = (3 + 1/7) braccia^2.

Il volume della colonna è:

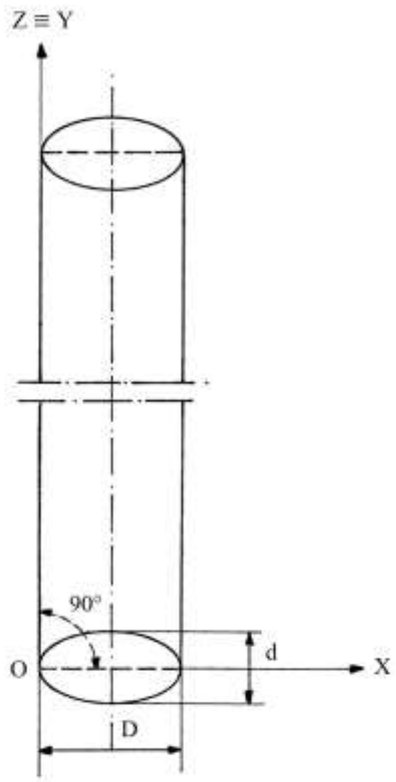
V $_{\text{COLONNA}}$ = Area $_{\text{BASE}}$ * altezza = (3 + 1/7) * 20 = (62 + 6/7) braccia^3.

Infine, il peso della colonna è:

Peso $_{\text{COLONNA}}$ = (62 + 6/7) * 1500 = (94285 + 5/7) libbre.

- APPROFONDIMENTO -

Un cilindro è disegnato in una variante dell'*assonometria cavaliera* con gli assi Z e Y coincidenti e formanti un angolo di 90° con l'asse X:



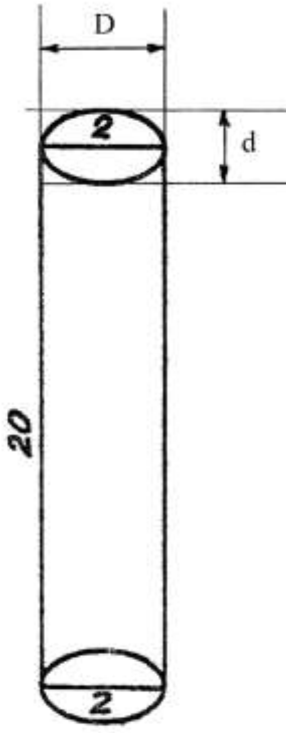
L’*angolo di fuga* è l’angolo formato fra gli assi Z ≡ Y e l’asse X.

Il *rapporto di fuga* indica lo schiacciamento che subisce il cerchio che nel disegno diviene un’ellisse: esso è dato dal rapporto

rapporto di fuga = d/D.

Nella figura esso vale 0,5.

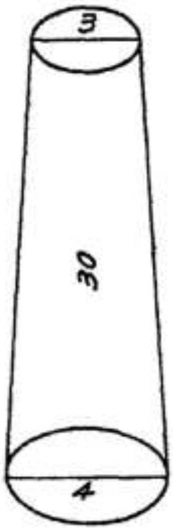
Nell’originale, il rapporto di fuga d/D vale circa 0,6:



- -

Ragione 32

Una colonna rotonda ha la forma di un tronco di cono:

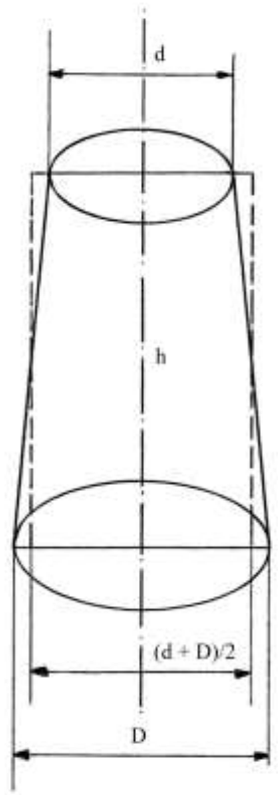


La faccia superiore ha diametro *d = 3* braccia, la base inferiore *D = 4* ed ha altezza *h = 30* braccia.

La Ragione chiede di calcolare il suo volume.

L'Autore addiziona i due diametri e ne calcola il valore medio:

(3 + 4)/2 = (3 + ½) braccia, diametro del cilindro equivalente al tronco al tronco di cono.



Procede poi a calcolare l'area del cerchio di diametro (3 + ½) braccia:

$\text{Area}_{\text{CERCHIO}} = (3 + ½)^2 * 11/14 = (9 + 5/8)$ braccia^2.

Il volume è dato da:

$V_{\text{COLONNA}} = (9 + 5/8) * 30 = (288 + 3/4)$ braccia^3.

- APPROFONDIMENTO -

La formula corretta per calcolare il volume di un tronco di cono è:

$V = 1/3 * h * (R^2 + r^2 + R*r)$, dove *R* è il raggio della base maggiore e *r* quello della base minore.

Applichiamo la formula al caso concreto:

$V = 1/3 * 22/7 * 30 * [(4/2)^2 + (3/2)^2 + (4/2)*(3/2)] =$

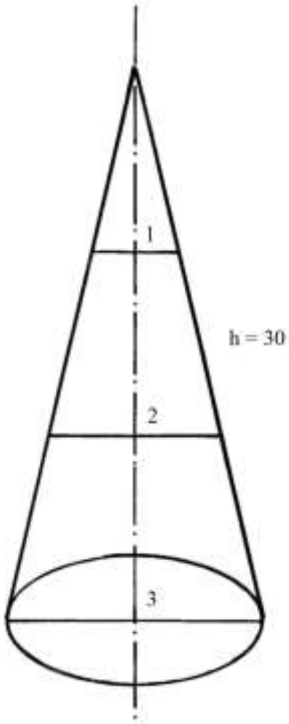
$= 220/7 * [4 + (2 + ¼) + 3] = 220/7 * (9 + ¼) = (290 + 5/7)$ $braccia^3$.

La differenza fra il risultato calcolato dall'Autore e quello corretto è trascurabile.

- -

Ragione 33

Un cono ha il diametro *d* della base lungo 3 braccia ed alto *h = 30* braccia.



L'area della base è:

$A_{BASE} = d^2 * 11/14 = 3^2 * 11/14 = 9 * 11/14 = (7 + 1/14)$ $braccia^2$.

Il volume del cono è:

$V_{CONO} = A_{BASE} * h/3 = (7 + 1/14) * 30/3 = (70 + 5/7)$ $braccia^3$.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

L'Autore risolve il problema impiegando una procedura che ripropone il metodo da lui usato nella soluzione del caso della Ragione 32. Egli immagina di sezionare il cono, con piani paralleli alla base, in tre solidi presi dal basso verso l'alto, tutti della stessa altezza uguale a 1/3 di 30 e cioè 10 braccia:

* il tronco di cono che la base inferiore con diametro 3 braccia e la base superiore lunga 2;
* il tronco di cono che la base inferiore con diametro 2 braccia e quella superiore di 1 braccio;
* il cono terminale ha la base con diametro 1 braccio.

Il primo tronco di cono è ritenuto equivalente a un cilindro con diametro lungo la media:

(3 + 2)/2 = 5/2 = (2 + ½) braccia.

L'area del cerchio di base di questo cilindro è:

$A_{\text{PRIMO}} = (2 + ½)^2 * 11/14 = (6 + ¼) * 11/14 = (4 + 51/56)$ braccia^2.

Il volume è:

$V_{\text{PRIMO}} = \text{Area}_{\text{PRIMO}} * \text{altezza} = (4 + 51/56) * 10 = (49 + 3/28)$ braccia^3.

Il secondo tronco di cono è equivalente a un cilindro che ha diametro uguale a

(2 + 1)/2 = 3/2 = (1 + ½) braccia.

L'area del cerchio è:

$A_{\text{SECONDO}} = (1 + ½)^2 * 11/14 = (2 + 1/4() * 11/14 = (1 + 43/56)$ braccia^2.

Il volume è:

$V_{\text{SECONDO}} = A_{\text{SECONDO}} * \text{altezza} = (1 + 43/56) * 10 = (17 + 19/28)$ braccia^3.

Il terzo solido è il cono terminale che ha base con diametro 1 braccio. Anche a questo solido l'Autore applica il suo metodo convertendolo in un cilindro equivalente con diametro uguale a

(1 + 0)/2 = ½ braccio.

L'area del cerchio virtuale è:

$A_{\text{TERZO}} = (1/2)^2 * 11/14 = ¼ * 11/14 = 11/56$ braccia^2.

Il suo volume è:

$V_{\text{TERZO}} = A_{\text{TERZO}} * \text{altezza} = 11/56 * 10 = (1 + 25/28)$ braccia^3.

Il volume dell'intero solido è dato da:

$V = V_{\text{PRIMO}} + V_{\text{SECONDO}} + V_{\text{TERZO}} = (49 + 3/28) + (17 + 19/28) + (1 + 25/28) =$

$= (68 + 19/28)$ braccia^3.

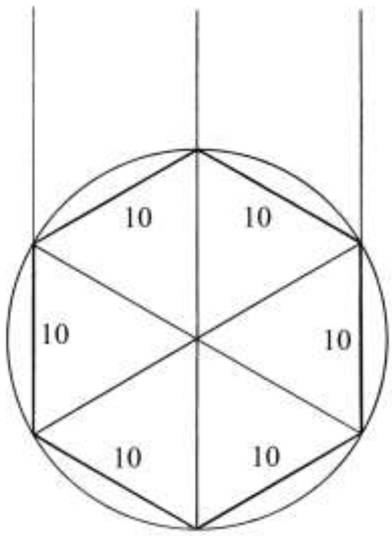
Il valore così ottenuto è leggermente inferiore a quello correttamente calcolato: (70 + 5/7) braccia^3.

L'Autore conclude suggerendo ulteriori divisioni del cono iniziale in 2, 6 o 12 parti, con evidenti complicazioni.

Ragione 34

Una colonna ha la base a forma di un esagono regolare che deriva da un cerchio: i suoi lati sono lunghi 10 braccia.

Il solido è alto 25 braccia.



Il problema chiede il volume del solido.

L'area della base è calcolata a partire da quella di uno dei suoi sei triangoli equilateri, applicando di nuovo il metodo di Erone di Alessandria:

* sommare le lunghezze dei tre lati: 10 + 10 + 10 = 30 [perimetro];
* dividere per 2: 30/2 = 15 [semiperimetro];
* sottrarre la lunghezza del primo lato dal semiperimetro: 15 – 10 = 5;
* sottrarre la lunghezza del secondo lato dal semiperimetro: 15 – 10 = 5;
* sottrarre la lunghezza del terzo lato dal semiperimetro: 15 – 10 = 5;
* moltiplicare gli ultimi tre numeri: 5 * 5 * 5 = 125;
* moltiplicare per il semiperimetro: 125 * 25 = 1875;
* estrarre la radice quadrata: √1875 braccia2, area di un triangolo equilatero;
* moltiplicare per 6: 6 * √1875 = √(36 * 1875) = √67500 braccia^2, area di ciascuna delle due basi esagonali.

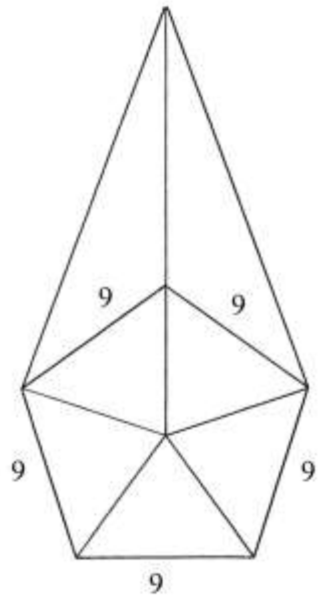
Il volume V è ottenuto moltiplicando l'area di una base per l'altezza del solido:

V = √67500 * 25 = √(67500 * 625) = √42187500 braccia^3.

L'Autore fornisce un risultato leggermente approssimato per eccesso: √42188000.

Ragione 35

Una colonna ha la forma di una piramide a base pentagonale, con i lati lunghi 9 braccia e l'altezza uguale a 30.



Per calcolare il volume, l'Autore procede alla determinazione dell'area della base: allo scopo egli la divide in cinque triangoli isosceli di uguali dimensioni.

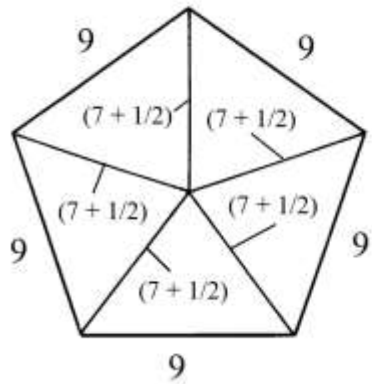
A questo punto sono richiamate le soluzioni relative alle Ragioni 16 e 17 relative al calcolo dell'area dei pentagoni regolari. Nel caso della seconda era studiato un pentagono con lati aventi la stessa lunghezza di 9 braccia.

L'Autore usa il pentagono studiato nella Ragione 16 che aveva lati lunghi 6 braccia e raggi (i due lati consecutivi dei triangoli isosceli) lunghi 5; egli procede con una proporzione:

lato 6 : raggio 5 = nuovo lato 9 : nuovo raggio.

La lunghezza del nuovo raggio è incognita ed essa è:

nuovo raggio = (5 * 9)/6 = (7 + ½) braccia:



L'area di uno dei triangoli è calcolata con il metodo di Erone:

* sommare le lunghezze dei tre lati: 9 + (7 + ½) + (7 + ½) = 24 [perimetro];
* dividere per 2: 24/2 = 12 [semiperimetro];
* sottrarre la lunghezza del primo lato dal semiperimetro: 12 – 9 = 3;
* sottrarre la lunghezza del secondo lato dal semiperimetro: 12 – (7 + ½) = (4 + ½);
* sottrarre la lunghezza del terzo lato dal semiperimetro: 12 – (7 + ½) = (4 + ½);
* moltiplicare i tre ultimi numeri: 3 * (4 + ½) * (4 + ½) = (60 + ¾);
* moltiplicare per il semiperimetro: (60 + ¾) * 12 = 729;
* estrarre la radice quadrata: √729 = 27 braccia^2, area di un triangolo isoscele.

L'area del pentagono è data da:

$A_{\text{PENTAGONO}} = 5 * 27 = 135$ braccia^2.

Il volume del solido è:

$V = (A_{\text{PENTAGONO}} * \text{altezza})/3 = (135 * 30)/3 = 1350$ braccia^3.

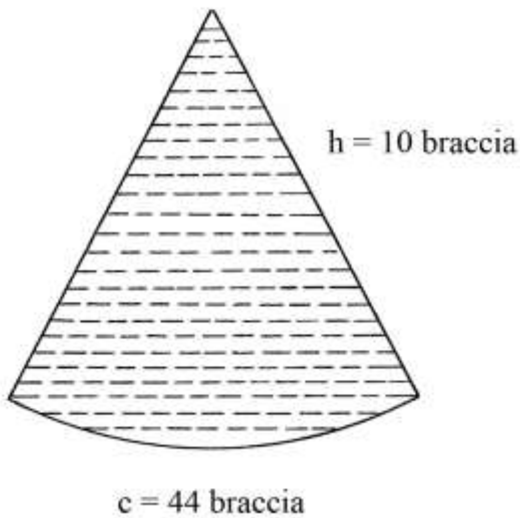
Ragione 36

Un monte di grano ha la forma di un cono la cui base ha la circonferenza *c* lunga 44 braccia; l'altezza *h* del cono è 10 braccia.

È chiesto il volume del grano in staia.

L'Autore calcola il diametro *d* della base:

$d = c/(3 + 1/7) = c/(22/7) = 44 /(22/7) = 14$ braccia.



Per ricavare l'area della base, l'Anonimo Fiorentino richiama la *terza regola* [rivedere la Ragione 2]:

$A_{\text{BASE}} = c/2 * d/2 = 44/2 * 14/2 = 22 * 7 = 154$ braccia^2.

Il volume V della catasta di grano è:

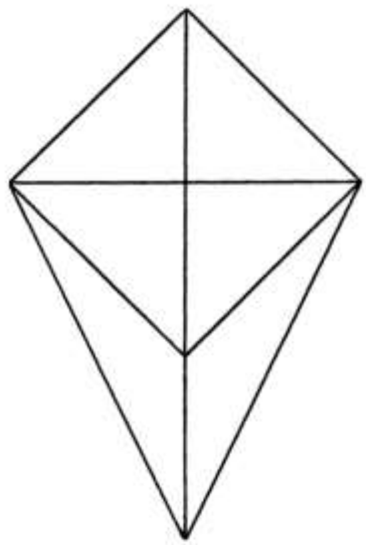
$V = (A_{BASE} * h)/3 = (154 * 10)/3 = (513 + 1/3)$ braccia^3.

La massa del grano in staia è data da:

Grano = $V * 10 = (513 + 1/3) * 10 = (5133 + 1/3)$ staia.

Ragione 37

Una tramoggia ha la forma di una piramide cava rovesciata. La sua base è un quadrato con lati lunghi 2 braccia e la sua profondità *h* è 3 braccia.



Deve essere calcolato il volume di grano che può contenere, espresso in *staia*.

L'area della base quadrata è:

$A_{BASE} = 2 * 2 = 4$ braccia^2.

Il volume della piramide è dato da:

$V = (A_{BASE} * h)/3 = (4 * 3)/3 = 12/3 = 4$ braccia^3.

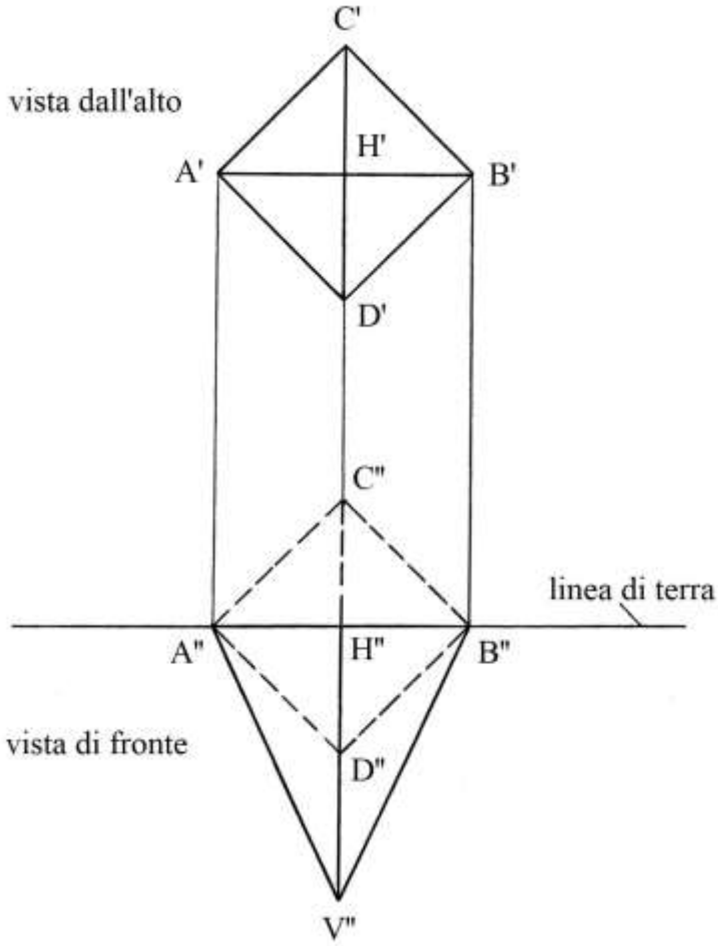
La quantità di grano è:

$G = V * 10 = 4 * 10 = 40$ staia.

- APPROFONDIMENTO -

Nei disegni che accompagnano i testi delle Ragioni 34, 35, 37, 38 e 39 è stato usato uno stesso metodo per rappresentare la terza dimensione: la fusione di due distinte viste dei solidi, quella dall'alto e quella frontale.

Consideriamo il caso della Ragione 37. Lo schema che segue presenta separate le due viste, dall'alto e di fronte:



A'C'B'D' è la vista dall'alto della base: H' è il centro di questo poligono che coincide con la proiezione del vertice V.

Le diagonali A'B' e C'D' sono le viste dall'alto dei quattro spigoli della piramide.

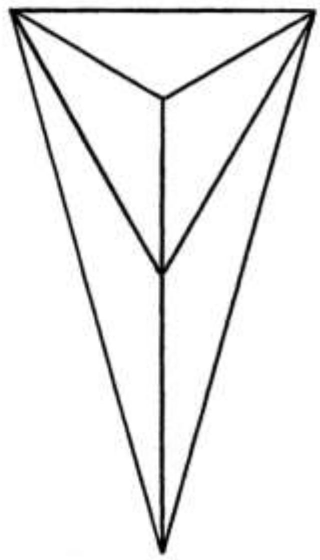
L'Autore ha traslato verso il basso la vista dall'alto fino a posizionare la diagonale AB sulla linea di terra, facendola divenire A''B''.

Nella vista di fronte, il profilo del quadrato è disegnato con linea a tratti, mentre nell'originale è rappresentato con linea continua.

- -

<u>Ragione 38</u>

Un'altra tramoggia ha la forma di una piramide rovesciata con la base che è un triangolo equilatero con lati lunghi 2 braccia e profonda $h = 3$.



Il problema chiede di calcolare il contenuto di grano misurato in staia.

Per ricavare l'area del triangolo equilatero, l'Autore ricorre di nuovo a Erone di Alessandria:

* sommare le lunghezze dei tre lati: $2 + 2 + 2 = 6$ [perimetro];
* dividere per 2: $6/2 = 3$ [semiperimetro];
* sottrarre dal semiperimetro la lunghezza del primo lato: $3 – 2 = 1$;
* sottrarre dal semiperimetro la lunghezza del secondo lato: $3 – 2 = 1$;
* sottrarre dal semiperimetro la lunghezza del terzo lato: $3 – 2 = 1$;
* moltiplicare gli ultimi tre numeri: $1 * 1 * 1 = 1$;
* moltiplicare l'ultimo prodotto per il semiperimetro: $1 * 3 = 3$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{3}$ braccia^2, area della base a forma di triangolo equilatero.

Il volume della tramoggia è:

$$V = (A_{\text{BASE}} * h)/3 = (\sqrt{3} * 3)/3 = \sqrt{3} \text{ braccia}^3.$$

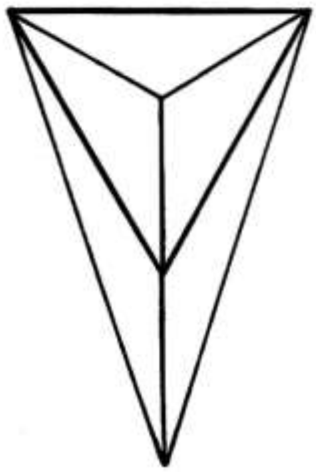
La massa del grano è:

$$G = V * 10 = \sqrt{3} * 10 = \sqrt{(3 * 100)} = \sqrt{300} \text{ staia}.$$

Ragione 39

Un'altra tramoggia ha la base triangolare identica a quella della precedente Ragione.

La profondità del solido è sconosciuta ma è data la lunghezza degli spigoli laterali, pari a 3 braccia.

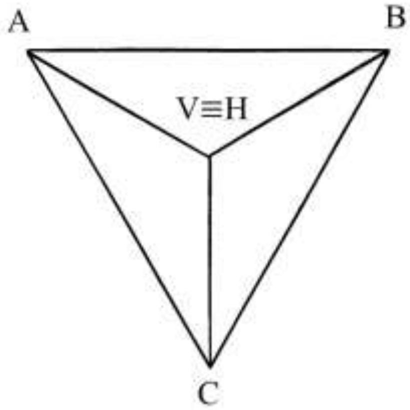


Il problema domanda la quantità di grano contenuta nella tramoggia.

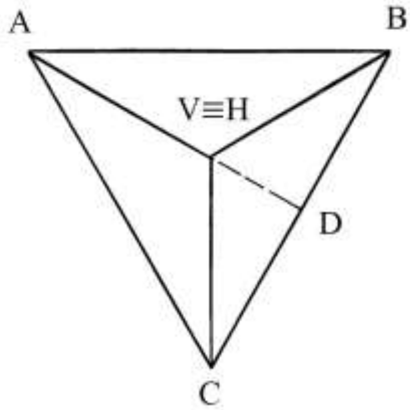
L'area del triangolo equilatero è già stata calcolata con la soluzione della precedente Ragione:

$$A_{BASE} = \sqrt{3} \text{ braccia}^2.$$

Lo schema che segue propone la vista dall'alto della piramide triangolare:



La soluzione proposta dall'Autore richiede alcune ulteriori spiegazioni. Lo schema che segue ripropone il precedente con un'aggiunta:



Il punto V è il vertice nella proiezione sul piano orizzontale e coincide con il centro della base, H.

In un triangolo equilatero le altezze (e le mediane e le bisettrici) si incontrano nel punto H che è l'incentro (e il baricentro e l'ortocentro) del poligono.

Le tra altezze si dividono reciprocamente in due parti: AH è lunga il *doppio* di HD.

Con un procedimento assai oscuro, l'Autore calcola quella che sembra essere la lunghezza di HA:

$$HA = \sqrt{2} \text{ braccia.}$$

VAH è un triangolo rettangolo di cui sono note le lunghezze dell'ipotenusa VA (3 braccia) e quella – calcolata – del cateto HA ($\sqrt{2}$ braccia). Il cateto VH è il secondo cateto ed è lungo:

$$VH^2 = VA^2 - HA^2 = 3^2 - (\sqrt{2})^2 = 9 - 2 = 7 \quad \text{e}$$

$$VH = \sqrt{7} \text{ braccia.}$$

Il volume è così calcolato:

$V = (A_{BASE} * VH)/3 = (\sqrt{3} * \sqrt{7})/3 = (\sqrt{21})/3 = \sqrt{(21/9)} = \sqrt{(7/3)} = \sqrt{(2 + 1/3)}$ braccia^3.

In volume del grano è:

$$G = V * 10 = \sqrt{(2 + 1/3)} * 10 = \sqrt{[(2 + 1/3) * 100]} = \sqrt{(233 + 1/3)} \text{ staia.}$$

L'Autore ha arrotondato a $\sqrt{233}$ staia.

- APPROFONDIMENTO -

Riconsideriamo l'ultima figura.

AD è un'altezza del triangolo; ABD è un triangolo rettangolo e AD è il suo cateto maggiore e la sua lunghezza è data da:

$$AD^2 = AB^2 - BD^2 = AB^2 - (AB/2)^2 = \tfrac{3}{4} * AB^2 = \tfrac{3}{4} * 2^2 = 3 \qquad \text{e}$$

$$AD = \sqrt{3} \text{ braccia.}$$

HA è lungo i 2/3 di AD:

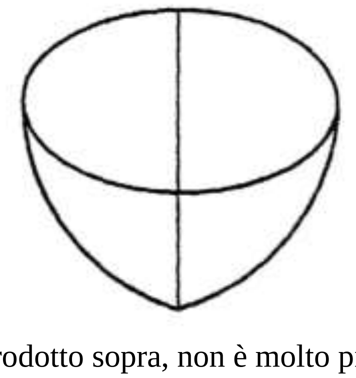
$$HA = 2/3 * \sqrt{3} = \sqrt{(4/9 * 3)} = \sqrt{(4/3)} \text{ braccia.}$$

La lunghezza di HA è diversa da quella calcolata dall'Autore, uguale a$\sqrt{2}$.

- -

Ragione 40

Una caldaia per la tintura ha forma rotonda e larga nella bocca e appuntita al fondo. Di fatto si tratta di un tronco di cono.



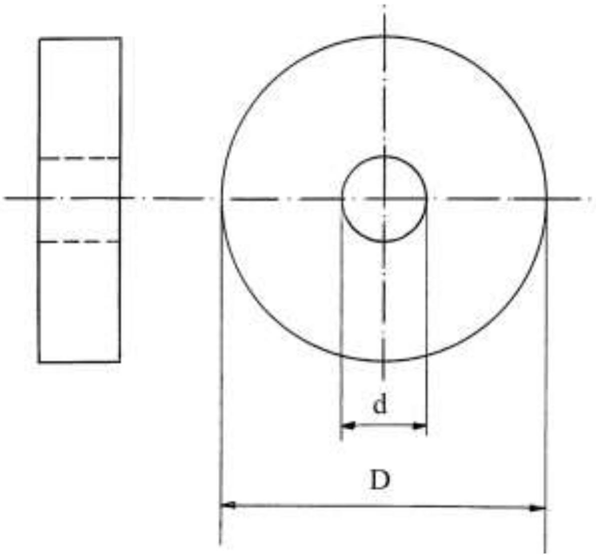
Il disegno originale, riprodotto sopra, non è molto preciso.

Il testo non fornisce alcun dato ma soltanto delle regole per calcolarne il volume:

* sommare i diametri alla bocca e al fondo;
* dividere per 2: il risultato è il diametro del cilindro equivalente, ma il risultato non è esatto, come visto nella descrizione della Ragione 32;
* moltiplicare il diametro per sé stesso e poi per 11/14: viene ottenuta l'area del cerchio del cilindro equivalente;
* moltiplicare l'area per la profondità della caldaia: è il volume.

Ragione 41

Una macina da mulino ha la forma di un cilindro di pietra che reca un foro centrale.



Il calcolo del suo peso parte dalla determinazione del volume che l'Autore propone come segue:

* sommare le lunghezze dei due diametri: $(D + d)$;
* dividere per 2: $(D + d)/2$;
* moltiplicare per sé stesso: $(D + d)/2 * (D + d)/2 = (D + d)^2/4$;
* moltiplicare per 11/14: $(D + d)^2/4 * 11/14 = 11/56 * (D + d)^2$, area della corona circolare;
* moltiplicare per lo spessore *s* della ruota: $11/46 * (D + d)2 * s$, volume della ruota in braccia^3;
* moltiplicare per il peso specifico del materiale, pari a 1500 libbre/braccio^3.

- APPROFONDIMENTO -

L'area di una corona circolare è correttamente calcolata come differenza fra l'area del cerchio esterno, di diametro *D*, e l'area del cerchio interno, cavo, con diametro *d*. I due raggi sono, rispettivamente, *R* e *r*:

$$\text{Area}_{\text{CORONA}} = \pi * (R^2 - r^2) = \pi * [(D/2)^2 - (d/2)^2].$$

Questa formula ha una sua logica: se fosse pieno, l'area dell'intero cerchio sarebbe data da:

$$A_{\text{ESTERNO}} = \pi * R^2 = \pi * (D/2)^2.$$

L'area del cerchio vuoto è:

$$A_{\text{VUOTO}} = \pi * r^2 = \pi * (d/2)^2.$$

L'area della corona circolare è data dalla differenza:

$$A_{\text{CORONA}} = A_{\text{ESTERNO}} - A_{\text{VUOTO}} = \pi * (D/2)^2 - \pi * (d/2)^2 = \pi * (D^2/4 - d^2/4).$$

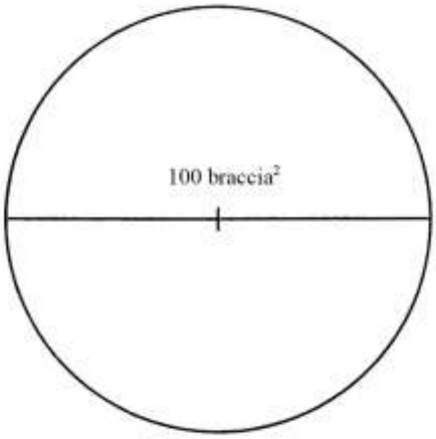
La formula proposta dall'Anonimo produce un risultato leggermente maggiore rispetto al reale.

- -

PROBLEMI SUI CERCHI

Ragione 42

Un cerchio ha area uguale a 100 $braccia^2$:



Il problema chiede di calcolare il suo diametro, *d*.

L'Autore suggerisce due soluzioni:

a) Moltiplicare l'area per 14: 100 * 14 = 1400;
Dividere per 11: 1400/11:
Estrarre la radice quadrata √(1400/11) = √(127 + 3/11) braccia.

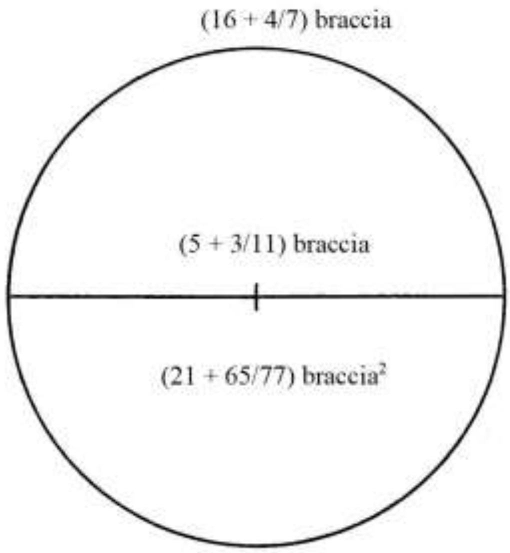
L'Autore ha applicato l'inverso della formula
$A = d^2 * 11/14$ e quindi $d^2 = 14/11 * A$.

b) Aggiungere i 3/11 all'area: 100 * (1 + 3/11) = 100 * 14/11 = 1400/11;
Estrarre la radice quadrata: √(1400/11) = √(127 + 3/11) braccia.

Per ricavare la lunghezza del diametro, l'Autore utilizza le due – per lui – consuete incognite: "1/c" per *d* e "1/z" per d^2.

Ragione 43

In un cerchio, la somma delle lunghezze del diametro e della circonferenza è uguale – a parte le diverse unità lineari e superficiali – all'area del cerchio.



Il diametro *d* è l'incognita x.
La circonferenza *c* è lunga:

$c = \pi * d = 22/7 * x.$

L'area del cerchio è:

$A_{\text{CERCHIO}} = d^2 * 11/14 = x^2 * 11/14.$

Il problema afferma:

$d + c = A_{\text{CERCHIO}}$

$x + 22/7 * x = x^2 * 11/14$

Dividendo entrambi i membri per *x* si ha:

$1 + 22/7 = 11/14 * x$

$x = 29/7 * 14/11 = 58/11 = (5 + 3/11)$ braccia.

La circonferenza *c* è lunga:

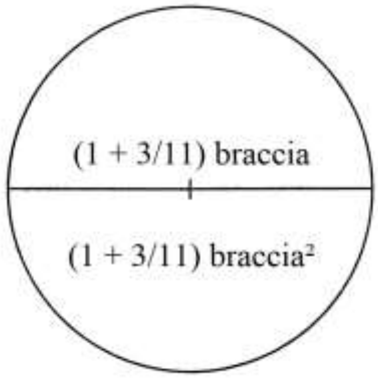
$c = 22/7 * (5 + 3/11) = (16 + 4/7)$ braccia.

Infine, l'area è:

$A_{\text{CERCHIO}} = (5 + 3/11) + (16 + 4/7) = (21 + 65/77)$ braccia^2.

Ragione 44

Un cerchio ha area che, in valore assoluto, è uguale alla lunghezza del diametro:



L'area del cerchio è data da:

$A_{\text{CERCHIO}} = d^2 * 11/14.$

Per il problema vale l'uguaglianza, in valore assoluto:

$d = d^2 * 11/14$

$1 = d * 11/14$

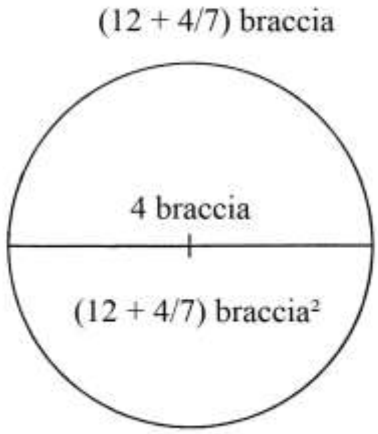
$d = 14/11 = (1 + 3/11)$ braccia.

L'area è:

$A_{\text{CERCHIO}} = (1 + 3/11)^2 * 11/14 = 14/11 = (1 + 3/11)$ braccia^2.

<u>Ragione 45</u>

L'area di un cerchio è, in valore assoluto, uguale alla lunghezza della circonferenza *c*:



$A_{\text{CERCHIO}} = c.$

La circonferenza *c* è lunga:

$c = 22/7 * d.$

L'area è:

$A_{\text{CERCHIO}} = d^2 * 11/14.$

Uguagliando le due espressioni si ha:

$22/7 * d = d^2 * 11/14$ e dividendo entrambi i membri per *d* si ottiene:

$22/7 = d * 11/14$

$d = 22/7 * 14/11 = 2 * 2 = 4$ braccia.

La circonferenza *c* è lunga:

$c = 22/7 * 4 = 88/7 = (12 + 4/7)$ braccia.

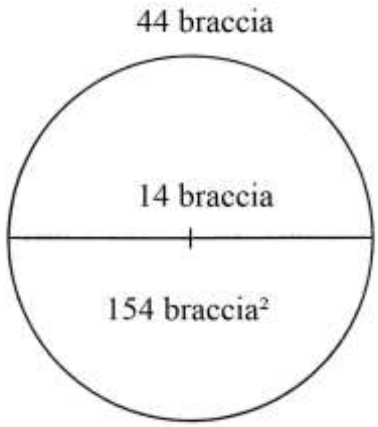
L'area è:

$A_{\text{CERCHIO}} = 4^2 * 11/14 = (16 * 11)/14 = (12 + 4/7)$ braccia^2.

<u>Ragione 46</u>

In un cerchio l'area è uguale a 140 più la lunghezza del diametro:

$A_{\text{CERCHIO}} = 140 + d.$



L'area del cerchio è:

$A_{\text{CERCHIO}} = d^2 * 11/14$.

Uguagliamo le due espressioni:

$140 + d = d^2 * 11/14$

$d^2 * 11/14 – d – 140 = 0$

$11 * d^2 – 14 * d – 1960 = 0$

Applichiamo la formula per risolvere questa equazione di 2° grado con *d* incognita:

$d = [– b \pm \sqrt{(b^2 – 4*a*c)}]/(2 * a) = [14 \pm \sqrt{(142 + 4 * 11 * 1960)}]/(2 * 11) =$

$= [14 \pm \sqrt{(196 + 86240)}]/22 = (14 \pm \sqrt{86436})/22 = (14 \pm 294)/22$.

La radice negativa è

$d = (14 – 294)/22 = – 280/22$ ed è accantonata.

La radice positiva è:

$d = (14 + 294)/22 = 308/22 = 14$ braccia.

L'area del cerchio è:

$A_{\text{CERCHIO}} = 140 + 14 = 154$ braccia^2.

La circonferenza *c* è lunga:

$c = 22/7 * 14 = 44$ braccia.

Ragione 47

Il problema ripropone il cerchio della precedente Ragione ma lo affronta in maniera diversa.

Un cerchio ha area uguale, in valore assoluto, a 11 volte la lunghezza del diametro *d*:

$\text{Area}_{\text{CERCHIO}} = d^2 * 11/14 = 11 * d$.

Ne consegue:

$d^2 * 11/14 = 11 * d$ e dividendo entrambi i membri per *d* si ottiene:

$d * 11/14 = 11$

$d = 11 * 14/11 = 14$ braccia.

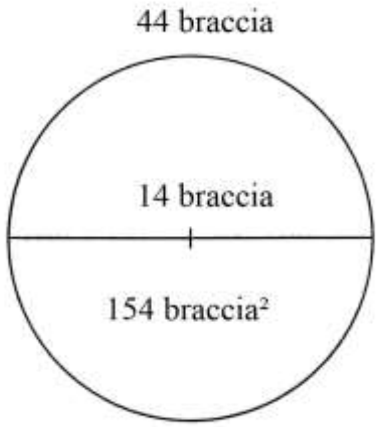
L'area del cerchio è:

Area CER$_{\text{C}}$HIO $= 11 * 14 = 154$ braccia^2.

Infine, la circonferenza, *c*, è lunga:

$c = 22/7 * 14 = 44$ braccia.

Il risultato è identico a quello della precedente Ragione, come dimostra la figura che segue, perfettamente uguale alla precedente:

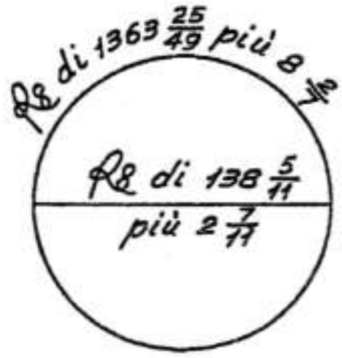


<u>Ragione 48</u>

È dato un cerchio la cui area è data dalla somma di 103 e delle lunghezze del diametro *d* e della circonferenza *c*:

Area $_{\text{CERCHIO}}$ = 103 + d + c.

La figura che segue riproduce l'originale:



Il simbolo che segue compare due volte e indica la *radice quadrata*:

Il problema chiede di ricavare "ciascuna parte.

La lunghezza del diametro, *d*, è l'incognita.

Nella relazione sopra riportata sostituiamo i valori in funzione di *d*:

$d^2 * 11/14 = 103 + d + 22/7 * d$

$d^2 * 11/14 – 29/7 * d – 103 = 0$

Moltiplicando per 14 si ha:

$11 * d^2 – 58 * d – 1442 = 0$

Applichiamo la formula per la soluzione delle equazioni di 2° grado:

$d = [– b \pm \sqrt{}(b^2 – 4*a*c)]/(2 * a) = [58 \pm \sqrt{}(58^2 + 4 * 11 * 1442)]/(2 * 11) =$

$= [58 \pm \sqrt{}(3364 + 63448)]/22 = (58 \pm \sqrt{}66812)/22 \approx (58 \pm 258{,}48)/22 \approx$

$\approx$ 14,385 braccia, lunghezza del diametro.

Come vedremo nel prossimo riquadro, il risultato è uguale a quello ottenuto dall'Autore.

La lunghezza della circonferenza è:

circonferenza = 22/7 * 14,385 ≈ 45,21 braccia.

L’area è:

$A_{\text{CERCHIO}} = 11/14 * \text{diametro}^2 \approx 11/14 * 14{,}385^2 \approx 162{,}586 \text{ braccia}^2$.

\- APPROFONDIMENTO -

Qui sotto riproduciamo il testo originale di questa Ragione:

> [48] E gl'è uno tondo che la sua possessione è 103 braccia più che non fu agionto insieme el diamitro co'lla circunferentia; adomando quanto è ciascuna parte di per sè. Poni che 'l diamitro sia 1/c, sarà la sua circunferentia cose 3 1/7, e ssarà la sua possessione 11/14 di z. Ora agiugnj insieme il diamitro co'lla circunferentia e agiugnevisi 103 braccia più l'altra parte fa cose 4 1/7 e 103 per numero huguali a 11/14 di z. E questa è la sua regola. Parti ne' z, verranne 5 3/11 cose e 131 1/11 per numero. Dì 1/2 le cose sonno 2 7/11, multiprica in se stesso, fa 6 115/121, agiunte al numero fa 138 5/121 e di questo pigla la sua radice e tanto vale la cosa. E noi ponemo che 'l suo diamitro fusse 1/c, segujta che 'l suo diamitro sarà la radice di 138 5/11 più 2 7/11 che ffa el dimezzamento delle co. Se vorrai la sua circunferentia, multiprica 3 1/7 via 138 5/121, fa più 2 7/11 che 'l suo diamitro, fa radice di 1363 25/49 più 8 2/7. E, sse vorrai la sua possessione, multiprica el diamitro in se stesso e piglane li 11/14, verrà che la sua possessione sarà radice di 2369 e 1422/3929 più 113 71/77. E sta ben fatta. //

“1/c” e “cose” sono le denominazioni che l’Autore attribuisce all’incognita *diametro* (d): esse corrispondono alla nostra “x”. “z” è il quadrato dell’incognita:

“z” = $(1/c)^2$ = cose^2. In termini moderni è: “z” = x^2.

Lo schema che segue cerca di interpretare la procedura usata nel testo originale.

Fissiamo i dati di partenza:

* d = 1/c;

* circonferenza = (3 + 1/7) cose;

* Area: A = 11/14 * z.

La situazione di partenza:

103 + (3 + 1/7) cose + 1 cosa = 11/14 * z

103 + (4 + 1/7) cose = 11/14 * z

Moltiplicare entrambi i membri per 14/11:

103 * 14/11 + 14/11 * (4 + 1/7) cose = z

(131 + 1/11) + (5 + 3/11) cose = z

Dividere per 2 il coefficiente di *cose*:

(5 + 3/11)/2 = (2 + 7/11).

Moltiplicare per sé stesso:

(2 + 7/11) * (2 + 7/11) = (6 + 115/121).

Sommare al numero intero:

(6 + 115/121) + (131 + 1/11) = (138 + 5/121).

Estrarre la radice quadrata:

$\sqrt{}$(138 + 5/121).

Sommare la metà del coefficiente di *cose* alla radice quadrata:

$\sqrt{}$(138 + 5/121) + (2 + 7/11) braccia, lunghezza del *diametro*.

Per semplificare i calcoli, semplifichiamo l'ultima espressione:

$\sqrt{(138 + 5/121)} + (2 + 7/11) = \sqrt{(16703/121)} + 29/11 \approx$

$\approx (129{,}24/11) + 29/11 \approx 158{,}24/11 \approx 14{,}385$ braccia.

La lunghezza della circonferenza è calcolata in:

circonferenza = $\sqrt{(1363 + 25/49)} + (+ 2/7) \approx 45{,}21$ braccia.

Infine, l'Autore calcola l'area:

$A_{\text{CERCHIO}} = \sqrt{(2369 + 1422/3929)} + (113 + 71/77) \approx 162{,}598$ braccia^2.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Approfondiamo l'analisi del metodo usato dall'Anonimo per ricavare la lunghezza dell'incognita *diametro*.

L'equazione di 2° grado con i dati può essere scritta come segue:

z – (5 + 3/11) cose – (131 + 1/11) = 0

La tipica equazione di 2° grado è:

$a*x^2 + b*x +$ costante = 0

Nel caso di questa Ragione si ha:

* a = 1;
* b = – (5 + 3/11);
* costante = – (131 + 1/11).

La procedura usata dall'Anonimo Fiorentino per ricavare la lunghezza incognita del diametro è:

$x = d = \sqrt{[(b/2)^2 + \text{costante}]} + b/2 = \sqrt{\{[(5 + 3/11)/2]^2 + (131 + 1/11)\}} + (5 + 3/11)/2.$

I coefficienti di *b* e della *costante* sono presi in valore assoluto, trascurando i segni.

La formula può essere trasformata nel modo che segue:

$\sqrt{[(b/2)^2 + \text{costante}]} + b/2 = \sqrt{[(b^2 + 4 * c)/4]} + b/2 = ½ * \sqrt{(b^2 + 4 * c)} + b/2 =$

$= [\sqrt{(b2 + 4c)} + b]/2.$

- -

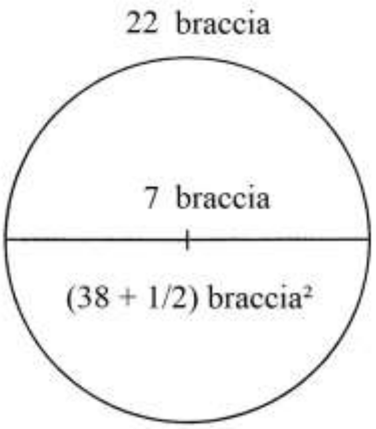
Ragione 49

In un cerchio il prodotto della lunghezza del diametro per quella della circonferenza è uguale all'area aumentata di (115 + ½).

In formule:

$d * c = A_{\text{CERCHIO}} + (115 + ½)$

$d * (22/7 * d) = d^2 * 11/14 + (115 + ½)$



La lunghezza del diametro, *d*, è l'incognita; scriviamo un'equazione:

$d^2 * 22/7 = d^2 + 11/14 + (115 + ½)$
$(22/7 – 11/14) * d^2 = (115 + ½)$
$33/14 * d^2 = (115 + ½)$
$d^2 = 14/33 * (115 + ½)$
$d^2 = 49$ e
$d = \sqrt{49} = 7$ braccia, lunghezza del diametro.

La circonferenza *c* è lunga:

$c = 22/7 * 7 = 22$ braccia.

L'area è:

$A_{\text{CERCHIO}} = d^2 * 11/14 = 7^2 * 11/14 = (38 + ½)$ braccia^2.

Ragione 50

In un cerchio, il prodotto della lunghezza del diametro per quella della circonferenza è uguale a 704: il problema chiede di calcolare queste due lunghezze.

In formula:

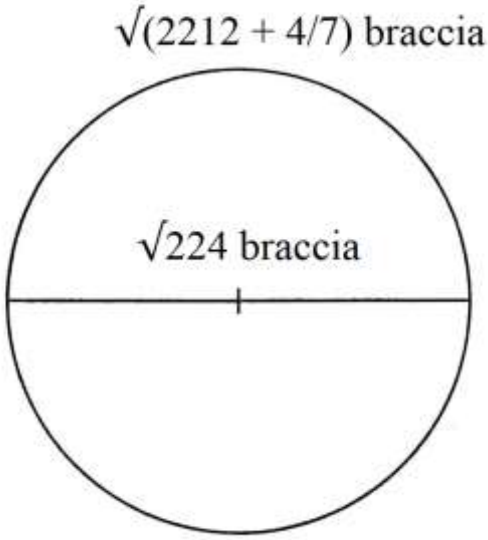
$d * c = 704.$
$d * (22/7 * d) = 704$
$22/7 * d^2 = 704$
$d^2 = 704 * 7/22 = 224$ e
$d = \sqrt{224}$ braccia.

La circonferenza *c* è lunga:

$c = 22/7 * \sqrt{224} = \sqrt{(484/49 * 224)} = \sqrt{(2212 + 4/7)}$ braccia.

L'Autore dà un risultato leggermente differente:

$c = \sqrt{(2212 + 2/7)}.$



<u>Ragione 51</u>

In un cerchio il prodotto della lunghezza del diametro per quella della circonferenza e poi per l'area A dà il risultato 5929.

In formula:

$d * c * A_{CERCHIO} = 5929.$

$d * (22/7 * d) * (d^2 * 11/14) = 5929$

$d^4 * 242/98 = 5929$

$d^4 = 5929 * 98/242 = 2401$

$d^2 = \sqrt{2401} = 49$ e

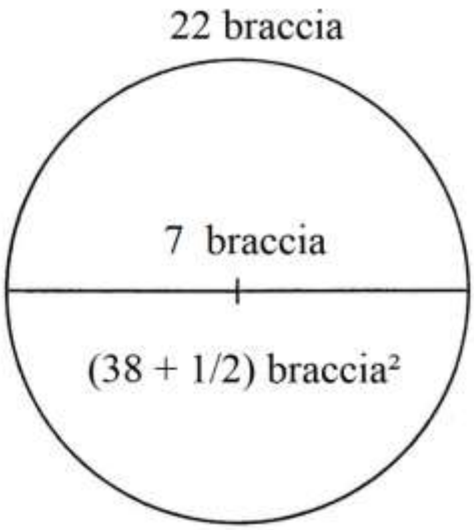
$d = \sqrt{49} = 7$ braccia.

La circonferenza è lunga:

$c = 22/7 * 7 = 22$ braccia.

L'area è:

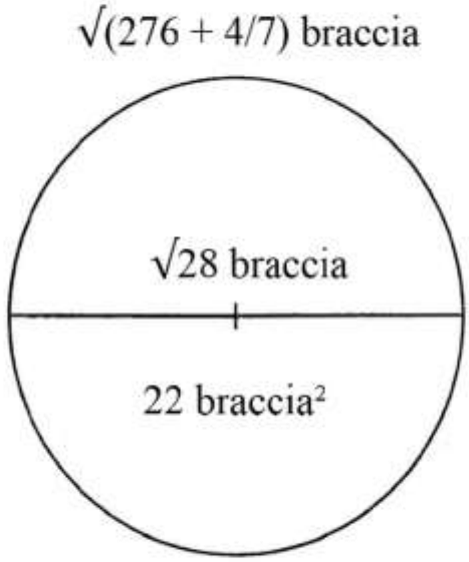
$A_{CERCHIO} = 7^2 * 11/14 = (38 + ½)$ braccia^2.



Ragione 52

In un cerchio, il prodotto della lunghezza del diametro *d* per l'area *A* è uguale a 7 volte la lunghezza della circonferenza *c*:

$$d * A_{\text{CERCHIO}} = 7 * c.$$



Sviluppiamo la relazione iniziale:

$d * (d^2 * 11/14) = 7 * (22/7 * d)$

$d^2 * 11/14 = 22$

$d^2 = 22 * 14/11 = 28$ e

$d = \sqrt{28}$ braccia.

La circonferenza è lunga:

$c = 22/7 * \sqrt{28} = \sqrt{(484/49 * 28)} = \sqrt{(484 * 4/7)} = \sqrt{(276 + 4/7)}$ braccia.

Infine, l'area è:

$A_{\text{CERCHIO}} = d^2 * 11/14 = (\sqrt{28})^2 * 11/14 = 28 * 11/14 = 22$ braccia^2.

Ragione 53

In un cerchio, dividendo l'area per la lunghezza del diametro si ottiene la lunghezza della circonferenza.

Il problema chiede di calcolare le due lunghezze e l'area.

La formula è:

$A_{\text{CERCHIO}}/d = c$

$(d^2 * 11/14)/d = 22/7 * d$

Semplificando, si ha:

$d * 11/14 = 22/7 * d$ da cui

$11/14 = 22/7$, ciò che è impossibile.

Il problema non ha alcuna soluzione.

Ragione 54

In un cerchio, l'area A divisa per la lunghezza del diametro è uguale a 66 meno la lunghezza della circonferenza:

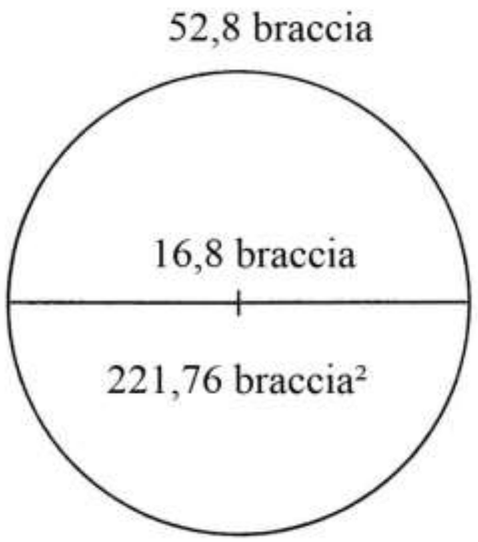
$A_{\text{CERCHIO}}/d = 66 - c$

$(11/14 * d^2)/d = 66 - (22/7 * d)$

$11/14 * d = 66 - 22/7 * d$

$(11/14 + 22/7) * d = 66$

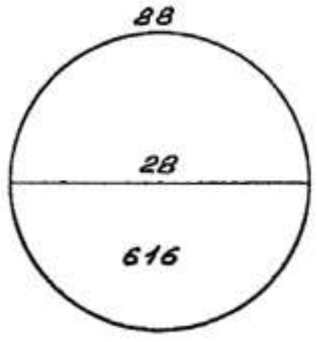
d * (44 + 11)/14 = 66
d * 55/14 = 66
d = 66 * 14/55 = 84/5 = 16,8 braccia [l'Autore scriverebbe (16 + 4/5)].



La circonferenza è lunga:
c = 22/7 * 16,8 = 52,8 braccia.
L'area è:
A $_{\text{CERCHIO}}$ = d^2 * 11/14 = $16{,}8^2$ * 11/14 = 221,76 braccia^2.
Verifichiamo la correttezza dei risultati sostituendo i valori appena calcolati nella formula iniziale:
221,76/16,8 = 66 – 52,8
13,2 = 13,2.

- APPROFONDIMENTO -

La soluzione offerta dall'Autore non corrisponde:



Ricostruiamo la procedura impiegata dall'Anonimo Fiorentino che usa i suoi consueti simboli per le variabili:
* “1/c” per la *x*;
* “co” sempre per la ;
* “z” per x^2.

Per semplificare la ricostruzione dei passi usiamo “*x*” e “x^2” in luogo dei suoi simboli.

A_{CERCHIO}/diametro = 66 – circonferenza

La lunghezza del diametro, *d*, è l'incognita *x*.

$A_{\text{CERCHIO}} = 11/14 * x^2$

circonferenza: c = (3 + 1/7) * x = 22/7 * x

$A_{\text{CERCHIO}}/x = 66 – 22/7 * x$

$(11/14 * x^2)/x = 66 – 22/7 * x$

11/14 * x = 66 – 22/7 * x

A questo punto, l'Autore sottrae (11/14 * x) da entrambi i membri dell'equazione:

11/14 * x – 11/14 * x = 66 – 22/7 * x – 11/14 * x

Nell'ultima espressione, l'Autore commette un errore: attribuisce il segno "+" all'espressione "11/14 * x" nel membro a destra:

11/14 * x – 11/14 * x = 66 – 22/7 * x + 11/14 * x

Il risultato del suo errore è:

66 = 22/7 * x – 11/14 * x

66 = (44 – 11)/14 * x

66 = 33/14 * x

x = 66 * 14/33 = 28 braccia

La circonferenza è:

c = (3 + 1/7) * 28 = 88 braccia

L'area è:

$A_{\text{CERCHIO}} = 11/14 * 28^2 = 616$ braccia^2.

Con i dati calcolati dall'Autore per il diametro, la circonferenza e l'area verifichiamo se essi rispondono al dato iniziale:

$A_{\text{CERCHIO}}/d = 66 – c$

616/28 = 66 – 88

22 = – 22

Il risultato è impossibile: l'Autore ha risolto un'equazione di 2° utilizzando la radice con segno negativo.

- -

<u>Ragione 55</u>

In un cerchio la somma delle lunghezze del diametro *d*, della circonferenza *c* e dell'area *A* è uguale al prodotto della lunghezza del diametro per sé stessa:

$d + c + A_{\text{CERCHIO}} = d^2$

$d + ((22/7 * d) + (11/14 * d^2) = d^2$

Dividere i due membri per *d*:

1 + 22/7 + 11/14 * d = d

29/7 = d – 11/14 * d

29/7 = 3/14 * d

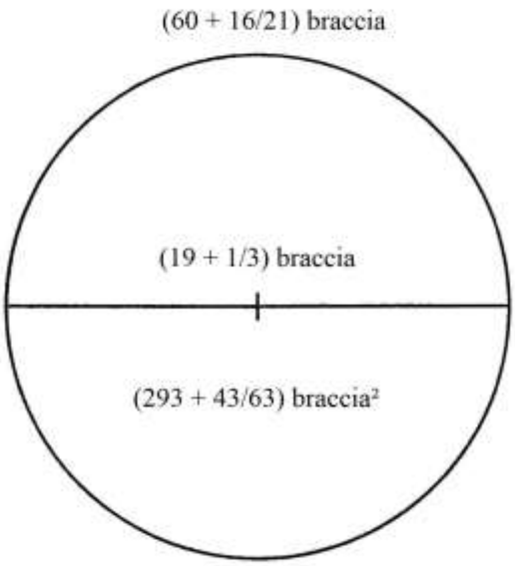
d = 29*14/21 = 58/3 = (19 + 1/3) braccia.

La circonferenza è lunga:

c = 22/7 * (19 + 1/3) = (60 + 16/21) braccia.

L'area è data da:

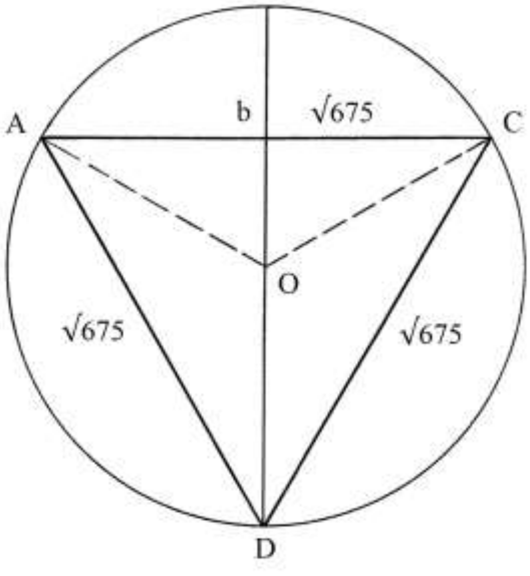
$A_{\text{CERCHIO}} = 11/14 * (19 + 1/3)^2 = (293 + 43/63)$ braccia^2.



POLIGONI INSCRITTI

Ragione 56

Un cerchio ha il diametro *d* lungo 30 braccia e vi è inscritto il più grande triangolo possibile, che è equilatero:



I raggi OA, OC e OD congiungono il centro O con i vertici del triangolo e sono lunghi quanto la metà del diametro e cioè 15 braccia.

L'Autore calcola la lunghezza incognita dei lati del triangolo con i seguenti passi:

- moltiplicare la lunghezza del raggio per sé stessa: $15 * 15 = 225$;
- moltiplicare per 3: $225 * 3 = 675$;
- estrarre la radice quadrata: $\sqrt{675}$ braccia, lunghezza dei lati del triangolo.

Il risultato è corretto: AbO è un triangolo rettangolo nel quale il cateto Ob è lungo metà dell'ipotenusa AO.

La lunghezza di Ab è data da:

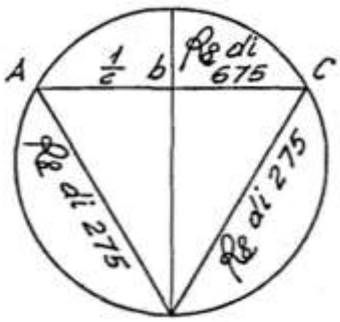
$Ab^2 = OA^2 – Ob^2 = 15^2 – (15/2)^2 = 225 – 225/4 = ¾ * 225 = 675/4$ e

$Ab = \sqrt{(675/4)} = (\sqrt{675})/2$.

Ma Ab è la metà del lato AC:

$AC = 2 * Ab = 2 * (\sqrt{675})/2 = \sqrt{675}$ braccia.

Nella figura originale i due lati obliqui portano la lunghezza errata di √275 invece di √675:



%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

L'Autore suggerisce un secondo metodo. L'altezza (il "catetto") di un triangolo equilatero inscritto in un cerchio (bD nella prima figura) è uguale a ¾ della lunghezza del diametro:

$bD = ¾ * d = ¾ * 30 = (22 + ½)$ braccia.

Egli assegna alla lunghezza di Ab il valore incognito "1/c": di seguito usiamo il simbolo "x":

$Ab = x$ e

$AC = 2 * x$

$Ab^2 = x^2$

$AC^2 = (2 * Ab)^2 = (2 * x)^2 = 4 * x^2$.

Nel triangolo rettangolo AbD, l'ipotenusa è il lato AD che ha la stessa lunghezza di AC. Il cateto Ab è lungo x:

$AD^2 – Ab^2 = 4 * x^2 – x^2 = 3 * x^2$.

Ma $AD^2 – Ab^2 = bD^2 = (22 + ½)^2$

Quindi si ha:

$3 * x^2 = (22 + ½)^2$

$3 * x^2 = (506 + ¼)$

$x = \sqrt{[(506 + ¼)/3]} = \sqrt{(168 + ¾)}$.

Il lato AC è lungo:

$AC = 2 * Ab = 2 * \sqrt{(168 + ¾)} = \sqrt{4 * (168 + ¾)} = \sqrt{675}$ braccia.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

L'area del triangolo equilatero è:

$A_{TRIANGOLO} = AC * bD/2 = \sqrt{675} * (22 + ½)/2 = \sqrt{675} * (11 + ¼) =$
$\sqrt{(675 * 126 + 9/16)} = \sqrt{(85429 + 11/16)}$ $braccia^2$.

L'area del cerchio è:

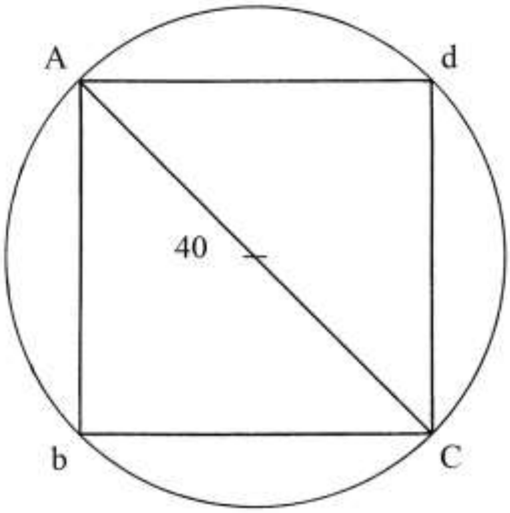
$A_{CERCHIO} = 11/14 * d^2 = 11/14 * 30^2 = (707 + 1/7)$ $braccia^2$.

Infine, l'Autore calcola il rapporto fra l'area del triangolo e quella del cerchio:

$A_{TRIANGOLO} / Area_{CERCHIO} = \sqrt{(85429 + 11/16)}/ (707 + 1/7) =$
$= 64624875/392040000$.

Ragione 57

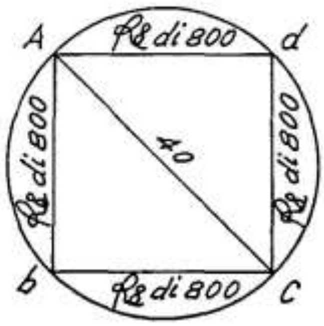
Un cerchio ha diametro di 40 braccia: deve esservi inscritto il quadrato più grande possibile.



La diagonale AC divide il quadrato in due triangoli rettangoli isosceli: AbC e AdC.

Un dettaglio della figura originale merita di essere evidenziato: A e C sono *maiuscole* e sono gli estremi della diagonale disegnata: gli altri due vertici del quadrato, *b* e *d*, sono lettere *minuscole* e la diagonale *bd* non è presente. Le lettere sono apposte in senso antiorario, a partire dal vertice in alto a sinistra:

A → b → C → d.



Il problema chiede di calcolare la lunghezza dei lati del quadrato e il rapporto fra l'area del quadrato e quella del cerchio.

La soluzione impiega le consuete variabili 1/c = Ab e $z = Ab^2$.

Usiamo il simbolo "x" per l'incognita Ab: Ab = x.

$AC^2 = Ab^2 + bC^2 = Ab^2 + Ab^2 = x^2 + x^2 = 2 * x^2 = 40^2$. Ne consegue:

$x^2 = 40^2/2 = 1600/2 = 800$ e

$x = \sqrt{800} = Ab$.

L'area del quadrato è data da:

$A_{AbCd} = Ab^2 = (\sqrt{800})2 = 800$ braccia^2.

L'area del cerchio è:

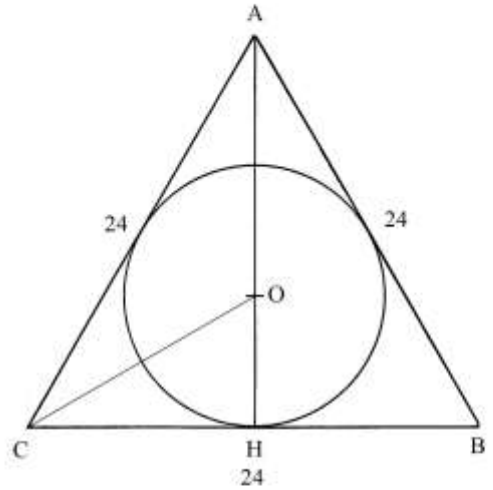
$A_{CERCHIO} = 11/14 * \text{diametro}^2 = 11/14 * 40^2 = (1257 + 1/7)$ braccia^2.

Il rapporto fra le due aree è:

$A_{AbCd} / A_{CERCHIO} = 800/(1257 + 1/7) = 7/11$.

Ragione 58

Un triangolo equilatero ha lati lunghi ℓ = 24 braccia: deve esservi inscritto il cerchio più grande possibile.



Il problema chiede di calcolare il diametro del cerchio e il rapporto fra l'area di questo ultimo e quella del triangolo.

Il centro del cerchio lo è pure del triangolo equilatero.

Il diametro del cerchio è lungo i 2/3 dell'all'altezza AH del triangolo. Ne consegue che il raggio OH è lungo 1/3 dell'altezza AH. L'Autore afferma che i segmenti che collegano il centro O ai tre vertici (OA, OB e OC) hanno lunghezza uguale a quella del diametro del cerchio.

Consideriamo il triangolo rettangolo COH: l'ipotenusa OC è lunga quanto il diametro *d* del cerchio e il cateto OH è il raggio *r*. Nel triangolo la lunghezza del cateto CH è nota e vale 12 braccia. Nel triangolo COH si ha la seguente relazione:

$$OC^2 = OH^2 + CH^2$$
$$OC^2 – OH^2 = CH^2$$
$$d^2 – r^2 = 12^2$$
$$d^2 – (d/2)^2 = 144$$
$$d^2 – ¼ * d^2 = 144$$
$$¾ * d^2 = 144$$
$$d^2 = 4/3 * 144$$
$$d^2 = 192 \quad e$$
$$d = \sqrt{192} \text{ braccia.}$$

L'altezza AH è lunga:

$$AH^2 = AC^2 – CH^2 = 24^2 – (24/2)^2 = 576 – 144 = 432 \quad e$$
$$AH = \sqrt{432} \text{ braccia.}$$

L'area del triangolo è:

$$A_{TRIANGOLO} = AH * CH = \sqrt{432} * 12 = \sqrt{(432 * 144)} = \sqrt{62208} \text{ braccia}^2.$$

L'area del cerchio è data da:

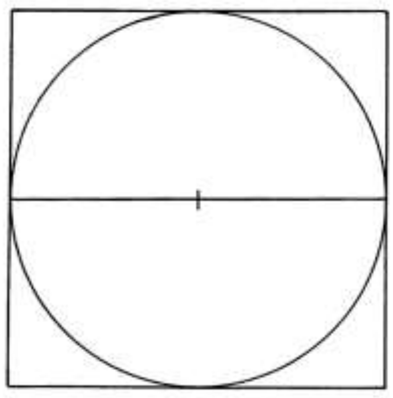
$$A_{CERCHIO} = 11/14 * d^2 = 11/14 * (\sqrt{192})^2 = 11/14 * 192 = (150 + 6/7) \text{ braccia}^2.$$

Il rapporto fra le due aree:

$$A_{CERCHIO} / A_{TRIANGOLO} = (150 + 6/7)/(\sqrt{62208}) = \sqrt{(4356/11907)}.$$

Ragione 59

Un quadrato ha lati lunghi 25 braccia e deve esservi inscritto il più grande cerchio possibile.



Devono essere ricavati la lunghezza del diametro del cerchio e il rapporto fra l'area di questo ultimo e quella del quadrato.

Il diametro *d* del cerchio è lungo quanto il lato ℓ del quadrato e cioè 25 braccia.

L'area del cerchio è:

$A_{CERCHIO} = 11/14 * d^2 = 11/14 * \ell^2 = 11/14 * 25^2 = 6875/14 = (491 + 1/14)$ braccia^2.

L'area del quadrato è:

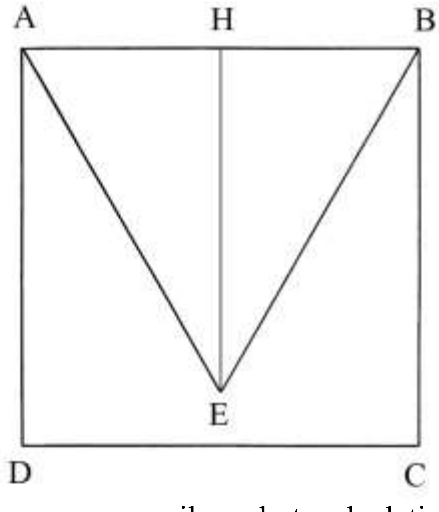
$A_{QUADRATO} = \ell^2 = 25^2 = 625$ braccia^2.

Il rapporto fra l'area del cerchio e quella del quadrato è:

$A_{CERCHIO} / A_{QUADRATO} = (491 + 1/14)/625 = 11/14$.

Ragione 60

Un quadrato ha lati lunghi 25 braccia: deve esservi inscritto il triangolo equilatero più grande possibile.



Il triangolo ha un lato in comune con il quadrato e ha lati anch'essi lunghi 25 braccia.

L'area del quadrato è:

$A_{QUADRATO} = lato^2 = 25^2 = 625$ braccia^2.

L'area del triangolo equilatero è dall'Autore indicata in

$\sqrt{(73242 + 3/16)}$ braccia^2 e non fornisce alcuna indicazione sul metodo di calcolo: comunque, il risultato è corretto.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Vediamo l’origine dell’area di ABE. La sua è:

$A_{ABE} = AB * HE/2$.

La lunghezza di HE è data da:

$HE^2 = AE^2 – AH^2 = AE^2 – (AE/2)^2 = ¾ * AE^2 = ¾ * 25^2 = ¾ * 625 = 1875/4$ e

$HE = ½ * \sqrt{1875}$ braccia.

L’area di ABE è:

$A_{ABE} = 25 * (1/2 * \sqrt{1875})/2 = 25/4 * \sqrt{1875} = \sqrt{(25^2 * 1875/4^2)} = \sqrt{(1171875/16)} =$

$= \sqrt{(73242 + 3/16)}$ braccia^2.

L’area del quadrato ABCD è:

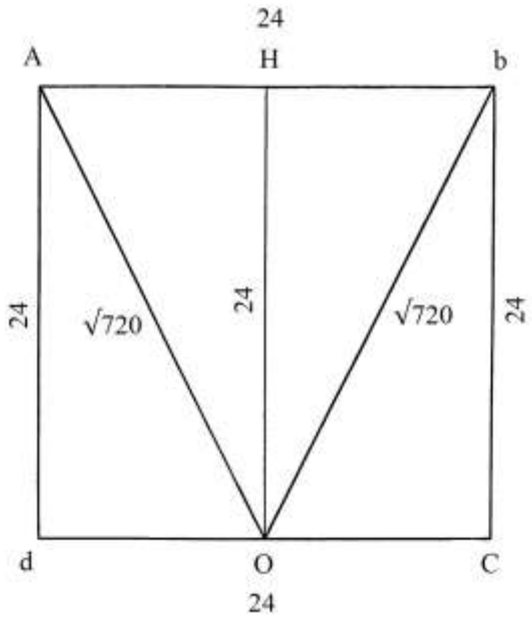
$A_{ABCD} = AB^2 = 25^2 = 625$ braccia^2.

Il rapporto fra le aree dei due poligoni è:

$A_{ABE} / A_{ABCD} = \sqrt{(25^2 * 1875/4^2)}/625 = 3/16$.

<u>Ragione 61</u>

AbCd è un quadrato che ha lati lunghi 24 braccia: deve esservi inscritto il più grande triangolo isoscele con un lato in comune con il quadrato.



Oltre a quella presentata nella figura, l’Autore accenna a un’altra: tracciare una *diagonale* del quadrato (AC oppure db) per dividerlo in due triangoli rettangoli isosceli: questa ipotesi è stata accantonata.

Il lato Ab è uno dei lati del triangolo AOb.

L’altezza OH divide il triangolo isoscele in due triangoli rettangoli di uguali dimensioni: AOH e HOb.

I lati AO e bO hanno uguale lunghezza, che è così calcolata:

$AO^2 = AH^2 + HO^2 = (Ab/2)^2 + HO^2 = (24/2)2 + 24^2 = 144 + 576 = 720$ e

$AO = \sqrt{720}$ braccia = bO.

L’area del triangolo AOb è:

$A_{AOb} = AH * HO = 12 * 24 = 288$ braccia^2.

L’area del quadrato AbCd è:

$A_{AbCd} = Ab^2 = 24^2 = 576$ braccia^2.

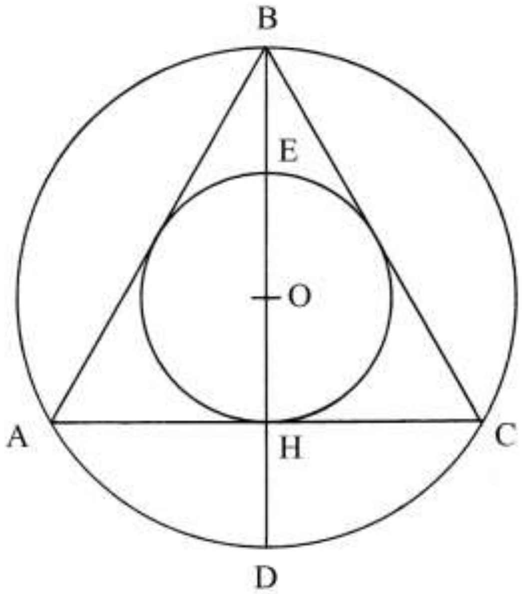
Il rapporto fra le due aree è:

$A_{AOb} / A_{AbCd} = 288/576 = ½$.

Ragione 62

Un cerchio ha diametro di 28 braccia e vi è inscritto il più grande triangolo equilatero possibile.

All'interno del triangolo è inscritto un secondo cerchio, concentrico al primo:



O è il centro dei cerchi e del triangolo.

Il problema chiede di calcolare la lunghezza dei lati del triangolo e del diametro del cerchio interno.

I raggi OA, OB, OC e OD hanno lunghezza uguale a 14 braccia.

Come spiegato nella descrizione della precedente Ragione 56, la lunghezza dei lati del triangolo è legata a quella del raggio:

$AB^2 = 3 * OA^2 = 3 * 14^2 = 588$ e

$AB = \sqrt{588}$ braccia.

Il raggio OH è lungo *un quarto* del diametro BD e cioè 7 braccia e il diametro EH è lungo la metà di BD e quindi è 14 braccia.

L'area del cerchio esterno è:

$A_{\text{ESTERNO}} = 11/14 * 28^2 = 616$ braccia^2.

L'area del cerchio interno è:

$A_{\text{INTERNO}} = 11/14 * 14^2 = 154$ braccia^2: essa è esattamente *un quarto* dell'area del cerchio esterno.

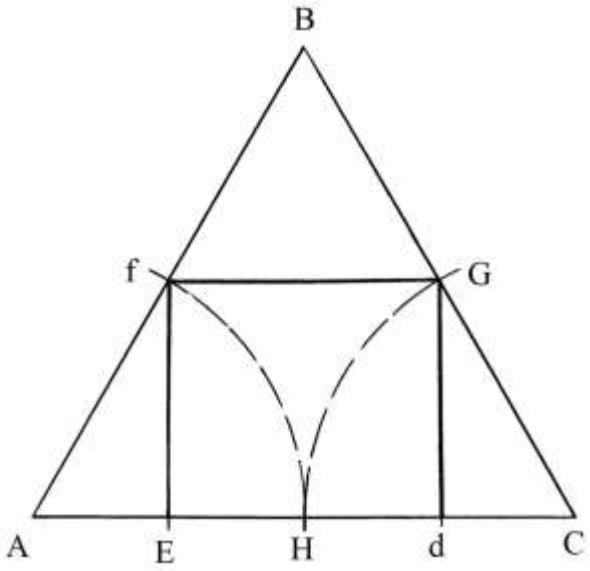
Ragione 63

Un triangolo equilatero ha lati lunghi 24 braccia e deve esservi inscritto il più grande quadrato possibile.

Il testo originale non è accompagnato da alcun disegno, benché ve ne sia citato uno.

La conclusione dell'Autore è che sia possibile inscrivere un quadrato con lati lunghi esattamente *la metà* di quelli del triangolo e cioè 12 braccia.

Con le poche informazioni fornite nel testo cerchiamo di ricostruire lo schema:



ABC è il triangolo equilatero; dividere un lato, AC, in *quattro* parti uguali: sono stabiliti i punti *E*, *H* e *d*.

Fare centro in A e in C e con raggio *Ed* tracciare due archi che tagliano i lati AB e BC rispettivamente nei punti *f* e *g*.

EfGd è il quadrato cercato che ha lati lunghi quanto Ed:

$Ed = 2/4 * AC = 2/4 * 24 = 12$ braccia.

Infine, l'Autore calcola il rapporto fra l'area del quadrato e quella del triangolo.

L'area del triangolo è correttamente calcolata in $\sqrt{62208}$ braccia^2. Ricostruiamo questo dato: l'area di ABC è ottenuta da:

$A_{ABC} = AC * BH/2$, dove BH è l'altezza che è:

$BH = AC * (\sqrt{3})/2$.

$A_{ABC} = AC * [AC * (\sqrt{3})/2]/2 = 24^2 * (\sqrt{3})/4 = 144 * \sqrt{3} = \sqrt{62208}$ braccia^2.

L'area del quadrato è:

$A_{EfGd} = 12^2 = 144$ braccia^2.

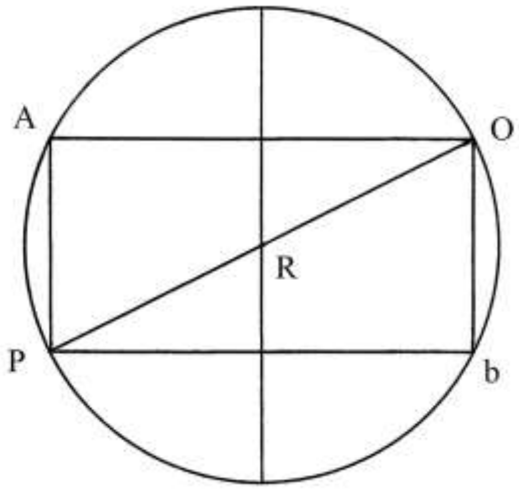
Il rapporto fra le due aree è:

$A_{EfGd}/A_{ABC} = 144/(144 * \sqrt{3}) = 1/\sqrt{3}$.

Ragione 64

Un cerchio ha diametro lungo 24 braccia e devono esservi inscritti due quadrati affiancati i più grandi possibili.

Nel linguaggio degli abacisti toscani del Medioevo il doppio quadrato è chiamato *bislungo*.



Devono essere calcolate la lunghezza e la larghezza del rettangolo AObP.

L'Autore indica la lunghezza incognita AP con la sua solita variabile "1/c", qui sostituita con "x":

$AP = x.$

La lunghezza di AO è, per costruzione, il doppio di quella di AP:

$AO = 2 * AP = 2 * x.$

Il triangolo AOP è rettangolo ed è nota la lunghezza dell'ipotenusa e diametro PO:

$AP^2 + AO^2 = PO^2$

$x^2 + (2 * x)^2 = PO^2$

$5 * x^2 = 24^2$

$x^2 = 24^2/5$

$x^2 = 576/5 = (115 + 1/5)$ e

$x = \sqrt{(115 + 1/5)}$ braccia.

Il lato AO è lungo:

$AO = 2 * \sqrt{(115 + 1/5)} = \sqrt{[4 * (115 + 1/5)]} = \sqrt{(460 + 4/5)}$ braccia.

Ciascun quadrato ha area data da:

$A_{QUADRATO} = AP^2 = [\sqrt{(115 + 1/5)}]^2 = (115 + 1/5)$ braccia^2.

L'area del cerchio è:

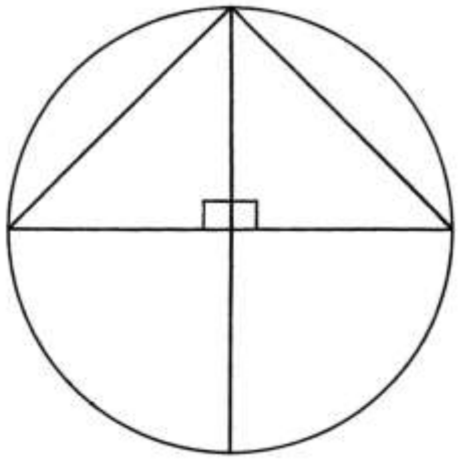
$A_{CERCHIO} = 11/14 * OP^2 = 11/14 * 24^2 = (452 + 4/7)$ braccia^2.

Il rapporto fra l'area di *un* quadrato e quella del cerchio è:

$A_{QUADRATO} / A_{CERCHIO} = (115 + 1/5)/(452 + 4/7= 14/55.$

Ragione 65

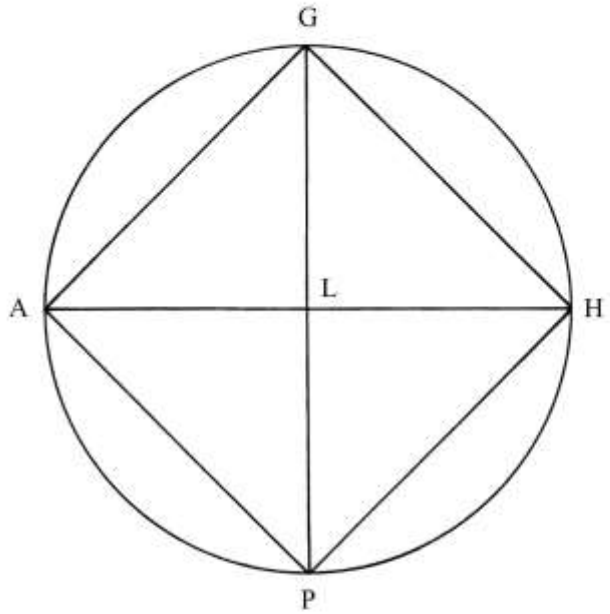
In un cerchio devono essere inscritti due triangoli che abbiano almeno un angolo retto: è necessario che essi siano rettangoli e isosceli e con i cateti lunghi quanto il raggio del cerchio:



Ragione 66

Un cerchio ha diametro 24 braccia e devono esservi inscritti due triangoli rettangoli isosceli i più grandi possibili.

È evidente la derivazione di questa Ragione dalla precedente.



I due triangoli inscritti sono, ad esempio, GPA e GPH.

I raggi LA, LG, LH e LP sono lunghi 12 braccia.

Il problema chiede la lunghezza dei lati AG, GH, HP e PA (che sono i lati del quadrato inscritto AGHP).

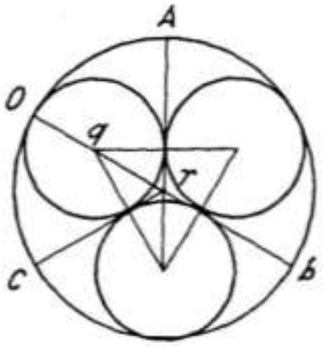
La lunghezza di AG è data da:

$AG^2 = AL^2 + LG^2 = 12^2 + 12^2 = 144 + 144 = 288$ e

$AG = \sqrt{288}$ braccia.

Ragione 67

Un cerchio ha diametro di 24 braccia: vi devono essere inscritti tre cerchi di dimensioni le più grandi possibili, reciprocamente tangenti:

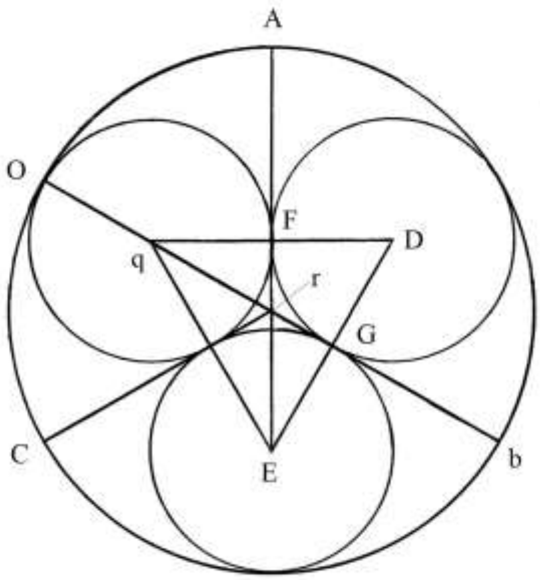


Lo schema è riprodotto due volte nel Trattato.

La circonferenza esterna è divisa in tre archi di uguale lunghezza, delimitati dai punti A, b e C che sono collegati al centro *r*. Ne risultano tre settori circolari di uguali dimensioni: ArC, Arb e Arb.

All'interno dei tre settori devono essere disegnati i tre cerchi, tangenti reciprocamente e ai tre raggi e tangenti alla circonferenza esterna.

Per migliorare la comprensione del problema, nella figura che segue è stato ridisegnato lo schema originale con l'aggiunta di altre lettere apposte a punti significativi:



Collegare i centri dei tre cerchi inscritti: il segmento qFD è lungo il doppio del raggio dei tre cerchi e cioè è lungo quanto il loro diametro.

Ne consegue che il triangolo qDE è equilatero perché ha tutti i lati di lunghezza uguale al diametro dei tre cerchi.

Il problema chiede di calcolare la lunghezza del diametro dei tre cerchi inscritti.

Il raggio Or è lungo metà del diametro del cerchio esterno: Or = 12 braccia.

Il raggio qF dei cerchi inscritti è l'incognita *x*:

qF = x.

Qui risolveremo il problema con metodo moderno.

I lati dei triangoli, come quello qFD, sono lunghi:

qFD = 2 * x.

qFE è un triangolo rettangolo: il cateto qF è lungo la metà di QE.

La lunghezza di FE è data da:

$FE^2 = qE^2 – qF^2 = (2 * x)^2 – x^2 = 3 * x^2$ e

$FE = x * \sqrt{3}$.

Il segmento Fr è lungo un terzo di FE:

$Fr = 1/3 * FE = (x * \sqrt{3})/3 = x * \sqrt{(1/3)}$.

Consideriamo il triangolo rettangolo QrF. QF è lungo *x* e *qr* è dato da:

$qr = Or – Oq = 12 – x$.

qr è lungo quanto rE e si ha:

$qr^2 = qF^2 + Fr^2$

$(12 – x)^2 = x^2 + [x * \sqrt{(1/3)}]^2$

$144 – 24 * x + x^2 = x^2 + 1/3 * x^2$

$1/3 * x^2 + 24 * x – 144 = 0$

$x^2 + 72 * x – 432 = 0$

La radice positiva della soluzione di questa equazione di 2° grado è:

$x = (\sqrt{1728} – 36)$ braccia ed è la lunghezza del raggio qF.

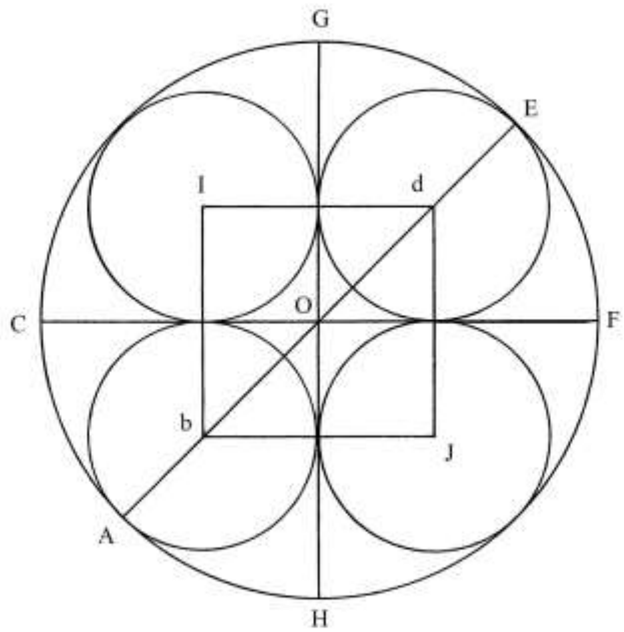
Il diametro dei cerchi è lungo:

$qD = 2 * (\sqrt{1728} – 36) = (\sqrt{6912} – 72)$ braccia.

La soluzione offerta dall'Autore è identica.

Ragione 68

È dato un cerchio che ha diametro lungo 30 braccia: devono inscriversi *quattro* cerchi di uguali dimensioni. Il problema chiede di calcolare il loro diametro.



Tracciare i due diametri CF e GH e il diametro AbOdE che è inclinato di 45° rispetto ai primi due diametri.

I quattro centri dei cerchi sono i vertici del quadrato bIdJ.

Il diametro dei quattro cerchi è lungo quanto i lati del quadrato.

L'Autore prende in considerazione il diametro AE che scompone nei tre segmenti adiacenti che lo formano:

* Ab è il raggio di uno dei cerchi, di lunghezza incognita: Ab = *x*;

* bd è una diagonale del quadrato bIdJ;
* dE è il raggio del cerchio di centro *d*: dE = x.

Occorre calcolare la lunghezza di *bd*:

$bd^2 = bI^2 + Id^2 = (2 * x)2 + (2 * x)^2 = 8 * x^2$ da cui:

$bd = 2 * \sqrt{2} * x$.

Sostituiamo questi valori nella formula della lunghezza di AE:

$Ab + bd + dE = AE$

$x + 2 * \sqrt{2} * x + x = 30$

$2 * x * (1 + \sqrt{2}) = 30$

$x = 30/[2 * (1 + \sqrt{2})] = 15/(1 + \sqrt{2}) = 15 * (\sqrt{2} – 1)$ braccia = Ab.

Il diametro dei cerchi è:

$bI = 2 * 15 * (\sqrt{2} – 1) = 30 * (\sqrt{2} – 1)$ braccia.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

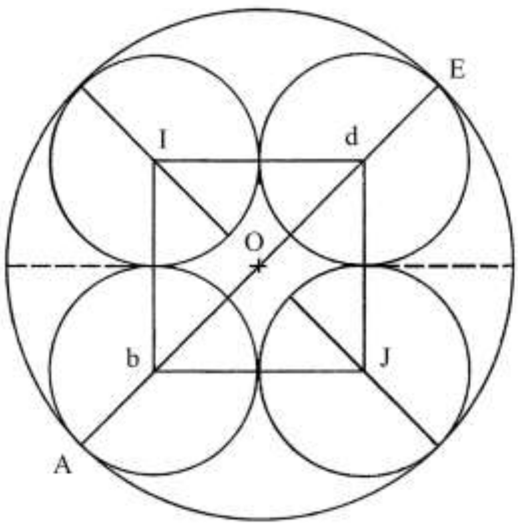
L'Autore impiega una procedura assai più contorta e i suoi risultati, peraltro corretti, sono:

* $Ab = (\sqrt{450} – 15)$ braccia;
* $bI = 2 * Ab = 2 * (\sqrt{450} – 15) = \sqrt{(4 * 450)} – 30 = (\sqrt{1800} – 30)$ braccia.

Ragione 69

Il problema muove da quello considerato nella precedente Ragione: il dato di partenza è costituito dai quattro cerchi tangenti aventi i centri nei vertici di un quadrato. Il diametro dei quattro cerchi è 14 braccia.

I cerchi devono essere inscritti in un cerchio di cui il problema chiede di calcolare la lunghezza del diametro.



I lati del quadrato bIdJ hanno lunghezza uguale a quella del diametro dei cerchi.

La lunghezza della diagonale bd è data da:

$bd^2 = bI^2 + Id^2 = 12^2 + 12^2 = 288$ e

$db = \sqrt{288}$ braccia.

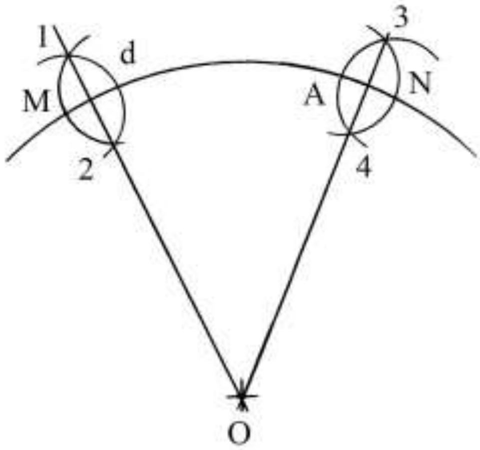
La lunghezza del diametro AE è:

$AE = Ab + bd + dE = 6 + \sqrt{288} + 6 = 12 + \sqrt{288}$ braccia.

Ragione 70

È dato un arco di circonferenza di cui è ignota la posizione del centro O.

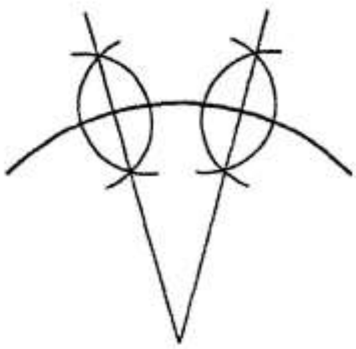
Fissare due punti, M e N:

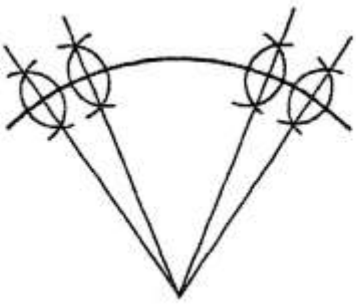


Fare centro in M e tracciare un arco che taglia in *d* l'arco di cui si deve determinare il centro. Con la stessa apertura fare centro in *d* e disegnare un secondo arco che incontra il primo nei punti 1 e 2: per questi ultimi condurre una retta verso l'interno dell'arco.

Ripetere le stesse operazioni a partire dal punto N, con identica apertura di compasso, Md: sono fissati i punti A, 3 e 4; per questi ultimi due passa una seconda retta che incontra la prima nel punto O, centro dell'arco di circonferenza.

L'Autore mostra altri esempi con un maggior numero di rette che convergono verso il centro:

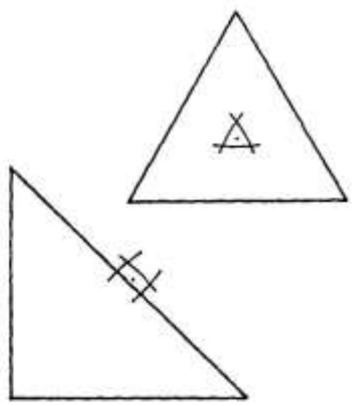




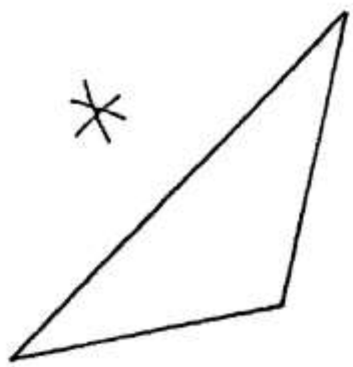
Ragione 71

L’argomento di questa Ragione è la ricerca del “centro” dei triangoli. L’Autore presenta tre esempi:

* un triangolo equilatero;
* un triangolo rettangolo:



* un triangolo ottusangolo:



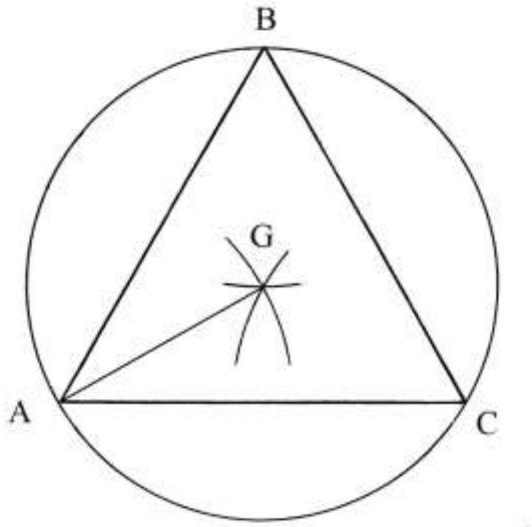
I disegni originali sono piuttosto imprecisi.

Inoltre, l’Autore non spiega chiaramente che cosa intende per “centro” di un triangolo: pare trattarsi del punto che è oggi chiamato *circoncentro,* punto che è il centro del cerchio che è circoscritto al triangolo. È opportuno ricordare la nota regola secondo la quale per tre punti non allineati passa una sola circonferenza.

Questo punto è l’intersezione degli assi di simmetria dei lati di un triangolo, cioè delle rette passanti perpendicolarmente per i punti medi dei lati.

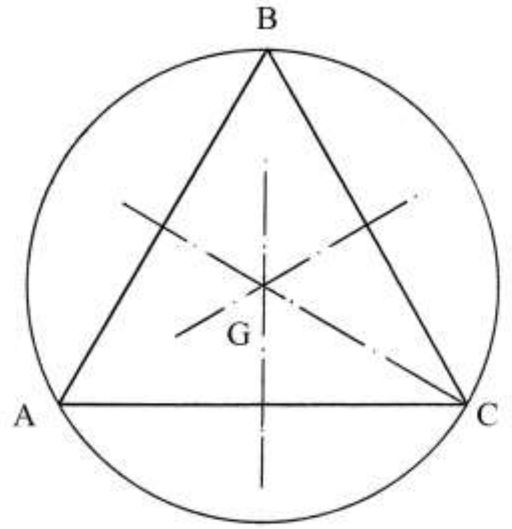
Come è confermato dai tre schemi sopra riprodotti, l’Autore non ha disegnato alcun cerchio.

Consideriamo il disegno del primo triangolo, che è equilatero: l’Anonimo suggerisce di prendere con il compasso un’apertura più grande della lunghezza di metà del lato e fare centro nei vertici del poligono: i tre archi dovrebbero incontrarsi nel circoncentro G, ma nell’originale non lo fanno:



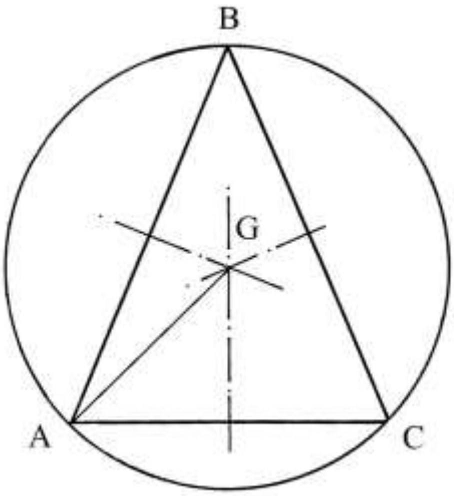
In questo schema è disegnato il cerchio di centro G e raggio GA = GB = GC.

La figura che segue presenta la costruzione del punto G ottenuta con l'intersezione degli assi di simmetria dei tre lati:

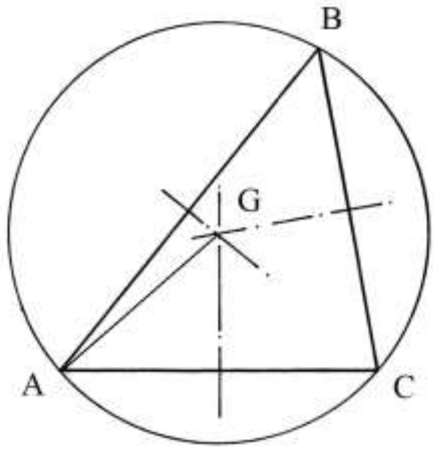


Il punto G cade:

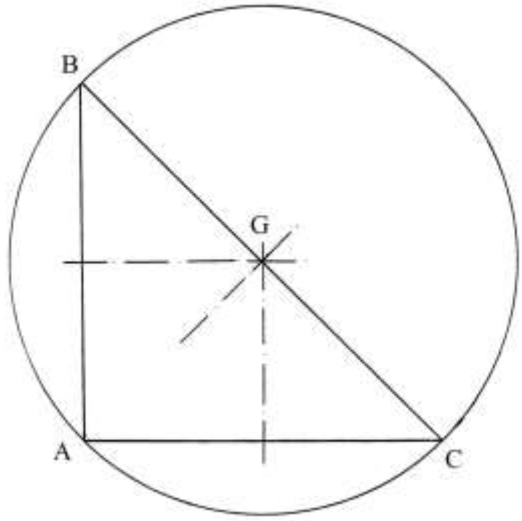
* all'interno di un triangolo equilatero, come appena visto;
* all'interno di un triangolo isoscele:

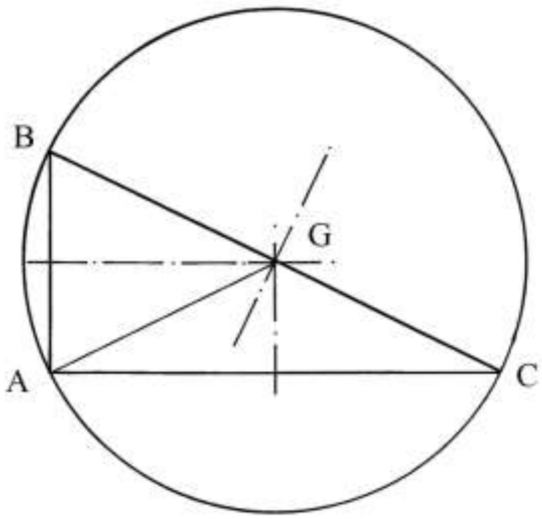


*   all’interno di un triangolo scaleno acutangolo:



*   il punto medio dell’ipotenusa di un triangolo rettangolo, *isoscele* (il primo qui sotto) o *scaleno* (il secondo sempre qui di seguito): nel disegno originale il punto non è collocato sull’ipotenusa ma è esterno, seppure di poco, al poligono:



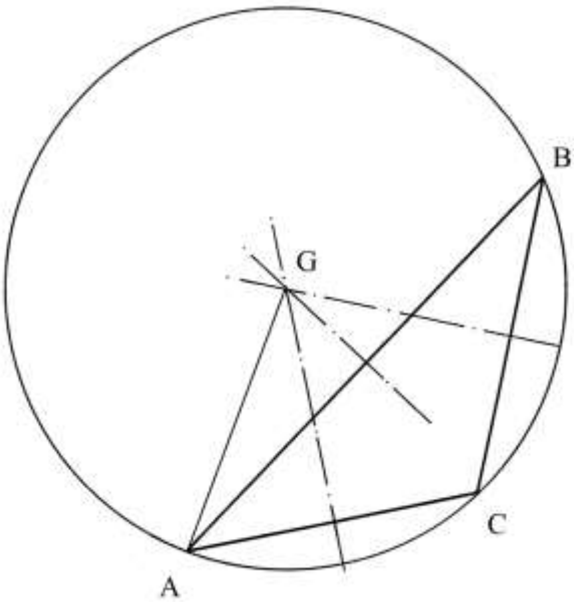


In entrambi i casi, i raggi dei cerchi nei quali sono inscritti i due triangoli sono:

GA = GB = GC.

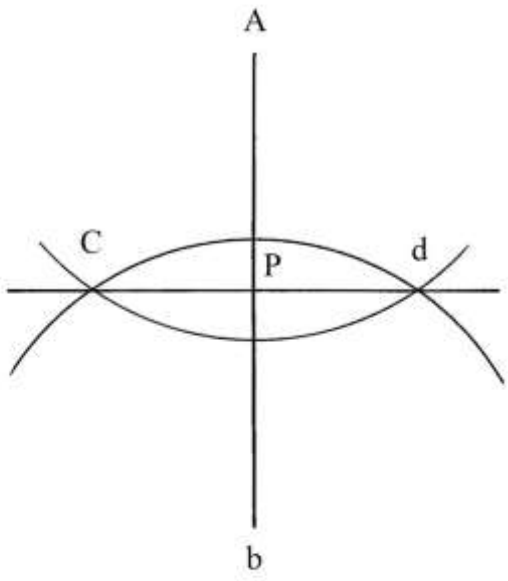
Proprio l'uguaglianza fra le lunghezze dei raggi GB e GC vincola la posizione di G nel punto medio delle due ipotenuse.

* Infine, in un triangolo ottusangolo, il punto G è situato all'esterno del triangolo e anche in questo caso vale la relazione GA = GB = GC:



Ragione 72

Il problema qui proposto è di facile soluzione: un segmento verticale, Ab, deve essere diviso in due parti uguali con una retta passante per il suo punto medio:

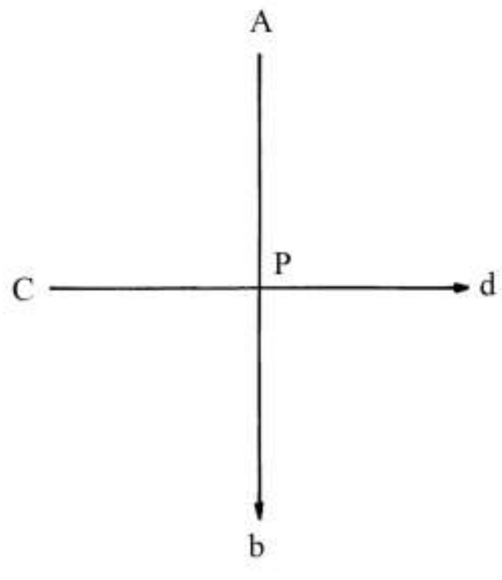


Fare centro negli estremi *A* e *b* con raggio più grande della metà del segmento stesso e tracciare due archi che si incontrano nei punti *C* e *d*: per questi ultimi disegnare la retta che interseca in P il segmento verticale e lo divide in due parti uguali:

AP = Pb.

È da notare l'uso delle lettere: il punto di partenza di Ab è indicato con la lettera maiuscola *A* e quello di arrivo con la minuscola *b*.

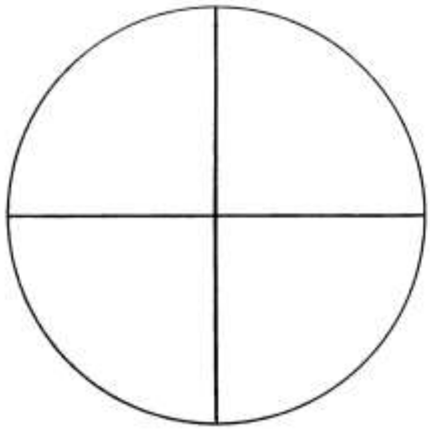
Lo stesso accade all'asse del segmento. Sembra che l'Autore abbia usato dei precursori dei *vettori*:



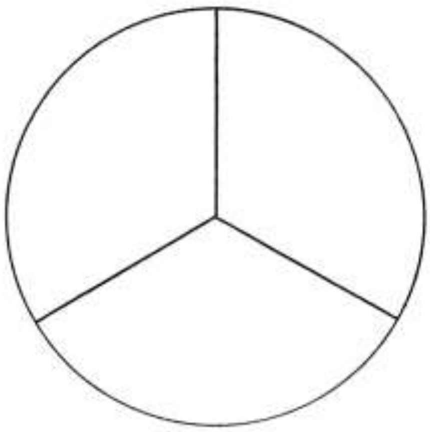
Ragione 73

Il problema propone la divisione di un cerchio in 2, 3 o 4 parti uguali: la soluzione è semplice fino a quando le linee dividenti sono raggi o diametri.

Il primo caso è quello di un cerchio diviso da due diametri perpendicolari in quattro settori circolari di uguali dimensioni:

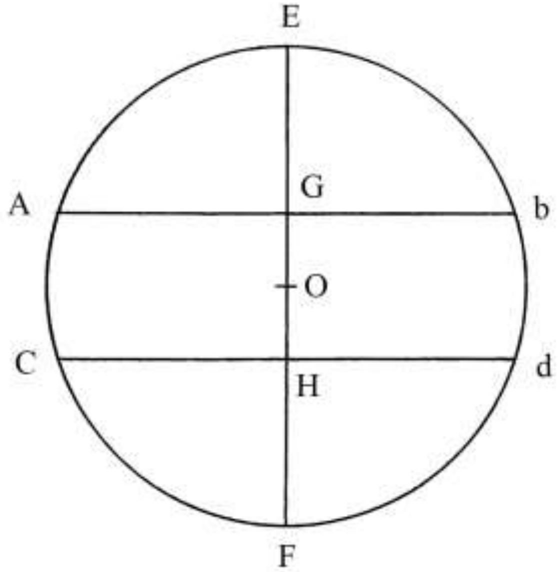


Il secondo caso è quello di un cerchio diviso in tre settori circolari uguali:



Entrambe le costruzioni sono molto facili: la prima serve a disegnare un quadrato inscritto e la seconda un triangolo equilatero inscritto.

Il terzo caso è più complesso:



Un cerchio ha diametro di 24 braccia e deve essere diviso in *tre* parti di uguali aree, con due corde: Ab e Cd.

L'Autore fa un accenno a precedenti regole, ma in realtà soltanto nella soluzione della Ragione 24 è presentato un metodo approssimato per calcolare l'area di un segmento circolare.

L'area di questo cerchio è:

$A_{\text{CERCHIO}} = 11/14 * d^2 = 11/14 * 24^2 = (452 + 4/7)$ braccia^2.

Ciascuna delle tre parti ha superficie uguale a 1/3:

$(452 + 4/7)/3 = (150 + 6/7)$ braccia^2.

Le tre frecce EG, GH e HF sono:

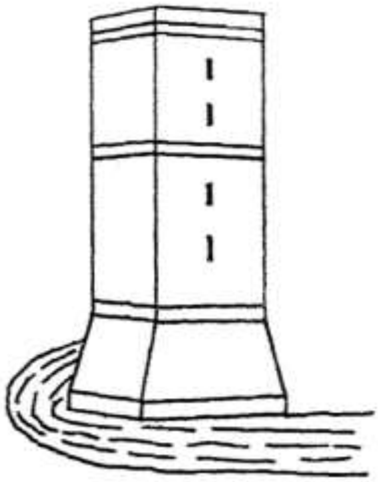
* EG = HF;
* GH è più corta delle altre due.

L'Autore non fornisce alcuna informazione sulla procedura occorrente per calcolare le lunghezze delle tre frecce.

Ragione 74

Le Ragioni dalla numero 74 alla numero 77 riprendono un tema assai caro agli abacisti toscani: la misura di altezze di torri e di larghezze di corsi d'acqua.

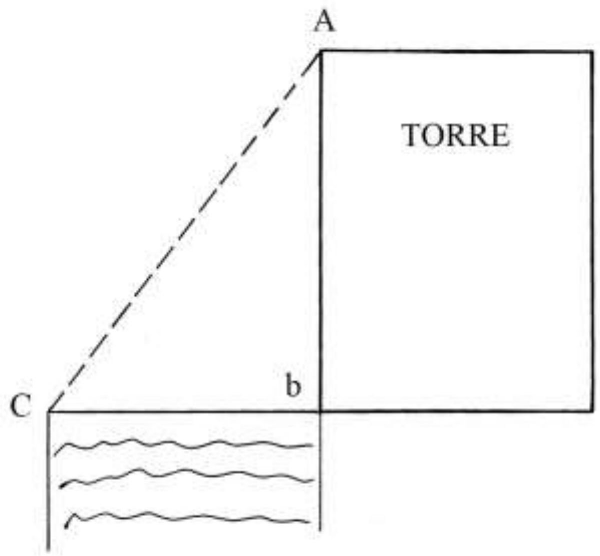
Il problema considerato da questa Ragione è accompagnato da uno schema che è qui riprodotto:



Una torre è alta 40 braccia e ai suoi piedi passa un fiume largo 30 braccia: il problema chiede di calcolare la lunghezza di una corda fissata con un capo in cima alla torre e con l'altro capo sulla riva opposta del fiume.

Il disegno originale è privo di lettere, peraltro citate nel testo del Trattato: più che a un fiume, lo schema originale sembra riferirsi a un fossato a protezione delle mura di una città, mura di cui la torre faceva parte.

Il problema è riassunto nel grafico che segue:



AbC è un triangolo rettangolo di cui sono note le lunghezze dei due cateti Ab e bC. La lunghezza dell'ipotenusa AC è:

$AC^2 = Ab^2 + bC^2 = 40^2 + 30^2 = 1600 + 900 = 2500$ e

$AC = \sqrt{2500} = 50$ braccia.

Le lunghezze dei lati di AbC, 30-40-50, formano una terna derivata da quella primitiva 3-4-5.

Ragione 75

Una torre è alta 40 braccia e ai suoi piedi scorre un fiume di larghezza sconosciuta: una fune che collega la cima della torre alla riva opposta del fiume è lunga 50 braccia.

Il problema chiede la larghezza del fossato: esso è chiaramente l'inverso del precedente.

La lunghezza di Cb (rivedere la seconda figura della precedente Ragione) è data da:

$Cb^2 = AC^2 – Ab^2 = 50^2 – 40^2 = 2500 – 1600 = 900$ e

$Cb = \sqrt{900} = 30$ braccia.

Ragione 76

Il problema è un'ulteriore variante dei due precedenti: il fiume è largo 30 braccia e una corda tirata dalla riva opposta fino alla cima della torre è lunga 50 braccia. Deve essere calcolata l'altezza della torre, Ab, che è data da:

$Ab^2 = AC^2 – Cb^2 = 50^2 – 30^2 = 2500 – 900 = 1600$ e

$Ab = \sqrt{1600} = 40$ braccia.

Ragione 77

La solita torre ha ai suoi piedi un fiume. Non sono note l'altezza della torre e la larghezza del fiume, che devono essere calcolate.

Utilizziamo di nuovo la seconda figura della Ragione 74.

La fune è lunga 20 braccia meno della somma dei due cateti:

$AC = (Ab + Cb) – 20.$

Inoltre la torre è alta 10 braccia più della larghezza del fiume:

$Ab = Cb + 10.$

L'Autore attribuisce alla larghezza del fiume, Cb, il consueto valore dell'incognita "1/c". Qui usiamo la "x":

$$AC = (Ab + x) – 20 \quad e$$
$$Ab = x + 10.$$

Nella prima espressione, al valore di Ab sostituiamo il suo equivalente (x + 10):

$$AC = (Ab + x) – 20 = (x + 10 + x) – 20 = 2 * x – 10.$$

Ma vale la relazione:

$$AC^2 = Ab^2 + Cb^2$$
$$(2 * x – 10)^2 = (x + 10)^2 + x^2$$
$$4 * x^2 – 40 * x + 100 = {}^{x2} + 20 * x + 100 + x^2$$
$$4 * x^2 – x^2 – x^2 = 60 * x$$
$$2 * x^2 = 60 * x$$
$$2 * x = 60$$
$$x = 30.$$

Le lunghezze dei tre lati sono:

* Cb = x = 30 braccia;
* Ab = Cb + 10 = 30 + 10 = 40 braccia;
* AC = (Ab + Cb) – 20 = (40 + 30) – 20 = 50 braccia.

Il triangolo ACb è lo stesso utilizzato nelle precedenti Ragioni da 74 a 76.

Ragione 78

Un albero è alto 18 braccia e ai suoi piedi passa la *gora* di un mulino, larga 6 braccia: la gora è un canale artificiale che porta l'acqua di un fiume sulle pale del ruota idraulica di un mulino.

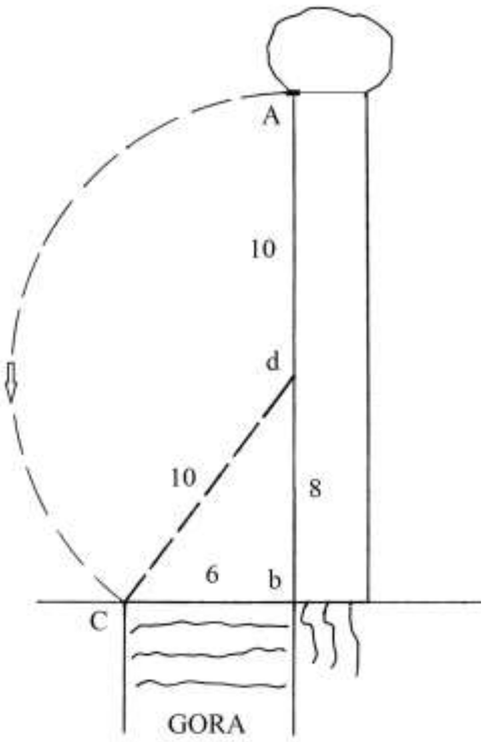
L'albero deve essere tagliato per farne un ponte da collocare sulla gora.

Ab è l'altezza dell'albero e bC è la larghezza della gora: il punto *d* è dove deve essere tagliato l'albero.

I due disegni che nell'originale accompagnano la Ragiono non contengono le lettere citate nel testo:

La soluzione del problema richiede di nuovo l'aiuto dell'algebra elementare: l'Autore definisce la lunghezza da tagliare, dA, come l'incognita "1/c". Qui usiamo la convenzione:

$$Ad = x.$$



La proposta dell'Autore porta a tagliare ben 10 braccia a partire dal punto A, quando per un ponte orizzontale servono 6 braccia e poco più. Probabilmente, la parte tagliata dell'albero è più lunga perché il cosiddetto ponte risulta inclinato e lungo 10 braccia, come nella figura qui sopra.

La soluzione è abbastanza semplice:

Ad = x e Ad = dC.

Bd = Ab – Ad = 18 – Ad = 18 – x.

Ma Ad = dC.

La lunghezza di dC è data da:

$dC^2 = bd^2 + Cb^2 = Ad^2$

$(18 - x)^2 + 6^2 = x^2$

$324 - 36 * x + x^2 + 36 = x^2$

$360 = 36 * x$

x = 360/36 = 10 braccia = Ad.

Il tratto db è lungo:

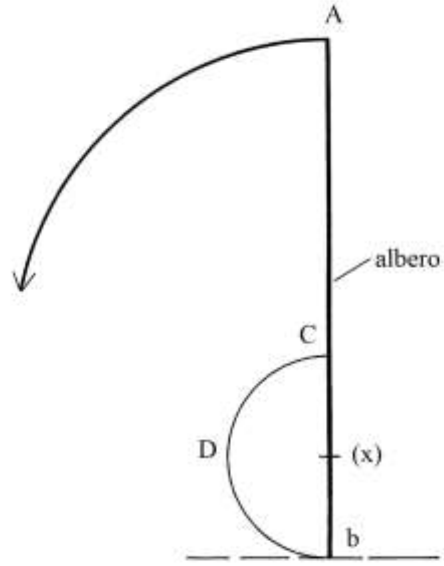
db = Ab – Ad = 18 – 10 = 8 braccia.

Il triangolo Adb è rettangolo e le lunghezze dei suoi lati formano la terna derivata 6-8-10.

Ragione 79

Un albero è alto 24 braccia. A partire dalla cima ne viene tagliata una parte per farne una mezza circonferenza.

Il problema chiede le lunghezze della parte tagliata e di quella rimanente.



La lunghezza del segmento Cb è l’incognita *x*:

Cb = x.

Ab = 24 = AC + Cb = AC + x e

AC = 24 – x.

L’arco di circonferenza CDb ha lunghezza uguale a quella del segmento AC:

CDb = AC.

La semicirconferenza CDb è lunga:

CDb = π * diametro/2 = π * Cb/2 = π * x/2 ≈ 22/7 * x/2 = 22/14 * x = 11/7 * x.

Ma, come visto sopra, l’arco CDb è lungo quanto AC:

11/7 * x = 24 – x

x * (1 + 11/7) = 24

18/7 * x = 24

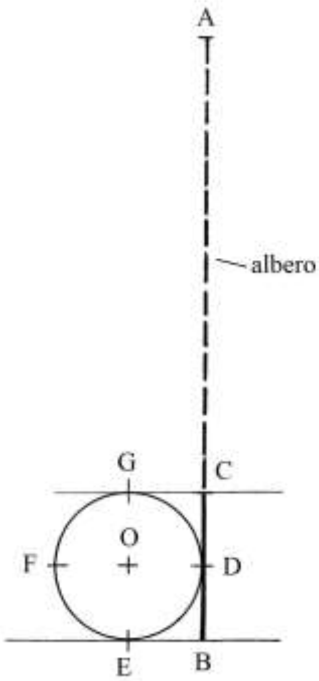
x = 24 * 7/18 = (9 + 1/3) braccia.

Il segmento AC e la semicirconferenza CDb sono lunghi:

AC = CDb = 24 – (9 + 1/3) = (14 + 2/3) braccia.

Ragione 80

Un albero è alto 24 braccia. Deve esserne tagliata una porzione di lunghezza tale che la parte restante sia lunga quanto il diametro di una circonferenza costruita con la parte tagliata:



AC è lungo quanto la circonferenza DEFG e CB è la porzione di albero che residua dopo il taglio di AC, che è lungo quanto un diametro di DEFG:

AC + CB = 24.

CB è la lunghezza incognita:

CB = x.

AC è lungo:

AC = π * diametro = π * CB = 22/7 * x.

Risulta:

AB = AC + CB = 22/7 * x + x.

Ma AB = 24 e quindi:

22/7 * x + x = 24

29/7 * x = 24

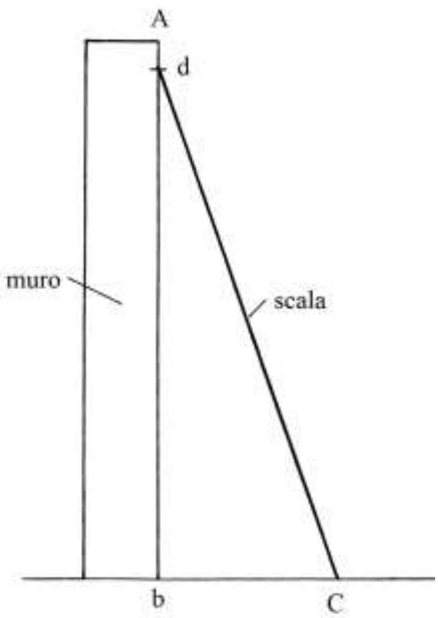
x = 24 * 7/29 = (5 + 23/29) braccia = CB.

La lunghezza di AC è:

AC = 24 – CB = 24 – (5 + 23/29) = (18 + 6/29) braccia.

Ragione 81

Un muro, Ab, è alto 30 braccia e vi è appoggiata una scala che è anch’essa lunga 30 braccia.
Il piede della scala viene scostato rispetto al muro di 10 braccia e assume la posizione dC:



Lo scostamento bC misura 10 braccia. Il problema chiede di calcolare la lunghezza di Ad.

dbC è un triangolo rettangolo di cui sono note le lunghezze dell'ipotenusa dC e del cateto bC. La lunghezza di db è data da:

$db^2 = dC^2 - bC^2 = 30^2 - 10^2 = 900 - 100 = 800$ e

$db = \sqrt{800}$ braccia.

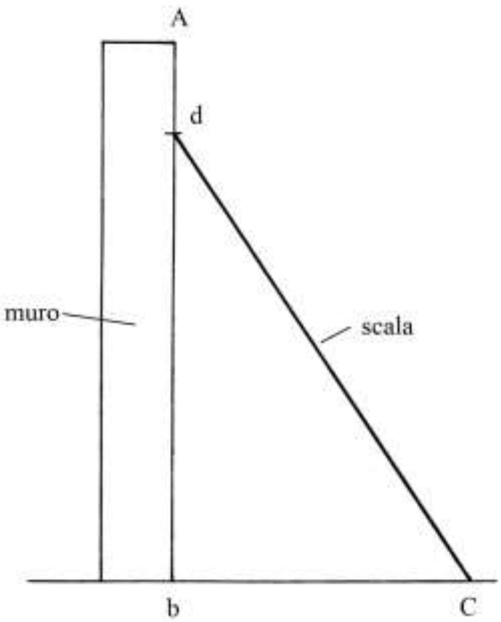
La lunghezza di Ad è:

$Ad = Ab - db = (30 - \sqrt{800})$ braccia.

Ragione 82

Un muro è alto 30 braccia, come la scala che vi è appoggiata.

Questa ultima viene scostata dal muro e scende di 5 braccia: il problema chiede la distanza del piede della scala dal muro.



Il problema chiede di ricavare la lunghezza dello scostamento del piede della scala dal muro e cioè la lunghezza di bC.

Di nuovo, consideriamo il triangolo rettangolo bdC: la lunghezza di bC è ignota ed è data da:

$bC^2 = dC^2 – db^2$.

Ma:

db = Ab – Ad = 30 – 5 = 25 braccia.

Quindi:

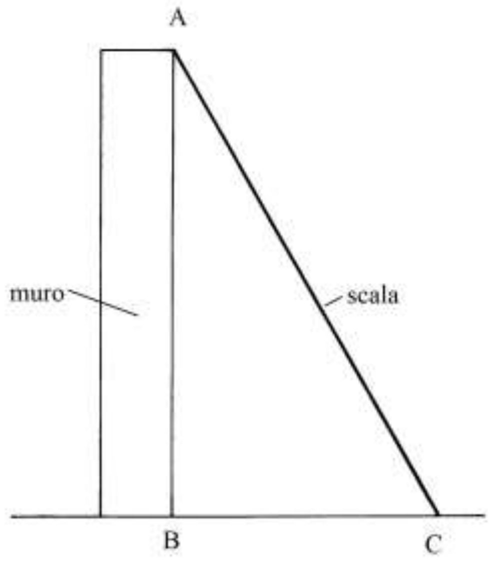
$bC^2 = 30^2 – 25^2 = 900 – 625 = 275$ e

$bC = \sqrt{275}$ braccia = bC.

Ragione 83

Con questa Ragione si conclude la serie dei muri e delle scale appoggiate.

Un muro ha altezza incognita e vi è appoggiata obliquamente una scala lunga 30 braccia che raggiunge la cima dello stesso muro: il piede della scala è distante 15 braccia dal muro.



ABC è un triangolo rettangolo e la lunghezza del cateto AB è data da:

$AB^2 = AC^2 – BC^2 = 30^2 – 15^2 = 900 – 225 = 675$ e

$AB = \sqrt{675}$ braccia.

Ragione 84

Un albero è alto 40 braccia e deve essere tagliato a colpi di scure: a ogni colpo la cima si abbassa di 1 braccio:

Il problema chiede il numero dei colpi necessari per abbattere l'albero: la Ragione ha un contenuto a dir poco insolito.

L'albero è alto quanto la lunghezza di *un quarto* di circonferenza.

L'Autore definisce l'altezza dell'albero come metà del diametro *d* della circonferenza:

$d = 2 * 40 = 80$ braccia.

La circonferenza *c* è lunga:

$c = 22/7 * d = 22/7 * 80 = (251 + 3/7)$ braccia.

La sua quarta parte è lunga:

$c/4 = (251 + 3/7)/4 = (62 + 6/7)$.

Secondo l'Autore questo è il numero di colpi necessari per abbattere l'albero.

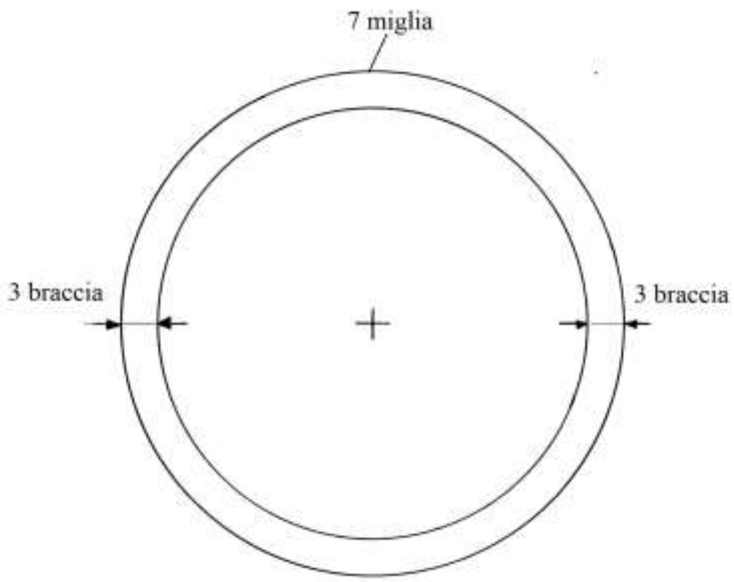
Ragione 85

Il problema sembra richiamare la Ragione 63 del "*Trattato d'Aritmetica*" di Paolo dell'Abbaco (1282 – 1374): in essa è definita la lunghezza delle mura di Firenze pari, all'epoca, a 7 *miglia*. Questa unità valeva:

1 miglio = (2833 + 1/3) braccia da panno, equivalenti a ≈ 1653,607 metri.

Sia Paolo dell'Abbaco che l'Anonimo Fiorentino attribuiscono alle mura di Firenze una forma circolare: in realtà la pianta della città era ben più complessa.

In questa Ragione, l'Anonimo assegna alle mura di Firenze uno spessore di 3 braccia.



Dato che le 7 miglia sono la lunghezza della circonferenza esterna, il problema chiede di calcolare quella interna.

La struttura della pianta è quella di una *corona circolare*.

La differenza fra le lunghezze dei due diametri delle circonferenze, esterna e interna, è:

3 + 3 = 6 braccia.

La differenza fra le lunghezze delle due circonferenze è:

6 * 22/7 = (18 + 6/7) braccia.

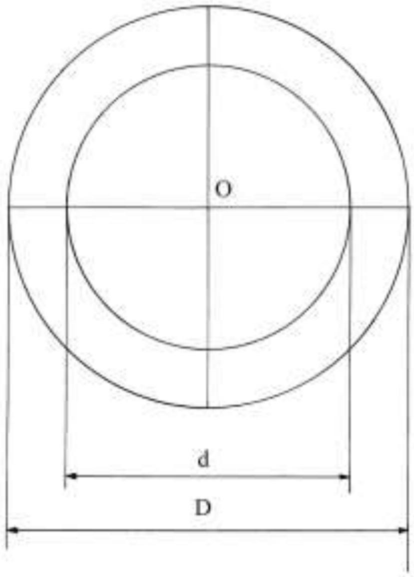
La circonferenza interna è lunga:

7 miglia – (18 + 6/7) braccia.

Ragione 86

Una ruota per arrotare è rotonda e ha diametro *D* di 15 spanne: essa è di proprietà di due fabbri che la vogliono dividere in parti uguali conservando la sua forma circolare, ovviamente sfruttandola per il loro lavoro.

Il parte chiede il diametro della parte che resta al secondo artigiano dopo che il primo l’ha utilizzata per la sua metà.



Già Paolo dell'Abbaco nel suo già citato "*Trattato d'Aritmetica*" aveva risolto lo stesso problema nella Ragione 130.

La *spanna* era sinonimo di *palmo*: la sua lunghezza era di ½ braccio da panno e cioè (0,583626/2) m = 0,291813 m. La spanna valeva 10 *soldi* oppure 120 *denari*.

L'area dell'intero cerchio è:

$$A_{\text{RUOTA}} = D^2 * 11/14 = 15^2 * 11/14 = 225 * 11/14 = (176 + 11/14) \text{ spanne}^2.$$

L'area del disco che alla fine resta a disposizione del secondo fabbro è:

$$A_{\text{FINALE}} = A_{\text{RUOTA}}/2 = (176 + 11/14)/2 = (88 + 11/28) \text{ spanne}^2.$$

Il diametro *d* del disco finale è:

$$d^2 = A_{\text{FINALE}} * 14/11 = (88 + 11/28) * 14/11 = (112 + ½) \quad \text{e}$$

$$d = \sqrt{(112 + ½)} \text{ spanne}.$$

- APPROFONDIMENTO -

Le dimensioni della ruota sembrano eccessive: 15 spanne equivalgono a:

15 spanne = 15 * 0,291813 = 4,37195 metri.

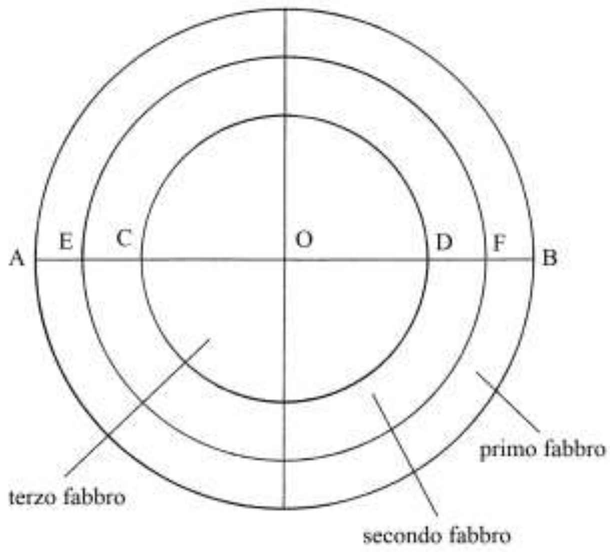
Il diametro di una ruota per arrotare non può essere così grande: l'esercizio aveva solo un fine didattico.

- -

<u>Ragione 87</u>

Anche le ragioni 87 e 88 trovano un precursore nella Ragione 130 del *Trattato* di Paolo dell'Abbaco.

Il caso qui esaminato prevede la divisione di una ruota in tre parti uguali al servizio di tre fabbri: il suo diametro *AB* è lungo 15 spanne.



La procedura usata dall'Anonimo ricalca quella di Paolo dell'Abbaco.

Il primo artigiano consuma la corona circolare esterna, il secondo la corona intermedia e al terzo rimane il cerchio interno.

L'area dell'intero cerchio è:

$A_{\text{RUOTA}} = 11/14 * 15^2 = (176 + 11/14)$ spanne^2.

All'ultimo artigiano resta un cerchio che ha area uguale a un terzo di quella totale:

$A_{\text{ULTIMO}} = A_{\text{RUOTA}} /3 = (176 + 11/14)/3 = (58 + 13/14)$ spanne^2.

A questo valore corrisponde il diametro:

$CD = \sqrt{}(14/11 * A_{\text{ULTIMO}}) = \sqrt{}[14/11 * (58 + 13/14)] = \sqrt{}75$ spanne.

L'area della mola riservata al secondo artigiano è anch'essa uguale a (58 + 13/14) spanne^2.
Sommare le aree dell'ultimo e del secondo fabbro:

$(58 + 123/14) + (58 + 13/14) = (117 + 6/7)$ spanne^2.

Il diametro EF è lungo:

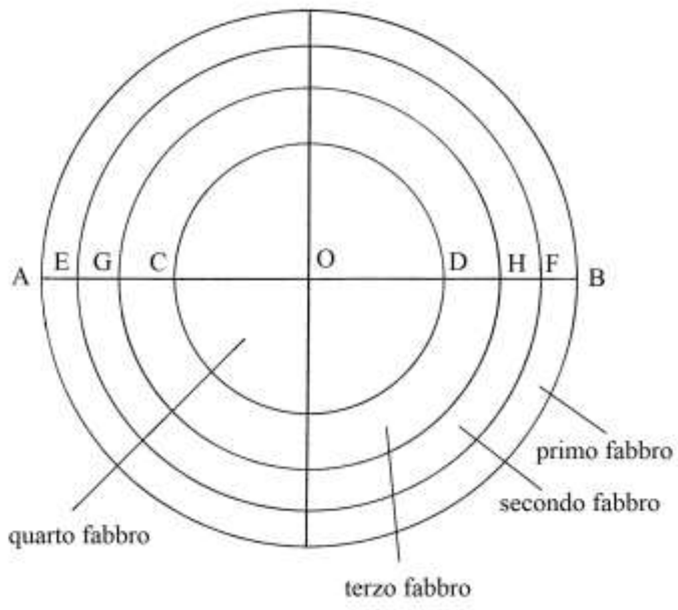
$EF = \sqrt{}[14/11 * (117 + 6/7)] = \sqrt{}150$ spanne.

A questo secondo fabbro compete consumare la corona circolare compresa fra il cerchio di diametro EF e il cerchio di diametro CD.

Il primo fabbro deve consumare l'area contenuta nella corona circolare esterna.

Ragione 88

Il terzo e ultimo problema relativo alle ruote per molare richiede la divisione del disco fra *quattro* fabbri. Il diametro della ruota è sempre di 15 spanne.



La soluzione impiegata è basata sul diametro. Moltiplicare la lunghezza di AB per sé stessa:

15 * 15 = 225 e dividere per 4:

225/4 = (56 + ¼).

Il passo successivo è l'estrazione della radice quadrata:

√(56 + ¼) spanne: è il diametro del cerchio interno, CD, che resta al quarto fabbro.

Il diametro del secondo cerchio, GH, è dato da:

GH = √[2 * (56 + ¼)] = √(112 + ½) spanne.

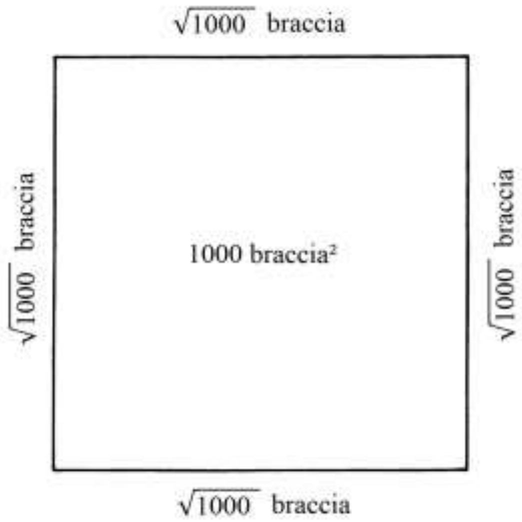
Il diametro del terzo cerchio, EF, è:

EF = √[3 * (56 + ¼)] = √(168 + ¾) spanne.

Lo schema qui sopra riprodotto mostra le aree destinate al lavoro dei quattro artigiani: i primi tre devono consumare le tre corone circolari e al quarto resta il cerchio che ha diametro CD.

<u>Ragione 89</u>

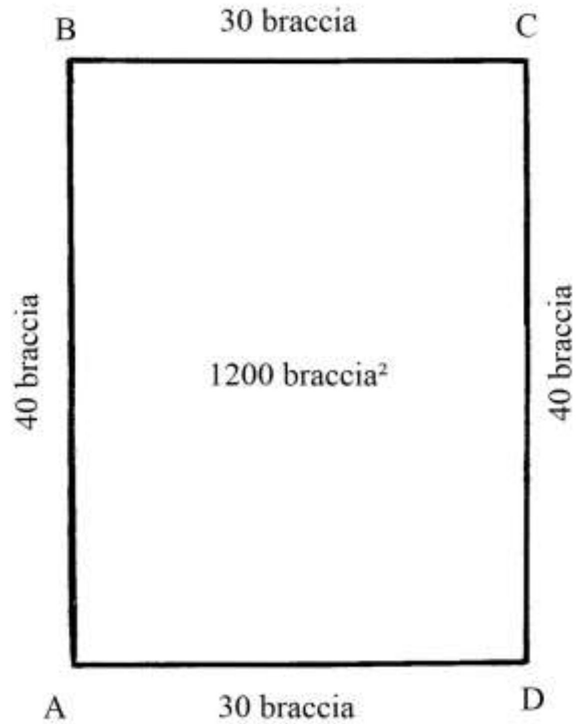
Un quadrato ha area uguale a 1000 braccia^2:



I suoi lati sono lunghi √1000 braccia.
L'Autore non semplifica la radice: infatti
$\sqrt{1000} = 10 * \sqrt{10}$.

Ragione 90

Un rettangolo ha la lunghezza maggiore della larghezza di 10 braccia e ha area di 1200 braccia^2.



Le lettere A, B, C e D sono assenti nell'originale.
Il problema chiede di ricavare la lunghezza e la larghezza.
L'Autore utilizza di nuovo le variabili "1/c" e "z".
La larghezza – AD – è l'incognita "1/c" e qui viene sostituita con il simbolo "x":

$AD = BC = x$.

Quindi: $AB = CD = (AD + 10) = x + 10$.

L'area del rettangolo è:

$A_{ABCD} = AB * AD = (x + 10) * x$.

L'area vale 1200 braccia^2. Quindi si ha:

$(x + 10) * x = 1220$

$x^2 + 10 * x – 1200 = 0$.

Le due radici dell'equazione di 2° grado sono -40 e +30. La seconda è quella corretta:

$AD = BC = 30$ braccia

$AB = CD = 30 + 10 = 40$ braccia.

- APPROFONDIMENTO -

La procedura impiegata dall'Autore merita un cenno.

Come accennato sopra, egli attribuisce alla lunghezza dei due lati corti (la "larghezza" del rettangolo), AD e BC, il incognito indicato con "1/c".

La lunghezza dei due lati più lunghi (le "lunghezze"), AB e CD, è:

$AB = AD + 10 = 1/c + 10$.

Ecco i passi successivi:

* moltiplicare lunghezza per larghezza [calcolare l'area del rettangolo]:
  $AB * AD = (1/c + 10) * 1/c = 1/(c^2) + 10/c = 1/z + 10/c$;
* eguagliare le due espressioni dell'area: $(1/z + 10/c) = 1200$;
* dividere per 2 la differenza di 10 braccia: $10/2 = 5$;
* moltiplicare per sé stesso: $5 * 5 = 25$;
* sommare al valore dell'area: $25 + 1200 = 1225$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{1225} = 35$;
* sottrarre 5: $35 – 5 = 30$ braccia, lunghezza di AD e di BC.

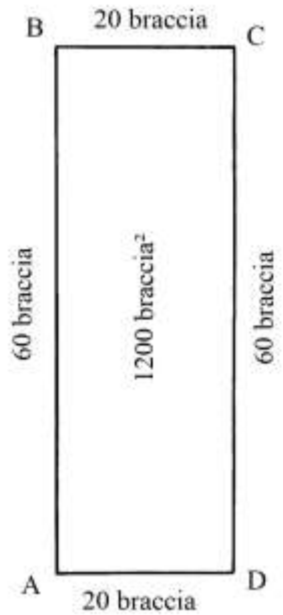
La procedura usata dall'Autore può essere così sintetizzata:

* $AB – AD = 10 = d$
* $AD = \sqrt{[1200 + (d/2)^2]} – d/2$.

- -

Ragione 91

In un rettangolo che ha area di 1200 braccia^2, la lunghezza è *tre* volte la larghezza: il problema chiede di ricavare le due dimensioni.



Anche in questo caso le lettere sono assenti nell'originale.
I lati AB e CD sono lunghi 3 volte i lati AD e BC:
Chiamando AD = x, si ha:

$AB = 3 * x.$

L'area del rettangolo è data da:

$A_{ABCD} = AD * AB = x * (3 * x) = 3 * x^2.$

Ma l'area è 1200 braccia^2, quindi:

$3 * x^2 = 1200$

$x^2 = 400$

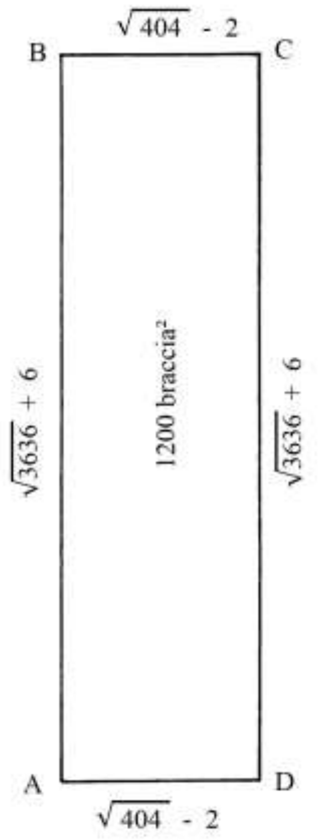
$x = \sqrt{400} = 20$ braccia.

I lati AD e BC sono lunghi 20 braccia e quelli AB e CD sono:

$AB = CD = 3 * AD = 3 * 20 = 60$ braccia.

Ragione 92

Il rettangolo oggetto di questa Ragione ha sempre area uguale a 1200 braccia^2.
I lati più lunghi sono *tre* volte quelli più corti, con l'aggiunta di 12 braccia:



dimensioni lineari in braccia

AD è l'incognita "x".
I lati AB e CD sono lunghi:

$AB = CD = 3 * AD + 12 = 3 * x + 12.$

L'area è:

$A_{ABCD} = AD * AB = x * (3 * x + 12) = 3 * x^2 + 12 x.$

Ma l'area è 1200 braccia^2 e quindi si ha:

$3 * x^2 + 12 * x = 1200$

$x^2 + 4 * x - 400 = 0$

Risolvendo questa equazione di 2° grado si ottiene:

$x = (\sqrt{404}) - 2$ braccia = AD = BC.

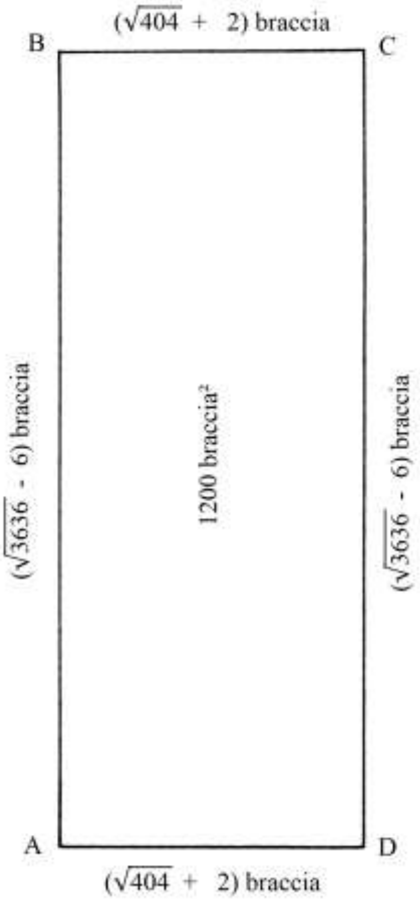
La lunghezza di AB e di CD è data da:

$AB = 3 * [(\sqrt{404}) - 2] = (\sqrt{3636} + 6)$ braccia.

Ragione 93

È l'ultimo problema relativo ai rettangoli di area uguale a 1200 braccia^2.
La lunghezza dei lati più lunghi è maggiore di quella dei lati corti secondo una relazione:

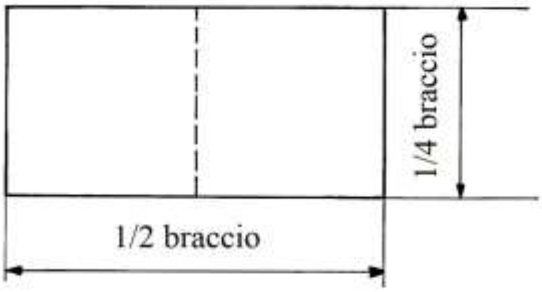
$AB = 3 * AD - 12.$



La lunghezza di AD è l'incognita: AD = x.
La lunghezza di AB è data da:
AB = 3 * x – 12.
L'area è:
$A_{ABCD} = AD * AB = x * (3 * x – 12) = 3 * x^2 – 12 * x$.
L'area vale 1200 braccia^2 e uguagliando si ha:
$3 * x^2 – 12 * x = 1200$
$3 * x^2 – 12 * x – 1200 = 0$
$x^2 – 4 * x – 400 = 0$
Risolvendo l'equazione di 2° grado si ha:
x = (√404 + 2) braccia = AD = BC.
La lunghezza di AB e di CD è:
AB = 3 * (√404 + 2) – 12 = 6 + √(9 * 404) – 12 = √3636 – 6 braccia.

Ragione 94

Una sala ha dimensioni nel seguente rapporto:
lunghezza = 2 * larghezza – 10.
Essa viene pavimentata con 6000 mattoni che hanno dimensioni ½ braccio * ¼ braccio, cioè a forma di doppio quadrato o *bislungo*:



La procedura usata dall'Autore è un po' complessa: qui viene semplificata rispettando i dati del problema.

La superficie coperta dai 6000 mattoni è:

$A_{\text{PAVIMENTO}} = 6000 + (1/2 * ¼) = 750$ braccia^2.

La larghezza della sala, ℓ, è l'incognita: $\ell = x$.

La lunghezza L è data da:

$L = 2 * \ell - 10 = 2 * x – 10$.

L'area è data da:

$A_{\text{PAVIMENTO}} = L * \ell = (2 * x – 10) * x = 2 * x^2 – 10 * x$.

Ma l'area è 750 braccia^2, per uguagliando le due espressioni si ottiene:

$2 * x^2 – 10 * x = 750$

$2 * x^2 – 10 * x – 750 = 0$.

La radice dell'equazione è:

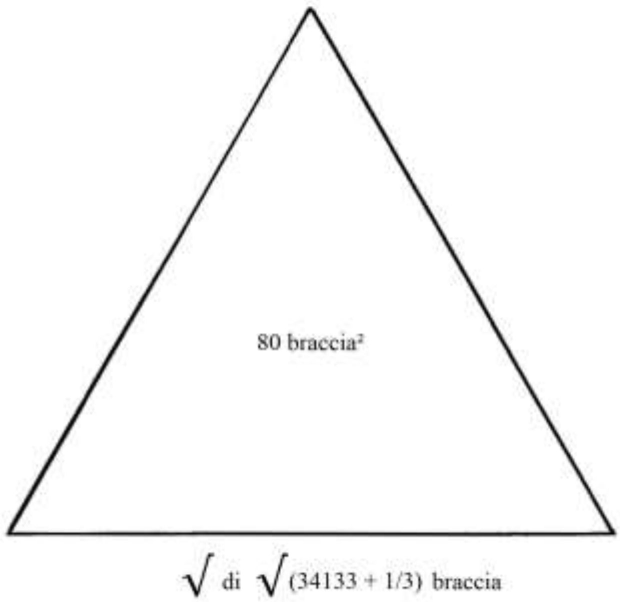
$x = [\sqrt{(381 + ¼)} + 5/2]$ braccia, larghezza della sala.

La lunghezza è:

$L = 2 * \ell – 10 = 2 * [\sqrt{(381 + ¼)} + 5/2] – 10 = \sqrt{1525} – 5$ braccia.

<u>Ragione 95</u>

Un triangolo equilatero ha area uguale a 80 braccia^2: il problema chiede di calcolare la lunghezza dei lati.



La procedura impiegata applica la formula di Erone per l'area di un triangolo.

La lunghezza di un lato è l'incognita "x".

I passi della soluzione, in trascrizione moderna, sono i seguenti:

* sommare le lunghezze dei tre lati: $x + x + x = 3 * x$ [perimetro];
* dividere per 2: $3 * x/2$ [semiperimetro];
* sottrarre la lunghezza del primo lato dal semiperimetro: $3/2 * x – x = ½ * x$;
* sottrarre la lunghezza del secondo lato dal semiperimetro: $3/2 * x – x = ½ * x$;
* sottrarre la lunghezza del terzo lato dal semiperimetro: $3/2 * x – x = ½ * x$;
* moltiplicare gli ultimi tre fattori: $(½ * x) * (½ * x) * (½ * x) = x^3/8$;
* moltiplicare per il semiperimetro: $(x^3/8) * (3 * x/2) = 3/16 * x^4$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{(3/16 * x^4)}$ = Area = 80 braccia^2;
* elevare al quadrato: $3/16 * x^4 = 80^2$;
* $x^4 = 16/3 * 80^2 = 16/3 * 6400 = (34133 + 1/3)$;
* estrarre la *radice quarta* (o la radice della radice quadrata):

$\sqrt{\sqrt{(34133 + 1/3)}}$ braccia, lunghezza dei lati.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Alla stessa soluzione è possibile giungere con un risultato che, come sii vede al termine, fornisce un numero più gestibile di quello offerto dall'Autore.

L'area del triangolo ABC è:

A_{ABC} = lato * altezza/2 = AC * BH/2.

L'altezza BH ha lunghezza legata a quella dei lati:

$BH = (\sqrt{3})/2 * AC$.

L'area è data da:

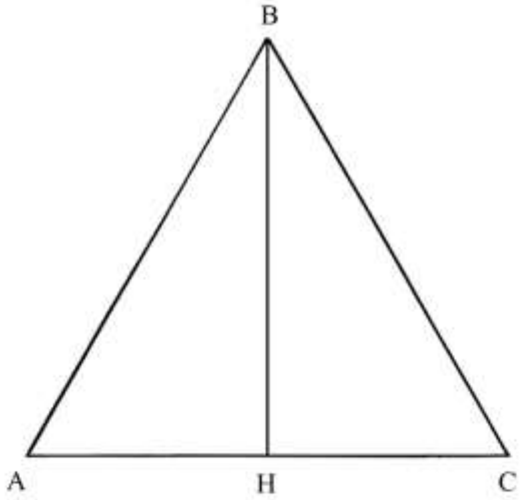
$A_{ABC} = AC * [(\sqrt{3})/2 * AC] = AC^2 * (\sqrt{3})/2$ da cui

$AC^2 = A_{ABC} * 2/\sqrt{3} = 80 * 2/\sqrt{3}$ e

$AC = \sqrt{(80 * 2/\sqrt{3})} = \sqrt{(160/\sqrt{3})}$ braccia.

La cifra fornita dall'Autore, $\sqrt{\sqrt{(34133 + 1/3)}}$, è errata per eccesso: AC ≈ 13,59 braccia.

Ad essa corrisponde un'area uguale a 160 braccia^2, il doppio di quella del triangolo dato: la corretta lunghezza del lato del triangolo è ≈ 9,611 braccia.



Ragione 96

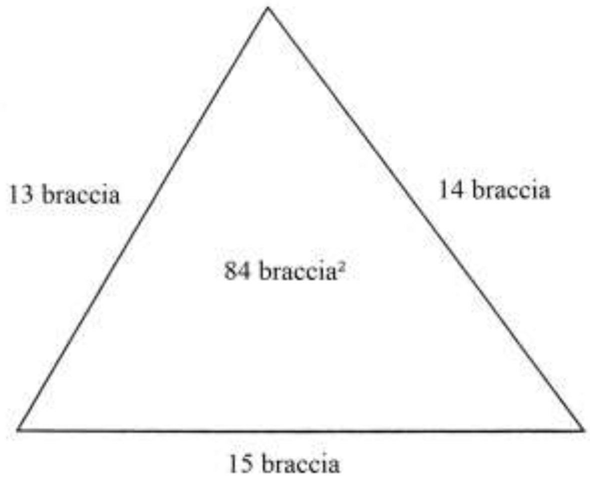
Il problema è strettamente collegato al precedente perché utilizza lo stesso triangolo equilatero.

In questa occasione è domandata la lunghezza dell'altezza [BH] della precedente figura.

Sembra che l'Autore suggerisca di ricavare la lunghezza di [BH] usando due dati: l'area e la lunghezza del lato. Non fornisce alcuna procedura e non offre alcun risultato numerico.

Ragione 97

Come vedremo al termine, la soluzione di questo problema riporta al classico triangolo di Erone con lati lunghi secondo la terna 13-14-15, già incontrato nelle precedenti Ragioni 9, 11, 12, 13 e 14.



L'area del triangolo è 84 braccia^2.

Le lunghezze dei lati sono legate da una progressione aritmetica di ragione 1. Se il lato di lunghezza intermedia assume il valore della variabile "x", quello più corto è lungo "x – 1" e quello più lungo è "x + 1".

La procedura usata dall'Anonimo Fiorentino è un po' complessa, ma è di nuovo basata sull'applicazione della formula di Erone. Ecco i suoi passi:

*	sommare le lunghezze dei tre lati:	$(x - 1) + x + (x + 1) = 3 * x$ [perimetro];
a)	dividere per 2:	$3 * x/2$ [semiperimetro];
b)	sottrarre dal semiperimetro la lunghezza del primo lato:	$3/2 * x - (x - 1) = x/2 + 1$;
c)	sottrarre dal semiperimetro la lunghezza del secondo lato:	$3/2 * x - x = x/2$;
d)	sottrarre dal semiperimetro la lunghezza del terzo lato:	$3/2 * x - (x + 1) = x/2 - 1$;
*	moltiplicare *a* per *c*:	$a * c = (3 * x/2) * (x/2) = 3/4 * x^2$;
*	moltiplicare *b* per *d*:	$b * d = (x/2 + 1) * (x/2 - 1) = x^2/4 - 1$;

* moltiplicare (a * c) per (b * d):

$$a*c * c * d = (3/4 * x^2) * (x^2/4 - 1) = 3/16 * x^4 - 3/4 * x^2;$$

* estrarre la radice quadrata:

$$\sqrt{(3/16 * x^4 - 3/4 * x^2)} = 84 \text{ (braccia}^2\text{, area del triangolo);}$$

* elevare al quadrato i due membri della precedente uguaglianza:

$$3/16 * x^4 - 3/4 * x^2 = 84^2$$
$$3/16 * x^4 - 3/4 * x^2 = 7056$$
$$3/16 * x^4 = 7056* 16/3 + 3/4 * x^2$$
$$3/16 * x^4 = 37632 + 4 * x^2;$$

* dividere entrambi i membri per 3/16:

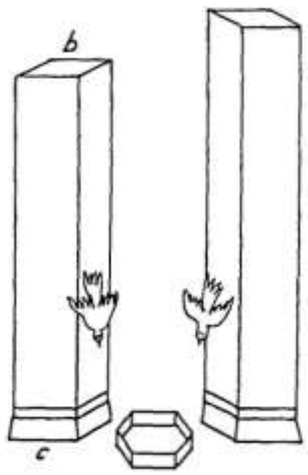
$$x^4 = 7056 * 16/3 + 4 * x^2;$$

*	dividere per 2 il coefficiente di “$4 * x^2$:	$4/2 = 2$;
*	moltiplicare per sé stesso:	$2 * 2 = 4$;
*	addizionare a 37 632:	$4 + 37632 = 37636$;
*	estrarre la radice quadrata:	$\sqrt{37636} = 194$;
*	aggiungere la parte restante del coefficiente di “$4 * x^2$”:	$194 + 2 = 196$;
*	estrarre la radice quadrata:	$\sqrt{196} = 14$ braccia, lunghezza del secondo lato.

Ne consegue che il primo lato è lungo $(14 - 1) = 13$ braccia e il secondo è $(14 + 1) = 15$ braccia.

Ragione 98

Con questa Ragione inizia una serie di problemi che hanno per oggetto le *torri*.



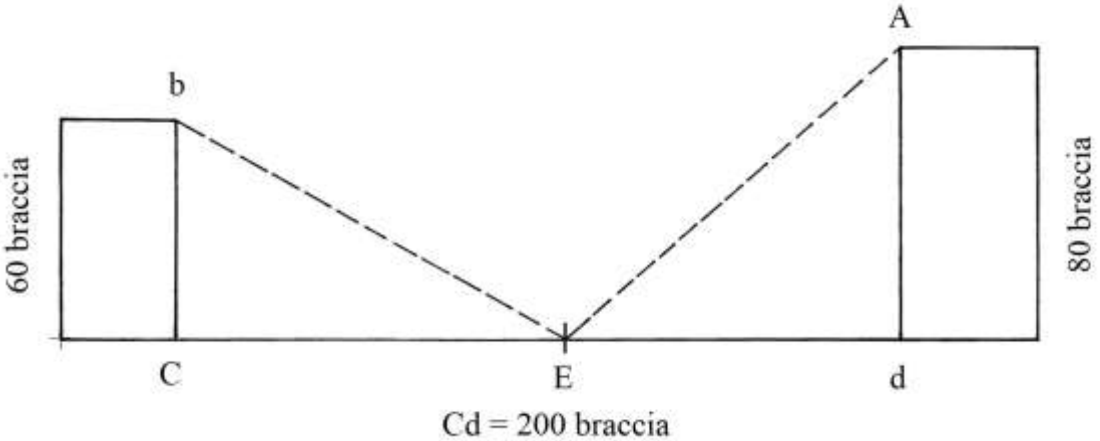
In una pianura sono presenti due torri alte 60 e 80 braccia e fra loro distanti 200 braccia.

Fra le due torri c’è una fonte: due colombi volano ciascuno da una due torri e giungono contemporaneamente alla fonte per abbeverarsi.

Il problema chiede di calcolare la distanza della fonte dai piedi delle due torri.

Affinché i due colombi giungano insieme alla fonte è necessario che i loro percorsi abbiano uguale lunghezza:

bE = AE.



Le lettere *A*, *E* e *d* sono citate nel testo del Trattato, ma assenti nel disegno originale.

La procedura usata dall'Autore contiene i seguenti passi:

* moltiplicare per sé stessa la distanza fra le torri: 200 * 200 = 40000;
* moltiplicare per sé stessa l'altezza *Ad* della torre di destra: 80 * 80 = 6400;
* sommare i due prodotti: 40000 + 6400 = 46400;
* moltiplicare per sé stessa l'altezza della torre di sinistra: 60 * 60 = 3600;
* sottrarre l'ultimo prodotto dalla somma dei primi due: 46400 – 3600 = 42800;
* dividere per il doppio della distanza fra le due torri: 42800/(200 * 2) = 107 braccia, distanza della fonte E dal piede C della torre di sinistra;
* sottrarre dalla distanza fra le due torri: 200 – 107 = 93 braccia, lunghezza di *Ed*.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Una seconda soluzione può essere così ottenuta. CbE e EAd sono due triangoli rettangoli che hanno in comune le lunghezze delle ipotenuse:

bE = EA.

Attribuiamo a CE il valore dell'incognita "x".

Per il teorema di Pitagora si ha:

$bE^2 = bC^2 + CE^2$

$bE^2 = 60^2 + x^2$

$EA^2 = Ad^2 + Ed^2$

$EA^2 = 80^2 + (200 – x)^2$

Ma $bE^2 = EA^2$ e

$60^2 + x^2 = 80^2 + (200 – x)^2$

$3600 + x^2 = 6400 + 40000 – 400 * x + x^2$

$3600 = 46400 – 400 * x$

$400 * x = 46400 – 3600$

x = (46400 – 3600)/400 = 42800/400 = 107 braccia, lunghezza di EC.

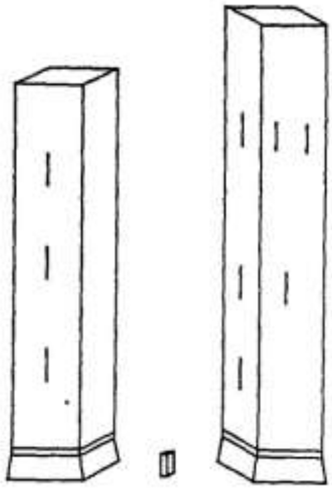
Ragione 99

In una pianura sono erette due torri: una è alta 20 braccia più della seconda e la distanza fra le due torri è uguale a 200 braccia.

Nello spazio compreso fra le due torri è posizionato un *termine* che dista 107 braccia dalla torre più bassa e 93 braccia da quella più alta.

L'Autore fa riferimento al problema risolto nella precedente Ragione e alla figura che lo accompagna.

Lo schema relativo a questa nuova Ragione si discosta di poco dal precedente:



L'altezza della torre di sinistra è presa come l'incognita "x": nel testo essa è espressa con "1/c".

Prima di procedere, l'Autore richiama dalla precedente Ragione il quadrato della lunghezza delle due ipotenuse, bE e EA:

$bE^2 = bC^2 + CE^2 = 60^2 + 107^2 = 3600 + 11449 = 15049$. Questo calcolo non era stato compiuto nella precedente Ragione.

Nel triangolo rettangolo bCE l'altezza bC è l'incognita:

$bC^2 = bE^2 – CE^2 = 15049 – 107^2 = 15049 – 11449 = 3600$ e

$bC = \sqrt{3600} = 60$ braccia.

L'altezza della torre di destra è:

$Ad = bC + 20 = 60 + 20 = 80$ braccia.

La procedura usata dall'Autore è un po' contorta, ma porta allo stesso risultato.

Ragione 100

Le solite due torri hanno altezza totale uguale a 140 braccia e distano fra loro 200 braccia.

Nella piana, fra le due torri è il consueto *termine* che dista 93 braccia dalla torre più alta e 107 da quella più bassa.

Il problema chiede l'altezza delle due torri.

È evidente che questa Ragione sfrutta i dati delle Ragioni 98 e 99.

L'Autore richiama il dato del quadrato delle lunghezze delle ipotenuse bE e EA della seconda figura della Ragione 98: $bE^2 = EA^2 = 15049$.

L'altezza bC è data da:

$bC^2 = bE^2 – CE^2 = 15049 – 107^2 = 15049 – 11449 = 3600$ e

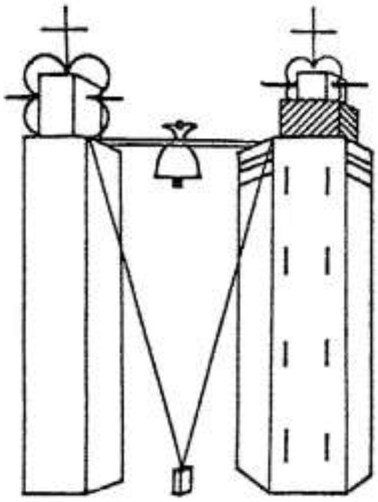
$bC = \sqrt{3600}$ braccia.

L'altezza della seconda torre è:

$Ad = 140 – bC = 140 – 60 = 80$ braccia.

Ragione 101

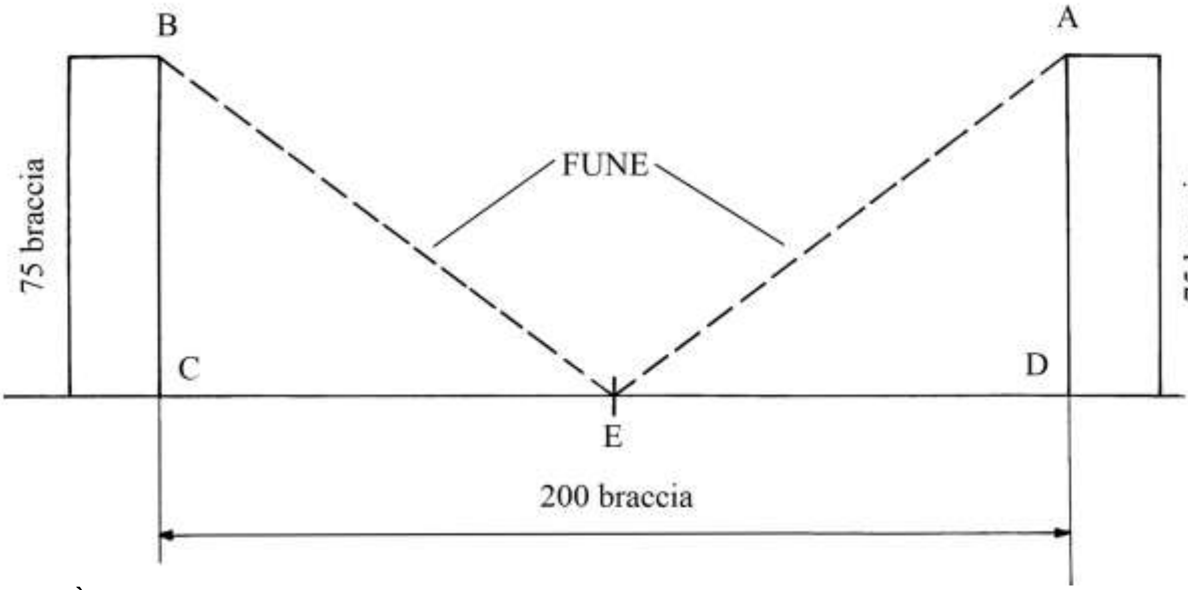
In una pianura sono costruite due torri di *uguale altezza* e distanziate di 200 braccia:



Sul terreno, fra le due torri è collocato un *termine*.

I capi di una fune sono fissati alle cime delle due torri e essa passa per il termine: la sua lunghezza è 100 braccia più l'altezza complessiva delle due torri.

Il problema chiede di calcolare l'altezza delle torri e la lunghezza di ciascun tratto della fune.



È implicito che il termine sia posizionato a uguale distanza dalle due torri:

CE = ED = 100 braccia.

Ne consegue anche l'uguaglianza BE = AE.

Fissiamo BC = AD = x.

La fune BEA è lunga;

BEA = BC + AD + 100 = x + x + 100 = 2 * x + 100 = 2 * BE da cui:

BE = (2 * x + 100)/2 = (x + 50) e

$BE^2 = (x + 50)^2$.

BCE è un triangolo rettangolo e la lunghezza della sua ipotenusa BE è data da:

$BE^2 = BC^2 + CE^2 = x^2 + 100^2$.

Uguagliamo le due espressioni di BE^2:

$(x + 50)^2 = x^2 + 100^2$

$x^2 + 100 * x + 2500 = x^2 + 10000$

$100 * x = 7500$

$x = 7500/100 = 75$ braccia, altezza delle due torri.

La lunghezza della fune, BEA, è:

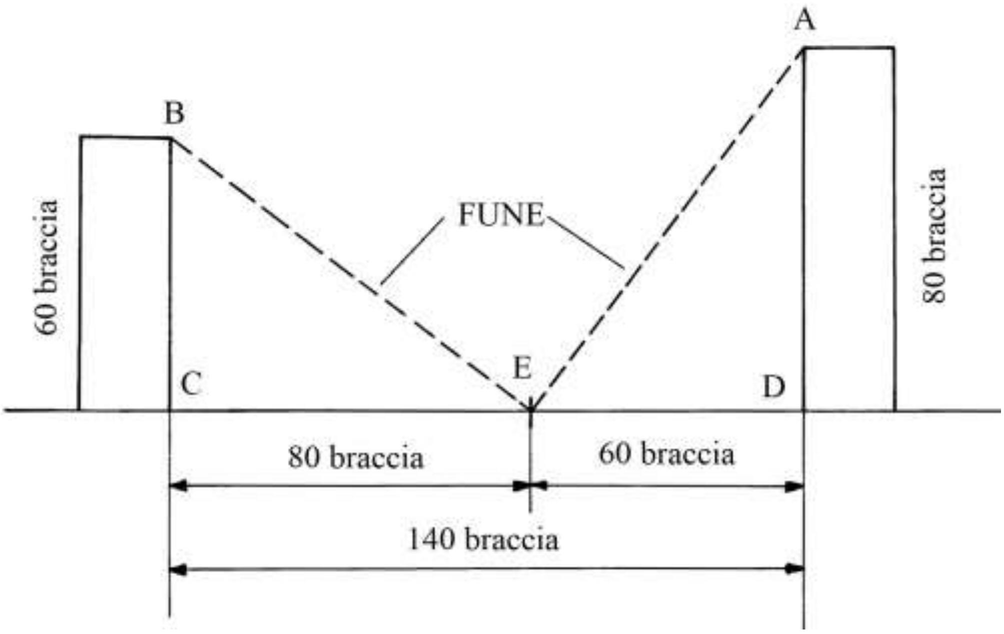
BEA = 75 + 75 + 100 = 250 braccia.

Ragione 102

Due torri sono alte 60 e 80 braccia: nella piana, fra di esse è collocato un termine che è collegato con una fune alle loro cime.

Le lunghezze dei due tratti di fune, dal termine alle cime, sono uguali: 100 braccia.

Il problema chiede di calcolare la distanza fra le torri e quelle del termine da esse.



BCE e ADE sono due triangoli rettangoli, che hanno le ipotenuse BE e EA di uguale lunghezza.

Consideriamo il triangolo BCE.

La lunghezza di CE è data da:

$CE^2 = BE^2 – BC^2 = 100^2 – 60^2 = 10000 – 3600 = 6400$ e

$CE = \sqrt{6400} = 80$ braccia.

Passiamo al triangolo ADE. La lunghezza del cateto ED è:

$ED^2 = AE^2 – AD^2 = 100^2 – 80^2 = 10000 – 6400 = 3600$ e

$ED = \sqrt{3600} = 60$ braccia.

La lunghezza di CD è:

CD = CE + ED = 80 + 60 = 140 braccia.

- APPROFONDIMENTO -

I lati dei triangoli rettangoli BCE e ADE hanno uguali dimensioni:

* BC = ED = 60 braccia;
* CE = AD = 80 braccia;
* BE = EA = 100 braccia.

I lati dei due triangoli hanno lunghezze che formano una terna derivata da quella primitiva 3-4-5.

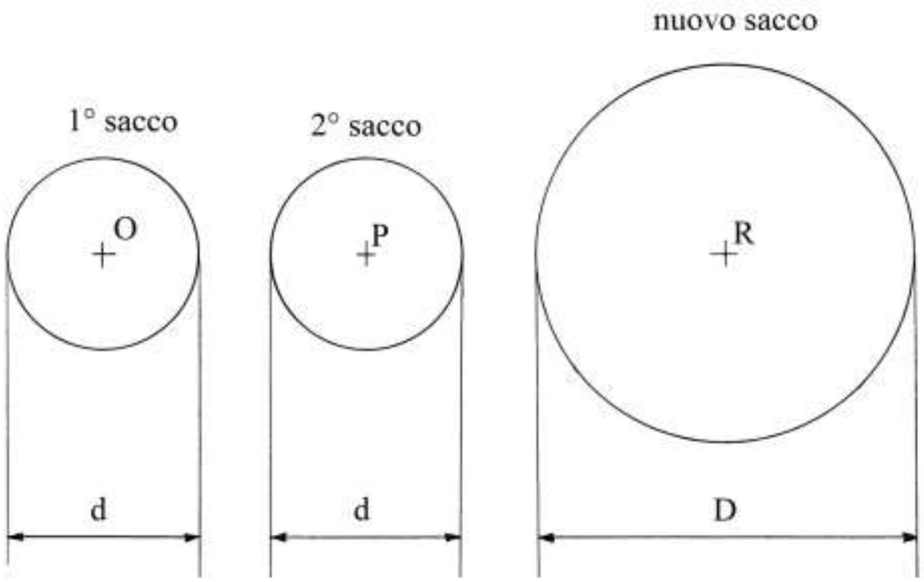
- -

Ragione 103

Un sacco contiene 3 staia e un altro ha lo stesso volume: entrambi hanno uguale altezza.

I due sacchi sono svuotati e il loro contenuto viene trasferito in un terzo sacco, sempre della stessa altezza.

Il problema chiede di calcolare il volume del terzo sacco.



Dato che l'altezza dei tre sacchi è identica possiamo trascurare il calcolo dei volumi, ricordando che essi sono proporzionali alle aree delle loro basi.

Le superfici laterali dei primi due sacchi sono unite per formare il nuovo sacco.

I due sacchi originari hanno diametro *d* e circonferenza *c* lunga:

$c = \pi * d \approx 22/7 * d.$

Le due superfici unite generano una circonferenza, C, che è lunga:

$C = 22/7 * d + 22/7 * d = 44/7 * d.$

La circonferenza del nuovo sacco ha diametro D la cui lunghezza è:

$C = 22/7 * D.$

Ma essa è lunga (22/7 * d): possiamo eguagliare le due espressioni:

$44/7 * d = 22/7 * D$ da cui

$D = 44/7 * d * 7/22 = 2 * d.$

L'area della base di uno dei due sacchi originari è:

$A_{1° SACCO} = \pi * (d/2)^2 = 22/7 * d^2/4 = 11/14 * d^2.$

L'area della base del nuovo sacco è:

$A_{NUOVO} = 22/7 * (D/2)^2 = 22/7 * d^2.$

Fra l'area della base del nuovo sacco e quella di un sacco inziale vi è una proporzione:

$A_{NUOVO}/A_{1° SACCO} = (22/7 * d^2)/(11/14 * d^2) = 4.$

Fra i volumi intercorre una proporzione che è legata all'area delle basi, poiché l'altezza è identica:

$V_{NUOVO} : V_{1° SACCO} = A_{NUOVO} : A_{1° SACCO}$

$V_{NUOVO} : 3 = 4 : 1$

$V_{NUOVO} = 4 * 3/1 = 12$ staia.

Ragione 104

Un sacco ha volume di 24 staia: esso viene smontato e ne sono ricavati due di uguali dimensioni e volumi.

Il problema chiede di calcolare il volume dei due nuovi sacchi: si tratta dell'inverso del precedente problema.

Il primo sacco ha circonferenza di base C lunga:

$C = 22/7 * D$, dove D è il diametro.

I due nuovi sacchi hanno cerchi di base con circonferenze *c* lunghe la metà di *C*:

$c_1 = c_2 = C/2 = (22/7 * D)/2 = 11/14 * D$.

I diametri dei due nuovi cerchi, $d_1 = d_2$, sono lunghi:

$d_1 = c_1/(22/7) = 22/14 * D/(22/7) = D/2$.

L'area delle basi dei due nuovi sacchi è proporzionale a $(d_1)^2$ e cioè a $(D/2)^2$.

Vale la seguente proporzione:

$V_{NUOVO} : V_{INIZIALE} = (D/2)^2 : D^2$

$V_{NUOVO} = : 24 = 1 : 4$

$V_{NUOVO} = 24 * ¼ = 6$ staia.

I due nuovi sacchi hanno volume che è solo *un quarto* del volume del sacco originario.

Ragione 105

Due sacchi hanno uguale altezza e volumi di 8 e 18 staia.

Essi sono smontati e con l'unione delle loro superfici laterali è ricavato un nuovo sacco.

Il problema chiede il volume del nuovo sacco.

La procedura impiegata dall'Autore contiene i seguenti passi:

* moltiplicare i due volumi: $8 * 18 = 144$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{144} = 12$;
* moltiplicare per 2: $12 * 2 = 24$;
* sommare i due volumi: $8 + 18 = 26$;
* aggiungere a 24: $26 + 24 = 50$ staia, volume del nuovo sacco.

Ragione 106

Due sacchi hanno uguale altezza: uno ha volume che è maggiore di 4 staia del volume dell'altro.

I due sacchi sono stati disfatti e rimontati per formare un nuovo sacco che ha volume uguale a 30 staia.

I tre sacchi devono avere la stessa altezza.

Il problema chiede di volume dei primi due sacchi: l'Autore lo risolve con una procedura che ricorre all'algebra.

Il primo sacco ha volume rappresentato da "x" e il secondo da "x + 4".

I passi della procedura sono i seguenti:

* moltiplicare i due volumi: $x * (x + 4) = x^2 + 4 * x$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{(x^2 + 4 * x)}$;
* moltiplicare per 2: $2 * \sqrt{(x^2 + 4 * x)} = \sqrt{(4 * x^2 + 16 * x)}$;
* sommare i due volumi dei sacchi originari: $x + (x + 4) = 2 * x + 4$;
* aggiungere a $\sqrt{(4 * x^2 + 16 * x)}$: $(2 * x + 4) + \sqrt{(4 * x^2 + 16 * x)}$.

L'ultima espressione è uguale a 30 [staia]:

$(2 * x + 4) + \sqrt{(4 * x^2 + 16 * x)} = 30$.

Sottrarre da entrambi i membri (2 * x + 4):

$(2 * x + 4) + \sqrt{(4 * x^2 + 16 * x)} – (2 * x + 4) = 30 – (2 * x + 4)$

$\sqrt{(4 * x^2 + 16 * x)} = 26 – 2*x$.

Elevare al quadrato i due membri dell'ultima uguaglianza:

$(4 * x^2 + 16 * x) = 676 – 104 * x + 4 * x^2$

120 * x = 676

x = 676/120 = (5 + 19/30) staia, volume del primo sacco.

Il secondo sacco ha volume:

(5 + 19/30) + 4 = (9 + 19/30) staia.

Ragione 107

Tre sacchi hanno uguale altezza e identico volume: 4 staia.

Essi sono scuciti per formare un unico sacco.

I tre sacchi hanno basi circolari con diametro *d* lungo 3 [braccia].

Il problema chiede il volume del nuovo sacco.

La circonferenza *c* di uno dei sacchi originari è lunga:

c = 22/7 * d = 22/7 * 3 = 66/7 braccia.

In totale, le tre circonferenze sono lunghe:

C = 3 * c = 3 * 22/7 * d.

La circonferenza del nuovo sacco, *C*, è lunga 3 * 22/7 * d. Essa è generata da un diametro, *D*, che è lungo:

D = C * 7/22 = (3 * 22/7 * d) * (7/22) = 3 * d.

Il volume del nuovo sacco è proporzionale al quadrato della lunghezza del suo diametro:

$V_{NUOVO} : V_{PRIMO} = D^2 : d^2$

$V_{NUOVO} = V_{PRIMO} * D^2/d^2 = 4 * (9 * d^2)/d^2\ 4 * 9 = 36$ staia.

Ragione 108

Sono dati 4 sacchi di uguali dimensioni: ciascuno di essi ha volume di 6 staia.

Essi sono smontati e con i materiali ricavati è prodotto un nuovo sacco che ha la stessa altezza.

Per le considerazioni svolte nella soluzione della precedente Ragione, il diametro del nuovo sacco è 4 volte più lungo di quello di ciascuno dei sacchi originari.

L'area della base del nuovo sacco è 4^2 volte più grande di quella degli originari; pertanto il volume del nuovo sacco è 16 volte quella di un sacco originario: 6 * 16 = 96 staia.

Ragione 109

Quattro sacchi hanno volumi differenti:

* il primo: 4 staia;
* il secondo: 8 staia;
* il terzo: 9 staia;
* il quarto: 18 staia.

Come al solito, questi quattro sacchi sono disfatti per costruirne uno nuovo, il quinto: il problema domanda il suo volume.

La soluzione che l'Autore propone è la seguente:

* moltiplicare il volume del primo per quello del terzo: 4 * 9 = 36;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{36} = 6$;
* moltiplicare per 2: 6 * 2 = 12;

* sommare i volumi del primo e del terzo: 12 + 13 = 25;
* moltiplicare il volume del secondo per quello del quarto: 8 * 18 = 144;
* estrarre la radice quadrata: √144 = 12;
* moltiplicare per 2: 12 * 2 = 24;
* sommare i volumi del secondo e del quarto: 8 + 18 = 26;
* sommare gli ultimi due numeri: 24 + 26 = 50;
* moltiplicare i due volumi parziali: 25 * 50 = 1250;
* estrarre la radice quadrata: √1250;
* moltiplicare per 2: 2 * √1250 = √(4 * 1250) = √5000;
* sommare i due volumi parziali: 25 + 50 = 75;
* sommare con √5000: (75 + √5000) staia, volume del nuovo sacco.

Ragione 110

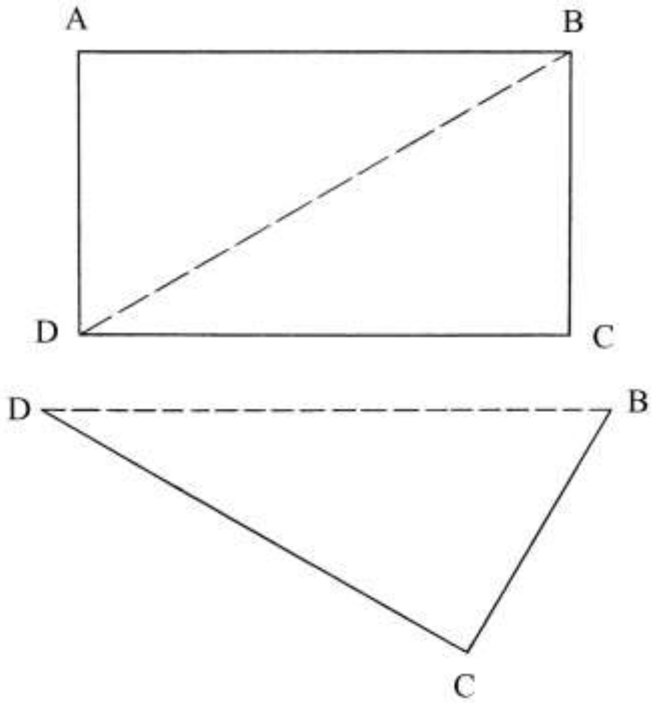
Questa Ragione non è accompagnata da alcun disegno. Il problema è, a dir poco, strano.

Qui di seguito è riprodotto il testo dalle pagine 106-107 della trascrizione fatta da Annalisa Simi:

[110] Io ò uno saccho che tien 20 staia, voglo che tengha 40, senza agiugnere o levare panno. Però che ancho si farebbe di tenuta di 40 staia e di più levando del panno; dicoti che quello che teneva 20 staia // taglandolo per 1/2, a traverso, non per lo longho, n'araj fatto due saccha che ciascuno terrà 10 staia, le quali 2 saccha, acozzandole insieme e faciendolo più largho che non era, verà apunto a ffare uno saccho, che sarà alto apunto la metà che 'l primo saccho, ma sirà largho 2 cotanto, el quale saccho terrà 40 staia come domandasti. E, sse della sua altezza faciessi 3 parti huguali e poi di quelle 3 faciessi uno saccho che

sarebbe alto el 1/3 del primo, verrà quello cotale saccho a ttenere 9 cotanto che uno di queglj 3 che ttu faciesti di quello, sicchè verrebbe a ttenere 60 staia. E, sse uno saccho che tenesse 20 staia si divjdesse la sua altezza in 4 parti huguali, verrebbe a ffare 4 saccha che ciascuna terrebbe 5 staia, le quali 4, riduciendo a uno saccho che fusse alto el 1/4 del primo, sarebbe 4 cotanto largho che 'l primo, quello terrebbe 80 staia, per le ragioni già decte e simile intendi de l'altro.

Si può ipotizzare che la prima ipotesi, quella del taglio in due parti, possa essere descritta come nello schema che segue:



DB è una diagonale della superfice laterale del sacco originario, distesa su un piano: il rettangolo viene tagliato lungo di essa per creare due triangoli rettangoli, ABD e DBC.

I due triangoli rettangoli sono poi piegati per formare due sacchi.

Un sacco realizzato con un triangolo rettangolo assumeva forma conica?

<u>Ragione 111</u>

Un panno è largo (1 + ½) braccia e con esso deve essere ricavato un sacco con due teli di tessuto che possa contenere 60 staia di *noci*, misurate *a colmo*.

Il problema chiede di calcolare la quantità di panno occorrente.

Qui occorre aprire una parentesi: l'Autore fornisce una nuova equivalenza per lo staio:

1 $braccio^3$ = 9 staia   invece del rapporto in precedenza più volte incontrato

1 $braccio^3$ = 10 staia.

Un Autore successivo all'Anonimo, ma di pochissimi decenni, l'abacista fiorentino Pier Maria Calandri (1457-1508) nella sua opera "*Compendium de Agrorum corporumque dimensione*" (il testo è in italiano), usa il rapporto

1 $braccio^3$ = 9 staia.

Forse, una spiegazione del nuovo rapporto usato dall'Anonimo può essere data da un fatto: le noci (e le castagne) hanno dimensioni maggiori dei chicchi di cereali e lasciano fra loro molto più spazio inutilizzato, ciò che può giustificare un minor volume del contenuto in staia di 1 $braccio^3$.

Questo è un esempio delle difficoltà che si incontrano quando occorre definire i valori delle unità di misura medievali e rinascimentali perfino in una Regione, come la Toscana, che ha conservato una grandissima quantità di documenti pubblici e privati.

Il volume di 60 staia di noci equivale a:

60/9 = (6 + 2/3) $braccia^3$.

Il sacco è ottenuto con due teli di panno:

(1 + ½) * 2 = 3 braccia, lunghezza della circonferenza del sacco.

Il diametro, *d*, è dato da:

s = c/π = c/(22/7) = 3 * 7/22 = 21/22 braccia.

L'area del cerchio di diametro *d* è:

$A_{\text{CERCHIO}} = 11/14 * d^2 = 11/14 * (21/22)^2 = 63/88$ braccia^2.

L'Autore si è complicati i calcoli perché determina l'area senza semplificare:

$A_{\text{CERCHIO}} = (21/22)^2 * 11/14 = 4851/6776$ braccia^2, che semplificando riportano alla più gestibile frazione 63/88 braccia.

Passa poi a calcolare l'altezza *h* del sacco conoscendo sia il volume che l'area del cerchio di base:

$h = V/A_{\text{CERCHIO}} = (6 + 2/3)/(63/88) = (6 + 2/3) * (88/63 = 20/3 * 88/63 =$
$= 1760/189 = (9 + 59/189)$ braccia.

Per il fondo occorre una lunghezza ℓ di panno che è data da:

$\ell = A_{\text{CERCHIO}}/\text{larghezza panno} = (63/88)/(1 + ½) = 21/44$ braccia.

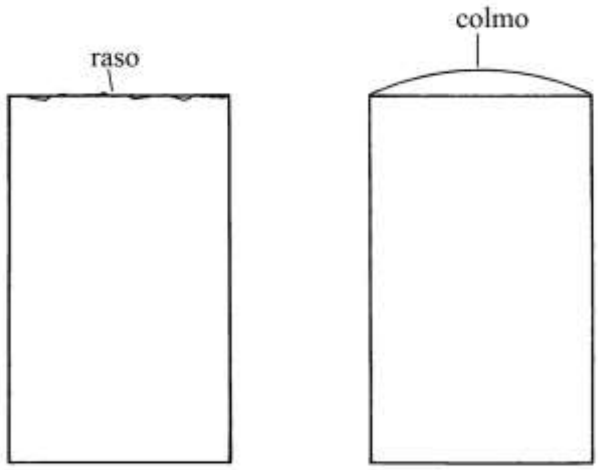
I dati che l'Autore fornisce nella parte finale sembrano poco comprensibili.

- APPROFONDIMENTO -

Nel testo del problema la misura del volume delle noci è fatta *a colmo*.

Nel Medioevo gli aridi erano venduti in recipienti fra i quali era quello che aveva volume di *uno staio*.

Il riempimento del recipiente poteva essere effettuato *a raso* oppure *a colmo*, come spiegano i due schemi:



Il recipiente veniva riempito con cereali, noci o castagne (e forse era usato pure per olive e nocciole): a raso era più adatto ai cereali mentre il colmo poteva essere usato per aridi di maggiori dimensioni. Il recipiente veniva riempito dall'alto fino a quando, prodotta una cupola, l'ulteriore aggiunta di altro prodotto ne provocava la caduta a terra.

Come spiegato a pagina 67, l'antica misura dello staio equivaleva a 0,01988 m^3 e cioè 19,88 dm^3 o litri.

Il peso del prodotto contenuto in uno staio variava a seconda del metodo di riempimento usato e del prodotto stipatovi: come ordine di grandezza si tratta della differenza di 1 kg a favore del riempimento a colmo.

Nel libro XIII del capitolo XIII della "*Nuova Cronica*" del mercante e scrittore fiorentino Giovanni Villani (1280-1348) è fatto cenno a un provvedimento preso dal Comune di Firenze nel 1342 per imporre l'uso della misura a raso per impedire le frodi.

Nel caso del grano, Villani stima che uno staio riempito a colmo contenesse fra 1,5 e 2 libbre in più.

Nelle "Tavole di Ragguaglio" pubblicate sul sito del "Museo Galileo"
https://brunelleschi.imss.fi.it/cimentosite/glossario_TAVOLE.html
la libbra equivaleva 339,542 grammi.

- -

Ragione 112

Con un panno largo 2 braccia deve essere realizzato un sacco con il volume di 80 staia. Inoltre, il sacco deve avere altezza maggiore della larghezza di 3 braccia.

Il problema chiede di calcolare l'altezza e il diametro del sacco e la misura del panno occorrente.

Il diametro, *d*, è la variabile "x".

L'altezza *h* è: $h = d + 3 = x + 3$.

L'area del cerchio di base è data da:

$A_{BASE} = 11/14 * d^2 = 11/14 * x^2$.

Il volume V del sacco è:

$V = A_{BASE} * h = (11/14 * x^2) * (x + 3) = 11/14 * x^3 + 33/14 * x^2 =$
$= 11/14 * x^3 + (2 + 5/14) * x^2$.

In questa occasione, l'Autore torna ad usare la prima equivalenza dello staio:

1 braccio^3 = 10 staia.

Il volume di 80 staia è contenuto in un sacco che ha volume di 8 braccia^3.

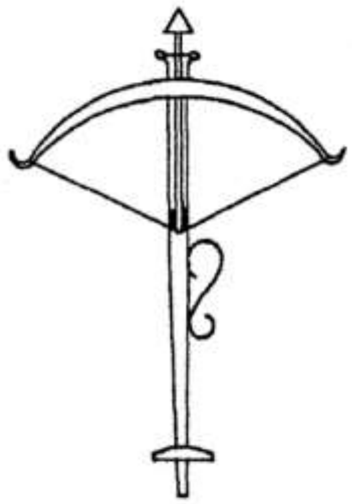
Vale la seguente uguaglianza:

$11/14 * x^3 + (2 + 5/14) * x^2 = 8$

Il testo termina con questa uguaglianza e non fornisce ulteriori informazioni.

Ragione 113

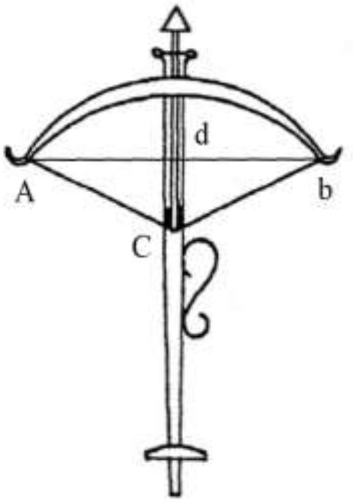
Una balestra ha una corda lunga 2 braccia e la freccia è 1 braccio.



Il problema chiede di calcolare la distanza fra gli estremi della corda quando la balestra è caricata.

Il testo cita quattro punti indicati con le lettere *A*, *b*, *C* e *d* che sono assenti nel disegno originale.

Lo schema che segue propone un'interpretazione del testo. È tracciato il segmento *Ab*:



AdbC è un triangolo isoscele: i lati AC e Cb hanno lunghezza di 1 braccio. L'altezza Cd è ½ braccio.

AdC e dbC sono due triangoli rettangoli di uguali dimensioni.

La lunghezza di Ad è:

$Ad^2 = AC^2 – dC^2 = 1^2 – (1/2)^2 = ¾$ e

$Ad = \sqrt{(3/4)}$ braccia.

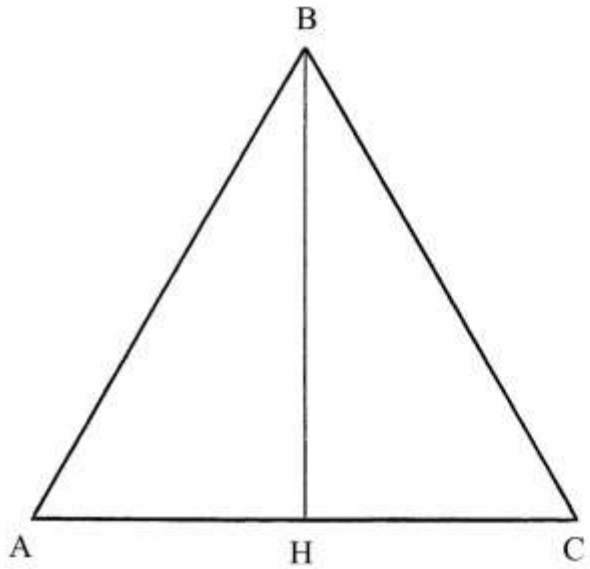
Il segmento Ab è lungo il doppio di Ad:

$Ab = 2 * Ad = 2 * \sqrt{(3/4)} = \sqrt{(4 * ¾)} = \sqrt{3}$.

<u>Ragione 115</u>

Con questa Ragione inizia una nuova serie di problemi sui poligoni.

Un triangolo equilatero ha altezza lunga 30 braccia: devono essere calcolate la lunghezza dei suoi lati e l'area.



La lunghezza del lato AB=BC=AC è l'incognita:

AB = x.

L'altezza BH divide ABC in due triangoli rettangoli di uguali dimensioni: ABH e BHC.
L'altezza BH è lunga:

$$BH^2 = AB^2 – AH^2 = x^2 – (x/2)^2 = ¾ * x^2.$$

Ma $BH^2 = 30^2 = 900$, da cui

$$¾ * x^2 = 900$$
$$x^2 = 4/3 * 900$$
$$x = √1200 \text{ braccia} = AB.$$

L'area è data da:

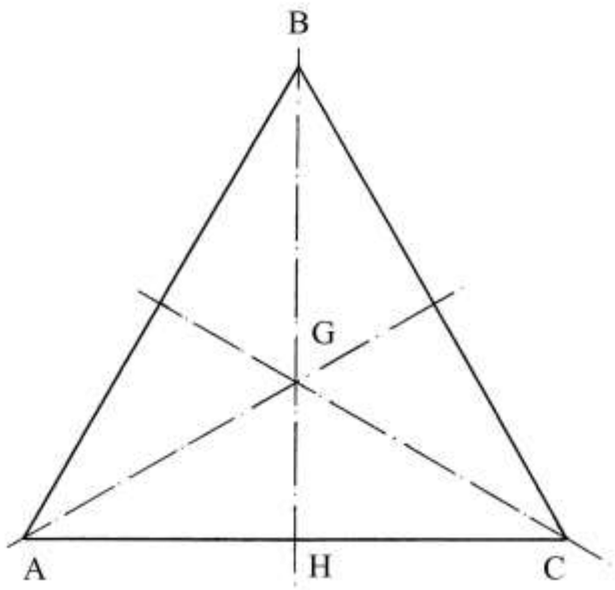
$$A_{ABC} = AC * BH/2 = √1200 * 30/2 = √1200 * 15 = √(1200 * 225) = √270000 =$$
$$= [300 * √3] \text{ braccia}^2, \text{ area di ABC.}$$

<u>Ragione 115</u>

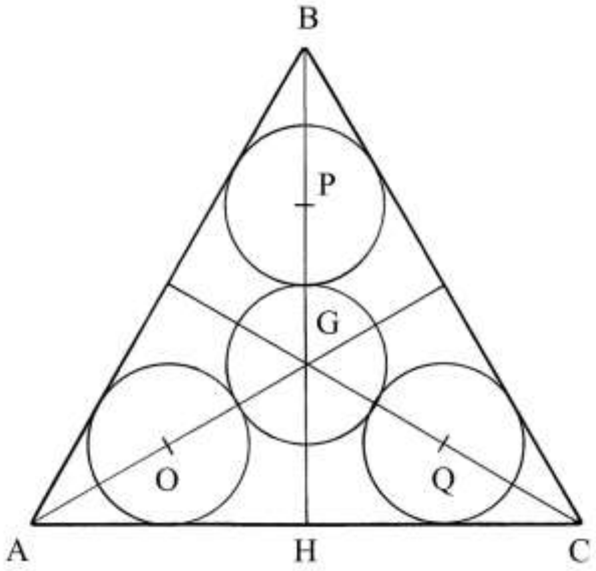
In un triangolo equilatero che ha lati lunghi 18 braccia sono inscritti quattro cerchi tangenti i più grandi possibili.

Il problema chiede il loro diametro.

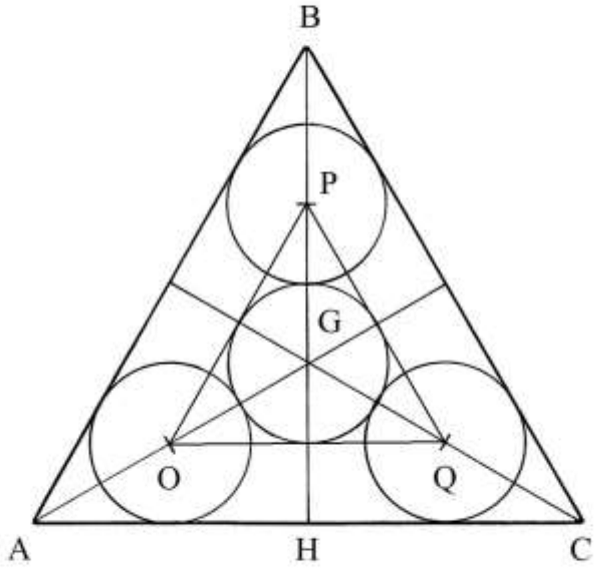
In un triangolo equilatero l'ortocentro (intersezione delle tre altezze), il baricentro (intersezione delle tre mediane), l'incentro (intersezione delle tre bisettrici degli angoli interni) coincidono nello stesso punto interno, G:



I punti G, O, P e Q sono i centri dei quattro cerchi:



Inoltre i punti O, P e Q sono i vertici di un secondo triangolo equilatero che con ABC condivide il punto G:



La procedura impiegata per ricavare il diametro prevede i seguenti passi:

* dividere per 2 la lunghezza dei lati: $18/2 = 9$;
* moltiplicare per sé stessa: $9 * 9 = 81$;
* dividere per 3: $81/3 = 27$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{27}$ braccia, lunghezza di ciascuna delle quattro circonferenze;
* dividere per (3 + 1/7): $(\sqrt{27})/(3 + 1/7) = (\sqrt{27}) * 7/22 = \sqrt{(2 + 355/484)}$ braccia, diametro dei quattro cerchi inscritti.

Ragione 116

Questo problema è accompagnato da uno schema che riproduce quello della precedente Ragione.

Deve essere ricavata la lunghezza del segmento BH che è un'altezza.

La procedura prevede i seguenti passi:

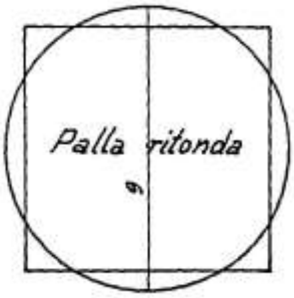
* moltiplicare per sé stessa la lunghezza del lato [AB]: 18 * 18 = 324;
* moltiplicare per sé stessa la lunghezza di [AH]: 9 * 9 = 81;
* sottrarre il secondo quadrato dal primo: 324 – 81 = 243;
* estrarre la radice quadrata: √243 braccia, lunghezza di BH.

Ragione 117

Una palla rotonda del diametro di 9 braccia, cioè una sfera, deve essere trasformata in un dado e cioè in un cubo.

Il materiale è cera o legname e quindi l'operazione è ritenuta fattibile.

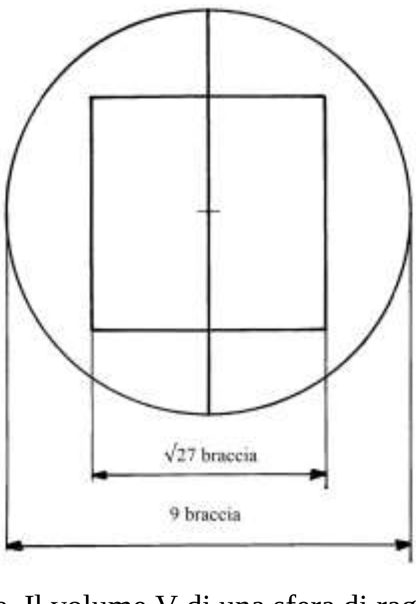
Il grafico che segue riproduce l'originale:



La soluzione presentata dall'Autore contiene i seguenti passi:

* moltiplicare la lunghezza del diametro per sé stessa: 9 * 9 = 81;
* dividere per 3: 81/3 = 27;
* estrarre la radice quadrata: √27 braccia, lunghezza dello spigolo del dado o cubo.

La soluzione sembra errata perché con la lunghezza di √27 ≈ 5,2 braccia si ottiene lo schema mostrato di seguito:

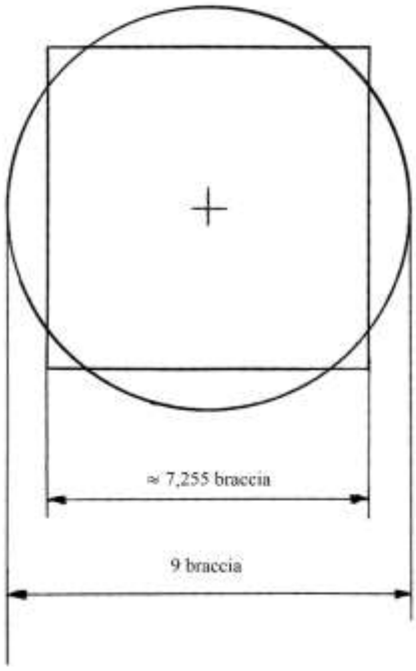


Verifichiamo la situazione. Il volume V di una sfera di raggio *r* è dato da:

$$V_{\text{SFERA}} = 4/3 * \pi * r^3 \approx 4/3 * 22/7 * (9/2)^3 = 2673/7 \approx 381{,}85 \text{ braccia}^3.$$

Il cubo deve avere lo stesso volume della sfera e il suo spigolo *s* è la radice cubica del volume della sfera:

$$s = \sqrt[3]{381,85} \approx 7,255 \text{ braccia}$$



<u>Ragione 118</u>

Il problema chiede di convertire un cubo in una sfera che abbia lo stesso volume.

Gli spigoli del cubo sono lunghi 8 braccia.
È chiesto il diametro della sfera.
La procedura impiegata è la seguente:

* moltiplicare per sé stessa la lunghezza di uno spigolo del cubo: 8 * 8 = 64;
* moltiplicare per 3: 64 * 3 = 192;
* estrarre la radice quadrata: √192 braccia, diametro della sfera.

La radice di 192 vale:

$\sqrt{192} \approx 13,856$ braccia.

Il risultato è del tutto errato e lo è anche la procedura usata.
L'Autore ha commesso lo stesso errore presente nella precedente Ragione.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Il volume di un cubo con spigoli lunghi *s* è:

$V_{CUBO} = s^3 = 8^3 = 512$ braccia^3.

Il volume della sfera di raggio *r* è uguale a quello del cubo:

$V_{SFERA} = 4/3 * 22/7 * r^3$

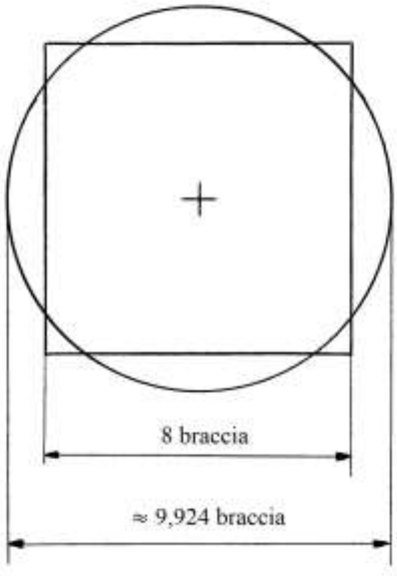
$4/3 * 22/7 * r^3 = 512$

$r^3 = 512 * 4/3 * 7/22 = 64 * 21/11$ da cui

$$r = \sqrt[3]{(122 + 2/11)} \approx 4{,}962 \text{ braccia}$$
.

Il diametro *d* è lungo:

$d = 2 * r = 2 * 4{,}962 * 2 = 9{,}924$ braccia.



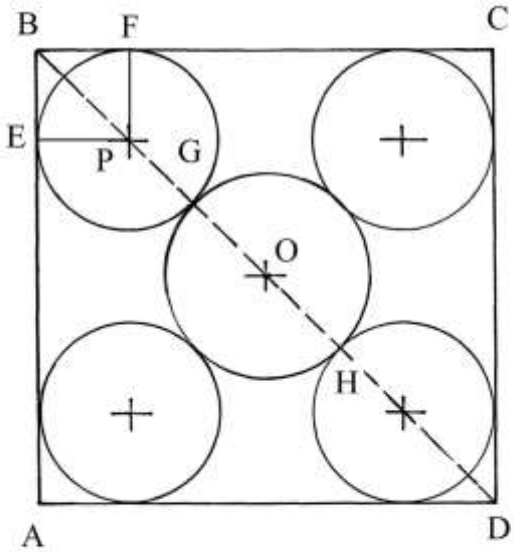
Ragione 119

Una corte ha forma quadrata i cui lati sono lunghi 5 braccia.

In ciascuno degli angoli va eretta una colonna rotonda con diametro di 2 braccia.

Nello spazio residuo, all'interno della corte deve essere costruito un pozzo il più grande possibile.

Il testo non è accompagnato da alcuno schema. Il grafico che segue propone un'interpretazione della pianta:



La soluzione proposta dall'Autore contiene i seguenti passi:

a) Moltiplicare per sé stessa la lunghezza di un lato della corte: $5 * 5 = 25$.
b) Moltiplicare per 2: $25 * 2 = 50$.
c) Estrarre la radice quadrata: $\sqrt{50}$ [è la lunghezza delle diagonali del quadrato, espressa in braccia].
d) Moltiplicare la lunghezza del diametro di una colonna per sé stessa: $2 * 2 = 4$.
e) Moltiplicare per 2: $4 * 2 = 8$.
f) Estrarre la radice quadrata: $\sqrt{8}$.
g) Sottrarre da $\sqrt{50}$: $\sqrt{50} - \sqrt{8} = \sqrt{18}$.
h) Sottrarre il diametro di una colonna: $(\sqrt{18} - 2)$ braccia, diametro del pozzo.

Sono necessari alcuni chiarimenti.

Al punto f) è ricavata la radice quadrata $\sqrt{8}$: EBFP è un quadrato di raggio PE e cioè lungo 1 braccio. La diagonale PB è lunga $\sqrt{2}$.

Il diametro GH ha lunghezza che è data da:

$GH = BD - BG - HD = BD - 2 * BG$.

A sua volta, BG è lungo:

$BG = BP + PG = \sqrt{2} + 1$.

Quindi:

$GH = \sqrt{50} - 2 * (\sqrt{2} + 1) = 5 * \sqrt{2} - 2 * \sqrt{2} - 2 = 3 * \sqrt{2} - 2 = \sqrt{(9 * 2)} - 2 = \sqrt{18} - 2$ braccia.

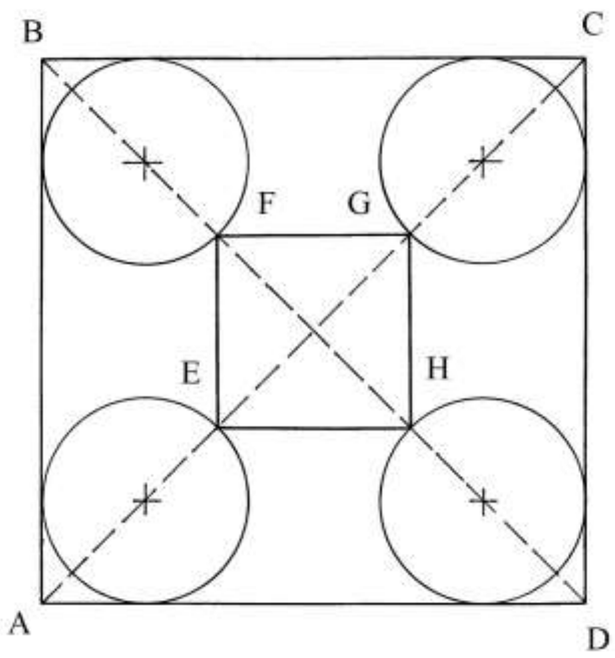
Al punto g) vi è la seguente espressione che è poi semplificata:

$\sqrt{50} - \sqrt{8} = 5 * \sqrt{2} - 2 * \sqrt{2} = 3 * \sqrt{2} = \sqrt{(9 * 2)} = \sqrt{18}$.

Ragione 120

Un quadrato ha lati lunghi 8 braccia e, al suo interno, sono collocati dei cerchi tangenti che hanno diametro di 3 braccia.

Nello spazio residuo deve essere inserito il più grande quadrato possibile.



La soluzione ricalca quella della precedente Ragione.

Eccone i passi:

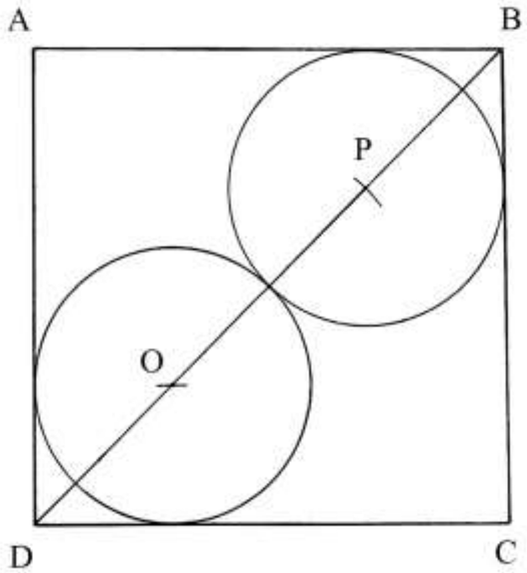
* moltiplicare la lunghezza del lato del quadrato esterno per sé stessa: 8 * 8 = 64;
* moltiplicare per 2: 64 * 2 = 128;
* estrarre la radice quadrata: √128 [braccia, lunghezza delle diagonali AC e BD);
* moltiplicare per sé stessa la lunghezza del diametro di un cerchio: 3 * 3 = 9;
* moltiplicare per 2: 9 * 2 = 18;
* estrarre la radice quadrata: √18;
* sottrarre da √128: √128 - √18 = [8 * √2 – 3 * √2 = 5 * √2 = √(25 * 2)] = √50;
* sottrarre il diametro di un cerchio: (√50 – 3) braccia, lunghezza dei lati del quadrato EFGH.

Ragione 121

In un quadrato con lati di lunghezza incognita sono inscritti due cerchi tangenti che hanno diametri lunghi 4 braccia.

Occorre calcolare la lunghezza dei lati del quadrato.

I centri dei due cerchi, O e P, giacciono su una delle diagonali del poligono, quella DB.

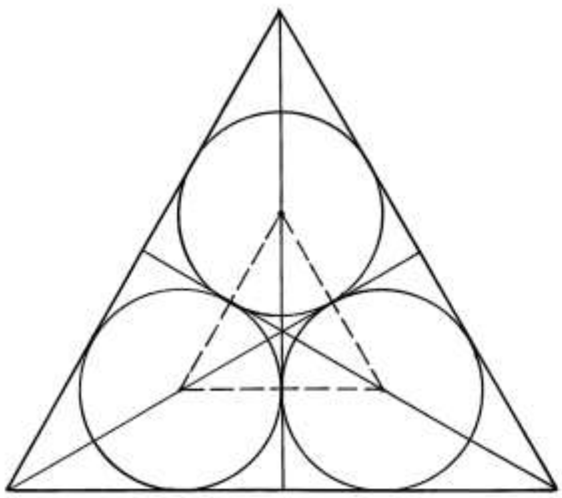


La procedura contiene i seguenti passi:

- * moltiplicare la lunghezza di un diametro per sé stessa: $4 * 4 = 16$;
- * moltiplicare per 2: $16 * 2 = 32$;
- * estrarre la radice quadrata: $\sqrt{32}$;
- * sommare al diametro dell'altro cerchio: $(4 + \sqrt{32})$;
- * moltiplicare per sé stesso: $(4 + \sqrt{32})^2 = (48 + \sqrt{2024})$;
- * dividere per 2: $(48 + \sqrt{2024})/2 = (24 + \sqrt{512}) \approx 24 + (22 + 7/11) \approx (46 + 7/11)$;
- * estrarre la radice quadrata: $\sqrt{(46 + 7/11)}$ braccia, lunghezza dei lati del quadrato.

Ragione 122

Un triangolo equilatero ha lati lunghi 30 braccia: vi si devono inscrivere *tre* cerchi di uguale diametro e fra loro tangenti.



Il problema chiede la lunghezza della circonferenza c dei tre cerchi.

La soluzione offerta dall'Autore è empirica:

- * calcolare i 5/56 della lunghezza di un lato ℓ: $5/56 * 30 = (2 + 19/28)$;

*	sommare alla lunghezza di un lato:	(2 + 19/28) + 30 = (32 + 19/28) braccia, lunghezza della circonferenza di un cerchio.

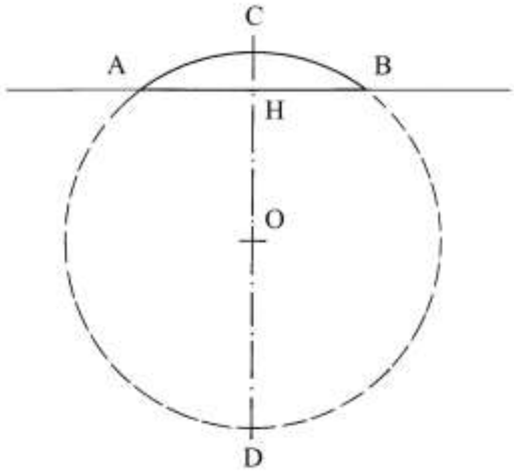
La procedura è riassunta nella formula che segue:

$c = (5 * \ell)/56 + \ell$.

Secondo Elisabetta Ulivi, la formula è errata e lo è per difetto di circa il 5,3%.

Ragione 123

Una ruota è parzialmente interrata: ne emerge solo un segmento circolare che ha freccia lunga 1 braccio e corda lunga 6.



È chiesto il suo diametro.

Un problema simile è presente nel "*Liber habaci*" dell'abacista fiorentino Paolo Gherardi (attivo all'inizio del XIV secolo).

La procedura impiegata richiama il *teorema delle corde*:

*	dividere per 2 la lunghezza della corda (AB = *c*):	6/2 = 3;
*	moltiplicare per sé stesso:	3 * 3 = 9;
*	dividere per la lunghezza della freccia (CH = *f*):	9/1 = 9;
*	sommare alla lunghezza della freccia:	9 + 1 = 10 braccia, lunghezza del diametro (CD = *d*).

La procedura può essere riassunta nella formula:

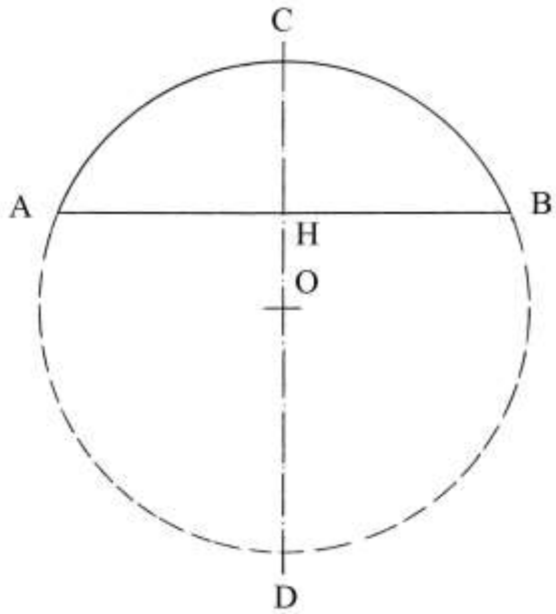
$d = [(c/2)^2/f] + f.$

Abbiamo già incontrato il teorema delle corde nella Ragione 23: esso può essere sintetizzato con la seguente proporzione:

CH : AH = AH : HD.

Ragione 124

Un arco ha corda lunga 12 braccia e freccia 4 braccia. Determinare la lunghezza della circonferenza di cui l'arco è parte:



Ecco i passi della soluzione:

* dividere per 2 la lunghezza della corda: 12/2 = 6;
* moltiplicare per sé stesso: 6 * 6 = 36;
* dividere per la lunghezza della freccia: 36/4 = 9;
* sommare alla lunghezza della freccia: 9 + 4 = 13 braccia, lunghezza del diametro CD = *d*.

La lunghezza della circonferenza, *C*, è:

C = 22/7 * d = 22/7 * 13 = (40 + 6/7) braccia.

Ragione 125

Il problema ripropone lo stesso cerchio della precedente Ragione con una variazione: sono date le lunghezze della freccia, 4 braccia, e del diametro, 13 braccia. E deve essere calcolata la lunghezza della corda.

Per lo schema rivedere quello della precedente Ragione.

La procedura è la seguente:

* sottrarre la lunghezza della freccia da quella del diametro: 13 – 4 = 9;
* moltiplicare per la lunghezza della freccia: 9 * 4 = 36;
* estrarre la radice quadrata: √36 = 6;
* moltiplicare per 2: 6 * 2 = 12 braccia, lunghezza della corda AB = *c*.

La procedura può essere riassunta con la formula che segue:

c = √[(d – f) * f] * 2.

Ragione 126

L'ultimo problema che coinvolge questo argomento è basato sul solito cerchio. Per lo schema rivedere quello contenuto nella descrizione della Ragione 124.

Il diametro del cerchio è lungo 13 braccia e la corda è 12: la Ragione chiede la lunghezza della freccia.

La procedura è la seguente:

* dividere per la lunghezza del diametro: 13/2 = (6 + ½);

* moltiplicare per sé stesso: $(6 + ½)^2 = (42 + ¼)$;
* dividere la lunghezza della corda per 2: 12/2 = 6;
* moltiplicare per sé stesso: 6 * 6 = 36;
* sottrarre da (42 + ¼): (42 + ¼) – 36 = (6 + ¼);
* estrarre la radice quadrata: √(6 + ¼) = (2 + ½);
* sottrarre dalla lunghezza di metà del diametro: (6 + ½) – (2 + ½) = 4 braccia, lunghezza della freccia.

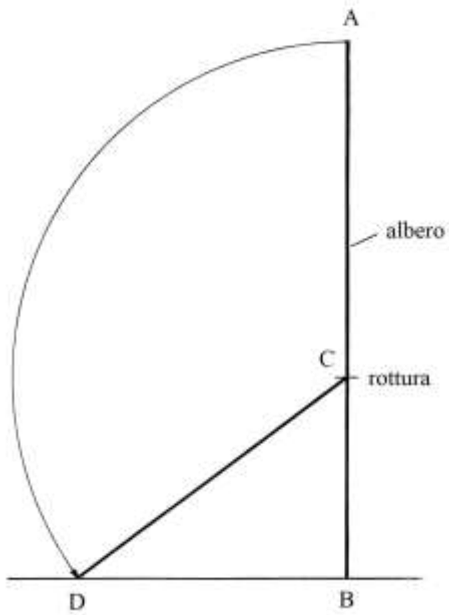
Ragione 127

Un albero è alto 40 braccia e il vento lo rompe in un punto. La cima tocca terra e l'altro capo resta presso il piede dell'albero ed è lungo 20 braccia.

Il problema chiede di stabilire il punto di rottura dell'albero e la sua distanza da terra.

Il testo fa riferimento a una figura che però manca.

Lo schema semplificato, qui sotto, tenta un'interpretazione del testo:



Cerchiamo di seguire procedura proposta dall'Autore.

La parte caduta dell'albero AB è AC: essa ha lunghezza incognita ed è "x".

La parte rimasta in piedi, CB, è lunga:

CB = AB – AC = 40 – x.

Ma: CD = AC = x.

BDC è un triangolo rettangolo di cui è nota la lunghezza del cateto DB, che è 20 braccia:

$DB^2 = DC^2 – CB^2$

$20^2 = x^2 – (40 – x)^2$

$400 = x^2 – 1600 + 80 * x – x^2$

$80 * x = 2000$

x = 2000/80 = 25 braccia.

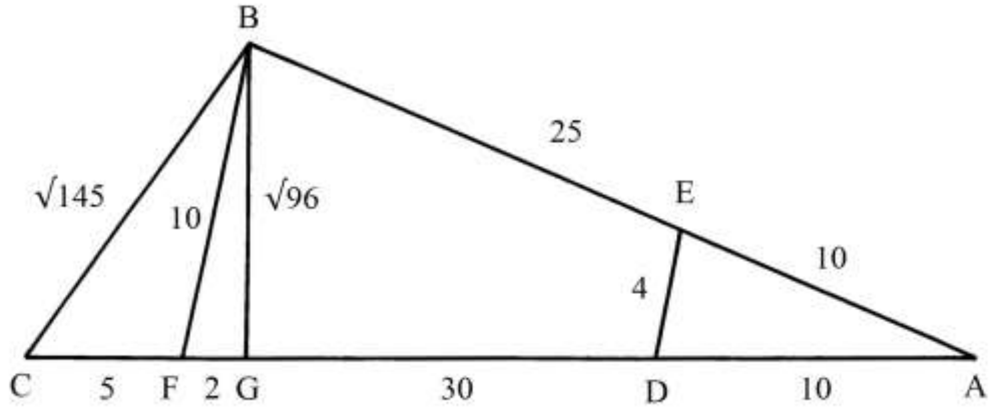
Il punto di rottura, C, si trova a 25 braccia dall'alto e CB è lungo:

CB = AB – AC = 40 – 25 = 15 braccia.

Il triangolo rettangolo BDC ha lati lunghi secondo la terna derivata 15-20-25: essa deriva dalla primitiva 3-4-5 moltiplicando per 5.

Ragione 128

Due aste di legno lunghe 25 e 30 braccia sono unite in un vertice, A, e formano un angolo che è determinato dalla traversa DE, lunga 10 braccia. ADE è un triangolo isoscele i cui lati obliqui, AD e AE, sono lunghi 10 braccia.



Il problema chiede di calcolare la lunghezza del lato BC che chiude il triangolo ABC.

Fra le lunghezze di DE e di AE vi è il rapporto:

DE/AE = 4/10 = 2/5.

Anche fra le lunghezze di AE e di AB vi è un identico rapporto:

AE/AB = 10/25 = 2/5.

Sul segmento CA fissare il punto F a distanza AF = 25 braccia. Tracciare FB: il triangolo FBA è isoscele ed è simile q quello DEA.

Può instaurarsi la proporzione che segue:

AD : AF = DE : FB da cui:

10 : 25 = 4 : FB e

FB = 25 * 4/10 = 10 braccia.

Dal punto B è abbassata la perpendicolare BG al lato AC: essa è un'altezza del triangolo.

La lunghezza di BG è ricavata con l'implicita applicazione di una formula dovuta a Erone di Alessandria al triangolo FBA, senza citarla:

$FG = (BF^2 + FA^2 – BA^2)/(2 * FA) = (10^2 + 25^2 – 25^2)/(2 * 25) =$
$= 100/50 = 2$ braccia.

L'altezza BG è lunga:

$BG^2 = BF^2 – FG^2 = 10^2 – 2^2 = 96$ e

$BG = \sqrt{96}$ braccia.

CBG è un triangolo rettangolo: l'ipotenusa CB ha lunghezza incognita che è ottenuta da:

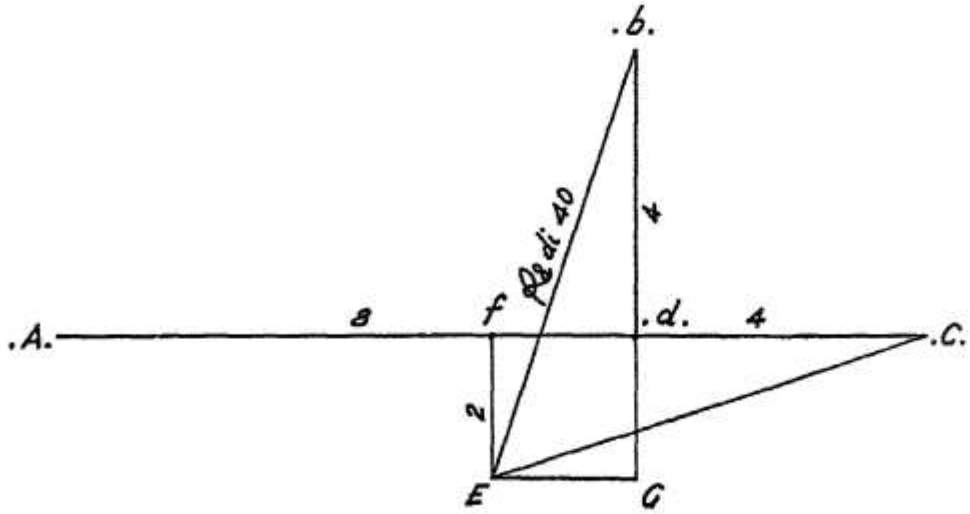
$CB^2 = CG^2 + BG^2 = 7^2 + 96 = 49 + 96 = 145$ e

$CB = \sqrt{145}$ braccia.

Ragione 129

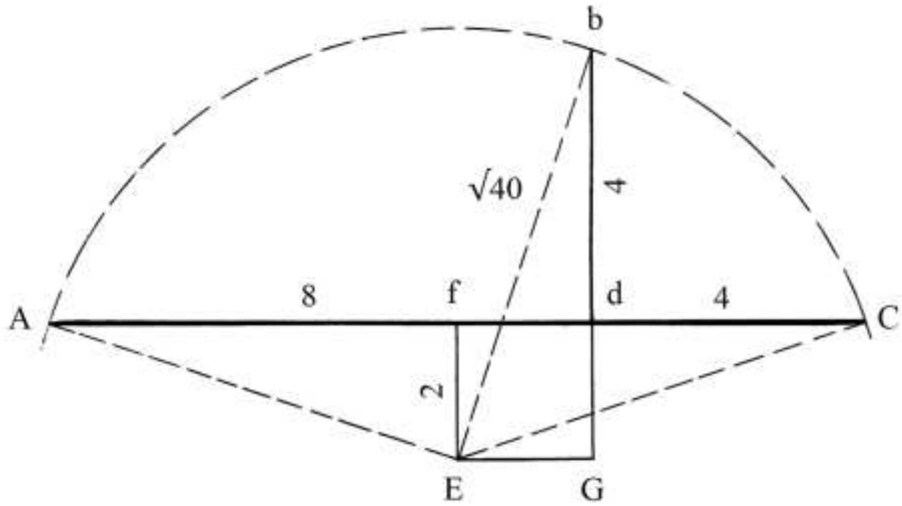
Un legno diritto è stesso sul terreno ed è lungo 12 braccia.

Ne sono prese 4 braccia e ne restano altre 8. Con le 4 braccia è innalzata una colonna nel punto di taglio, ".d.":



Nell'originale alcuni punti sono indicati con lettere, maiuscole p minuscole, delimitate da una coppia di punti, uno prefisso e l'altro postfisso. Sembra che i vertici così contrassegnati siano quelli originali: le altre lettere – *E* e *G* – paiono indicare vertici derivati dalla costruzione.

Il problema chiede di determinare la lunghezza del raggio di un arco di circonferenza che passi per i punti A, b e C e il suo centro sia E.



Il centro dell'arco, il punto E, deve sicuramente essere equidistante da A e da C e quindi si trova al di sotto del punto medio *f* del segmento AC.

Il segmento *fd* è lungo:

$fd = fC – dC = AC/2 – dC = 12/2 – 4 = 2$ braccia.

La lunghezza di fE è l'incognita "x".

La soluzione adottata dall'Autore è la seguente:

* moltiplicare la lunghezza di x per sé stessa: $x * x = x^2$;
* moltiplicare la lunghezza di *fc* per sé stessa: $6 * 6 = 36$;
* sommare i due quadrati: $(x^2 + 36)$ [è il quadrato della lunghezza delle ipotenuse EC, Eb e EA];
* il segmento *bdG* è lungo: $bd + dG = bd + fE = (4 + x)$;
* moltiplicare per sé stesso: $(4 + x)^2 = 16 + 8 * x + x^2$;
* moltiplicare per sé stessa la lunghezza di EG [= fd]: $2 * 2 = 4$;
* sommare le ultime espressioni: $(16 + 8 * x + x^2) + 4 = (x^2 + 8 * x + 20)$ [equazione di 2° grado la cui soluzione dà la lunghezza di *Eb*];
* confrontare le espressioni con $x^2 + 36$):

$$(x^2 + 8 * x + 20) = (x^2 + 36)$$

$8 * x + 20 = 36$

$8 * x = 16$

$x = 16/8 = 2$ braccia, lunghezza di fE.

fEGd è un quadrato che ha lati lunghi 2 braccia.

E è il centro dell'arco di circonferenza.

Il raggio EB è lungo:

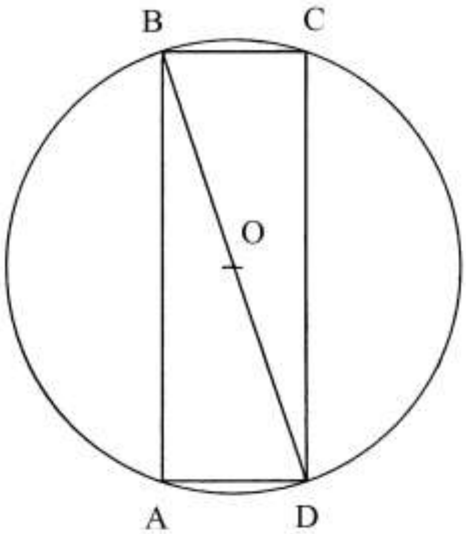
$Eb^2 = EG^2 + bG^2 = 2^2 + 6^2 = 40$ e

$Eb = \sqrt{40}$ braccia.

Ragione 130

Un cerchio ha diametro lungo 10 braccia e vi deve essere inscritto un rettangolo con lunghezza uguale a 3 volte la larghezza.

Il problema chiede la lunghezza dei lati.



Il lato più corto, AD, è l'incognita "x" e quello più lungo, AB, è "3 * x".

Applichiamo il teorema di Pitagora al triangolo ABD:

$BD^2 = AD^2 + AB^2 = x^2 + (3 * x)^2 = 10 * x^2$.

Ma BD^2 è 10^2, quindi:

$10 * x^2 = 10^2$

$10 * x^2 = 100$

$x^2 = 10$ e

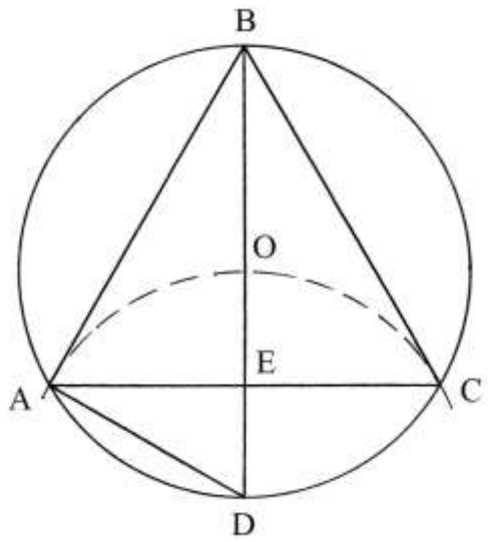
$x = \sqrt{10}$ braccia, lunghezza di AD e di BC.

La lunghezza di AB (e di CD) è:

$AB = 3 * AD = 3 * \sqrt{10} = \sqrt{(9 * 10)} = \sqrt{90}$ braccia.

Ragione 131

Un cerchio ha diametro di 10 braccia: vi deve essere inscritto il più grande triangolo equilatero possibile.

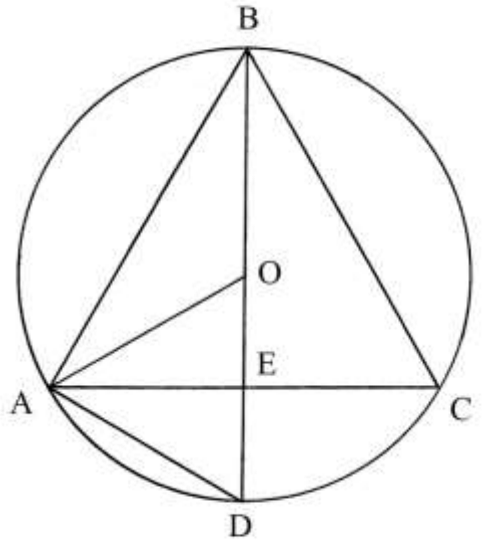


Il diametro passante per un vertice, ad esempio quello B, divide in due parti uguali il lato opposto, AC.

La corda AD è lunga metà del diametro BD e quindi è quanto il raggio OA.

L'Autore procede a calcolare la lunghezza dei lati del triangolo ABC.

Tracciando il raggio OA, viene creato un secondo triangolo equilatero, AOD:



I lati di AOD sono lunghi quanto il raggio del cerchio: 5 braccia.

AE è una sua altezza la cui lunghezza è data da:

$AE^2 = AD^2 – DE^2 = AD^2 – (AD/2)^2 = 5^2 – (5/2)^2 = 25 – (6 + 1/4) =$
$= (18 + ¾)$ e
$AE = \sqrt{(18 + ¾)}$ braccia.

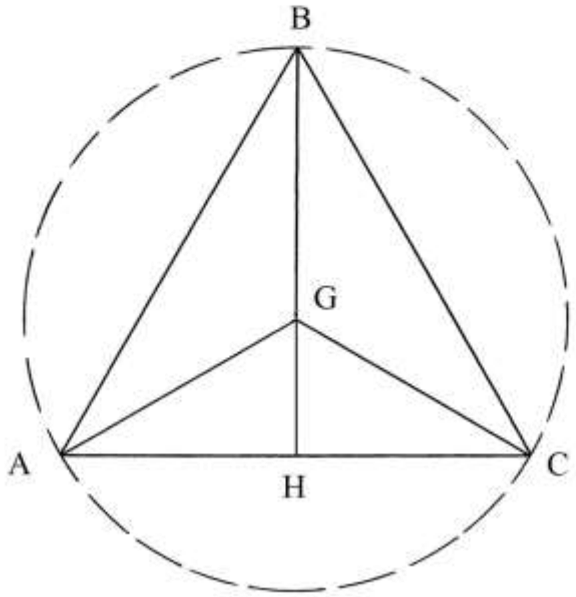
Il segmento AE è lungo metà del lato AC e quindi si ha:

$AC = 2 * AE = 2 * \sqrt{(18 + ¾)} = \sqrt{[4 * (18 + ¾)]} = \sqrt{75}$ braccia.

<u>Ragione 132</u>

In un triangolo equilatero le bisettrici degli angoli si intersecano nel punto G che è anche il centro della circonferenza circoscritta.

Il problema chiede la lunghezza dei lati.



I tre segmenti GA, GB e GC sono raggi della circonferenza: essi sono lunghi 6 braccia. BH è un'altezza del triangolo.

L'Autore ricorda che il punto G divide l'altezza BH in due parti:

* BG è lungo i 2/3 di BH;
* GH è lungo il rimanente 1/3 di BH.

L'altezza di BH è data da:

BH = BG/(2/3) = 6 *3/2 = 9 braccia.

L'Autore ricorre all'algebra per la soluzione del problema: sarebbe bastato applicare il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo AGH:

* assegnare alla lunghezza del lato [AC] l'incognita "x";
* AH è lungo x/2;
* moltiplicare per sé stessa la lunghezza di AH: $x/2 * x/2 = x^2$;
* moltiplicare l'incognita per sé stessa: $x * x = x^2$;
* sottrarre $x^2/4$: $x^2 - x^2/4 = ¾ * x^2$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{(3/4 * x^2)}$ [lunghezza dell'altezza BH];
* uguagliare a 9 braccia: $\sqrt{(3/4 * x^2)} = 9$;
* elevare al quadrato i due membri:

$¾ * x^2 = 81$

$x^2 = 4/3 * 81$

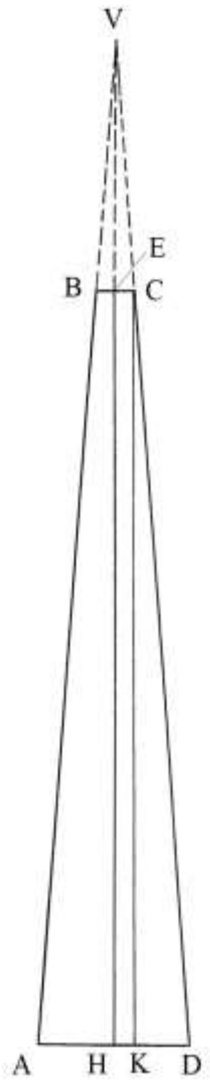
$x^2 = 108$ e $x = \sqrt{108}$ braccia, lunghezza dei lati del triangolo.

<u>Ragione 133</u>

Un pozzo ha forma circolare: al fondo ha diametro di 4 braccia e alla bocca è 1 braccio. Inoltre è profondo 20 braccia.

Il problema chiede il suo volume.

Il testo è accompagnato da tre schemi fuori scala, che qui sono condensati in unico disegno, in scala.



Seguendo i passi della soluzione proposta dall'Autore, occorre in primo luogo determinare la posizione del vertice, V, del cono da cui deriva il pozzo che ha forma di un tronco di cono cavo.

Dal punto C è abbassata la perpendicolare a AD: è CK. Il segmento HK è lungo quanto EC e cioè ½ braccio.

KD è lungo: $KD = HD – HK = 4/2 – ½ = (1 + ½)$ braccia.

Gli spigoli AB e CD sono prolungati verso l'alto fino a incontrarsi in V.

VHD e CKD sono due triangoli rettangoli simili e vale la proporzione:

$HD : KD = VH : EH$

$2 : (1 + ½) = VH : 20$ da cui

$VH = 20 * 2/((1 + ½) = 40/(1 + ½) = (26 + 2/3)$ braccia.

Ne consegue che VE è lungo:

$VE = VH – EH = (26 + 2/3) – 20 = (6 + 2/3)$ braccia.

L'area del fondo è:

$A_{FONDO} = 11/14 * AD^2 = 11/14 * 4^2 = (12 + 4/7)$ braccia^2.

Il volume del cono di origine è:

$V_{CONO} = (A_{FONDO} * VH)/3 = [(12 + 4/7) * (26 + 2/3)]/3 = (111 + 47/63)$ braccia^3.

Occorre sottrarre il volume del cono VBEC.

L'area della bocca è:

$A_{BOCCA} = 11/14 * BC^2 = 11/14 * 1^2 = 11/14$ braccia^2.

Il volume di VBEC è:

$V_{VBEC} = (A_{BOCCA} * VE)/3 = [11/14 * (6 + 2/3)]/3 = (1 + 47/63)$ braccia^3.

Il volume del pozzo è dato da:

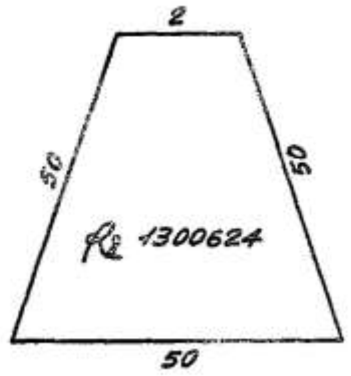
$$V_{POZZO} = V_{CONO} - V_{VBEC} = (111 + 47/63) - (1 + 47/63) = 110 \text{ braccia}^3.$$

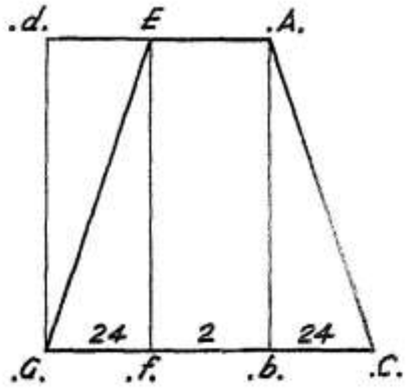
<u>Ragione 134</u>

Un terreno ha la forma di un trapezio isoscele con i lati obliqui e la base maggiore lunghi 50 braccia e la base minore 2 braccia.

Il problema chiede la sua area.

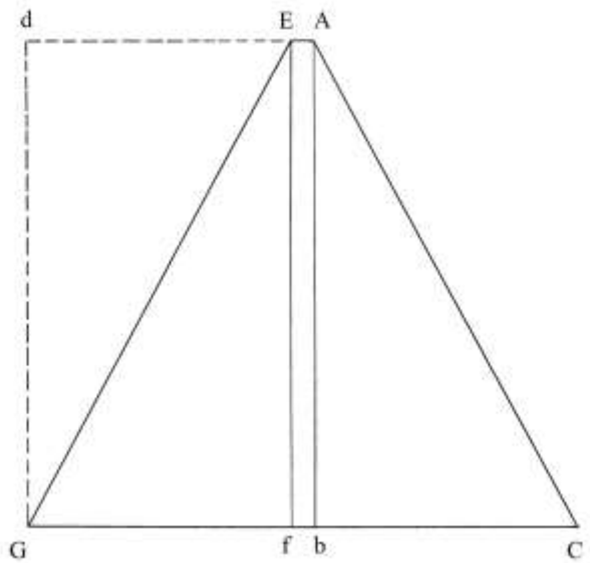
I due schemi che accompagnano il testo sono chiaramente fuori scala:





Nel secondo schema, parte delle lettere è di nuovo delimitata da due punti: .A.

Dai vertici E e A sono abbassate due perpendicolari, Ef e Ab, che sono due altezze.



Da G è innalzata la perpendicolare a GC che a incontrare in *d* il prolungamento verso sinistra di AE.

Occorre ricavare la lunghezza di *AB*, uguale a quella di *Ef*.

AbC è un triangolo rettangolo di cui è ignota la lunghezza del cateto *Ab*.

Il segmento bC è lungo quanto quello Gf perché il trapezio è isoscele:

bC = Gf = (GC – fb)/2 = (GC – EA)/2 = (50 – 2)/2 = 24 braccia.

La lunghezza di Ab è data da:

$Ab^2 = AC^2 - bC^2 = 50^2 - 24^2 = 2500 - 576 = 1924$ e

Ab = √1924 braccia.

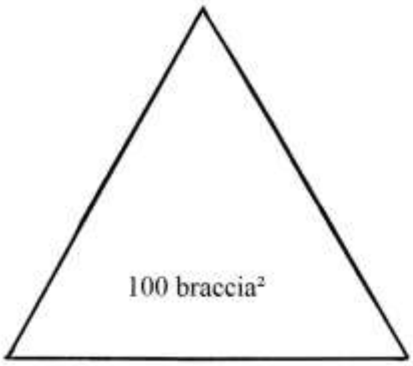
I segmenti dE e bC sono entrambi lunghi 24 braccia.

L’area del trapezio è uguale a quella del rettangolo GdAb:

Area = Gb * Gd = 26 * √1924 = √(676 * 1924) = √1300624 $braccia^2$.

Ragione 135

È dato un triangolo equilatero che ha area uguale a 100 $braccia^2$. Il problema chiede la lunghezza dei lati.



La soluzione contiene i seguenti passi:

* moltiplicare l’area per sé stessa: 100 * 100 = 10000;
* moltiplicare per 16: 10000 * 16 = 160000;
* dividere per 3: 160000/3 = (53333 + 1/3);
* estrarre la radice della radice e cioè la *radice quarta*:

$$\sqrt{\sqrt{(53333 + 1/3)}} = \sqrt[4]{(53333 + 1/3)}$$.

Ricordiamo che la formula dell’area di un triangolo equilatero di lato ℓ è:

$A = \ell$ * altezza/2.

L’altezza *h* è data da:

$h = (\sqrt{3})/2 * \ell$, per cui

$A = \ell^2 * (\sqrt{3})/4$.

Elevando al quadrato entrambi i membri si ottiene:

$A^2 = \ell^4 * 3/16$ e

$\ell^4 = 16/3 * A^2$ che è il sunto della procedura usata dall’Autore.

Ragione 136

Un cerchio ha diametro di 6 braccia e vi deve essere inscritto il più grande triangolo equilatero.

Lo schema originale riporta la misura errata di 7 braccia:

La procedura impiegata dall'Autore contiene i seguenti passi:

* dividere per 2 la lunghezza del diametro: 6/2 = 3;
* moltiplicare per sé stesso: 3 * 3 = 9 [quindi il raggio è lungo √9].

A questo punto, l'Autore introduce una regola: la radice √9 è il resto del "*perfetto diamitro*" da cui è tratto ¼: la lunghezza di questo "*diamitro*" sarebbe un numero da cui tolto 1/8 e aggiunto ad esso faccia 9. Il numero *n* è:

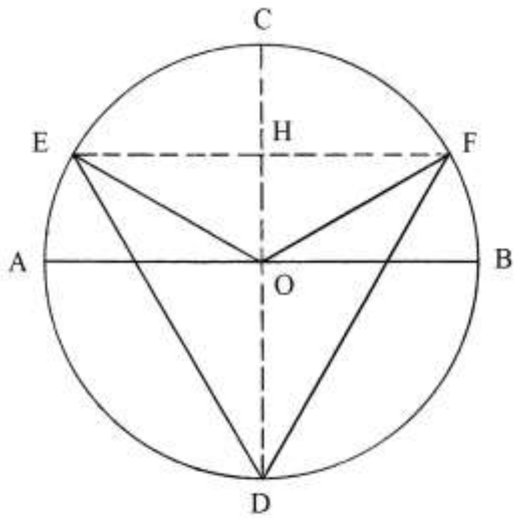
(1/8 + 1) * n = 9 da cui
9/8 * n = 9 e
n = 9 * 8/9 = 8.

Poi raddoppia 8: 8 * 2 = 16 ed estrae la radice: √16.

Passa poi a indicare in √24 braccia la lunghezza dei lati del triangolo equilatero.

- APPROFONDIMENTO -

In precedenza l'Autore aveva già affermato che l'altezza di un triangolo equilatero inscritto in un cerchio è divisa dal centro O in due segmenti di diversa lunghezza:



OH = ½ * OD.

HOE è un triangolo rettangolo di cui è ignota solo la lunghezza del cateto HE.

$HE^2 = OE^2 – (OH)^2 = OE^2 – (OC/2)^2 = OE^2 – (OE/2)^2 = 3^2 – (3/2)^2$ = 9 – (2 + ¼) = (6 + ¾) e HE = √(6 + ¾) braccia.

Il lato EF è lungo il doppio di HE:

$EF = 2 * EF = 2 * \sqrt{(6 + ¾)} = \sqrt{[4 * (6 + ¾)]} = \sqrt{27}$ braccia.

L'altezza DH è lunga:

$DH = HO + OD = 3/2 + 3 = (4 + ½)$ braccia.

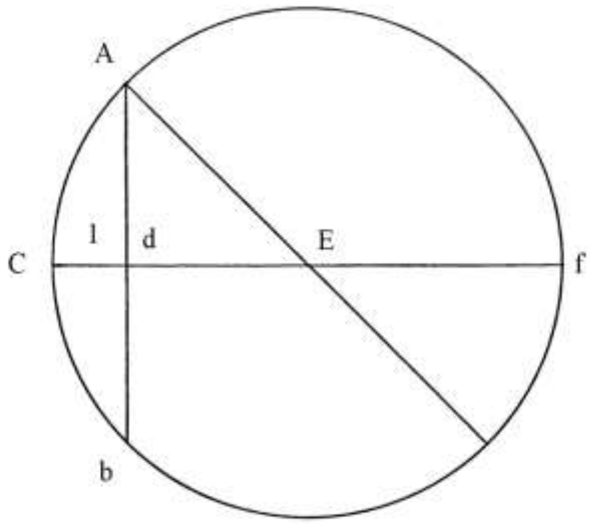
Ma l'altezza è anche:

$DH = (\sqrt{3})/2 * EF = (\sqrt{3})/2 * \sqrt{27} = \sqrt{(81/4)} = (4 + ½)$ braccia.

- -

Ragione 137

Un cerchio ha diametro di 7 braccia. Deve essere tagliato un segmento circolare che ha freccia lunga 1 braccio. Il problema chiede la lunghezza della corda Ab:



La procedura usata dall'Autore è la seguente:

* moltiplicare la lunghezza di dE per sé stessa [$dE = CE – Cd = 7/2 – 1 = 2 + ½$]:
  $(2 + ½)^2 = (6 + ¼)$;
* moltiplicare la lunghezza del raggio EA per sé stessa: $(7/2)^2 = (12 + ¼)$;
* sottrarre il primo quadrato dal secondo: $(12 + ¼) – (6 + ¼) = 6$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{6}$ braccia, lunghezza di *Ad*.

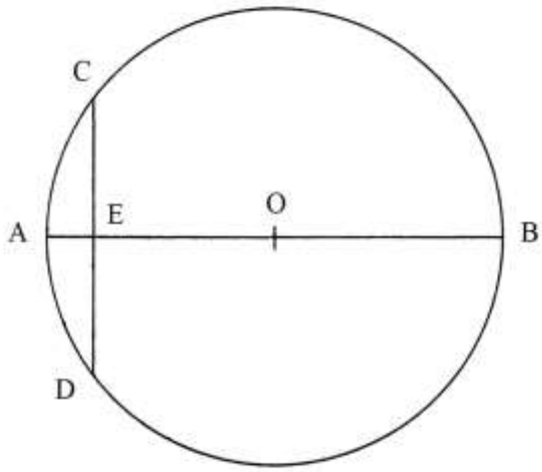
La lunghezza dell'intera corda Ab è il doppio di quella di Ad:

$Ab = 2 * \sqrt{6} = \sqrt{(4 * 6)} = \sqrt{24}$ braccia.

Ragione 138

Un cerchio di centro O è diviso in due segmenti circolari: la corda CD è lunga 6 braccia e la freccia del segmento più grande, EB, è 9 braccia.

L'arco CAD è lungo 24 braccia.



Il problema chiede l'area del segmento circolare CADE.

Occorre ricavare la lunghezza del diametro e l'Autore ricorre al teorema delle corde:

* dividere la lunghezza della corda per 2: $6/2 = 3$;
* moltiplicare per sé stesso: $3 * 3 = 9$;
* dividere per la lunghezza della freccia EB: $9/9 = 1$;
* sommare le lunghezze delle due frecce: $9 + 1 = 10$ braccia,

lunghezza del diametro AB.

Con dei passaggi poco comprensibili l'Autore stabilisce l'area del segmento circolare in 72 braccia^2.

L'area dell'intero cerchio è:

$$A_{\text{CERCHIO}} = 11/14 * AB^2 = 11/14 * 10^2 = (78 + 4/7) \text{ braccia}^2.$$

Il risultato offerto dall'Autore è chiaramente molto errato per eccesso.

\- APPROFONDIMENTO -

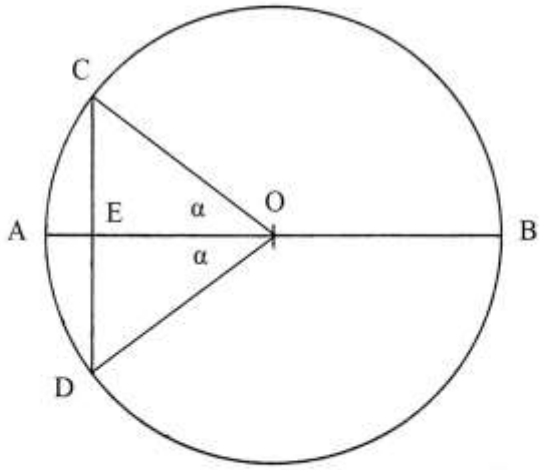
Cerchiamo di verificare il risultato: forse l'Autore ha moltiplicato la lunghezza dell'arco CAD per metà della lunghezza della freccia.

La formula per calcolare l'area di un segmento circolare è la seguente:

$$A_{\text{SEGMENTO CIRCOLARE}} = [\text{raggio} * (\text{arco} - \text{corda}) + \text{corda} * \text{freccia}]/2.$$

Fissiamo i dati del problema:

* AE = 1 (braccia).
* CD = 6.
* CE = ED = 3.
* EO = 4.
* OA = OC = OD = OB = 5.



I triangoli COE e DOE sono rettangoli e hanno uguali dimensioni. I loro lati sono lunghi secondo la terna primitiva 3 – 4 – 5.

La tangente dell'angolo α è data da:

tg α = CE/OE = ¾ = 0,75.

Ad essa corrisponde un angolo di ≈ 36,35°.

L'angolo COD sottende il rispettivo arco CAD ed è ampio:

COD = 2 * α = 2 * 36,35 * 2 = 72,7°.

La lunghezza dell'arco CAD è proporzionale all'ampiezza dell'angolo COD e vale la proporzione che segue:

CAD : circonferenza = 2 * α : 360

CAD : (22/7 * 10) = 72,7 : 360

CAD = [(22/7 * 10) * 72,7]/360 = 220 * 72,7/2520 ≈ 6,35 braccia.

Applichiamo la formula per calcolare l'area del segmento circolare CADE:

A_{CADE} = [5 * (6,35 – 6) + 6 * 1]/2 = 3,875 braccia^2.

L'arco CBD è lungo:

CBD = circonferenza – CAD = 22/7 * 100 – 6,35 = 25,08 braccia.

L'area del segmento circolare CBDE è:

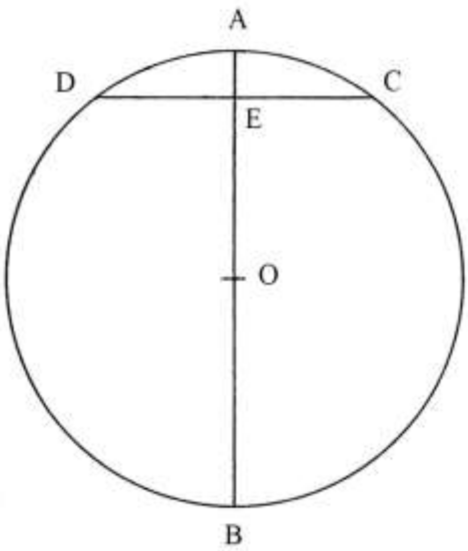
A_{CBDE} = [5 * (25,08 – 6) + 6 * 9]/2 = 74,7 braccia^2.

Sommare le aree dei due segmenti circolari:

A_{TOTALE} = A_{CADE} + A_{CBDE} = 3,875 + 74,7 = 78,575 braccia^2, risultato pressoché uguale a quello calcolato dell'area del cerchio: (78 + 4/7) braccia^2.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Molti dei problemi relativi ai segmenti circolari potrebbero rientrare fra quelli sui calcoli del volume delle botti:



Il cerchio è ruotato di 90° e rappresenta il profilo di una botte vista in sezione.

La corda DC indica il livello del liquido e la freccia AE è lo *scemo* e cioè la lunghezza della colonna d’aria sovrastante il vino.

- -

Ragione 139

Una sfera (“*palla ritonda*”) ha circonferenza *c* lunga 22 braccia e diametro *d* di 7 braccia.

Il problema chiede di calcolare il suo volume.

La procedura usata contiene i seguenti passi:

* dividere la lunghezza del diametro per 6: 7/6 = (1 + 1/6);
* sommare alla lunghezza del diametro: (1 + 1/6) + 7 = (8 + 1/6);
* moltiplicare per la lunghezza della circonferenza:

(8 + 1/6) * 22 = (179 + 2/3) braccia^3, volume della sfera.

- APPROFONDIMENTO -

La formula usata per calcolare il volume V di una sfera di raggio R è:

$V = 4/3 * \pi * R^3$.

Applicando questa formula si ha:

$V = 4/3 * 22/7 * (7/2)^3 = (170 + 2/3)$ braccia^3.

Il risultato ottenuto dall'Autore è esatto: la sua procedura è riassunta nella formula che segue:

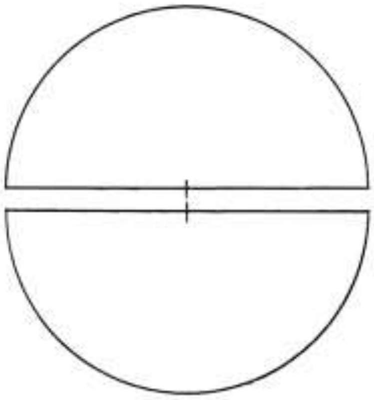
V = (d/6 + d) * c.

Benché il suo risultato sia esatto da un punto di vista numerico, la formula è dubbia perché il prodotto di una lunghezza – i 7/6 del diametro – per un'altra, quella della circonferenza, dà una superficie e non un volume.

- -

Questa Ragione contiene un secondo problema.

Una sfera ha circonferenza lunga 16 braccia: deve essere calcolata la sua superficie.



L'Autore calcola la superficie della sfera con i seguenti passi:

* dividere la lunghezza della circonferenza per 2: 16/2 = 8;

* moltiplicare per sé stesso: 8 * 8 = 64 braccia^2, superficie della sfera.

- APPROFONDIMENTO -

La superficie laterale di una sfera è oggi calcolata con la formula

A = 4 * π * R2, dove R è il raggio.

La formula può essere scritta in modo diverso, ma equivalente:

A = (2 * π * R) * (2 * R).

L'espressione (2 * π * R) è la lunghezza della circonferenza, *C*, e (2 * R) è il diametro D.

La formula diviene così:

A = C * D.

La lunghezza del diametro D è data da:

D = C/π = C/(22/7) = 16 * 7/22 = (5 + 1/11) braccia.

L'area è:

A = C * D = 16 * (5 + 1/11) = (81 + 5/11) braccia^2.

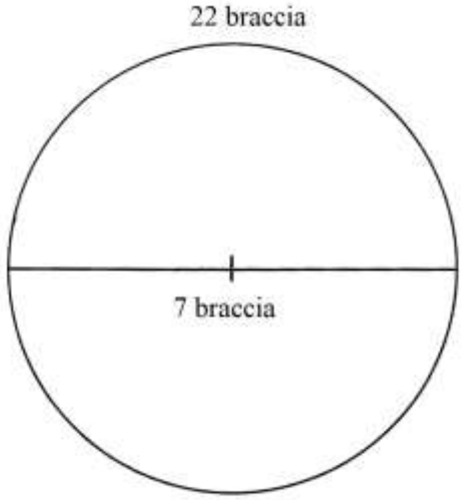
Il metodo usato dall'Anonimo è poco comprensibile. Infine, per i suoi calcoli egli propone di dividere a metà la sfera.

- -

<u>Ragione 140</u>

Una sfera ha circonferenza lunga 22 braccia e diametro di 7.

Deve essere ricoperta con un panno che è alto (2 + ½) braccia.



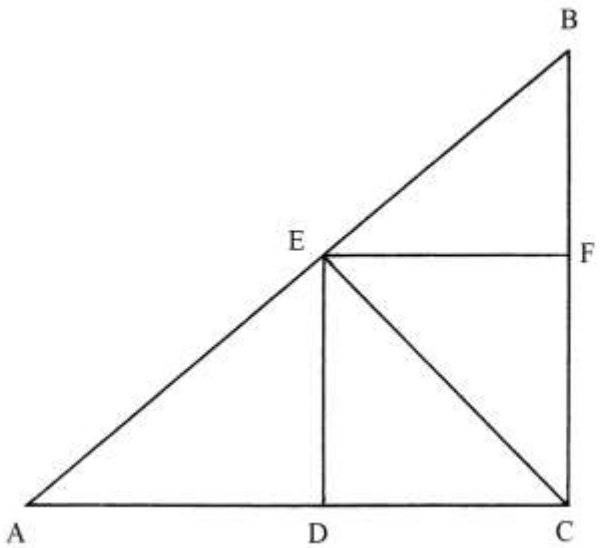
L'Autore utilizza i seguenti passi:

* moltiplicare la lunghezza del diametro per quella della circonferenza:
  $7 * 22 = 154$ braccia^2 [area della sfera];
* dividere per la larghezza del panno: $154/(2 + ½) = (61 + 3/5)$ braccia, lunghezza del panno occorrente.

La soluzione è corretta.

Ragione 141

Un triangolo rettangoli ha cateti lunghi 10 (BC) e 12 (AC) braccia. Vi deve essere inscritto il più grande quadrato possibile.



Occorre calcolare la lunghezza dell'ipotenusa AB:

$AB^2 = AC^2 + BC^2 = 12^2 + 10^2 = 244$ e

$AB = \sqrt{244}$ braccia.

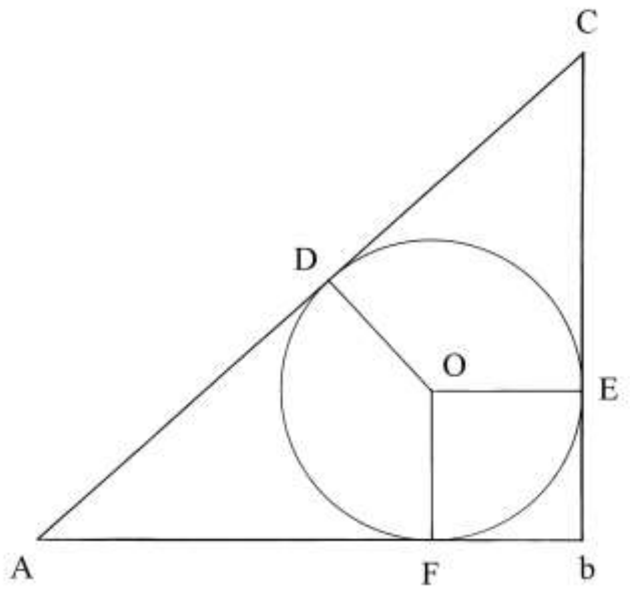
Il calcolo della lunghezza dei lati del quadrato CDEF è fatto nel modo che segue:

* moltiplicare fra loro le lunghezze dei due cateti: $10 * 12 = 120$;
* sommare le lunghezze dei due cateti: $10 + 12 = 22$;

* dividere il prodotto per la somma: 120/22 = (5 + 5/11) braccia, lunghezza dei lati del quadrato CDEF.
L'Autore arrotonda il risultato a (5 + ½) braccia.

<u>Ragione 142</u>

Un triangolo rettangolo ha cateti lunghi 16 (Cb) e 18 (Ab) braccia.
Vi deve essere inscritto il più grande cerchio possibile.



L'ipotenusa AC è lunga:

$AC^2 = Ab^2 + bC^2 = 18^2 + 16^2 = 324 + 256 = 580$ e

$AC = \sqrt{580}$ braccia.

Il diametro del cerchio di centro O è così ricavato:

* sommare le lunghezze dei due cateti: bC + Ab = 16 + 18 = 34;
* sottrarre la lunghezza dell'ipotenusa: $(34 - \sqrt{580})$ braccia, diametro del cerchio.

\- APPROFONDIMENTO -

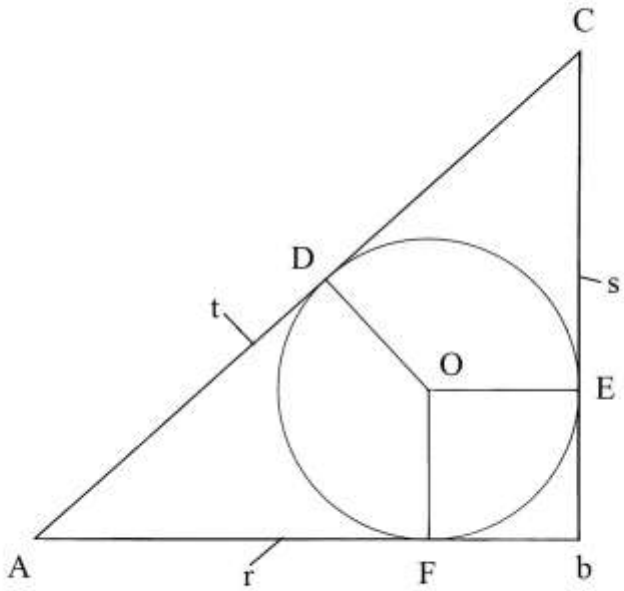
Chiamiamo *r*, *s* e *t* le lunghezze dei tre lati del triangolo ACb:

* Ab = r;
* bC = s;
* AC = t.

La procedura usata dall'Autore richiama una formula nota ai Gromatici romani:

diametro = r + s – t.

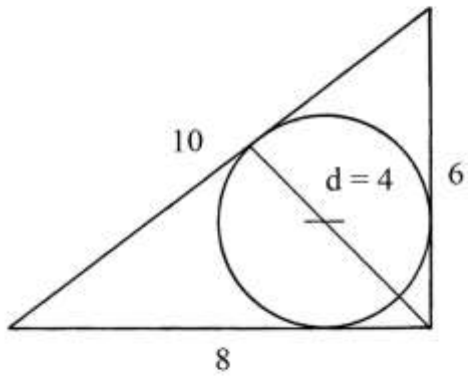
La formula era nota anche al matematico cinese Liu Hui (220 – circa 280 d.C.).



- -

<u>Ragione 143</u>

Un triangolo rettangolo ha cateti lunghi 6 e 8 braccia.



Vi deve essere inscritto il cerchio più grande possibile e deve essere calcolato il suo diametro.

L'ipotenusa è lunga 10 braccia: il triangolo ha lati lunghi secondo la terna derivata 6-8-10.

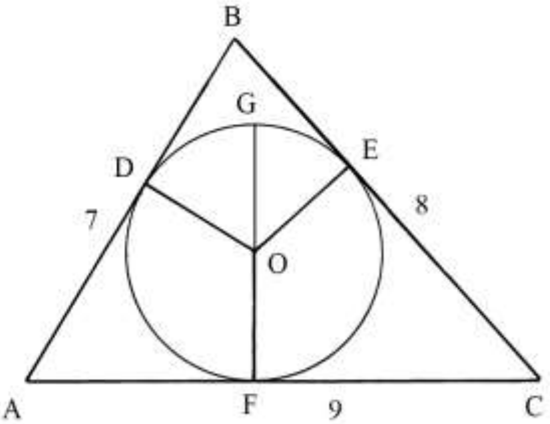
La procedura usata contiene i seguenti passi:

* moltiplicare le lunghezze dei due cateti: 6 * 8 = 48 [è il doppio dell'area del triangolo];
* sommare le lunghezze dei tre lati: 6 + 8 + 10 = 24 [perimetro];
* dividere il primo prodotto per il perimetro: 48/24 = 2 braccia [raggio del cerchio inscritto];
* moltiplicare per 2: 2 * 2 = 4 braccia, diametro del cerchio inscritto.

<u>Ragione 144</u>

Un triangolo scaleno ha lati lunghi 7, 8 e 9 braccia.

Vi deve essere inscritto il più grande cerchio possibile di cui occorre ricavare la lunghezza del diametro.



La soluzione prevede i seguenti passi:

* moltiplicare la lunghezza di BC per sé stessa: 8 * 8 = 64;
* moltiplicare per 1/3: 64/3 = (21 + 1/3);
* estrarre la radice quadrata: √(21 + 1/3) braccia, diametro del cerchio [FG];
* sommare le lunghezze dei tre lati: 7 + 8 + 9 = 24 [perimetro];
* dividere per 2: 24/2 = 12 [semiperimetro];

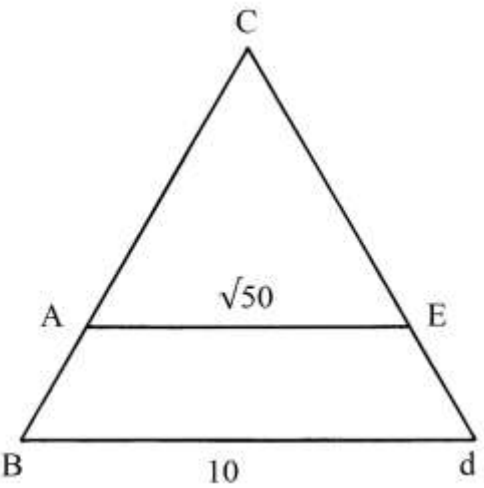
[Per semplificare i calcoli l'Autore simula un perimetro di 24 braccia come generato da tre lati lunghi 8 braccia, ma il triangolo non è equilatero];

* sottrarre la lunghezza di AB dal semiperimetro: 12 – 7 = 5;
* sottrarre la lunghezza di AC dal semiperimetro: 12 – 8 = 4;
* sottrarre la lunghezza di AC dal semiperimetro: 12 – 9 = 3;
* moltiplicare gli ultimi tre numeri: 5 * 4 * 3 = 60;
* moltiplicare per il semiperimetro: 60 * 12 = 720;
* estrarre la radice quadrata: √720 braccia^2, area del triangolo.

[L'Autore ha di nuovo applicato la formula di Erone per il calcolo dell'area dei triangoli].

Ragione 145

Un triangolo equilatero ha lati lunghi 10 braccia e deve essere diviso per ricavare due poligoni di area uguale a metà.



La soluzione è piuttosto semplice: l'area del triangolo è proporzionale al quadrato della lunghezza del lato.

Moltiplicare la lunghezza di un lato per sé stessa: 10 * 10 = 100.
Dividere per 2: 100/2 = 50.
Estrarre la radice quadrata: √50 braccia, lunghezza dei lati del triangolo equilatero ACE.

Il trapezio AEdb e il triangolo ACE hanno uguale area: 50 braccia^2.

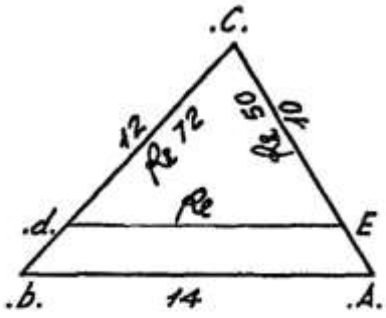
I lati Ab e Ed sono lunghi:

Ab = Ed = Cb – CA = (10 – √50) braccia.

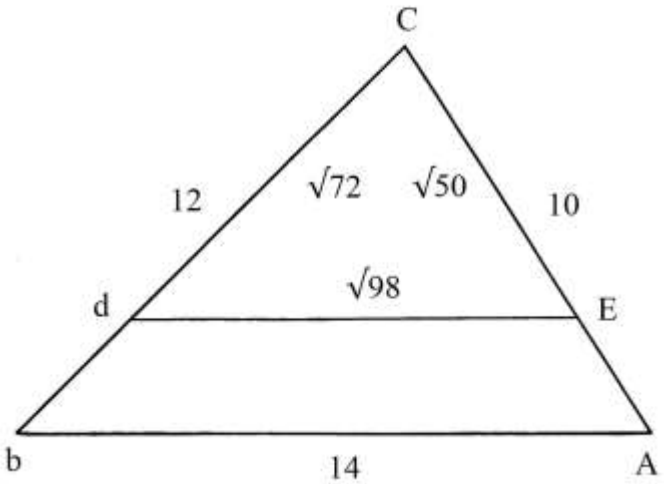
<u>Ragione 146</u>

Il triangolo scaleno CAb ha lati lunghi come segue:

* Cb = 12 braccia [nel testo 10 braccia];
* CA = 10 braccia [nel testo 12 braccia];
* bA = 14 braccia.



Il triangolo deve essere diviso in due parti di aree uguali, con un segmento parallelo alla base bA:



La procedura è piuttosto semplice:

* moltiplicare la lunghezza del lato CA per sé stessa: 10 * 10 = 100;
* dividere per 2: 100/2 = 50;
* estrarre la radice quadrata: √50 braccia, lunghezza del segmento CE;
* moltiplicare per sé stessa la lunghezza di Cb: 12 * 12 = 144;
* dividere per 2: 144/2 = 72;
* estrarre la radice quadrata: √72 braccia, lunghezza del segmento Cd.

Risulta:

* EA = CA – CE = (10 – √50 braccia);

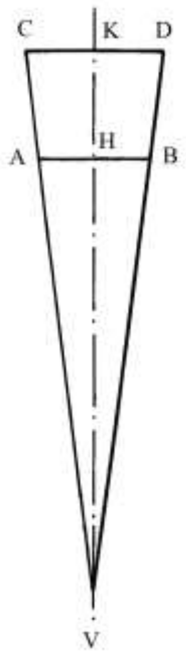
* $db = Cb – Cd = (12 – \sqrt{72})$ braccia.
Usando il metodo dell'Autore, calcoliamo la lunghezza di dE:
$dE = \sqrt{[(ba^2)/2]} = \sqrt{[(14^2)/2} = \sqrt{98}$.

Ragione 147

Una tramoggia ha la forma di una piramide quadrata: la base, in alto, ha area di 1 braccio^2, è profonda 4 braccia e contiene 4 staia di grano.

Essa viene ingrandita di 1 braccio verso l'alto: il problema chiede il nuovo volume di grano.

La figura che segue presenta lo schema della tramoggia.



Lo spigolo AB è lungo:
$AB = \sqrt{Area} = \sqrt{1} = 1$ braccio.
HV è profondo 4 braccia.
HK è l'altezza dell'addizione che è lunga 1 braccio per cui KV è 5 braccia.
La soluzione offerta dall'Autore è semplice:

* elevare al cubo la profondità HV: $HV^3 = 4^3 = 64$;
* elevare al cubo la lunghezza di KV: $KV^3 = 5^3 = 125$;
* moltiplicare 125 per il volume iniziale: $125 * 4 = 500$;
* dividere per 64: $500/64 = (7 + 13/16)$ staia di grano.

- APPROFONDIMENTO -

Il volume iniziale della tramoggia è:
$V = base * profondità/3 = 1 * 4/3 = 4/3$ braccia^3.

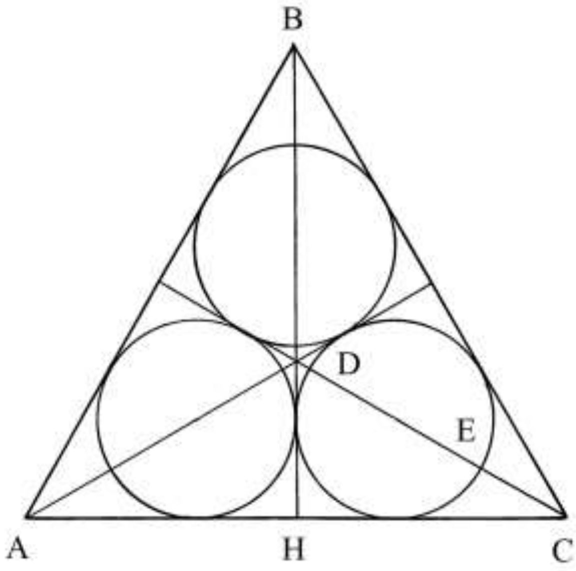
Come abbiamo già visto in precedenza, 1 braccio^3 conteneva 10 staia di grano: quindi il volume di grano era:
$V_{GRANO} = 4/3 * 10 = 40/3 = (13 + 1/3)$ staia, valore assai distante da quello fornito dall'Autore di 4 staia.

- -

Ragione 148

Un triangolo equilatero ha lati lunghi ℓ = 12 braccia e vi devono essere inscritti tre cerchi fra loro tangenti i più grandi possibile.

Il problema chiede il loro diametro, *d*.



La procedura usata è la seguente:

* moltiplicare la lunghezza di un lato per sé stessa: 12 * 12 = 144;
* moltiplicare per ¾: 144 * ¾ = 108;
* estrarre la radice quadrata: √108 braccia, lunghezza di un'altezza [BH];
* dividere per 2 la lunghezza di un lato: 12/2 = 6;
* sottrarre da √108: (√108 – 6) braccia, lunghezza del diametro di ciascun cerchio, come ad esempio DE.

La formula riassuntiva è:

$$d = [\sqrt{(3/4 * \ell^2)}] - \ell/2.$$

La soluzione è corretta.

Ragione 149

Un "palio" (un drappo) ha la forma di un "padiglione" (un settore circolare).

La circonferenza di cui fa parte l'arco è lunga 22 braccia e il raggio del settore è lungo 12 braccia.

Il problema chiede l'area del drappo.

La procedura usata è:

* moltiplicare la lunghezza della circonferenza per sé stessa: 22 * 22 = 484;
* dividere per (12 + 4/7) [(12 + 4/7) = 88/7]: 484/(12 + 4/7) = (38 + ½) braccia^2, area dell'intero cerchio;
* dividere la lunghezza del raggio per 2: 12/2 = 6;
* moltiplicare per (38 + ½): 6 * (38 + ½) = 231 braccia^2, area del drappo.

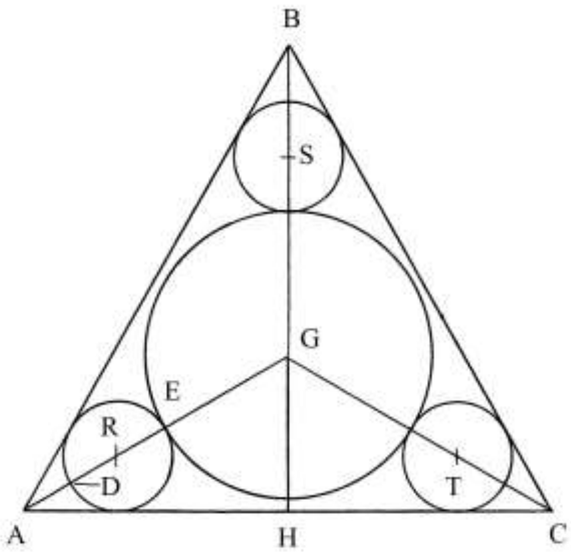
Le ultime due operazioni destano delle perplessità: come fa un settore circolare ad avere area maggiore dell'intero cerchio di cui fa parte?

Ragione 130

Un triangolo equilatero ha lati lunghi 10 braccia.

Vicino ai tre vertici devono essere disegnati tre cerchi di diametro 2 braccia e all'interno un quarto cerchio che risulti tangente ai primi tre.

Il problema chiede il diametro del cerchio interno.



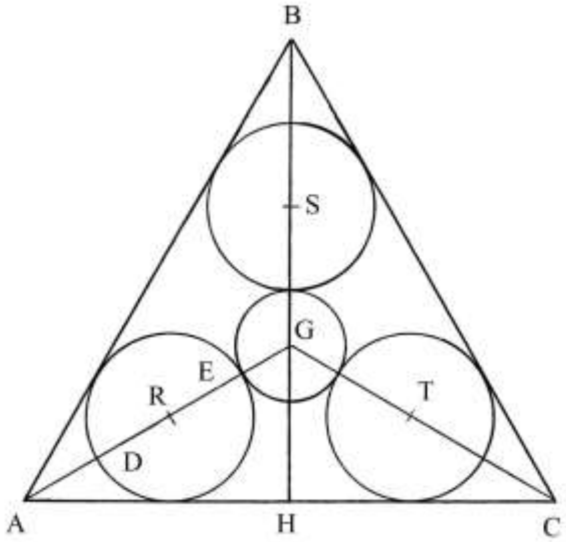
La soluzione prevede i seguenti passi:

* moltiplicare la lunghezza di un lato per sé stessa: 10 * 10 = 100;
* dividere per 3: 100/3 = (33 + 1/3);
* estrarre la radice quadrata: √(33 + 1/3) braccia [lunghezza dei segmenti GA, GB e GC];
* sommare 1 alla lunghezza del diametro DE: 1 + 2 = 3 [braccia: AD è lungo 1];
* sottrarre da √(33 + 1/3): √(33 + 1/3) – 3 [braccia, raggio GE del cerchio di centro G];
* moltiplicare per 2: 2 * [√(33 + 1/3) – 3] = [√(133 + 1/3) – 6] braccia, diametro del cerchio interno.

Ragione 151

Un triangolo equilatero ha lati lunghi 10 braccia.

Al centro, nel punto G, deve essere inserito un cerchio di diametro 2 braccia. Tangenti ad esso e ai lati del triangolo devono essere inscritti altri tre cerchi, di uguali dimensioni, e dei quali deve essere ricavata la lunghezza del diametro.

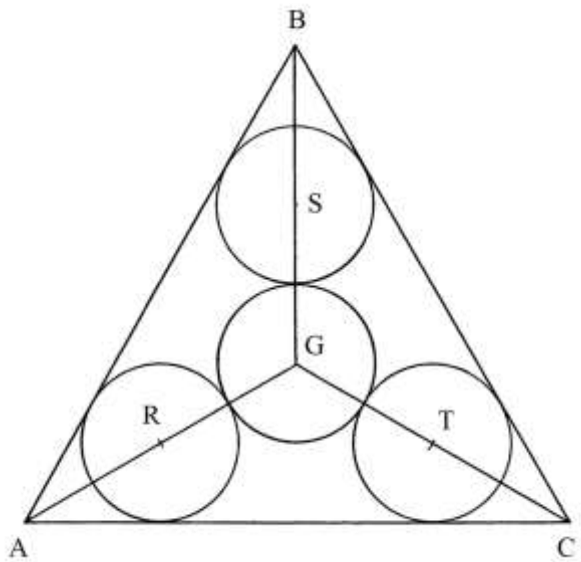


La procedura usata dall'Autore prevede i seguenti passi:

* moltiplicare per sé stessa la lunghezza di un lato: 10 * 10 = 100;
* dividere per 3: 100/3 = (33 + 1/3);
* estrarre la radice quadrata: √(33 + 1/3) [lunghezza dei segmenti GA, GB e GC];
* sottrarre la lunghezza del raggio [GE]: √(33 + 1/3) – 1 [lunghezza di EA];
* moltiplicare per 2/3: [√(33 + 1/3) – 1] * 2/3 = {√[33 + 1/3) + 4/9] – 2/3} =
= [√(14 + 22/27) – 2/3] braccia, lunghezza del diametro DE.

Ragione 152

Un triangolo equilatero ha lati lunghi 12 braccia: vi sono inscritti quattro cerchi di uguale diametro e tangenti sia fra di loro sia ai lati del triangolo. È chiesto il diametro dei cerchi.

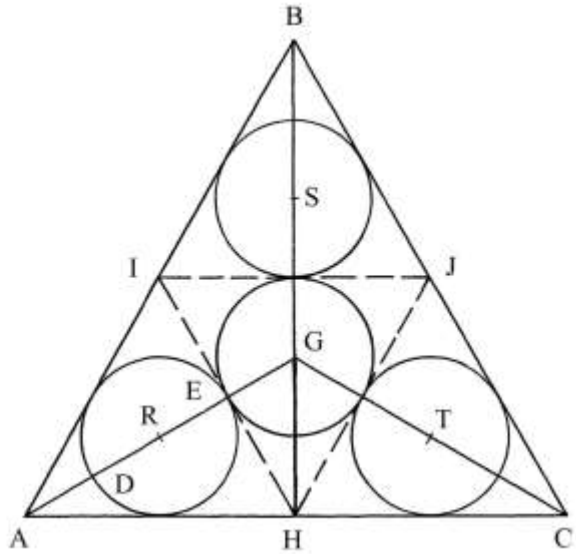


La procedura impiegata è la seguente:

* moltiplicare per sé stessa la lunghezza di un lato: 12 * 12 = 144;
* dividere per 3: 144/3 = 48;
* estrarre la radice quadrata: √48;
* dividere per 2: (√48)/2 = √(48/4) = √12 braccia [diametro di ciascuno dei quattro cerchi].

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

L'Autore accenna poi a un secondo metodo che consiste nel dividere i lati del triangolo in due parti uguali con i punti H, I e J:



Collegando i tre punti si ottengono quattro triangoli equilateri che hanno i lati lunghi la metà di AC e cioè 12/2 = 6 braccia.

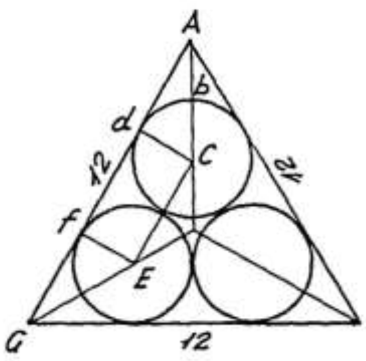
I quattro cerchi sono ora inscritti nei quattro triangoli equilateri e i loro diametri sono calcolati come segue:

* dividere per 2 la lunghezza di AC: 12/2 = 6 [braccia, lunghezza di AH];
* moltiplicare per sé stesso: 6 * 6 = 36;
* dividere per 3: 36/3 = 12;
* estrarre la radice quadrata: √12 braccia, lunghezza del diametro DE.

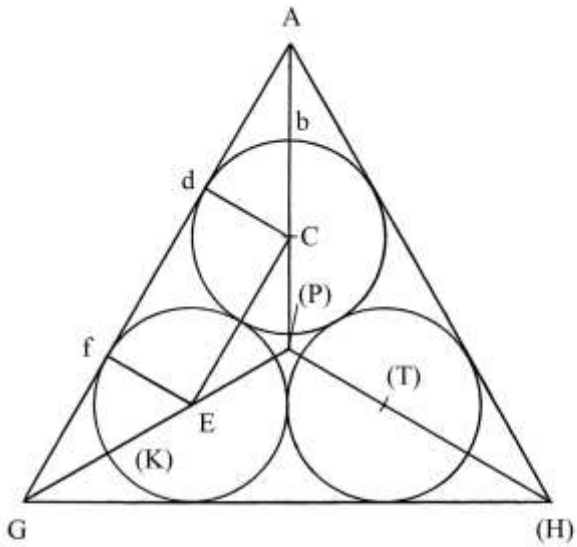
<u>Ragione 153</u>

Un triangolo equilatero ha lati lunghi 12 braccia. Vi devono essere inscritti i soliti tre cerchi di uguale diametro la cui lunghezza deve essere calcolata.

Nel disegno originale sono assenti alcune lettere identificative di punti significativi:



Nello schema qui sotto le lettere aggiunte, tutte maiuscole, sono racchiuse fra parentesi tonde: ad esempio (P):



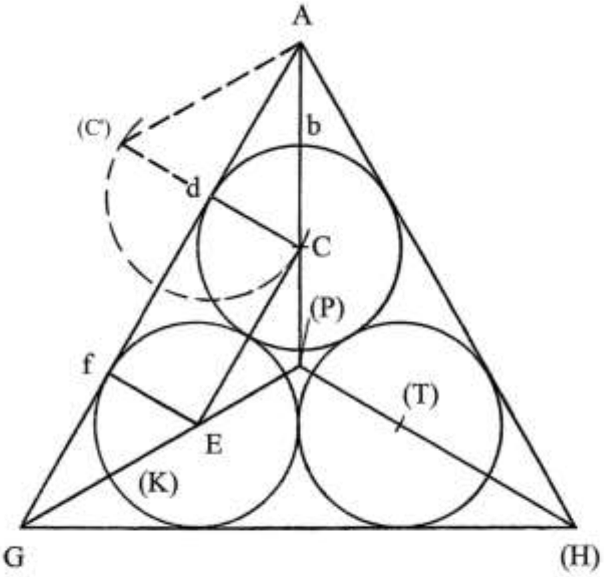
L'Autore ricorda una proprietà: la lunghezza di G(K) è uguale a quella del raggio E(K) del cerchio.

Dai centri C e E sono proiettate le perpendicolari a AG: *Cd* e *Ef* sono due raggi dei cerchi.

I segmenti *Ab* e *bC* hanno uguale lunghezza che è quella del raggio dei tre cerchi.

La soluzione adottata dall'Autore muove dall'attribuzione alla lunghezza di *dC* del valore incognito:

* dC = x;
* AC è lungo il doppio di *dC*: AC = 2 * dC = 2 * x;
* anche CE è lungo quanto AC: CE = 2 * x;
* considerare il triangolo AdC che è rettangolo in *d*; AC è la sua ipotenusa [AC(C') è un triangolo equilatero e AdC ne è la metà originata dall'altezza *Ad*:



]:

vale la relazione: $AC^2 = Ad^2 + dC^2$ e $Ad^2 = AC^2 - dC^2 = (2 * x)^2 - x^2 = 3 * x^2$

e $Ad = x * \sqrt{3}$;

* fG è lungo quanto Ad: $fG = x * \sqrt{3}$;
* sommare le lunghezze di Ad e di fG: $(Ad + fG) = 2 * x * \sqrt{3} = x * \sqrt{12}$;
* la lunghezza di df è uguale a quella di CE e cioè quanto *due* volte il raggio del cerchio: $df = CE = 2 * x$;
* nel lato AG si ha:

$(Ad + fG) = AG - df = 12 - df$

$x * \sqrt{12} = 12 - 2 * x$

$x * \sqrt{12} = \sqrt{(12 - 2 * x)^2}$

$x * \sqrt{12} = \sqrt{(144 - 48 * x + 4 * x^2)}$

$12 * x^2 = 144 - 48 * x + 4 * x^2$

$8 * x^2 = 144 - 48 * x$

$x^2 = 18 - 6 * x$

$x^2 + 6 * x - 18$

La soluzione di questa equazione di 2° grado ha due radici: $- 3 \pm \sqrt{27}$.

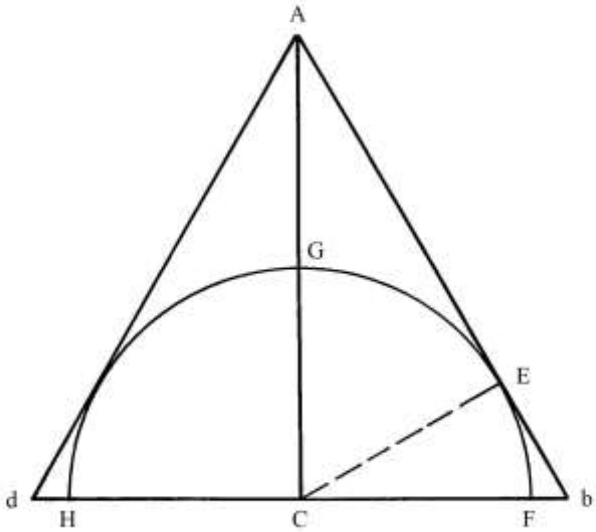
Scegliamo la radice positiva: $x = \sqrt{27} - 3$ braccia, lunghezza del raggio Cd.

Il diametro è lungo: $2 * Cd = 2 * (\sqrt{27} - 3) = (\sqrt{108} - 6)$ braccia.

L'Autore fornisce un risultato che è piuttosto dubbio: il diametro dei tre cerchi sarebbe lungo $(\sqrt{108} - 12)$ che è un numero negativo: $\approx - 1{,}6077$ braccia.

Ragione 154

Un triangolo equilatero ha lati lunghi 10 braccia e vi è inscritto il più grande semicerchio possibile.



Sono chiesti il raggio e l'area del semicerchio.

La Ragione è accompagnata da due schemi: nel primo sono disegnati il triangolo e il semicerchio inscritto e nel secondo il cerchio è intero.

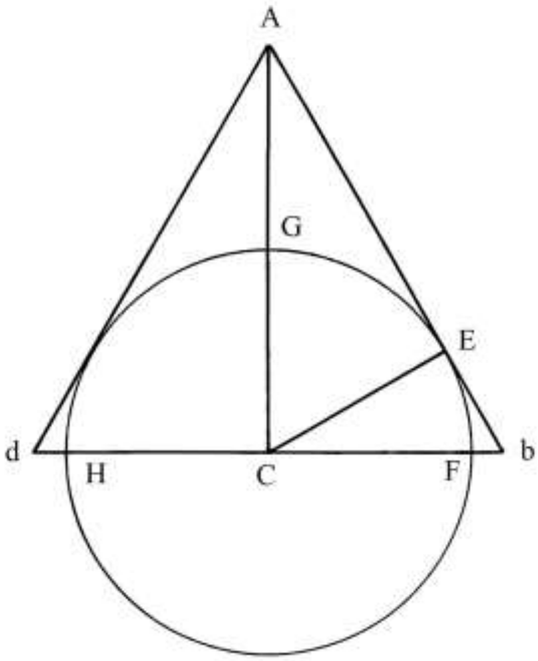
Il semicerchio ha il centro nel punto medio di *db*, che è C, ed è tangente a due lati del triangolo, Ad e Ab.

Il raggio del cerchio è: CH = CF = CE = CG. CE è perpendicolare al lato Ab ed è un'altezza del triangolo rettangolo ACb.

La procedura impiegata contiene i seguenti passi:

*	dividere la lunghezza di *db* per 2:	10/2 = 5;
*	moltiplicare per sé stesso:	5 * 5 = 25;
*	moltiplicare la lunghezza di *Ab* per sé stessa:	10 * 10 = 100;
*	sottrarre 25:	100 – 25 = 75;
*	estrarre la radice quadrata:	√75 braccia [lunghezza di AC].

ACb è un triangolo rettangolo e CE è una sua altezza:



La lunghezza del segmento *Eb* è ricavata applicando una formula di Erone già incontrata in precedenza:

$Eb = (Ab^2 + Cb^2 – AC^2)/(2 * db) = (10^2 + 5^2 – 75)/(2 * 10) =$
$= (100 + 25 – 75)/20 = 50/20 = (2 + ½)$ braccia.

CEb è un triangolo rettangolo e il cateto CE è un raggio del semicerchio: la sua lunghezza è:

$CE^2 = Cb^2 - Eb^2 = 5^2 – (2 + ½)^2 = 25 – (6 + ¼) = (18 + ¾)$ e
$CE = \sqrt{(18 + ¾)}$ braccia.

Il diametro HF è lungo:

$HF = 2 * CE = 2 * \sqrt{(18 + ¾)} = \sqrt{75}$ braccia.

L'area dell'intero cerchio è:

$A_{\text{CERCHIO}} = 11/14 * HF^2 = 11/14 * 75 = (58 + 13/14)$ braccia^2.

L'area del semicerchio è la metà:

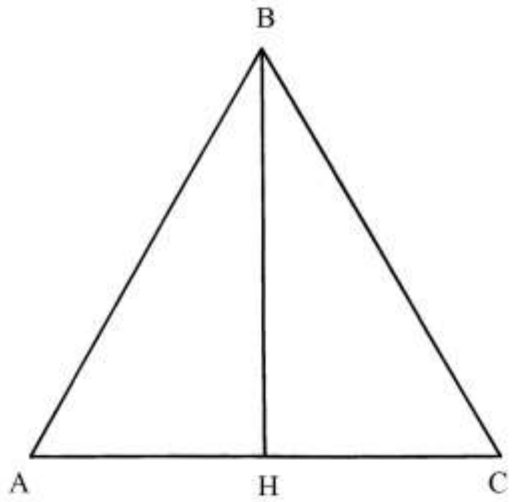
$A_{\text{SEMICERCHIO}} = ½ * (58 + 13/14) = (29 + 13/28)$ braccia^2.

L'intera circonferenza è lunga:

circonferenza = $22/7 * HF = 22/7 * \sqrt{75}$ braccia e la semicirconferenza è lunga:
$(22/7 * \sqrt{75})/2 = 22/14 * \sqrt{75} = 11/7 * \sqrt{75}$ braccia.

Ragione 155

Il problema utilizza il triangolo della precedente Ragione. I suoi lati sono lunghi 10 braccia ed è chiesta la sua area.



Nella soluzione della precedente Ragione è stata calcolata la lunghezza di BH che è √75 braccia.

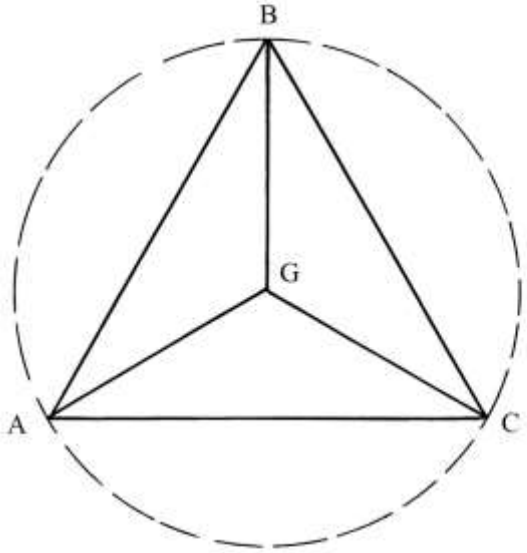
L'area è data da:

$A_{ABC} = AH * BH = 5 * \sqrt{75} = \sqrt{1875}$ braccia^2.

Infine, l'Autore suggerisce l'impiego alternativo della più complessa formula di Erone per il calcolo dell'area di un triangolo: il risultato è identico al precedente.

Ragione 156

Il solito triangolo equilatero ha lati lunghi 10 braccia:



Dal centro G sono disegnati tre segmenti, di uguale lunghezza, che lo collegato ai vertici A, B e C.

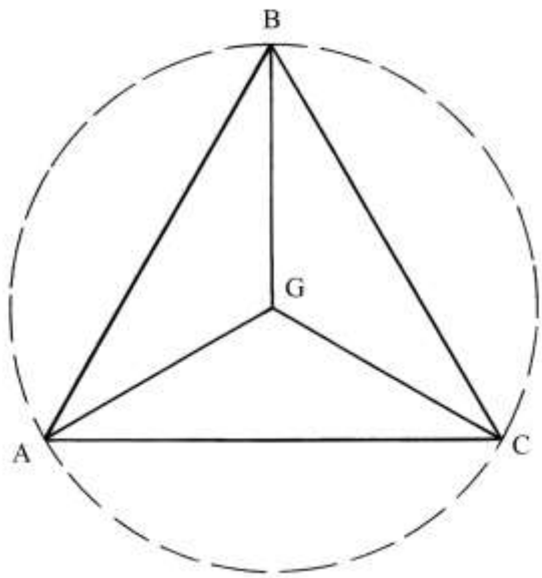
L'Autore non ne fa cenno, ma i tre segmenti sono altrettanti raggi del cerchio in cui è inscritto il triangolo.

La soluzione è semplice:

* moltiplicare la lunghezza di un lato per sé stessa: 10 * 10 = 100;
* dividere per 3: 100/3 = (33 + 1/3);
* estrarre la radice quadrata: √(33 + 1/3) braccia, lunghezza di GA = GB = GC.

Ragione 157

Un triangolo equilatero ha lati con lunghezza incognita: sono note le lunghezze dei segmenti GA, GB e GC che sono 6 braccia ciascuno.



La soluzione è rapida:

* moltiplicare la lunghezza di GA per sé stessa: $6 * 6 = 36$;
* moltiplicare per 3: $36 * 3 = 108$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{108}$ braccia, lunghezza dei lati del triangolo.

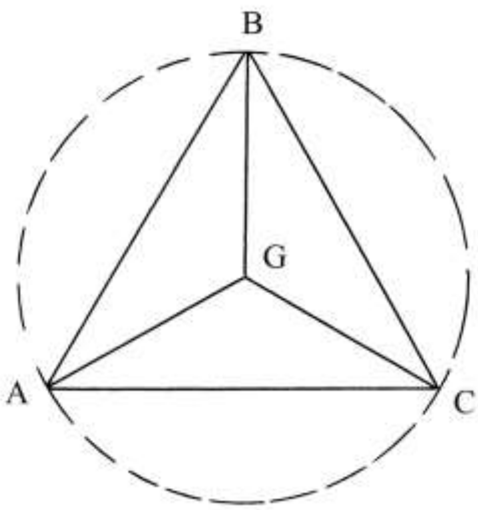
GA, GB e GC sono tre raggi del cerchio circoscritto al triangolo equilatero.

Ragione 158

Il problema ripresenta il tema oggetto delle ragioni 156 e 157.

I lati del triangolo equilatero sono lunghi 2 braccia più della lunghezza dei tre segmenti che collegano il centro G ai suoi vertici:

$$AB = AG + 2.$$



L'Autore assegna alla lunghezza di AG il valore dell'incognita:

$AG = x$ e $AB = x + 2$.

La procedura richiama quella usata nelle soluzioni delle ultime due Ragioni:

* moltiplicare la lunghezza di AG per sé stessa: $AG * AG = x * x = x^2$;
* moltiplicare per 3: $3 * x^2$;
* estrarre la quadrata: $\sqrt{(3 * x^2)} = x * \sqrt{3} = AB$;
* uguagliare le due espressioni di AB: $x + 2 = x * \sqrt{3}$;
* elevare al quadrato entrambi i membri dell'uguaglianza:

$(x + 2)^2 = 3 * x^2$

$x^2 + 4 * x + 4 = 3 * x^2$

$4 * x + 4 = 2 * x^2$.

I passi successivi portano l'Autore ai seguenti risultati:

$x = \sqrt{3} + 1 = AG$

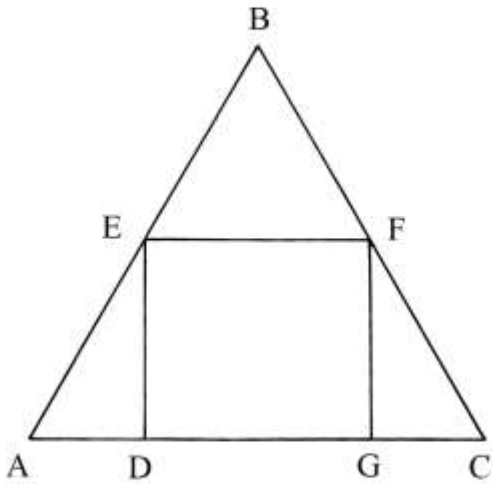
$AB = x + 2 = (\sqrt{3} + 3)$ braccia.

La radice positiva dell'equazione di 2° grado ($4 * x + 4 = 2 * x^2$) fornisce lo stesso risultato:

$x = \sqrt{3} + 1$.

Ragione 159

Un triangolo equilatero ha lati lunghi 12 braccia e vi è inscritto il più grande quadrato: deve essere calcolata la lunghezza dei suoi lati.



La soluzione adottata dall'Autore è la seguente:

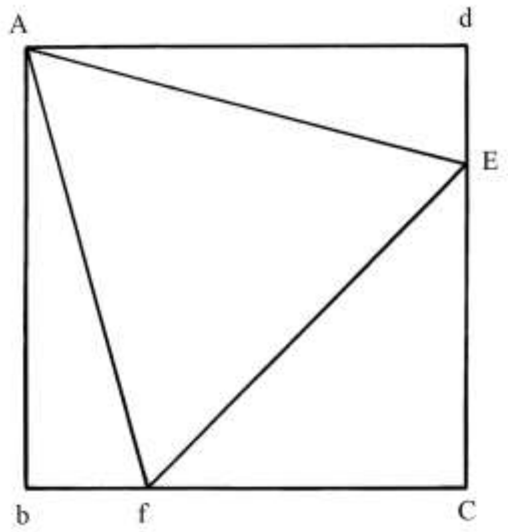
* moltiplicare la lunghezza di un lato per sé stessa: $AC * AC = 12 * 12 = 144$;
* dividere per 4: $144/4 = 36$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{36} = 6$ braccia, lunghezza dei lati del quadrato DEFG.

Un problema simile è contenuto nella precedente Ragione 63.

Ragione 160

Il quadrato AbCd ha lati lunghi 10 braccia: vi è inscritto il triangolo equilatero più grande possibile, AEf.

Il problema chiede la lunghezza dei lati del triangolo.



La soluzione del problema utilizza l'algebra.

AdE è un triangolo rettangolo di cui sono ignote le lunghezze del cateto dE e dell'ipotenusa AE.

La lunghezza di dE è l'incognita: dE = x.

Il lato AE è lungo:

$AE^2 = Ad^2 + dE^2 = 10^2 + x^2 = 100 + x^2$ e

$AE = \sqrt{(100 + x^2)}$.

EC è lungo:

EC = dC – dE = 10 – x.

Elevare al quadrato:

$EC^2 = (10 - x)^2 = (100 - 20 * x + x^2)$.

Cf è lungo quanto EC, quindi:

$Cf^2 = (100 - 20 * x + x^2)$.

fE è un lato del triangolo ed è l'ipotenusa del triangolo rettangolo *isoscele* fEC. La sua lunghezza è data da:

$fE^2 = Ec^2 + Cf^2 = 2 * (100 - 20 * x + x^2) = (200 - 40 * x + 2 * x^2)$.

Ma fE è lungo quanto AE. Vale l'uguaglianza:

$AE^2 = Ef^2$

$(100 + x^2) = (200 - 40 * x + 2 * x^2)$.

$100 = 200 - 40 * x + x^2$.

A questo punto l'Autore esegue i seguenti passaggi:

* dividere per 2 il coefficiente numerico di "40 * x": 40/2 = 20;
* moltiplicare per sé stesso: 20 * 20 = 400;
* sottrarre 100: 400 – 100 = 300.

Per l'Autore consegue:

$dE = (20 - \sqrt{300})$ braccia.

La lunghezza di CE è data da:

$CE = dC - dE = 10 - (20 - \sqrt{300}) = (\sqrt{300} - 10)$ braccia.

Anche Cf è lungo $(\sqrt{300} - 10)$ braccia.

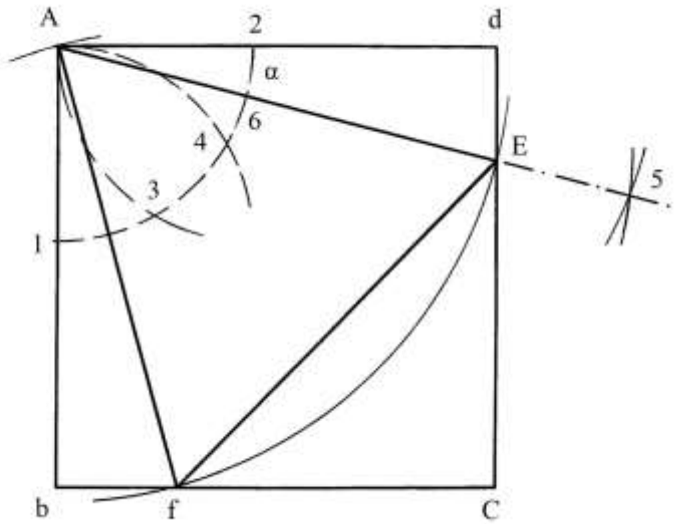
Poi prosegue con i passi che seguono:

* moltiplicare per sé stessa la lunghezza di CE: $(\sqrt{300} - 10)^2 = 300 - 20 * \sqrt{300} + 100 = $ $= 400 - \sqrt{(400 * 300)} = (400 - \sqrt{120000})$;
* moltiplicare per 2: $2 * (400 - \sqrt{120000}) = (800 - \sqrt{480000})$ braccia, lunghezza del lato AE.

Il risultato è corretto: $(800 - \sqrt{480000}) \approx 10{,}35$ braccia.

- APPROFONDIMENTO -

L'Autore non accenna a alcuna costruzione geometrica del triangolo equilatero inscritto. Ecco un metodo grafico per ottenerlo.



Fare centro in A e con raggio a piacere disegnare l'arco 1-2: con la stessa apertura fare centro in 1 e in 2 e tracciare altri due archi che tagliano il primo nei punti 3 e 4.

Con raggio abbastanza grande, fare centro nei punti 2 e 4 e disegnare due archi che si intersecano in 5.

Per questo ultimo punto tracciare una semiretta uscente da A che taglia dC nel punto E, secondo vertice del triangolo equilatero: AE è il suo primo lato.

Fare centro in A e con raggio AE disegnare un arco da E fino a incontrare in *f* il lato bC.

AEf è il triangolo equilatero inscritto.

La costruzione del triangolo equilatero può essere spiegata con semplici concetti di trigonometria.

L'angolo 2-A-4 è ampio 30° perché è ampio un terzo dell'angolo retto 2-A-1.

A sua volta, l'angolo 2-A-6 è ampio la metà di 30°:

$\alpha = 30°/2 = 15°$.

La tangente di α vale:

$tg\ \alpha = tg\ 15° = 0{,}26795$.

AdE è un triangolo rettangolo: il cateto dE è lungo:

$dE = Ad * tg\ \alpha = 10 * 0{,}26795 = 2{,}6795$ braccia.

Il lato AE è l'ipotenusa di AdE e la sua lunghezza è:

$AE^2 = Ad^2 + dE^2$

$AE = \sqrt{(10^2 + 2{,}6795^2)} \approx \sqrt{107{,}18} \approx 10{,}35$ braccia.

Infine, i segmenti definiti dall'inscrizione del triangolo equilatero possiedono le seguenti proprietà:

* dE = bf;
* EC = fC.

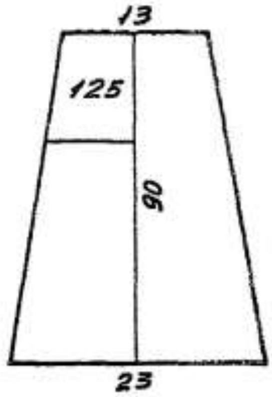
- -

Ragione 161

Un terreno ha la forma di un trapezio isoscele: la base maggiore è lunga 23 braccia e quella minore è 13.

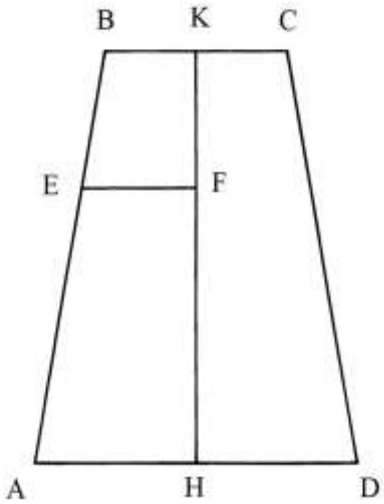
L'altezza è 90 braccia.

Deve essere ritagliata una porzione che ha area di 125 braccia^2 e la forma di un trapezio rettangolo.



Utilizziamo lo schema originale benché sia notevolmente fuori scala: è giocoforza farlo data la dimensione dell'altezza, 90 braccia.

Il problema chiede la lunghezza del segmento KF:

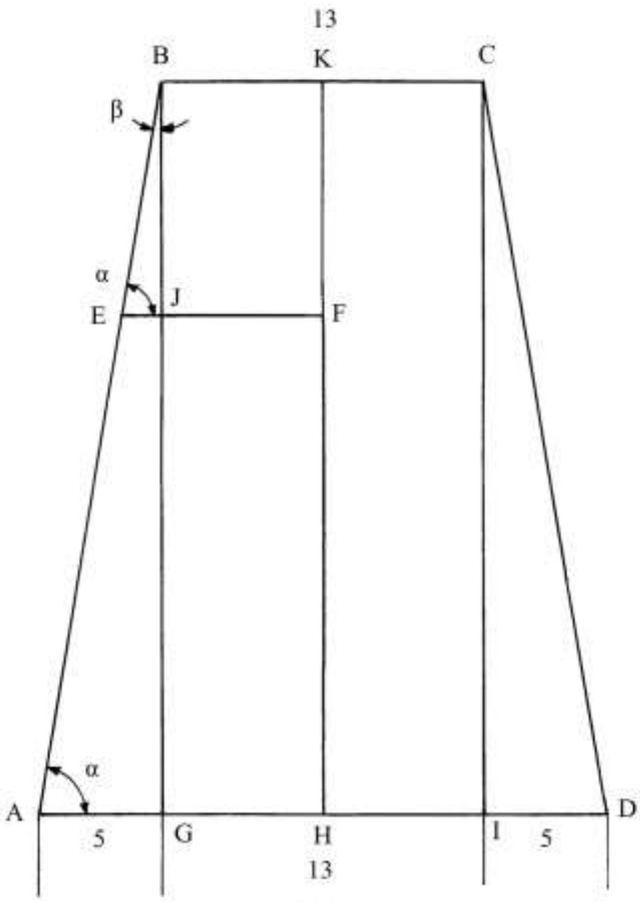


La differenza fra la lunghezza delle due basi vale:

AD – BC = 23 – 13 = 10 braccia.

Per ciascun lato la differenza è lunga:

AG = ID = 20/2 = 5 braccia.



(23)

L'Autore introduce il concetto di *pendio*, cioè l'inclinazione: il rapporto fra AG e BG vale:

$AG/BG = 5/90 = 1/18$.

ABG è un triangolo rettangolo: il rapporto fra i due cateti misura la *tangente* di un angolo:

$AB/BG = tg\ \beta = 5/90 = 1/18$.

$BG/AG = tg\ \alpha = 90/5 = 18$.

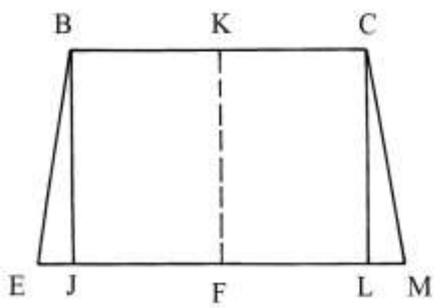
Con leggera approssimazione per difetto, l'angolo β è ampio:

$\beta \approx 3° \ 10'$.

L'angolo complementare α è ampio:

$\alpha = 90° - 3°10' = 86° \ 50'$.

L'Autore ritaglia il trapezio isoscele BEMC: l'angolo BEJ è ampio α e quello EBJ è β.



L'area del trapezio rettangolo EBKF deve essere uguale a 125 braccia^2. Il trapezio isoscele BEMC ha area doppia: 250 braccia^2.

La procedura richiede il calcolo di un numero che opportunamente moltiplicato e sommato faccia 250 [l'area di BEMC]. I suoi passi sono i seguenti:

* il numero cercato è l'incognita "x";

* moltiplicare per 13: $13 * x$;
* moltiplicare x per 1/18: $x * 1/18 = x/18$;
* moltiplicare per x: $x /18 * x = x^2/18$;
* sommare a 13 * x: $x^2/18 + 13 * x$;
* uguagliare a 250: $(x^2/18 + 13 * x) = 250$;
* dividere entrambi i membri per 1/18 [oppure moltiplicare per 18]:

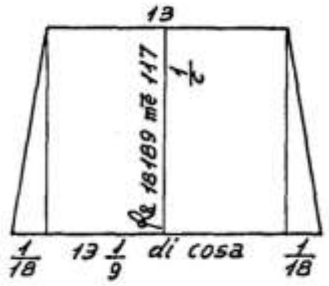
$$(x^2/18 + 13 * x)/(1/18) = 250/(1/18)$$
$$x^2 + 234 * x = 4500;$$

* dividere per 2 il coefficiente di "234 * x": $234/2 = 117$;
* moltiplicare per sé stesso: $117 * 117 = 13689$;
* sommare a 4500: $13689 + 4500 = 18189$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{18189}$;
* sottrarre 117: $(\sqrt{18189} – 117)$ braccia, valore di "x" e lunghezza di KF.

Le lunghezze di EJ, JL e LM sono:

* $EJ = LM = 1/18 * (\sqrt{18189} – 117)$ braccia;
* $JL = (13 + 1/9) * (\sqrt{18189} – 117)$ braccia.

Lo schema che segue è riprodotto dal testo originale (a p. 131):



La lunghezza di KF equivale a:

$$(\sqrt{18189} – 117) \approx 17,86 \text{ braccia.}$$

- APPROFONDIMENTO -

Riconsideriamo la *terza* figura di questo paragrafo.

BEJ e BAG sono due triangoli rettangoli simili e vale la proporzione:

$BJ : BG = EJ : AG$ da cui:

$EJ = (BJ * AG)/BG.$

BJ è lungo quanto KF ed è l'incognita "x", per cui l'ultima formula diviene:

$EJ = (x * 5)/90.$

L'area del trapezio rettangolo EBKF è:

$A_{EBKF} = (BK + EF)/2 * KF.$

La lunghezza di EF è data da:

$EF = EJ * JF = 5/90 * x + BK = 5/90 * x + 13/2.$

L'area di EBKF è:

$A_{EBKF} = (13/2 + 5/90 * x + 13/2)/2 * x = (26/2 + 1/18 * x)/2 * x =$
$= (13/2 * x + 1/36 * x^2).$

Conosciamo l'area di EBKF che è 125 braccia^2.

Uguagliamo:

$(13/2 * x + 1/36 * x^2) = 125$

Moltiplichiamo per 36:

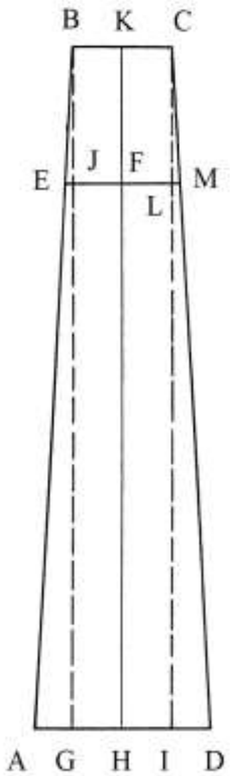
$$x^2 + 234 * x = 4500$$
$$x^2 + 234 * x - 4500 = 0$$

La radice positiva data dalla soluzione di questa equazione di secondo grado è:

$$x \approx 17{,}865 \text{ braccia.}$$

Il risultato è uguale a quello fornito dall'Anonimo Fiorentino.

Lo schema che segue presenta la soluzione, in esatta scala:

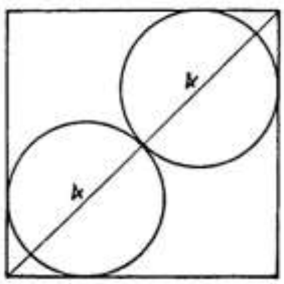


- -

Ragione 162

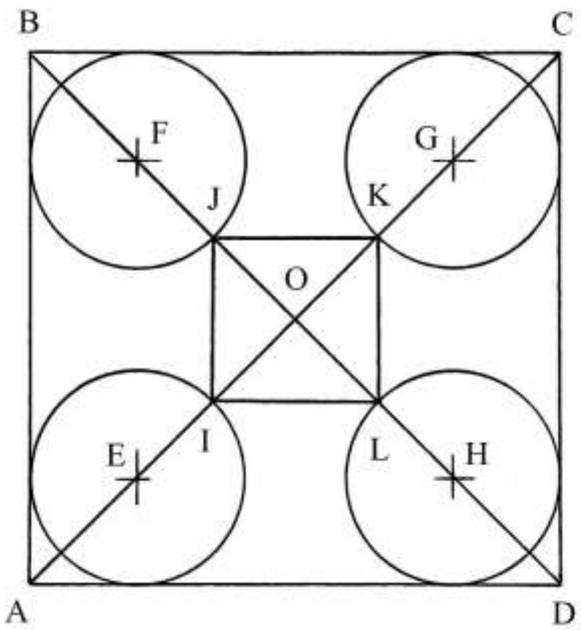
In un quadrato sono inscritti due cerchi tangenti che hanno entrambi diametro di 4 braccia.

Il problema è identico a quello contenuto nella Ragione 121.



<u>Ragione 163</u>

Il quadrato ABCD ha lati lunghi 5 braccia. Vi sono inscritti quattro cerchi con diametri lunghi 2 braccia e tangenti ai lati del quadrato.



All’interno è disegnato il più grande quadrato possibile, IJKL, i cui vertici giacciono sulle circonferenze dei quattro cerchi.

Il problema chiede la lunghezza dei lati del quadrato interno.

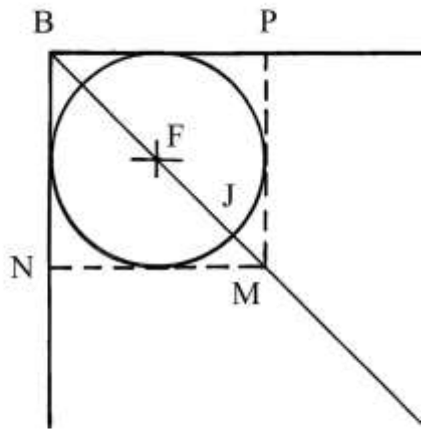
La procedura usata dall’Autore è la seguente:

* moltiplicare per sé stessa la lunghezza di un lato del quadrato esterno: 5 * 5 = 25;
* moltiplicare per 2: 25 * 2 = 50;
* estrarre la radice quadrata: √50 [braccia, lunghezza delle diagonali AC e BD].

Per semplificare la soluzione, accantoniamo la procedura dell’Autore e utilizziamo un altro metodo.

Il segmento BJ è lungo:

BJ = BF + FJ.



BF è la semidiagonale del quadrato BPMN in cui è inscritto il cerchio di centro F e FJ è un raggio di questo ultimo.

BF è:

$BF = BM/2 = [\sqrt{(BN^2 + NM^2)}]/2 = [\sqrt{(2^2 + 2^2)}]/2 = (\sqrt{8})/2 = \sqrt{(8/4)} = \sqrt{2}$ braccia.

FJ è lungo 1 braccio. Quindi:

$BJ = BF + FJ = (\sqrt{2} + 1)$ braccia.

LD ha la stessa lunghezza di BJ.

La lunghezza della diagonale JL è data da:

$$JL = BD - BJ - LD = \sqrt{50} - (\sqrt{2} + 1) - (\sqrt{2} + 1) = 50 - 2 * \sqrt{2} - 2 =$$
$$= 5 * \sqrt{2} - 2 * \sqrt{2} - 2 = (3 * \sqrt{2} - 2) \text{ braccia.}$$

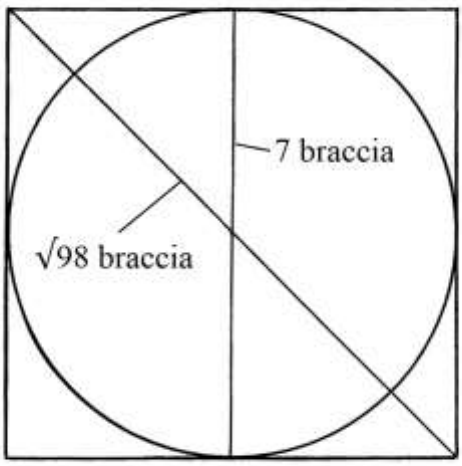
Il rapporto fra la lunghezza della diagonale e quella di un lato di un quadrato è √2. È sufficiente dividere per √2 la lunghezza di JL per ottenere la lunghezza del lato JI:

$$JI = JL/\sqrt{2} = (3 * \sqrt{2} - 2)/\sqrt{2} = [\sqrt{2} * (3 * \sqrt{2} - 2)]/2 = (2 * 3 - 2 * \sqrt{2})/2 =$$
$$= (3 - \sqrt{2}) \text{ braccia.}$$

Nota: l'Autore fornisce per la lunghezza dei lati del quadrato interno il valore (11 – √2) braccia.

Ragione 164

Un quadrato ha le diagonali lunghe √98 braccia. Vi deve essere inscritto il più grande cerchio.



Il problema chiede il diametro del cerchio.

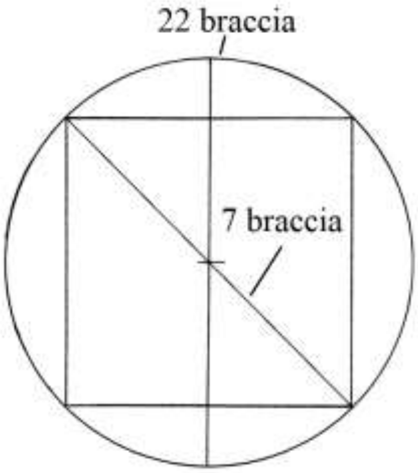
La soluzione è:

- moltiplicare la lunghezza di una diagonale per sé stessa: $(\sqrt{98})^2 = 98$;
- dividere per 2: 98/2 = 49;
- estrarre la radice quadrata: √49 = 7 braccia, diametro del cerchio.

Ragione 165

Un cerchio ha il diametro lungo 7 braccia e la circonferenza 22 braccia.

Vi è inserito un quadrato del quale si deve calcolare la lunghezza dei lati.

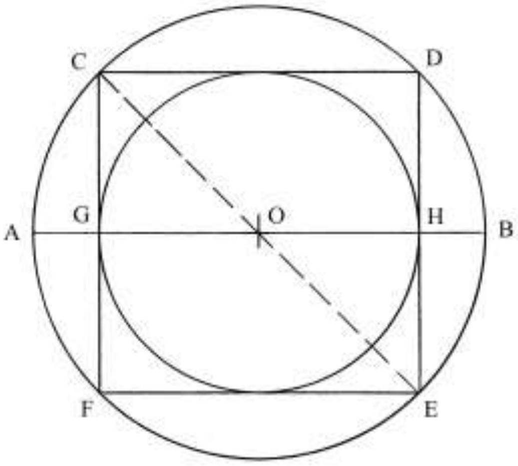


La soluzione è:

* moltiplicare la lunghezza del diametro per sé stessa: $7 * 7 = 49$;
* dividere per 2: $49/2 = (24 + ½)$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{(24 + ½)}$ braccia, lunghezza dei lati del quadrato.

Ragione 166

Un campo circolare deve essere diviso in parti uguali fra due fratelli, mantenendo la forma circolare.



AB è un diametro del campo. Deve esservi inscritto il quadrato più grande: è CDEF.
CE è un altro diametro del cerchio esterno e una diagonale del quadrato inscritto.
L'area del cerchio esterno è data da:

$A_{\text{ESTERNO}} = 11/14 * AB^2$.

Il lato CD del quadrato è lungo:

$CD = CE/\sqrt{2} = AB/\sqrt{2}$.

L'area del quadrato è:

$A_{\text{CDEF}} = CD^2 = AB^2/2$.

All'interno del quadrato è inscritto un secondo cerchio che ha diametro GH = CD:
L'area del cerchio interno è:

$A_{\text{INTERNO}} = 11/14 * GH^2 = 11/14 * CD^2 = 11/14 * (AB^2/2) = 11/28 * AB^2$.

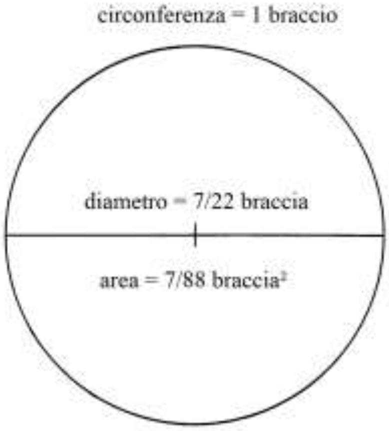
L'area del cerchio esterno è il doppio di quella del cerchio interno.

L'area della corona circolare delimitata dalle due circonferenze ha area uguale a quella del cerchio interno.

Il cerchio esterno è diviso in due aree circolari di uguale superficie.

Ragione 167

Un cerchio ha circonferenza lunga 1 braccio.



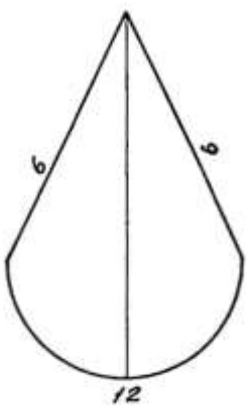
Il problema chiede la sua area.

La soluzione è veloce:

* dividere la lunghezza della circonferenza per (3 + 1/7): 1/(3 + 1/7) = 7/22 braccia, lunghezza del diametro;
* moltiplicare la lunghezza della circonferenza per quella del diametro: 1 * 7/22 = 7/22;
* dividere per 4: (7/22)/4 = 7/88 braccia^2, area del cerchio.

Ragione 168

Deve essere misurata la superficie di un *girone sestato*:



L'Autore usa pure il termine alternativo *garone*.

Sestato sta forse per disegnato con le *seste*, il compasso.

Qui il termine *girone* è identificato con *garone* o *gherone*.

Secondo il TLIO (Tesoro della Lingua Italiana delle Origini)
http://tlio.ovi.cnr.it/TLIOlemm/?q=g
il *gherone* è “una striscia triangolare di stoffa, con la punta rivolta in alto, cucita ai lati di una veste”.

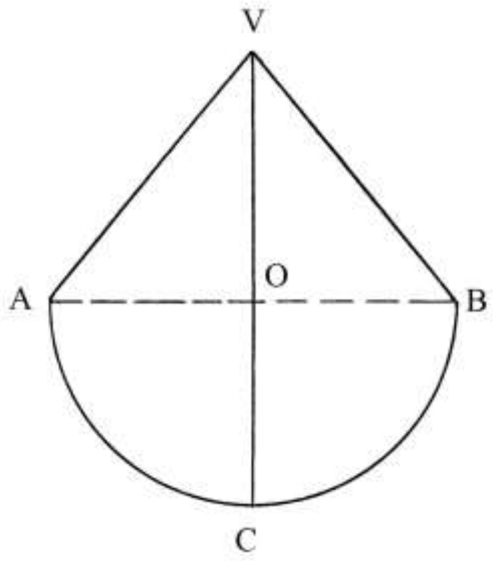
Il problema presenta alcune affinità con quello contenuto nella Ragione 149.

L’Autore moltiplica la lunghezza di 6 braccia dei due lati per metà della lunghezza della semicirconferenza:

$$6 * (12/2) = 6 * 6 = 36 \text{ braccia}^2, \text{ area del gherone.}$$

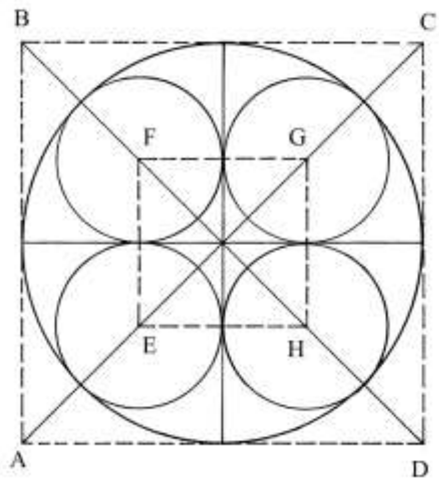
La soluzione del problema è piuttosto oscura.

Lo schema che ridisegna in scala la precedente figura:



Ragione 169

Un cerchio ha diametro lungo 12 braccia e al suo interno sono inscritti quattro cerchi di uguali dimensioni:



Il problema chiede il diametro dei quattro cerchi.

Il cerchio esterno è inscritto in un quadrato, ABCD, che ha lati lunghi quanto il suo diametro: 12 braccia.

AC e BD sono le due diagonali.

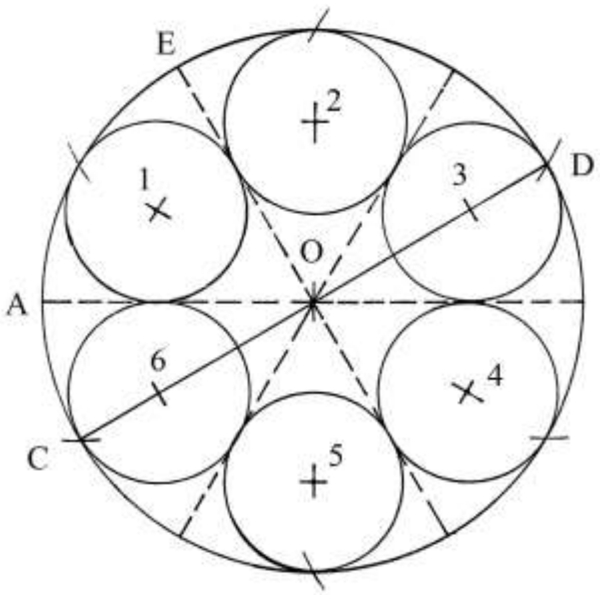
I quattro centri dei cerchi interni giacciono sulle due diagonali e sono i vertici di un secondo quadrato, EFGH, concentrico a quello esterno.

I lati di EFGH sono lunghi quanto il diametro dei cerchi inscritti.

L'Autore si rifà a precedenti soluzioni e conclude che il diametro dei quattro cerchi è lungo 5 braccia.

<u>Ragione 170</u>

Nel solito cerchio di diametro 12 braccia sono inscritti *sei* cerchi tangenti: è chiesto il loro diametro.



AB e CD sono due diametri del cerchio esterno.

L'Autore ipotizza l'ipotesi di una divisione dello spazio in sei triangoli nei quali sono inscritti i sei cerchi interni. A suo avviso il diametro di questi ultimi è lungo i 2/3 del raggio del cerchio esterno e cioè 2/3 * (12/2) = 4 braccia.

Il cerchio di centro 1 è inscritto nel settore circolare (che *non* è un triangolo) AOE.

L'Autore sembra calcolare l'area di un settore circolare ma i suoi passaggi intermedi sono piuttosto oscuri, come mostra il passo finale qui riprodotto da pagina 134 della trascrizione a cura di Annalisa Simi:

"… Sì come faciemo 6 triangoli dritti achozati insieme a uno punto di cientro e ciascuno triangolo avesse lo diamitro suo 6 braccia, cioè l'1/2 di 12 che ttu volessi misurare quello 6 contro dritte linee e ssapere la quantità della sua possessione, farai così. La regola dicie che ttu dia multipricare ciascuno triangolo, che è 6, per lo 1/2 della sua circunferentia, 6 canti di ciascuno triangolo e per l'altro si vuole sapere quanto è ciascuno triangolo per lato. Ora multiprica 6 linee in radice di 48, fa radice di 1728, della quale radice, e ll'altra della radice di 432, multiprica per 6, fa radice di 1552, che è 39 15/31 e tanto è la quantità della possessione ed è fatta.".

Sul risultato di (39 + 15/31) braccia^2 calcolato dall'Autore è ragionevole avanzare dei dubbi.

L'area dell'intero cerchio esterno è:

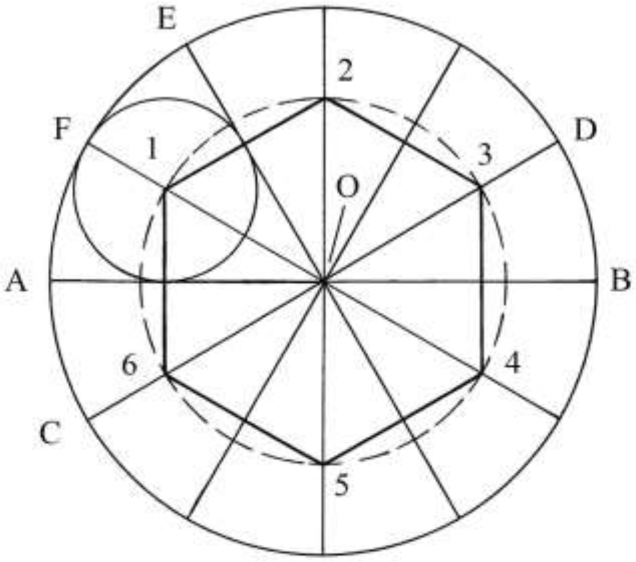
$A_{CERCHIO} = 11/14 * AB^2 = 11/14 * 12^2 = (113 + 1/7)$ braccia^2.

Il settore circolare AOE ha area uguale a *un sesto* di quella del cerchio esterno:

$A_{AOE} = A_{CERCHIO}/6 = (113 + 1/7)/6 = (18 + 6/7)$ braccia^2.

- APPROFONDIMENTO -

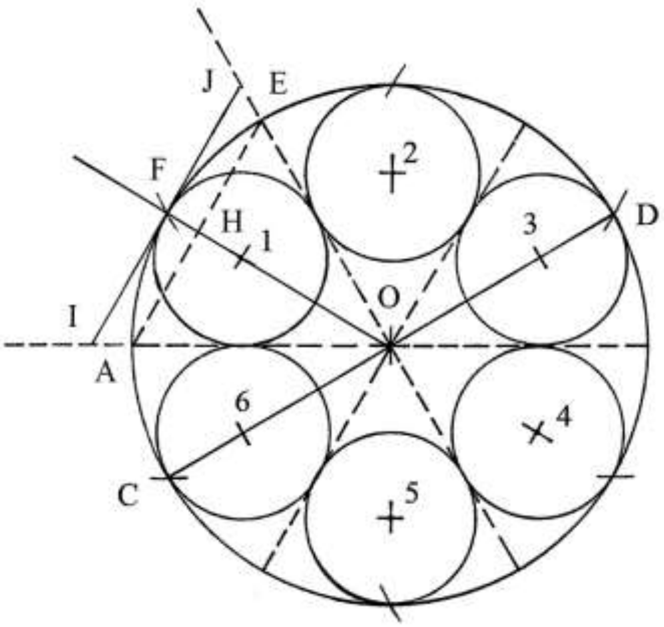
I centri dei sei cerchi sono i vertici di un esagono regolare inscritto in un cerchio di raggio O-1:



Il raggio O-1 è lungo:

O-1 = OF – (F-1) = 6 – 2 = 4 braccia.

AEO e IJO sono due triangoli equilateri simili e con il vertice O in comune:



L’altezza OH è lunga:

$OH = AE * (\sqrt{3})/2 = 6 * (\sqrt{3})/2 = 3 * \sqrt{3}$ braccia.

L’area del triangolo AEO è:

$A_{AEO} = OH * AE/2 = (3 * \sqrt{3}) * (6/2) = 9 * \sqrt{3} = \sqrt{243}$ braccia^2.

Per calcolare l'area di IJO occorre ricavare la lunghezza dei suoi lati: l'altezza OF è un raggio del cerchio esterno ed è 6 braccia. Essa è data da:

$OF = IJ * (\sqrt{3})/2$

$6 = IJ * (\sqrt{3})/2$ da cui:

$IJ = OF * 2/(\sqrt{3}) = 6 * 2 * (\sqrt{3})/3 = 4 * \sqrt{3} = \sqrt{48}$ braccia.

L'area di IJO è data da:

$A_{IJO} = OF * IJ/2 = 6 * (4 * \sqrt{3})/2 = 6 * 2 * \sqrt{3} = \sqrt{432}$ braccia^2.

Questi passaggi spiegano l'origine dei due dati, $\sqrt{48}$ braccia e $\sqrt{432}$ braccia^2, che compaiono nel testo originale.

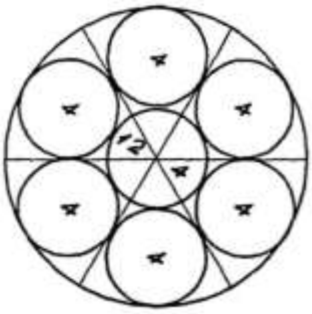
- -

Ragione 171

In un cerchio che ha diametro lungo 12 braccia devono essere inscritti *sette* cerchi di uguali dimensioni.

Il problema è un'evidente estensione di quello descritto nella precedente Ragione.

Tutti e sette i cerchi inscritti hanno diametro lungo 4 braccia:

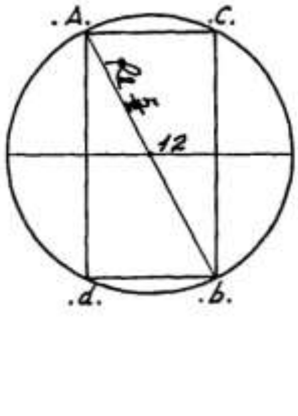


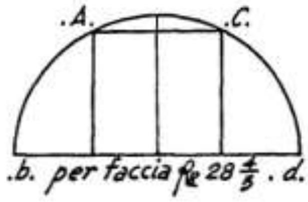
La circonferenza *c* di ciascuno dei cerchi inscritti è lunga:

$c = 22/7 * 4 = (12 + 4/7)$ braccia.

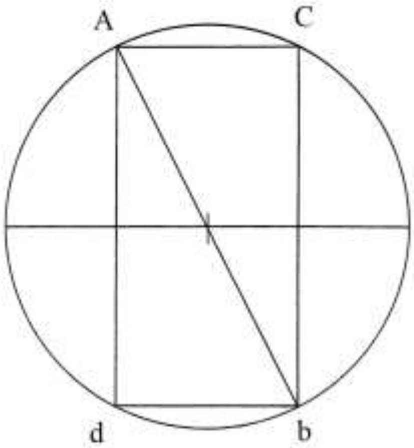
Ragione 172

Un cerchio ha diametro lungo 12 braccia. In un semicerchio da esso ricavato deve essere inscritto il più grande quadrato possibile.





Il rettangolo ACbd è un doppio quadrato e cioè è un *bislungo*:



Il problema chiede la lunghezza dei lati del quadrato inscritto nel semicerchio.
L'Autore ricorre all'algebra e assegna alla lunghezza di AC il valore dell'incognita:

$AC = x$ e $Ad = 2 * x$.

Ab è una diagonale del rettangolo ACbd e un diametro del cerchio. Vale la relazione:

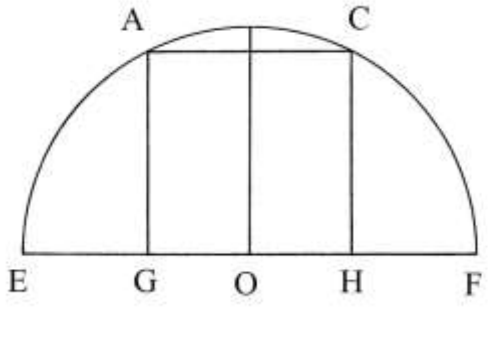
$Ab^2 = AC^2 + Cb^2 = Ac^2 + Ad^2 = x^2 + (2 * x)^2 = 5 * x^2$.

Ma Ab = 12, quindi si ha l'eguaglianza:

$12^2 = 5 * x^2$

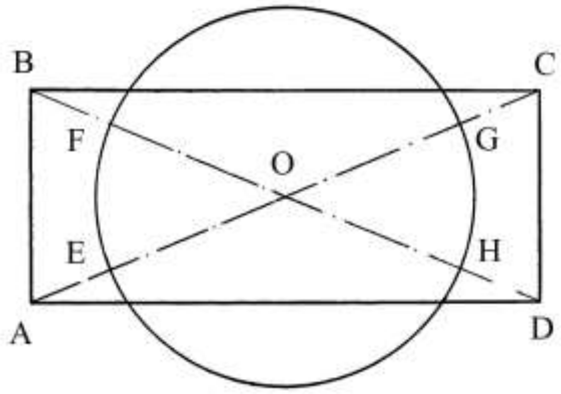
$x^2 = 144/5 = (28 + 4/5)$ e

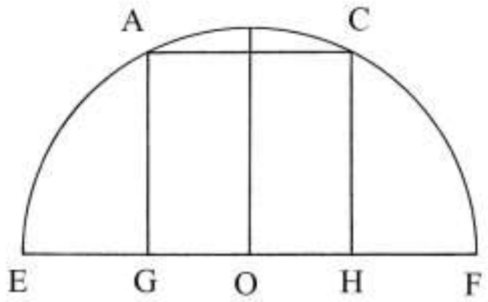
$x = \sqrt{(28 + 4/5)}$ braccia.



<u>Ragione 173</u>

Un rettangolo è lungo (9 + 5/8) braccia e largo 4 braccia.
Deve essere trasformato in un cerchio di uguale area.
Il testo non è accompagnato da alcuno schema.





L'area del rettangolo ABCD è:

$A_{ABCD} = AD * AB = (9 + 5/8) * 4 = (38 + ½)$ braccia^2.

L'area del cerchio equivalente è:

$A_{CERCHIO} = 22/7 * (d/2)^2 = 22/28 * d^2 = 11/14 * d^2$ da cui:

$d^2 = 14/11 * A_{CERCHIO} = 14/11 * (38 + ½) = 49$ e

$d = \sqrt{49} = 7$ braccia.

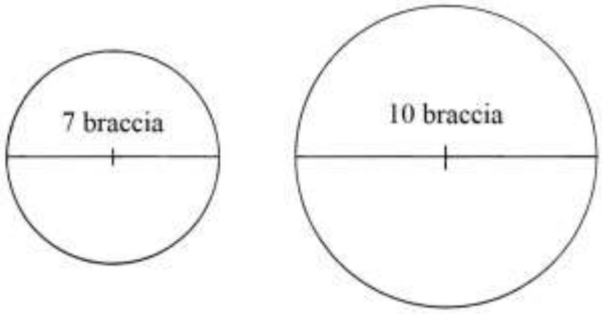
Le diagonali AC e BD si intersecano nel punto O: con raggio OE lungo (7/2) = (3 + ½) braccia e centro in O disegnare una circonferenza.

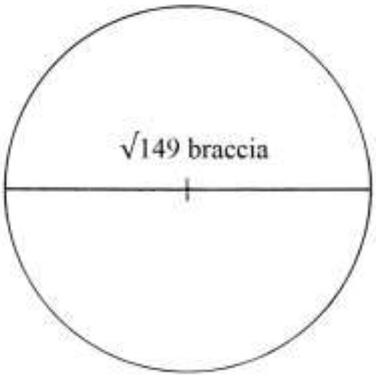
Il cerchio di centro O e raggio OE ha area uguale a quella del rettangolo: infatti:

$A_{CERCHIO} = 11/14 * 7^2 = 11/14 * 49 = (38 + ½)$ braccia^2.

Ragione 174

Due cerchi hanno diametri lunghi 7 e 10 braccia. Deve essere ricavato un terzo cerchio che abbia area uguale alla somma di quelle dei primi due.





L'area del primo cerchio è:

$A_{PRIMO} = 11/14 * 7^2 = (38 + ½)$ braccia^2.

L'area del secondo cerchio è:

$A_{SECONDO} = 11/14 * 10^2 = (78 + 4/7)$ braccia^2.

Sommare le due aree:

$A_{TOTALE} = (38 + ½) + (78 + 4/7) = (117 + 1/7)$ braccia^2.

La lunghezza del diametro *d* del cerchio totale è data da:

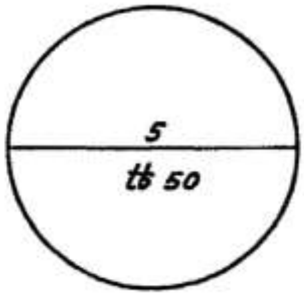
$A_{TOTALE} = 11/14 * d^2$ e

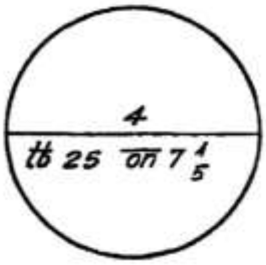
$d^2 = 14/11 * A_{TOTALE} = 14/11 * (117 + 1/7) = 149$

$d = \sqrt{149}$ braccia.

Ragione 175

Una sfera di cera ha diametro di 5 spanne e pesa 50 libbre.
Una seconda sfera di cera ha diametro di 4 spanne: il problema chiede il suo peso.





I volumi sono proporzionali ai cubi dei diametri.

La prima sfera ha volume proporzionale a:

$5^3 = 125$ e la seconda a:

$4^3 = 64$.

Anche i pesi sono proporzionali ai cubi dei diametri e vale la proporzione:

$125 : 64 = \text{PESO}_{\text{PRIMA}} : \text{PESO}_{\text{SECONDA}}$

$125 : 64 = 50 : \text{PESO}_{\text{SECONDA}}$

$\text{PESO}_{\text{SECONDA}} = 64 * 50/125 = (25 + 3/5)$ libbre.

L'Autore conclude convertendo il peso della seconda sfera da *libbre* a *once*:

(25 + 3/5) libbre = (7 + 1/5) once.

Questi dati riportati all'interno del cerchio relativo alla seconda sfera.

L'equivalenza che l'Autore usa è:

1 libbra = (3 + 5/9) once.

Questa equivalenza è assai discutibile, salvo che non fosse valida solo per la *cera*: l'oncia era un'unità di lunghezza uguale a 1/12 di un braccio da panno e a 1/6 di una spanna. Formalmente esisteva pure l'oncia^2, unità di superficie. Ma l'oncia era pure il nome di un'unità di peso (o massa) uguale a1/12 di libbra.

Ragione 176

Sono date tre sfere di *cera*. La prima ha un diametro di 6 spanne, la seconda 3 spanne e la terza 2 spanne.

Devono essere riunite in un'unica sfera ed è richiesto il suo diametro.

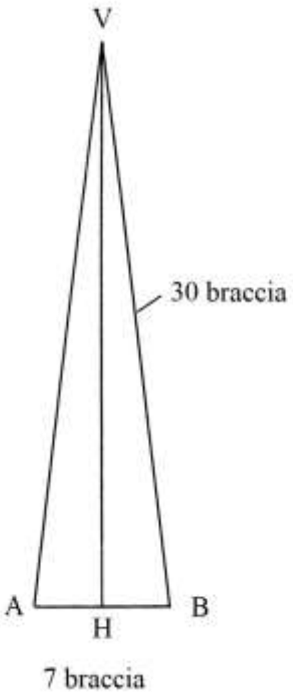
La procedura è rapida:

* moltiplicare per sé stesso il diametro della prima sfera: 6 * 6 = 36;
* moltiplicare per sé stesso il diametro della seconda sfera: 3 * 3 = 9;
* moltiplicare per sé stesso il diametro della terza sfera: 2 * 2 = 4;
* sommare i tre quadrati: 36 + 9 + 4 = 49;
* estrarre la radice quadrata: √49 = 7 spanne, diametro della sfera risultante.

Ragione 177

Un muro ha la forma di un cono la cui base ha circonferenza *c* lunga 22 braccia.

L'apotema è lungo 30 braccia:



Il problema chiede il volume del solido.

Il diametro *d* della base è lungo:

d = c/(22/7) = 22/(22/7) = 7 braccia.

Occorre calcolare l'altezza VH del cono. AVH è un triangolo rettangolo di cui è sconosciuta la lunghezza del cateto VH:

$VH^2 = AV^2 – AH^2 = 30^2 – (7/2)^2 = 900 – (12 + ¼) = (887 + ¾)$ e

VH = √(887 + ¾) braccia.

L'area del cerchio di base è:

$A_{BASE} = 11/14 * d^2 = 11/14 * 7^2 = (38 + ½)$ braccia^2.

Il volume del cono è:

$V_{CONO} = A_{BASE}$ * VH/3 = (38 + ½) * [√(887 + ¾)]/3 = (38 + ½) * [√(887 + ¾)/9] =
= (38 + ½) * √(98 + 22/36) = (382 + 1/3) braccia^3.

Ragione 178

Un palazzo ha la forma di una *piramide* – ma è un *cono* – che ha la circonferenza della base lunga 22 braccia e apotema lunga 30 braccia.

Le dimensioni sono uguali a quelle del cono della precedente Ragione.

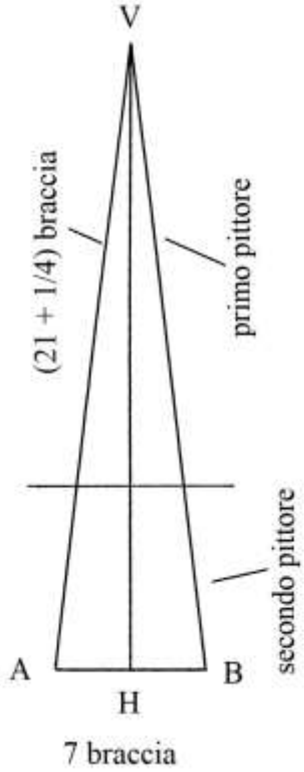
Due imbianchini lo devono dipingere: il primo dei due vuole partire dalla punta e scendere verso il basso. Egli deve coprire *metà* della superficie laterale del solido.

Il problema chiede la lunghezza di quanto si abbasserà rispetto al vertice V.

La soluzione è:

- moltiplicare la lunghezza dell'apotema per sé stessa: 30 * 30= 900;
- dividere per 2: 900/2 = 450;
- estrarre la radice quadrata: √450 ≈ (21 + ¼) braccia, lunghezza di VC = VD.

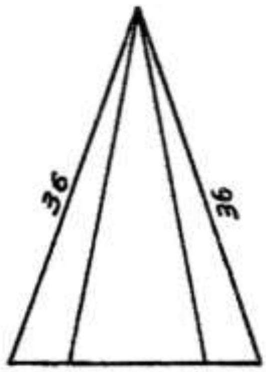
L'Autore dà il risultato di (21 + ¾) braccia.



Nota: l'Autore chiama *catetto* (cateto) l'altezza VH e *altezza* gli apotemi VA = VB.

Ragione 179

Una piramide regolare a base quadrata ha apotema lungo 36 braccia:



La superficie laterale deve essere dipinta da tre diversi artigiani. Il primo inizia dal vertice, il secondo dalla linea di arrivo del primo e il terzo la parte terminale fino alla base.

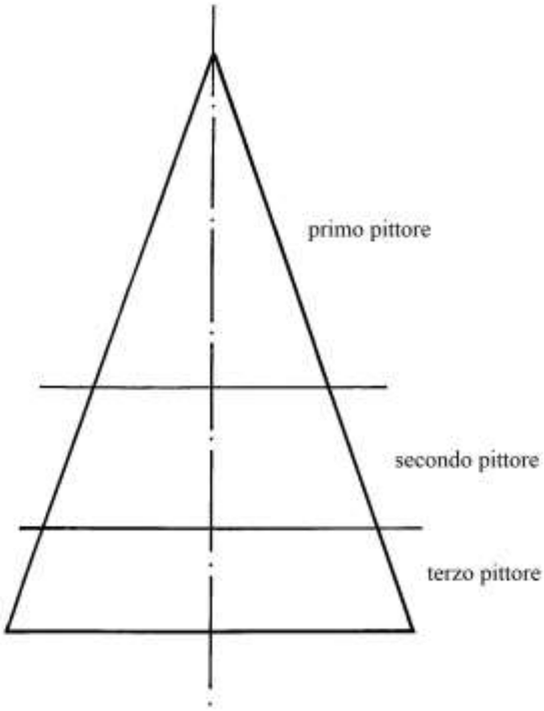
Il problema chiede le lunghezze in braccia, misurate lungo l'apotema, delle superfici da coprire dai tre artigiani.

La procedura è la seguente:

* moltiplicare la lunghezza dell'apotema per sé stessa: 36 * 36 = 1296;
* dividere per 3: 1296/3 = 432;
* estrarre la radice quadrata: √432 braccia, lunghezza che coprirà il primo maestro;
* moltiplicare 1296 per 2/3: 1296 * 2/3 = 864;
* estrarre la radice quadrata: √864;

* sottrarre √432: (√864 – √432) braccia, lunghezza relativa al secondo pittore;
* sottrarre √864 da 32: (32 – √864) braccia, lunghezza che interessa il terzo maestro.

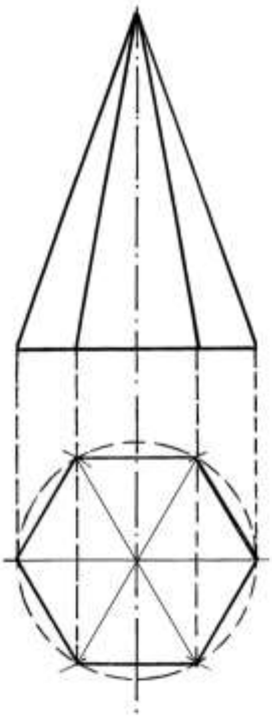
Lo schema che segue presenta la ripartizione fra le aree dipinte dai tre artigiani, *in scala*:



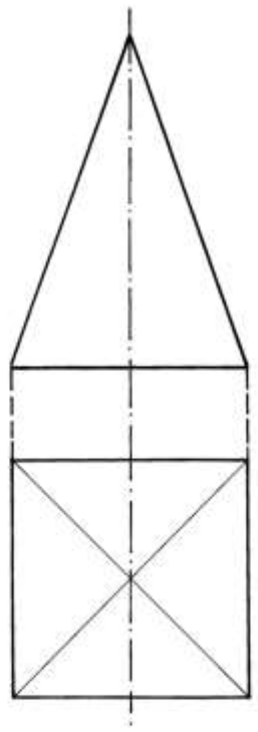
- APPROFONDIMENTO -

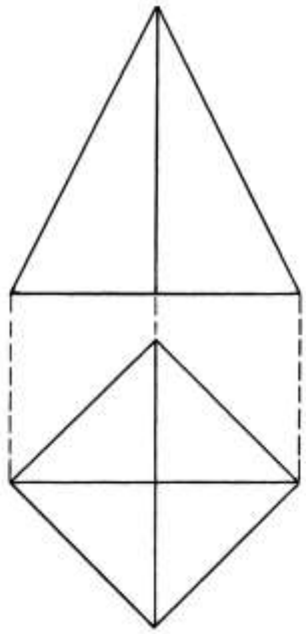
Lo schema originale mostra la vista frontale di una piramide: in questo e in negli schemi che accompagnano le Ragioni 177 e 178 vi è un embrione del metodo delle proiezioni ortogonali.

Lo schema di questa Ragione è errato perché rappresenta la vista frontale di una piramide a base esagonale e non quadrata:



I due grafici che seguono presentano due varianti delle proiezioni ortogonali con il *metodo europeo* di una piramide a base quadrata che corrisponde a quella considerata in questa Ragione:





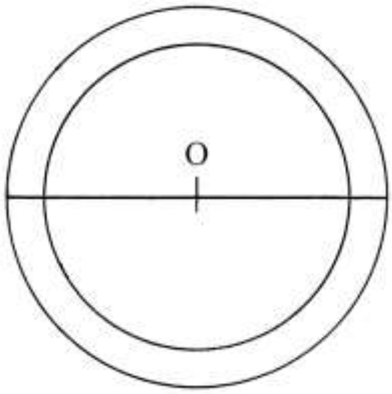
- -

<u>Ragione 180</u>

È dato un cerchio di cui sono ignote la lunghezza della circonferenza e l'area.

Viene disegnata una seconda circonferenza concentrica ed esterna: la differenza fra le lunghezze dei due diametri è di 1 braccio per parte e nell'insieme è 2 braccia.

L'area del cerchio esterno è 10 braccia^2.

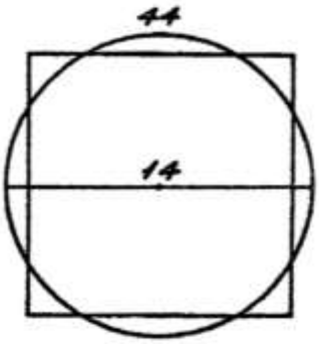


La procedura usata contiene i seguenti passi:

* dividere l’area per l’incremento del raggio: 10/1 = 10;
* sommare con (3 + 1/7): 10 + (3 + 1/7) = (13 + 1/7) braccia, lunghezza della circonferenza esterna;
* sottrarre (3 + 1/7) da 10: 10 – (3 + 1/7) = (6 + 6/7) braccia, lunghezza della circonferenza interna.

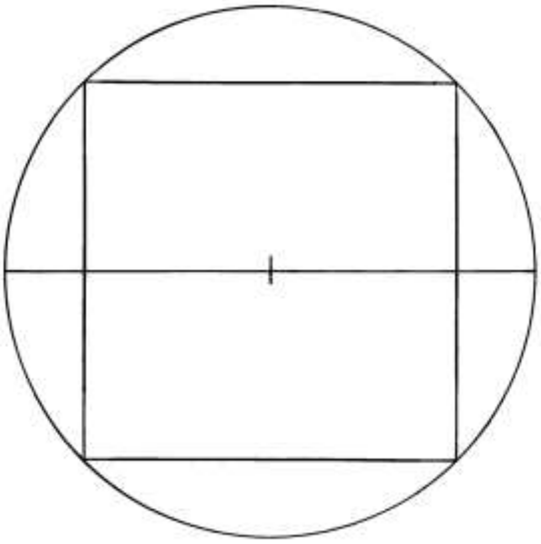
Ragione 181

Una sfera deve essere scemata per ricavare un cubo con i vertici giacenti sulla sua circonferenza: lo schema originale pare errato:



La circonferenza della sfera è lunga 44 braccia. Ne consegue che il suo diametro è 14 braccia.

I vertici del cubo che segue giacciono sulla superficie della sfera e il solido vi è inscritto:



La soluzione impiegata dall'Autore contiene i seguenti passi:

* moltiplicare la lunghezza del diametro della sfera per sé stessa: $14 * 14 = 196$;
* dividere per 3: $196/3 = (65 + 1/3)$;
* estrarre la radice quadrata: $(\sqrt{(65 + 1/3)}$ braccia, lunghezza degli spigoli del cubo, ℓ.

Il volume del cubo è ottenuto da:

$$V_{\text{CUBO}} = \ell^3 = (\sqrt{(65 + 1/3)})^3 = (65 + 1/3) * \sqrt{(65 + 1/3)} \text{ braccia}^3.$$

La diagonale maggiore *D* del cubo inscritto è lunga quanto il diametro *d* della sfera e, in questa caso, è 12 braccia.

La lunghezza della diagonale maggiore *D* è legata a quella dello spigolo ℓ dalla relazione:

$$D = \ell * \sqrt{3}.$$

Si può ricavare la lunghezza di ℓ:

$$\ell = D/\sqrt{3} = 12/\sqrt{3} \approx 6{,}928 \text{ braccia.}$$

La lunghezza dello spigolo calcolata dall'Autore è: $\ell = \sqrt{(65 + 1/3)} \approx 8{,}083$ braccia.

Ragione 182

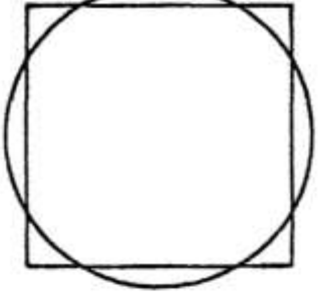
Il problema è l'inverso di quello presentato nella precedente Ragione.

È dato un cubo che ha spigoli lunghi $\ell = 7$ braccia e deve essere trasformato in una sfera di uguale volume.

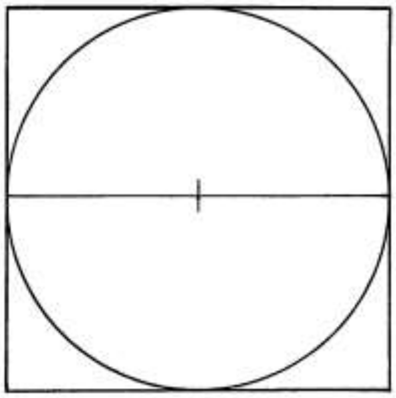
Il volume del cubo è:

$$V_{\text{CUBO}} = \ell^3 = 7^3 = 343 \text{ braccia}^3.$$

Il problema chiede di calcolare lo *scemo* e cioè lo scarto di materiale, perché la sfera deve avere diametro di 7 braccia. Lo schema che segue è riprodotto dall'originale:



Lo schema originale e l'argomento di questa Ragione suscitano perplessità: se lo spigolo del cubo e il diametro della sfera sono entrambi lunghi 7 braccia, questa ultima è *inscritta* nel cubo, come spiega la figura che segue:



Se il diametro della sfera è lungo 7 braccia, la sua circonferenza è 22 braccia.

Di seguito è descritta la procedura usata dall'Autore:

* dividere la lunghezza del diametro per 6: 7/6 = (1 + 1/6);
* moltiplicare per 7: (1 + 1/6) * 7 = (8 + 1/6);
* moltiplicare per la lunghezza della circonferenza: (8 + 1/6) * 22 = (179 + 2/3) [braccia^3, volume della sfera];
* dividere il volume della sfera per quello del cubo: (179 + 2/3)/343 = 11/21.

L'operazione inversa consiste nel passaggio dalla sfera al cubo da cui essa è ricavata:

* moltiplicare il volume del cubo per 11/21: 343 * 11/21 = (179 + 2/3);
* moltiplicare il volume della sfera per 10/21: (179 + 2/3) * 10/21 = (163 + 1/3);
* sommare al volume della sfera: (163 + 1/3) + (179 + 2/3) = 343 braccia^3, volume del cubo.

- APPROFONDIMENTO -

Il volume della sfera è:

$$V_{\text{SFERA}} = 4/3 * \pi * R^3 = 4/3 * \pi * (D/2)^3 = 4/3 * 22/7 * (7/2)^3 =$$
$$= 88/21 * 343/8 = 11/21 * 343 = (179 + 2/3) \text{ braccia}^3.$$

I calcoli dell'Autore sono esatti. È qui spiegata l'origine della costante "11/21" da lui usata quale rapporto fra il volume della sfera e quello del cubo.

La formula usata dall'Autore è discutibile: *D* è il diametro della sfera e *c* è la sua circonferenza:

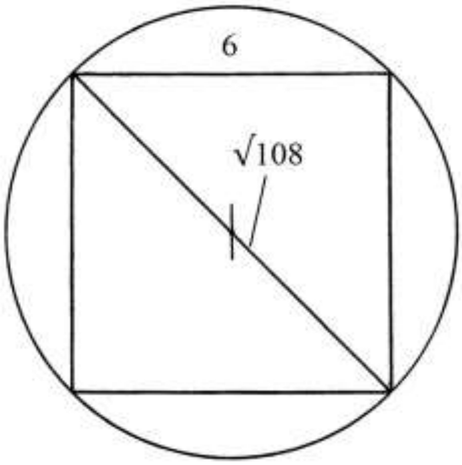
$$V_{\text{SFERA}} = D * (1 + 1/6) * c = D * 7/6 * (22/7 * D) = 7 * 7/6 * (22/7 * 7) =$$
$$= 49/6 * 22 = (179 + 2/3) \text{ braccia}^3.$$

Da un punto di vista *dimensionale* la formula è errata: moltiplicando una lunghezza – il diametro – per un'altra lunghezza – la circonferenza – si ottiene una superficie che è espressa in braccia^2 e non in braccia^3.

- -

Ragione 183

Un cubo ha gli spigoli lunghi $\ell = 6$ braccia. Deve essere inscritto in una sfera. Il problema chiede le lunghezze del diametro e della circonferenza della sfera.



La diagonale maggiore di un cubo, *d*, è anche un diametro della sfera. Essa è lunga:

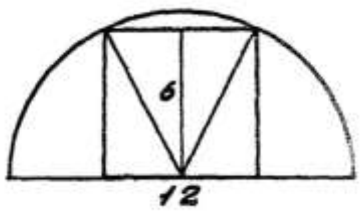
$d = \sqrt{3} * \ell = \sqrt{3} * 6 = \sqrt{(3 * 36)} = \sqrt{108}$ braccia.

La lunghezza della circonferenza della sfera, *c*, è:

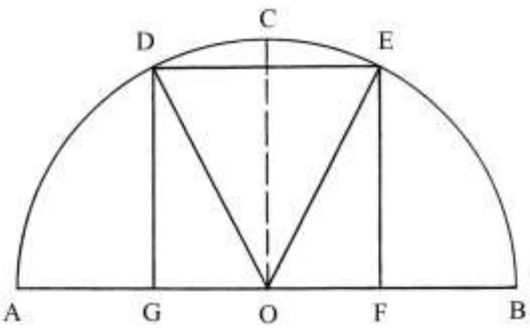
$c = 22/7 * d = 22/7 * \sqrt{108} = \sqrt{(484 * 108/49)} = \sqrt{(1066 + 38/49)}$ braccia.

Ragione 184

Il testo presenta alcune oscurità.



È dato un semicerchio. La corda AB è lunga 12 braccia e coincide con un diametro. Dal punto O si eleva la freccia OC che è un raggio ed è lunga 6 braccia:



Nel semicerchio deve essere inscritto un quadrato.

DGO è un triangolo rettangolo: l'ipotenusa OD è lunga quanto il raggio e cioè 6 braccia. Il cateto OG è metà del lato del quadrato DGFE: $OG = \ell/2$.

Vale la relazione:

$OD^2 = OG^2 + GD^2 = (\ell/2)^2 + \ell^2 = 5/4 * \ell^2$.

Ma OD^2 è uguale a 6^2, quindi si ha:

$6^2 = 5/4 * \ell^2$

$36 = 5/4 * \ell^2$ e

$\ell = \sqrt{(36 * 4/5)} = \sqrt{(28 + 4/5)}$ braccia = GD.

L'Autore calcola poi la lunghezza di OG:

$OG = \ell/2 = [\sqrt{(28 + 4/5)}]/2 = \sqrt{[(28 + 4/5)/4]} = \sqrt{(7 + 1/5)}$ braccia.

Il quadrato dell'ipotenusa OD è lungo:

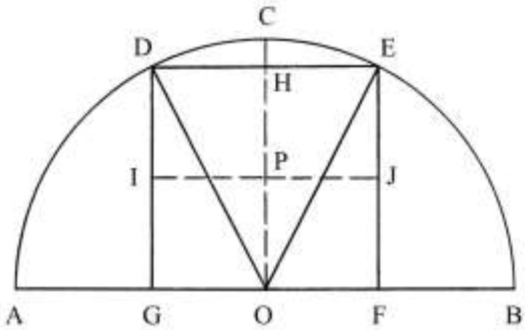
$OD^2 = GD^2 + OG^2 = [\sqrt{(28 + 4/5)}]^2 + [\sqrt{(7 + 1/5)}]^2 =$

$= (28 + 4/5) + (7 + 1/5) = 36.$

- APPROFONDIMENTO -

Il quadrato DEFG è scomponibile in due coppie di rettangoli:

* DHOG – HEFO;
* DEJI – IJFG.



Le lunghezze dei lati dei quattro rettangoli sono in rapporto 1 : 2:

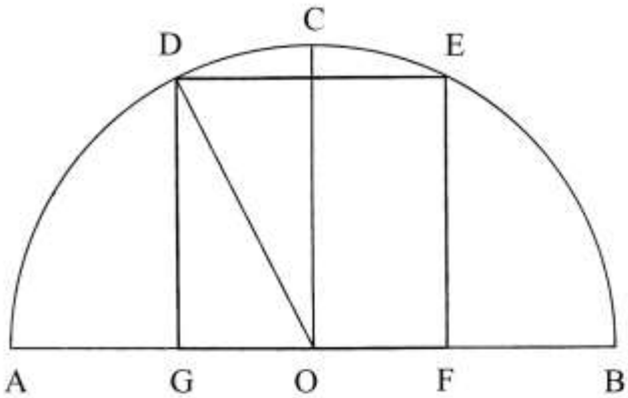
DH : DG = 1 : 2.

I quattro rettangoli sono dei *bislunghi*.

- -

<u>Ragione 185</u>

Un semicerchio ha la corda AB lunga 20 braccia e la freccia OC 10 braccia: la prima è il diametro e la seconda un raggio del semicerchio.



Il problema presenta delle affinità con quello contenuto nella precedente Ragione. Anche in questo caso deve essere inscritto il quadrato più grande. La soluzione ricalca la precedente:

* moltiplicare la lunghezza della freccia per sé stessa: 10 * 10 = 100;

* moltiplicare per 4/5: 100 * 4/5 = 80 [braccia^2, area del quadrato DEFG];
* estrarre la radice quadrata: √80 braccia, lunghezza dei lati del quadrato.

Per risolvere il problema, l'Autore utilizza l'algebra: alla lunghezza del lato del quadrato assegna il valore dell'incognita: DG = x.

La soluzione è la seguente:

$DG^2 + (DG/2)^2 = OD^2 = OC^2$
$x^2 + (x/2)^2 = 100$
$5/4 * x^2 = 100$
$x^2 = 100 * 4/5$
$x^2 = 80$ e
$x = \sqrt{80}$ braccia = DG.

- APPROFONDIMENTO -

La soluzione riprende quella già adottata nella precedente Ragione 184.

DGO è il solito triangolo equilatero: l'ipotenusa OD è lunga quanto il raggio (e la freccia OC). 10 braccia.

Il cateto OG è lungo la metà del lato GF ed è l'incognita "x".

Nel triangolo vale la relazione:

$OD^2 = OG^2 + GD^2 = x^2 + (2 * x)^2 = 5 * x^2$.

Ma OD = 10, quindi:

$10^2 = 5 * x^2$
$5 * x^2 = 100$
$x^2 = 20$ e
$x = \sqrt{20}$.

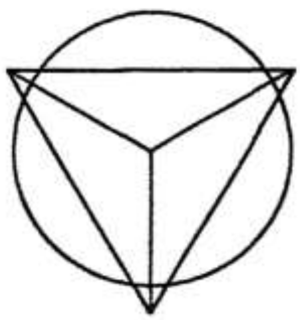
Il lato GF è lungo il doppio di OG:

$GF = 2 * OG = 2 * \sqrt{20} = \sqrt{(4 * 20)} = \sqrt{80}$ braccia.

- -

<u>Ragione 186</u>

Un tetraedro, un prisma con quattro facce uguali a forma di triangolo equilatero, ha spigoli lunghi 9 braccia.

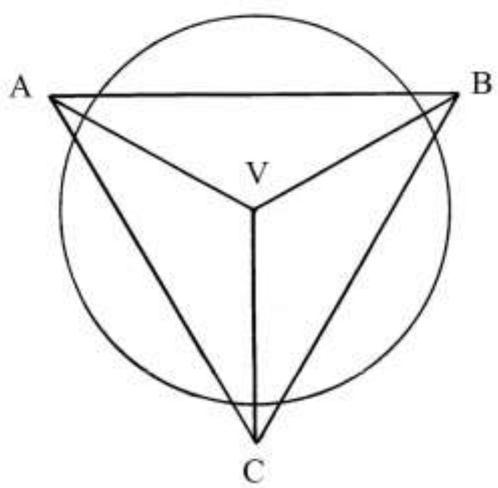


Deve essere calcolato il diametro di una sfera con volume uguale a quello del tetraedro:

La soluzione del problema prevede una serie di passi:

* moltiplicare la lunghezza dello spigolo per sé stessa: 9 * 9 = 81;
* sottrarre un terzo: 81 * (1 – 1/3) = 54;
* estrarre la radice quadrata: √54 [braccia, altezza del solido];

* moltiplicare 54 per ¾: $54 * ¾ = (40 + ½)$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{(40 + ½)}$ [braccia, distanza dal centro del solido ai suoi vertici];
* dividere 81 per 3: $81/3 = 27$;
* moltiplicare per 1/8: $27 * 1/8 = (3 + 3/8)$;
* sommare con 27: $(3 + 3/8) + 27 = (30 + 3/8)$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{(30 + 3/8)}$ [braccia, lunghezza della proiezione in pianta di VA, VB e VC]:

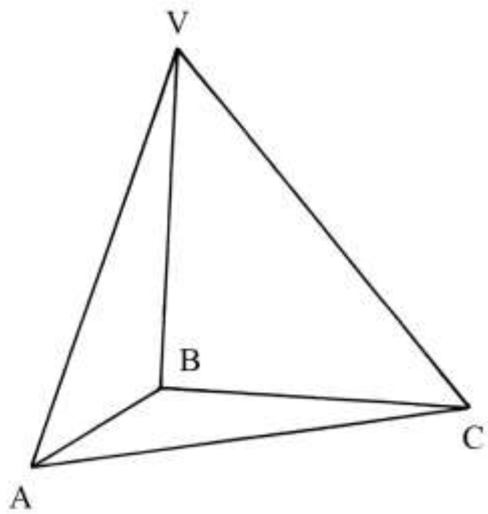


* moltiplicare per 2: $\sqrt{(30 + 3/8)} * 2 = \sqrt{[(30 + 3/8) * 4]} = \sqrt{(121 + ½)}$ [braccia, diametro della sfera di volume equivalente al tetraedro].
  Il diametro vale: $\sqrt{(121 + ½)} \approx 11{,}023$ braccia.

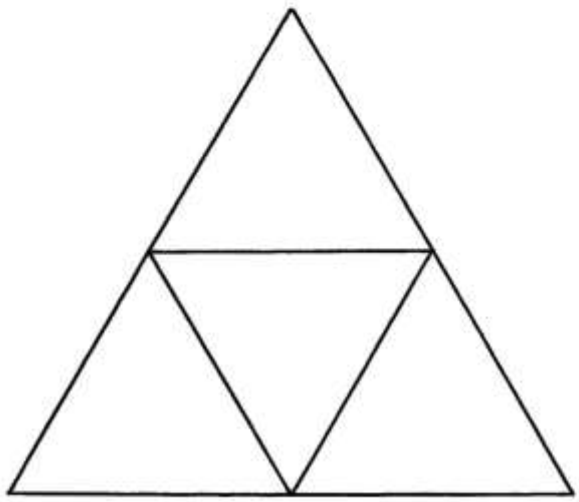
- APPROFONDIMENTO -

In geometria solida, il tetraedro è un poliedro regolare con quattro facce a forma di triangolo equilatero. Esso possiede 4 vertici e 6 spigoli: è il più semplice fra i cinque poliedri regolari.

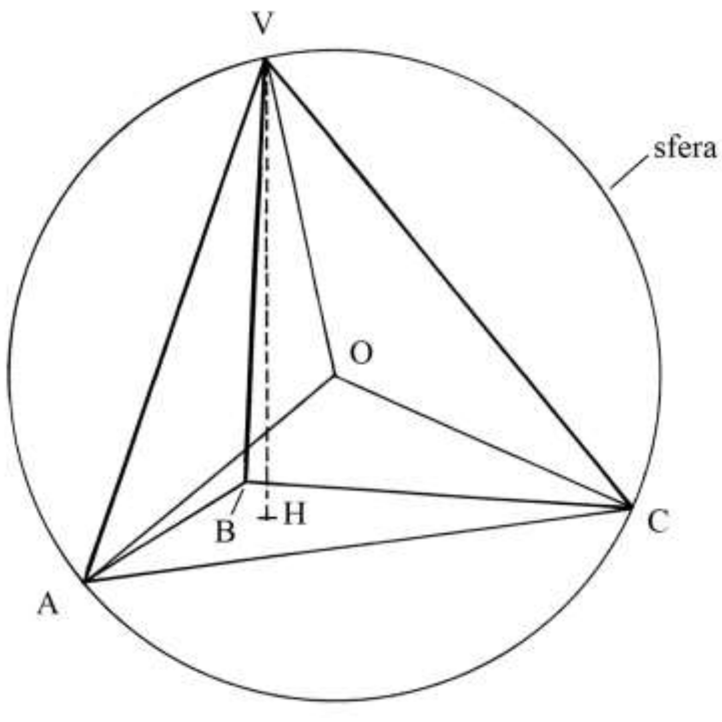
Lo schema che segue mostra un tetraedro rappresentato a *filo di ferro* (con tutti gli spigoli visibili):



Il suo sviluppo è dato da quattro triangoli equilateri che sono uniti a formare un più grande triangolo equilatero (che ha area quadrupla):



Lo schema che segue definisce alcune proprietà geometriche del tetraedro:



H è il centro (ortocentro, baricentro e incentro) del triangolo equilatero ABC.

VH è l'altezza del solido rispetto alla base ABC.

Il punto O è il centro del tetraedro, equidistante dai vertici A, B, C e V ed è anche il centro della sfera circoscritta al solido (e anche di quella inscritta): OA è un suo raggio.

Nella realtà e in proiezioni ortogonali, il punto O giace sulle altezze come quella VH.

L'altezza VH ha la lunghezza *h* che è data da:

$VH = h = (\sqrt{6})/3 * \ell$ dove ℓ è la lunghezza dello spigolo.

L'area della superficie laterale di questo solido è uguale a *quattro* volte quella di una singola faccia:

$A_{\text{FACCIA}} = \ell^2 * (\sqrt{3})/4.$

L'area totale è:

$A_{\text{TOTALE}} = 4 * A_{\text{FACCIA}} = 4 * \ell^2 * (\sqrt{3})/4 = \ell^2 * \sqrt{3}.$

Il volume V_T del tetraedro è:

$V_T = 1/12 * \ell^3 * \sqrt{2}$.

Il volume di un tetraedro con spigoli lunghi $\ell = 9$ è dato da:

$V_T = 1/12 * \ell^3 * \sqrt{2} = 1/12 * 9^3 * \sqrt{2} \approx 85{,}91$ braccia^3.

Il volume di una sfera di raggio *r* = (11,023/2) è:

$V_{SFERA} = 4/3 * \pi * r^3 = 4/3 * 22/7 * (d/2)^3 = 4/3 * 22/7 * (11{,}023/2)^3 \approx$

$\approx 88/21 * 5{,}5115^3 \approx 655{,}75$ braccia^3.

I due solidi non hanno uguale volume.

Possiamo ricavare il raggio della sfera di volume uguale a quello del tetraedro, partendo dal volume di questo ultimo solido:

$V_{SFERA} = V_T = 85{,}91$ braccia^3.

$4/3 * \pi * r^3 = 85{,}91$ braccia^3

$4/3 * 22/7 * r^3 = 85{,}91$

$r^3 = 85{,}91 * 21/88 = 20{,}50125$

r = 2,737 braccia.

Il diametro *d* della sfera è lungo:

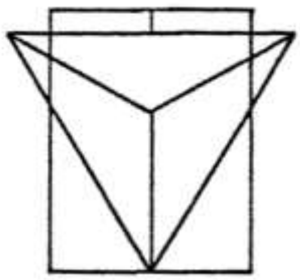
d = 2 * 2,737 = 5,474 braccia.

I dati forniti dall'Anonimo presentano qualche incongruenza.

- -

Ragione 187

Un tetraedro ha spigoli lunghi 8 braccia:



Il problema chiede il suo volume.

La procedura usata dall'Autore è la seguente:

* moltiplicare la lunghezza di uno spigolo per sé stessa: 8 * 8 = 64;
* moltiplicare per ¾: 64 * ¾ = 48;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{48}$ [braccia, altezza di un triangolo equilatero];
* moltiplicare per la metà di 8: $\sqrt{48} * 8/2 = \sqrt{768}$ [braccia^2, area di una faccia];
* sottrarre 1/3 da 64: 64 * (1 – 1/3) = (42 + 2/3);
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{(42 + 2/3)}$ [braccia, altezza del solido o *milluogho*];
* calcolare metà dell'area della base triangolare: $(\sqrt{768})/2 = \sqrt{(768/4)} = \sqrt{192}$;
* moltiplicare per l'altezza del solido: $\sqrt{192} * \sqrt{(42 + 2/3)} = \sqrt{8192}$ braccia^3, volume del tetraedro.

Estraendo la radice quadrata si ha: $\sqrt{8192} \approx 90{,}51$ braccia^3.

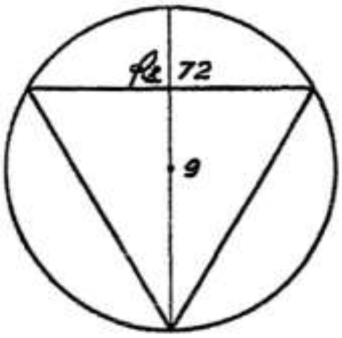
Applichiamo la formula per il calcolo del volume del tetraedro:

$V_T = 1/12 * \ell^3 * \sqrt{2} = 1/12 * 8^3 * \sqrt{2} \approx 60{,}34$ braccia^3.

Anche la soluzione di questa Ragione lascia qualche perplessità.

Ragione 188

Una sfera deve essere tagliata per ricavarne un tetraedro (un *triangolo chubico*) il più grande possibile. Dallo schema originale, qui sotto riprodotto, pare di capire che i quattro vertici del solido devono giacere sulla superficie della sfera: il tetraedro è inscrittibile nella sfera.



Il diametro della sfera è lungo 9 braccia.

La soluzione presentata dall'Autore è:

* dividere per 3 la lunghezza del diametro della sfera: 9/3 = 3;
* sottrarre dalla lunghezza del diametro: 9 – 3 = 6 [braccia, altezza del tetraedro].

Il centro del tetraedro si trova a *un quarto* della lunghezza appena calcolata:

6 * ¼ = (1 + ½) braccia.

Sottraendo l'ultima lunghezza da 6 si ha:

6 – (1 + ½) = (4 + ½) braccia, lunghezza della metà del diametro della sfera (o raggio).

I successivi passi dell'Autore sono piuttosto oscuri: il paragrafo che segue è la riproduzione della parte finale di questa Ragione (da p. 141 della trascrizione di Annalisa Simi):

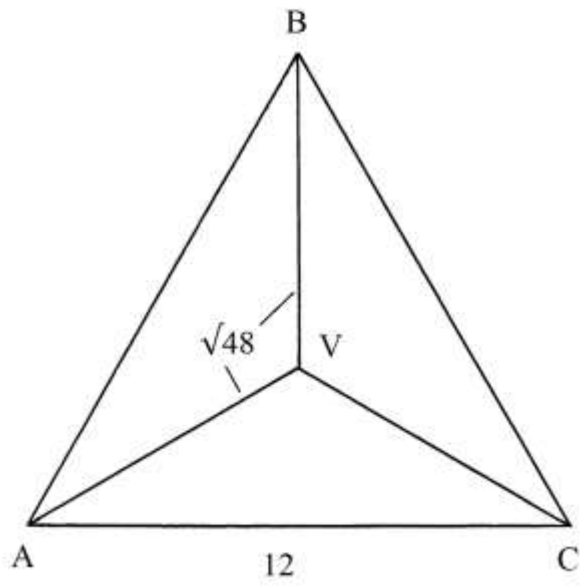
Ancho puoi sapere se nella taglatura cape una faccia di quello triangolo: noi troviamo che llo perfetto diamitro di quello triangolo è braccia 6. Dunque lo diamitro è per faccia radice di 54, lo quale numero dia partire per 3, vien 18, la cui radice, radoppiata è 'l diamitro della taglatura della palla, ch'è radice di 72. E io te 'l mostro che ttu dia multipricare le parti del diamitro l'una contro l'altra, cioè 3 via 6, fa 18, la cui radice, radoppiata, è quello diamitro che monta radice di 72. Adunque bene cape apunto quello triangolo nella taglatura della palla. //

Ragione 189

Un "*triangolo cubico*", cioè un *tetraedro*, ha spigoli lunghi 12 braccia.

Il problema chiede l'altezza del solido e la lunghezza dei segmenti che collegano il centro O ai vertici.

Lo schema che segue presenta la vista in pianta del solido:



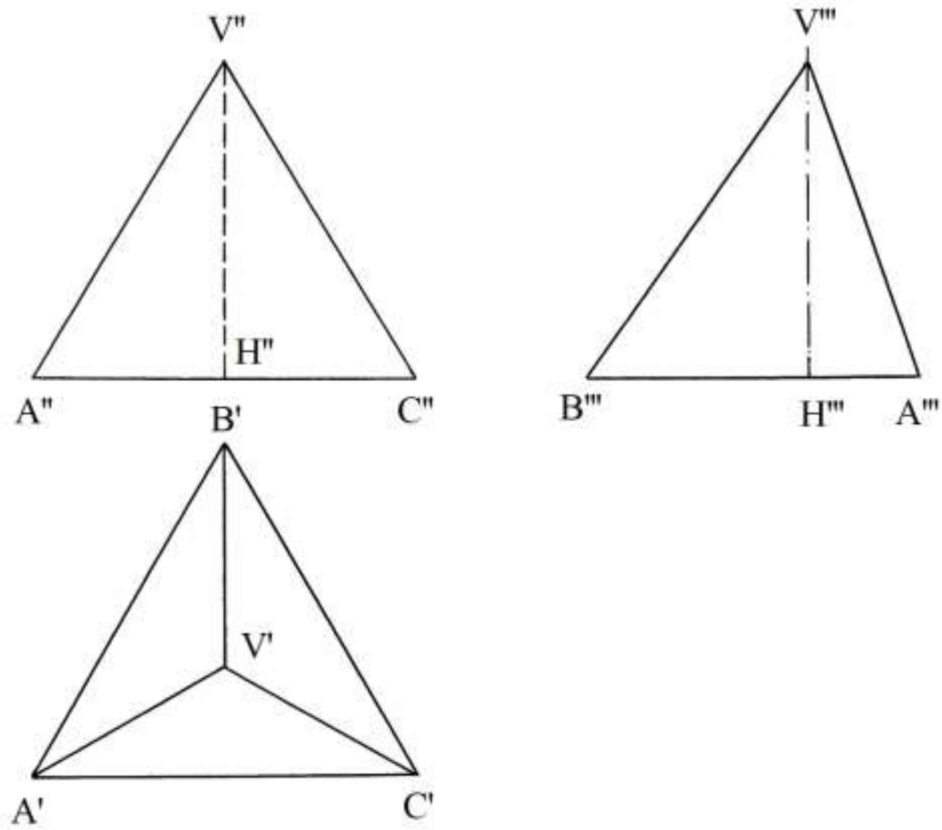
La lunghezza delle proiezioni degli spigoli VA = VB = VC è così calcolata:

* moltiplicare la lunghezza dello spigolo del solido per sé stessa: 12 * 12 = 144;
* dividere per 3: 144/3 = 48;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{48}$ = (6 + 6/7) braccia, lunghezza delle proiezioni VA, VB e VC.

L'altezza del solido, che l'Autore chiama *diamitro*, è data da:

* sottrarre 48 da 144: 144 – 48 = 96;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{96}$ braccia, altezza.

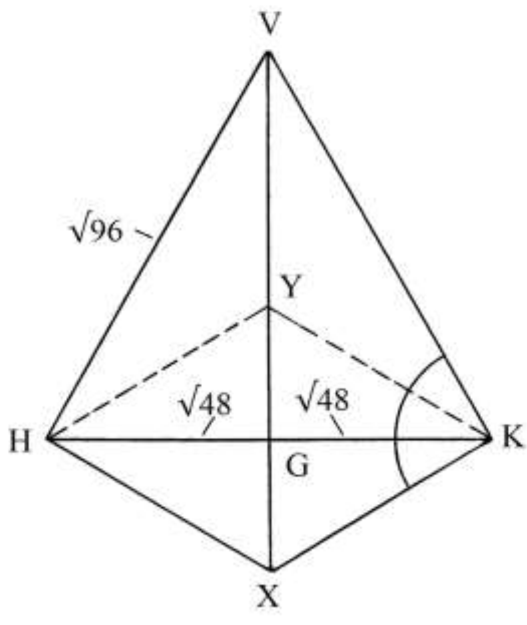
Lo schema che segue contiene tre viste in proiezioni ortogonali del tetraedro, secondo il *metodo europeo*:



V''H'' e V'''H''' sono le altezze VH del solido: esse sono lunghe √96 braccia. Il punto H è il centro della base triangolare.

Le proiezioni degli spigoli – V'A', V'B' e V'C' – sono lunghe √48 braccia.

L'Autore presenta uno schema che descrive i rapporti fra le lunghezze e lo fa con uno metodo che pare assonometrico e che è qui ridisegnato:



VH e VK hanno lunghezza uguale a √96 braccia e cioè quanto l'altezza del solido.

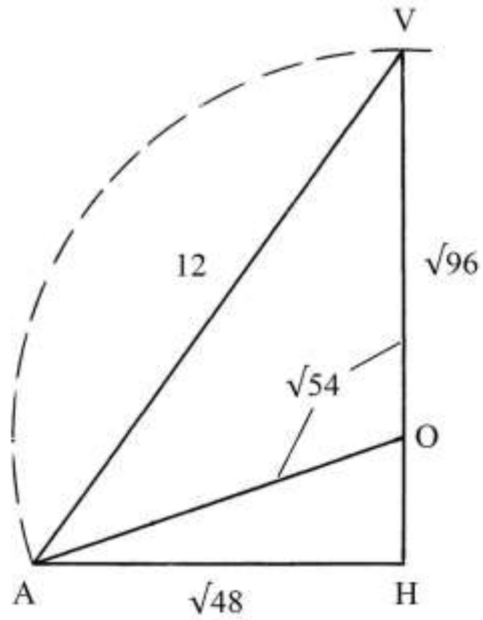
HG e GK sono lunghi √48 braccia: esse rappresentano due spigoli (V'A', V'B' o V'C') in pianta.

X e Y sono i vertici di due triangoli equilateri: i lati HY, HX, YX, YK e KX sono lunghi 8 braccia.

L'Autore calcola poi la lunghezza *R* dei segmenti che collegano il centro del solido ai suoi quattro vertici:

$R = \frac{3}{4} * \sqrt{96} = \sqrt{[(9/16) * 96]} = \sqrt{54} = (7 + 5/14)$ braccia. Essi sono raggi della sfera circoscritta al solido.

Conclude con un grafico (qui ridisegnato) che mostra i collegamenti fra le lunghezze significative presenti nel tetraedro:



AVH e AOH sono due triangoli rettangoli che hanno in comune il cateto AH e l'angolo retto in H.

O è il centro del solido e VH è una sua altezza: $VH = \sqrt{96}$ braccia.

AH è la lunghezza degli spigoli in pianta: $AH = \sqrt{48}$ braccia.

Per costruzione, OA è lungo quanto OV: $OA = OV = \sqrt{54}$ braccia ed è la lunghezza della distanza del centro O dai quattro vertici del solido e cioè raggi della sfera circoscritta.

Il cateto OH è lungo:

$OH = VH - VO = \sqrt{96} - \sqrt{54} = \sqrt{(2^5 * 3)} - \sqrt{(2 * 3^3)} = \sqrt{(2 * 2^4 * 3)} - \sqrt{(6 * 3^2)} =$
$= 4 * \sqrt{6} - 3 * \sqrt{6} = \sqrt{6}$ braccia.

Il segmento AV è l'ipotenusa del triangolo rettangolo AVH e la sua lunghezza è data da:

$AV^2 = AH^2 + VH^2 = (\sqrt{48})^2 + (\sqrt{96})^2 = 48 + 96 = 144$ e

$AV = \sqrt{144} = 12$ braccia: AV è uno degli spigoli del tetraedro.

AV è uno spigolo ℓ del tetraedro e OV è il diametro *D* della sfera circoscritta al solido: le loro lunghezze sono legate da una relazione:

$\ell^2 = 2/3 * D^2$. Verifichiamo:

D è lungo il doppio di R: $D = 2 * R = 2 * \sqrt{54} = \sqrt{(4 * 54)} = \sqrt{216}$.

$12^2 = 2/3 * (\sqrt{216})^2$

$144 = 2/3 * 216$

$144 = 144$.

Concludiamo con due formule. Il raggio *R* della sfera circoscritta al tetraedro è dato da:

$R = \ell * (\sqrt{6})/4$, dove ℓ è la lunghezza dello spigolo del solido.

Il raggio *r* della sfera inscritta è:

$r = \ell * (\sqrt{6})/12$.

Nel caso concreto si ha:

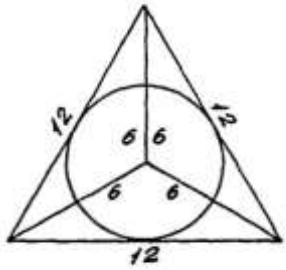
R = 12 * (√6)/4 = 3 * √6 = √54 = OA = OV.

r = 12 * (√6)/12 = √6 = OH.

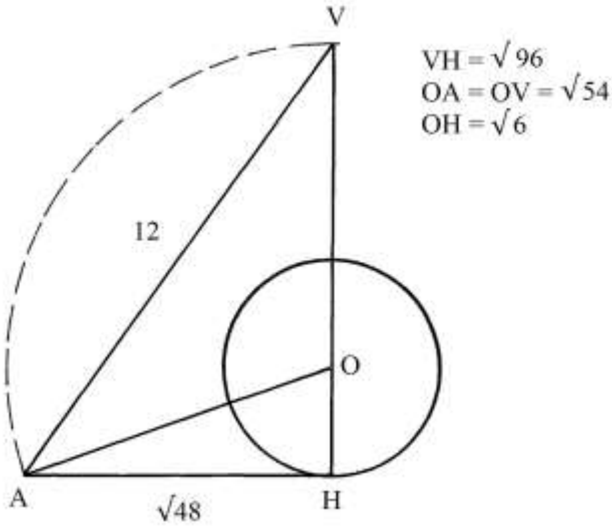
Vale l'evidente proporzione: R = 3 * r.

Ragione 190

Un tetraedro ha spigoli lunghi 12 braccia. Deve essere inscritta una sfera la più grande possibile.



La distanza fra il centro O del tetraedro e ciascuno dei suoi quattro vertici è √54 braccia:



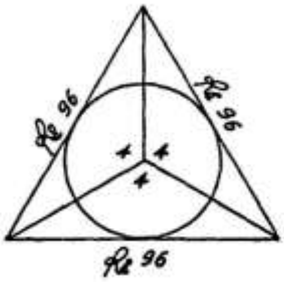
Il punto O è anche il centro della sfera inscritta che ha raggio OH lungo √6. Il suo diametro, *d*, è:

d = 2 * √6 = √(4 * 6) = √24.

Una parte dei dati sono ripresi dalla soluzione della precedente Ragione.

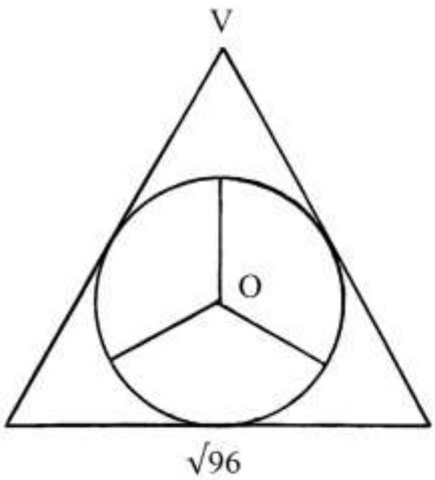
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

La seconda parte di questa Ragione considera una sfera di diametro 4 braccia:



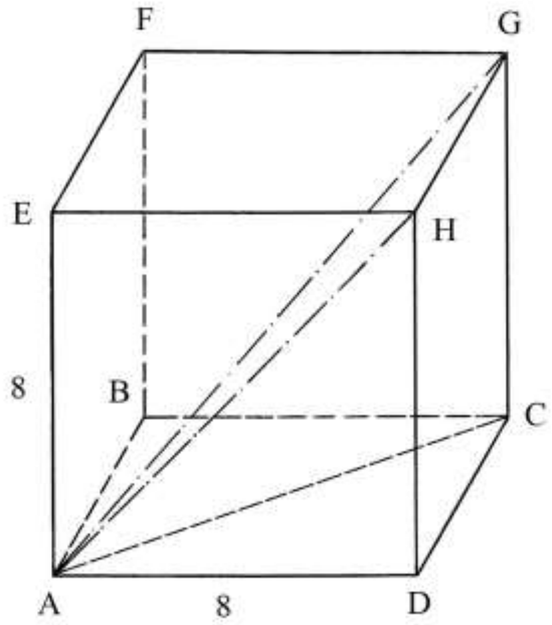
La lunghezza dello spigolo del tetraedro circoscritto alla sfera è ricavata con la procedura che segue:

* moltiplicare la lunghezza del diametro della sfera per sé stessa: 4 * 4 = 16;
* dato che la radice di 16 [√16 = 4] è lunga metà del *diamitro* di una faccia triangolare, esso è lungo √64 = 8 [braccia];
* dividere 64 per 2: 64/2 = 32;
* sommare con 64: 32 + 64 = 96;
* estrarre la radice quadrata: √96 [braccia, lunghezza degli spigoli del tetraedro].



<u>Ragione 191</u>

Un cubo ha spigoli lunghi 8 braccia:



L'Autore chiama *diamitro* una diagonale.

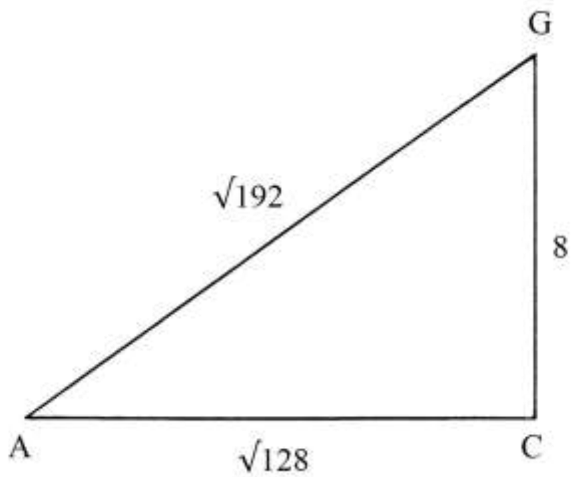
La diagonale di una faccia, AH nella faccia AEHD, è lunga:

$AH^2 = AD^2 + HD^2 = 8^2 + 8^2 = 64 + 64 = 128$ e

$AH = \sqrt{128}$ braccia.

Anche AC è una diagonale e lo è della faccia ABCD: anch'essa è lunga $\sqrt{128}$ braccia.

Il segmento AG è una delle diagonali del cubo, che l'Autore chiama *perfetto diamitro*. Essa è l'ipotenusa del triangolo rettangolo ACG:



La lunghezza di AG è ottenuta da:

$AG^2 = AC^2 + CG^2 = (\sqrt{128})^2 + 8^2 = 128 + 64 = 192$ e

$AG = \sqrt{192}$ braccia.

La lunghezza di AG può essere ricavata in altro modo:

$AC^2 = AD^2 + CD^2 = 2 * AD^2$

$AG^2 = AC^2 + CG^2 = 2 * AD^2 + AD^2 = 3 * AD^2$ e

$AG = AD * \sqrt{3} = 8 * \sqrt{3} = \sqrt{(64 * 3)} = \sqrt{192}$.

Vale l'uguaglianza inversa:

$AD^2 = AG^2/3$ e

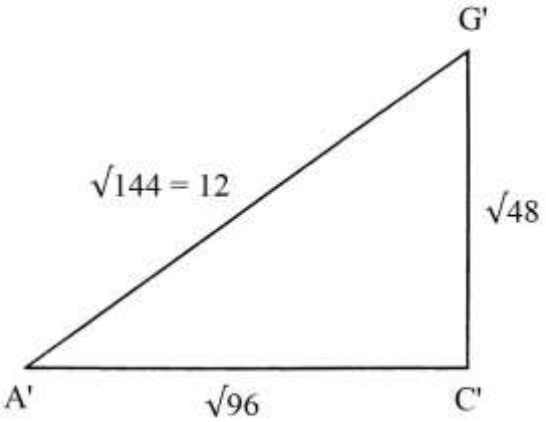
$AD = AG/\sqrt{3}$.

Il volume di questo cubo è:

$V = AD^3 = 8^3 = 512$ braccia^3.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Nella seconda parte di questa Ragione è presentata l'ipotesi di un cubo che ha la diagonale A'G' lunga 12 braccia.



La procedura impiegata dall'Autore comprende i seguenti passi:

* moltiplicare la lunghezza della diagonale A'G' per sé stessa: $12 * 12 = 144$;
* dividere per 3: $144/3 = 48$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{48}$ [braccia, lunghezza degli spigoli di questo secondo cubo].

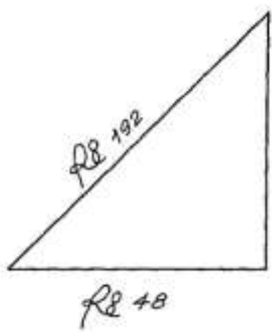
Lo schema qui sopra mostra le corrette dimensioni del triangolo rettangolo A'G'C': C'G' è uno spigolo del cubo, A'G' è una diagonale del cubo e A'C' è la diagonale della faccia quadrata che costituisce la base inferiore del cubo: la sua lunghezza è data da:

$(A'C')^2 = (A'G')^2 – (C'G')^2 = 12^2 – (\sqrt{48})^2 = 144 – 48 = 96$ e
$A'C' = \sqrt{96}$ braccia.

Un identico risultato è ottenuto a partire dalla lunghezza degli spigoli:

$(A'C')^2 = 2 * (G'C')^2 = 2 * (\sqrt{48})^2 = 96$ e
$A'C' = \sqrt{96}$ braccia.

Lo schema contenuto nel testo originale è errato:



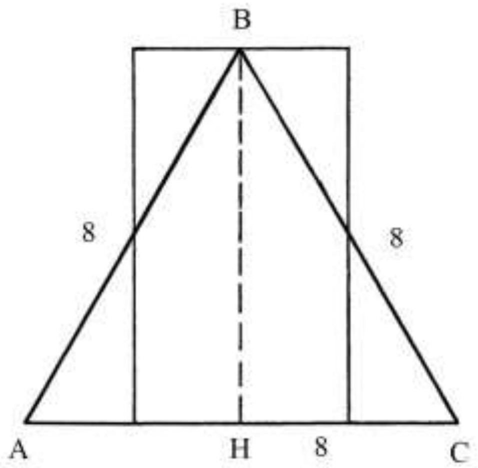
Il triangolo rettangolo è *isoscele* e non è *scaleno*, come lo è il triangolo del penultimo schema. Inoltre l'ipotenusa non è lunga √192 braccia ma (√144 = 12) braccia; infine il cateto orizzontale di questo triangolo non è lungo √48 braccia ma √96 braccia, perché è la diagonale di una faccia.

Il volume di questo secondo cubo è:

$V = lato^3 = (\sqrt{48})^3 = 48 * \sqrt{48} = \sqrt{(2304 * 48)} = \sqrt{110592}$ braccia^3.

<u>Ragione 192</u>

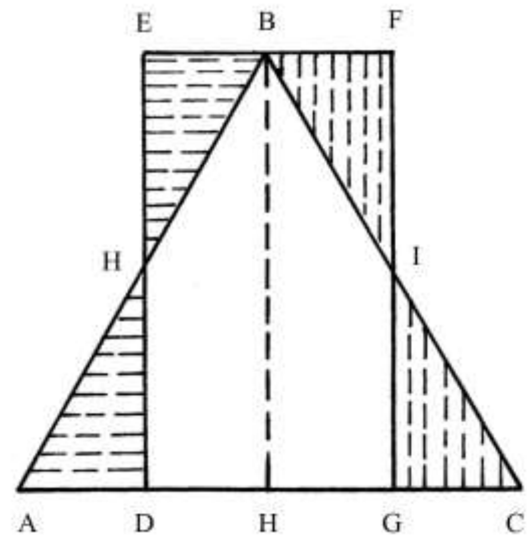
Un triangolo equilatero ha lati lunghi 8 braccia:



Il problema chiede di calcolare la sua area. La procedura è la seguente:

* moltiplicare la lunghezza di un lato per sé stessa: $8 * 8 = 64$;
* moltiplicare per ¾: $64 * ¾ = 48$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{48} = (6 + 13/14)$ [braccia, altezza BH];
* moltiplicare per metà della lunghezza del lato di base: $(6 + 13/14) * 8/2 =$
$= (\sqrt{48}) * 4 = \sqrt{(48 * 16)} = \sqrt{768}$ [braccia^2, area del triangolo rettangolo].

L'Autore ricorre a un artificio grafico: divide a metà i segmenti AH e HC per cui AD, DH, HG e GC sono tutti lunghi $8/4 = 2$ braccia:



Per il punto B traccia una parallela a AC e dai punti D e G innalza due perpendicolari a AC (e parallele a BH).

Il rettangolo DEFG ha area uguale a quella del triangolo ABC: le aree delle coppie di triangoli AHD – HEB e GIC – IBF sono uguali.

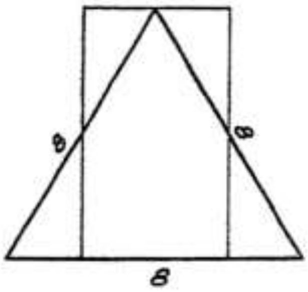
Quindi, l'area di DEFG è data da:

$A_{DEFG} = DG * DE = 4 * (6 + 13/14) = 4 * \sqrt{48} = \sqrt{768}$ braccia^2, valore uguale a quella calcolata sopra per il triangolo ABC.

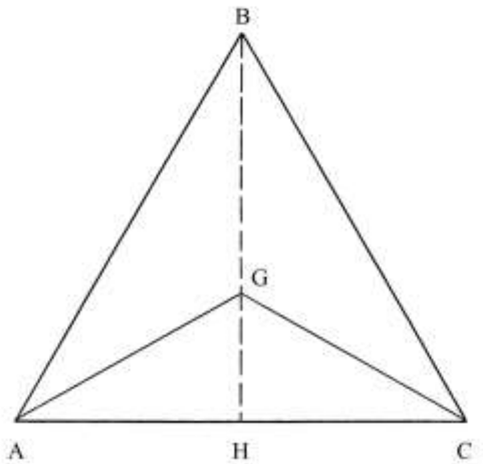
<u>Ragione 193</u>

Il problema verte su di un triangolo equilatero che ha lati lunghi 12 braccia.

Esso è accompagnato da uno schema che riproduce quello della precedente Ragione:



La Ragione chiede di calcolare la lunghezza del *diamitro* e cioè dell'altezza BH e la distanza dal centro del triangolo ai suoi vertici:



La lunghezza di BH è così ricavata:

* moltiplicare la lunghezza di un lato per sé stessa: 12 * 12 = 144;
* moltiplicare per 3/4: 144 * ¾ = 108;
* estrarre la radice quadrata: √108 braccia, lunghezza di BH.

La lunghezza dei segmenti GA, GB e GC (che sono tre raggi del cerchio circoscritto al triangolo) è uguale a 2/3 di quella dell'altezza:

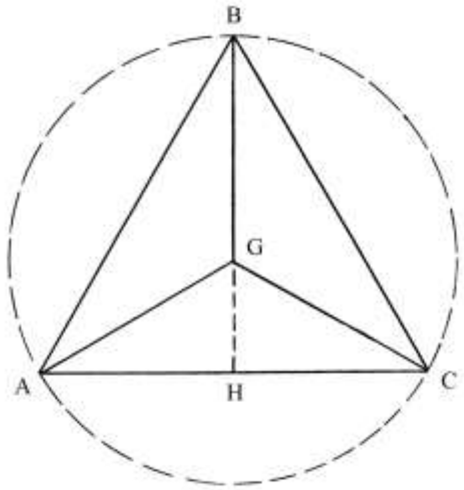
$$GA = GB = GC = 2/3 * BH = 2/3 * \sqrt{108} = \sqrt{(4/9 * 108)} = \sqrt{48} \text{ braccia.}$$

Allo stesso risultato si può pervenire con i seguenti passi:

* moltiplicare la lunghezza di un lato per sé stessa: 12 * 12 = 144;
* dividere per 3: 144/3 = 48;
* estrarre la radice quadrata: √48 braccia, lunghezza di GA, GB e GC.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Una variante del problema del triangolo equilatero muove dalla lunghezza dei tre segmenti GA, GB e GC: 6 braccia.



Deve essere calcolata la lunghezza dei lati del triangolo:

* moltiplicare la lunghezza di GA per sé stessa: 6 * 6 = 36;
* moltiplicare per 3: 36 * 3 = 108;
* estrarre la radice quadrata: √108 braccia, lunghezza dei lati del triangolo.

La soluzione è stata ottenuta applicando le regole inverse di quelle usate nel caso precedente di questa Ragione.

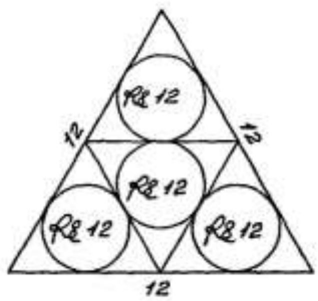
Nota: questa variante è la riproduzione del problema affrontato nella Ragione 157.

Ragione 194

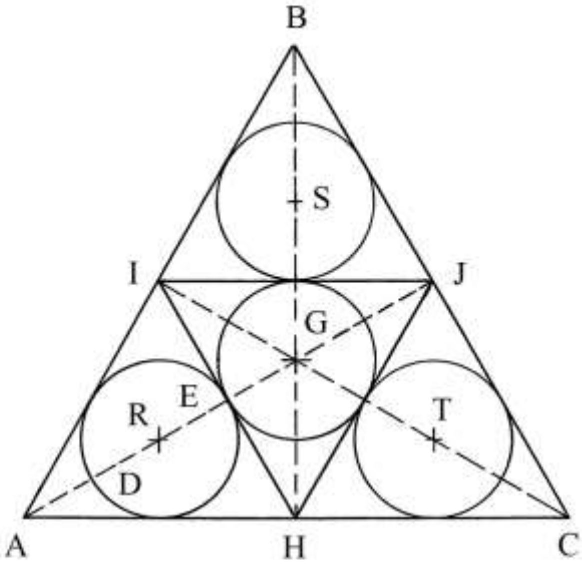
Un triangolo equilatero ha lati lunghi 12 e possono esservi inscritti:

* quattro cerchi di uguali dimensioni
* oppure quattro cerchi uno più grande e tre più piccoli o uno piccolo e tre più grandi.

L'Autore presenta solo il caso dei quattro cerchi uguali e riproduce il problema già descritto nella Ragione 152, con le stesse dimensioni.



Deve essere calcolato il diametro dei quattro cerchi: i loro centri giacciono tutti sulle altezze del triangolo.



L’Autore richiama la lunghezza dei segmenti GA, GB e GC (che sono tre raggi del cerchio circoscritto): √48 braccia.

Il diametro DE = *d* del cerchio di centro R è lungo metà di GA:

$d = ½ * \sqrt{48} = \sqrt{(1/4 * 48)} = \sqrt{12}$ braccia.

Il raggio RD = RE = *r* è lungo:

$r = ½ * DE = ½ * \sqrt{12} = \sqrt{(1/4 * 12)} = \sqrt{3}$ braccia.

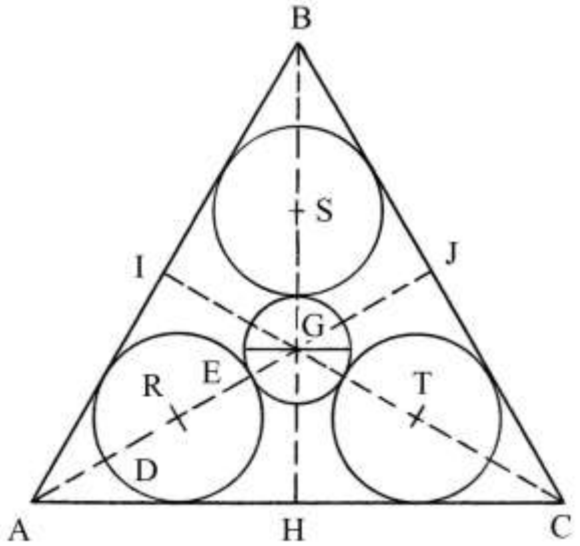
I lati dei quattro triangoli equilateri AIH, IBJ, IJH e HJC sono tutti lunghi metà di quelli di ABC e cioè 6 braccia.

I quattro cerchi sono inscritti nei quattro triangoli. Il loro diametro è calcolato con la seguente procedura alternativa:

* moltiplicare la lunghezza di un lato per sé stessa: 6 * 6 = 36;
* dividere per 3: 36/3 = 12;
* estrarre la radice quadrata: √12 braccia, diametro dei quattro cerchi inscritti.

Ragione 195

Un triangolo equilatero ha lati lunghi 10 braccia: al suo interno, con centro in G (centro anche del triangolo) è disegnato un cerchio che ha diametro 2 braccia.



Devono essere inscritti altri tre cerchi tangenti al primo e ai lati del triangolo e di uguali dimensioni. I loro centri R, S e T, si trovano sulle tre altezze di ABC: AJ, BH e CI sono le tre altezze.

La procedura usata dall'Autore contiene i seguenti passi:

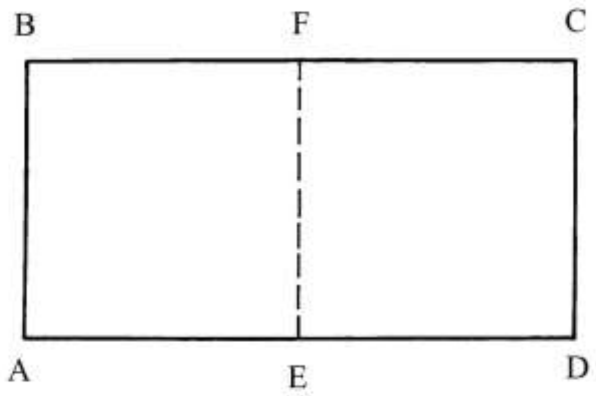
* moltiplicare la lunghezza di un lato del triangolo per sé stessa: $10 * 10 = 100$;
* dividere per 3: $100/3 = (33 + 1/3)$;
* estrarre la radice quadrata; $\sqrt{(33 + 1/3)}$ [braccia, lunghezza dei segmenti GA, GB e GC];
* sottrarre la lunghezza del raggio GE [1 braccio]: $\sqrt{(33 + 1/3)} – 1$ [braccia, lunghezza di EA];
* moltiplicare per 2/3: $[\sqrt{(33 + 1/3)} – 1] * 2/3 = \{\sqrt{[(33 + 1/) * 4/9]} – 2/3] =$
$= [\sqrt{(400/27)} – 2/3]$ braccia, diametro DE.

Ragione 196

Una sala ha la forma di un rettangolo: il lato maggiore è lungo il doppio del lato più corto: è un *bislungo*.

La sua area è di 54 braccia^2.

Il problema chiede le lunghezze dei lati.



L'Autore usa l'algebra e assegna alla larghezza del lato più corto, AB, la variabile "x" (nel testo è la consueta "1/c"). BC è lungo il doppio di AB:

$$BC = 2 * AB = 2 * x.$$

L'area di ABCD è:

$A_{ABCD} = AB * BC = x * (2 * x) = 2 * x^2$.

Ma l'area vale 54 $braccia^2$, quindi:

$2 * x^2 = 54$

$x^2 = 27$ e

$x = \sqrt{27}$ braccia = AB = CD.

I lati più lunghi, BC e AD, sono:

$BC = 2 * AB = 2 * \sqrt{27} = \sqrt{(4 * 27)} = \sqrt{108}$ braccia.

Ragione 197

Una pietra lunga 4 braccia, larga 3 e alta 5 costa 12 fiorini.

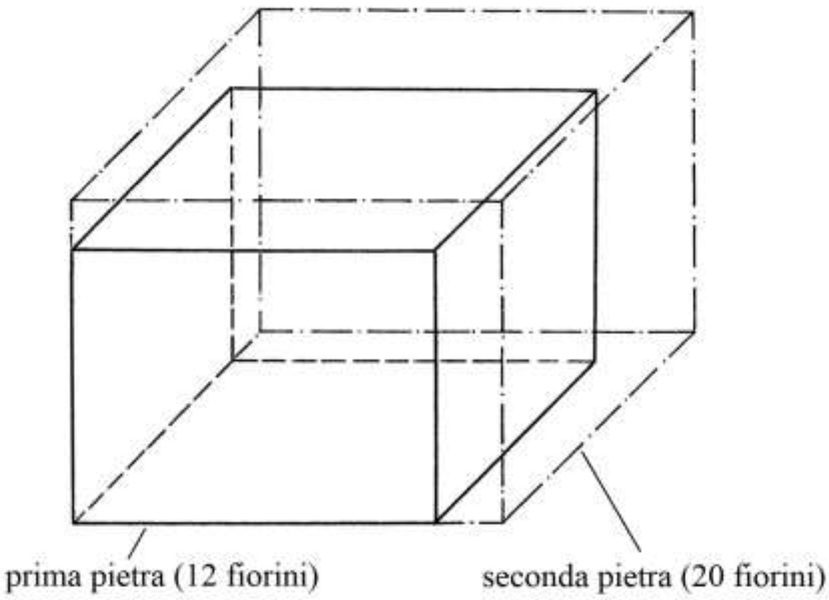
Una seconda pietra ha le dimensioni che rispettano le proporzioni della prima e costa 20 fiorini.

Il problema chiede le dimensioni della seconda pietra.

La procedura risolutiva contiene i seguenti passi:

* moltiplicare la lunghezza della prima pietra per sé stessa e di nuovo per sé stessa: $(4 * 4) * 4 = 64$;
* moltiplicare per 20 [fiorini]: $64 * 20 = 1280$;
* dividere per 12 [fiorini]: $1280/12 = (106 + 2/3)$;
* estrarre la radice cubica: $\sqrt[3]{(106 + \frac{2}{3})}$ braccia, lunghezza della seconda pietra;
* moltiplicare la larghezza della prima pietra per sé stessa e di nuovo per sé stessa: $(3 * 3) * 3 = 27$;
* moltiplicare per 20: $27 * 20 = 540$;
* dividere per 12: $540/12 = 45$;
* estrarre la radice cubica: $\sqrt[3]{45}$ braccia, larghezza della seconda pietra;
* moltiplicare l'altezza della prima pietra per sé stessa e poi di nuovo per sé stessa: $(5 * 5) * 5 = 125$;
* moltiplicare per 20: $125 * 20 = 2500$;
* dividere per 12: $2500/12 = (208 + 1/3)$;
* estrarre la radice cubica: $\sqrt[3]{(208 + 1/3)}$ braccia, altezza della seconda pietra.

Lo schema che segue confronta i due solidi, entrambi disegnati in scala e in assonometria cavaliera. La prima pietra è a tratto continuo e la seconda è a tratto e punto:



<u>Ragione 198</u>

Una tavola larga 4 braccia e lunga 5 costa 10 *soldi*: ne deve essere acquistata un'altra, con la stessa proporzione 4:5, che costi 16 *soldi*.

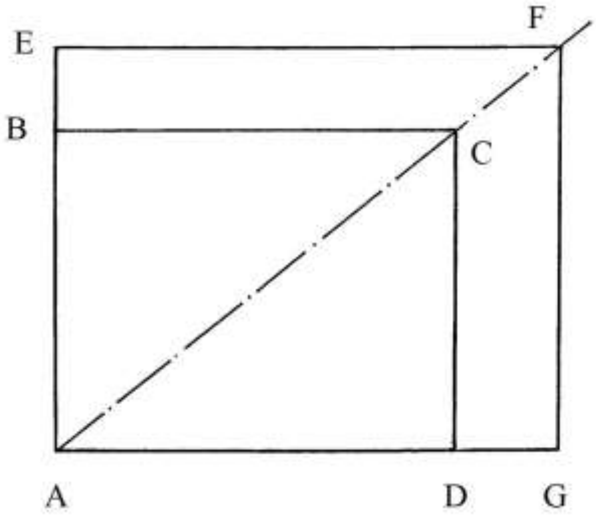
Il problema chiede di calcolare le dimensioni di questa seconda tavola.

Il soldo era un sottomultiplo del fiorino: 1 fiorino = 20 soldi.

La procedura è la seguente:

* moltiplicare la larghezza della prima tavola per sé stessa: 4 * 4 = 16;
* moltiplicare per 16 [soldi]: 16 * 16 = 256;
* dividere per 10 [soldi]: 256/10 = (25 + 3/5);
* estrarre la radice quadrata: √(25 + 3/5) braccia, larghezza della nuova tavola;
* moltiplicare la lunghezza della prima tavola per sé stessa: 5 * 5 = 25;
* moltiplicare per 16: 25 * 16 = 400;
* dividere per 10: 400/10 = 40;
* estrarre la radice quadrata: √40 braccia, lunghezza della seconda tavola.

Lo schema che segue confronta le due tavole: ABCD è quella originaria e AEFG è la seconda. Esso è disegnato in scala.



Le diagonali AC e AF sono coincidenti, ciò che prova la similitudine esistente fra i due rettangoli.

L'area della prima tavola è:

$A_{ABCD} = AB * AD = 4 * 5 = 20$ braccia^2.

L'area della seconda tavola, AEFG, può essere calcolata con almeno due metodi:

* con il prodotto delle due dimensioni:

  $A_{AEFG} = [\sqrt{(25 + 3/5)}] * (\sqrt{40}) = \sqrt{1024} = 32$ braccia^2;

* con una proporzione:

  $A_{ABCD} : A_{AEFG} = 10$ soldi : 16 soldi, da cui

  $A_{AEFG} = A_{ABCD} * 16/10 = 20 * 16/10 = 32$ braccia^2.

<u>Ragione 199</u>

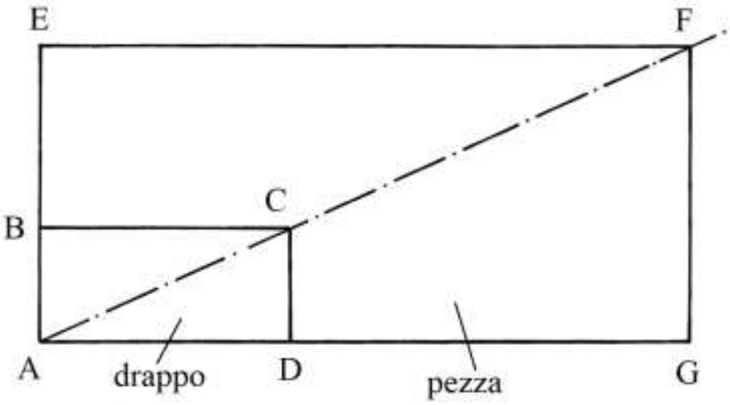
Un drappo lungo (5 + ½) braccia e largo (2 + 1/2) costa 10 fiorini. Una pezza che ha dimensioni in proporzione a quelle del drappo costa (67 + ½) fiorini.

Il problema chiede di ricavare le dimensioni della pezza.

La soluzione contiene i seguenti passi:

* moltiplicare la lunghezza del drappo per sé stessa: (5 + ½) * (5 + ½) = (30 + ¼);
* moltiplicare per (67 + ½) [fiorini]: (30 + ¼) * (67 + ½) = (2041 + 7/8);
* dividere per 10 [fiorini]: (2041 + 7/8)/10 = (204 + 3/16);
* estrarre la radice quadrata: √(204 + 3/16) braccia, lunghezza della pezza;
* moltiplicare la larghezza del drappo per sé stessa: (2 + ½) * (2 + ½) = (6 + ¼);
* moltiplicare per (67 + ½): (6 + ¼) * (67 + ½) = (421 + 7/8);
* dividere per 10: (421 + 7/8)/10 = (42 + 3/16);
* estrarre la radice quadrata: √(42 + 3/16) braccia, larghezza della pezza.

Il grafico che segue sovrappone il drappo ABCD alla pezza AEFG:



La diagonale del drappo, AC, coincide con quella pezza, AF. I due rettangoli sono disegnati in scala e sono simili.

Ragione 200

Un drappo lungo (6 + ½) braccia e largo (4 + ¼) costa 32 lire.

Il problema chiede di calcolare il costo di un altro drappo lungo 9 e largo 6 braccia.

A Firenze, *lira* era sinonimo di *fiorino*: 1 lira valeva 20 soldi e un soldo era diviso in 12 denari, per cui la lira equivaleva a 240 denari.

La soluzione prevede i seguenti passi:

* moltiplicare la lunghezza per la larghezza del primo drappo:
  (6 + ½) * (4 + ¼) = (27 + 5/8) braccia^2, area del primo drappo;
* moltiplicare la lunghezza per la larghezza del secondo drappo: 9 * 6 = 54 braccia^2, area del secondo drappo;
* moltiplicare l'area del secondo drappo per il costo del primo: 54 * 32 = 1728;
* dividere per l'area del primo: 1728/(27 + 5/8) = (62 lire + 11 soldi + 108/221 denari), costo del secondo drappo.

Ragione 201

Un vaso sferico è riempito di *utriacha* (la *triaca*, un liquido antiveleno assai diffuso all'epoca). Esso ha circonferenza lunga 22 spanne (o palmi) ed è costato 10 fiorini, con il patto di scontare il volume occupato dal recipiente e dalla decorazione esterna.

Misurando il vaso vuoto, esso ha spessore di 1 spanna.

Il problema chiede di calcolare la tara.

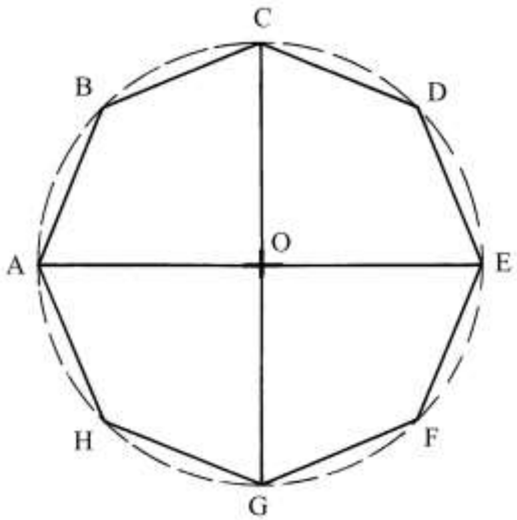
I passi della soluzione impiegata dall'Autore sono i seguenti:

* dividere la lunghezza della circonferenza per (3 + 1/7): 22/(3 + 1/7) = 7 spanne, diametro esterno del vaso;
* moltiplicare la lunghezza del diametro esterno per sé stessa e poi di nuovo per sé stessa: (7 * 7) * 7 = 343;
* moltiplicare per la costante 11/21: 343 * 11/21 = (179 + 2/3) spanne^3, volume della sfera;
* sottrarre 1 spanna per parte dal diametro esterno: 7 – (1 + 1) = 5 spanne, diametro interno;
* moltiplicare la lunghezza del diametro intero per sé stessa e poi di nuovo per sé stessa: (5 * 5) * 5 = 125;
* moltiplicare per la costante 11/21: 125 * 11/21 = (65 + 10/21) spanne^3 [nel testo è (65 + 10/71)];
* moltiplicare per 10 [fiorini]: (65 + 10/21) * 10 = (654 + 16/21);
* dividere per il volume della sfera: (654 + 16/21)/(179 + 2/3) = (3 + 347/539) fiorini, valore del liquido antiveleno.

Ragione 202

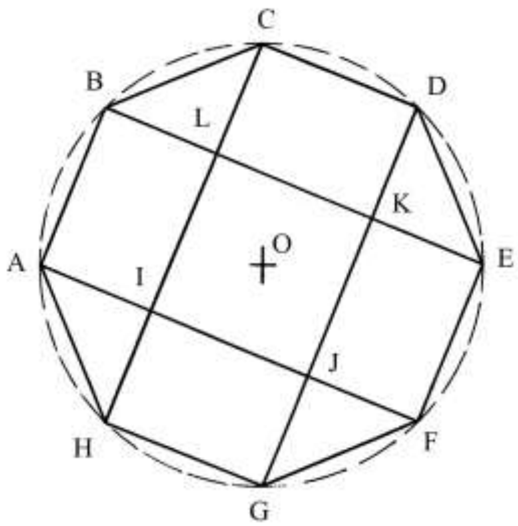
Un terreno ha la forma di un ottagono regolare ricavato da un cerchio di diametro lungo 10 braccia.

Il problema chiede la lunghezza dei lati del poligono.



AE e CG sono due diametri fra loro perpendicolari e ABCDEFGH è l'ottagono inscritto nel cerchio di centro O.

L'Autore procede poi a tracciare quattro diagonali, qui indicate con lettere AF, BE, CH e DG, che egli chiama *diamitri*: esse hanno uguale lunghezza perché il poligono è regolare:



Le quattro diagonali generano quattro triangoli rettangoli isosceli come quello HAI e si dividono reciprocamente ad angolo retto dando vita a un quadrato, IJKL, che ha lati lunghi quanto quelli dell'ottagono.

Consideriamo la diagonale AF: i segmenti AI e JF hanno uguale lunghezza pari a quella dei cateti di un triangolo rettangolo isoscele la cui ipotenusa è un lato dell'ottagono.

La soluzione offerta dall'Autore è piuttosto oscura perché egli muove da un'affermazione errata: le diagonali AF, BE, CH e DG sarebbero lunghe quanto i diametri AB e CD. In realtà esse sono delle *corde* che non passano per il centro O e non possono essere lunghe quanto un diametro.

Riproduciamo la parte finale del testo originale:

Se vuoi sapere la lunghezza di ciascuna linea di quelle di fuore, cioè dall'uno cantone all'altro, si tti conviene fare una positione falsa, però che ttu non la puoi fare vera. E trovara[i] uno numaro per linea proportionata, che 'l suo quadrato sia 2 linee agunte insieme, faccia 10 con quella inpotenosa. Ora poniamo che quella linea inpotenosa sia 4, che a multipricare per 16 e a partire per 2 linee, per ciascuna la radice di 8, che monta radice di 32. Ora dia agiugnere insieme la inpotenosa, cioè radice di 16, col la radice di 32, che è 9 e 7/9 (sic!) e l'altra è la radice di 16. E tanto è questa giuntione. Ora dì: [radice] di 16 è 4, e di 32 è 5 7/10, agiunti insieme, come decto, e fanno 9 e 7/10 e tanto è ciascuna linea insieme e di per sè ed ài apunto veduto lo suo difetto.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Utilizziamo strumenti moderni.

La lunghezza ℓ di un lato dell'ottagono è ricavabile da quella del raggio *r* del cerchio circoscritto:

$$\ell = r * \sqrt{(2 - \sqrt{2})} = 5 * \sqrt{(2 - \sqrt{2})} \approx 3{,}827 \text{ braccia.}$$

AH è l'ipotenusa del triangolo rettangolo isoscele HAI: la lunghezza dei due cateti AI e IIH è data da:

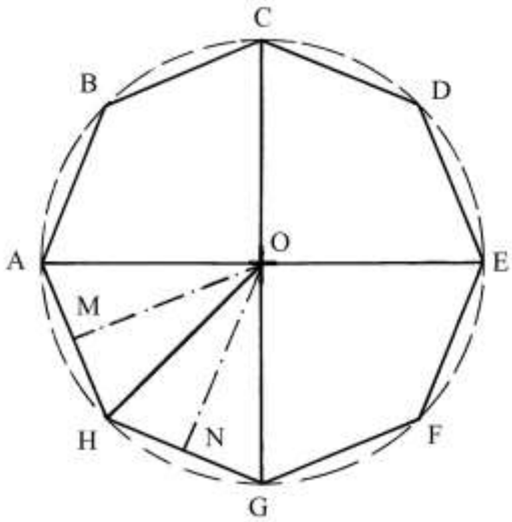
$$AI^2 + IH^2 = AH^2$$
$$2 * AI^2 = AH^2$$
$$AI^2 = AH^2/2 \quad e$$
$$AI = \sqrt{(AH^2/2)} = \sqrt{(3{,}827^2/2)} = \sqrt{7{,}323} \approx 2{,}71 \text{ braccia.}$$

La diagonale AF è lunga:

$$AF = AI + IJ + JF = AI + AH + AI = 2 * AI + AH = 2 * 2{,}271 + 3{,}827 =$$
$$= 9{,}247 \text{ braccia.}$$

L'Autore sembra offrire un risultato differente: la diagonale AF sarebbe lunga (9 + 7/10) = = 9,7 braccia.

Infine, non sembra che l'Autore consideri la presenza e l'utilità dell'*apotema*, che è il raggio del cerchio *inscritto* e l'altezza di ciascuno degli otto triangoli isosceli nei quali è scomponibile l'ottagono regolare:



\- APPROFONDIMENTO -

In un poligono o in un poliedro, una *diagonale* collega due vertici non consecutivi.

Riguardo al numero delle diagonali valgono le seguenti regole:

1. Un triangolo non possiede alcuna diagonale.
2. Poligoni che hanno lo stesso numero di lati (ad esempio, quadrato, rettangolo, trapezio, rombo) possiedono un identico numero di diagonali (in questo caso i quadrilateri ne hanno *due*).
3. Il numero delle diagonali aumenta con il numero dei lati.

La tabella che segue riassume i dati dei primi poligoni:

Numero lati (= numero vertici)	Numero diagonali uscenti o entranti da o in ciascun vertice	Numero diagonali del poligono
3	0	0
4	1	2
5	2	5
6	3	9
7	4	14
8	5	20
9	6	27
10	7	35
11	8	44
12	9	54

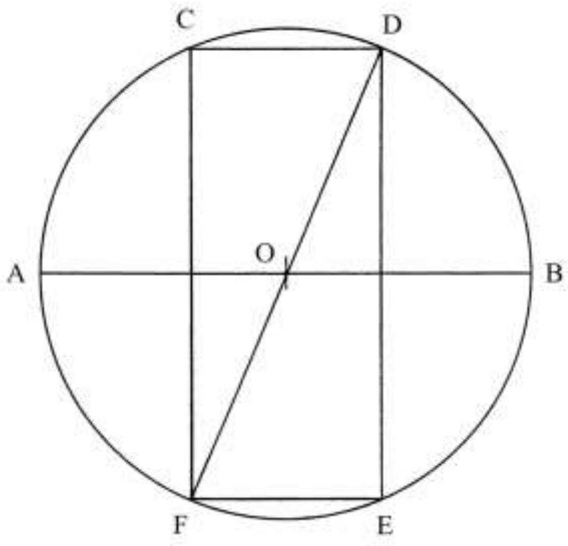
La formula generale che permette di calcolare il numero delle diagonali, D, conoscendo il numero dei lati, N, è la seguente:

$$D = (N - 3) * N/2$$

- -

Ragione 203

Un cerchio ha diametro lungo 13 braccia e deve esservi inscritto un *bisslongho* (bislungo) che ha il lato maggiore di 12 braccia.



Deve essere calcolata la larghezza del rettangolo inscritto, CD = FE.
FD è una diagonale del rettangolo CDEF, ma è anche un diametro del cerchio.
La lunghezza di CD è data da:

$CD^2 = FD^2 - CF^2 = 13^2 - 12^2 = 169 - 144 = 25$ e

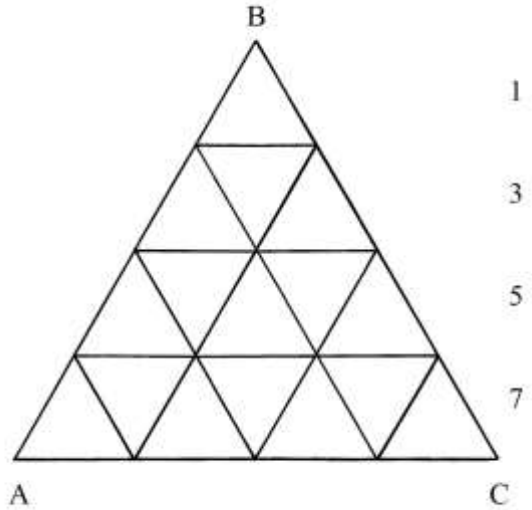
$CD = \sqrt{25} = 5$ braccia.

Il rettangolo CDEF ha dimensioni 5 x 12 braccia e non è esattamente un bislungo.

Ragione 204

Un triangolo equilatero ha lati lunghi 12 braccia. Essi sono divisi in *quattro* parti di uguale lunghezza, pari a 3 braccia.

È disegnata una griglia di 16 triangoli equilateri:



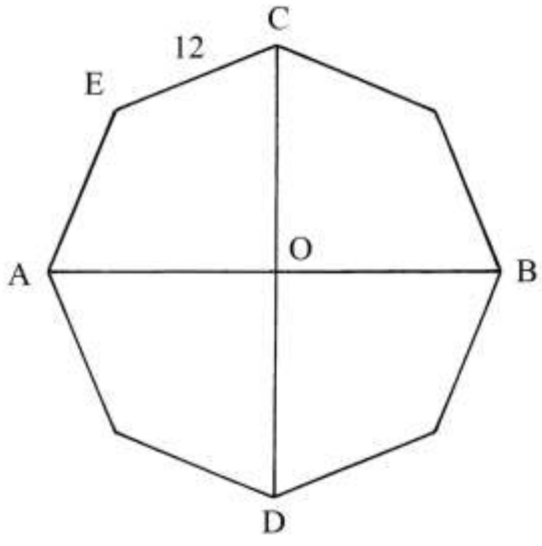
Nello schema qui sopra, a destra sono indicati i numeri dei piccoli triangoli che compaiono nelle quattro righe orizzontali: 1-3-5-7. Questi numeri formano una progressione aritmetica di ragione 2 e la somma è 16.

Il problema chiede di determinare il rapporto fra l'area di ciascuno dei sedici triangoli e quella di ABC.

I piccoli triangoli hanno lati lunghi *un quarto* dei lati di ABC e la loro area è 1/16 (= $1/4^2$) di quella del triangolo maggiore.

Ragione 205

Un terreno ha la forma di un ottagono regolare con lati lunghi 12 braccia:



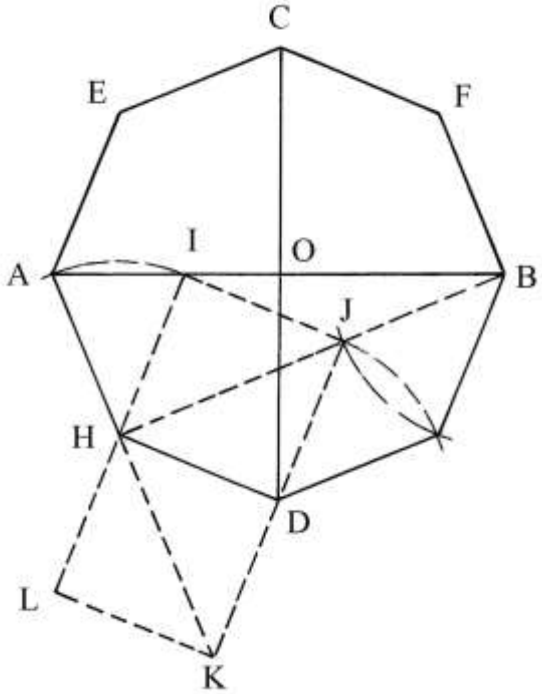
Il problema chiede la sua area.

La soluzione offerta dall'Autore è piuttosto oscura: i suoi passi sono i seguenti:

* moltiplicare la lunghezza di un lato per sé stessa: 12 * 12 = 144;

* dividere per 2: 144/2 = 72;
* estrarre la radice quadrata: √72;
* moltiplicare per 2: (√72) * 2 = √(72 * 4) = √288 braccia, lunghezza di ciò che l'Autore definisce *diamitro diritto*.

A questo punto sembra utile approfondire l'argomento, anche con l'aiuto dello schema che segue:



Su di un lato dell'ottagono, ad esempio HD, sono costruiti due quadrati: HIJD e HDKL. Sono poi tracciate le diagonali HJ (prolungata fino a incontrare B) e HK.

Con raggio HD, fare centro in D, in H e in B e disegnare tre archi: JG, AI e GJ.

AIH è un triangolo isoscele che ha i lati HA e HI lunghi quanto quelli dell'ottagono.

DJBG è un *rombo*: i suoi lati DJ, JB, BG e DG sono anch'essi lunghi quanto quelli dell'ottagono.

HJ e HK sono due diagonali e sono lunghe:

HJ = HK

$HJ^2 = HD^2 + DJ^2 = 12^2 + 12^2 = 288$ e

HJ = √288 braccia. L'Anonimo ha calcolato la lunghezza di HJ (e di HK): HJ è il suo *diamitro diritto*.

HB è una diagonale dell'ottagono che è lunga:

HB = HJ + JB = HJ + GB = (√288 + 12) braccia.

* Moltiplicare l'ultima espressione per sé stessa: (√288 + 12) * (√288 + 12) = = (288 + 144 + 24 * √288) = (432 + √165288);
* estrarre la radice quadrata: √(432 + √165288) ≈ (407 + 239/814);
* moltiplicare per 2 il quadrato della lunghezza di HJ: 288 * 2 = 576;
* sommare con 407: (576 + 407) = 983;
* estrarre la radice quadrata: √983 ≈ (31 + 11/31 braccia, lunghezza del diametro AB.

L'Autore procede poi a calcolare l'area del terreno con una serie di passi che sono qui semplificati:

* dividere √72 per 2: (√72)/2 = √(72/4) = √18;

* moltiplicare per √72: $\sqrt{18} * \sqrt{72} = \sqrt{1296} = 36$;
* moltiplicare per 4: 36 * 4 = 144;
* sottrarre da 432: 432 – 144 = 288;
* sommare con (407 + 239/814): 288 + (407 + 239/814) =
= (695 + 239/814), approssimato a 695 braccia^2, area dell'ottagono.

\- APPROFONDIMENTO -

Oggi l'area di un ottagono è ottenuta con la formula:

$A_{\text{OTTAGONO}} = \ell^2 * F$, dove ℓ è la lunghezza del lato di questo poligono regolare e *F* è un *numero fisso* che per l'ottagono vale 4,828.

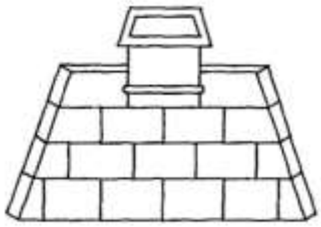
$A_{\text{OTTAGONO}} = 12^2 * 4{,}828 = 695{,}232$ braccia^2.

Benché abbia usato una procedura lunga e piuttosto oscura, il risultato ottenuto dall'Autore è esatto.

\- -

Ragione 206

Un pozzo doveva essere scavato per la profondità di 12 braccia e per un costo di 12 lire [cioè fiorini].



Alla profondità di 9 braccia fu trovata l'acqua.

Il problema chiede di calcolare il costo dello scavo parziale a 9 braccia.

La soluzione è la seguente:

* sommare tutti i numeri interi da 1 a 12:
(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12) = (1 + 12) * 6 = 78;
* sommare tutti i numeri interi da 1 a 9:
(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) = 45.

A questo punto l'Autore imposta una proporzione:

78 : 12 [fiorini] = 45 : x [fiorini]

x = (12 * 45)/78 = 540/78 = (6 + 12/13) fiorini.

Ragione 207

Viene scavato un pozzo che ha diametro 3 braccia e profondo 10 al costo di 7 lire.

Il problema chiede la profondità di un secondo pozzo con diametro 4 braccia e identico costo.

La soluzione è la seguente:

* moltiplicare la lunghezza del diametro del primo pozzo per sé stessa: 3 * 3 = 9;
* moltiplicare per la profondità del primo pozzo: 9 * 10 = 90;
* moltiplicare la lunghezza del diametro del secondo pozzo per sé stessa: 4 * 4 = 16;
* dividere 90 per 16: 90/16 = (5 + 5/8) braccia, profondità del secondo pozzo.

Ragione 208

Un pozzo è profondo 10 braccia e ha diametro 6: costa 80 lire.

Deve essere scavato un secondo pozzo con uguale profondità e diametro di 7 braccia.

Il problema chiede il costo del secondo pozzo.

La soluzione contiene i seguenti passi:

* moltiplicare la lunghezza del diametro del primo pozzo per sé stessa: 6 * 6 = 36;
* moltiplicare per la profondità: 36 * 10 = 360;
* moltiplicare la lunghezza del diametro del secondo pozzo per sé stessa: 7 * 7 = 49;
* moltiplicare per la profondità: 49 * 10 = 490.

La soluzione si conclude con una proporzione:

360 : 80 [lire] = 490 : x [lire]   dove “x” è il costo del secondo pozzo   e

x = (80 * 490)/360 = [108 lire + 17 soldi + (9 + ½) denari].

Forse il risultato corretto è:

x = [108 lire + 17 soldi + (*9 + 1/3*) denari].

Ragione 209

Un pozzo doveva essere scavato per una profondità di 6 braccia, al costo di 8 lire, ma fu lavorato solo in parte e il prezzo corrisposto fu di 4 lire.

Il problema chiede la profondità scavata.

La soluzione è:

* sommare tutti gli interi da 1 a 6: (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 21;
* dividere le 8 lire per 21: 8/21 = [7 soldi + (7 + 3/7) denari] [l’Autore dà un risultato leggermente diverso: 7 soldi + (*7 + ¾*) denari].

La cifra appena calcolata è il costo per lo scavo di 1 braccio di profondità.

Per 2 braccia il costo è: [7 soldi + (7 + 3/7) denari] * 2.

Per 3 braccia il costo è: [7 soldi + (7 + 3/7) denari] * 3 e così di seguito fino a *sei* braccia: [7 soldi + (7 + 3/7) denari] * 6.

Dopo questi passi, l’Autore afferma che lo scavo del pozzo si limitò a (4 + 1/10) braccia.

I calcoli dell’Autore sollevano qualche dubbio.

Ragione 210

Questa Ragione conclude la serie dei problemi legati allo scavo dei pozzi.

Uno scavo profondo 12 braccia costa 12 fiorini. Il problema chiede di calcolare la profondità di un pozzo il cui scavo costa 6 fiorini.

La soluzione dell’Autore è:

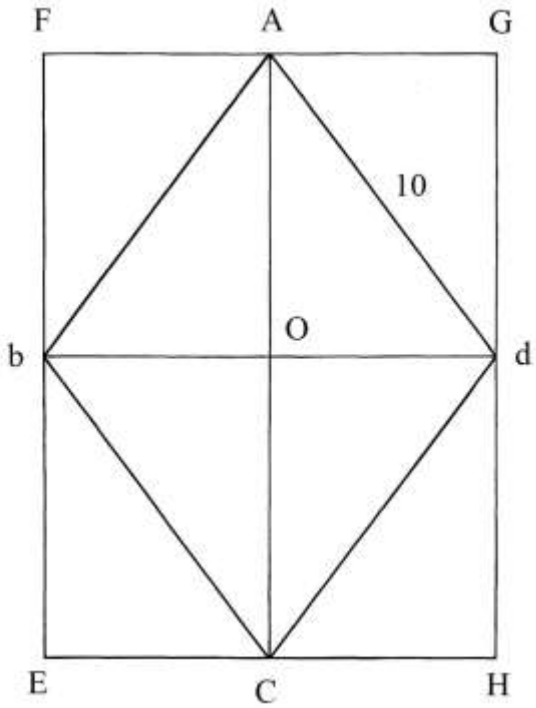
* sommare tutti i numeri interi da 1 a 12:

  (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12) = 78;
* moltiplicare 78 per 6 [fiorini]: 78 * 6 = 468;
* dividere per 12 [fiorini]: 468/12 = 39.

Con i successivi passi, che implicano l’uso dell’algebra, l’Autore giunge a ricavare la profondità del pozzo dal costo di 6 fiorini: [√(78 + ¼) – ½] braccia.

Ragione 211

Il rombo .A.b.C.d. ha lati lunghi 10 braccia.



La diagonale maggiore AC (il *diamitro*) è lunga 16 braccia e quella minore *bd* (l'*ampiezza*) è 12 braccia.

Il rombo è inscritto nel rettangolo EFGH che ha lati lunghi 16 per 12 braccia.

L'area del rombo è calcolabile con due metodi:

$A_{AbCd} = AC * (bd/2)$ oppure

$A_{AbCd} = (AC/2) * bd$.

Essa vale:

$A_{AbCd} = 16 * (12/2) = 96$ braccia^2.

L'area del rettangolo EFGH è:

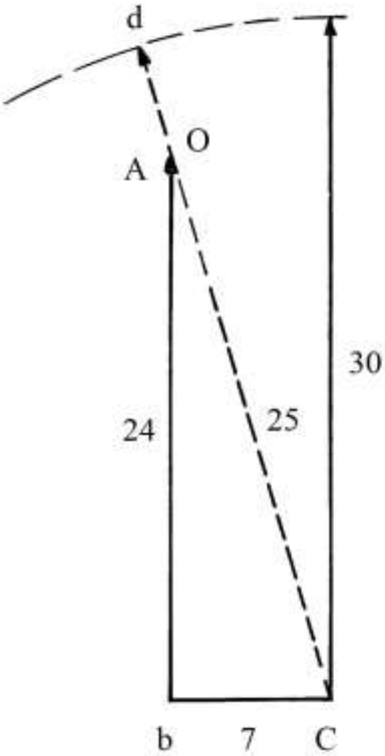
$A_{EFGH} = EF * EH = 16 * 12 = 192$ braccia^2.

L'area del rettangolo è il *doppio* di quella del rombo perché contiene *otto* triangoli rettangoli e il rombo solo *quattro*.

Ragione 212

In un piano sono conficcate verticalmente due lance: una è lunga 24 braccia e l'altra 30.

Esse sono distanziate di 7 braccia.



La lancia più lunga ruota fino a toccare in O la punta A di quella più corta.

Il problema chiede la lunghezza di CO.

bOC è un triangolo rettangolo di cui sono note le lunghezze dei cateti Ab e bC. L'ipotenusa CO è lunga:

$CO^2 = Ab^2 + bC^2 = 24^2 + 7^2 = 576 + 49 = 625$ e

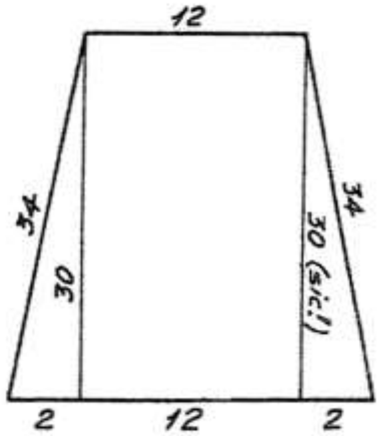
$CO = \sqrt{625} = 25$ braccia.

Il segmento Od è lungo:

$Od = dC - OC = 30 - 25 = 5$ braccia.

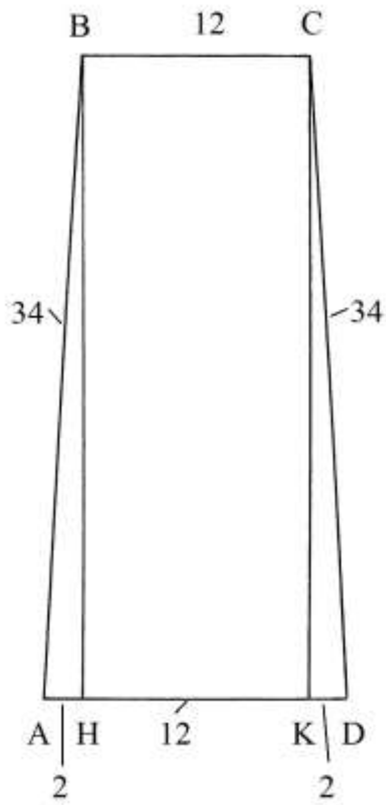
Ragione 213

Un trapezio isoscele ha basi lunghe 12 e 16 braccia e i lati inclinati 34 braccia.



Il disegno originale, riprodotto qui sopra, è fuori scala e contiene un errore, evidenziato dalla Simi con un bel (sic!): l'altezza del trapezio non è lunga 30 braccia ma è più lunga.

Lo schema che segue è in scala:



La lunghezza di BH e di CK è:

$BH^2 = AB^2 – AH^2 = 34^2 – 2^2 = 1156 – 4 = 1152$ e

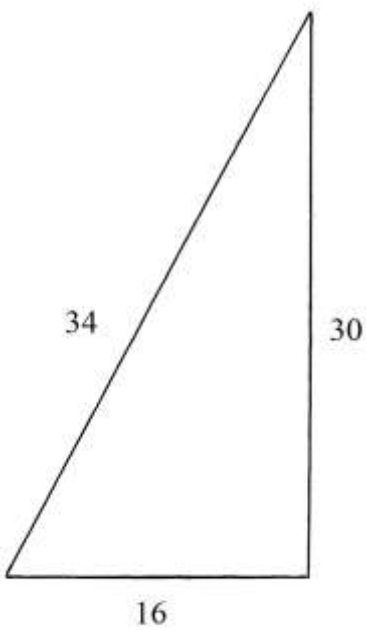
$BH = \sqrt{1152} \approx 33,941$ braccia.

La soluzione errata dell'Autore è stata da lui ricavata da:

$BH^2 = AB^2 – AD^2 = 34^2 – 16^2 = 1156 – 256 = 900$ e

$BH = \sqrt{900} = 30$ braccia.

Egli ha ritenuto l'ipotenusa AB derivata da un triangolo che ha cateti lunghi 16 e 30 braccia:



16-30-34 formano una terna derivata dalla primitiva 8-15-17.

L'area del trapezio ABCD è:

$A_{ABCD} = (AD + BC)/2 * BH = (16 + 12)/2 * \sqrt{1152} = 14 * \sqrt{1152} = \sqrt{225792} \approx$
$\approx 475{,}176$ braccia^2.

L'Autore calcola l'area per difetto in 420 braccia^2, perché utilizza l'errata lunghezza di BH = 30 braccia.

Ragione 214

Viene riproposto il problema della precedente Ragione ed è commesso lo stesso errore perché di nuovo attribuisce all'altezza BH il valore di 30 braccia.

Calcola l'area del rettangolo BCKH:

$A_{BCKH} = BC * BH = 12 * 30 = 360$ braccia^2.

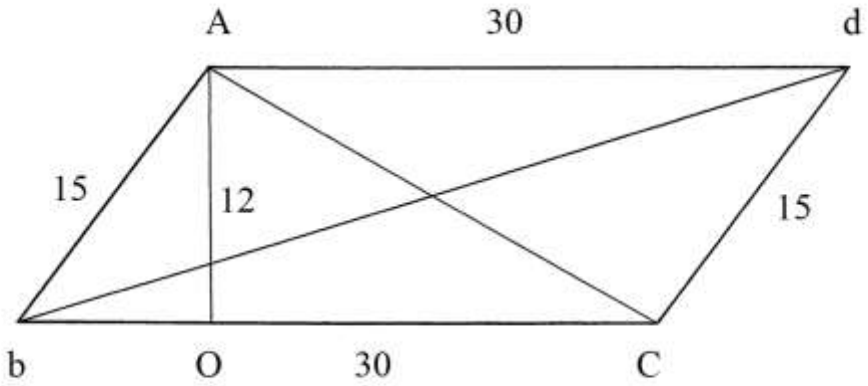
Poi calcola l'area dei due triangoli rettangoli ABH e KCD:

$A_{ABH} = A_{KCD} = AH * BH/2 = 2 * 30/2 = 30$ braccia^2.

$A_{ABCD} = A_{BCKH} + A_{ABH} + A_{KCD} = 360 + 30 + 30 = 420$ braccia^2, con il risultato errato per difetto già ricavato.

Ragione 215

Un campo ha la forma di un parallelogramma (che l'Autore chiama *romboide*) con le dimensioni misurate in *canne* riportate sulla figura:



Il problema chiede l'area del quadrilatero.

Trattandosi di un terreno, è probabile che l'Autore si sia riferito alla *canna* multiplo del *braccio a terra*:

1 canna = 6 braccia a terra ≈ 3,307 metri.

Dal vertice A abbassare la perpendicolare alla base bC: AO è lunga 12 canne.

L'area del parallelogramma è:

$A_{bAdC} = bC * AO = 30 * 12 = 360$ canne^2.

L'Autore chiama i lati obliqui bA e Cd *teste*.

AOb è un triangolo rettangolo: il cateto bO è lungo:

$bO^2 = bA^2 - AO^2 = 15^2 - 12^2 = 225 - 144 = 81$ e

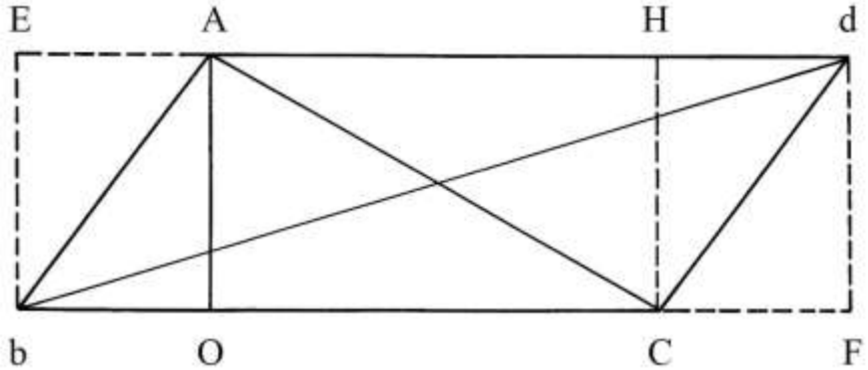
$bO = \sqrt{81} = 9$ canne.

La lunghezza della diagonale minore, AC, che è un *diamitro*, è:

$AC^2 = AO^2 + OC^2 = AO^2 + (bC - bO)^2 = 12^2 - (30 - 9)^2 = 144 + 441 = 585$ e

$AC = \sqrt{585}$ canne.

Per calcolare la lunghezza della diagonale maggiore, bd, occorre procedere al completamento del rettangolo bEdF da cui è stato ritagliato il parallelogramma:



Il lato bF è lungo:

bF = bC + CF = bC + bO = 30 + 9 = 39 canne.

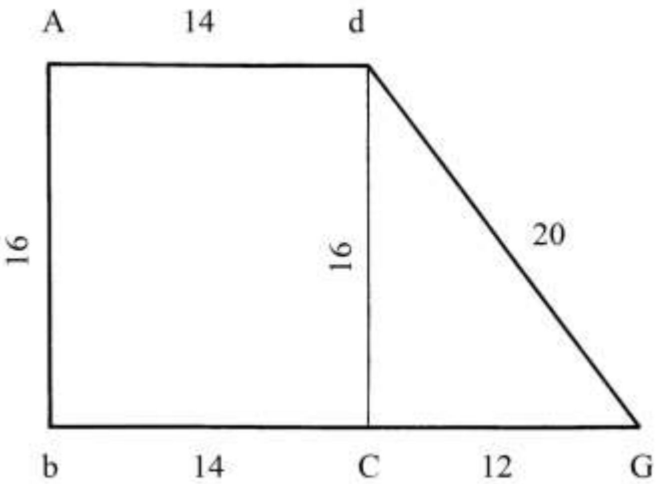
La lunghezza di bd è:

$bd^2 = bF^2 + dF^2 = 39^2 + 12^2 = 1521 + 144 = 1665$ e

$bd = \sqrt{1665} \approx 40{,}80$ canne.

Ragione 216

Un terreno ha la forma di un trapezio rettangolo con le dimensioni, espresse in *canne*, riportate sullo schema:



Nel testo, l'Autore mescola le unità di misura: canne e braccia. Per chiarezza, qui ci riferiamo sempre all'unità *canna*.

Le basi del trapezio sono lunghe 14 (Ad) e 26 canne (bG).

Per semplificare i calcoli, dal vertice *d* è abbassata la perpendicolare a bG: è dC.

Il poligono è ora suddiviso in un rettangolo (AdCb) e in un triangolo rettangolo (CdG).

La base maggiore bG è scomposta in due segmenti:

bC = 14 canne

CG = bG – bC = bG – Ad = 26 – 14 = 12 canne.

L'area di AdCb è:

$A_{AdCb} = bC * Ab = 14 * 16 = 224$ canne^2.

L'area del triangolo CdG è:

$A_{CdG} = CG * Cd/2 = 12 * 16/2 = 96$ canne^2.

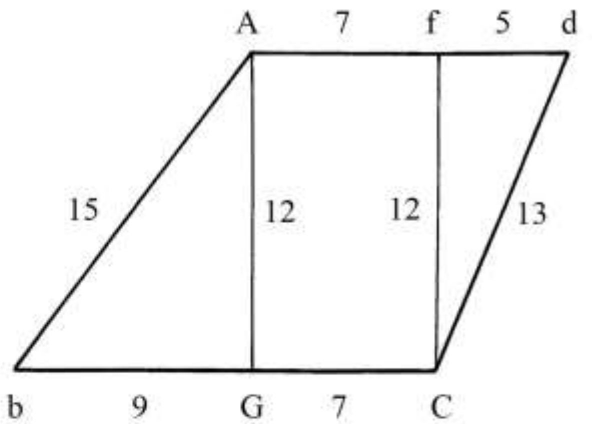
L'area dell'intero trapezio è data da:

$A_{AdGb} = A_{AdCb} + A_{CdG} = 224 + 96 = 320$ canne^2.

Il triangolo rettangolo dCG ha lati lunghi 12-16-20 canne: questi numeri formano una terna derivata dalla primitiva 3-4-5.

Ragione 217

Il poligono è un trapezio scaleno le cui dimensioni sono espresse in *braccia*:



L'Autore chiama questo quadrilatero *campo declinante*: forse voleva scrivere *capo declinante*.

Deve essere calcolata la sua area.

Sono tracciate due altezze, AG e fC, entrambe lunghe 12 braccia: esse scompongono il trapezio in un rettangolo, AfCG, e in due triangoli rettangoli: AGb e Cfd.

Le due basi sono lunghe 12 braccia (Ad) e 16 (bC).

Occorre ricavare le lunghezze di bG e di fd:

* $bG^2 = bA^2 – AG^2 = 15^2 – 12^2 = 225 – 144 = 81$ e $bG = \sqrt{81} = 9$ braccia;
* $fd^2 = Cd^2 – Cf^2 = 13^2 – 12^2 = 169 – 144 = 25$ e $fd = \sqrt{25} = 5$ braccia.

L'area del triangolo AGb è:

$A_{AGb} = bG * AG/2 = 9 * 12/2 = 54$ braccia^2.

L'area del triangolo Cfd è:

$A_{Cfd} = fd * fC/2 = 5 * 12/2 = 30$ braccia^2.

Il segmento GC è lungo:

$GC = bC – bG = 16 – 9 = 7$ braccia.

L'area del rettangolo AfCG è:

$A_{AfCG} = GC * AG = 7 * 12 = 84$ braccia^2.

L'area dell'intero trapezio è data da:

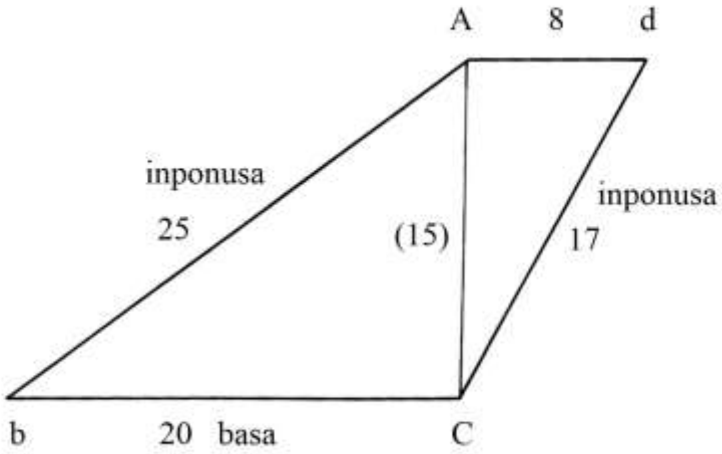
$A_{AdCb} = A_{AGb} + A_{Cfd} + A_{AfCG} = 54 + 30 + 84 = 168$ braccia^2.

Il triangolo AGb ha lati lunghi 9-12-15 braccia: questi numeri formano una terna derivata dalla primitiva 3-4-5. A sua volta, il triangolo Cfd ha lati lunghi 5-12-13 braccia: questi numeri formano la seconda terna primitiva.

Ragione 218

Il quinto quadrilatero è un trapezio scaleno che l'Autore chiama *quadrangolo pesce*.

Le due basi Ad e bC, sono parallele.



Per calcolare l'area del poligono occorre tracciare l'altezza CA, perpendicolare a Ad e a bC: avendo scelto numeri formati da terne primitive e derivate, CA collega due vertici.

L'Autore chiama la base minore Ad *testa di sopra* e quella maggiore, bC, *testa di sopto* o *basa*. Ab e Cd sono i due lati obliqui: ad entrambi egli assegna il termine *inponusa* (forse una contrazione di *ipotenusa*).

Nel testo non è spiegata l'origine della lunghezza di AC che può essere calcolata come segue:

$AC^2 = Ab^2 - bC^2 = 25^2 - 20^2 = 625 - 400 = 225$ e $AC = \sqrt{225} = 15$ braccia

Oppure

$AC^2 = Cd^2 - Ad^2 = 17^2 - 8^2 = 289 - 64 = 225$ e $AC = \sqrt{225} = 15$ braccia.

Le aree dei due triangoli rettangoli che formano il trapezio sono:

$A_{AbC} = bC * AC/2 = 20 * 15/2 = 150$ braccia^2

$A_{AdC} = Ad * AC/2 = 8 * 15/2 = 60$ braccia^2.

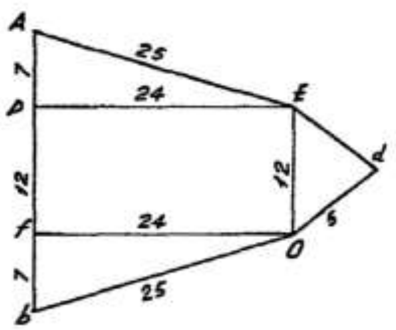
L'area dell'intero trapezio è data da:

$A_{AdCb} = A_{AbC} + A_{AdC} = 150 + 60 = 210$ braccia^2.

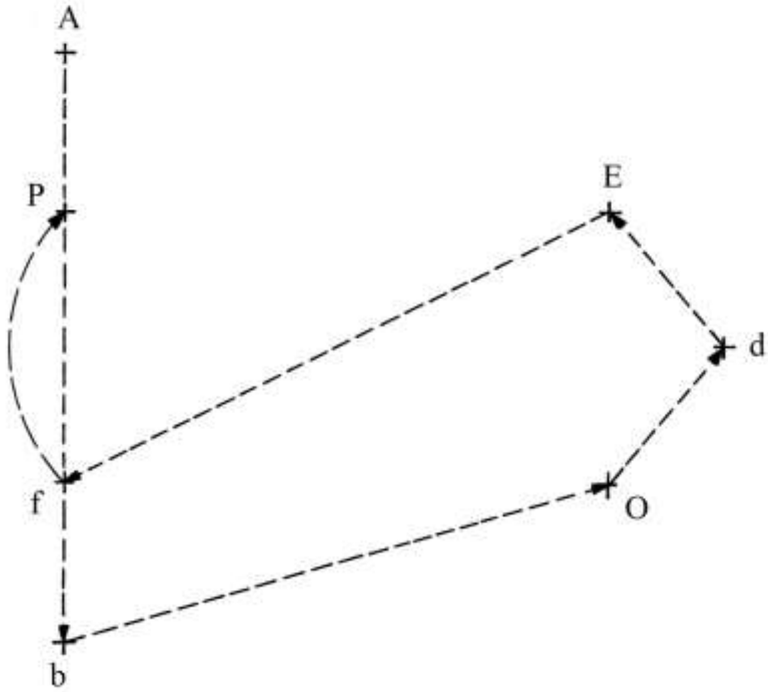
Il triangolo AbC ha lati lunghi 15-20-25 braccia, numeri che forma una terna derivata dalla primitiva 3-4-5; il triangolo AdC ha lati lunghi 8-15-17 braccia: questi numeri formano la *quarta* terna primitiva.

Ragione 219

AbOdE è un pentagono non regolare:



L'Autore lo indica con la sigla .A.b.O.d.E.f.P. :come noto, oggi non sono inseriti i punti (.) separatori fra le lettere che indicano i vertici. Il grafico che segue visualizza i rapporti fissati dalla sigla, con le frecce che indicano i punti di arrivo dei singoli rami:



L'Autore non ha previsto alcun collegamento fra i vertici A ed E: il poligono non è chiuso.

Per calcolare l'area del poligono è necessario scomporlo in triangoli e in un rettangolo (PEOf).

Lo schema contiene un grosso errore: il triangolo EdO è chiaramente isoscele ma le dimensioni scritte sono sbagliate perché violano una regola aurea dei triangoli: la somma delle lunghezze di due lati qualsiasi è sempre maggiore della lunghezza del terzo lato; invece si ha:

$Od + Ed > EO$

$5 + 5 > 12$

$10 > 12$, il che è falso.

L'Autore calcola l'area di EdO come segue (errore fatto notare dalla Simi nella sua trascrizione):

$A_{EdO} = Od/2 * OE = 5/2 * 12 = 30$ braccia^2.

Nell'APPROFONDIMENTO in calce a questo paragrafo sono presentate due soluzioni per rimediare all'errore.

Le aree degli altri tre poligoni sono:

$A_{AEP} = AP * PE/2 = 7 * 24/2 = 84$ braccia^2;

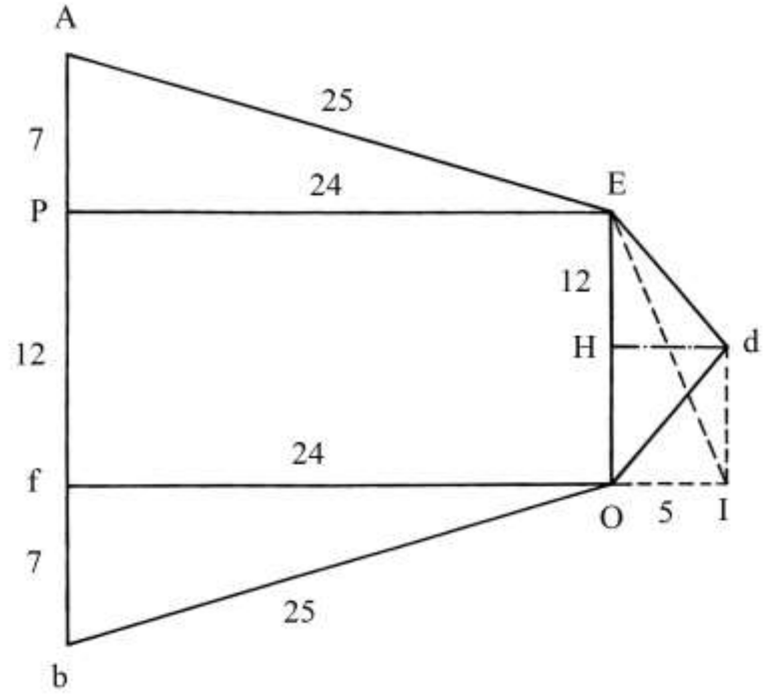
$A_{bfO} = bf * fO/2 = 7 * 24/2 = 84$ braccia^2;

$A_{fPEO} = fP * PE = 12 * 24 = 288$ braccia^2.

I triangoli rettangoli AEP e bfO hanno lati con lunghezze che formano due identiche terne primitive: 7-24-25.

- APPROFONDIMENTO -

Lo schema che segue (disegnato in scala) avanza due ipotesi riguardo al triangolo EdO:



Per la prima ipotesi, il triangolo EdO è isoscele e ha altezza dH lunga *5 braccia*; la sua area è:

$A_{EdO} = EO * dH/2 = 12 * 5/2 = 30$ braccia^2.

La seconda ipotesi è che si tratti del triangolo rettangolo EOI che ha cateti lunghi 12 e 5 braccia; la sua area è:

$A_{EOI} = EO * OI/2 = 12 * 5/2 = 30$ braccia^2.

Riteniamo più probabile la prima ipotesi.

L'area dell'intero pentagono non regolare è:

$A_{PENTAGONO} = A_{AEP} + A_{bfO} + A_{fPEO} + A_{EdO} = 84 + 84 + 288 + 30 = 486$ braccia^2.

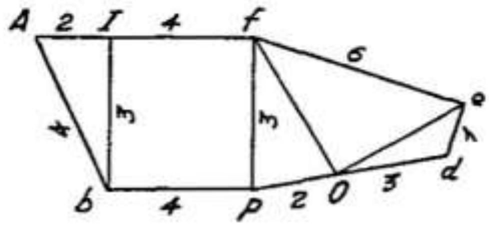
Anche considerando la seconda ipotesi, l'area del pentagono resta immutata in 486 braccia^2.

L'Autore fornisce un risultato, 496 braccia^2, che contiene un evidente errore aritmetico.

- -

Ragione 220

Il problema chiede di calcolare l'area di un esagono non regolare:



Il poligono è scomposto in quattro triangoli e in rettangolo (bIfP).

Se il triangolo AIb è rettangolo, le dimensioni riportate sulla figura sono sbagliate:

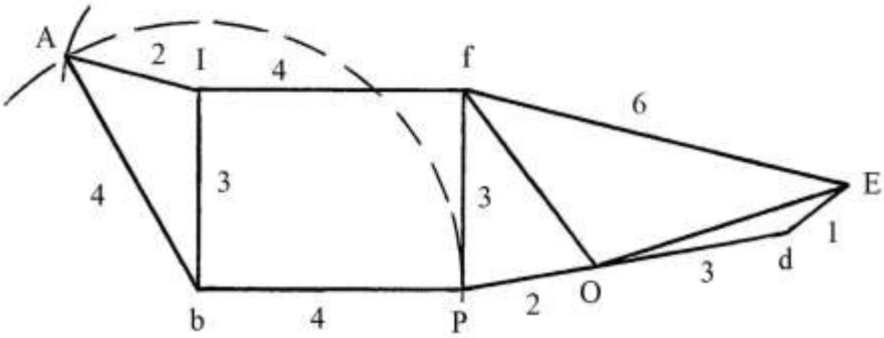
$Ab^2 = AI^2 + Ib^2$

$4^2 = 2^2 + 3^2$

$16 = 4 + 9$ risultato errato.

L'Autore non fornisce le lunghezze di alcuni lati dei triangoli.

Lo schema che segue è un tentativo di ricostruzione:



Il triangolo AbI è scaleno e non rettangolo: i suoi lati sono lunghi come scritto nello schema originale.

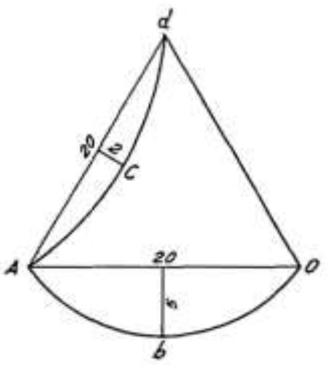
Nella parte destra è mostrata un'ipotesi: il triangolo OED rispetta le dimensioni originali ma è assai più appiattito.

È possibile che l'originale sia solo un esempio di divisione di un poligono non regolare.

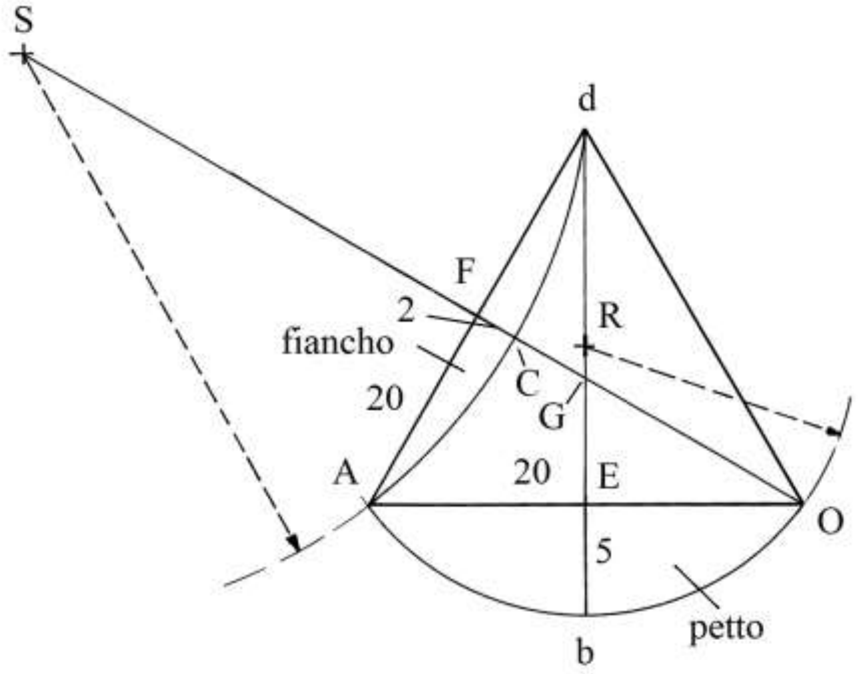
<u>Ragione 221</u>

La figura che accompagna il testo è definita "*triangolo gonbo*" con un lato che "*fa petto*" (AbO) e un altro che "*fa fiancho*" (ACd).

Il problema chiede l'area di questo campo le cui dimensioni sono misurate in braccia.



La struttura base di questo campo è il triangolo equilatero AdO al quale è aggiunta l'area occupata dal segmento circolare AbOE e sottratta quella relativa al segmento circolare ACdF:



Il punto G è il baricentro e l'ortocentro del triangolo equilatero AdO.

Il punto R è il centro dell'arco di circonferenza AbO e giace sull'altezza dE: l'arco ha raggio RA = Rb = RO.

Il punto S è esterno al triangolo ed è il centro dell'arco di circonferenza dCA, disegnato con raggio Sd = SC = SA. S è posizionato sul prolungamento dell'altezza OF.

L'autore calcola la lunghezza di un'altezza di AdO:

$dE^2 = dO^2 – EO^2 = 20^2 – (20/2)^2 = 400 – 100 = 300$ e

$dE = \sqrt{300}$ braccia.

L'area del triangolo AdO è:

$A_{AdO} = dE + AO/2 = \sqrt{300} * (20/2) = \sqrt{300} * 10 = \sqrt{(300 * 100)} = \sqrt{30000} \approx$

$\approx (173 + 1/5)$ braccia^2 [l'Autore indica (173 + 1/3)].

Procede poi a calcolare l'area del segmento circolare AbOE con un metodo approssimato:

* moltiplicare la lunghezza della freccia Eb per quella della lunghezza della corda AO:

  $Eb * AO = 5 * 20 = 100$;

* moltiplicare per la costante 7/12: $100 * 7/12 = (58 + 1/3)$ braccia^2, area del segmento circolare AbOE.

L'area di un segmento circolare è calcolata con la formula che è così sintetizzata:

$A_{\text{SEGMENTO CIRCOLARE}} = \text{freccia} * \text{corda} * 7/12 = 7/12 * f * c$.

L'area dell'altro segmento è ottenuta con la stessa formula:

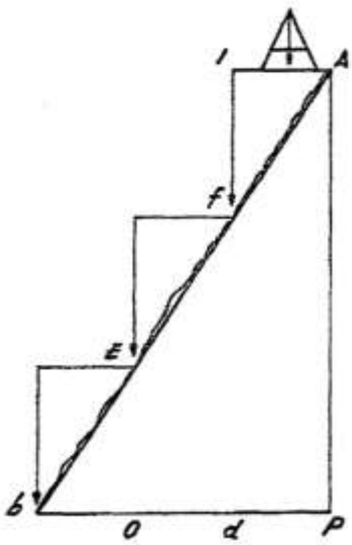
$A_{ACdF} = 7/12 * 2 * 20 = (23 + 1/3)$ braccia^2.

L'area totale del campo è data da:

$$A = A_{AdO} + A_{AbOE} – A_{ACdF} = (173 + 1/5) + ((58 + 1/3) – (23 + 1/3) = (208 + 1/5) \text{ braccia}^2.$$

<u>Ragione 222</u>

La Ragione descrive l'uso dell'*archipendolo* per misurare l'altezza di una montagna.



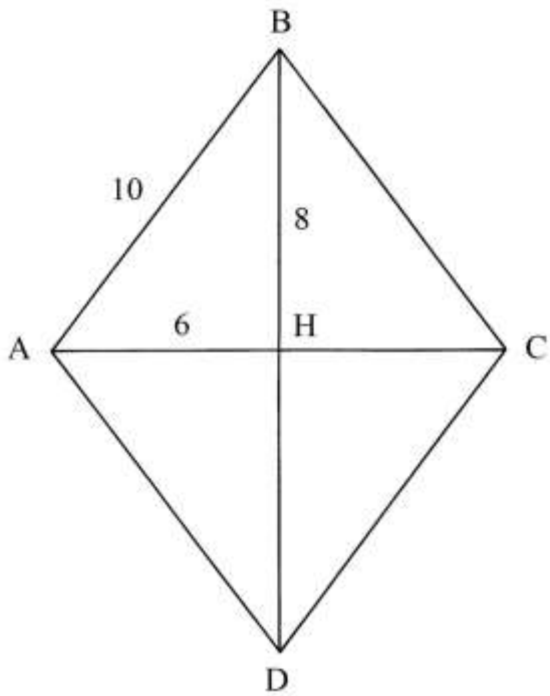
La montagna ha il profilo indicato con *Ab*. AP è la perpendicolare che è nascosta dalla terra. *bP* è il terzo lato del triangolo rettangolo bAP, anch'esso celato dalla montagna.

Lo strumento usato è l'archipendolo. Le misurazioni sono effettuate con l'aiuto di un'asta di lancia diritta.

<u>Ragione 223</u>

Un rombo ha lati lunghi 10 braccia e la diagonale maggiore è 16 braccia.

Occorre ricavare la lunghezza della diagonale minore, AC:



$AH^2 = AB^2 - BH^2 = 10^2 - 8^2 = 100 - 64 = 36$ e

$AH = \sqrt{36} = 6$ braccia.

AC è lunga 2 * AH = 2 * 6 = 12 braccia.

L'area del rombo è data da:

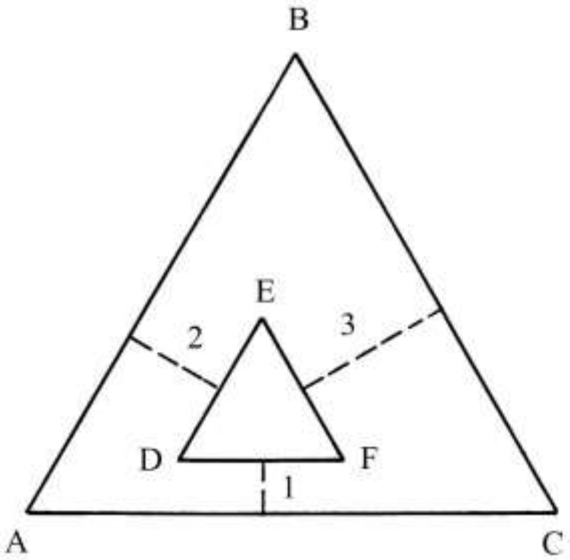
$$A_{ABCD} = AC * BD/2 = 12 * 16/2 = 96 \text{ braccia}^2.$$

Il problema ripropone quello contenuto nella Ragione 211.

<u>Ragione 224</u>

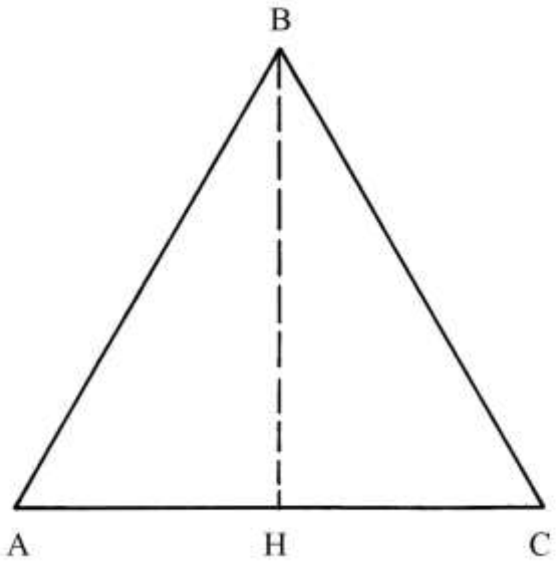
Un terreno ha la forma di un triangolo equilatero con lati lunghi 10 braccia.

Al suo interno deve essere elevato un muro spesso 1 braccio rispetto a AC, 2 braccia riguardo AB e 3 braccia rispetto a BC.



Il problema chiede di calcolare la lunghezza dei lati del terreno interno, che ha anch'esso forma di un triangolo equilatero.

L'Autore fornisce la lunghezza di un'altezza di ABC, non disegnata: essa vale √75 braccia:



Infatti:

$BH^2 = AB^2 – AH^2 = 10^2 – 5^2 = 75$ e

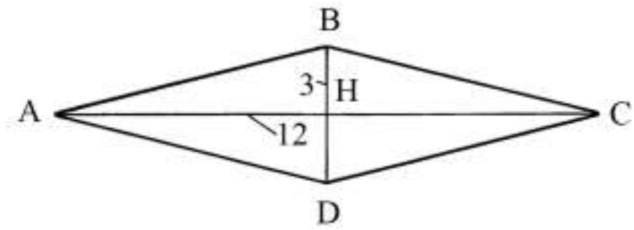
$BH = \sqrt{75}$ braccia.

La soluzione adottata dall'Autore contiene i seguenti passi:

* dividere la lunghezza dell'altezza per quella di metà del lato del triangolo [BH/AH]:
  $(\sqrt{75})/5 = \sqrt{(75/25)} = \sqrt{3}$;
* dividere la lunghezza di un lato per la lunghezza della sua metà [AB/AH]: $10/5 = 2$;
* dividere 2 per $\sqrt{3}$: $2/\sqrt{3} = \sqrt{(1 + 1/3)}$;
* moltiplicare lo spessore 2 per sé stesso: $2 * 2 = 4$;
* dividere per $\sqrt{3}$: $4/\sqrt{3} = \sqrt{(5 + 1/3)}$;
* moltiplicare lo spessore 3 per 2: $3 * 2 = 6$;
* dividere per $\sqrt{3}$: $6/\sqrt{3} = \sqrt{12}$;
* sommare le tre espressioni ricavate dalle divisioni per $\sqrt{3}$:
  $\sqrt{(1 + 1/3)} + \sqrt{(5 + 1/3)} + \sqrt{12} = \sqrt{48}$;
* sottrarre dalla lunghezza di un lato di ABC: $(10 - \sqrt{48})$ braccia, lunghezza dei lati di DEF.

Ragione 225

Le Ragioni 225 e 226 sono basate sullo stesso quadrilatero: un rombo che ha diagonali lunghe 12 e 3 braccia.



Il rombo deve essere convertito in un quadrato di area uguale.

La soluzione è un po' strana perché l'Autore procede a trasformarlo in un cerchio: egli fissa la lunghezza della circonferenza in 3 braccia (quanto quella della diagonale minore del rombo).

Conoscendo la lunghezza della circonferenza, *c*, l'area *A* di un cerchio è calcolabile con la formula:

$$A_{\text{CERCHIO}} = c^2 * 7/88 = 3^2 * 7/88 = 63/88 \text{ braccia}^2.$$

Moltiplicare il numeratore e il denominatore della frazione per lo stesso intero, 7 in questo caso:

$A_{\text{CERCHIO}} = 63/88 * 7/7 = 441/616$ braccia^2, frazione quasi uguale a quella presentata dall'Autore: 449/617.

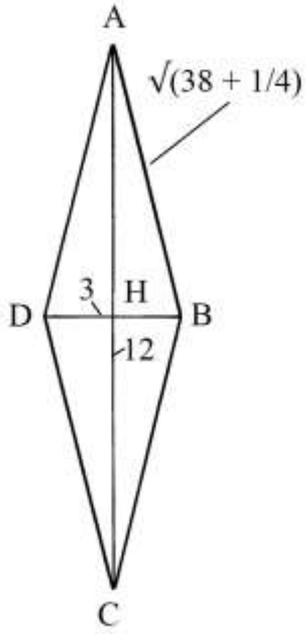
La parte finale della soluzione è poco comprensibile: il quadrato equivalente avrebbe lati lunghi (2 + 1590/1851) braccia; se l'area del cerchio è 449/617 braccia^2, lo dovrebbe essere pure quella del quadrato equivalente e il lato di questo quadrato sarebbe lungo:

$$\text{lato} = \sqrt{(449/617)} \approx 0{,}853 \text{ braccia.}$$

La lunghezza del lato del quadrato equivalente al rombo è correttamente calcolata nella soluzione della Ragione 226.

Ragione 226

Il rombo ABCD è formato da due triangoli isosceli di uguali dimensioni, uniti lungo il comune lato AC, che è la diagonale maggiore dello stesso rombo:



L’area del triangolo ABC è:

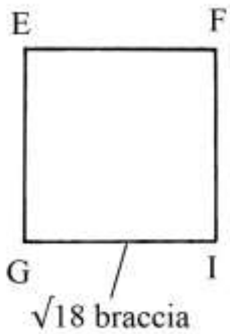
A_{ABC} = HB * AC/2 = (3/2) * (12/2) = 36/4 =9 braccia^2.

L’area del rombo ABCD è:

A_{ABCD} = 2 * A_{ABC} = 2 * 9 = 18 braccia^2.

L’area del quadrato equivalente al rombo, EFGI, è uguale a 18 braccia^2 e il lato GI è lungo:

GI = √18 braccia.



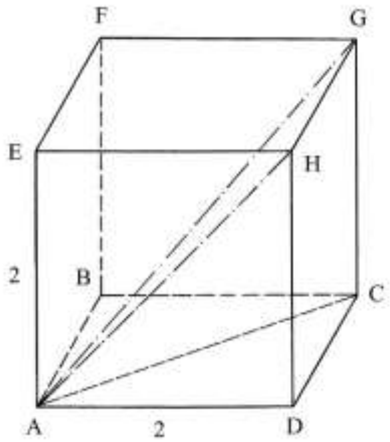
L’Autore conclude con il calcolo della lunghezza dei lati del rombo:

$AB^2 = AH^2 + HB^2 = (3/2)^2 + 6^2$ = 9/4 + 36 = (38 + ¼) e

AB = √(38 + ¼) braccia.

<u>Ragione 227</u>

Un cubo ha spigoli lunghi 2 braccia:



Il problema chiede la lunghezza delle diagonali delle facce (ad esempio AH) e del cubo (ad esempio AG).

Un argomento simile è stato affrontato nella precedente Ragione 191.

La diagonale AH è lunga:

$AH^2 = AD^2 + HD^2 = 2^2 + 2^2 = 8$ e

$AH = \sqrt{8}$ braccia.

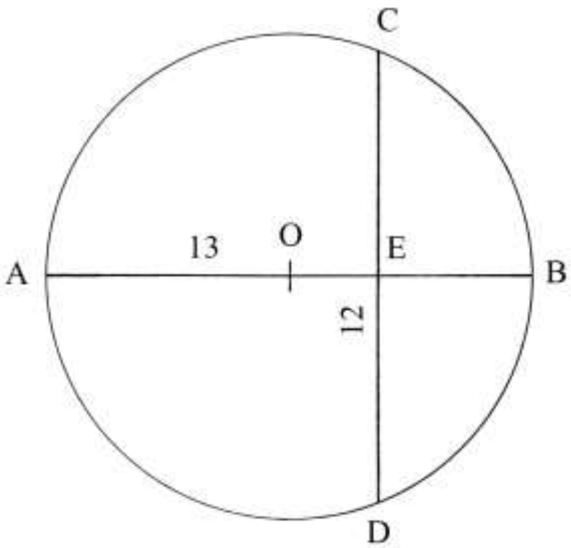
La lunghezza di AG è data da:

$AG^2 = AC^2 + CG^2 = (\sqrt{8})^2 + 2^2 = 8 + 4 = 12$ e

$AG = \sqrt{12}$ braccia.

<u>Ragione 228</u>

Un cerchio ha diametro lungo 13 braccia e vi è disegnata la corda CD, lunga 12 braccia:



Il problema chiede la lunghezza delle due frecce, AE e EB.

La soluzione impiegata dall'Autore è:

* dividere per 2 la lunghezza della corda CD: $12/2 = 6$;
* moltiplicare per sé stesso: $6 * 6 = 36$;
* [l'Autore ricorda che il prodotto delle lunghezze delle due frecce deve essere uguale al quadrato della lunghezza di CE, per il *teorema delle corde* che egli non nomina];
* dividere la lunghezza del diametro per 2: $13/2 = (6 + ½)$;
* moltiplicare per sé stesso: $(6 + ½)^2 = (42 + ¼)$;

* sottrarre 36: $(42 + \frac{1}{4}) - 36 = (6 + \frac{1}{4})$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{(6 + \frac{1}{4})} = (2 + \frac{1}{2})$;
* sottrarre da $(6 + \frac{1}{2})$: $(6 + \frac{1}{2}) - (2 + \frac{1}{2}) = 4$ braccia, lunghezza della freccia EB;
* sommare a $(6 + \frac{1}{2})$: $(6 + \frac{1}{2}) + (2 + \frac{1}{2}) = 9$ braccia, lunghezza della freccia AE.

- APPROFONDIMENTO -

Per il teorema delle corde si ha:

AE : CE = ED : EB.

Assegniamo a EB il valore dell'incognita:

EB = x.

Ne consegue:

AE = AB – EB = 13 – x.

La proporzione diviene:

$(13 - x) : 6 = 6 : x$

$x * (13 - x) = 36$

$13 * x - x^2 = 36$

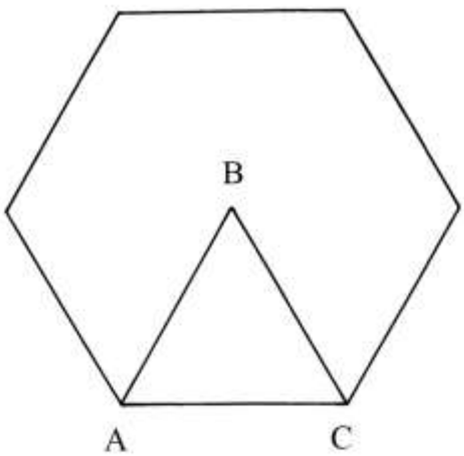
$x^2 - 13 * x + 36 = 0.$

L'equazione ha due radici, entrambe positive: 9 e 4, che espresse in braccia sono le lunghezze di AE e di EB.

- -

Ragione 229

Un terreno ha la forma di un esagono regolare (ricavato da un cerchio circoscritto) e ha lati lunghi 6 braccia.



Il problema chiede la sua area. L'Autore propone di calcolare l'area di uno *scudo*, termine con cui egli definisce uno dei sei triangoli equilateri che compongono il poligono.

L'area di ABC è stabilita in $\sqrt{243}$ braccia^2. Il dato è corretto perché l'area di ABC è data da:

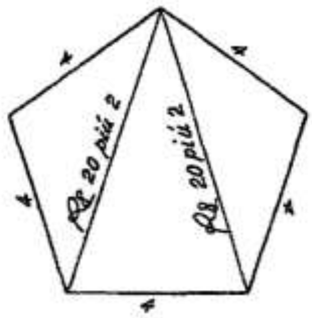
$A_{ABC} = [AB * AB * (\sqrt{3})/2]/2 = 6 * 6 * (\sqrt{3})/4 = 9 * \sqrt{3} = \sqrt{(81 * 3)} = \sqrt{243}$ braccia^2.

L'area dell'intero esagono è:

$A_{ESAGONO} = 6 * A_{ABC} = 6 * \sqrt{243} = \sqrt{(36 * 243)} = \sqrt{8748}$ braccia^2.

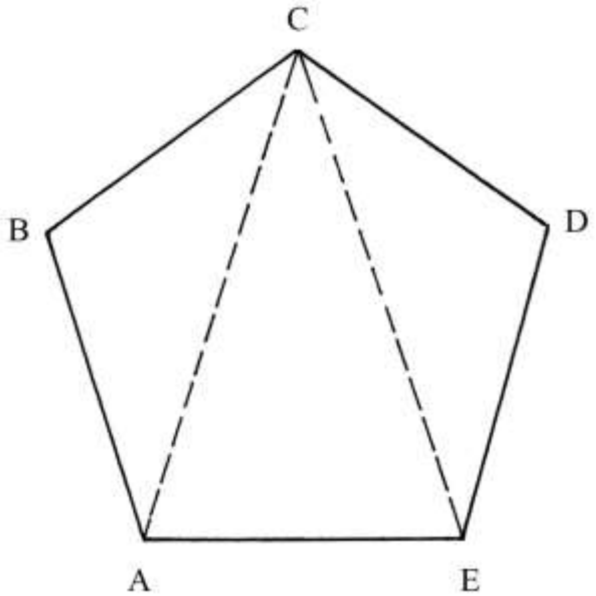
Ragione 230

Un terreno ha forma di un pentagono regolare con lati lunghi 4 braccia:



Sono disegnate due delle cinque diagonali: esse si dipartono dal vertice superiore e dividono il poligono in tre triangoli isosceli.

Il problema chiede di calcolare l'area del terreno.



L'Autore calcola la lunghezza delle due diagonali, AC e EC, con la seguente procedura:

* moltiplicare la lunghezza di un lato per sé stessa: $4 * 4 = 16$;
* dividere la lunghezza di un lato per 2: $4/2 = 2$;
* moltiplicare per sé stesso: $2 * 2 = 4$;
* sommare a 16: $4 + 16 = 20$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{20}$;
* sommare con 2: $(\sqrt{20} + 2)$ braccia, lunghezza delle diagonali AC e EC.

La diagonale *d* di un pentagono regolare con lati lunghi ℓ è data da:

$d = \ell * \phi$, dove ϕ è la *sezione aurea*.

Possiamo sostituire a ϕ il suo valore dato da un numero misto:

$\phi = (\sqrt{5} + 1)/2$.

Quindi si ha:

$d = \ell * (\sqrt{5} + 1)/2 = 4 * (\sqrt{5} + 1)/2 = 2 * \sqrt{5} + 2 = (\sqrt{20} + 2)$ braccia.

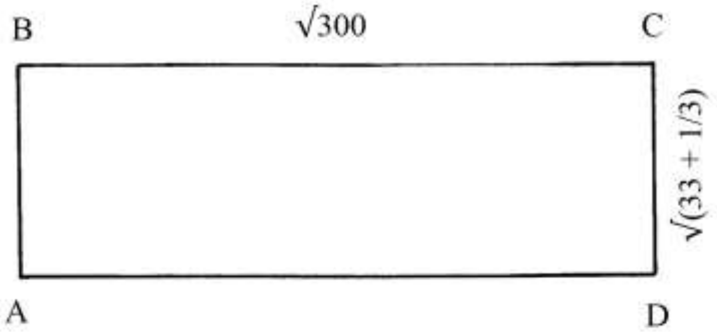
Il risultato ottenuto dall'Autore è corretto. La sua procedura è riassunta con la formula che segue:

$d = \sqrt{[\ell^2 + (\ell/2)^2]} + \ell/2$.

L'Autore conclude proponendo di calcolare l'area dei tre triangoli originati dalle due diagonali e di sommare le tre aree, ma non indica alcun metodo.

Ragione 231

Un terreno ha la forma di un rettangolo i cui lati hanno lunghezze in proporzione 3 a 1.



L'area del rettangolo è di 100 braccia^2.
Sono richieste le lunghezze dei lati.
L'Autore assegna alla larghezza AB il valore dell'incognita: AB = x.
La lunghezza AD è: AD = 3 * AB = 3 * x.
L'area di ABCD è data da:

$A_{ABCD} = AB * AD = x * (3 * x) = 3 * x^2 = 100.$

Ne risulta:

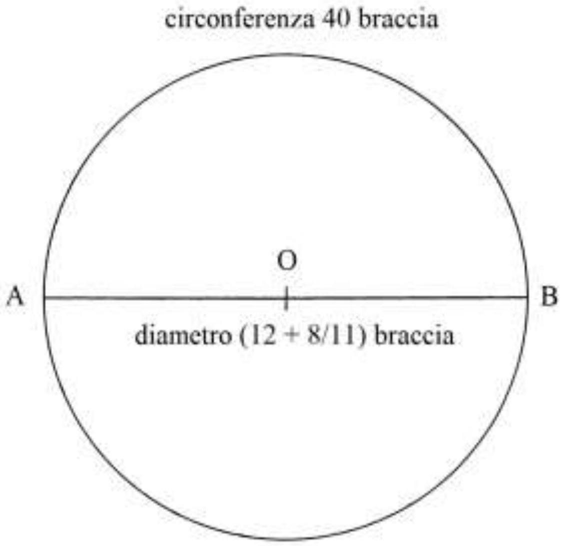
x = √(100/3) = √(33 + 1/3) braccia = AB = CD.

La lunghezza di AD è:

AD = 3 * √(33 + 1/3) = √(9 * 100/3) = √300 braccia.

Ragione 232

Un cerchio ha circonferenza lunga 40 braccia. È chiesta la sua area.



La soluzione contiene i seguenti passi:

* dividere la lunghezza della circonferenza per 4: 40/4 = 10;

* moltiplicare per sé stesso: $10 * 10 = 100$;
* moltiplicare per 3/11: $100 * 3/11 = (27 + 3/11)$;
* sommare con 100: $(27 + 3/11) + 100 = (127 + 3/11)$ braccia^2, area del cerchio;
* moltiplicare per 3/11: $(127 + 3/11) * 3/11 = (34 + 86/121)$;
* sommare a (127 + 3/11): $(34 + 86/121) + (127 + 3/11) = (161 + 119/121)$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{(161 + 119/121)} = (12 + 8/11)$ braccia, diametro del cerchio.

- APPROFONDIMENTO -

La procedura usata dall'Anonimo può essere riassunta in due formule.
c è la lunghezza della circonferenza, *A* l'area e *d* il diametro:

$$A = (c/4)^2 * (3/11 + 1) = c^2/4 * (3 + 11)/11 = 14/44 * c^2 = 7/22 * c^2.$$

$$d = \sqrt{[(7/22 * c^2) * 3/11]}$$

- -

Ragione 233

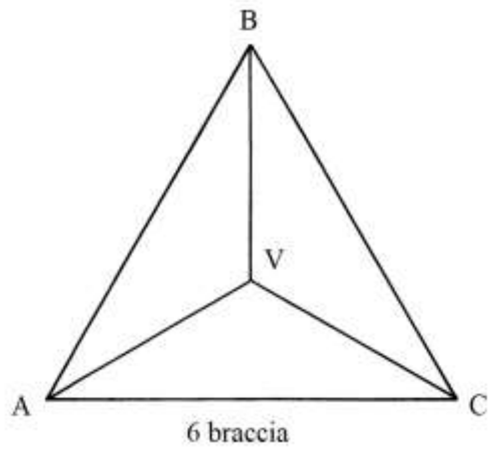
Un tetraedro ha gli spigoli lunghi 6 braccia: pur con dimensioni differenti, questo poliedro è stato già considerato nelle precedenti Ragioni 186 – 190.

L'Autore definisce il solido come un *triambolo*, termine forse sinonimo di *tribolo*, una specie di chiodo metallico con quattro punte divergenti che veniva disseminato sul terreno per bloccare l'avanzata degli eserciti nemici.

Fra l'altro il termine *tribolo* era usato in testi fiorentini del XIII e del XIV secolo.

Che il solido considerato dall'Autore si avvicini di più al tetraedro che al vero e proprio tribolo lo afferma lui stesso: "…l'una delle faccie, ista in terra e le 3 stanno sopra…" (p. 161).

Il problema chiede la lunghezza del "…più corto diamitro…" e cioè dell'altezza del solido rispetto alla faccia orizzontale.

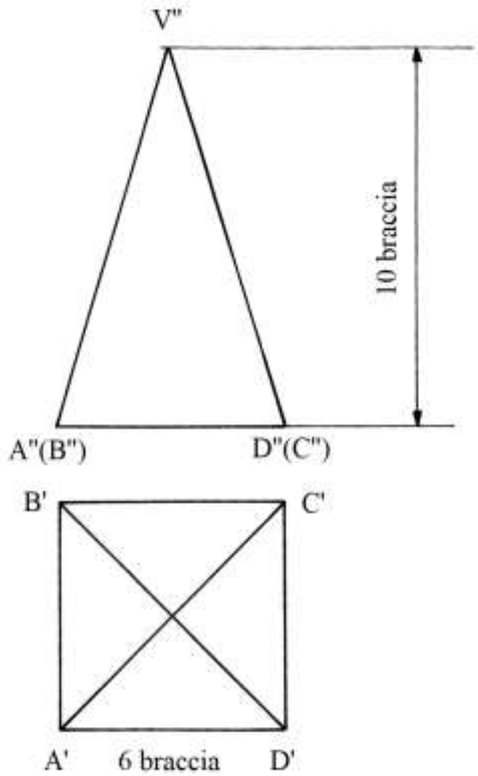


La soluzione è la seguente:
* moltiplicare la lunghezza di un lato per sé stessa: $6 * 6 = 36$;
* dividere per 3: $36/3 = 12$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{12}$ braccia, lunghezza delle proiezioni di VA, VB e VC sul piano orizzontale;
* moltiplicare per sé stesso: $\sqrt{12} * \sqrt{12} = 12$;
* sottrarre da 36: $36 – 12 = 24$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{24}$ braccia, altezza del solido.

La procedura usata ricalca quella impiegata nella soluzione della Ragione 189.

<u>Ragione 234</u>

Una piramide a base quadrata ha lati della base lunghi 6 braccia e altezza di 10 braccia.



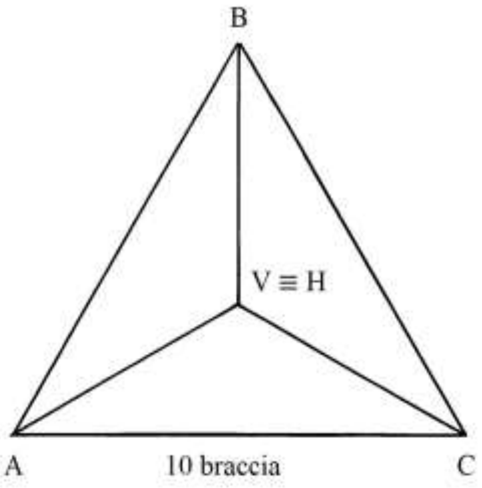
Lo schema contiene le viste in pianta e di fronte in proiezioni ortogonali secondo il metodo europeo.

Il problema chiede il volume del solido. La procedura impiegata è la seguente:

* moltiplicare la lunghezza del lato della base per sé stessa: 6 * 6 = 36 braccia^2, area della base quadrata;
* moltiplicare per l'altezza: 36 * 10 = 360;
* dividere per 3: 360/3 = 120 braccia^3, volume della piramide.

<u>Ragione 235</u>

Un *tribolo*, un tetraedro, ha lati lunghi 10 braccia:



Il problema chiede il volume del solido.

L'Autore richiama implicitamente regole già applicate nella soluzione di precedenti Ragioni e in particola in quella numero 189.

Fra parentesi quadre […] sono indicati i passaggi che non ha reso esplicitamente:

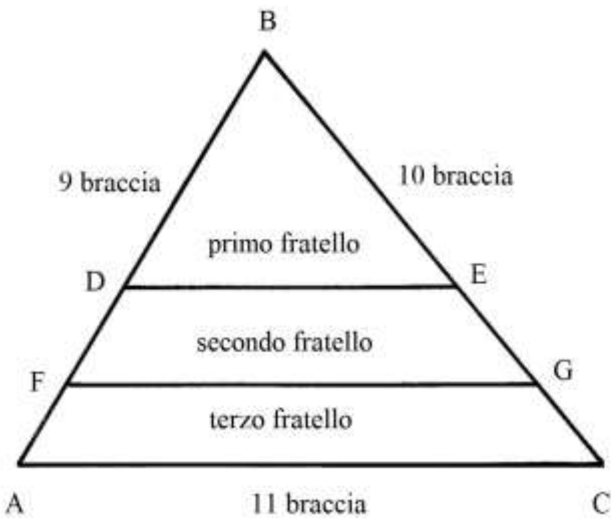
[* moltiplicare la lunghezza di uno spigolo per sé stessa: $10 * 10 = 100$;
* dividere per 3: $100/3 = (33 + 1/3)$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{(33 + 1/3)}$ braccia, lunghezza delle proiezioni di VA, VB e VC sul piano orizzontale;
* sottrarre (33 + 1/3) da 100: $100 – (33 + 1/3) = (66 + 2/3)$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{(66 + 2/3)}$ braccia, *milluogho* e cioè altezza VH del solido rispetto alla faccia orizzontale];

* l'area di una faccia del solido è correttamente fissata in $\sqrt{1875}$ braccia^2;
* moltiplicare per l'altezza: $\sqrt{1875} * \sqrt{(66 + 2/3)}$;
* dividere per 3: $\sqrt{1875} * \sqrt{(66 + 2/3)}/3 = \sqrt{(13888 + 8/9)}$ braccia^3, volume del Solido.

Ragione 236

Un terreno ha la forma di un triangolo scaleno (*diversolatero*) con lati lunghi 9, 10 e 11 braccia.

Deve essere diviso fra tre fratelli e in parti uguali.



Il primo fratello desidera la parte superiore delimitata dalla corda DE: è il triangolo scaleno DBE.

Il secondo chiede la superficie compresa fra le corde DE e FG che definiscono il trapezio scaleno FDEG.

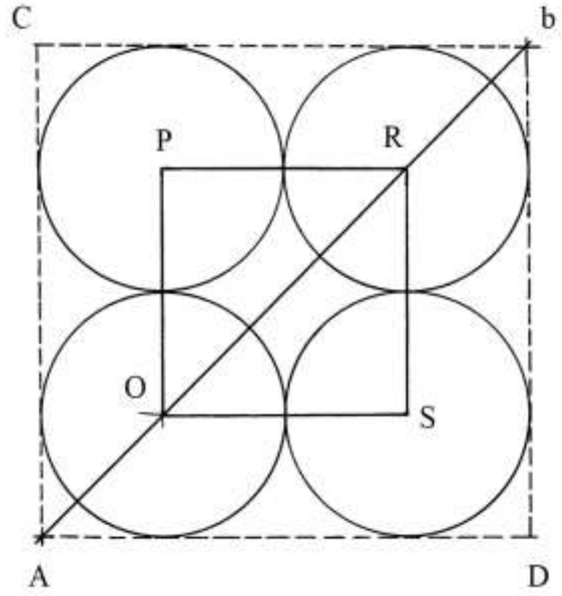
Infine, al terzo fratello resta la superficie che forma il trapezio AFGC.

La procedura usata per determinare le varie lunghezze della ripartizione è la seguente:

* moltiplicare la lunghezza di AB per sé stessa: 9 * 9 = 81;
* dividere per 3: 81/3 = 27;
* estrarre la radice quadrata: √27 braccia, lunghezza di BD;
* moltiplicare la lunghezza di BC per sé stessa: 10 * 10 = 100;
* dividere per 3: 100/3 = (33 + 1/3);
* estrarre la radice quadrata: √(33 + 1/3) braccia, lunghezza di BE;
* moltiplicare 81 per 2/3: 81 * 2/3 = 54;
* estrarre la radice quadrata: √54 braccia, lunghezza di BF;
* sottrarre √27 da √54 [DF = BF – BD]: (√54 – √27) braccia, lunghezza di DF;
* moltiplicare 100 per 2/3: 100 * 2/3 = (66 + 2/3);
* estrarre la radice quadrata: √(66 + 2/3) braccia, lunghezza di BG.

Ragione 237

Quattro cerchi tangenti hanno uguale diametro lungo 3 braccia.



Il problema chiede di calcolare la lunghezza del segmento OR.

L'Autore chiama in causa la lunghezza di *Ab* che è una diagonale del quadrato ACbD non disegnato nello schema originale: esso è circoscritto ai quattro cerchi.

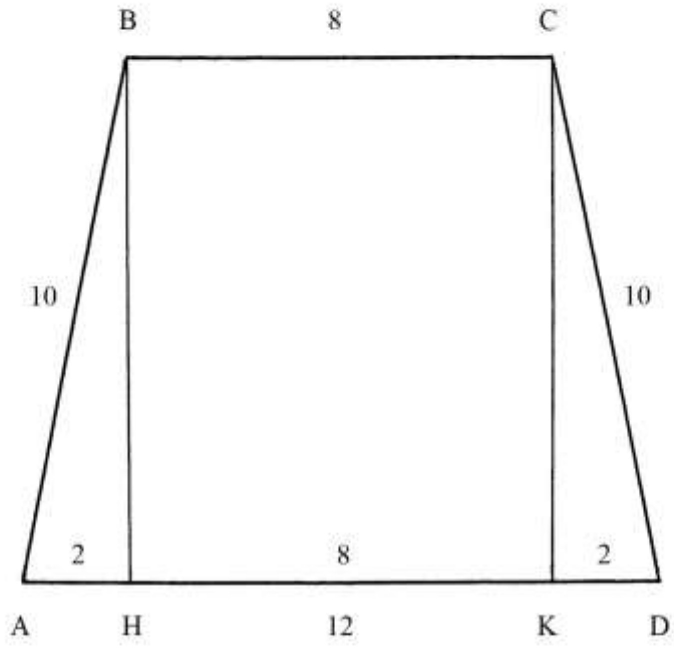
OR è una diagonale del quadrato OPRS i cui lati sono lunghi *due volte* il raggio dei quattro cerchi e cioè quanto il loro diametro, 3 braccia. La sua lunghezza è:

$OR^2 = OS^2 + SR^2 + = 3^2 + 3^2 = 9 + 9 = 18$ e

$OR = \sqrt{18}$ braccia.

<u>Ragione 238</u>

Un terreno ha la forma di un trapezio isoscele con le dimensioni in braccia scritte sullo schema.



È da notare che, conformemente allo schema originale, nella base maggiore AD le dimensioni parziali – 2, 8 e 2 – sono collocate all'interno del trapezio mentre la dimensione totale, 12, è scritta sotto la stessa base.

Il problema chiede l'area del terreno.

Occorre ricavare l'altezza BH = CK: la prima operazione da compiere è abbassare le perpendicolari alla base maggiore AD a partire dai vertici B e C.

La lunghezza di BH è:

$BH^2 = AB^2 – AH^2 = 10^2 – 2^2 = 100 – 4 = 96$ e

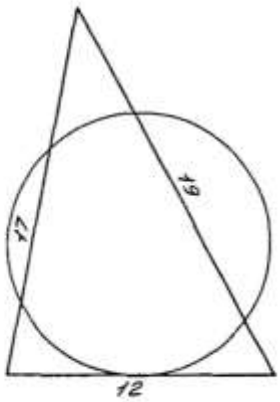
$BH = \sqrt{96}$ braccia.

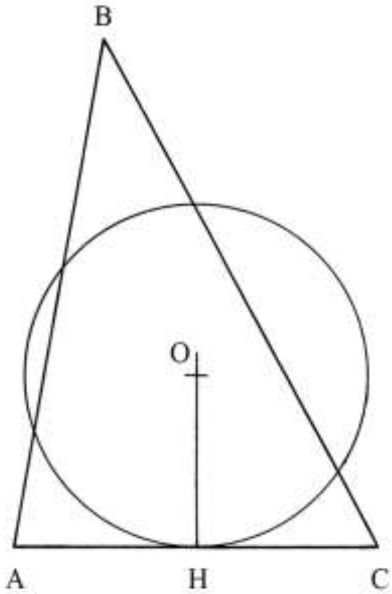
L'area del trapezio è data da:

$A_{ABCD} = (AD + BC)/2 * BH = [(12 + 8)/2] * \sqrt{96} = 10 * \sqrt{96} = \sqrt{9600}$ braccia^2.

<u>Ragione 239</u>

Un triangolo scaleno (*diversolatero*) ha lati lunghi 12, 17 e 19 braccia.





La sua area è calcolata usando la formula di Erone, benché non sia citata. L'autore fornisce solo il risultato finale: $A_{ABC} = \sqrt{10080}$ braccia^2.

Ricostruiamo i passi omessi:

* sommare le lunghezze dei tre lati: $12 + 17 + 19 = 48$ perimetro;
* dividere per 2: $48/2 = 24$ semiperimetro;
* applicare la formula di Erone:

$$A_{ABC} = \sqrt{[24 * (24 - 12) * (24 - 17) * (24 - 19)]} = \sqrt{(24 * 12 * 7 * 5)} =$$
$$= \sqrt{10080} \text{ braccia}^2.$$

L'Autore converte poi il triangolo in un cerchio con uguale area:

* moltiplicare l'area del triangolo per (12 + 4/7) [= 88/7]:

$$\sqrt{10080} * (12 + 4/7) = \sqrt{(1593051 + 3/7)};$$

* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{\sqrt{(1593051 + 3/7)}}$ braccia, lunghezza della circonferenza [l'ultima operazione è una radice quadrata della radice quadrata di un'espressione aritmetica racchiusa fra parentesi tonde (…)].

Nello schema, H è il punto medio del lato AC e OH è un raggio del cerchio equivalente al triangolo ABC. La circonferenza è lunga quanto il dato appena calcolato. OH è lungo ≈ 5,65 braccia.

Ragione 240

Una botte è fatta con 20 doghe e ha volume di 20 staia.

Il problema chiede il numero delle doghe di una seconda botte con volume di 30 staia e con le stesse proporzioni geometriche della prima.

La soluzione è la seguente:

* moltiplicare il numero delle doghe della prima botte per sé stesso: $20 * 20 = 400$;
* moltiplicare per il volume della seconda botte: $400 * 30 = 12000$;
* dividere per il volume della prima botte: $12000/20 = 600$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{600}$, numero delle doghe della seconda botte.

Ragione 241

Una botte ha 12 doghe e volume di 2 moggia, unità di misura degli *aridi*, equivalente a circa 584,7088 litri.

Alla botte sono aggiunte 3 doghe per cui la nuova botte ha 15 doghe.

Il problema chiede la capacità della nuova botte.

La soluzione prevede i seguenti passi:

* moltiplicare il numero delle doghe della nuova botte per sé stesso: $15 * 15 = 225$;
* moltiplicare per il volume della prima botte: $225 * 2 = 450$;
* moltiplicare il numero delle doghe della prima botte per sé stesso: $12 * 12 = 144$;
* dividere 450 per 144: $450/144 = (3 + 1/8) =$ (3 moggia + 3 staia).

Il risultato è esatto perché il moggio valeva 24 staia.

Ragione 242

Una botte è fatta con 30 doghe e ha un volume di 30 staia.

Vengono tolte 3 doghe: il problema chiede il volume della nuova botte.

La soluzione è la seguente:

* sottrarre 3 doghe dalla prima botte: $30 - 3 = 27$;
* moltiplicare per sé stesso: $27 * 27 = 729$;
* moltiplicare per il volume della prima botte: $729 * 30 = 21870$;

* dividere per il prodotto per sé stesso del numero delle doghe della prima botte:

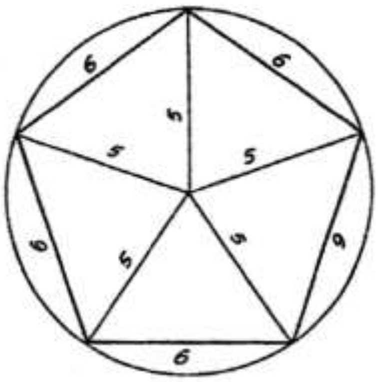
21870/(30 * 30) = 21870/900 = (24 + 3/10) staia =

= 24 staia + 1 mezzo quarto + (1 + 3/5) quartucci.

Come spiegato nella precedente Ragione 25, lo staio possedeva sottomultipli tutti in *base 2*.

Ragione 243

Un pentagono regolare è inscritto in un cerchio che ha diametro 10 braccia:



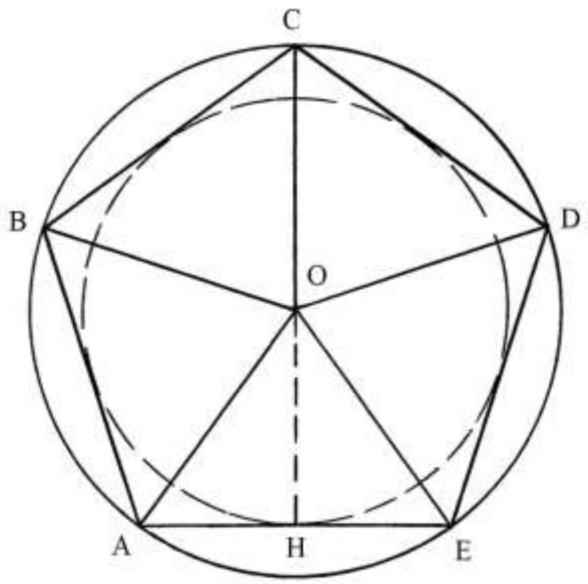
Lo schema e il testo contengono degli errori: la lunghezza dei lati del poligono non è 6 braccia, ma è minore.

Infatti, la lunghezza ℓ dei lati del pentagono è data dalla formula:

$\ell = r * \sqrt{[(5 - \sqrt{5})/2]} \approx 1{,}175570504 * r$, dove *r* è il raggio del cerchio circoscritto.

Nel caso in oggetto, la lunghezza dei lati è:

$\ell \approx 1{,}175570504 * 5 \approx 5{,}8779$ braccia, invece delle 6 braccia usate dall'Autore.



Il segmento OH è un'altezza del triangolo isoscele AOE e un apotema del pentagono, oltre ad essere un raggio del cerchio inscritto nel poligono che è tangente ai suoi lati nei loro punti medi, come lo è H.

Per l'Autore, i triangoli AOH e EOH sono rettangoli. AOH ha i lati lunghi:

* $OA = 5$;
* $AH = AE/2 = 6/2 = 3$.

Ne consegue:

$$OH^2 = OA^2 - AH^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16 \quad e$$
$$OH = \sqrt{16} = 4 \text{ braccia.}$$

AOH e EOH hanno lati lunghi secondo la terna primitiva 3-4-5. Forse è questo il motivo che ha spinto l'Autore a approssimare per eccesso a 6 braccia la lunghezza dei lati del pentagono.

La lunghezza dell'apotema OH = *a* è anch'essa legata a quella del raggio:

$$a = r * (1 + \sqrt{5})/4 \approx 0{,}8090169943 * r.$$

In questo caso *a* è lungo:

$$a \approx 0{,}8090169943 * 5 \approx 4{,}045 \text{ braccia.}$$

Nota: la costante 0,8090169943 è la metà esatta della sezione aurea: $\phi = 1{,}618033989\ldots$

L'area del triangolo AOE è:

$$A_{AOE} = AE * OH/2 = 5{,}8779 * 4{,}045/2 = 11{,}888 \text{ braccia}^2.$$

Con i dati da lui fissati, l'Autore calcola l'area di AOE uguale a 12 braccia^2.

L'intero pentagono ha area:

$$A_{ABCDE} = 5 * A_{AOE} = 5 * 11{,}888 = 59{,}44 \text{ braccia}^2.$$

Per l'Autore l'area del pentagono è uguale a 60 braccia^2, con una minima differenza rispetto a quella corretta.

Egli stabilisce in (78 + 4/7) braccia^2 l'area del cerchio circoscritto. Verifichiamo il suo risultato:

$$A_{CERCHIO} = \pi * r^2 = 22/7 * 5^2 = (78 + 4/7) \text{ braccia}^2.$$

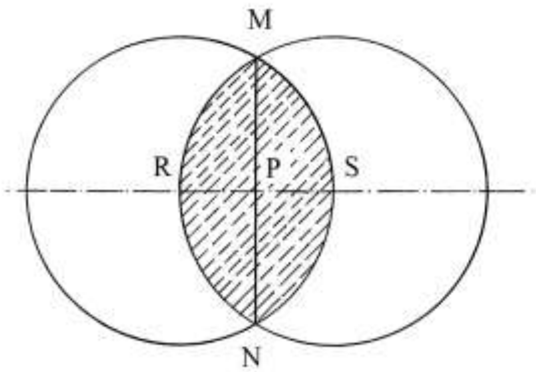
Infine, l'Autore calcola l'area di ciascuno dei cinque segmenti circolari che sono delimitati dal cerchio circoscritto e dal pentagono: egli li chiama erroneamente *mezze mandorle*.

$A_{SEGMENTO} = (A_{CERCHIO} - A_{ABCDE})/5 = [(78 + 4/7) - 59{,}44]/5 \approx 3{,}826$ braccia^2.

Nel testo l'area di un segmento è vicina a questo dato: (3 + 10/14) braccia^2.

- APPROFONDIMENTO -

La mandorla o *vesica piscis* è l'area delimitata dall'intersezione di due cerchi di uguale raggio, con i centri posizionati l'uno sulla circonferenza dell'altro, come mostra lo schema che segue:

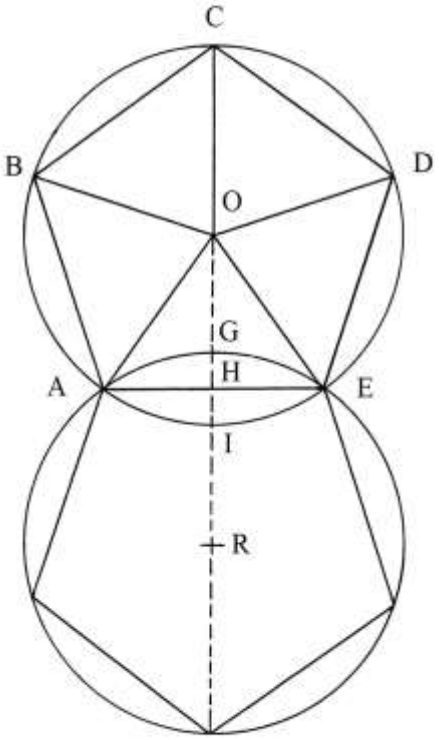


La mandorla è l'area MSNR.

L'Autore ha utilizzato il termine *mezza mandorla* per indicare l'area delimitata dall'arco di circonferenza AIE e la corda AE.

Nello schema che segue sono disegnati due pentagoni inscritti in due cerchi di centri O e R e di uguali dimensioni. I centri giacciono su di un asse di simmetria.

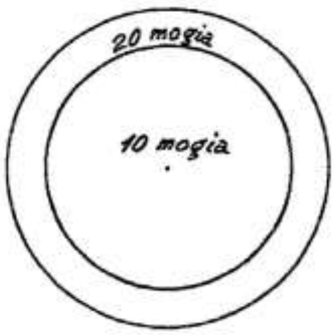
Il lato AE è comune ai due pentagoni.



- -

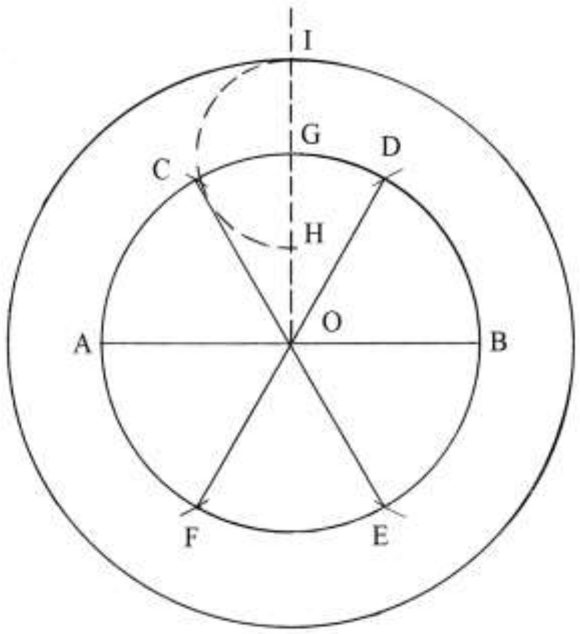
Ragione 244

Un manufatto a forma di pozzo ha volume uguale a 10 moggia. Senza scavare in profondità, deve essere ampliato in senso orizzontale fino a aumentare il suo volume a 20 moggia.



La soluzione presenta lati oscuri perché lo schema originale non è accompagnato da alcuna spiegazione.

Il grafico che segue propone un'interpretazione del testo:



AB è il diametro del cerchio iniziale, con centro O. La figura è divisa in *sei* parti uguali.

Dal centro O è tracciato il raggio OG perpendicolare a AB: questo raggio è la *saetta* (o freccia) alla quale si riferisce il testo originale. H è il punto medio di OG.

Fare centro in G e con raggio GH tracciare un arco che taglia in I il prolungamento di OG. OI *sarebbe* il raggio del cerchio corrispondente al volume doppio, pari a 20 moggia.

Verifichiamo il risultato. Il raggio del cerchio OG è lungo *r*.

Il raggio OI = R è lungo:

$R = OG + GI = r + r/2 = 3/2 * r.$

L'area del cerchio interno (iniziale) è:

$A_{INTERNO} = \pi * r^2 = 22/7 * r^2.$

L'area del cerchio esterno è:

$A_{ESTERNO} = \pi * R^2 = 22/7 * (3/2 * r)^2 = 22/7 * 9/4 * r^2.$

Il rapporto frale due aree è:

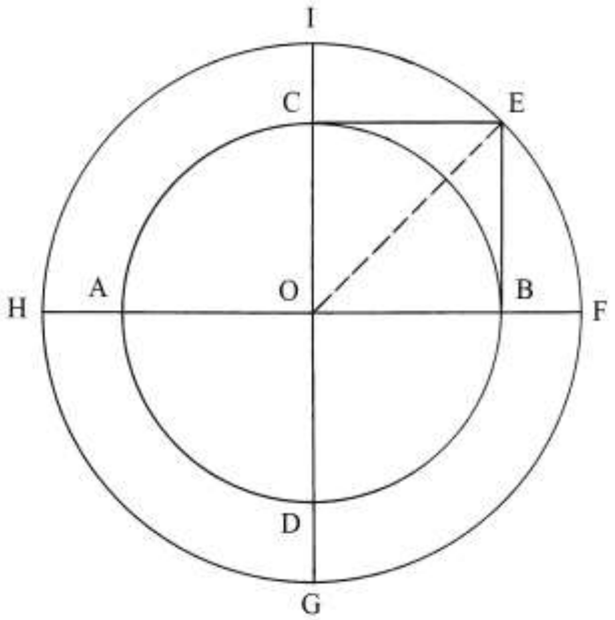
$A_{ESTERNO}/A_{INTERNO} = (22/7 * 9/4 * r^2)/(22/7 * r^2) = 9/4.$

L'area del cerchio esterno è più del doppio di quella del cerchio interno: essa corrisponde a un volume pari a 9/4 * 10 = (22 + ½) moggia.

Essendo escluso lo scavo in senso verticale, ma soltanto un ampliamento in senso orizzontale, i volumi in moggia sono proporzionali alle aree dei due cerchi.

- APPROFONDIMENTO -

La soluzione del problema posto da questa Ragione è assai semplice.



AB è il diametro del cerchio corrispondente al volume di 10 moggia. Tracciare il diametro verticale CD.

Dai punti B e C disegnare due perpendicolari ai due diametri: esse si incontrano nel punto E. OCEB è un quadrato con lati lunghi quanto il raggio OB = OC = *r*.

Collegare O con E: OE è una diagonale del quadrato OCEB.

Con centro in O e raggio OE disegnare una seconda circonferenza.

Occorre calcolare la lunghezza di OE:

$OE^2 = OB^2 + BE^2 = 2 * OB^2 = 2 * r^2$ e

$OE = \sqrt{2} * r$.

L'area del cerchio di raggio OE è:

$A_{ESTERNO} = \pi * OE^2 = 22/7 * (\sqrt{2} * r)^2 = 22/7 * (2 * r^2)$.

L'area del cerchio esterno è esattamente il doppio di quella del cerchio interno:

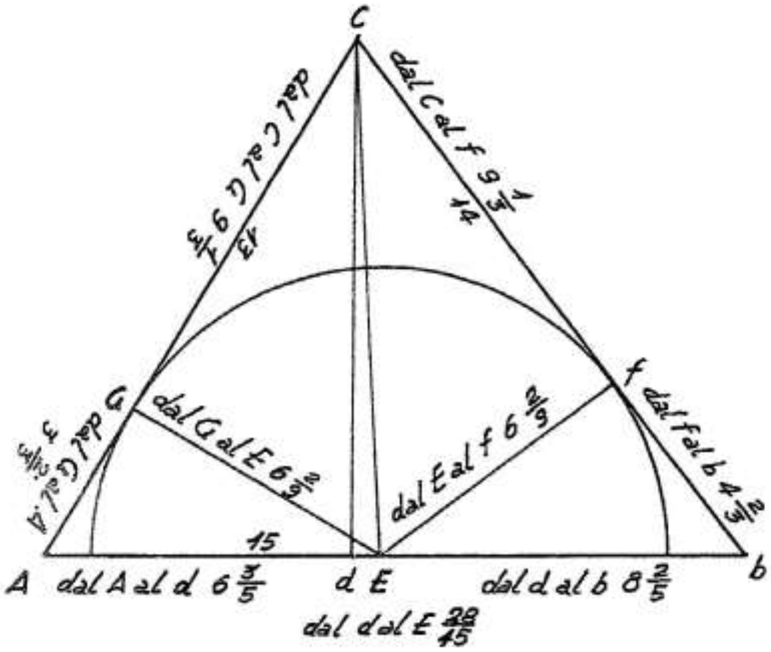
$A_{INTERNO} = \pi * r^2 = 22/7 * (r^2)$.

L'area del cerchio esterno sviluppa un volume di 20 moggia.

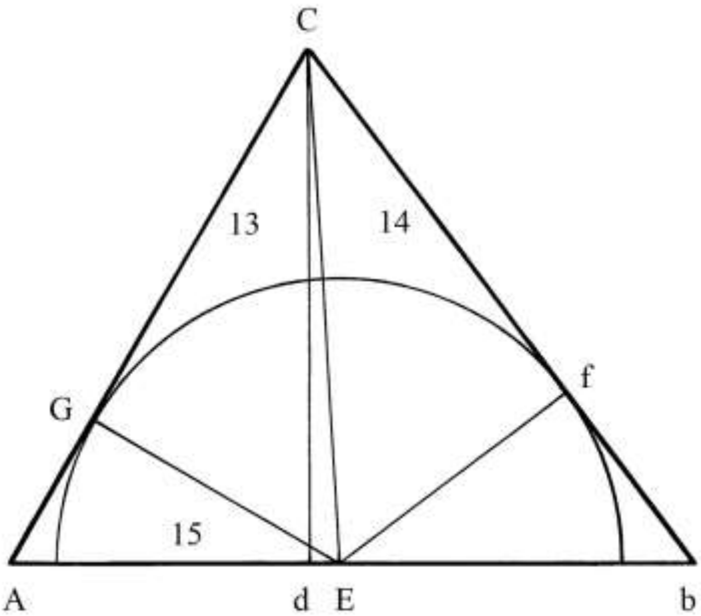
- -

Ragione 245

Il triangolo AbC è scaleno e ha lati lunghi 13, 14 e 15 braccia:



Il problema chiede di inserire nel triangolo un semicerchio con il centro, E, sulla base Ab e tangente agli altri due lati nei punti G e f e domanda le lunghezze del suo raggio e della semicirconferenza. EG e EF sono due raggi del semicerchio e sono perpendicolari rispettivamente ai lati AC e Cb.



Di nuovo e senza citarlo, l'Autore ricorre alle formule di Erone per calcolare le lunghezze dei segmenti definiti dall'altezza Cd sulla base Ab:

*	moltiplicare la lunghezza di Ab per sé stessa:	15 * 15 = 225;
*	moltiplicare la lunghezza di AC per sé stessa:	13 * 13 = 169;
*	sommare i due quadrati:	225 + 169 = 394;
*	moltiplicare la lunghezza di Cb per sé stessa:	14 * 14 = 196;
*	sottrarre l'ultimo quadrato dalla somma dei primi due:	394 – 196 = 198;
*	dividere per il doppio della lunghezza della base:	

198/(2 * Ab) = 198/30 = (6 + 3/5) braccia, lunghezza di Ad.

I singoli passi sono riassunti nella formula che segue:

$Ad = (Ab^2 + AC^2 – Cb^2)/(2 * Ab)$.

La lunghezza di *db* è:

$db = Ab – Ad = 15 – (6 + 3/5) = (8 + 2/5)$ braccia.

ACd è un triangolo rettangolo e il suo cateto Cd è lungo:

$Cd^2 = AC^2 – Ad^2 = 13^2 – (6 + 3/5)^2 = 169 – (43 + 14/25) = (125 + 11/25)$ e

$Cd = \sqrt{(125 + 11/25)} = (11 + 1/5)$ braccia.

Va ricordato che *Cd* è l’altezza relativa al lato Ab.

E è il centro del semicerchio inscritto e CE è l’ipotenusa del triangolo rettangolo CdE: l’Autore assegna alla lunghezza del cateto dE il valore dell’incognita:

$dE = x$ e

$CE^2 = Cd^2 + dE^2 = (11 + 1/5)^2 + x^2$.

Con una serie di operazioni algebriche e con ripetute applicazioni del teorema di Pitagora (che occupano ben *sei* pagine del testo, da p. 165 a p. 170), l’Autore calcola i seguenti risultati:

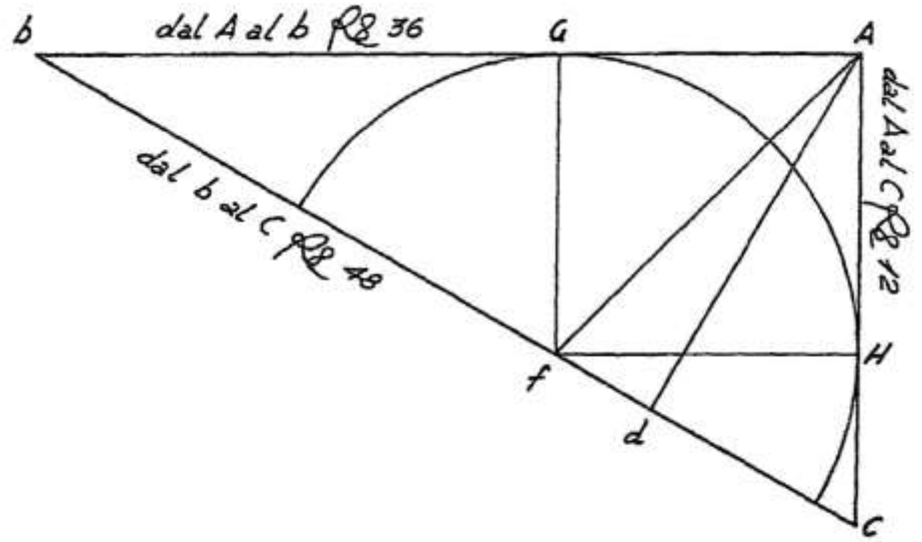
* dE = 28/45 braccia;
* EG = Ef = (6 + 2/9) braccia, raggio del semicerchio:
* lunghezza della semicirconferenza: 22/7 * (6 + 2/9/2 = (9 + 7/9) braccia

[l’Autore ha dimenticato di dividere per 2 e dà un risultato errato: 19 + 35/63, che peraltro non semplifica a 19 + 5/9];

* AG = (3 + 2/3) braccia;
* CG = (9 + 1/3) braccia;
* Cf = (9 + 1/3) braccia;
* fb = (4 + 2/3) braccia.

Ragione 246

Il problema è simile a quello della precedente Ragione, con una solo differenza: AbC è un triangolo rettangolo.



Deve essere inscritto il più grande semicerchio possibile con il centro *f* posizionato sull’ipotenusa bC.

Le dimensioni dei lati sono espresse in braccia e scritte sulla figura.

Il cateto bA è lungo 6 braccia che l’Autore trasforma come segue:

$bA = 6 = \sqrt{36}$ braccia.

La lunghezza dell'ipotenusa bC è data da:

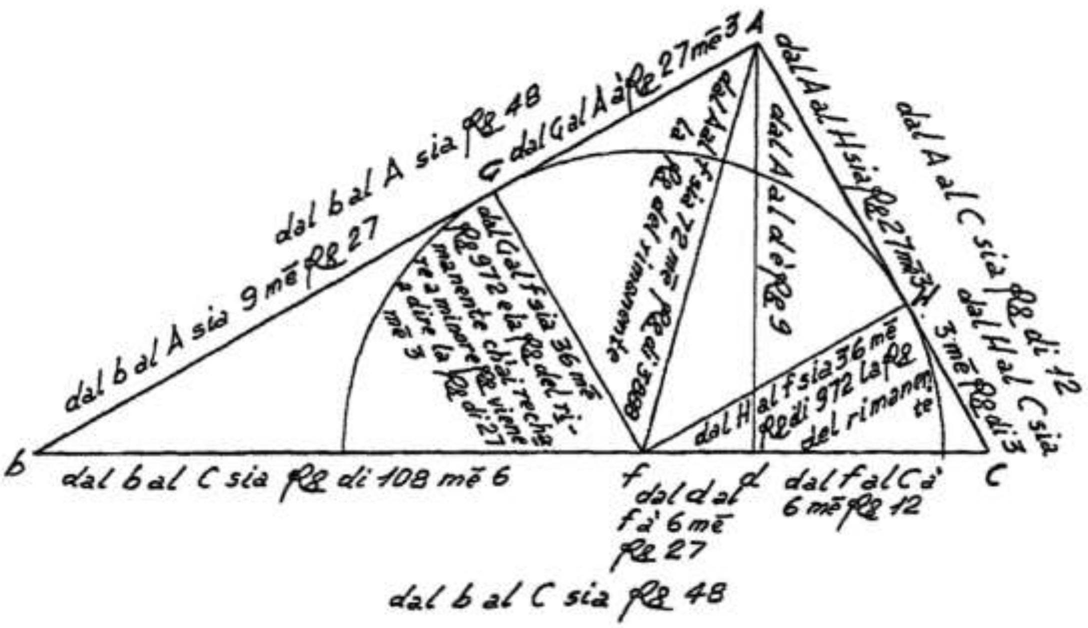
$bC^2 = bA^2 + AC^2 = 6^2 + (\sqrt{12})^2 = 36 + 12 = 48$ e

$bC = \sqrt{48}$ braccia.

Ad è l'altezza relativa all'ipotenusa bC.

Af è la bisettrice dell'angolo retto in A: essa taglia l'ipotenusa nel punto *f* che è il centro del semicerchio: da questo punto sono tracciate le perpendicolari ai cateti: fG e fH hanno uguale lunghezza e sono due raggi del semicerchio; GAHf è un quadrato che ha lati lunghi quanto il raggio del semicerchio.

L'Autore ruota il triangolo fino a rendere orizzontale l'ipotenusa bC:



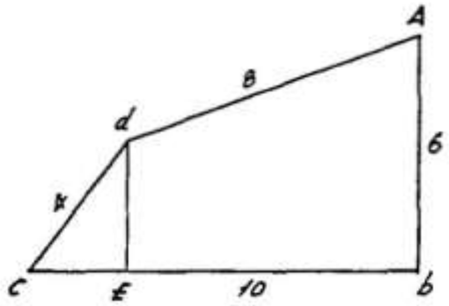
Con una serie di operazioni, l'Autore ricava le lunghezze che sono riportate sulla figura qui sopra.

Il simbolo  sta per *radice quadrata* o √.

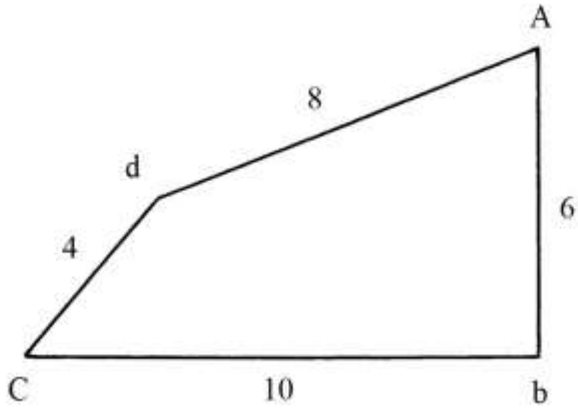
L'espressione  significa *meno*.

<u>Ragione 247</u>

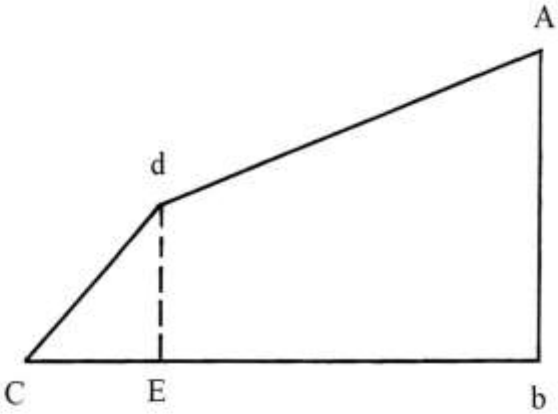
Un terreno ha la forma di un quadrilatero con un angolo retto nel vertice *b*:



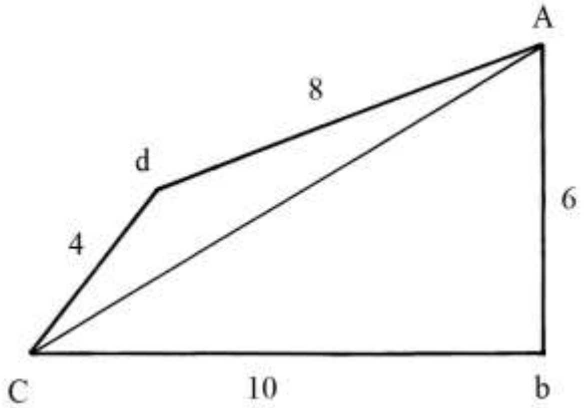
Le dimensioni sono espresse in braccia e sono scritte sia sullo schema originale sia su quello che segue:



Deve essere abbassata una perpendicolare verso la base *Cb* a partire dal vertice *d*: è il segmento *dE*: il problema chiede la sua lunghezza.



La diagonale CA divide il quadrilatero in due triangoli: ACb che è rettangolo e CdA che è scaleno:



La lunghezza di CA è:

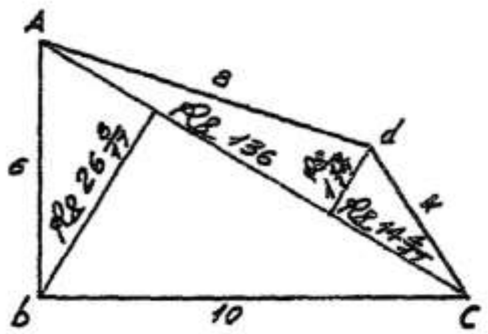
$CA^2 = Cb^2 + bA^2 = 10^2 + 6^2 = 136$ e

$CA = \sqrt{136}$ braccia.

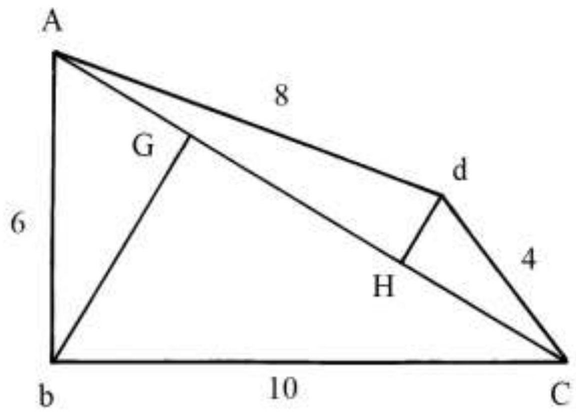
L'area del triangolo AbC è:

$A_{AbC} = Ab * bC/2 = 6 * 10/2 = 30$ braccia^2.

L'Autore riflette poi in senso verticale la figura, senza alcun apparente motivo:



Dai vertici *b* e *d* tracciare le perpendicolari alla diagonale AC: sono *bG* e *dH*:



L'Autore ricava la lunghezza del segmento AG con la procedura che segue:

* moltiplicare la lunghezza di AC per sé stessa: $\sqrt{136} * \sqrt{136} = 136$;
* moltiplicare la lunghezza di Ab per sé stessa: $6 * 6 = 36$;
* sommare i due quadrati: $136 + 36 = 172$;
* moltiplicare la lunghezza di bC per sé stessa: $10 * 10 = 100$;
* sottrarre da 172: $172 – 100 = 72$;

*   dividere per il doppio della lunghezza di AC:

$72/(2 * \sqrt{136}) = \sqrt{(9 + 9/17)}$ [≈ 3,087] braccia, lunghezza di AG.

La procedura è sintetizzabile nella formula che segue:

$AG = (AC^2 + Ab^2 – bC^2)/(2 * AC)$.

La formula è dovuta a Erone di Alessandria (I secolo d.C.) che l'Autore non cita.

La lunghezza di *bG* è data da:

$bG^2 = Ab^2 – AG^2 = 6^2 – (9 + 9/17) = 36 – (9 + 9/17) = (26 + 8/17)$ e

$bG = \sqrt{(26 + 8/17)}$ braccia.

L'area del triangolo AbC è data anche da:

$A_{AbC} = AC * bG/2 = [\sqrt{136} * \sqrt{(26 + 8/17)}]/2 = 30$ braccia^2.

L'Autore calcola la lunghezza di HC applicando di nuovo la formula di Erone:

* moltiplicare la lunghezza di dC per sé stessa: $4 * 4 = 16$;
* moltiplicare la lunghezza di AC per sé stessa: $\sqrt{136} * \sqrt{136} = 136$;
* sommare i due quadrati: $16 + 136 = 152$;
* moltiplicare la lunghezza di Ad per sé stessa: $8 * 8 = 64$;
* sottrarre da 152: $152 – 64 = 88$;
* dividere per il doppio della lunghezza di AC:

$88/(2 * \sqrt{136}) = \sqrt{(14 + 4/17)}$ [≈ 3,773] braccia, lunghezza di HC

La formula riassuntiva è:

$HC = (dC^2 + AC^2 – Ad^2)/(2 * AC)$.

La lunghezza di *Hd* è così calcolata:

* moltiplicare la lunghezza di dC per sé stessa: $4 * 4 = 16$;
* moltiplicare la lunghezza di HC per sé stessa: $[(\sqrt{(14 + 4/17)}]^2 = (14 + 4/17)$;
* sottrarre da 16: $16 – (14 + 4/17) = (1 + 13/17)$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{(1 + 13/17)}$ braccia, lunghezza di Hd.

L'area del triangolo AdC è:

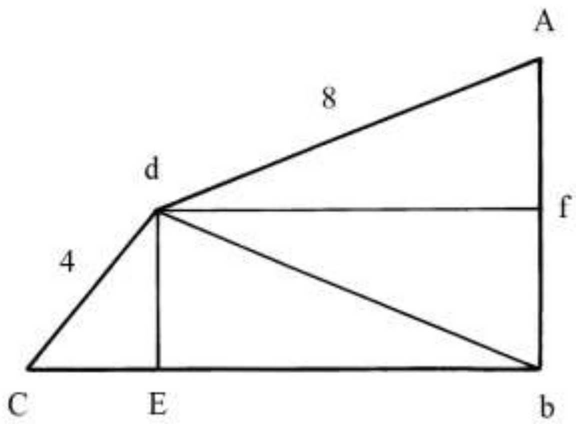
$A_{AdC} = AC * Hd/2 = [\sqrt{136} * \sqrt{(1 + 13/17)}]/2 = \sqrt{(136/4)} * \sqrt{(1 + 13/17)} =$
$= \sqrt{34} * \sqrt{(1 + 13/17)} = \sqrt{60}$ braccia^2.

L'area dell'intero quadrilatero AbCd è:

$A_{AbCd} = A_{AbC} + A_{AdC} = (30 + \sqrt{60})$ braccia^2.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Infine l'Autore affronta il problema iniziale: determinare la lunghezza del segmento *dE*.
Tracciare la diagonale *db* e la corda *df*, parallela a *Cb* e perpendicolare a *Ab*:



Il quadrilatero AbCd è diviso in due *scudi*, cioè due triangoli: Cdb e Adb.

L'Autore assegna alla lunghezza di *dE* il valore dell'incognita: dE = x. Per calcolare la lunghezza di CE usa la seguente procedura:

* moltiplicare la lunghezza di dE per sé stessa: $x * x = x^2$;
* moltiplicare la lunghezza di dC per sé stessa: $4 * 4 = 16$;
* sottrarre x^2: $16 – x^2$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{(16 – x^2)}$ braccia, lunghezza di CE.

La lunghezza di Eb è:

$$Eb = Cb – CE = 10 – \sqrt{(16 – x^2)}.$$

La corda *cf* è lunga quanto Eb.

L'area di Cdb è:

$$A_{Cdb} = dE * Cb/2 = x * 10/2 = 5 * x.$$

L'area di Adb è:

$$A_{Adb} = df * Ab/2 = Eb * Ab/2 = [10 – \sqrt{(16 – x^2)}] * 6/2 = 3 * [10 – \sqrt{(16 – x^2)}] =$$

$= 30 – \sqrt{(144 – 9 * x^2)}$. L'Autore fornisce un risultato leggermente diverso:

$$A_{Adb} = 30 – \sqrt{(144 – \mathit{3} * \mathit{x}^2]}.$$

La somma delle due aree è:

$$A_{Cdb} + A_{Adb} = A_{AbCd}$$

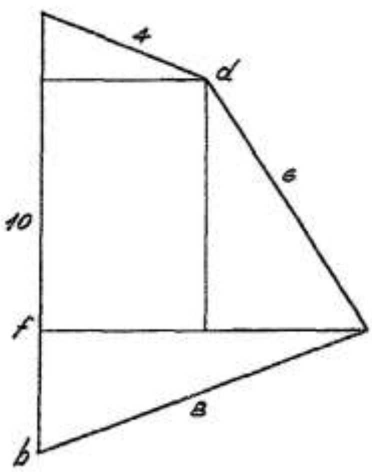
$$5 * x + 3 * [10 – \sqrt{(16 – x^2)}] = (30 + \sqrt{60}).$$

Non è calcolata la lunghezza dE = x. Con una certa approssimazione, si ha:

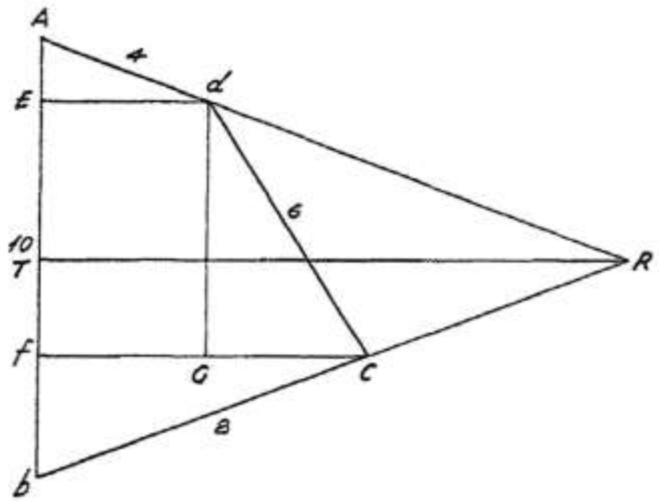
$$dE \approx 3{,}1 \text{ braccia}.$$

Ragione 248

Un terreno ha la forma di un quadrilatero le cui dimensioni espresse in braccia sono scritte sullo schema:



I lati Ad e bC sono poi prolungati verso destra fino a incontrarsi nel punto R:



Il problema pone un vincolo: ARb è un triangolo isoscele perché i lati AR e bR hanno uguale lunghezza e quindi AT = Tb = 5 braccia.

Deve essere calcolata la lunghezza di RT.

Dai punti d e C tracciare le perpendicolari a Ab: sono dE e Cf. Dal vertice *d* condurre la parallela a Ab fino a incontrare in G il segmento Cf.

AdE e fCb sono due triangoli simili e vale proporzione:

AE : fb = Ad : bC e

fb = (AE * bC)/Ad = Ae * 8/4 = 2 * AE.

L'Autore assegna alla lunghezza di AE il valore dell'incognita, qui modificata in "x":

AE = x.

Ne consegue:

fb = 2 * x.

La lunghezza di Ed è:

$Ed^2 = Ad^2 – AE^2 = 4^2 – x^2 = 16 – x^2$ e

$Ed = \sqrt{}(16 – x^2)$ braccia.

Anche fG è lungo $\sqrt{}(16 – x^2)$ braccia.

Occorre calcolare la lunghezza di Cf:

$Cf^2 = Cb^2 – fb^2 = 8^2 – (2 * x)^2 = 64 – 4 * x^2$ e

$Cf = \sqrt{}(64 – 4 * x^2)$ braccia.

La lunghezza di EF, uguale a quella di dG, è data da:

EF = Ab – AE – fb = 10 – x – 2*x = (10 – 3*x) braccia.

I triangoli AEd e Cfb sono simili. GC è lungo quanto Ed.

La lunghezza del cateto dG è:

$dG^2 = dC^2 – GC^2 = 6^2 – Ed^2 = 6^2 – [\sqrt{}(16 – x^2)]^2 = 36 – 16 + x^2 = (20 + x^2)$ e

$dG = \sqrt{}(20 + x^2)$.

Vale l'uguaglianza:

EF = dG

$(10 – 3 * x) = \sqrt{}(20 + x^2)$.

Elevando al quadrato entrambi i membri si ha:

$(10 – 3 * x)^2 = 20 + x^2$

$100 – 30*x + 9*x^2 = 20 + x^2$

$8 * x^2 – 30 * x + 80 = 0$

L'equazione ha radici immaginarie.

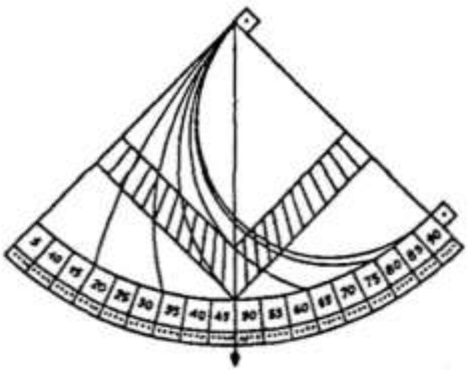
L'Autore giunge a calcolare la lunghezza di AE = x come segue:

AE = (3 + ¾) – $\sqrt{}$(4 + 1/16) che corrisponde a ≈ 1,7734 braccia.

La lunghezza di RT è, con buona approssimazione, di circa 11 braccia.

Ragione 249

La Ragione descrive l'uso del *quadrante* per misurare altezze, lunghezze e profondità di torri, alberi, pozzi e fossi.



Ragioni 250 ÷ 260

Queste Ragioni descrivono diversi impieghi del quadrante, ma sono tutte prive di schemi.

Ragione 261

Il problema consiste nella misura dell'altezza di una torre con l'ausilio di un'asta.

È probabile che si tratti di un'applicazione del teorema di Talete, ma non è possibile fornire una descrizione perché il testo non è accompagnato da uno schema nel quale sia possibile collocare i vertici citati nello stesso testo.

Ragione 262

Il problema descrive il caso di una torre che deve essere misurata con l'ausilio della solita asta, con una complicazione: la presenza di un ostacolo, un fiume o altro, che si pone fra la torre e la posizione occupata dall'osservatore.

Il testo non è accompagnato da alcuno schema.

Ragione 263

Un altro problema chiede la misura di una torre, con l'impiego di un'asta lunga il *doppio* dell'altezza dell'osservatore.

Il testo fa riferimento a una figura che non è presente.

Nota: sembra ragionevole avanzare un'ipotesi: alcune Ragioni sono prive di disegni, citati nei rispettivi testi, o necessari per posizionare correttamente le lettere citate sui vertici corrispondenti perché la parte finale di questo Trattato è *incompiuta*.

Ragione 264

Il problema propone la misura di una torre con l'ausilio di uno *specchio*.

Non è possibile descrivere la soluzione perché non è presente alcuno schema.

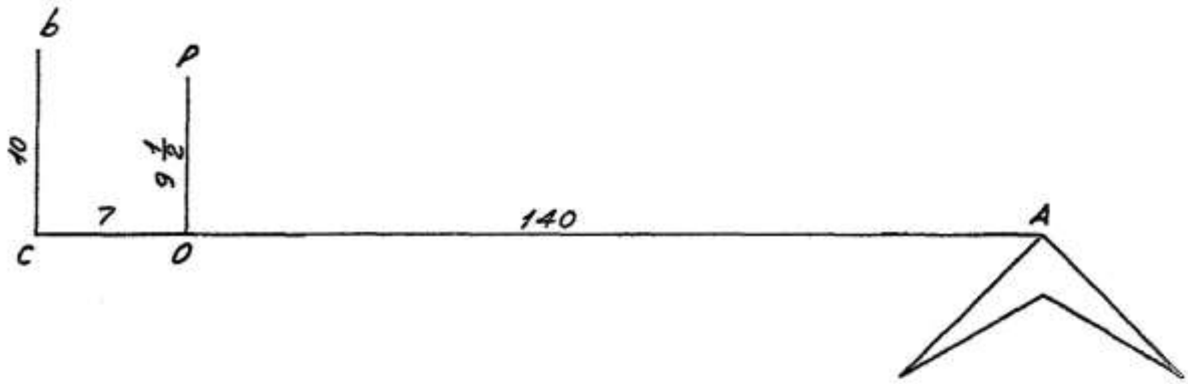
Ragione 265

Il problema propone la misura dell'altezza di una torre costruita su di un poggio: l'Autore prevede l'uso congiunto di un'asta lunga quanto l'altezza da terra agli occhi dell'osservatore [lunghezza convenzionale di 3 braccia da panno] e di uno specchio.

Il testo contiene diversi riferimenti a svariati punti, ma non è presente alcun disegno.

Ragione 266

Deve essere misurata la lunghezza di un campo a partire dal punto C:



L'osservatore è posizionato in C.

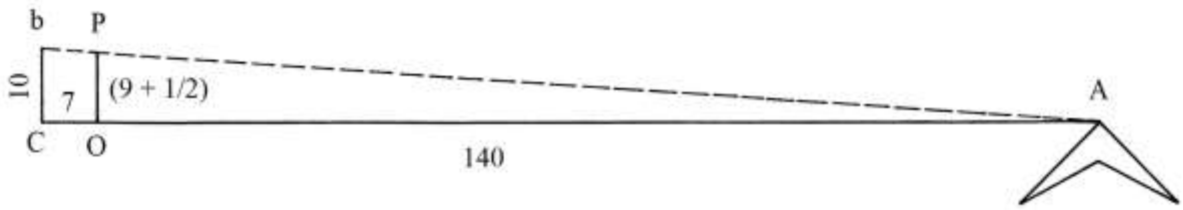
Cb è perpendicolare alla linea CA ed è lungo 10 braccia.

Sulla linea CA è fissato il punto O, a distanza di 7 braccia da C.

Posizionare un'asta verticale in O.

Traguardando da b a A, la vista incontra l'asta posizionata in O nel punto P, che dista (9 + ½) braccia da O.

Lo schema che segue è in *scala*:



La conclusione è ovvia: spostandosi da C verso A, ogni 7 braccia orizzontali si ha un abbassamento di

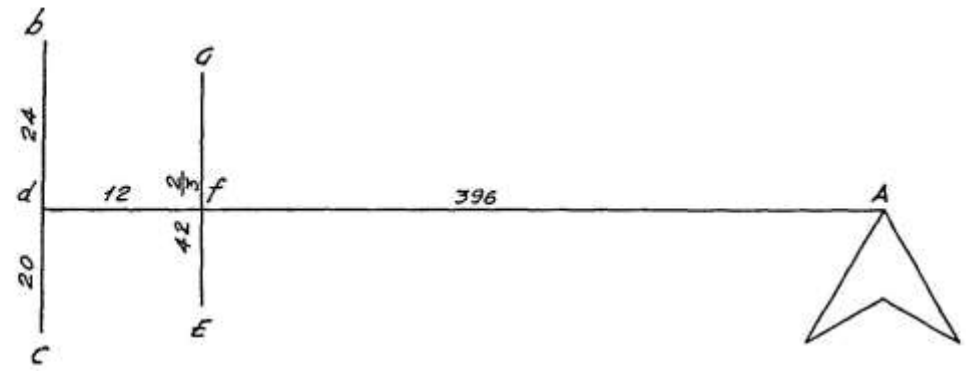
(bC – PO) = [10 – (9 + ½)] = ½ braccio.

bCA e POA sono due triangoli simili: indichiamo con "x" la lunghezza di OA:

bC : PO = CA : OA
10 : (9 + ½) = (x + 7) : x
10 * x = (9 + ½) * (x + 7)
10 * x = (9 + ½) * x + 7 * (9 + ½)
½ * x = 7 * (9 + ½)
x = 14 * (9 + ½)
x = 133 e
CA = CO + OA = 7 + 133 = 140 braccia.

Ragione 267

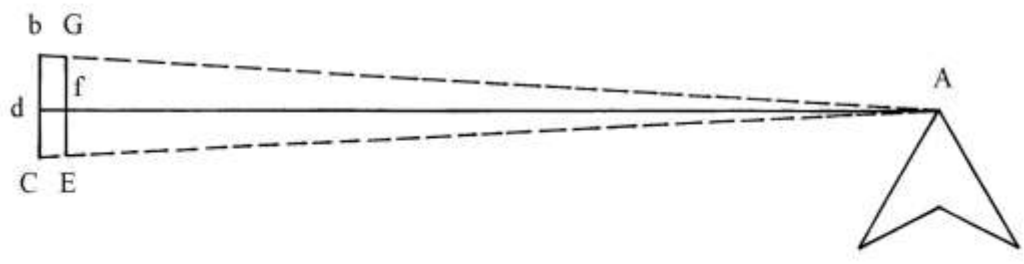
Il problema è simile a quello affrontato nella precedente Ragione.



Deve essere misurata la lunghezza di dA:

Nel vertice *d* è tracciata una linea verticale, *bc*, che è lunga in totale 44 braccia ed è perpendicolare a *dA*.

Lo schema che segue è in scala:



Sulla linea che congiunge *d* con *A* è fissato il punto *f* a distanza df = 12 braccia: per questo ultimo punto è disegnata una seconda linea, parallela a *bC* e anch'essa perpendicolare a dA, GE, che è lunga (42 + 2/3) braccia.

Traguardando da b verso A, sulla linea passante per f è visto il punto G. La differenza fra le lunghezze di bC e GE è:

bC – GE = 44 – (42 + 2/3) = (1 + 1/3) braccia.

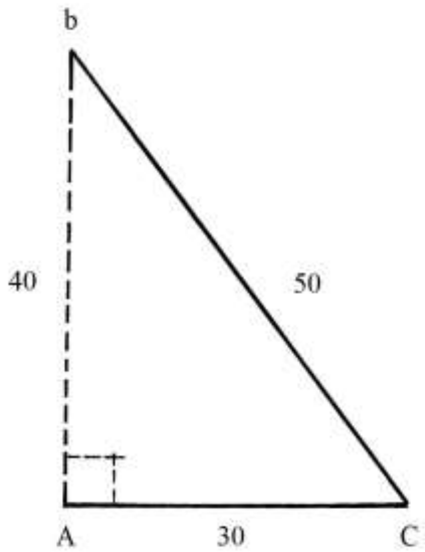
La lunghezza di *dA* è correttamente calcolata dall'Autore:

dA = (df * bc)/(bc – GE) = 12 * 44/(1 + 1/3) = 396 braccia.

Ragione 268

Un terreno ha la forma di un triangolo rettangolo perché ha un angolo retto nel vertice A.

Le misure devono essere prese a partire dal vertice C: CA è lungo 30 braccia e quella di Cb è 50 braccia. La lunghezza del cateto *Ab* deve essere calcolata.



La lunghezza di Ab è data da:

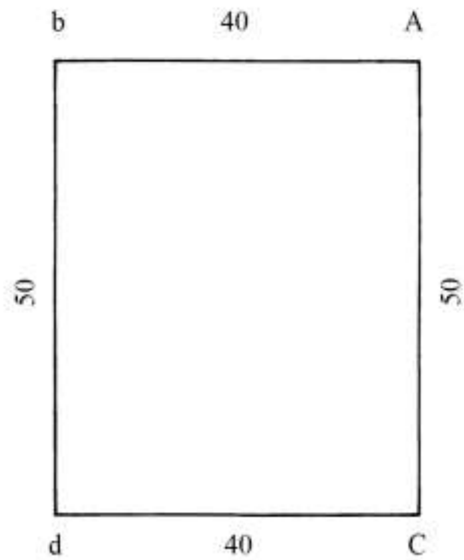
$Ab^2 = Cb^2 – CA^2 = 50^2 – 30^2 = 2500 – 900 = 1600$ e

$Ab = \sqrt{1600} = 40$ braccia.

Le lunghezze dei lati richiamano la terna primitiva 3-4-5.

Ragione 269

Una figura ha la forma di un rettangolo: le misurazioni sono effettuate a partire dal vertice *d*. I lati opposti sono paralleli e hanno uguali lunghezze.



Le lunghezze misurate sono:

* db = 50 braccia;
* dC = 40 braccia.

I lati CA e bA risultano lunghi rispettivamente 50 e 40 braccia.

L'area del rettangolo è:

$$A_{dbAC} = db * dC = 50 * 40 = 2000 \text{ braccia}^2.$$

- APPROFONDIMENTO -

La Ragione 269, come altre del Trattato dell'Anonimo Fiorentino, è ripresa e ampliata nella piccola opera di Francesco di Giorgio Martini (Siena, 1439-1501), attribuita a circa il 1470 e quindi posteriore all'opera dell'Anonimo, "La praticha di gieometria", contenuta nelle carte 27 *verso* – 32 *verso* del Codice Ashburnham 361.

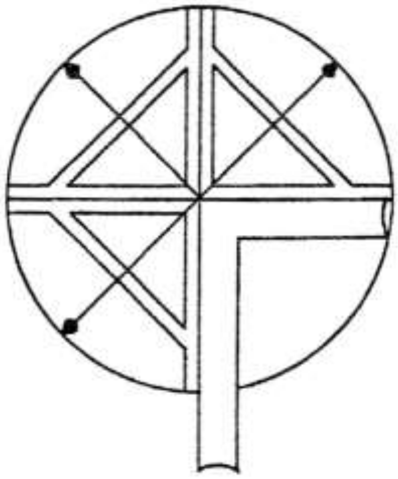
Il testo di Francesco di Giorgio è assai più preciso ed è accompagnato da disegni molto più dettagliati: le lettere apposte sono *maiuscole*. La lingua è più leggibile nel testo dell'Anonimo Fiorentino.

Sarebbe interessante approfondire le relazioni fra i due Trattati. Francesco di Giorgio conosceva il lavoro dell'Anonimo Fiorentino? Lo ha utilizzato? Forse sì, visto che nelle figure sono spesso usate le stesse lettere oppure va ricercata una precedente fonte comune.

- -

Ragione 270

Il problema descrive il modo per realizzare una *squadra perfetta*.



La costruzione muove da un cerchio disegnato con il compasso e poi diviso in quattro quadranti per mezzo di due diametri fra loro perpendicolari.

I quadranti sono disegnati per farne quattro archipendoli: in realtà nella figura ne risultano solo *tre*.

Il quadrante in basso a destra non è un archipendolo ma contiene una vera e propria squadra.

Nel testo sono citate le lettere A, b, C e E che non sono presenti sullo schema.

Ragione 271

L'altezza di una torre può essere determinata con la misura delle ombre prodotte sul terreno dal Sole. Occorre un'asta lunga 4 braccia, posizionata verticalmente nel terreno.

Nel piano, l'ombra della torre è lunga 200 braccia e quella dell'asta è (5 + 1/3) braccia.

L'altezza della torre è così ricavata:

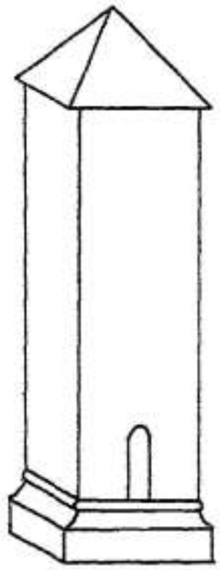
* moltiplicare la lunghezza dell'ombra della torre per l'altezza dell'asta: 200 * 4 = 800;
* dividere per la lunghezza dell'ombra dell'asta: 800/(5 + 1/3) = 150 braccia, altezza della torre.

Il testo non è accompagnato da alcuno schema.

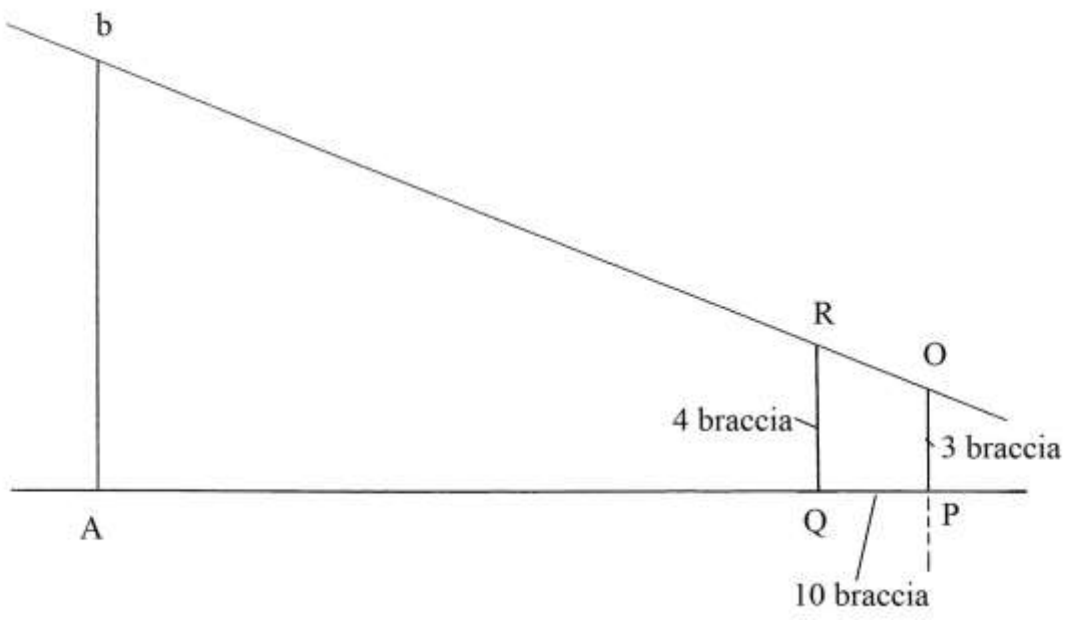
Ragione 272

Il problema chiede di misurare l'altezza di una torre la cui ombra non è avvicinabile.

Anche questa Ragione contiene un testo con riferimenti a vertici contrassegnati da lettere che non sono riportate nello schema.



La misura dell'altezza è effettuata con l'impiego di *due* aste: un'asta, PO, è conficcata verticalmente nel terreno e sporge da esso per 3 braccia:



La seconda asta, QR, è lunga 4 braccia fuori terra ed è anch'essa posizionata verticalmente a 10 braccia di distanza da PO.

L'altezza della prima asta, PO, 3 braccia, corrisponde a quella convenzionale da terra degli occhi di un osservatore in piedi.

Lo schema qui sopra non è in scala: è un tentativo di interpretazione del testo.

Il vertice *b* della torre è traguardato da una linea retta che passa per O e per R.

A è il piede della torre e la lunghezza AP è 300 braccia.

La differenza fra le lunghezze di QR e di PO è:

QR – PO = 4 – 3 = 1 braccio.

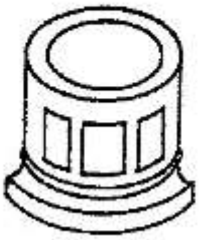
La retta ORb si alza di 1 braccio ogni 10 braccia orizzontali (PQ).

L'altezza di bA è data da:

bA = AP/QP + PO = 300/10 + 3 = 33 braccia.

Ragione 273

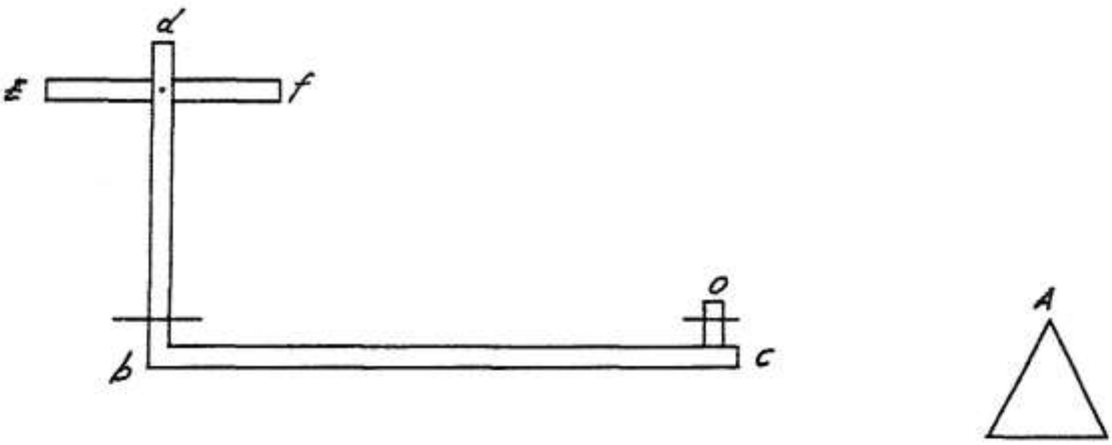
La misura della profondità di un pozzo è effettuata con un regolo diritto e lungo quanto il diametro dello stesso pozzo:



Il testo cita diversi vertici contrassegnati da alcune lettere: A, b, d, E e C. Esse non sono posizionate sullo schema originale per cui la soluzione del problema risulta poco comprensibile.

Ragione 274

Il problema propone una misura in piano: anche in questo caso è richiesta la presenza di un triangolo rettangolo.



Fra i punti C e A scorre un fosso pieno d'acqua: è chiesta la sua larghezza.

bC è un'asta lunga 6-8 braccia ed è disposta orizzontalmente.

Nell'estremo *b* è incastrata perpendicolarmente l'asta *bd*, lunga fra (2 + ½) e 3 braccia.

Nell'estremo superiore *d* è inserita l'asta *Ef* lunga 1 ÷ (1+ ½) braccia e scorrevole in senso verticale.

Nell'asta bd è praticato un foro orizzontale in prossimità di *b*.

Procedere all'allineamento fra il foro in *b*, il punto *O* e il punto *A*.

Orientare l'asta Ef verso A.

L'Autore suggerisce l'uso di *corde* per misurare, ma non spiega come scavalcare il fosso.

<u>Bibliografia</u>

1. Anonimo Fiorentino, "Trattato di geometria pratica. Dal Codice L.IV.18 (sec. XV) della Biblioteca Comunale di Siena, a cura e con introduzione di Annalisa Simi, Università degli Studi di Siena, "Quaderni del Centro Studi della Matematica Medioevale", n. 21, 1993, pp. 195.
2. [Davide Bruno], "Inscrizioni", 2008, pp. 50, reperibile all'indirizzo: http://www.rudimathematici.com/bookshelf/pdf/Inscrizioni.pdf.
3. Martini Francesco di Giorgio, "La pratica di gieometria". Dal Codice Ashburnham 361 della Biblioteca Medicea Laurenziana di Firenze, a cura di Gino Arrighi, Firenze, Giunti Barbera, 1970, pp. 34 con 11 tavole fuori testo.
4. Mazzucato Michele T., "Triangoli Piani e loro risoluzione", Santarcangelo di Romagna, Maggioli Editore, 2008, pp. XXI+193.
5. Necipoğlu Gülru (a cura di), "The Arts of Ornamental Geometry. A persian compendium on similar and complementary interlocking figures – A Volume Commemorating Alpay Özdural", Lediden-Boston, Brill, 2017, pp. 374.
6. Ulivi Elisabetta, "Soluzioni algebriche di problemi geometrici nella trattatistica dell'abaco", https://php.math.unifi.it/archimede/archimede/note_storia/2014/ulivi.pdf
7. Zupko Ronald Edward, "Italian Weights and measures from the Middle Ages to the Nineteenth Century", Philadelphia, American Philosophical Society, 1981, pp. lxxxiv+339.