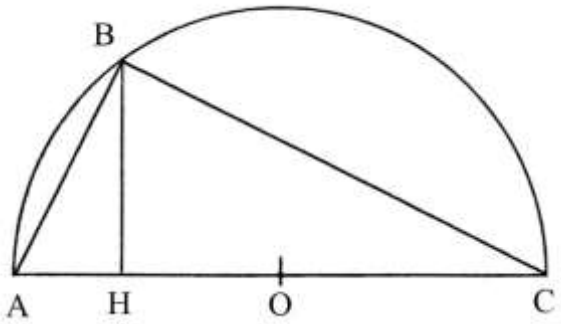
© Sergio Calzolani, Firenze, 2023
sergio(punto)calzolani(at)outlook(punto)it

Il materiale contenuto in questo documento può essere riprodotto, in tutto o in parte, a scopi *non commerciali*, purché siano citati l'Autore e la fonte.

**Parole chiave**: teoremi di Euclide sui triangoli rettangoli; trasformazione di un triangolo equilatero in un quadrato; quadratura di triangoli; scomposizione di un triangolo equilatero in due triangoli equilateri; quadratura di una tavola sezionata; trasformazioni di un triangolo generico; quadrati scomposti in due o tre quadrati; trasformazioni fra quadrilateri; coperture di rettangoli e quadrati con piastrelle quadrate di lati differenti

## I teoremi di Euclide sui triangoli rettangoli inscritti in un semicerchio

Nella figura che segue è rappresentato un triangolo rettangolo (in B), inscritto in una semicirconferenza di diametro AC:




È attribuito a Talete di Mileto (VII – VI secolo a.C.) il teorema secondo il quale un triangolo inscritto in un semicerchio è rettangolo.

AB e BC sono i *cateti* del triangolo e AC è la sua *ipotenusa*, che coincide con il diametro AC.

A Euclide (Alessandria, IV- III secolo a.C.) si devono i due seguenti teoremi relativi ai triangoli rettangoli inscritti in semicerchi.

Questi due teoremi rivestono una notevole importanza nelle costruzioni delle trasformazioni dei poligoni.

### 1° Teorema

Un cateto (ad esempio AB) è *medio proporzionale* fra la sua proiezione (AH) sull'ipotenusa e la lunghezza di quest'ultima (AC):

$$AH : AB = AB : AC \text{ da cui deriva}$$
$$AB^2 = AH * AC.$$

### 2° Teorema

L'altezza relativa all'ipotenusa (BH) è *medio proporzionale* fra i due segmenti che essa determina sull'ipotenusa stessa e che sono le proiezioni su di essa dei due cateti:

$AH : HB = HB : HC$ da cui deriva

$HB^2 = AH * HC$ .

Di conseguenza, vale anche la seguente relazione:

$AB : HB = HB : BC$ .

Questa ultima proporzione è ovvia dato che AH è la proiezione di AB e HC è la proiezione del cateto BC e vale AB : AH = BC : HC.

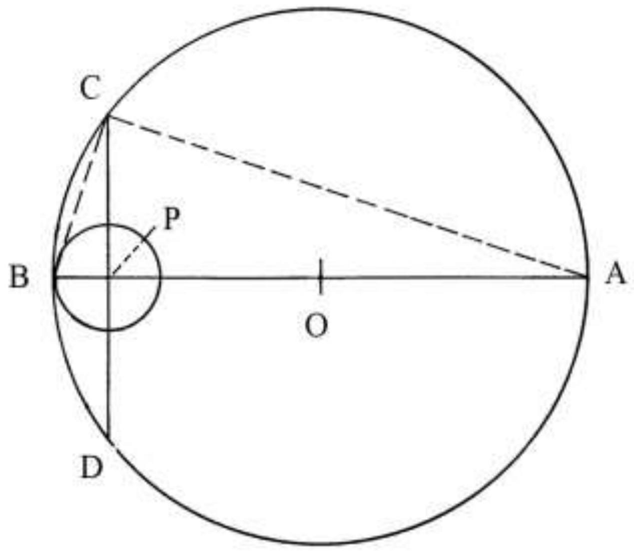
In entrambi i teoremi, la media proporzionale è una *media geometrica*.

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - APPROFONDIMENTO - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

Un'interessante applicazione del 2° teorema è data dall'estrazione della radice quadrata di un numero.

Se un numero non è un quadrato perfetto (4, 9, 16, 25, 36,…) la sua radice può essere un numero irrazionale, come è il caso di $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ e $\sqrt{5}$.

La soluzione può essere ricavata per via geometrica:




Deve essere ricavata la radice quadrata di un numero generico, N.

Tracciare una retta orizzontale e riportarvi la lunghezza di N: è PA = N.

Sulla stessa retta fissare il punto B a distanza "1" da P.

Fare centro in P e con raggio PB disegnare una circonferenza.

Determinare il punto medio di BA: è O. Fare centro in O e con raggio OA = OB tracciare una circonferenza.

Da P condurre la corda CD perpendicolare a BA.

BCA è un triangolo rettangolo. Per il 2° teorema di Euclide si ha:

$BP : PC = PC : PA$

Ma BP = 1 e PA = N, per cui si ottiene:

$1 : PC = PC : N$

$PC^2 = 1 * N = N$ e

$PC = \sqrt{N}$.

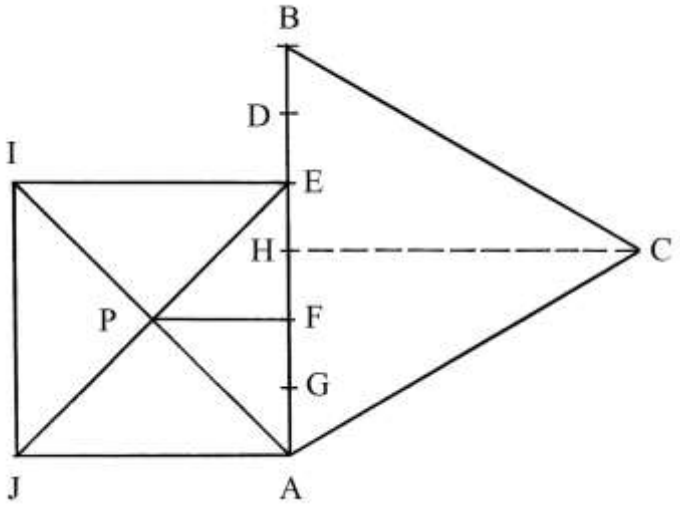
La lunghezza di PC (e di PD) è la radice quadrata di N.

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

Alcune costruzioni medievali e rinascimentali

L'architetto e costruttore tedesco Matthäus Roriczer (circa 1435-1495) suggerì, nel suo trattato "*Geometria deutsch*", un metodo pratico per disegnare un quadrato di superficie uguale a quella di un triangolo equilatero: la costruzione è però *approssimata* per eccesso del 2,5% (il quadrato è leggermente più grande).

Lo schema che segue è una rielaborazione dell'originale.




ABC è il triangolo equilatero e il suo lato AB è diviso in *sei* parti uguali. Per la costruzione servono i punti E e F: BE = EF = FA.

EA è il lato del quadrato quasi equivalente al triangolo.

A partire da E e da A tracciare due perpendicolari al lato AB. Con apertura di compasso uguale a AE fare centro in E e in A e determinare i punti I e J.

Il quadrato JIEA ha *quasi* la stessa area del triangolo ABC.

La proiezione del centro P cade nel punto F di AB, che è il medio di AE.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Un manoscritto anonimo scritto in latino (*De inquisizione capacitatis figurarum*) affronta argomenti di geometria e di astronomia.

Fu redatto a Salisburgo in Austria nel 1434-6 ed è attualmente conservato a Monaco di Baviera.

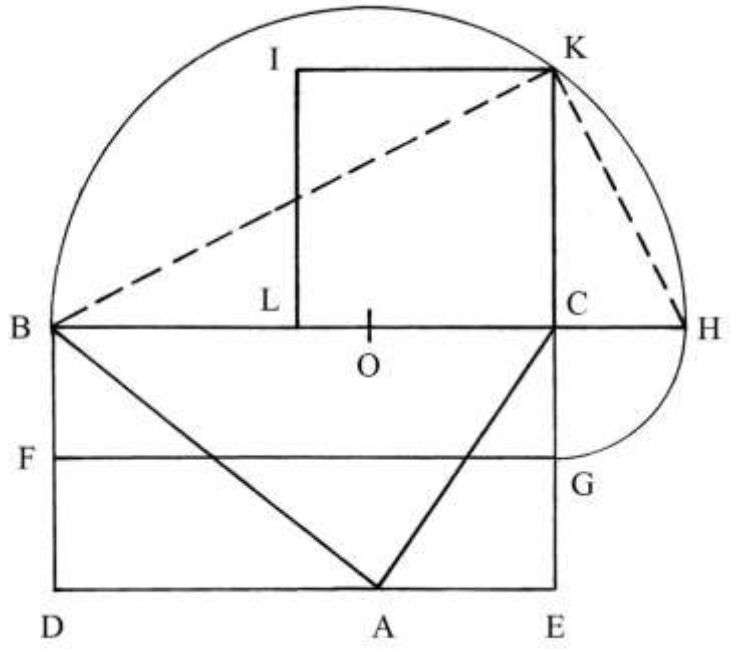
Fra l'altro, esso contiene la descrizione di un metodo grafico per disegnare un quadrato che abbia la stessa area di un triangolo *qualsiasi* e non soltanto *equilatero* come era il caso della costruzione di Matthäus Roriczer.

Il metodo del manoscritto latino fornisce una soluzione *corretta*.

ABC è il triangolo qualsiasi da trasformare: quello in figura è *scaleno*.

Disegnare il rettangolo BCED circoscritto al triangolo e tracciare la mediana FG che è determinata dalla posizione dei punti F e G: essi sono, rispettivamente, i punti medi dei segmenti BD e CE.

Il rettangolo BCGF ha la stessa superficie del triangolo ABC.




Fare centro in C e, con raggio CG, disegnare un arco che taglia la linea orizzontale nel punto H.

Determinare il punto medio del segmento BH: è O.

Con centro in O, e raggio OB, tracciare una semicirconferenza da B a H. Essa taglia il prolungamento di EC in un punto, K.

CK è il lato di un quadrato (CKIL) che ha la stessa superficie di quella del rettangolo BCGF e del triangolo ABC.

La costruzione applica il 2° teorema di Euclide e quindi il quadrato costruito sull'altezza (KC) relativa all'ipotenusa (BH) ha la stessa area del rettangolo che ha per lati le proiezioni dei due cateti (BK e KC) sull'ipotenusa (rispettivamente BC e CH):

$$KC^2 = BC * CH.$$

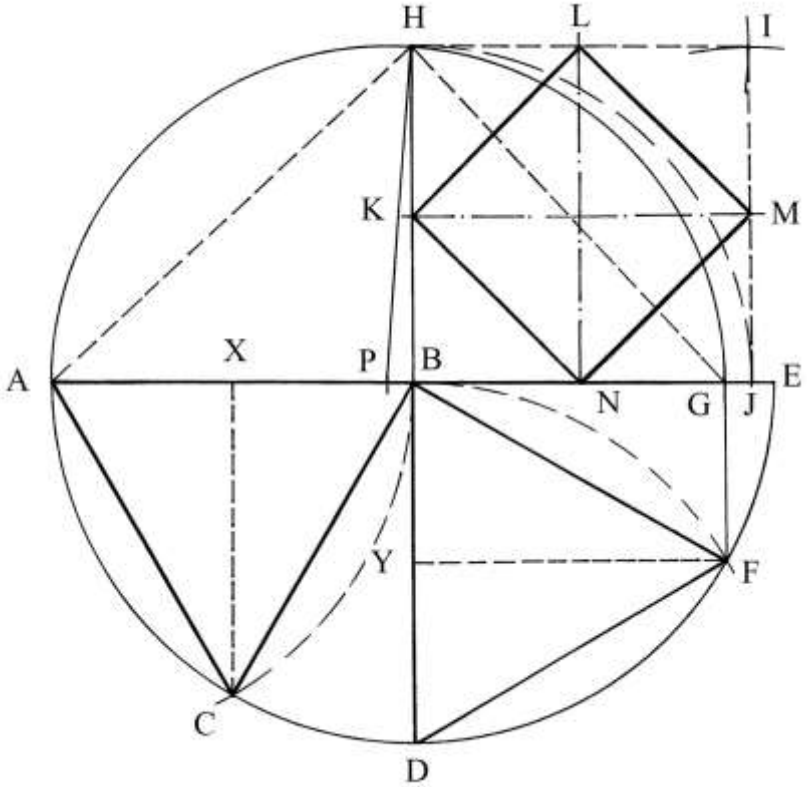
Ma BC * CH è l'area del rettangolo BCGF, equivalente a quella del triangolo ABC.

## Quadratura di un triangolo equilatero

ABC è un triangolo equilatero che deve essere trasformato in un quadrato di area uguale.

Prolungare verso destra il lato AB. Per il punto B tracciare la perpendicolare a AB.

Fare centro in B e, con raggio BA, disegnare una semicirconferenza da A fino a fissare i punti D e E. Con la stessa apertura fare centro in D e tracciare un arco da B fino a stabilire il punto F: BDF è un secondo triangolo equilatero che ha le stesse dimensioni di quello ABC.




Dal punto F condurre la perpendicolare alla retta orizzontale: è FG.

Determinare il punto medio di AG: è P. Fare centro in P e con raggio PA = PG disegnare una semicirconferenza fa A a G: essa taglia l'asse verticale nel punto H. AHG è un triangolo rettangolo inscritto in una semicirconferenza.

Per il 2° teorema di Euclide, la lunghezza di HB è medio proporzionale fra le lunghezze di AB e di BG:

$HB^2 = AB * BG$ e $HB = \sqrt{(AB * BG)}$.

AB è il lato di un triangolo equilatero e BG è la sua altezza.

Costruire il quadrato BHIJ.

Il triangolo equilatero ABC ha area:

$A_{ABC} = AB/2 * CX = AB * BG/2 = HB^2/2$.

Determinare i punti medi dei quattro lati di BHIJ: sono K, L, M e N.

Disegnare il quadrato KLMN; la sua area è:

$A_{KLMN} = KL^2$.

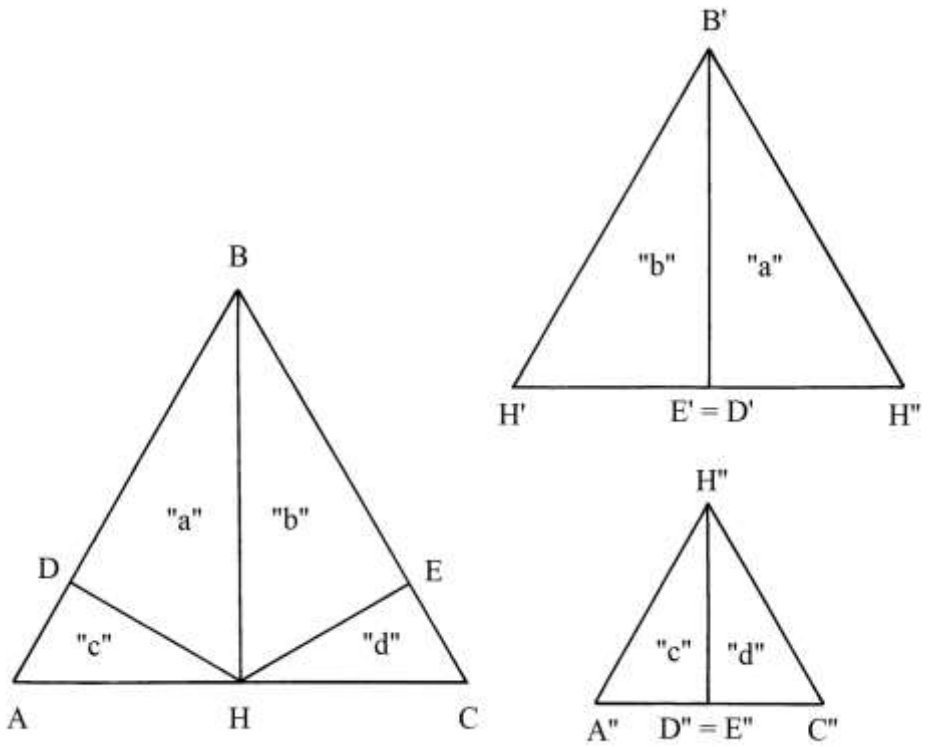
La lunghezza di KL è data da:

$KL^2 = KH^2 + HL^2 = 2 * KH^2 = 2 * (HB/2)^2 = 2 * HB^2/4 = HB^2/2 = A_{KLMN}$.

L'area di KLMN è uguale a quella del triangolo ABC (e del triangolo BDF) ed è la metà di quella del quadrato BHIJ.

## Triangolo equilatero scomposto in due triangoli equilateri

ABC è un triangolo equilatero che deve essere scomposto in due triangoli equilateri le cui aree sommate siano uguali a quella di ABC.




BH è un'altezza. Da H tracciare le due perpendicolari ai lati AB e BC: sono HD e HE.

ABC è scomposto in quattro triangoli rettangoli contrassegnati con le lettere "a", "b", "c" e "d".

Il segmento HD divide il triangolo rettangolo ABH in due triangoli rettangoli: ADH e DBH. Essi sono fra loro simili e entrambi lo sono rispetto a ABH.

Le stesse considerazioni valgono per i triangoli HBE, HEC e HBC.

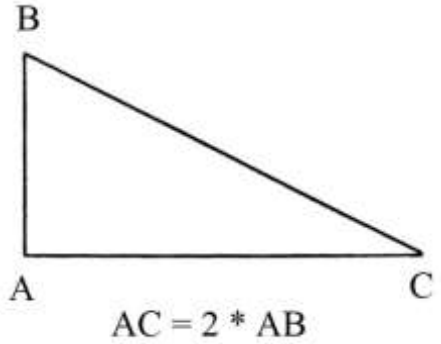
I quattro triangoli rettangoli sono assemblati per formare due triangoli equilateri: il primo è ottenuto dall'unione di DBH e HBE.

Il secondo è prodotto dall'unione di ADH e di HEC.

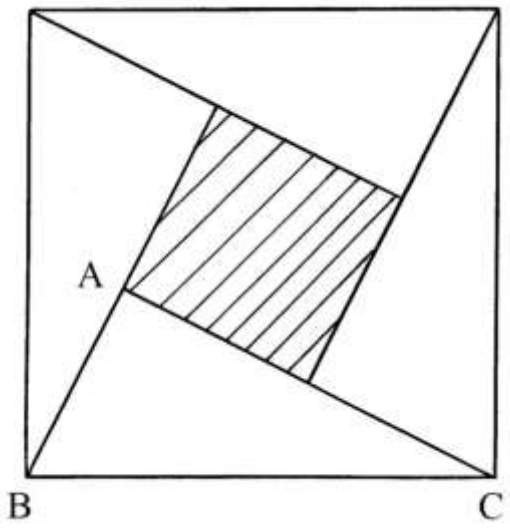
A loro volta, i due nuovi triangoli equilateri H'B'H'' e A''H''C'' possono essere sezionati con lo stesso metodo applicato a ABC.

<u>Quadrato costruito con 5 triangoli rettangoli</u>

ABC è un triangolo rettangolo che ha un'interessante proprietà: il cateto AC è lungo il *doppio* del cateto AB.



Per costruire un quadrato con lato lungo quanto l'ipotenusa BC, occorrono *cinque* triangoli rettangoli uguali a quello ABC. Affiancando *quattro* triangoli rettangoli si ottiene la figura che segue:



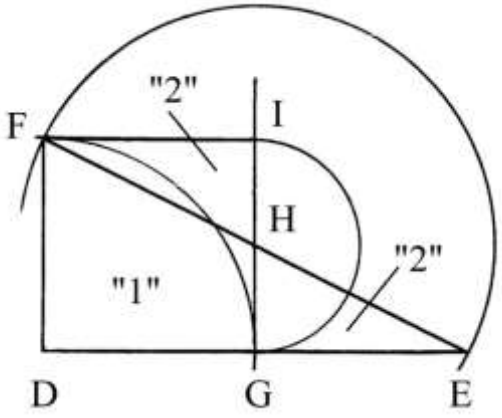

Il risultato è evidente: i quattro triangoli rettangoli non sono in grado di riempire interamente la superficie del quadrato di lato BC e all'interno vi è un buco quadrato (tratteggiato nella figura).

A questo punto occorre il *quinto* triangolo rettangolo. Nella figura che segue, DFG è un triangolo rettangolo identico a quello ABC.

Fare centro in D e, con raggio DF, tracciare un arco che taglia il cateto DE nel punto G: questo punto è il medio dello stesso cateto DE, poiché DE = 2 * DF.

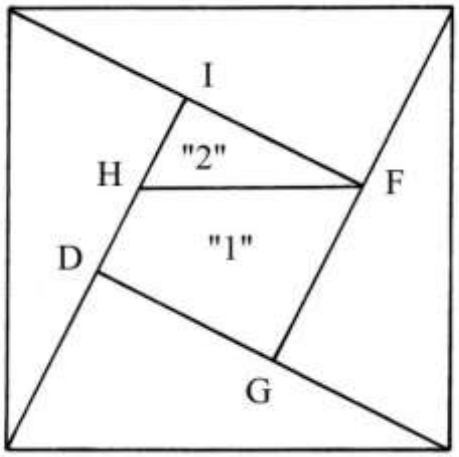
Dal punto G elevare la perpendicolare a DE fino a intersecare l'ipotenusa FE in un nuovo punto, H. Contrassegnare con "1" e "2" le due superfici ricavate: rispettivamente il trapezio rettangolo GDFH e il triangolo rettangolo EGH.

Costruire il quadrato FDGI.




Il triangolo rettangolo FIH ha le stesse dimensioni di quello HGE.

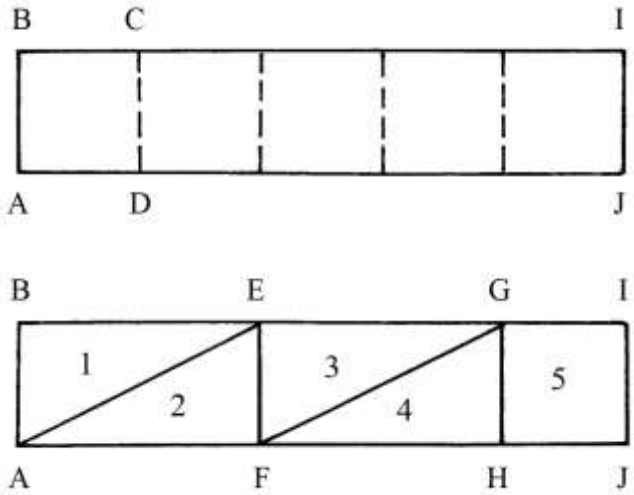
Il quadrato DFIG che ha area uguale a quella del triangolo DFE, può riempire il buco quadrato al centro:




%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Un secondo e simile problema è qui rielaborato dal testo di Dudeney, “Il mistero del pontile”.

Un rettangolo è formato da *cinque* quadrati di uguali dimensioni disposti a formare una fila:




Il rettangolo deve essere trasformato in un quadrato di uguale superficie effettuando un limitato numero di tagli.

AB è lungo $\ell$. L’area di un quadrato come quello ABCD è:

$A_{ABCD} = AB^2 = \ell^2$.

L’area dell’intero rettangolo ABIJ è:

$A_{ABIJ} = 5 * A_{ABCD} = 5 * AB^2 = 5 * \ell^2$.

L’area del quadrato equivalente deve essere uguale a $5 * \ell^2$: esso ha un lato, L, lungo:

$L = \sqrt{(5 * \ell^2)} = \ell * \sqrt{5}$.

Ma $\sqrt{5}$ è un numero irrazionale. La sua costruzione può essere ottenuta soltanto per via geometrica.

Tracciare una diagonale nei due doppi quadrati ABEF e FEGH: sono AE e FG.

Le due diagonali sono lunghe:

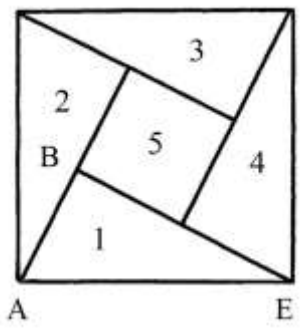
$AE^2 = AF^2 + EF^2 = (2 * \ell)^2 + \ell^2 = 5 * \ell^2$ e

$AE = FG = \ell * \sqrt{5}$.

AE e FG sono lunghe quanto il lato del quadrato equivalente.

Il rettangolo ABIJ è ora scomposto in quattro triangoli rettangoli – di uguali dimensioni – numerati da 1 a 4 e nel quadrato HGIJ, che il numero 5.

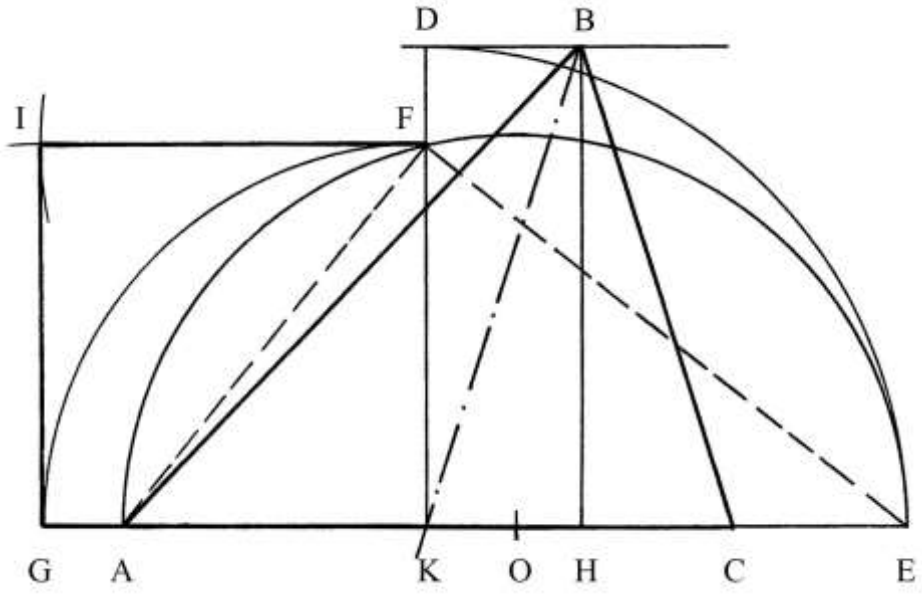
I cinque poligoni sono assemblati a formare il quadrato di lato $\ell * \sqrt{5}$:




<u>Quadrato equivalente a un triangolo</u>

ABC è un triangolo *scaleno*. BH è l'altezza relativa alla base AC.

BK è una delle mediane: K è il punto medio del lato AC.




L'area del triangolo è:

$A_{ABC} = BH * AC/2 = BH * AK$.

Un quadrato di area uguale a quella di ABC ha lato $\ell$ lungo:

$\ell = \sqrt{(A_{ABC})} = \sqrt{(BH * AK)}$.

Per il vertice B condurre la parallela a AC. Da K elevare la perpendicolare a AC: è DK.

Fare centro in K e con raggio KD = HB tracciare un arco da B fino a fissare il punto E sul prolungamento di AC.

Determinare il punto medio di AE: è O.

Fare centro in O e con raggio OA = OE disegnare una semicirconferenza da A a E. Essa taglia la perpendicolare KD nel punto F: AFE è un triangolo rettangolo inscritto.

KF è il medio fra le lunghezze di AK e di KE:

AK : KF = KF : KE e

KF2 = AK * KE = AC/2 * BH, che è la formula dell'area di ABC.

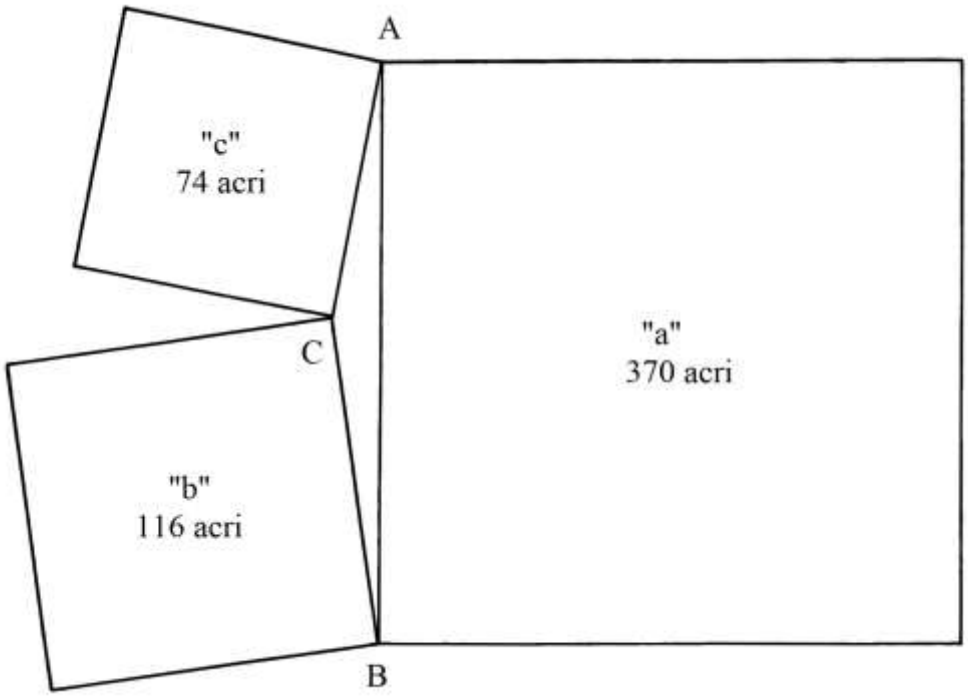
KF è il lato del quadrato FKGI che la stessa area di ABC.

La costruzione è applicabile anche ai casi dei triangoli isosceli e di quelli equilateri: nei primi almeno un'altezza e una mediana coincidono, mentre nei secondi le tre altezze coincidono con le tre mediane.

## Area di un triangolo delimitato da tre quadrati

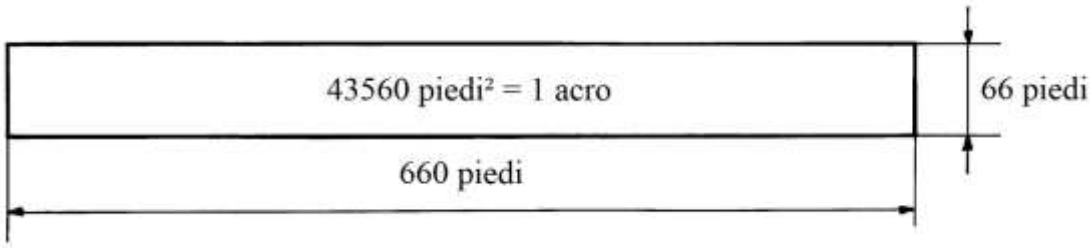
Sanuel Loyd (nei "Passatempi matematici – I") e Henry E. Dudeney (ne "Il mistero del pontile") hanno presentato e risolto in modo identico il problema qui descritto.

Nello Yorkshire (una contea storica dell'Inghilterra) erano state poste in vendita tre proprietà confinanti separate da un laghetto di forma triangolare, ABC:




Le tre proprietà hanno forma quadrata e le loro aree misurate in *acri* sono scritte nella figura qui sopra.

Un *acro* è un'unità di misura della superficie che faceva parte del sistema britannico (ed è ancora usata negli Stati Uniti). Esso equivaleva all'area di un rettangolo lungo 660 piedi e largo 66 piedi:



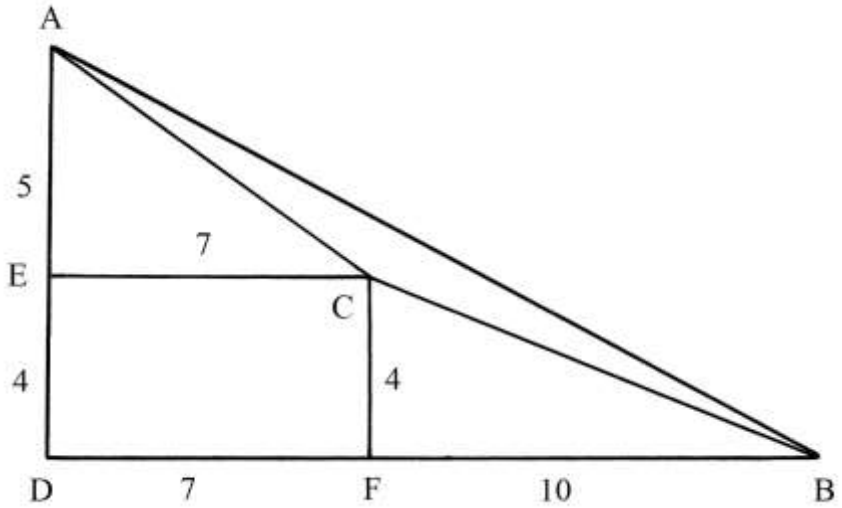
Esso corrispondeva a 4046,85 $m^2$.

Un acro era il terreno arabile da una coppia di buoi in una giornata di lavoro.

Un antenato di questa unità era lo *iugero romano* che era l'area di un terreno arato da una coppia di buoi in una giornata di lavoro. Lo iugero era più piccolo dell'acro perché corrispondeva a quasi 2520 $m^2$.

Secondo Loyd e Dudeney il problema chiede l'area del laghetto ABC.

I due Autori risolvono il problema per via geometrica.




ABD è un triangolo rettangolo i cui cateti hanno le seguenti lunghezze:

* AD = 9;
* DB = 17.

All'interno del triangolo è tracciato il rettangolo DECF che ha dimensioni di 4 per 7. Esso origina due triangoli rettangoli:

* AEC, che ha cateti lunghi 5 e 7;
* CBF, che ha cateti lunghi 4 e 10.

Nel triangolo ABD, l'ipotenusa AB è lunga:

$AB^2 = AD^2 + DB^2 = 9^2 + 17^2 = 81 + 289 = 370.$

Il quadrato costruito sull'ipotenusa AB è ampio quanto la proprietà indicata con "a".

L'ipotenusa AC è lunga:

$AC^2 = AE^2 + ED^2 = 5^2 + 7^2 = 25 + 49 = 74.$

Il quadrato costruito su AC equivale all'area della proprietà indicata con "c".

Infine, l'ipotenusa CB del triangolo FCB ha lunghezza che è data da:

$CB^2 = CF^2 + FB^2 = 4^2 + 10^2 = 16 + 100 = 116.$

Il quadrato costruito su CB ha la stessa area della proprietà "b".

Il triangolo ABC rappresenta il laghetto interposto fra le tre proprietà. La sua area è data da:

$A_{ABC} = A_{ABD} – A_{AEC} – A_{FCB} – A_{DECF} = (9 * 17)/2 – (5 * 7)/2 – (4 * 10)/2 – 4 * 7 =$
$= 76,5 – 17,5 – 20 – 28 = 11$ acri.

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - APPROFONDIMENTO - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

Il triangolo ABC ha lati lunghi:

* AB = a = $\sqrt{370}$;
* BC = b = $\sqrt{116}$;
* AC = c = $\sqrt{116}$.

La formula di Erone permette di calcolare l'area A di un triangolo qualsiasi conoscendo le lunghezze dei tre lati.

Occorre determinare il perimetro *2 * p*:

$2 * p = a + b + c.$

Il semiperimetro *p* è:

$p = (a + b + c)/2.$

La formula di Erone è:

$A = \sqrt{[p * (p - a) * (p - b) * (p - c)]}.$

Nel caso del triangolo ABC il perimetro è lungo:

$2 * p = (\sqrt{370} + \sqrt{116} + \sqrt{74})$ e il semiperimetro *p* è:

$p = (\sqrt{370} + \sqrt{116} + \sqrt{74})/2.$

La presenza di tre radici quadrate di numeri che non sono quadrati perfetti crea grosse difficoltà nei calcoli.

La formula di Erone può essere trasformata in una forma equivalente che non richiede il calcolo del perimetro e del semiperimetro:

$A = ¼ * \sqrt{[a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2 * (a^4 + b^4 + c^4)]} =$

$= ¼ * \sqrt{[(370 + 116 + 74)^2 - 2 * (370^2 + 116^2 + 74^2)]} =$

$= ¼ * \sqrt{[560^2 - 2 * (136900 + 13456 + 5476)]} = \sqrt{(313600 - 2 * 155832)} =$

$= ¼ * \sqrt{(313600 - 311664)} = ¼ * \sqrt{1936} = ¼ * 44 = 11$ acri.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Dudeney ricava l'area di ABC con un'espressione aritmetica:

$A = ¼ * \sqrt{[(4 * 370 * 116) - (370 + 116 - 74)^2]} = 11$ acri.

L'espressione è traducibile nella formula che segue:

$A = ¼ * \sqrt{(4 * a^2 * b^2) - (a^2 + b^2 - c^2)^2]}.$

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

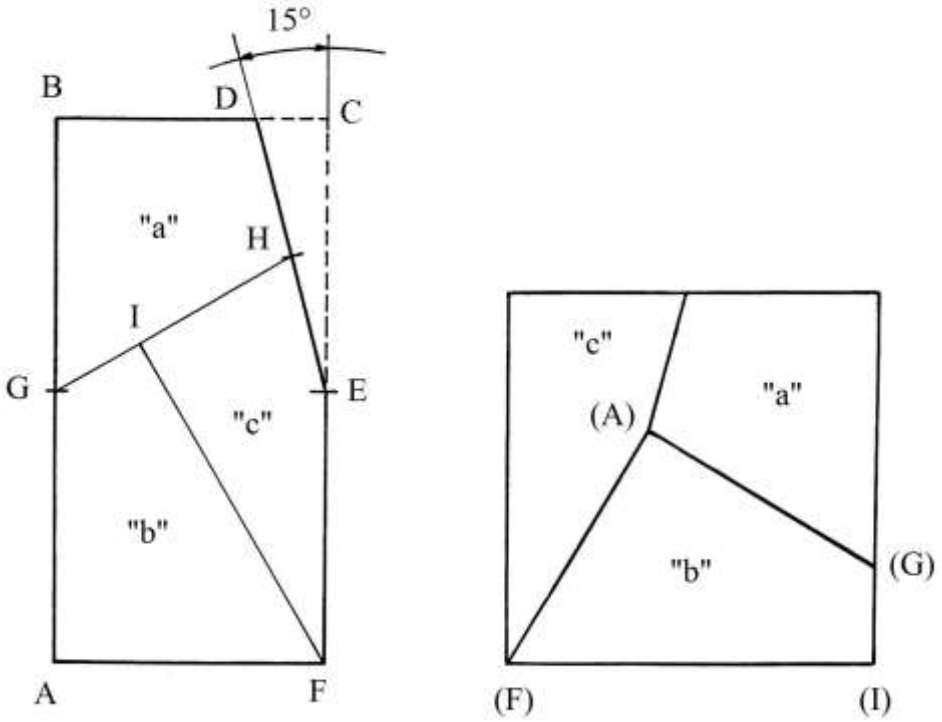
## Una tavola sezionata

Il problema è descritto e risolto nel volume di Samuel Loyd "Passatempi matematici – I".

Una tavola di legno ha forma rettangolare di dimensioni di 2 per 4 piedi: nel sistema di unità di misura britannico il piede vale 12 pollici e equivaleva a 30,48 cm.

Lungo lo spigolo a destra è stato praticato il taglio del un triangolo rettangolo CED con angolo di 15°.

Il problema chiede di trasformare la tavola in un quadrato effettuando il minore numero di tagli.




Determinare i punti medi degli spigoli AB e DE: sono G e H.

Tracciare la corda GH.

Dal vertice F condurre la perpendicolare FI a GH.

Effettuando due tagli, lungo GH e poi lungo FI, la tavola è divisa in tre quadrilateri indicati con “a”, “b” e “c”.

I tre poligoni sono riuniti come mostrato a destra per formare un quadrato che ha lati lunghi quanto FI.

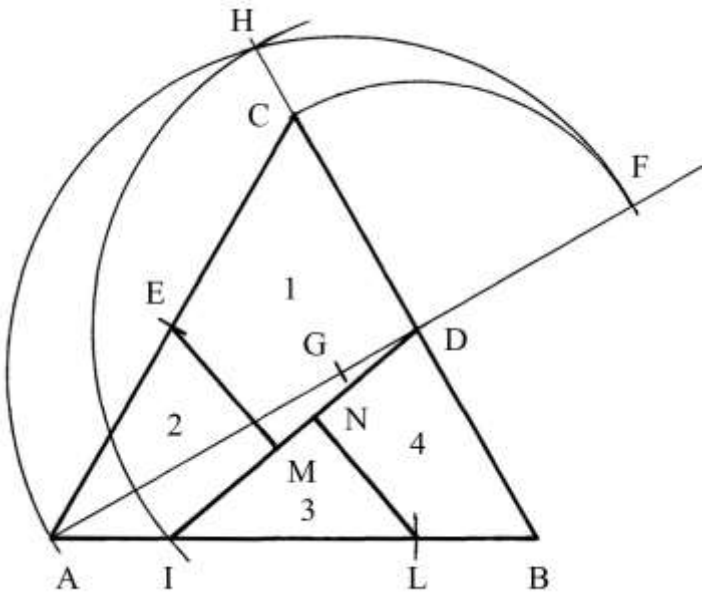
Secondo Loyd la costruzione è applicabile a qualsiasi caso di taglio di un triangolo rettangolo, con angoli diversi da quello di 15° dell’esempio.

## Il problema del merciaio

Il *problema del merciaio* (o del falegname o del sarto, tanto per fare degli esempi di artigiani interessati alla soluzione dello stesso problema) è stato divulgato dal famoso divulgatore matematico americano Martin Gardner. Il problema e la sua soluzione sono dovuti al matematico inglese Henry Ernest Dudeney (1857 – 1930) ne “Gli enigmi di Canterbury”.

Un triangolo equilatero deve essere suddiviso in un certo numero di poligoni da riunire a formare un quadrato perfetto, senza alcuno spreco di materiale.

La soluzione proposta nella figura che segue prevede la divisione in *quattro* parti del triangolo equilatero ABC:




D e E sono i punti medi dei lati BC e AC.

Prolungare verso l'alto il lato BC. Tracciare l'altezza AD e prolungarla verso destra.

Fare centro in D e, con raggio DC, disegnare un arco di circonferenza da C fino a determinare il punto F.

Fissare il punto medio di AF: è G.

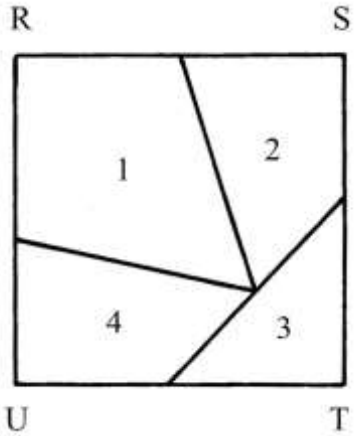
Con centro in G e raggio GA, tracciare una semicirconferenza da A a F: essa taglia il prolungamento del lato BC in un punto, H.

Fare centro in D e, con raggio DH, disegnare un arco che taglia il lato AB in un punto, I.

Riportare la lunghezza di DC a partire da I, fino a fissare il punto L sul lato AB.

Tracciare il segmento ID e dai punti E e L condurre le perpendicolari ad esso: si ottengono i punti M e N.

Il triangolo ABC è così diviso in quattro parti: tre trapezi (1, 2 e 4) e un triangolo rettangolo (3). I quattro poligoni sono disposti come nella figura, in senso orario, e formano il quadrato RSTU:

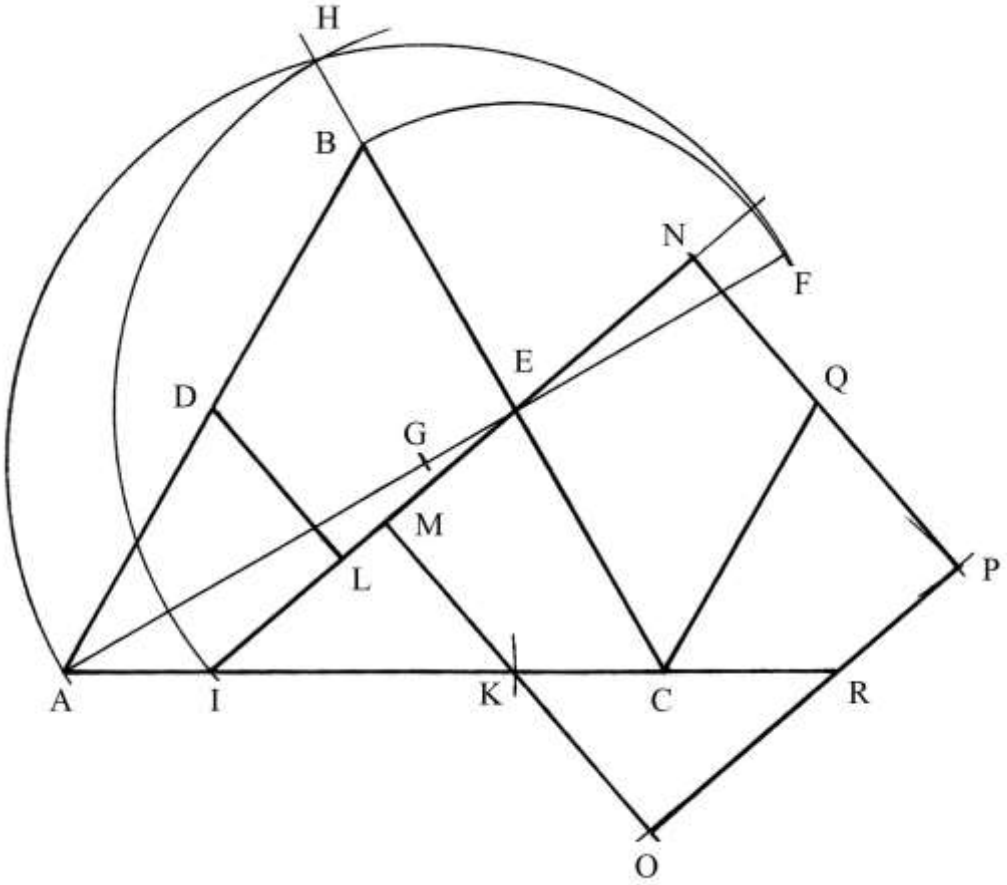


- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - APPROFONDIMENTO - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

Quadrato equivalente a un triangolo equilatero

In questo paragrafo presentiamo la soluzione originale proposta da Dudeney.

ABC è un triangolo equilatero che deve essere trasformato in un quadrato di area uguale.




Fissare i punti medi dei lati AB e BC: sono D e E.

Dal vertice A tracciare la linea passante per E e prolungarla.

Fare centro in E e con raggio EB disegnare un arco che taglia l'ultima linea in F.

Determinare il punto medio di AF: è G. Fare centro in G e con raggio GA = GF tracciare una semicirconferenza da A a F.

Prolungare verso l'alto il lato CB: la linea incontra la semicirconferenza in H.

EH è la lunghezza del lato del quadrato equivalente al triangolo ABC.

Fare centro in E e con raggio EH descrivere un arco da H fino a tagliare in I il lato AC. Condurre una linea passante per I e per E.

Sul lato AC riportare da I la lunghezza di EB: è fissato il punto K.

Dai punti D e K condurre le perpendicolari a EI: sono DL e KM.

A partire da M riportare la lunghezza di EH sul prolungamento di IE: è stabilito N. Sempre da M riportare la lunghezza di EH sulla perpendicolare passante per K: MO è il secondo lato del quadrato equivalente.

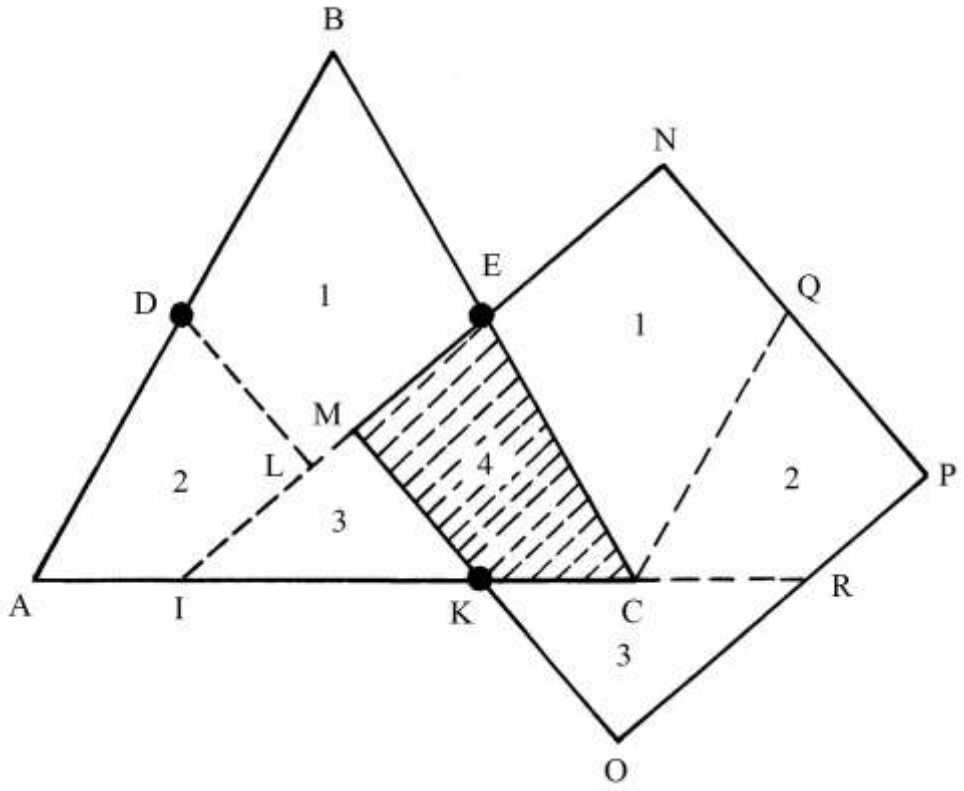
Facendo centro in N e in O con raggio EH è ricavato il quarto vertice del quadrato, P. OP incrocia il prolungamento di AC in R.

MNPO è il quadrato cercato.

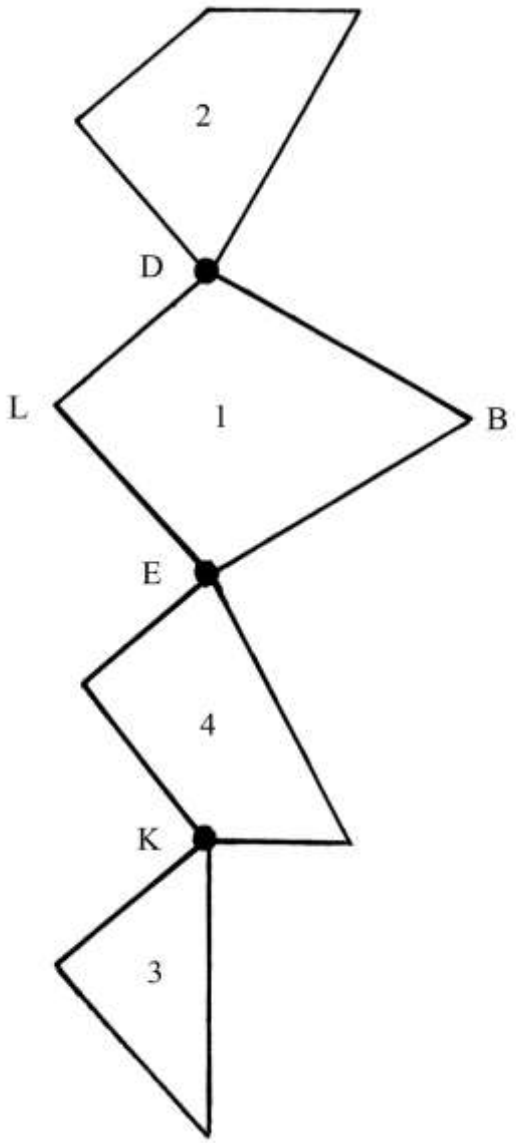
Infine, dal vertice C condurre la parallela a AB: è CQ.

Il triangolo ABC è scomposto in *quattro* poligoni:

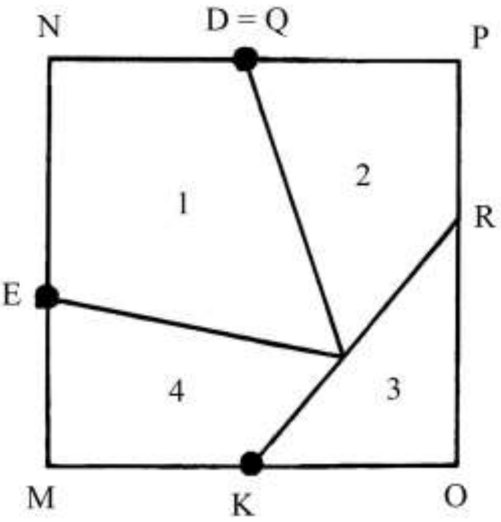
* il quadrilatero DBEL, contrassegnato con “1”;
* il quadrilatero ADLI, “2”;
* il triangolo rettangolo IMK: “3”;
* il quadrilatero KMES, “4”, che è comune al triangolo ABC e al quadrato MNPO.




Dudeney aveva fatto preparare dei modelli di legno del triangolo ABC già sezionato nei quattro poligoni: tre cerniere applicate nei vertici D, E e K permettevano una rapida trasformazione dal triangolo equilatero al quadrato equivalente e viceversa:



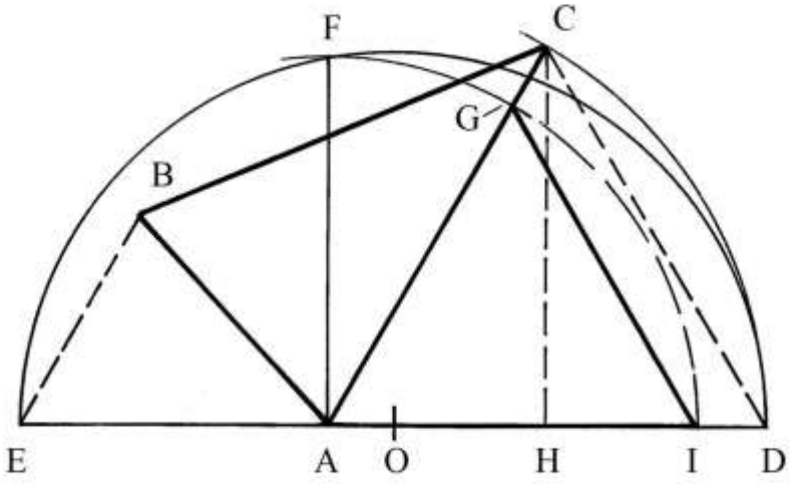

Le tre cerniere sono rappresentate da cerchietti anneriti.
Il quadrato risultante è presentato nello schema che segue:




- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

Triangolo equilatero equivalente a un triangolo qualsiasi

Il triangolo ABC è *scaleno* e deve essere costruito un triangolo equilatero che possieda la stessa superficie:




Sul lato AC, costruire il triangolo equilatero ACD e prolungare il lato AD verso sinistra.

Determinare il punto medio del lato AD, H, e tracciare l'altezza CH.

Dal punto B, disegnare un segmento parallelo al lato AC, fino a intersecare il punto E.

Fissare il punto medio del segmento ED, O. Fare centro in O e, con raggio OE, tracciare una semicirconferenza da E a D.

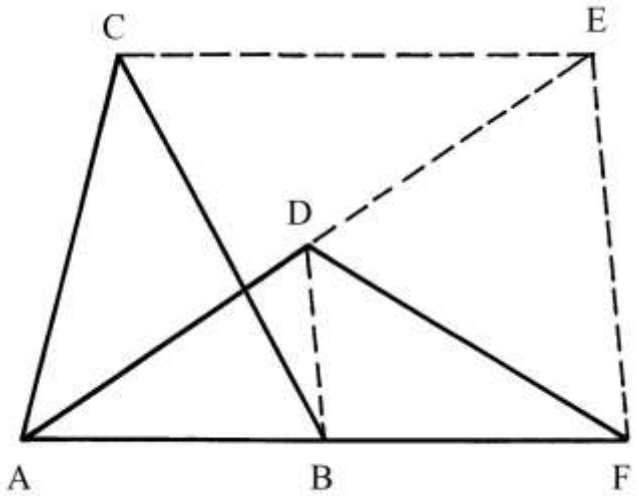
Dal punto A, disegnare un segmento parallelo all'altezza CH, fino a incontrare la semicirconferenza in un punto, F.

Il segmento AF è la lunghezza del lato del triangolo equilatero AGI che ha stessa superficie del triangolo scaleno ABC.

Il metodo può essere impiegato per trasformare in un triangolo equilatero qualsiasi triangolo scaleno o isoscele.

Triangolo equivalente a un altro

ABC è un triangolo. Il punto D è ad esso esterno ed è un vertice di un altro triangolo della stessa superficie:




Il secondo triangolo ha un lato orizzontale, come lo è AB, che in parte coincide con AB.

Tracciare una linea parallela a AB e passante per C.

Prolungare verso l'alto AD fino a intersecare la linea passante per C in un nuovo punto, E. Disegnare il segmento BD. Tracciare da E un segmento, parallelo a DB, fino a incontrare il prolungamento di AB in un punto, F.

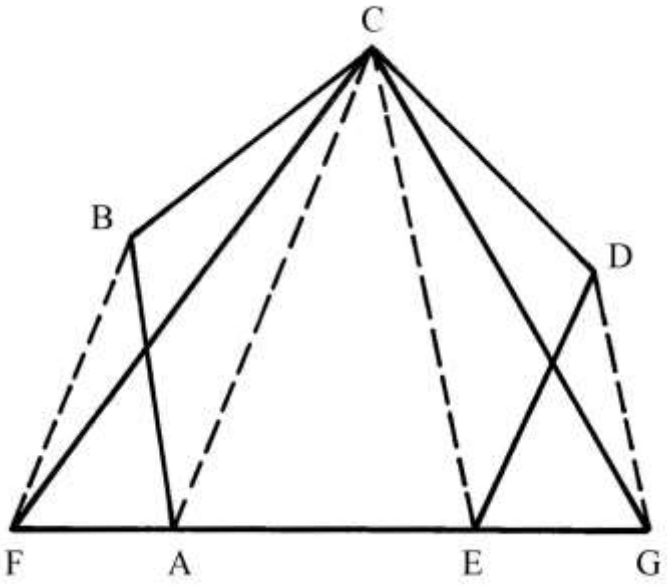
Il triangolo ADF ha la stessa superficie di ABC.

Triangolo equivalente a un poligono irregolare qualsiasi

ABCDE è un pentagono *irregolare* e deve essere trasformato in un triangolo che abbia la stessa superficie: inoltre essi devono avere un vertice in comune (C) e i lati orizzontali parzialmente coincidenti.

Prolungare verso destra e verso sinistra il lato AE.

Fissare il vertice C come punto comune fra il pentagono irregolare e il triangolo equivalente; tracciare le *diagonali* AC e CE:

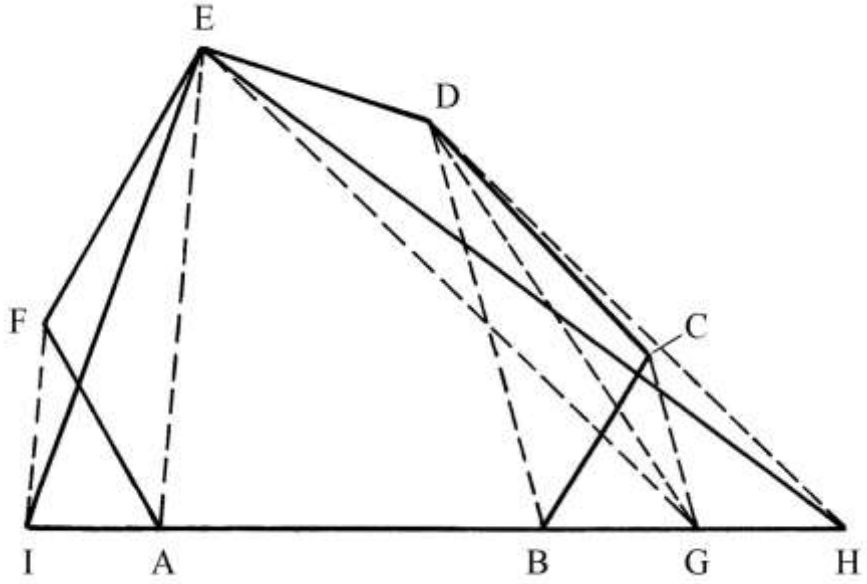



Dal punto B disegnare una parallela alla diagonale AC: essa determina il punto F. Dal punto D, tracciare una parallela alla diagonale CE, fino a stabilire un altro punto, G.

Il triangolo scaleno FCG ha la stessa superficie del pentagono irregolare ABCDE.

Triangolo equivalente a un poligono

ABCDEF è un generico poligono, un esagono non regolare: deve essere costruito un triangolo che abbia la sua stessa superficie.




Prolungare il lato AB verso destra e verso sinistra.

Tracciare la diagonale BD e, parallelamente ad essa, il segmento che dal vertice C va a determinare il punto G.

Disegnare i segmenti DG e EG.

I triangoli DBG e DBC hanno uguale superficie: essi hanno in comune la base DB.

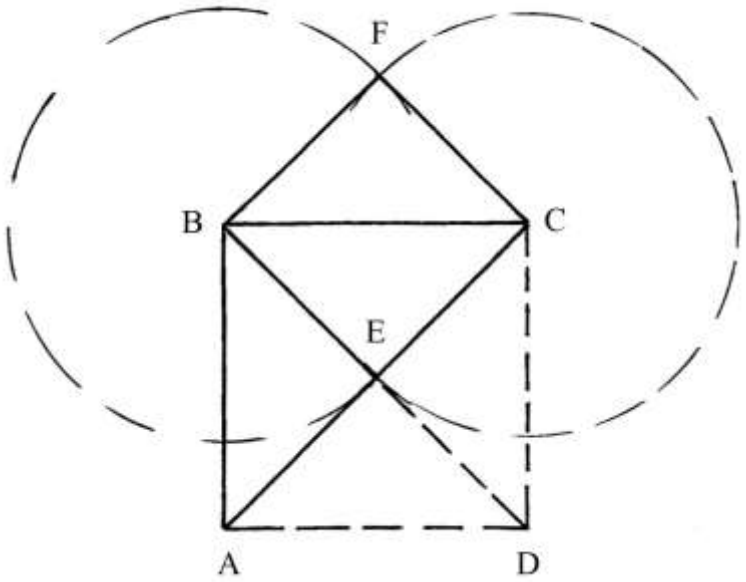
Dal punto D tracciare un segmento parallelo a EG, fino a intercettare la linea orizzontale in un punto, H.

Disegnare la diagonale AE e, parallelamente ad essa, tracciare un segmento dal vertice F fino a determinare il punto I.

IEH è un triangolo che possiede la stessa superficie dell'esagono ABCDEF.

## Quadrato equivalente a un triangolo rettangolo isoscele

ABC è un triangolo rettangolo isoscele, originato dalla divisione del quadrato ABCD lungo la diagonale AC.




Deve essere costruito un quadrato di area uguale a quella di ABC.

Fare centro in B e in C e con raggio BE = CE tracciare due archi che si intersecano nei punti E e F.

EBFC è il quadrato equivalente al triangolo rettangolo isoscele ABC.

L'area di ABC è:

$A_{ABC} = AB * BC/2 = AB^2/2$.

Il quadrato EBFC ha area data da:

$A_{EBFC} = BE^2$.

BE è lungo:

$BE = BD/2$.

A sua volta, la lunghezza di BD è data da:

$BD^2 = AB^2 + BC^2 = 2 * AB^2$ e

$BD = \sqrt{2} * AB$.

Quindi, BE è lungo:

$BE = (\sqrt{2} * AB)/2 = AB * (\sqrt{2})/2$.

L'area di EBFC diviene:

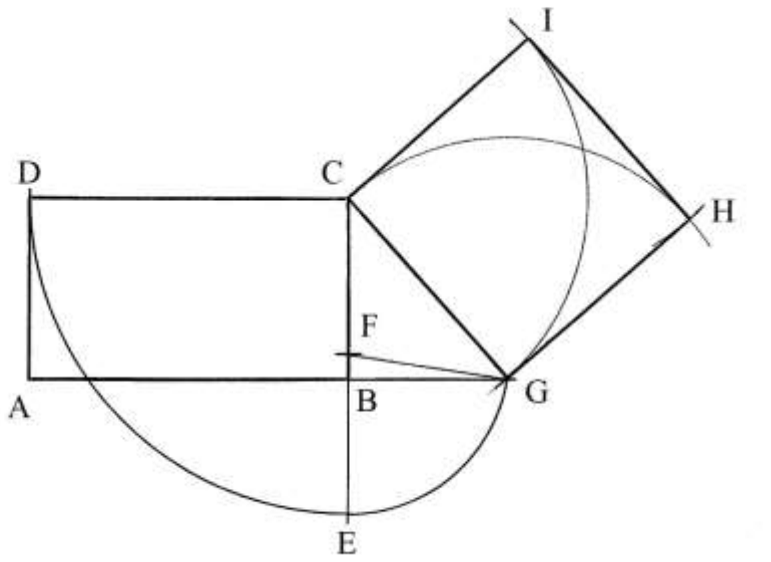
$A\ EBFC = [AB * (\sqrt{2})/2]^2 = AB^2/2$.

Le aree di ABC e di EBFC sono *uguali*.

Quadrato equivalente a un rettangolo

Il rettangolo ABCD deve essere trasformato in un quadrato di uguale superficie.

Prolungare i lati AB (verso destra) e CB (verso il basso).




Fare centro in C e con raggio CD disegnare un arco da D fino a determinare il punto E.

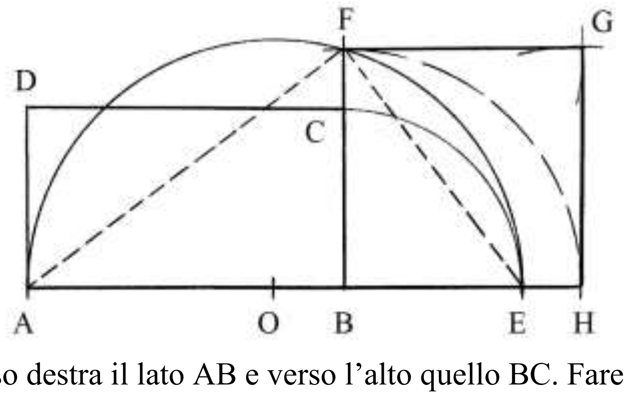
Stabilire il punto medio del segmento CE: è F.

Con centro in F e raggio FE = FG = FC tracciare un arco da E fino a intersecare il prolungamento di AB in un nuovo punto, G.

Il segmento CG è il lato del quadrato CGHI che ha stessa superficie del rettangolo ABCD.

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - APPROFONDIMENTO - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

L'applicazione del 2° teorema di Euclide porta a un identico risultato:




Prolungare verso destra il lato AB e verso l'alto quello BC. Fare centro in B e con raggio BC tracciare un arco da C fino a tagliare in E il prolungamento di AB.

Determinare il punto medio di AH: è O. Fare centro in O con raggio OA = OE e disegnare una semicirconferenza da A a E: essa incontra il prolungamento di BC nel punto F.

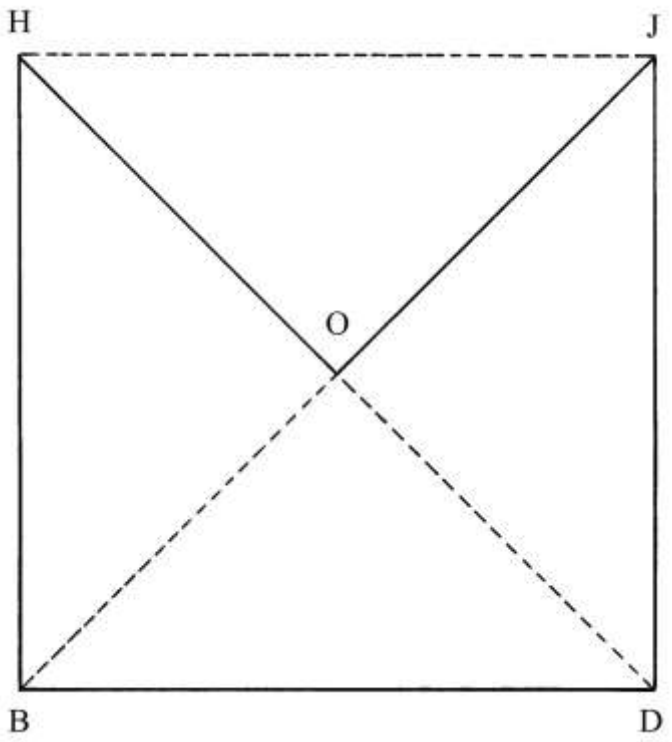
BF è il segmento la cui lunghezza è media proporzionale fra quelle di AB e di BE=BC. Esso è il primo lato del quadrato BFGH di area uguale a quella del rettangolo ABCD.

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

Conversione di un quadrato tagliato

Il problema qui presentato è rielaborato da un enigma di scomposizione, il numero 37, descritto nel testo di Dudeney, “Il mistero del pontile”.

BHJD è un quadrato dal quale è stato asportato il triangolo rettangolo isoscele HOJ:




Il poligono rimanente. BHOJD, è formato da *tre* identici triangoli rettangoli isosceli.

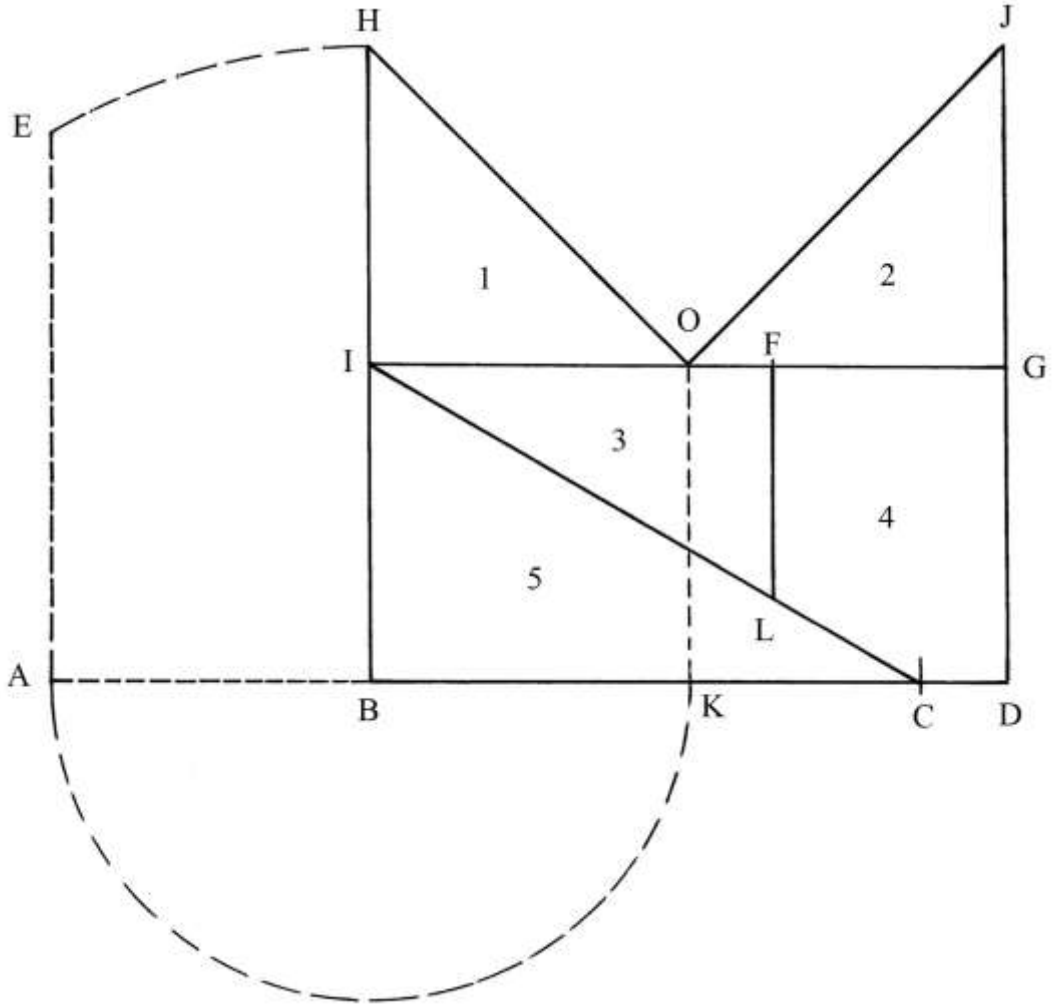
Il problema posto e risolto da Dudeney consiste nella conversione del poligono in un quadrato effettuando un numero minimo di tagli.

Il quadrato originario BHJD ha lati lunghi BD.

L’area di BHOJD è data da:

$A_{BHOOJD} = ¾ * BD^2$ e cioè essa è uguale a ¾ dell’area del quadrato originario BHJD.

Il metodo utilizzato da Dudeney è presentato nello schema che segue: in esso sono state usate lettere da lui apposte ai vertici (A, B, C, D, E, F, G e H) e altre sono qui aggiunte (I, J, K, L e O).




IG è la mediana che collega i punti medi dei lati BH e DJ.

Fissare il punto medio di BC: è K.

Prolungare verso sinistra il lato BD. Fare centro in B e con raggio BK tracciare una semicirconferenza da K fino a fissare A.

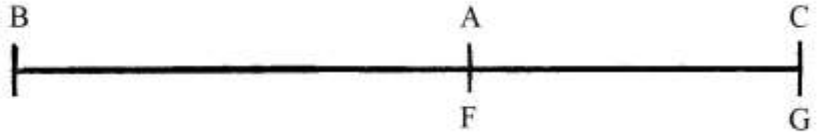
Dal punto A elevare la perpendicolare a AD (e parallela a BH).

Fare centro in B e con raggio BH disegnare un arco che incontra nel punto E la perpendicolare innalzata da A.

Con il compasso misurare AE e riportare questa lunghezza sul lato BD, a partire da B in C.

Collegare I con C.

Determinare la differenza fra le lunghezze di BC e di BA (= BK = KD):



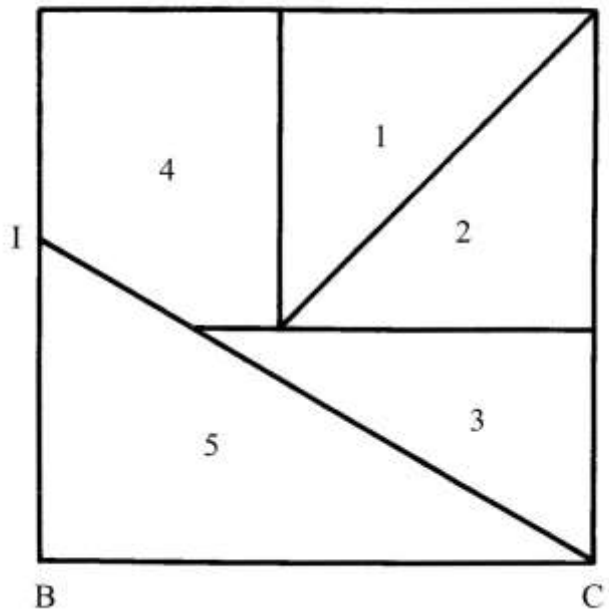

BC – BA = FG.

La lunghezza di FG deve essere riporta da G in F sulla mediana GI.

Infine, dal punto F deve essere abbassata la parallela a JD: è FL.

Il poligono originario è scomposto in *cinque* poligoni: quattro triangoli rettangoli (indicati con “1”, “2”, “3” e “5”) e un pentagono non regolare (“4”).

Con opportune rotazioni e traslazioni, i cinque poligoni sono assemblati per formare un quadrato che ha lati lunghi quanto BC:




- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - APPROFONDIMENTO - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

Come visto sopra, l'area del poligono BHOJD è data da:

$\frac{3}{4} * BD^2$.

L'area del quadrato equivalente deve essere uguale:

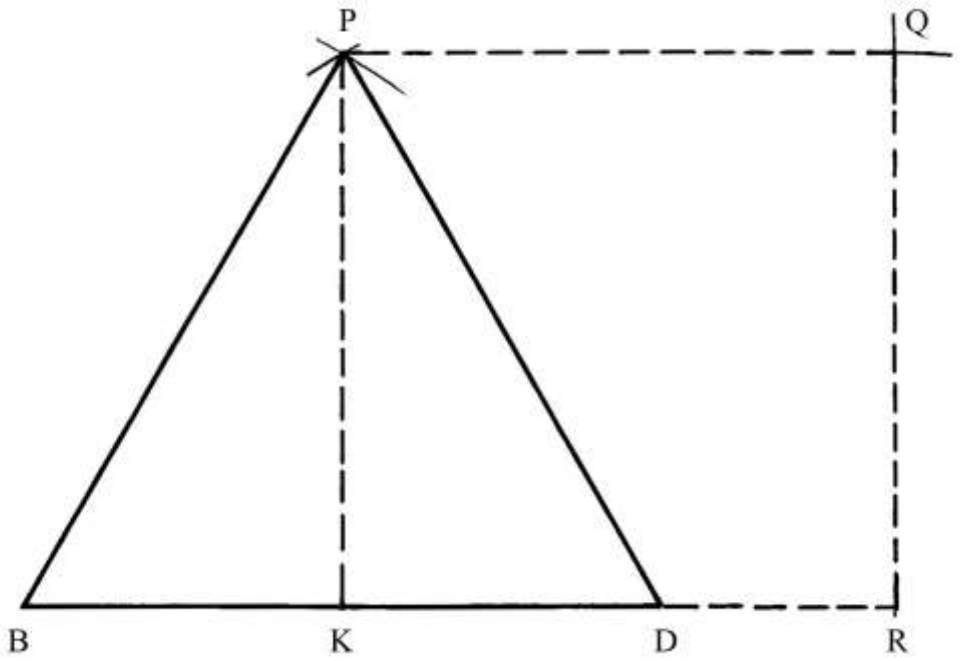
$BC^2 = \frac{3}{4} * BD^2$.

Il lato BC è lungo:

$BC = \sqrt{(3/4 * BD^2)} = BD * (\sqrt{3})/2$.

Ma sia $\sqrt{3}$ sia $(\sqrt{3})/2$ sono numeri irrazionali e non sono ricavabili per via aritmetica.

La lunghezza del lato del quadrato equivalente può essere ottenuto con la costruzione che segue:




BDP è un triangolo equilatero costruito sul lato BD. PK è la sua altezza che, come noto, è lunga:

$$PK = BD * (\sqrt{3})/2.$$

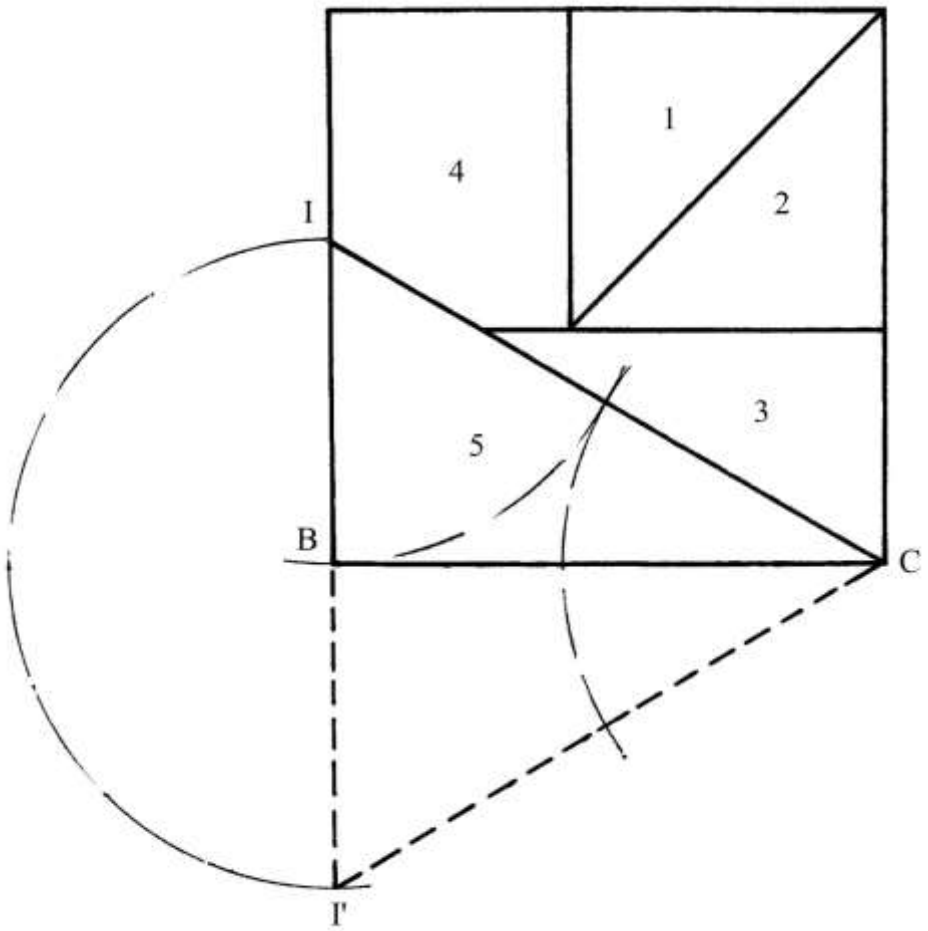
PK è la lunghezza del lato del quadrato KPQR che ha area uguale a:

$$A_{KPQR} = PK^2 = [BD * (\sqrt{3})/2]^2 = ¾ * BD^2.$$

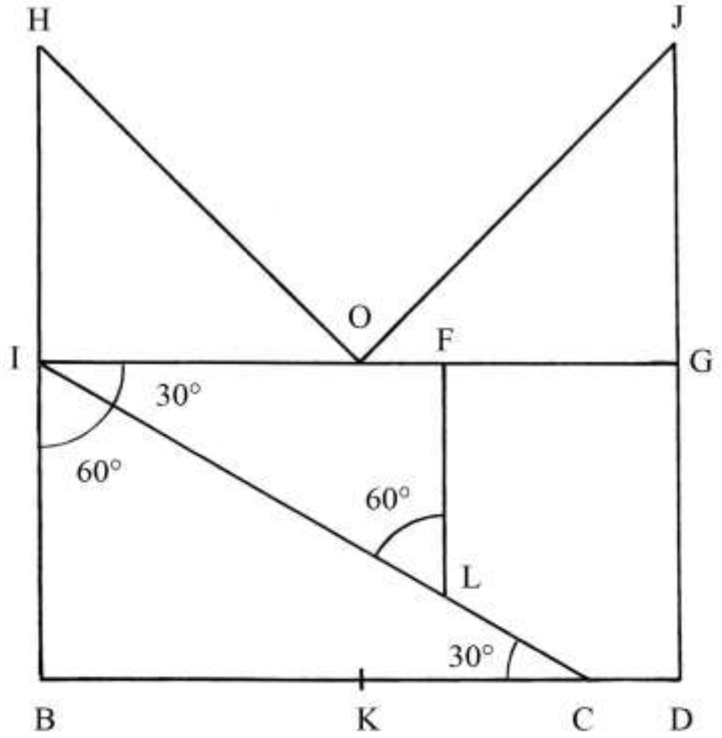
PK è lungo quanto BC.

I triangoli rettangoli BPK e KPD sono perfettamente sovrapponibili al triangolo BIC.

Questo ultimo è la metà del triangolo equilatero ICI': la sua ipotenusa IC è lunga il doppio del cateto IB.




Anche il triangolo rettangolo IFL possiede gli angoli caratteristici di un semi triangolo equilatero:




La spiegazione è ovvia: l'origine delle proprietà geometriche di IBC e di IFL è dovuta al rapporto di ¾ fra l'area del poligono BHOJD e quella del quadrato originario BHJD.

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

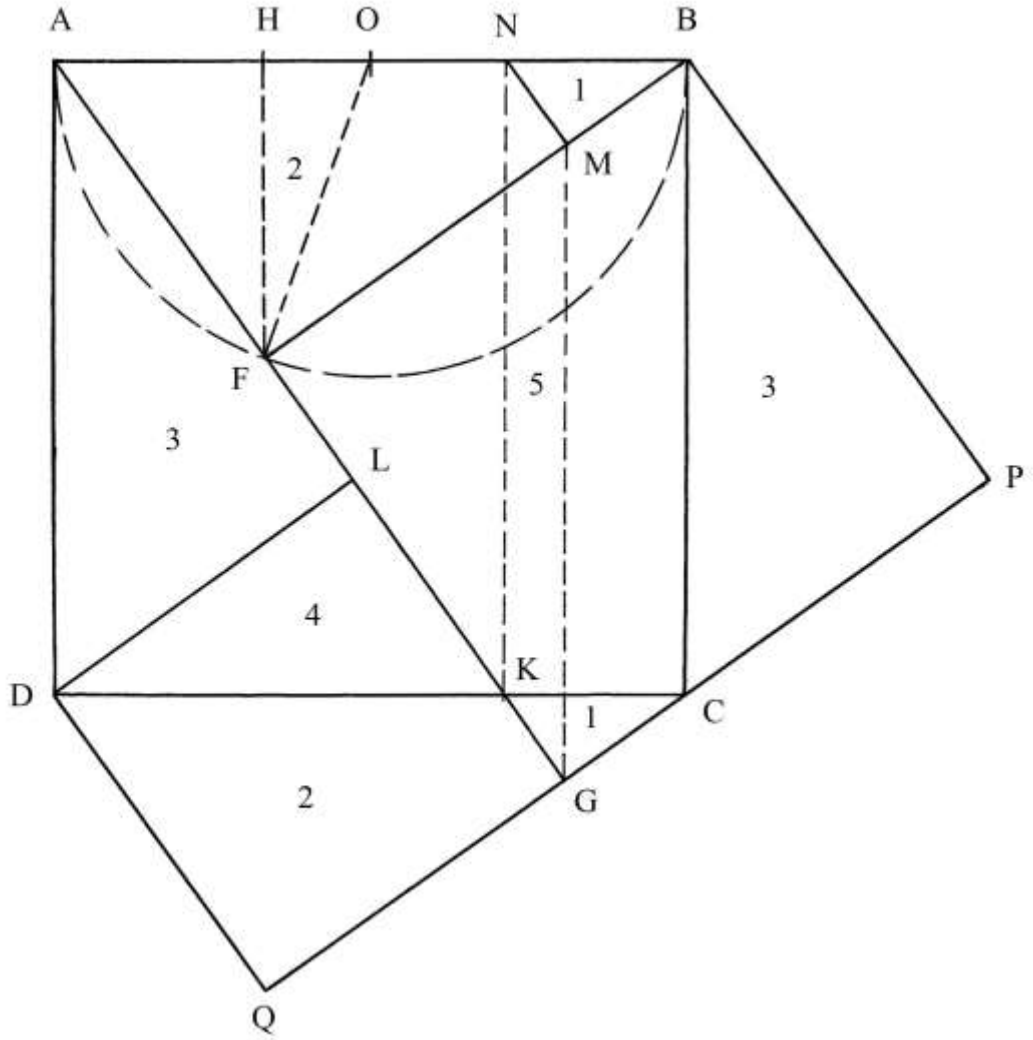
Quadrato scomposto in due quadrati

La costruzione di seguito descritta è dovuta al matematico Maurice Kraitchik (1882 – 1957) ed è contenuta nel suo libro citato in bibliografia.

ABCD è un quadrato che deve essere scomposto in *due* quadrati le cui aree sommate sono uguali a quella di ABCD.

Determinare il punto medio del lato AB: è O. Fare centro in O e con raggio OA = OB tracciare una semicirconferenza da A a B.

Fissare il punto H a distanza AH = 1/3 * AB.




Dal punto H abbassare la perpendicolare a AB fino a incontrare la semicirconferenza in F.

Collegare F con A e con B: AFB è un triangolo rettangolo inscritto nel semicerchio.

Per A e per F disegnare una linea retta che taglia in K il lato DC.

Dal punto D condurre la perpendicolare a AK: è DL.

Per il punto C tracciare una seconda perpendicolare a AK: è CG, che va prolungata oltre C e oltre G.

Dai vertici B e D disegnare le perpendicolari alla retta passante per C e G: sono BP e DQ. Costruire il quadrato GQDL con lati lunghi QC = DL.

Il lato LG interseca in K il segmento DC.

Per i punti G e K tracciare due parallele al lato BC: esse fissano i punti M e N. Collegare M con N.

Il quadrato ABCD è scomposto in due quadrati: FBPG e DLGQ.

La somma delle loro aree è uguale a quella di ABCD:

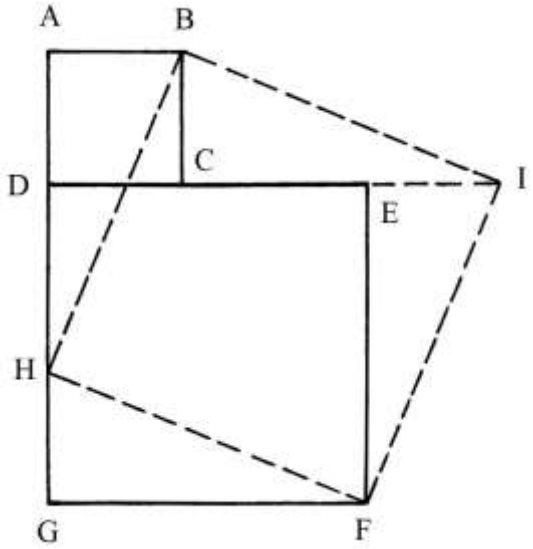
$$A_{ABCD} = A_{FBPG} + A_{DLGQ}.$$

Le cifre indicano i poligoni con uguali dimensioni.

## Unione di due quadrati

Due quadrati devono essere uniti per formare un quadrato più grande con area uguale alla loro somma.

ABCD e DEFG sono i due quadrati che devono essere uniti.




Prolungare verso destra il lato DE.

Dal vertice G riportare la lunghezza di AB: è GH.

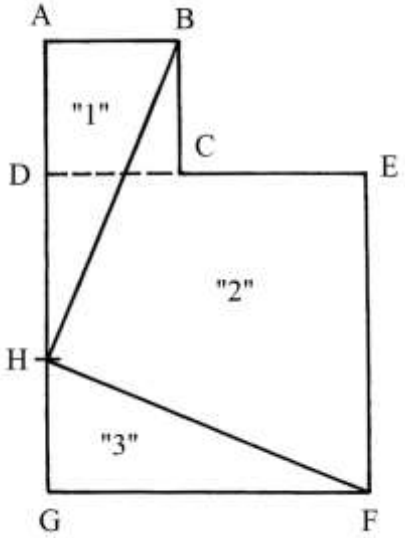
Collegare B con H: BH è il lato del quadrato che riunisce i primi due.

Il quadrato finale è BIFH.

La costruzione è basata sul teorema cosiddetto di Pitagora. ABH, BCI, HGF e EIF sono quattro triangoli rettangoli di identiche dimensioni: i loro cateti corti (rispettivamente AB, BC, HG e EI) sono lunghi quanto i lati del quadrato ABCD. I cateti lunghi (AH, CI, GF e EF) sono lunghi quanto i lati del quadrato DEFG.

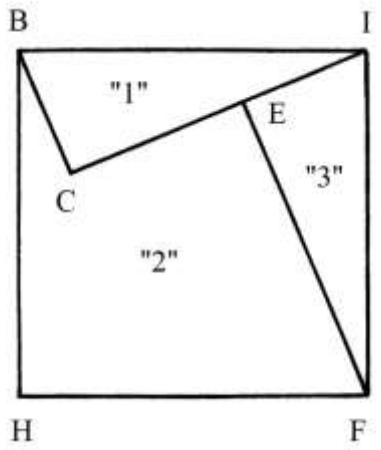
Le quattro ipotenuse (BH, BI, HF e FI) sono quattro lati del quadrato BIFH.

I due quadrati iniziali sono uniti come in figura:

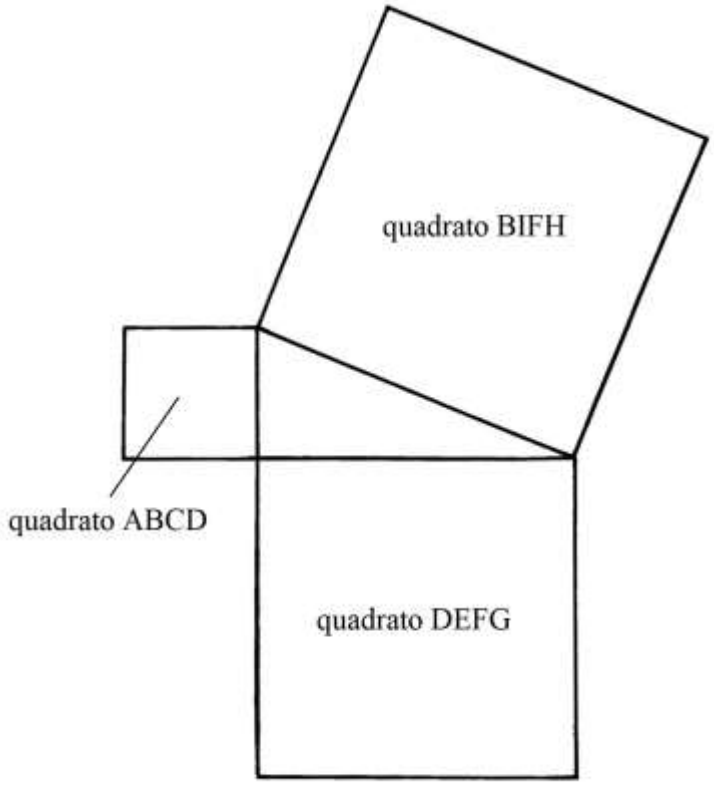



Con due tagli lungo BH e HF il poligono ABCEFGD è diviso in due triangoli rettangoli (ABH e HGF) e in un pentagono non regolare (BCEFH). Essi sono contrassegnati nell'ordine con le cifre "1", "3" e "2".

I due triangoli rettangoli e il pentagono non regolare sono uniti per formare il quadrato BIFH:



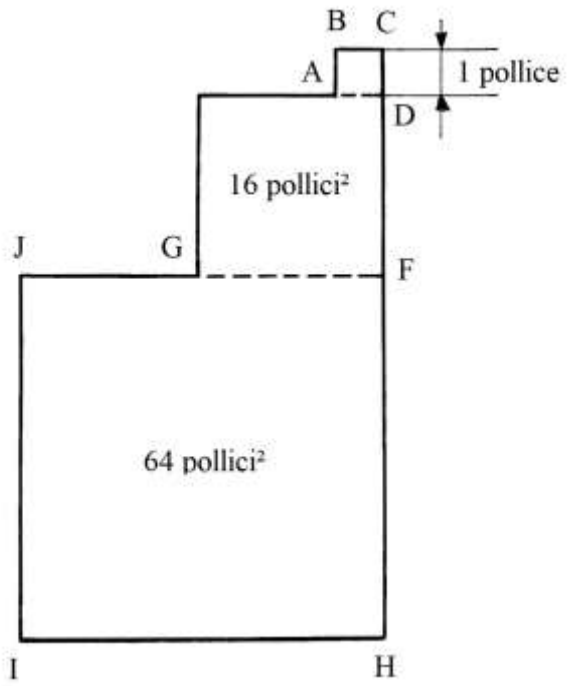

La costruzione “classica” del teorema di Pitagora con i cateti lunghi quanto i lati dei due quadrati iniziali è presentata nella figura che segue:




Una tavola formata da tre quadrati

Il problema è a p. 84 del volume di Samuel Loyd (americano, 1841-1911) “Passatempi matematici – II”, citato in bibliografia.

Una tavola di legno è formata da tre quadrati di differenti misure, allineati lungo lo spigolo destro.




Le dimensioni sono espresse in pollici e in pollici$^2$: un pollice vale 2,54 cm e un pollice$^2$ equivale a 6,45 cm$^2$.

Il problema chiede di sezionare la tavola con il minor numero di tagli, per poi formare un unico quadrato.

Le dimensioni dei tre quadrati sono:

* ABCD ha lati lunghi 1 pollice e quindi area di 1 pollice$^2$;
* GEDF ha area di 16 pollici$^2$ e lati lunghi 4 pollici;
* IJFH ha area di 64 pollici$^2$ e lati lunghi 8 pollici.

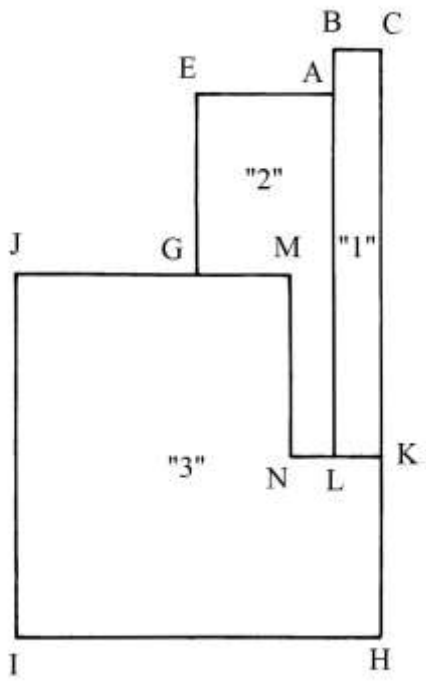
L'area totale della tavola è:

$$A_{TAVOLA} = 1 + 16 + 64 = 81 \text{ pollici}^2.$$

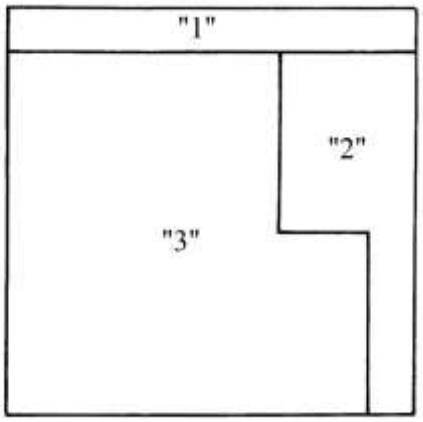
Il numero 81 è un quadrato perfetto: $9^2 = 81$. Ad esso corrisponde la possibilità di creare un quadrato con lati lunghi 9 pollici.

È necessario effettuare *tre* tagli:

* il rettangolo BCKL è largo 1 pollice e lungo 9 pollici è ottenuto tagliando lungo BL;
* il secondo taglio è GM, lungo 2 pollici;
* il terzo taglio è MN che è lungo 4 pollici.



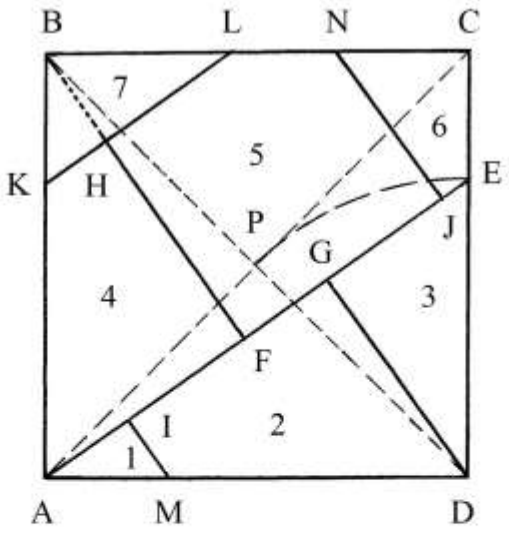

La tavola risulta divisa in tre poligoni, contrassegnati con “1”, “2” e “3”.
Essi sono riassemblati per formare un quadrato con lati lunghi 9 pollici e area di 81 pollici$^2$:

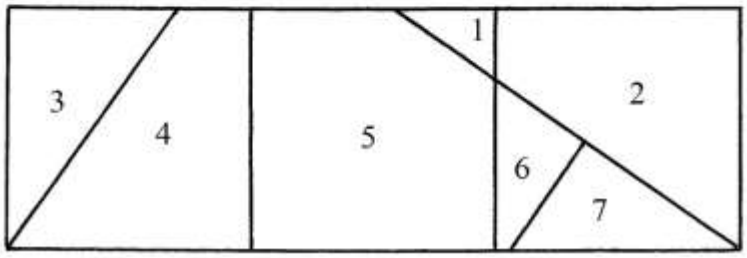



<u>Quadrato scomposto in tre quadrati uguali</u>

Anche questa costruzione si deve a Maurice Kraitchik.

ABCD è un quadrato che deve essere scomposto in *tre* quadrati di uguali dimensioni uniti per formare un rettangolo.




Tracciare le sue diagonali AC e BD: esse si incontrano nel centro P.
Fare centro in D e con raggio DP disegnare un arco da P fino a tagliare CD in E.
Collegare A con E.
Dai vertici B e D condurre le perpendicolari a AE: sono BF e DG.
Con il compasso misurare la lunghezza di DG e riportarla a partire:

* da F su FB: è FH;
* da G su EA: è GI;
* da F su AE: è FJ.

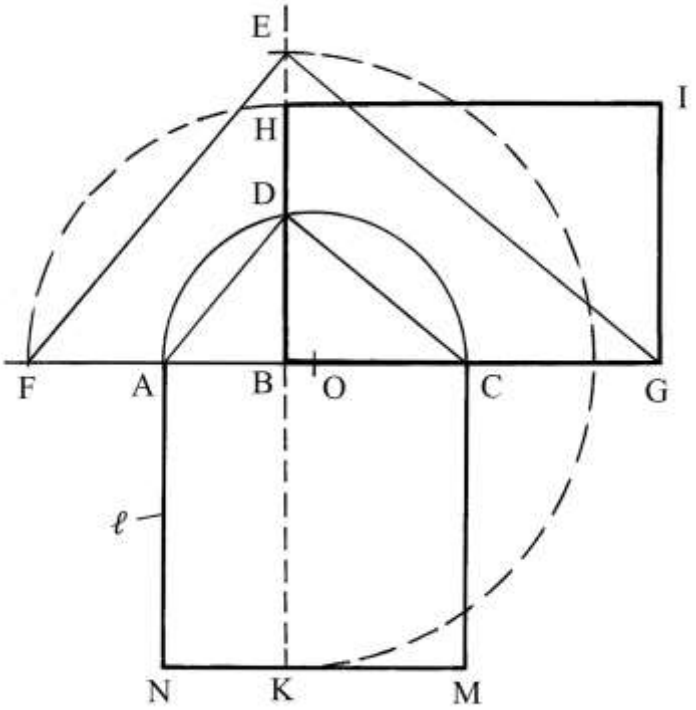
Condurre le seguenti perpendicolari:

* per H a BF: è KL;
* da I a AJ: è IM;
* da J a EA: è JN.

I *sette* poligoni nei quali è scomposto ABCD sono uniti a formare il rettangolo composto da tre quadrati con lati lunghi FH = FJ = AF = GI = GD.

## Rettangolo con lati in un rapporto dato

Deve essere costruito un rettangolo che abbia i lati in un dato rapporto – ad esempio 2:3 – e area uguale a quella del quadrato ACMN di lato $\ell$.




Tracciare una retta orizzontale e fissarvi tre punti A, B e C, tali che i segmenti AB e BC siano nel rapporto:

AB : BC = 2 : 3.

Dal punto B elevare la perpendicolare a AC: essa taglia in K il lato NM.

Determinare il punto medio di AC, O; fare centro in O con raggio OA e disegnare una semicirconferenza da A a C: essa incontra in D la perpendicolare al lato AC.

La lunghezza del segmento BD è *media proporzionale* fra quelle dei segmenti AB e BC:

AB : BD = BD : BC da cui

$BD^2 = AB * BC$ e $BD = \sqrt{(AB * BC)}$.

Fare centro in B e con raggio BK = $\ell$ e tracciare una semicirconferenza da K fino a tagliare in E la perpendicolare passante per K, B e D: perpendicolare passante per B e per D: è fissato il punto E.

Dal punto E disegnare due segmenti paralleli ai cateti AD e AC, fino a intersecare la retta orizzontale in due punti, F e G.

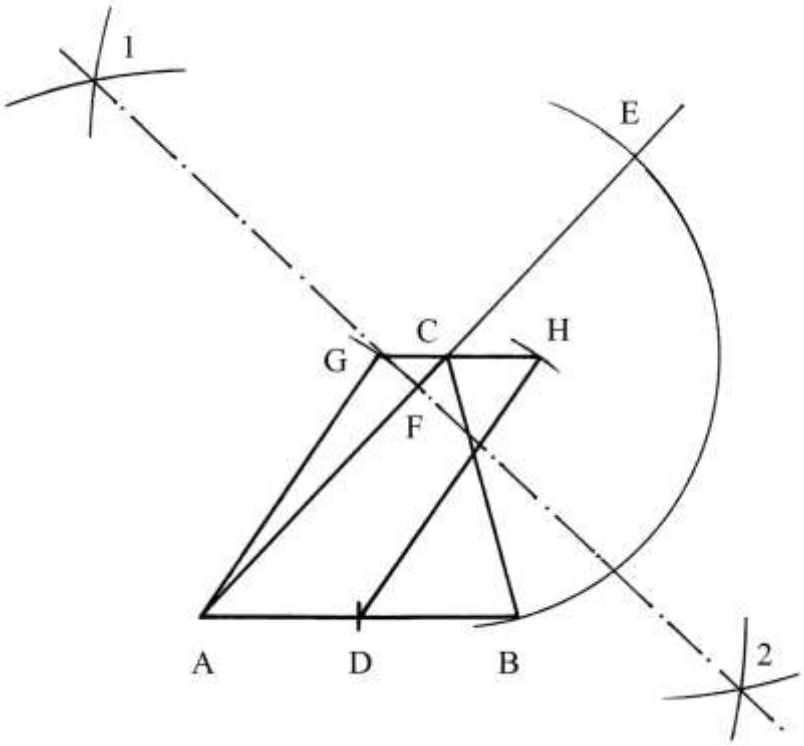
I segmenti BF e BG sono i lati del rettangolo con lunghezze nel rapporto di 2:3.

Fare centro in B e, con raggio BF, tracciare un arco da F fino a tagliare la perpendicolare nel punto H.

Il rettangolo BHIG è la figura cercata.

<u>Parallelogramma con area e perimetro uguali a quelli di un triangolo qualsiasi</u>

Il triangolo scaleno ABC deve essere trasformato in un parallelogramma avente la *stessa superficie* e *uguale perimetro*.




Determinare il punto medio di AB: è D.

Per il punto D, tracciare una linea parallela al lato AB.

Prolungare verso l'alto il lato AC.

Con centro in C, e raggio CB, disegnare un arco da B fino a fissare il punto E.

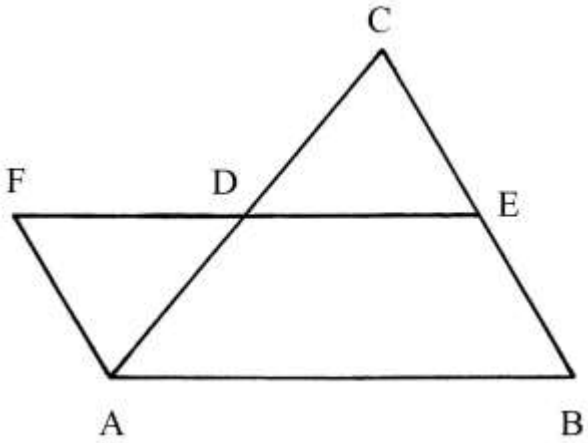
Costruire l'asse del segmento AE, passante per i punti 1 e 2. Il segmento 1-2 taglia AE nel punto medio F.

Il segmento AF è la lunghezza del lato obliquo del parallelogramma cercato: con raggio AF, fare centro in A e in D per stabilire i punti G e H.

Il parallelogramma AGHD ha stessa superficie e lo stesso perimetro del triangolo ABC.

## Parallelogramma equivalente a un triangolo

ABC è un triangolo qualsiasi, in questo caso *scaleno*. Deve essere costruito un parallelogramma che abbia la stessa superficie di ABC e il lato AB in comune.



Determinare i punti medi dei lati AC e BC: sono, rispettivamente, i punti D e E.

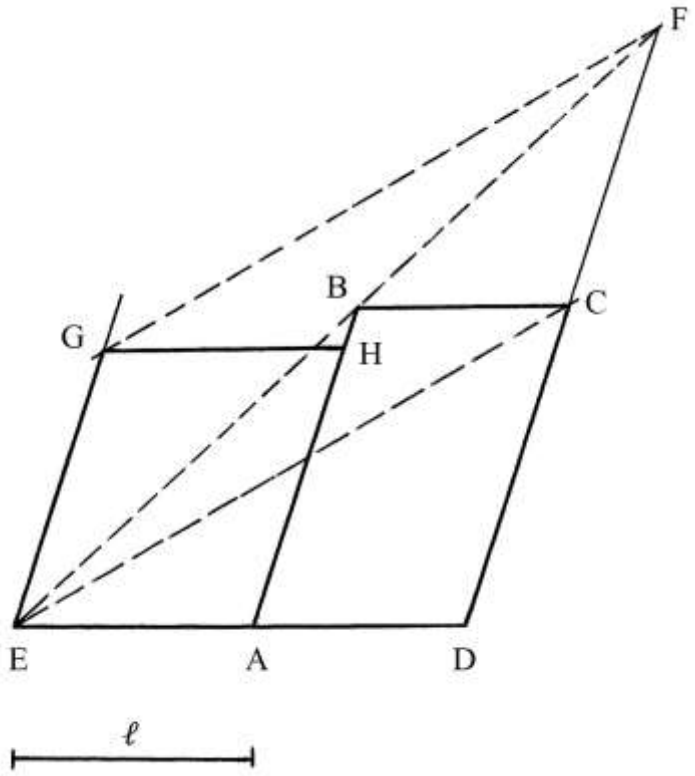
Tracciare, da destra verso sinistra, una linea passante per E e D: essa risulta *parallela al lato AB*.

Dal punto A disegnare una linea parallela al lato BC, fino a determinare il punto F.

Il parallelogramma AFEB ha la stessa superficie del triangolo ABC.

<u>Parallelogramma di uguale superficie</u>

ABCD è un parallelogramma: deve esserne costruito un altro che abbia il lato orizzontale lungo $\ell$.




Prolungare verso sinistra il lato AD e verso l'alto il lato DC.

Dal punto A riportare verso sinistra la lunghezza di $\ell$: si ottiene il segmento AE.

A partire dal punto E, tracciare un segmento passante per il punto B, fino a tagliare in F il prolungamento del lato DC.

Il segmento CF è lungo quanto il lato sconosciuto del parallelogramma da costruire.

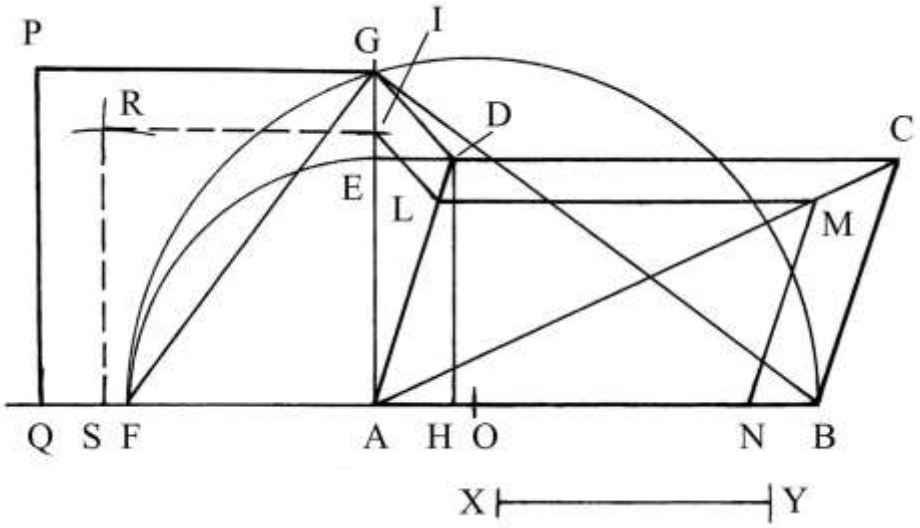
Per il punto E tracciare una parallela ai segmenti AB e DF; da E riportarvi la lunghezza di CF, fino a fissare il punto G.

Per il punto G disegnare un segmento parallelo a ED, fino a intersecare AB nel punto H.

EGHA è il parallelogramma che ha la stessa superficie di quello ABCD.

Parallelogramma simile a un altro

ABCD è un parallelogramma e deve esserne costruito uno simile e di superficie uguale a quella di un quadrato di lato XY:




Prolungare il lato AB verso sinistra.

Dal punto A elevare la perpendicolare a AB e abbassare dal punto D l'altezza DH (relativa allo stesso lato AB).

Prolungare il lato DC verso sinistra e fissare il punto E. Fare centro in A e con raggio AE tracciare un arco da E fino a determinare il punto F.

Occorre trovare il *medio proporzionale* fra AF e AB, rispettivamente *altezza* e *lato maggiore* del parallelogramma ABCD.

Il punto O è medio fra F e B. Con centro in O, e raggio OF, disegnare una semicirconferenza da F a B che taglia la perpendicolare passante per A in un nuovo punto, G.

Tracciare le corde FG e GB: esse sono i *cateti* del triangolo rettangolo (in G) di cui FB è l'*ipotenusa*.

Applicando i due teoremi di Euclide, risulta:

FG : AG = AG : GB e

FA : AG = AG : AB

Il segmento AG è lungo quanto il lato del quadrato AGPQ che ha superficie uguale a quella del parallelogramma ABCD.

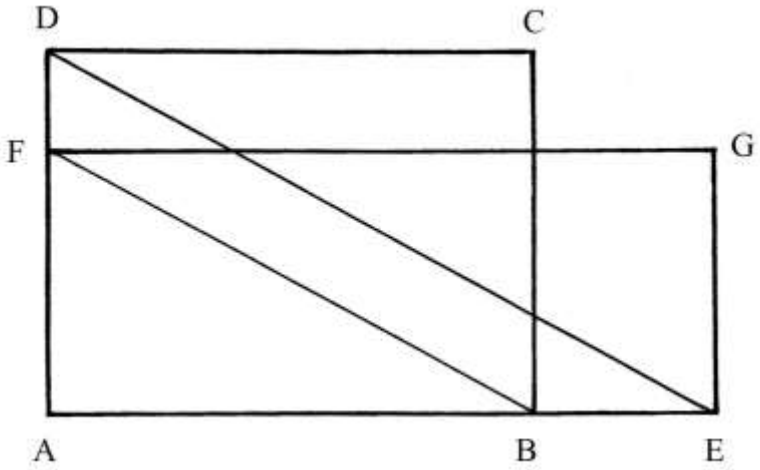
Collegare i punti G e D. Sulla perpendicolare a AB, a partire dal punto A riportare la lunghezza del lato XY: viene determinato il punto I. AIRS è un quadrato con lati lunghi quanto XY.

Dal punto I disegnare una parallela a GD, fino a fissare il punto L sul lato AD.

Il segmento AL è un lato inclinato del parallelogramma di area uguale a $(XY)^2$. Dopo aver disegnati i lati mancanti (paralleli o sovrapposti a quelli di ABCD) si ottiene il parallelogramma cercato, ALMN.

Rettangolo con la stessa superficie di un altro

ABCD è un rettangolo. Deve essere costruito un secondo rettangolo che abbia la stessa superficie e lato orizzontale AE.

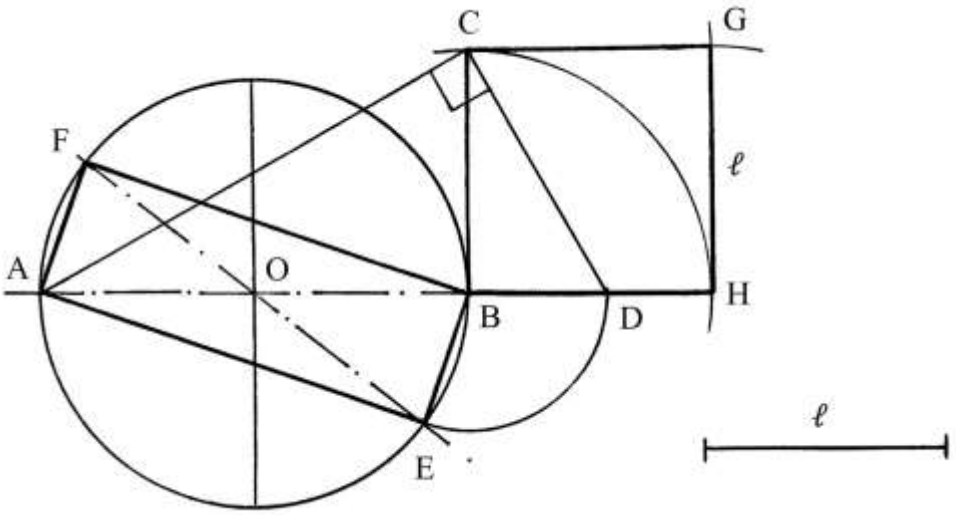



Disegnare il segmento DE e, parallelamente ad esso, un segmento che parte dal punto B fino a tagliare il lato AD in un punto, F.

Da F e da E tracciare le parallele ai lati di ABCD: il rettangolo AFGE ha la stessa area del primo.

<u>Rettangolo inscritto di area uguale a quella di un quadrato</u>

Nella circonferenza di centro O e diametro orizzontale AB deve essere inscritto un rettangolo che possiede area uguale a quella di un quadrato che ha lato lungo $\ell$:




Il diametro AB è una diagonale del rettangolo da costruire: anche l'altra diagonale risulterà un diametro della stessa circonferenza.

Prolungare il diametro AB verso destra e, nel punto B, condurre la perpendicolare allo stesso AB. Costruire il quadrato BCGH con lati lunghi $\ell$. Disegnare il segmento AC: dal punto C tracciare un segmento perpendicolare a AC, fino a intersecare il prolungamento di AB in un nuovo punto, D.

Il triangolo ACD è rettangolo in C.

Per il 2° teorema di Euclide, l'altezza BC è *media proporzionale* fra i segmenti AB e BD:

AB : BC = BC : BD

BD è il *terzo proporzionale* fra AB e BC ed è la lunghezza incognita:

$$BD = BC^2/AB = \ell^2/AB.$$

Il segmento BD è un lato del rettangolo cercato e cioè la sua larghezza.

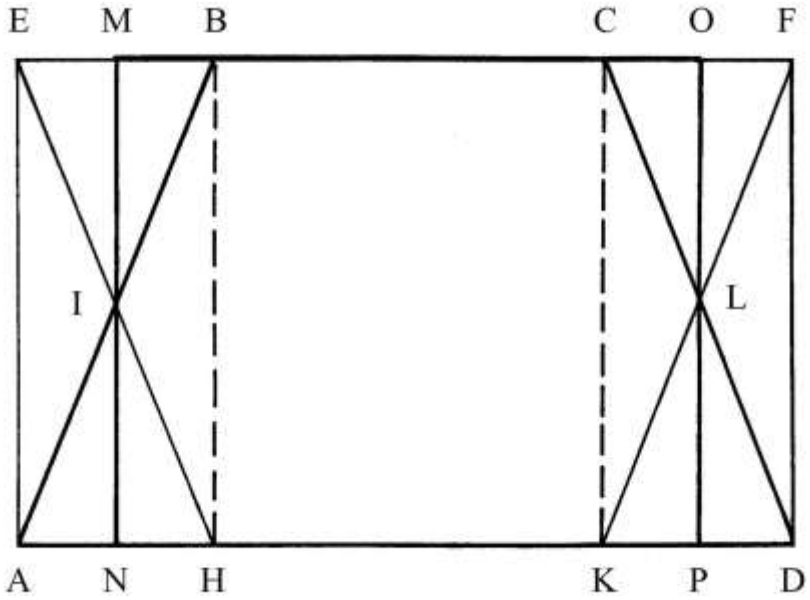
Fare centro in B e, con raggio BD, tracciare un arco da D fino a tagliare la circonferenza in un punto, E.

Con la stessa apertura fare centro in A e determinare il punto F.

Il rettangolo AFBE è il poligono cercato, con area uguale a quella di BCGH.

## Rettangolo equivalente a un trapezio isoscele

ABCD è un trapezio isoscele che deve essere trasformato in un rettangolo avente la stessa area:




Tracciare le due altezze BH e CK.

Disegnare il rettangolo circoscritto al trapezio: è AEFD.

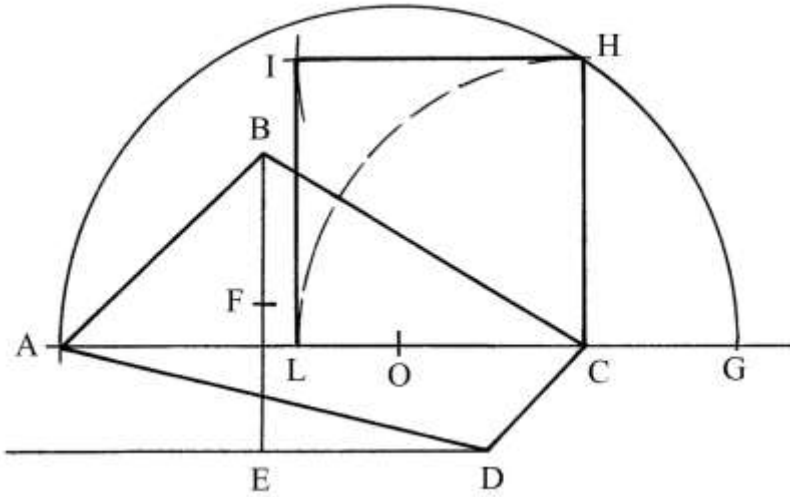
Condurre i segmenti EH e KF: essi tagliano i lati obliqui del trapezio nei punti I e L.

Per i punti I e L, tracciare due segmenti paralleli alle altezze BH e CK.

I rettangoli ECKA, MOPN e BFDH hanno i lati uguali e la stessa area: la loro superficie è uguale a quella del trapezio ABCD.

## Quadrato equivalente a un quadrilatero

ABCD è un quadrilatero che deve essere trasformato in un quadrato della stessa superficie:




Disegnare la diagonale AC e, parallelamente ad essa, una linea passante per il vertice D.

Dal vertice B condurre la perpendicolare a AC: viene determinato il punto E.

Fissare il punto medio di BE: è F.

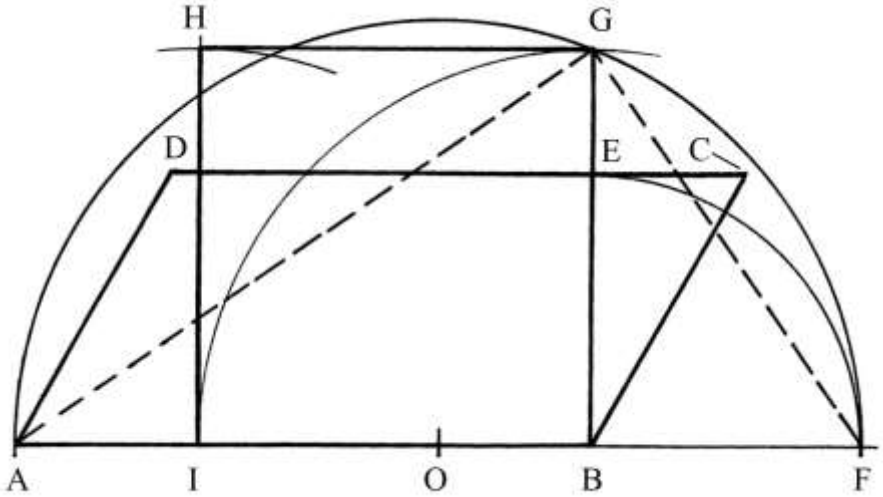
Occorre determinare la *media geometrica* fra i segmenti AC e FB. A partire da C riportare la lunghezza di FB sul prolungamento di AC: è individuato il punto G.

Il punto O è il medio di AG. Fare centro in O e, con raggio OA, tracciare una semicirconferenza da A a G.

Dal punto C disegnare la perpendicolare a AG: il segmento CH è *medio proporzionale* fra AC e CG ed è il lato del quadrato equivalente, CHIL.

## Quadrato equivalente a un parallelogramma

Il parallelogramma ABCD deve essere trasformato in un quadrato avente la stessa superficie:




Dal punto B elevare la perpendicolare al segmento AB: essa incontra il lato DC in un punto, E.

Prolungare il lato AB verso destra.

Fare centro in B e, con raggio BE, tracciare un arco da E fino a intersecare il prolungamento di AB in un nuovo punto, F.

Determinare il punto medio di AF: è O. Con centro in O, e raggio OA, disegnare una semicirconferenza da A a F. Il punto G è la sua intersezione con la perpendicolare uscente da B.

AGF è un triangolo rettangolo, con due cateti tratteggiati e con l'angolo retto in G.

Per il 2° teorema di Euclide, la lunghezza di GB è media proporzionale fra le lunghezze dei segmenti AB e BF e cioè:

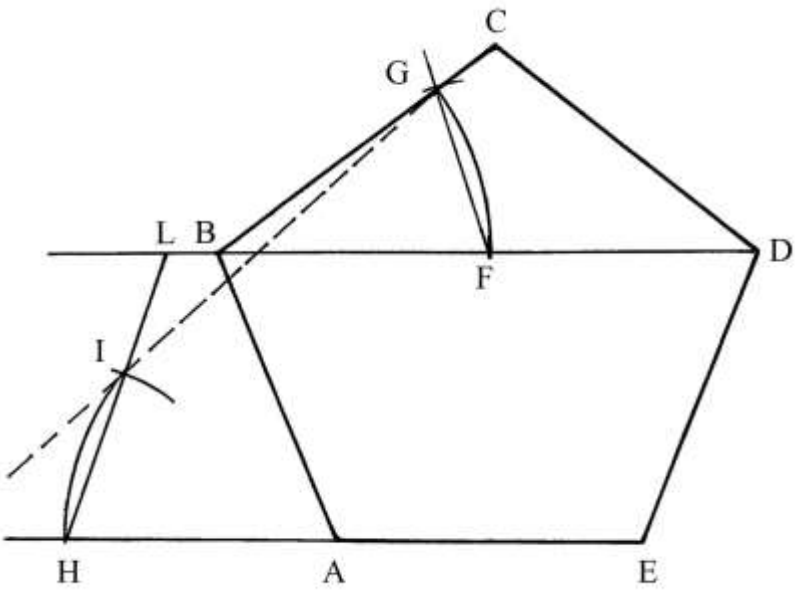
$GB^2 = AB * BF$ e

$GB = \sqrt{(AB * BF)}$.

GB è il lato del quadrato BGHI che ha la stessa superficie del parallelogramma ABCD.

## Quadrato equivalente a un pentagono regolare

ABCDE è un pentagono regolare: deve essere costruito un quadrato con la stessa superficie, effettuando il minimo numero di tagli.



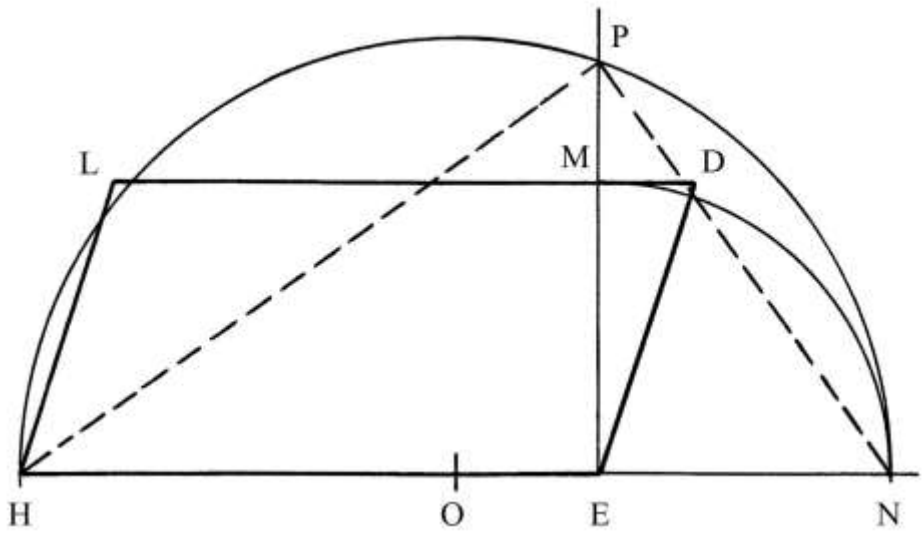

Tracciare la diagonale BD e determinare il suo punto medio, F. Fare centro in B e con raggio BF disegnare l'arco e la corda FG.

Prolungare verso sinistra il lato AE. Fare centro in A e, con raggio BG, tracciare un arco che determina il punto H.

Fare centro in H e, con raggio FG, disegnare l'arco che taglia il precedente nel punto I: il triangolo isoscele AHI è uguale al triangolo BGF.

Per i punti H e I tracciare una linea che interseca il prolungamento della diagonale BD in un nuovo punto, L.

Consideriamo ora il parallelogramma LDEH e riproduciamolo in un'altra figura. Dobbiamo determinare la lunghezza del segmento *medio proporzionale* fra la lunghezza del lato di quel parallelogramma (HE) e la sua altezza: dobbiamo applicare il *2° teorema di Euclide*.

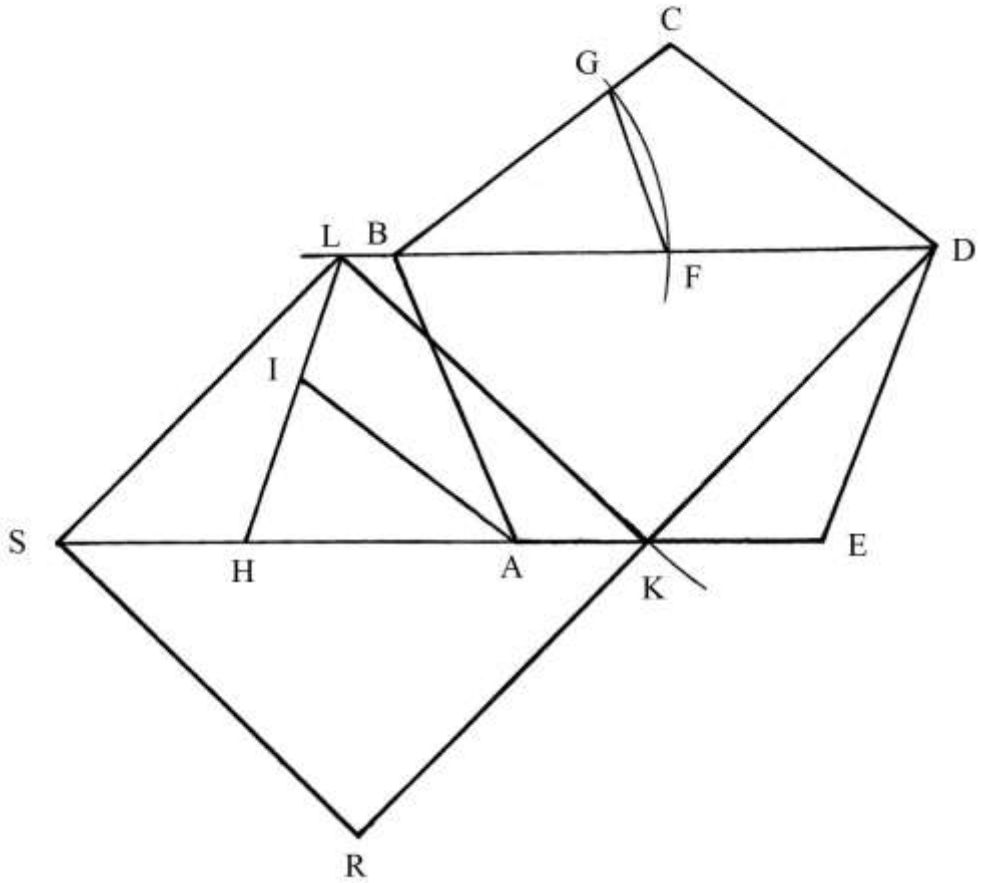



Dal punto E elevare la perpendicolare al lato HE: essa taglia il lato LD in un nuovo punto, M. Fare centro in E e, con raggio EM, tracciare un arco da M fino a tagliare il prolungamento di HE in un punto: è N.

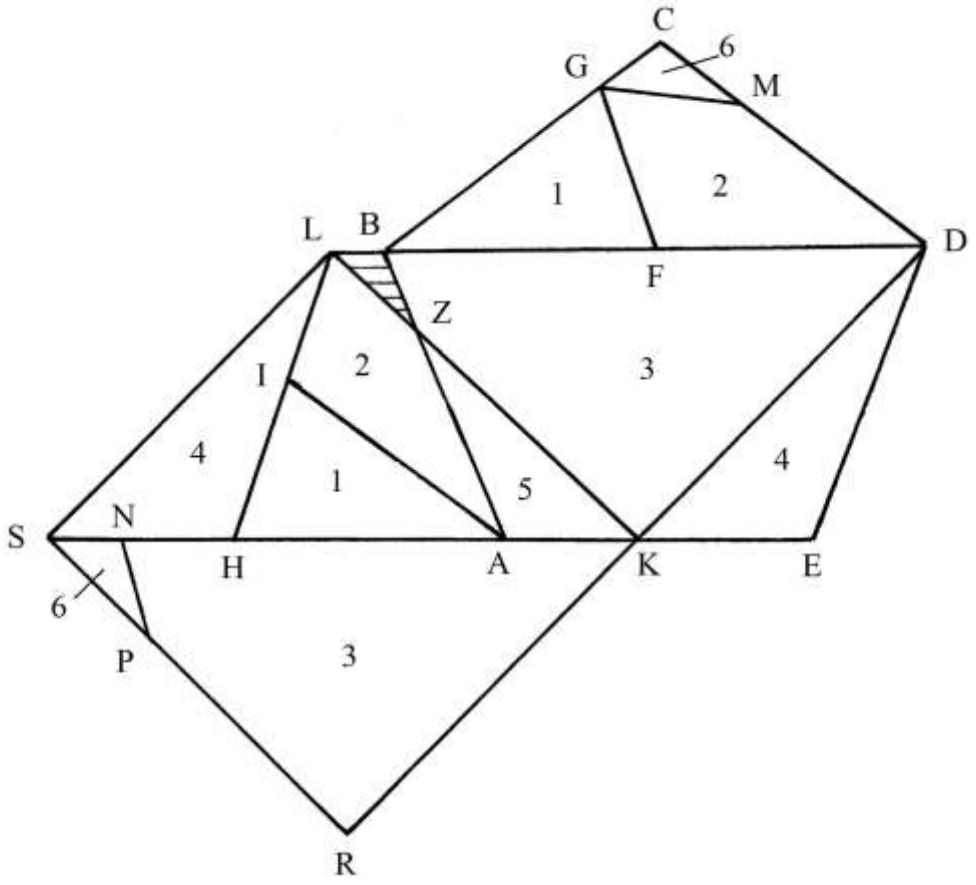
Determinare il punto medio di HN: è O. Fare centro in O e con raggio OH disegnare la semicirconferenza da H a N: essa intercetta il prolungamento di EM in un punto, P.

Il segmento PE è *medio proporzionale* fra i segmenti HE e EN.

Con il compasso, misurare la lunghezza di PE e riportarla facendo centro in D:



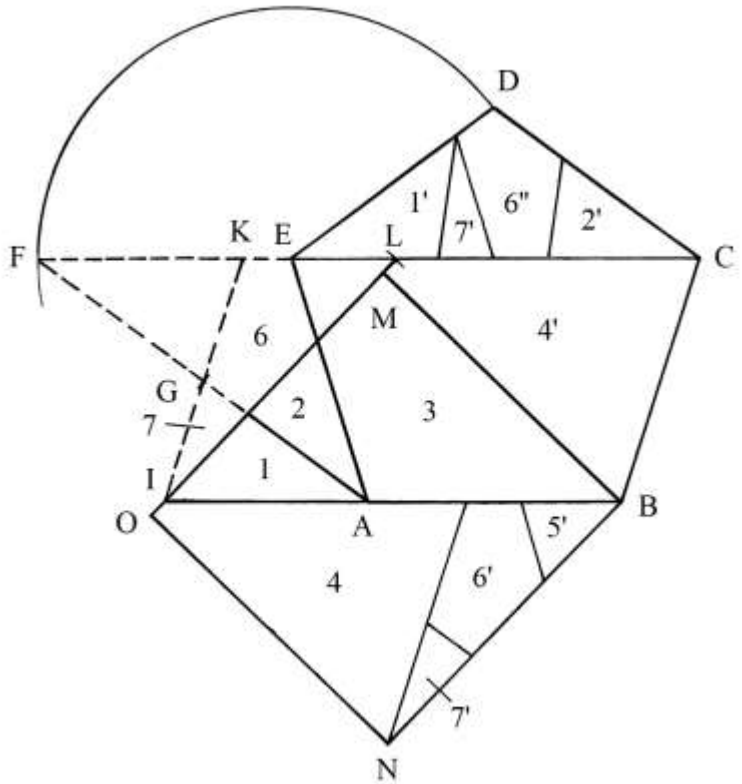
L'arco tracciato taglia il lato AE nel punto K: disegnare una linea da D e passante per K.
Collegare L con K: il segmento LK è il primo lato del quadrato equivalente.
LKRS è il quadrato cercato.
La costruzione appena descritta è stata semplificata rispetto all'originale ed è leggermente approssimata: il risultato è comunque corretto. Il pentagono di partenza risulta diviso in *sei* parti, numerate da 1 a 6, come mostra la figura che segue:




Anche il quadrato è scomposto in *sei* poligoni.
L'area indicata con il numero 5 è comune al pentagono e al quadrato.
Il triangolo LBZ non fa parte né del pentagono né del quadrato.

<u>Quadrato equivalente a un pentagono regolare secondo Kraitchik</u>

La costruzione si deve a Maurice Kraitchik: è contenuta alle pp. 196-198 del suo libro citato in bibliografia. Essa divide il pentagono regolare in *sette* poligoni che assemblati formano un quadrato equivalente.
ABCDE è il pentagono regolare.




Tracciare la diagonale CE e prolungarla verso sinistra.

Fare centro in E e con raggio ED disegnare un arco da D fino a incontrare in F il prolungamento di CE.

Collegare F con A: il triangolo FEA è isoscele e ha due lati, FE e EA, di uguale lunghezza. Questo triangolo ha area uguale a quella del triangolo EDC.

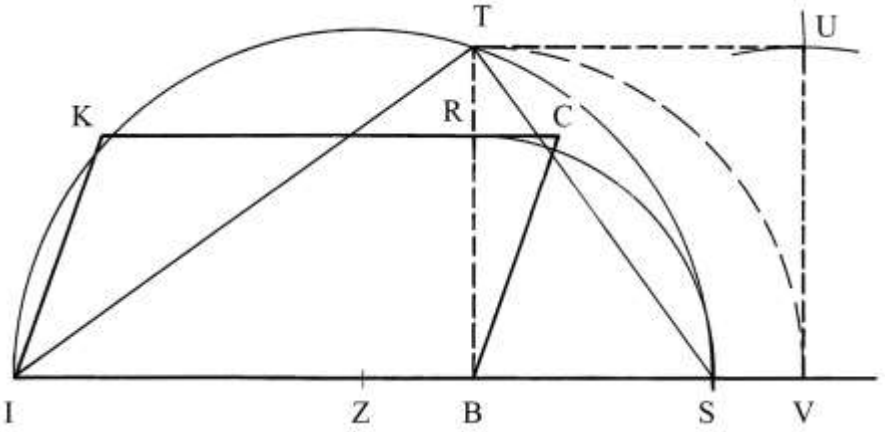
Il trapezio scaleno FCBA ha area uguale a quella del pentagono ABCDE.

Prolungare verso sinistra il lato AB.

Fissare il punto medio di FA: è G. Per questo punto tracciare una parallela al lato BC: è GKI.

Il parallelogramma KCBI ha la stessa area di FCBA e quindi ha area uguale a quella del pentagono ABCDE.

Occorre ora determinare la lunghezza del lato del quadrato equivalente al parallelogramma KCBI: lo schema che segue applica il 2° teorema di Euclide.




RB è l'altezza del parallelogramma rispetto alle due basi IB e KC. Fare centro in B e con raggio BR disegnare un arco da R fino a tagliare in S il prolungamento di IB.

Z è il punto medio di IS. Fare centro in Z e con raggio ZI = ZS tracciare una semicirconferenza da I a S. Essa incontra in T il prolungamento di RB. TB è medio proporzionale fra IB e BR ed è il lato del quadrato BTUV di area uguale a quella di KCBI.

Misurare la lunghezza di BT e riportarla sul primo schema facendo centro in I: essa taglia FC nel punto L.

Collegare I con L.

Dal punto B disegnare la perpendicolare a IL: è BM, primo lato del quadrato equivalente BNOM.

I poligono indicati con 1, 2, 4, 5, 6 e 7 trovano i corrispondenti nei poligoni 1', 2', 4', 5', 6' e 6'', 7'.

Il quadrilatero contrassegnato con "3" è comune al pentagono ABCDE e al quadrato equivalente BNOM.

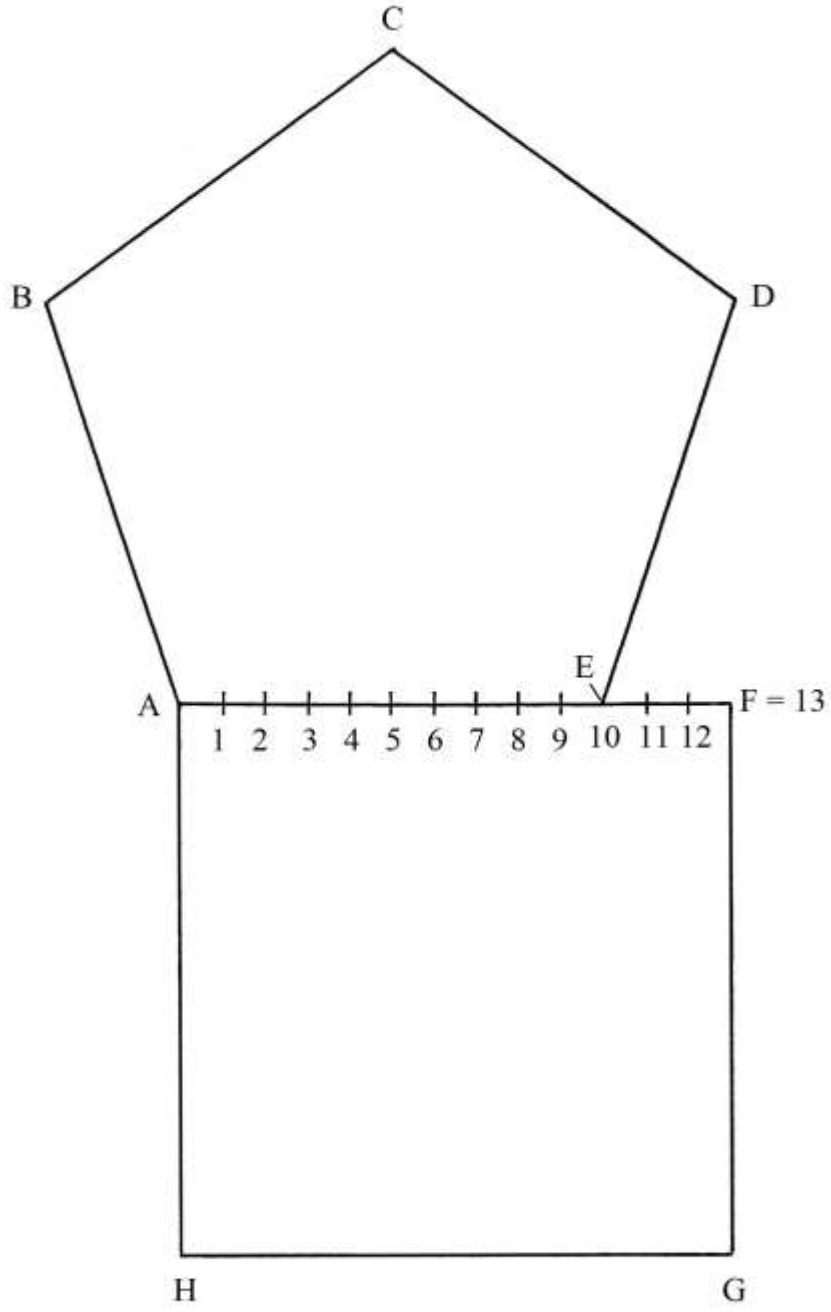
## Quadrato equivalente a un pentagono – costruzione approssimata

Per effettuare la conversione di un pentagono in un quadrato di area uguale è disponibile anche una costruzione approssimata.

A parità di superficie, il lato del quadrato è lungo 1,3117 il lato del pentagono. Per semplificare le cose, questo valore può essere approssimato *per difetto* a 1,3.

ABCDE è il pentagono regolare. Prolungare il lato AE verso destra.

Dividere AE in *dieci* parti uguali, numerando i punti da 1 a 10 (che coincide con E). Da E riportare altre *tre* divisioni e segnare i punti 11, 12 e 13 (che coincide con il punto F).




Il segmento AF è lungo 13 divisioni e cioè 13/10 di AE.

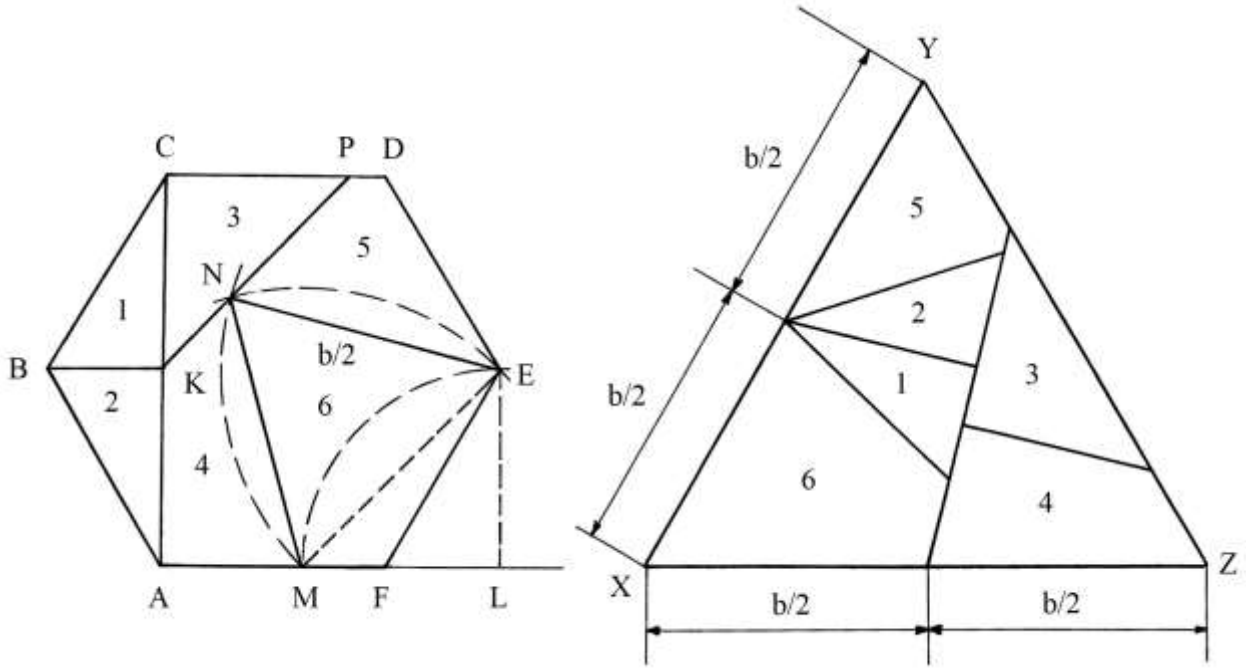
Sul lato AF costruire il quadrato AFGH, che ha superficie leggermente più piccola di quella del pentagono ABCDE.

L'errore è trascurabile perché è pari allo 0,68% della superficie del pentagono.

Trasformazione di un esagono regolare in un triangolo equilatero

La costruzione è descritta nel testo di Boris A. Kordemsky, citato in bibliografia.

I due poligoni, l'esagono regolare e il triangolo equilatero devono avere aree uguali. Con un certo numero di tagli – cinque – l'esagono è diviso in *tre* triangoli e in *tre* quadrilateri che riassemblati formano il triangolo equilatero.




ABCDEF è l'esagono. Tracciare la diagonale AC e stabilire il suo punto medio K: BK divide ABC in due triangoli rettangoli, ABK e BCK.

Prolungare verso destra il lato AF: da E abbassare la perpendicolare EL.

Fare centro in L e con raggio LE disegnare un arco da E a M. Collegare E con M e fare centro nei punti E e M con raggio EM: i due archi si incontrano in N. EMN è un triangolo equilatero: i suoi lati sono lunghi "b/2" e cioè *metà* dei lati del triangolo equilatero equivalente all'esagono.

Tracciare un segmento uscente da K e passante per N fino a incontrare CD nel punto P.

Effettuando *cinque* tagli – AC, BK, KP, NE e NM – l'esagono è diviso nei tre triangoli contrassegnati con "1", "2" e "3" e nei tre quadrilateri indicati con "4", "5" e "6".

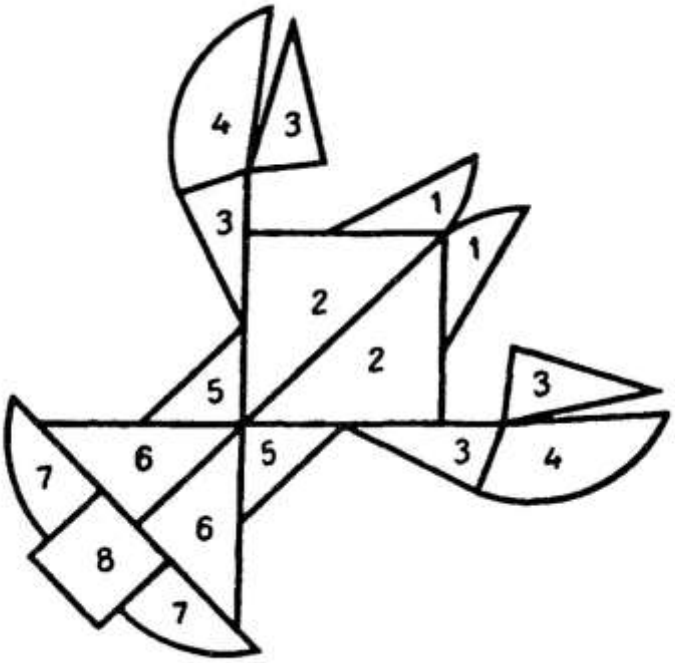
I sei poligoni formano il triangolo equilatero XYZ che ha lati lunghi:

$$2 * b/2 = b = 2 * EM.$$

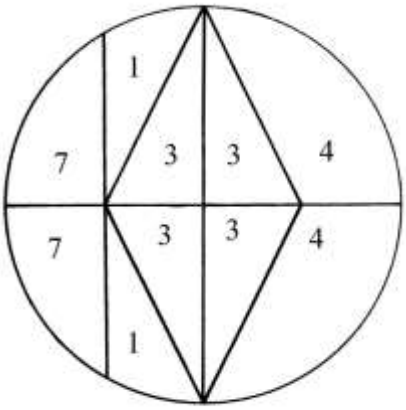
## Altre trasformazioni secondo Kordemsky

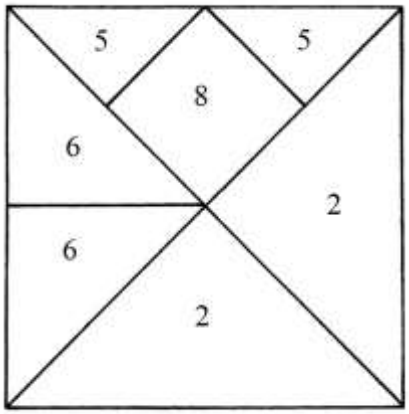
Nel citato libro di Kordemsky sono presentati altri esempi di trasformazioni di figure piane più o meno complesse.

La figura che segue è lo schema semplificato di un *gambero* che è scomposto in 17 parti:



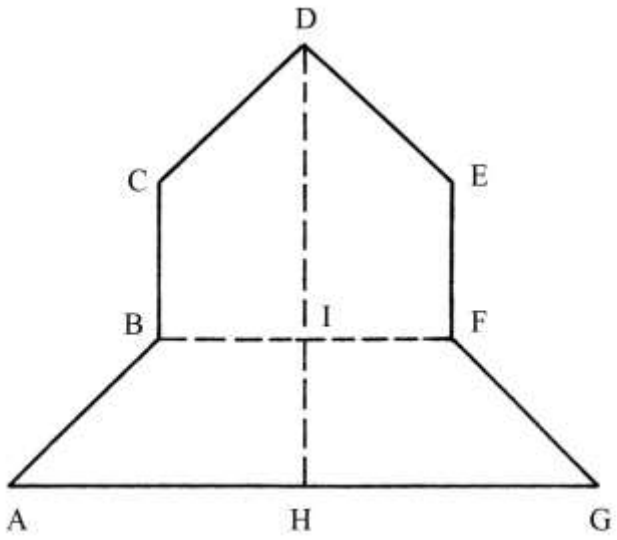

Il problema chiede di ricomporre i 17 pezzi per formare un cerchio e un quadrato. Ecco la soluzione che propone l'Autore:




%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

L'esempio che segue è quello dell'ettagono non regolare ABCDEFG che può facilmente essere scomposto in quattro trapezi rettangoli:



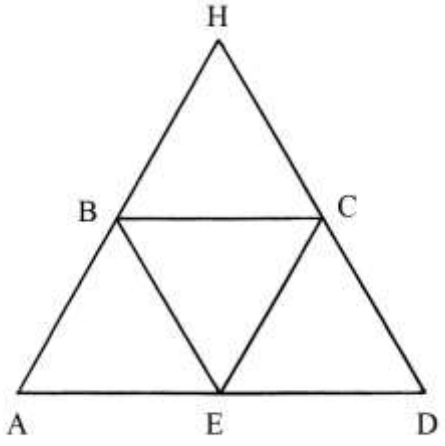

La sua forma richiama quella di un *puntale* o la proiezione frontale di un solido appuntito.

Il segmento BF divide il poligono in due figure: il pentagono non regolare BCDEF e il trapezio isoscele ABFG.

L'asse di simmetria DIH divide ulteriormente le due figure in quattro trapezi rettangoli: ABIH, HIFG, BCDI e IDEF.

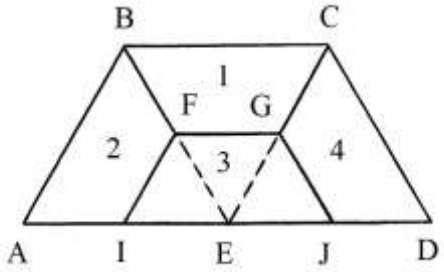
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

AHD è un triangolo equilatero. Il poligono è diviso in quattro triangoli equilateri di uguali dimensioni:




B, C e E sono i punti medi dei tre lati.

Asportando il triangolo equilatero BHC resta il trapezio isoscele ABCD:




Per costruzione, i lati AB, BC e CD hanno uguale lunghezza che è metà di quella della base maggiore AD.

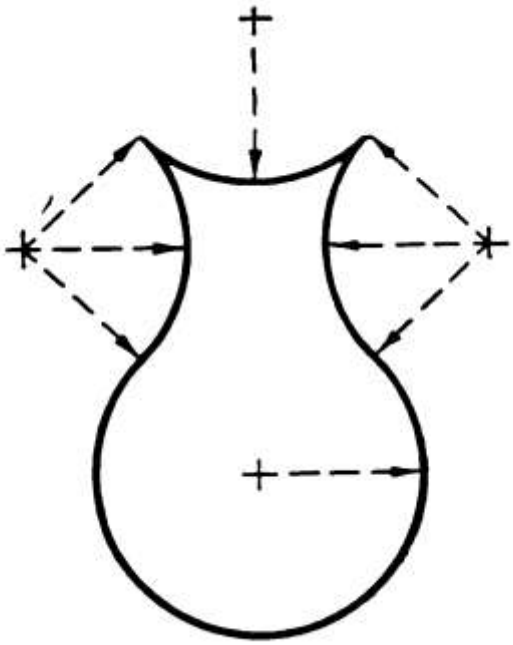
Determinare i punti medi dei lati BE e CE: sono rispettivamente F e G. Stabilire i punti medi di AE e di ED: sono I e J.

IF, FG e GJ dividono il trapezio ABCD in *quattro* trapezi isosceli di uguali dimensioni: essi sono contrassegnati con 1, 2, 3 e 4.

Ciascuno dei quattro più piccoli trapezi è *simile* a quello ABCD.

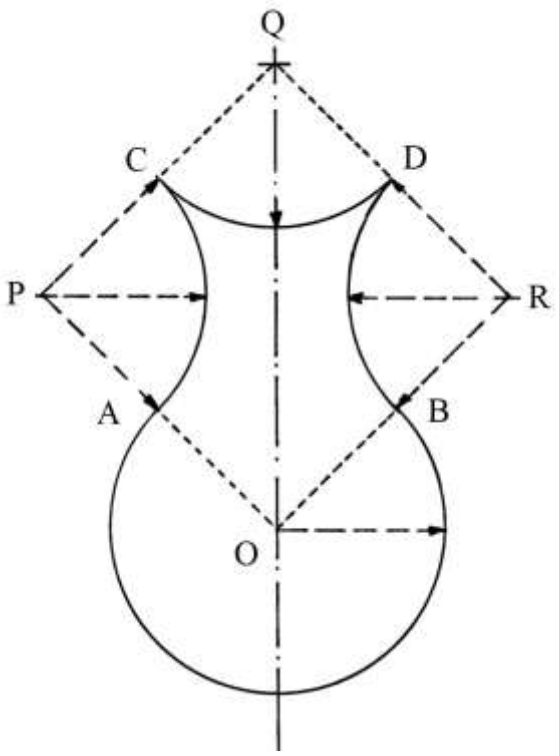
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Lo schema che segue mostra il profilo di un vaso che è formato da archi di circonferenza raccordati e tutti con raggi di uguale lunghezza:

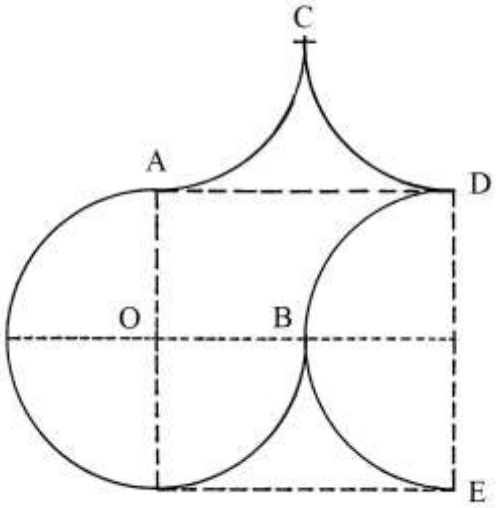


Con *due* tagli lineari, la figura va divisa in *tre* parti che devono essere riunite per formare un quadrato.

I quattro centri degli archi – O, P, Q e R – sono i vertici di un quadrato:



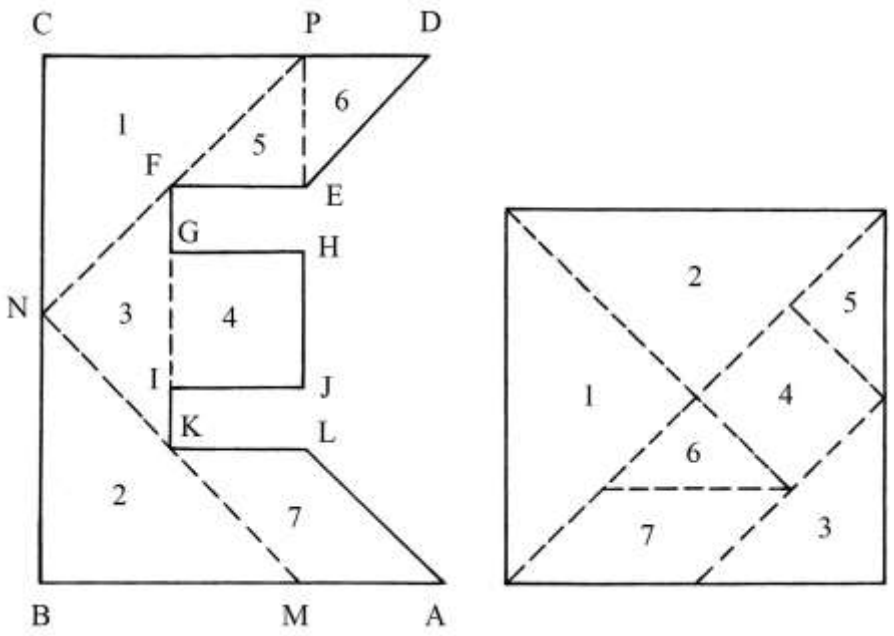

L'Autore presenta il risultato nello schema che segue:




La presenza dell'arco BE è discutibile.
Le lettere sono assenti negli schemi originali.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

La figura che segue presenta un complesso poligono con lati rettilinei il cui profilo si avvicina a quello di una vocale "E" maiuscola:



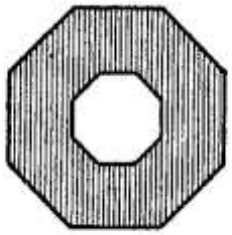

La figura deve essere divisa in *sette* parti con soli *quattro* tagli diritti.

I tagli sono effettuati lungo i segmenti NP, NM, PE e GI. Il punto N è il medio di CB.

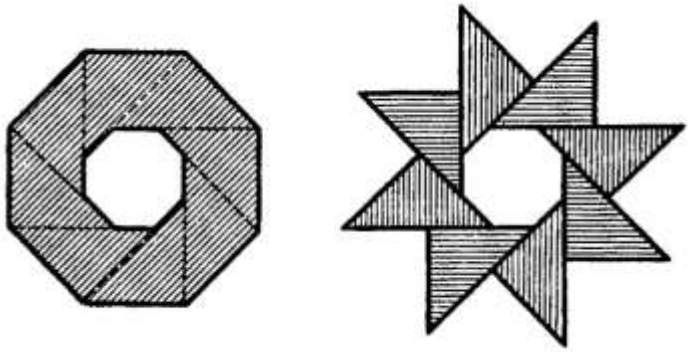
Le sette parti sono unite per formare un quadrato che ha lati lunghi quanto i segmenti NP e NM.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Due ottagoni regolari concentrici delimitano una figura piana:



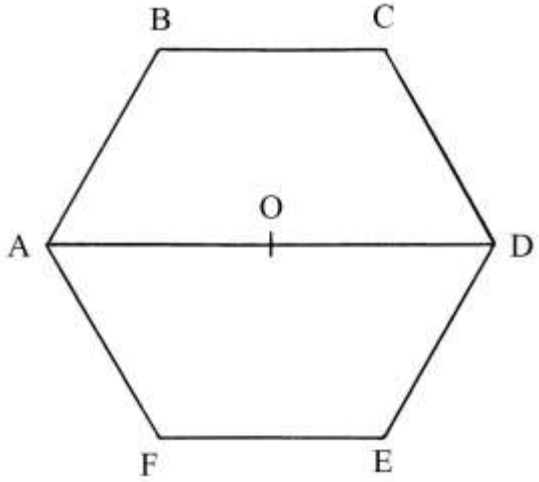
La corona ottagonale deve essere opportunamente tagliata in *otto* parti a forma di triangoli rettangoli di uguali dimensioni: essi sono poi assemblati per formare una stella a otto punte costruita intorno all'ottagono centrale:



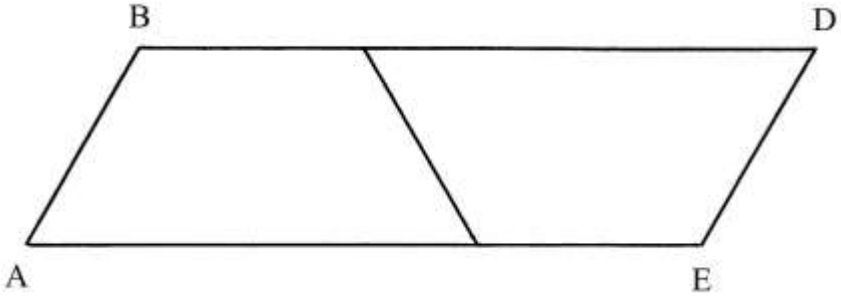
Quadrato equivalente a un esagono regolare

La costruzione di seguito descritta è dovuta al già citato matematico Maurice Kraitchik.

ABCDEF è un esagono regolare che, con la diagonale AD, è diviso in due identici trapezi isosceli: ABCD e ADEF.




I due trapezi sono uniti lungo i lati CD e AF per formare il parallelogramma ABDE:



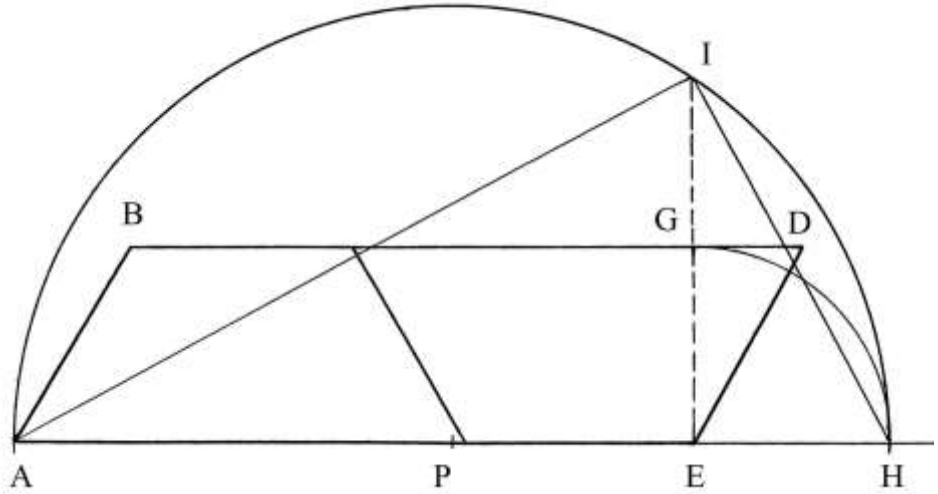

Per via geometria occorre ricavare la lunghezza del segmento medio proporzionale fra le lunghezze di AE e dell'altezza EG. Il metodo è corretto: l'area del parallelogramma ABDE è data dal prodotto della lunghezza della base (AE) per quello dell'altezza (EG):

$A_{ABDE} = AE * EG.$

Il quadrato che ha area uguale ha lati lunghi:

$\ell = \sqrt{(AE * AG)}.$

La soluzione geometria risolve i problemi aritmetici che si hanno nel caso di radici producenti numeri irrazionali.

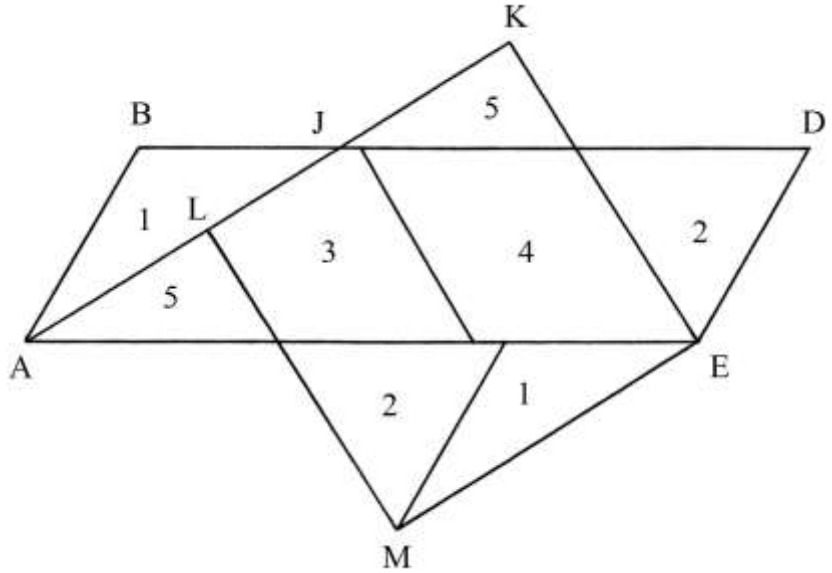



Prolungare verso destra la base AE e dal punto E elevare la perpendicolare EG: essa è l'altezza del parallelogramma rispetto alle due basi.

Fare centro in E e con raggio EG tracciare un arco da G fino a fissare H.

Determinare il punto medio di AH: è P. Fare centro in P e con raggio PA = PH disegnare una semicirconferenza che taglia in I il prolungamento dell'altezza EG: EI è medio proporzionale fra le lunghezze di AE e di EH = EG.

Riportare la lunghezza di EI a partire dal vertice A: è il segmento AJ che deve essere prolungato verso l'alto.



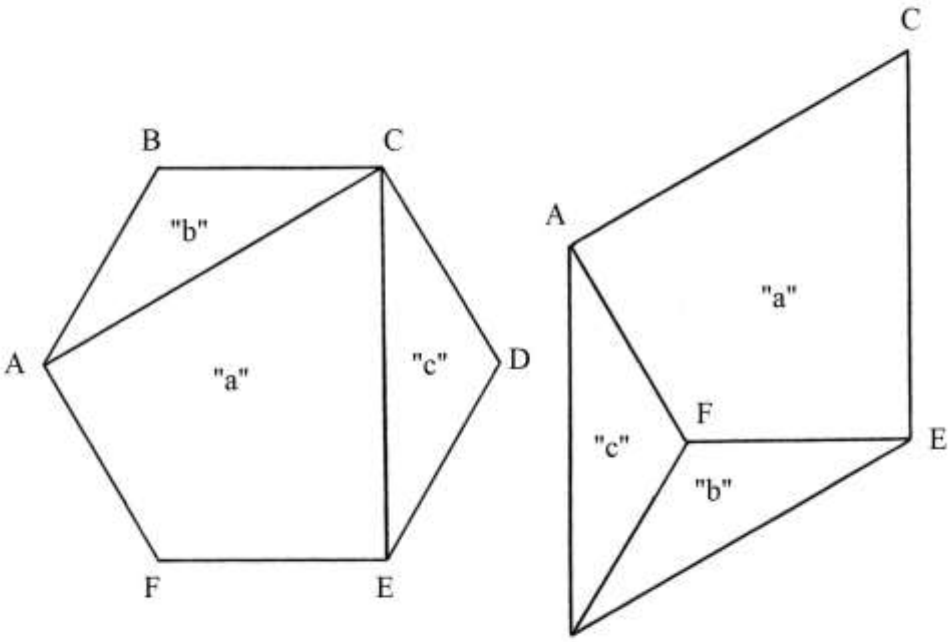

Da E condurre la perpendicolare alla linea passante per A e J: è EK. EK e LK sono i primi due lati del quadrato equivalente LKEM.

I numeri indicano i poligoni con uguali dimensioni. Quelli contrassegnati con i numeri 3 e 4 sono poligoni comuni al parallelogramma e al quadrato equivalente.

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - APPROFONDIMENTO - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

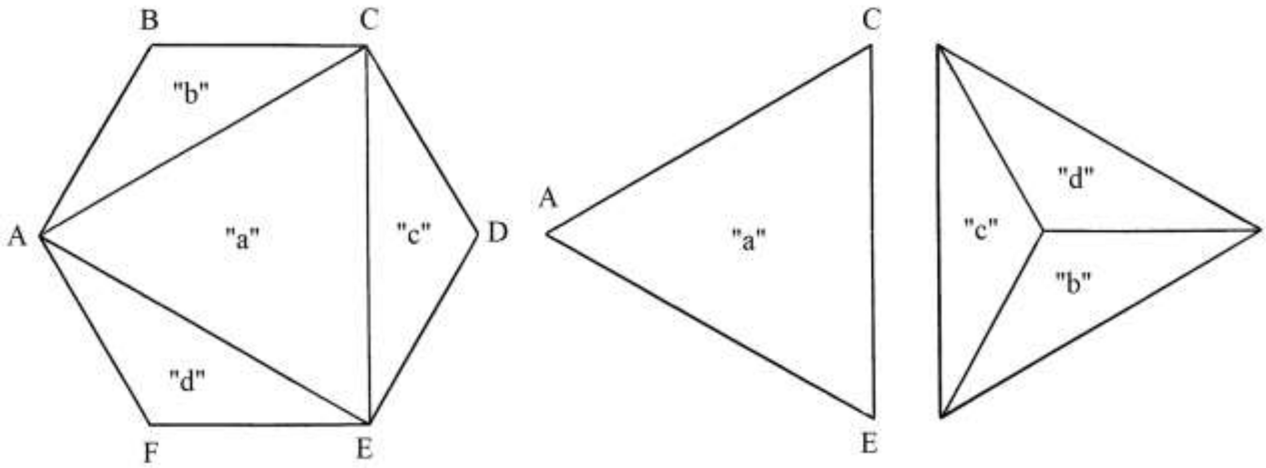
Con un numero di tagli limitato e con metodi assai più semplici di quello proposto da Maurice Kraitchik, l'esagono regolare ABCDEF può essere trasformato in altri poligoni.

Nel caso della figura che segue, l'esagono è suddiviso in tre parti con *due* tagli praticati lungo le diagonali AC e CE:




I tre poligoni indicati con “a”, “b” e “c” sono assemblati per formare un rombo che ha lati lunghi quanto le diagonali AC e CE.

In secondo caso richiede *tre* tagli lungo le diagonali AC, AE e CE che generano quattro triangoli:



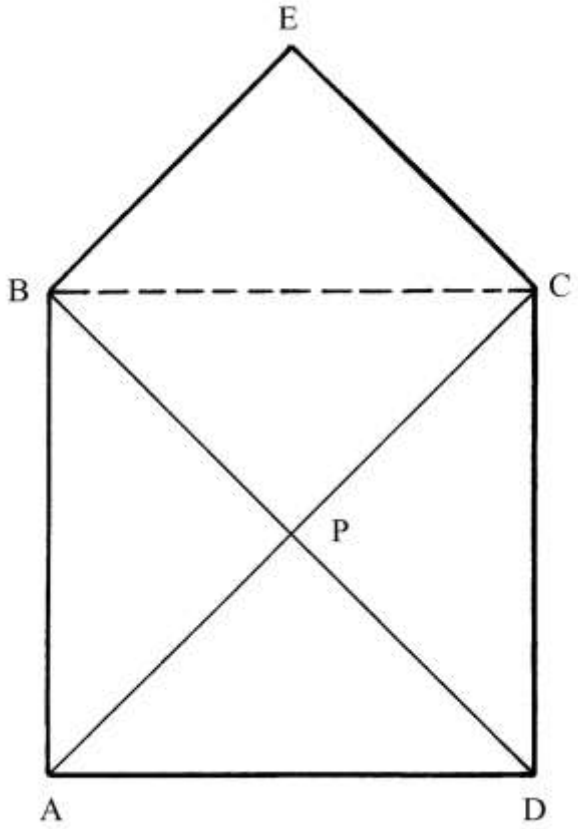

Il triangolo contrassegnato con “a” è equilatero e ha lati lunghi quanto la diagonale AC.
I triangoli indicati con “b”, “c” e “d” sono uniti per formare un secondo triangolo equilatero che anch’esso ha lati lunghi quanto AC.

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

Quadrati risultanti dalla fusione di un quadrato e di un triangolo rettangolo isoscele

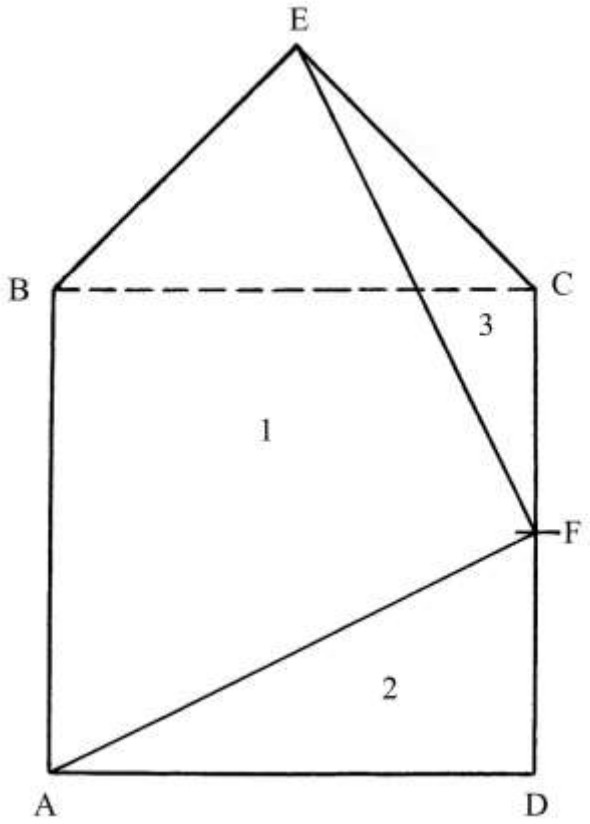
I due problemi che seguono sono rielaborati dal testo di Dudeney, “L’enigma del mandarino”.

ABCD è un quadrato e BEC è un triangolo rettangolo isoscele la cui ipotenusa coincide con il lato BC. BEC ha le stesse dimensioni di ciascuno dei quattro triangoli che sono creati dalle diagonali AC e BD:

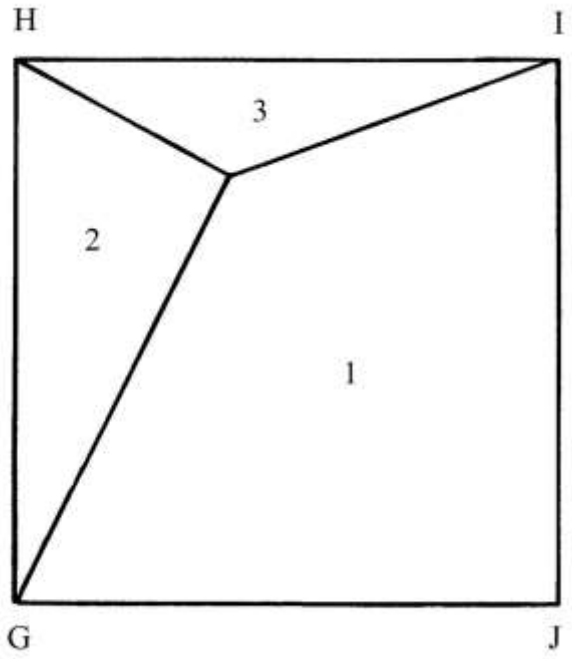



Fissare il punto medio del lato CD: è F. Collegare F con E. Il pentagono non regolare ABECD è scomposto in tre poligoni:

* il quadrilatero ABEF (con un angolo retto in F): è indicato con “1”;
* il triangolo rettangolo AFD, “2”;
* il triangolo scaleno ECG, “3”.

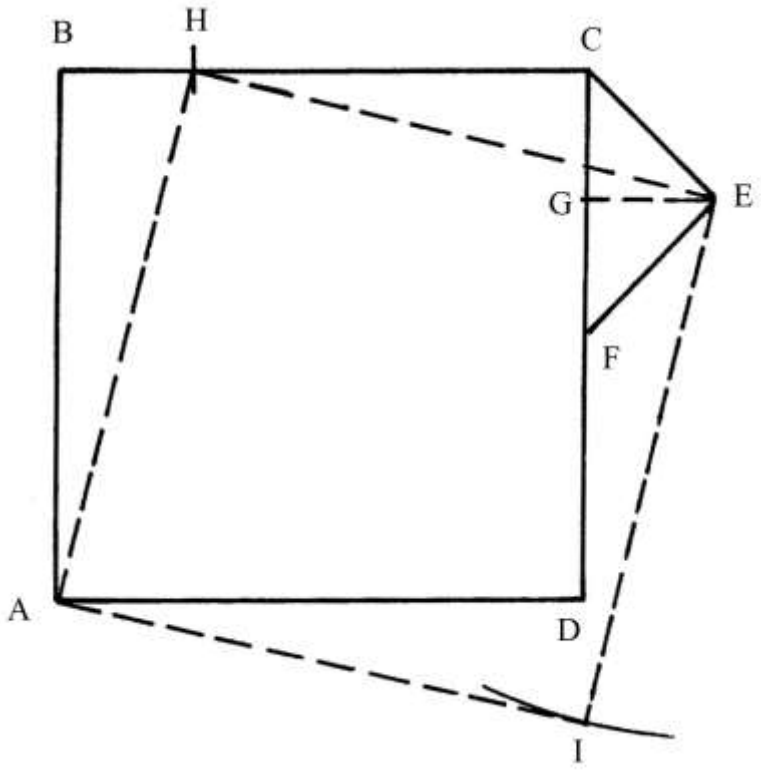



I tre poligoni sono assemblati, come nello schema che segue, per formare il quadrato GHIJ che ha area uguale alla somma di quelle di ABCD e di BEC:




%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Il secondo problema è mostrato nello schema che segue:



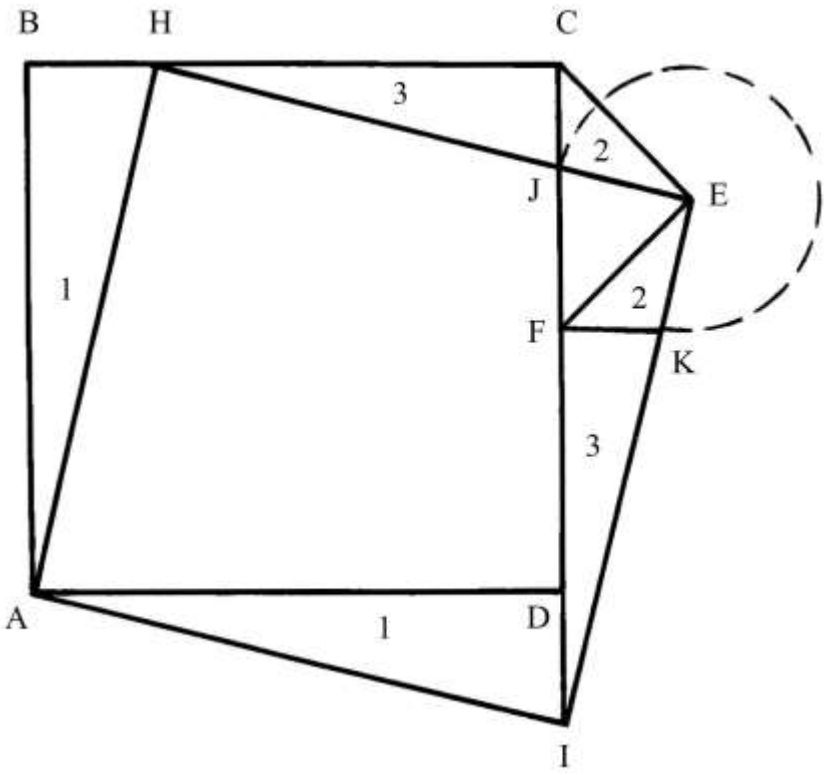

ABCD è un quadrato e CEF è un triangolo rettangolo isoscele, con area più piccola di quella di ABCD.

I due poligoni devono essere uniti per formare un quadrato di area uguale alla somma di quelle dei due poligoni iniziali.

Tracciare l'altezza EG. Con il compasso misurare la lunghezza di CG (uguale a quelle di GF e di EG) e riportarla sul lato BC a partire dal vertice B: è stabilito il punto H.

HE è il primo lato del quadrato HEIA risultante dall'unione dei due poligoni iniziali.

Lo schema che segue presenta le equivalenze fra le aree dei tre poligoni, i due quadrati e il triangolo rettangolo isoscele:





Bibliografia

1. Cundy H. M. – Rollett A. P., “I modelli matematici”, trad. it., Milano, Feltrinelli, 1974, pp. 292.
2. Dudeney Henry E., “Gli enigmi di Canterbury”, trad. it., (s.i.l. ma Milano), RBA Italia, 2008, pp. 233.
3. Dudeney Henry E., “L’enigma del mandarino. Passatempi matematici – I”, trad. it., (s.i.l. ma Milano), RBA Italia, 2008, pp. 238.
4. Dudeney Henry E., “Il mistero del pontile. Passatempi matematici – III”, trad. it. (s.i.l. ma Milano), RBA Italia, 2008, pp. 295.
5. Ghersi Italo, “Matematica dilettevole e curiosa”, Milano, Hoepli, quinta edizione, ristampa 2004, pp. 776.
6. Ghersi Italo, “Metodi facili per risolvere i problemi di geometria elementare”, Milano, Hoepli, 1900, pp. XII-190.
7. Kordemsky Boris A., “Giochi matematici russi: 395 problemi di matematica ricreativa – I”, trad. it., (s.i.l. ma Milano), RBA Italia, 2008, pp. 223.
8. Kraitchik Maurice, “Mathematical Recreations”, seconda edizione rivista, New York, Dover Publications, 1953, pp. 330.
9. Loyd Samuel, “Passatempi matematici – II”, tra. it., (s.i.l. ma Milano), RBA Italia, 2008, pp. 172.
10. Peiretti Federico, “Il matematico si diverte”, Milano, Hachette Fascicoli, 2017, pp. 329.
11. Shelby Lon. R., “The Geometrical Knowledge of Mediaeval Master Masons”, *Speculum,* Vol. 47, No. 3 (Jul. 1972), pp.395-421.

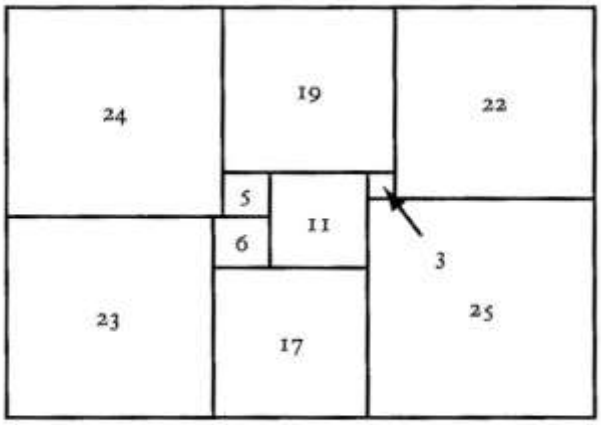
APPENDICE
==========

QUADRATURA DI RETTANGOLI E QUADRATI

Nel corso del Novecento alcuni matematici e ingegneri hanno studiato e risolto un curioso problema: ricoprire un rettangolo con quadrati tutti di differenti dimensioni.

Un pavimento rettangolare può essere completamente ricoperto con piastrelle quadrate di uguali dimensioni a condizione che le due dimensioni del rettangolo siano esattamente multiple di quelle delle piastrelle.

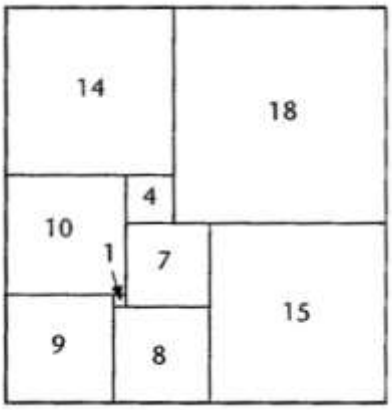
Si deve al matematico polacco Zbigniew Moroń (1904 – 1971) il primo rettangolo squadrato che presentò nel 1925:




Il rettangolo ha dimensioni 65 per 47.

Esso è completamente ricoperto da *dieci* tessere quadrate: le lunghezze dei lati sono scritte all'interno dei quadrati e sono 3, 5, 6, 11, 17, 19, 22, 23, 24 e 25.

In seguito, Moroń ridusse a *nove* il numero dei quadrati occorrenti per coprire un rettangolo:



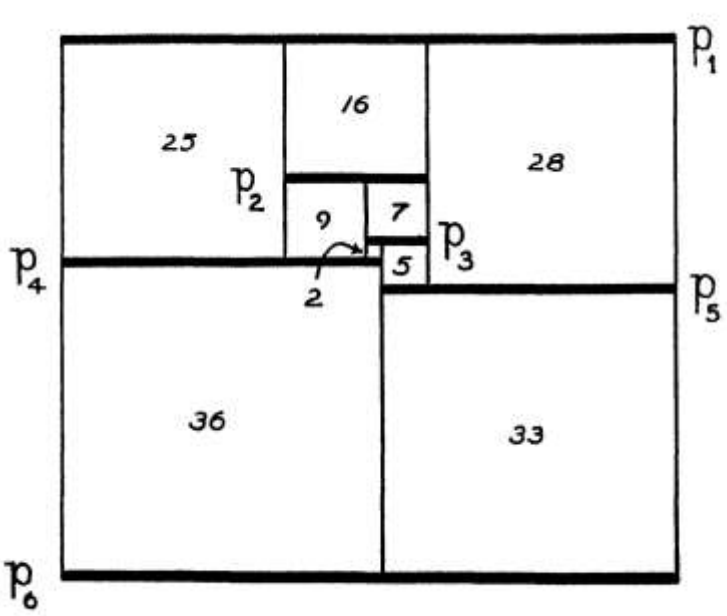

Le dimensioni del rettangolo erano di 32 per 33. I nove quadrati avevano lati lunghi: 1, 4, 7, 8, 9, 10, 14, 15 e 18.

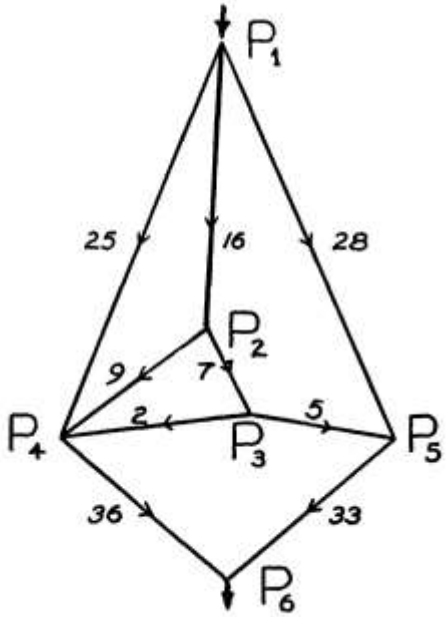
Sia Moroń che gli altri matematici e ingegneri che si sono interessati a questo argomento hanno sempre utilizzato quadrati con lati lunghi *numeri interi*.

Nel 1940 quattro matematici inglesi (Brooks, Smith, Stone e Tutte), in un articolo citato in bibliografia, approfondirono l'argomento e scoprirono il collegamento delle soluzioni di questi problemi con le leggi di Kirchhoff sui nodi e sulle maglie dei circuiti elettrici.

Lo schema che segue è riprodotto dall'articolo dei quattro matematici inglesi.

A sinistra è il rettangolo coperto dai quadrati e a destra è riportato un grafo orientato.




Il rettangolo ha dimensioni 69 per 61.

*Sei* vertici sono contrassegnati con $P_1$, $P_2$, $P_3$, $P_4$, $P_5$ e $P_6$.

Il punto inziale del grafo è $P_1$ e quello finale è $P_6$: si tratta di due estremi che nel rettangolo sono i terminali della diagonale $P_1P_6$. Questi due punti sono i *poli* del grafo.

Da $P_1$ si dipartono tre vettori lunghi 25, 16 e 28 e cioè quanto i lati dei quadrati affiancati lungo la base maggiore superiore.

In $P_2$ giunge il vettore $P_1P_2$ lungo 16 e escono due vettori lunghi 9 e 7: il primo converge su $P_4$ e il secondo su $P_3$.

Anche gli altri punti sono interessati da ingressi e uscite di vettori lunghi quanto i lati dei quadrati.

Nei punti intermedi – $P_2$, $P_3$, $P_4$ e $P_5$ – la somma delle lunghezze dei vettori in entrata è uguale alla somma di quelle dei vettori in uscita, come è il caso dell'esempio:

$$P_2P_3 = P_3P_4 + P_3P_5$$
$$7 = 2 + 5.$$

Le due espressioni possono essere scritte come segue:

$$P_2P_3 – P_3P_4 – P_3P_5 = 0$$
$$7 – 2 – 5 = 0.$$

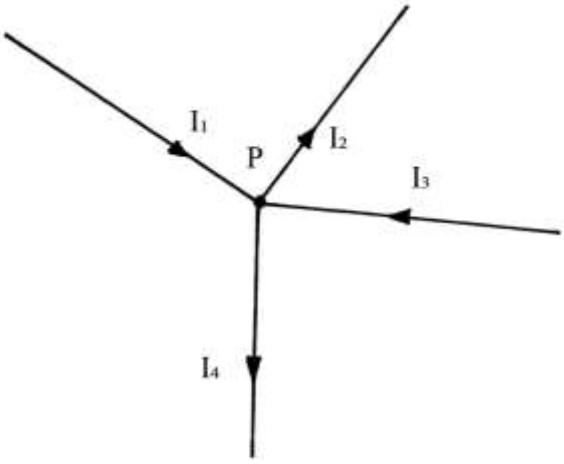
- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - APPROFONDIMENTO - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

Le leggi di Kirchhoff

Gustav Robert Georg Kirchhoff (1824 – 1887) è stato un fisico e un matematico tedesco).

A lui si devono due leggi sui nodi e le maglie dei circuiti elettrici.

La *prima* è conosciuta come *legge dei nodi*:




La somma delle correnti che confluiscono nel nodo P è uguale a *zero*:

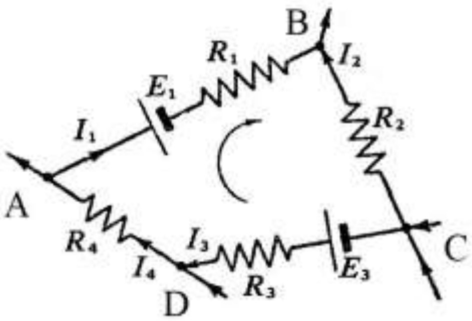
$I_1 + I_3 = I_2 + I_4$

$I_1 + I_3 – I_2 – I_4 = 0$.

Il grafo orientato usato dai quattro matematici inglesi sopra citati è un'applicazione della prima legge di Kirchhoff.

La *seconda* legge è relativa alle *maglie*.

Scelto un verso arbitrario di percorrenza (nella figura è *orario*), la tensione esistente fra due nodi consecutivi è uguale a *zero*. La maglia della figura, riadattata da Someda, contiene quattro nodi: A, B, C e D.




In elettrotecnica una maglia è circuito formato da più rami definiti da almeno *tre* nodi: la forma più semplice di maglia è proprio quella triangolare.

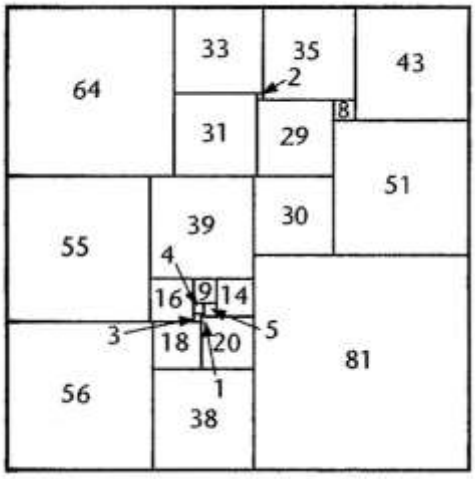
Le leggi di Kirchhoff valgono anche per le reti che trasportano fluidi: gas e acqua.

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

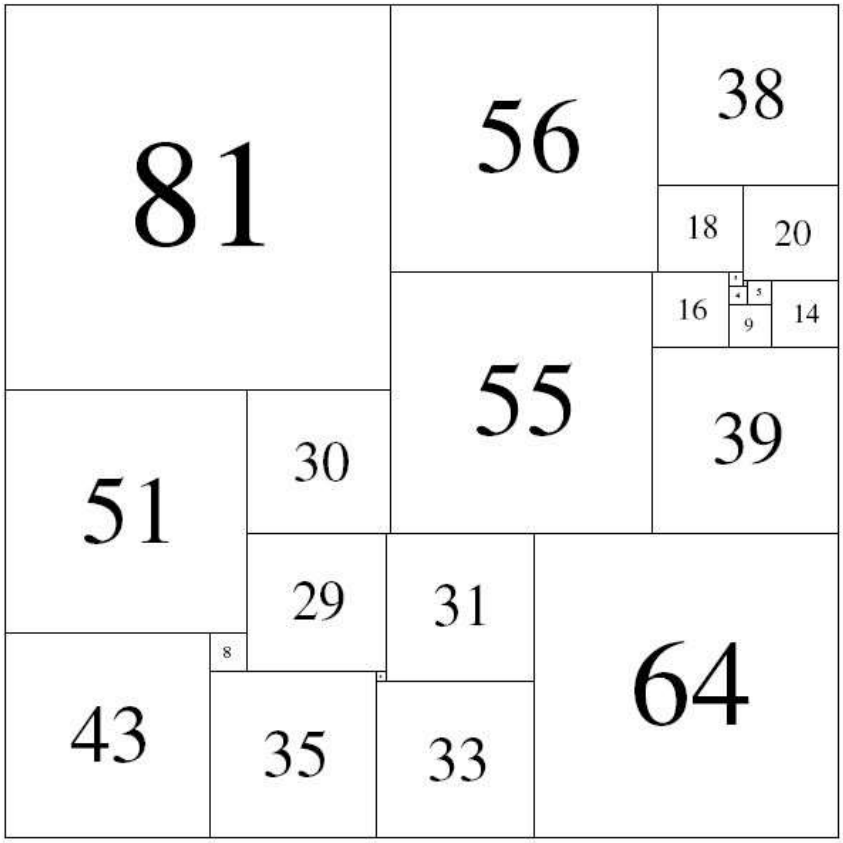
## Dai rettangoli ai quadrati

Successivi studi sulla quadratura hanno esteso il campo di interesse dalla copertura dei rettangoli a quella dei quadrati.

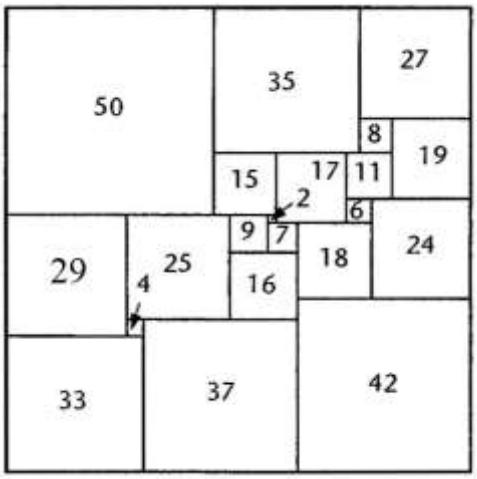
Nel 1948 l'inglese Theopilus Harding Willcocks (1912 – 2014) scoprì la possibilità di coprire un quadrato con lati lunghi 175 con 24 piastrelle quadrate:




Sul sito www.squaring.net, lo schema è disposto con il quadrato più grande, quello con i lati lunghi 81, collocato in alto a sinistra:




Nel 1962 l'olandese Adrianus Duijvestijn (1927 – 1998) dimostrò che 21 piastrelle quadrate erano sufficienti a ricoprire un quadrato con lati lunghi 112:




Le dimensioni delle piastrelle sono: 2, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 15, 16, 17, 18, 19, 24, 25, 27, 29,33, 35, 37, 42 e 50.

## La codificazione delle quadrature

Sono impiegati diversi metodi per indicare le proprietà delle singole quadrature. Essi sono generalmente scritti subito sotto allo schema, in prossimità del lato orizzontale.

L'ultimo schema contenuto nel precedente paragrafo è codificabile come segue:

"24 : 112".

La prima cifra, 24, indica il numero di quadrati che sono stati usati per coprire la superficie. La seconda corrisponde alla lunghezza dei lati del quadrato:

* 50 + 35 + 27 = 112;
* 50 + 29 + 33 = 112;
* 27 + 19 + 24 + 42 = 112;
* 33 + 37 + 42 = 112.

Un altro metodo consiste nel riunire a gruppi le lunghezze dei diversi quadrati confinanti. Sempre nel caso dell'ultimo esempio si avrebbe:

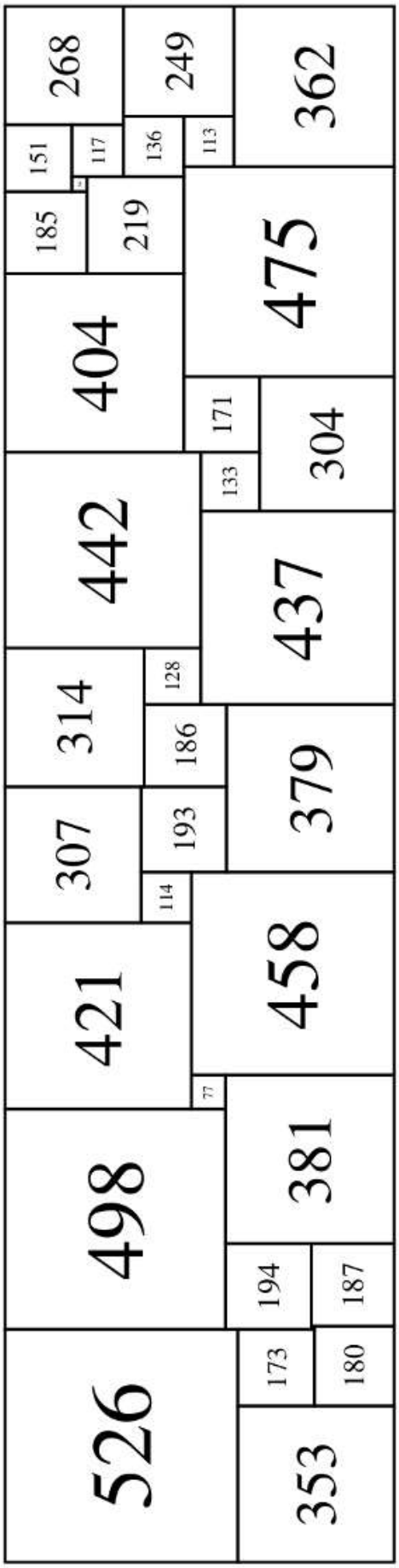
(50, 35, 27) (8, 11, 19) (15, 17, 6) (29, 4, 25) (9, 7, 16) (18, 24) (33, 37, 42).

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - APPROFONDIMENTO - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

Sul sito www.squaring.net, citato in bibliografia, sono presenti esempi di rettangoli interamente ricoperti di quadrati, con le dimensioni degli stessi rettangoli legate da un preciso rapporto *intero*.

Il caso che segue è stato creato dall'americano Brian Trial, ha ordine 36 (perché è ricoperto con questo numero di quadrati) e dimensioni 3516 * 879, nella proporzione 4 : 1.

Il quadrato in alto a destra, incuneato fra quelli di lati 185, 151, 117 e 219 ha lati lunghi 34.




36 : 3516 x 879 (4:1) BT 2007

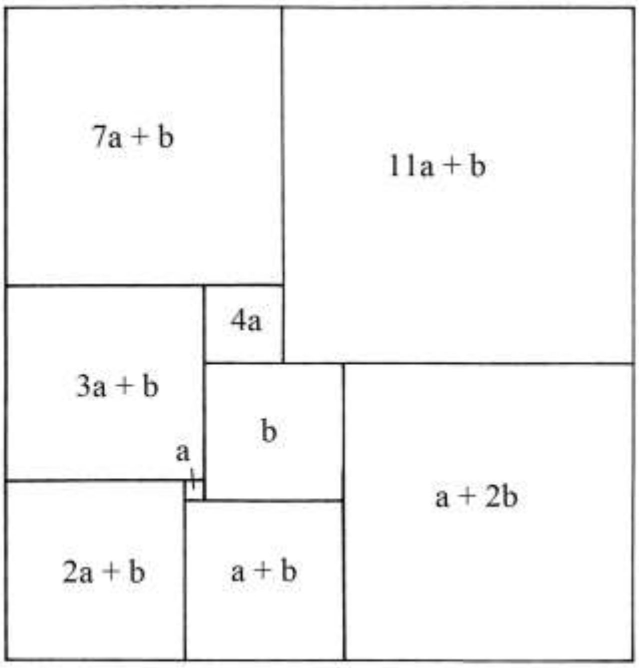
- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

L'uso dell'algebra elementare

Nella tesi di dottorato in Informatica dedicata alla quadratura dei quadrati, sostenuta nel 1999, Ian Gambini ha presentato un metodo per determinare i valori delle lunghezze dei lati dei quadrati che coprono un quadrilatero con angoli tutti retti, utilizzando semplici considerazioni di algebra elementare.

Egli ha utilizzato il caso del rettangolo di Zbigniew Moroń di ordine 9: lo schema è presente nella precedente pagina 61.

Gambini ha fissato per il lato del quadrato più piccolo – lungo 1 – il valore "a". Il quadrato adiacente ha lati lunghi "b" (in realtà la lunghezza è 7). I nove quadrati hanno i lati con lunghezze rappresentate dalle espressioni scritte nella figura che segue:




Per determinare il rapporto fra i valori delle due variabili "a" e "b", Gambini ha fissato l'uguaglianza fra la somma delle aree dei due quadrati a tratteggio verticale e la somma delle aree dei due quadrati con tratteggio orizzontale:

(4a) + (11a + b) = (b) + (a + 2b).

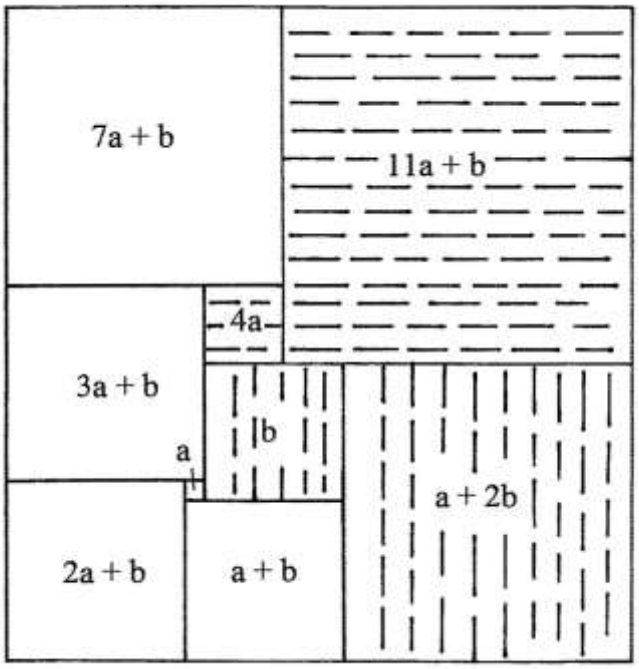
Risolvendo l'uguaglianza si ha:

4a + 11a + b = b + a + 2b

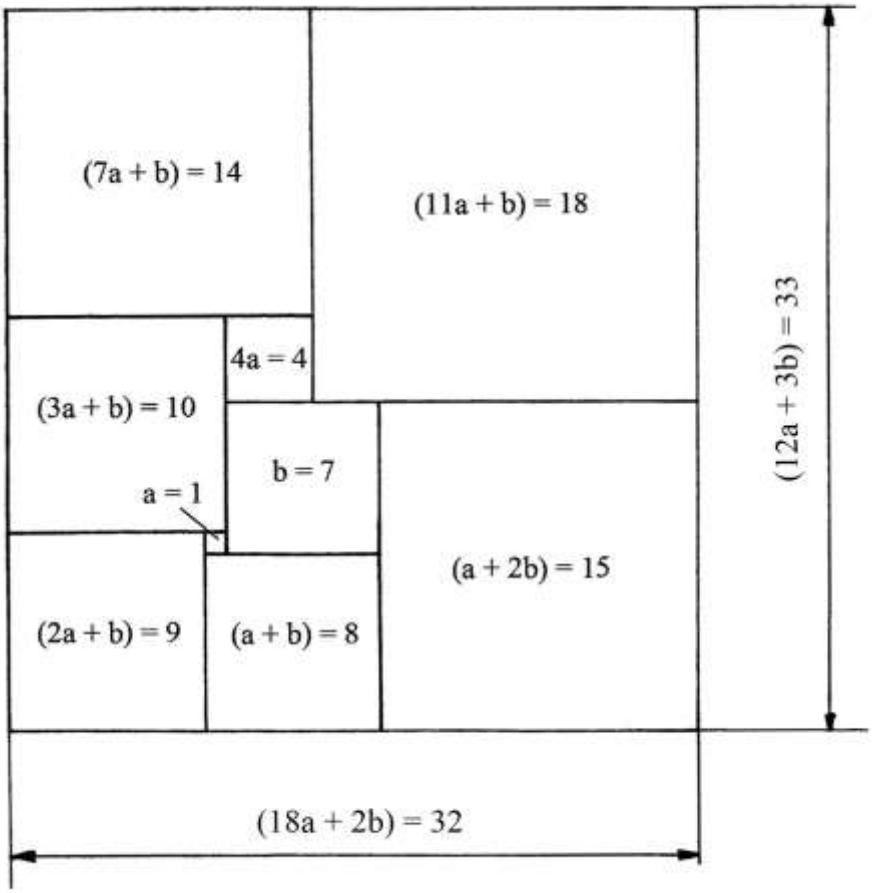
14a = 2b e

b = 7a.

Fissando per *a* il valore "1", consegue che *b* = 7.




Il risultato della soluzione delle espressioni è presentato nello schema che segue:




Il rettangolo è lungo: (18a + 2b) = 32 ed è largo: (12a + 3b) = 33.

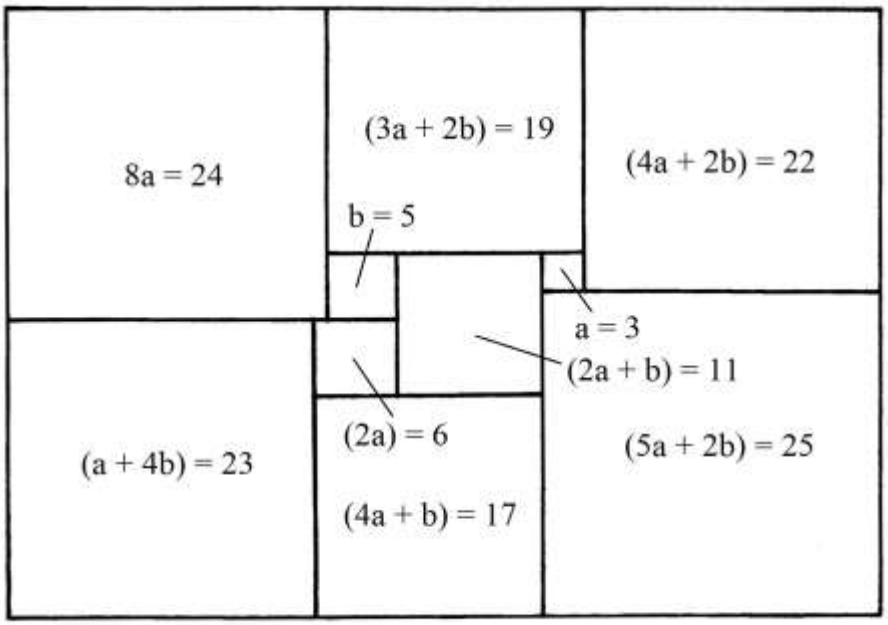
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

In modo empirico è possibile determinare altri valori per le variabili *a* e *b* da utilizzare nel caso del primo rettangolo squadrato di Zbigniew Moroń (presentato anche esso a pagina 61).

Le due variabili hanno i valori:

* *a* = 3;
* *b* = 5.

Lo schema così aggiornato è:




- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - APPROFONDIMENTO - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

I rettangoli e i quadrati oggetto di *quadrature* sono indicati con un indice numerico chiamato *ordine*: esso rappresenta il numero dei quadrati occorrenti per ricoprirli.

Possono esistere più combinazioni di quadrati capaci di ricoprire un quadrilatero: sono degli *isomeri*.

Nel caso dei *rettangoli* la tabella che segue presenta i primi casi:

RETTANGOLI

| Ordine | Numero combinazioni di quadrati esistenti (isomeri) |
|---|---|
| 9 | 2 |
| 10 | 6 |
| 11 | 22 |
| 12 | 67 |
| 13 | 213 |
| 14 | 744 |
| 15 | 2609 |

Nel caso dei *quadrati* il numero delle possibili combinazioni dei primi casi è riassunto nella tabella che segue:

QUADRATI

| Ordine | Numero combinazioni di quadrati esistenti (isomeri) |
|---|---|
| 21 | 1 |
| 22 | 8 |
| 23 | 12 |
| 24 | 26 |
| 25 | 160 |

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

## Bibliografia

1. Anderson Stuart E., “Compound Perfect Squared Squares of the Order Twenties”, arXiv:1303.0599v3 [math.CO], 18 Jun 2013, pp. 45.
2. Böhm Arrigo e altri (a cura di), “Manuale per i tecnici dell’industria del gas”, Roma, Fratelli Palombi Editori, s.d., pp. 303.
3. Brooks R. Lenard, Smith Ceddric A. B., Stone Arthur H., Tutte William T., “The dissection of rectangles into squares”, in “Duke Mathematical Journal”, vol. 7, pages 312-40, 1940.
4. Gambini Ian, Thèse “Quant aux carrés carrelés”, 1999, pp. 96, reperibile all’indirizzo http://alain.colmerauer.free.fr/alcol/ArchivesPublications/Gambini/carres.pdf (visitato il 18 febbraio 2023).
5. Someda Giovanni, “Elementi di Elettrotecnica generale”, Bologna, Pàtron, 1977, 12.a ristampa (1994), pp. XIX-604.
6. Stewart Ian, “La piccola bottega delle curiosità matematiche del Professor Stewart”, trad. it., Torino, Codice Edizioni, 2010, pp. XV-300.
7. Stewart Ian, “Numeri incredibili”, trad. it., Torino, Bollati Boringhieri, 2016, pp. 411.

## Siti Internet

www.squaring.net