© Sergio Calzolani, Firenze, 2018
sergio(punto)calzolani(at)outlook(punto)it

Il materiale contenuto in questo documento può essere riprodotto, in tutto o in parte, a scopi *non commerciali*, purché siano citati l'Autore e la fonte

Parole chiave: triangolo egizio, triangolo rettangolo, origine del triangolo rettangolo 3-4-5, teorema dell'ipotenusa, origini presso Egizi e Babilonesi, terne pitagoriche, terne primitive, terne derivate, triangoli di Pickover, numeri coprimi, frazioni pitagoriche, terne di Vogeler, Liu Hui, cerchi inscritti nei triangoli rettangoli, formule di Liu Hiu, incentro, inraggio

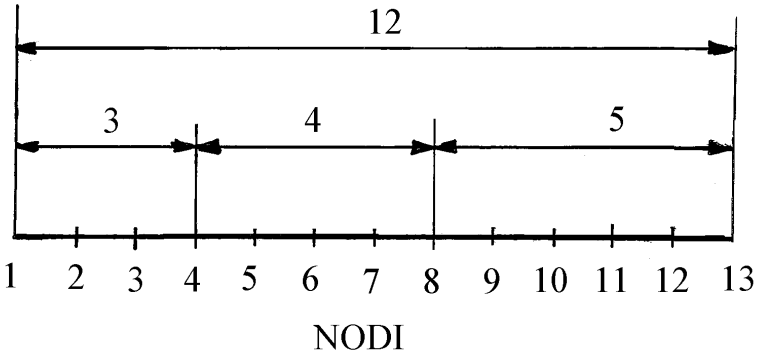
LE TERNE PITAGORICHE

I PARTE

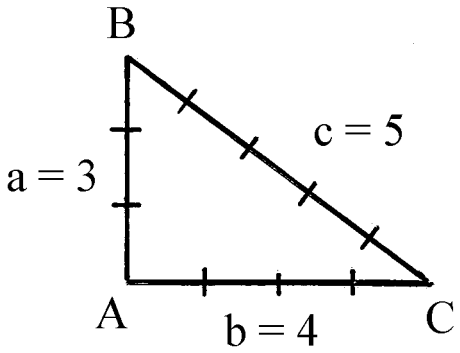
Il triangolo 3-4-5

Per la sua origine storica il triangolo rettangolo 3-4-5 fu chiamato *egiziano* (o *egizio*) da parte di Vitruvio (Marco Pollio Vitruvio, architetto romano vissuto nel I secolo a.C., autore del trattato *De Architectura*).

Una corda recante 13 nodi e divisa in 12 parti uguali dava origine al triangolo egiziano:



Con la corda veniva realizzato il triangolo rettangolo ABC:



La facile trasportabilità di questa corda e la possibilità di costruire con essa sul terreno un angolo retto ne facevano uno strumento essenziale per i rilievi effettuati dagli agrimensori.

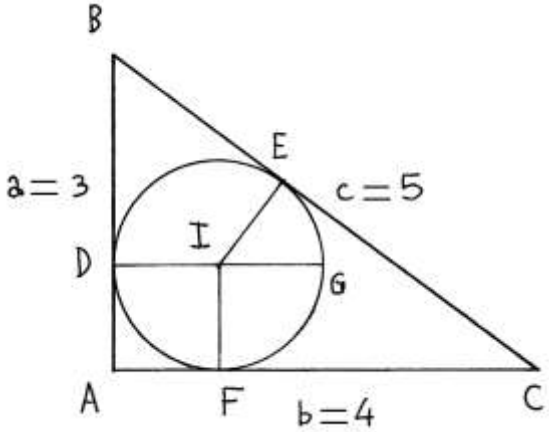
Una *terna pitagorica* è una terna formata da tre numeri naturali (a, b e c) legati dalla relazione $a^2 + b^2 = c^2$.

La terna 3-4-5 è una *terna pitagorica* perché

$$3^2 + 4^2 = 5^2 \quad \text{e cioè} \quad 9 + 16 = 25 .$$

Queste terne prendono il loro nome da Pitagora.

Il triangolo 3-4-5 possiede una serie di importanti proprietà geometriche e aritmetiche:



Il raggio del cerchio inscritto, ID = IE = IF, vale 1. Il diametro del cerchio, DG, è lungo 2.

L'area del triangolo è

$$\text{Area}_{ABC} = AB * AC/2 = 3 * 4/2 = 6 .$$

La tabella che segue riassume i valori caratteristici di questo speciale triangolo rettangolo:

entità geometrica	*valore*
raggio ID	1
diametro DG	2
cateto minore AB	3
cateto maggiore AC	4
ipotenusa BC	5
area ABC	6
somma lunghezze cateti AB e AC	7
somma lunghezze cateto minore e ipotenusa	8
somma lunghezze cateto maggiore e ipotenusa	9
perimetro	12

Il triangolo 3-4-5 nasconde al suo interno i primi *nove* numeri interi.

- APPROFONDIMENTO -

Il cosiddetto "teorema di Pitagora"

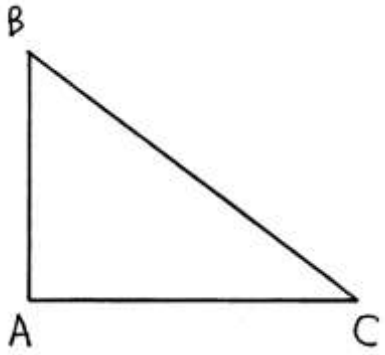
Il teorema oggi noto con il nome del matematico greco Pitagora (Samo, 580-570 – Metaponto, 495 circa a.C.) era già noto ai geometri Egizi, come ricordato anche da Vitruvio, e ai Babilonesi: riguardo a questi ultimi è sufficiente citare la notissima *tavoletta Plimpton 322*, scritta

in cuneiforme, ritrovata a Larsa (antica città sumerica nell'odierno Iraq) e risalente ai secoli XIX-XVIII a.C. Essa contiene una serie di terne pitagoriche.

Alla luce di questi dati di fatto, forse sarebbe opportuno chiamare in altro modo questa regola e cioè *teorema dell'ipotenusa*. Numerosi trattati pubblicati da matematici Italiani nel Settecento e nell'Ottocento usano questa più corretta espressione: fra gli altri vi è quello di Giovanni Inghirami (1779-1851). "Elementi di matematiche", 2.a ed., tomo II, Firenze, 1841, p. 38.

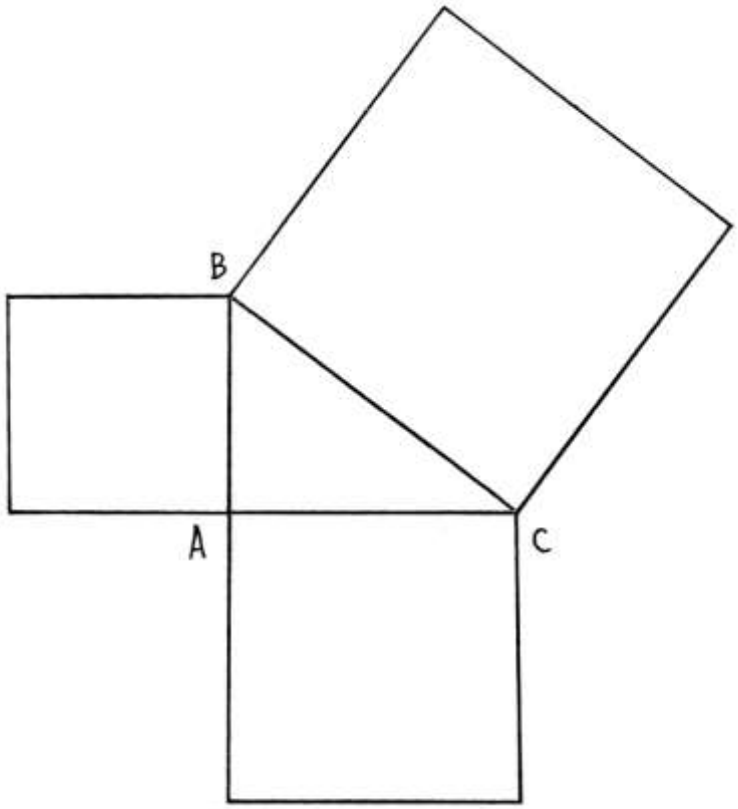
Il teorema in oggetto afferma:
"*Il quadrato costruito sull'ipotenusa di un triangolo rettangolo è uguale alla somma dei quadrati costruiti sui cateti*".

ABC è un triangolo rettangolo:



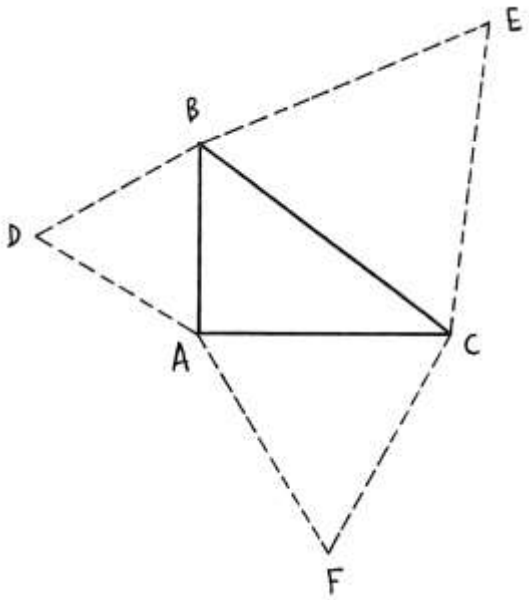
AB e AC sono i *cateti* e BC è l'*ipotenusa*.

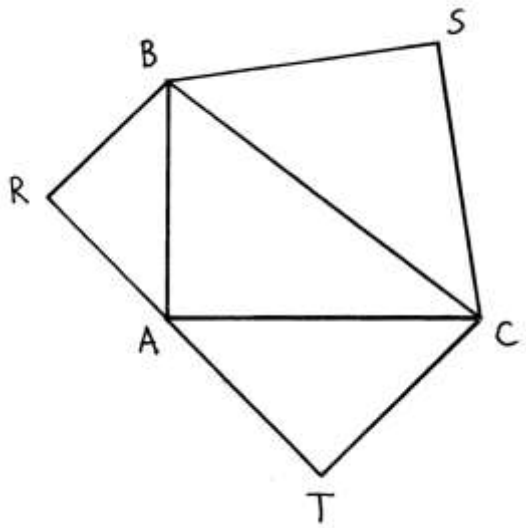
La stretta formulazione del teorema al triangolo ABC porta alla costruzione dei tre quadrati contenuti nella figura che segue:

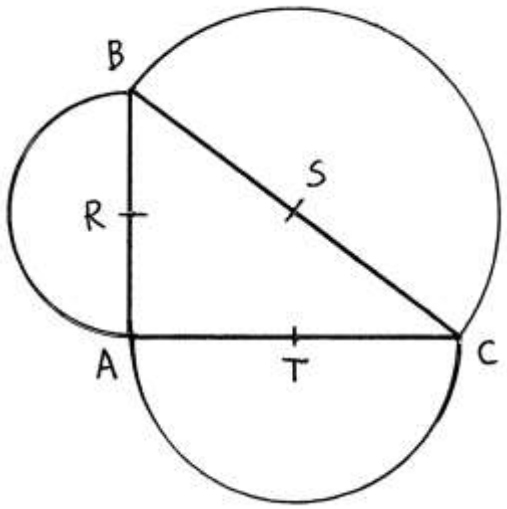


Il teorema può essere *esteso*: sui tre lati di un triangolo rettangolo possono essere disegnate tre *figure piane simili* qualsiasi: l'area di quella costruita sull'ipotenusa è *sempre* uguale alla somma

delle aree disegnate sui cateti. Di seguito sono proposti, nell'ordine, i triangoli equilateri, i triangoli isosceli e i semicerchi:







Il teorema si applica pure al caso di figure anche di forma irregolare purché fra loro *simili*: l'area della figura costruita sull'ipotenusa è uguale alla somma delle aree delle figure costruite sui cateti.

L'origine del teorema

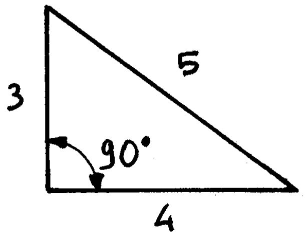
Probabilmente fu la necessità di tracciare un angolo retto a spingere o geometri Egizi e quelli della Mesopotamia a "inventare" la prima terna: quella 3-4-5.

Fra i primi strumenti usati per disegnare un arco retto erano il filo a piombo e le squadre. Il filo a piombo serviva a determinare un angolo retto nei confronti del suolo.

In Egitto il terreno fertile della Valle alluvionale del Nilo veniva diviso in particelle di forma quadrangolare assegnate agli agricoltori.

Dopo una delle periodiche alluvioni il Nilo poteva aver cancellato i confini fra i singoli campi: per ripristinarli e per misurare i campi intervenivano gli agrimensori chiamati *arpedonapti*, parola che significava "annodatori e tenditori di funi": all'inizio di questo articolo è stata presentata la corda con 13 nodi e divisa in 12 parti uguali.

Sembra ragionevole pensare che gli Egizi e i Babilonesi avessero scoperta una proprietà geometrica: un triangolo che aveva lati lunghi 3, 4 e 5 creava un angolo retto all'intersezione dei due lati ("cateti") più corti:



Gli Egizi erano in grado di costruire una squadra a angolo retto con lati lunghi nell'ordine di grandezza di un odierno *metro* (o due *cubiti reali* per circa 105 cm), ma questo strumento non era adatto per misurare i ben più lunghi lati dei campi: richiedeva un numero spropositato di misure successive e faceva correre il rischio di non assicurare la linearità.

Occorreva uno strumento più lungo e più efficiente: la *corda* divisa in parti uguali con la quale poteva essere costruito sul terreno l'angolo retto e garantire l'allineamento delle misurazioni effettuate in successione.

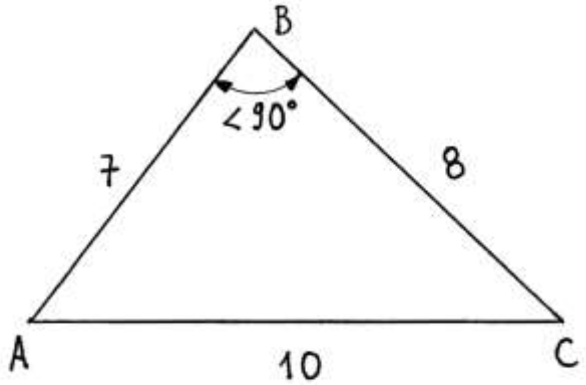
- -

Triangoli generici

Abbiamo già visto che se è soddisfatta l'eguaglianza $a^2 + b^2 = c^2$, il triangolo corrispondente è *rettangolo*.

Vediamo che cosa accade se l'eguaglianza non è soddisfatta.

Il triangolo ABC della figura



ha lati lunghi:

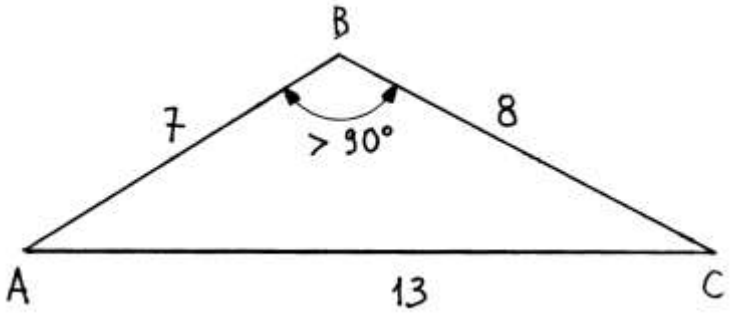
$AB = a = 7 \rightarrow a^2 = 49$
$BC = b = 8 \rightarrow b^2 = 64$
$AC = c = 10 \rightarrow c^2 = 100$

Ne consegue: $c^2 < a^2 + b^2 \rightarrow 100 < 49 + 64 \rightarrow 100 < 113$.
Il triangolo ABC non è rettangolo ma *acutangolo*.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Il triangolo ABC ha lati lunghi:

$AB = a = 7 \rightarrow a^2 = 49$
$BC = b = 8 \rightarrow b^2 = 64$
$AC = c = 13 \rightarrow c^2 = 169$



Ne consegue: $c^2 > a^2 + b^2 \rightarrow 169 > 49 + 94 \rightarrow 169 > 113$.
Il triangolo è *ottusangolo*.

Terne primitive e derivate

Una terna pitagorica è detta *primitiva* quando i tre numeri che la compongono sono fra loro *primi* (e cioè non possiedono un divisore comune diverso da 1), come è il caso dei seguenti esempi:

* 3, 4, 5 ;
* 5, 12, 13 ;
* 8, 15, 17 ;
* 7, 24, 25 ;
* 12, 35, 37.

Tutte le terne pitagoriche *primitive* sono formate da *un* numero pari e da *due* numeri dispari.

A ogni terna pitagorica corrisponde un triangolo rettangolo e viceversa.

Le prime 18 terne pitagoriche primitive sono indicate nella seguente tabella:

[3, 4, 5]	[5, 12, 13]	[7, 24, 25]
[8, 15, 17]	[9, 40, 41]	[11, 60, 61]
[12, 35, 37]	[13, 84, 85]	[16, 63, 65]
[20, 21, 29]	[20, 99, 101]	[28, 45, 53]
[33, 56, 65]	[36, 77, 85]	[39, 80, 89]
[48, 55, 73]	[60, 91, 109]	[65, 72, 97]

Il terzo valore che compare nelle terne è sempre inferiore a 100, tranne che in quelle [20, 99, 101] e [60, 91, 109].

Le terne primitive con il terzo numero compreso fra 100 e 300 sono le seguenti:

[20, 99, 101]	[60, 91, 109]	[15, 112, 113]
[44, 117, 125]	[88, 105, 137]	[17, 144, 145]
[24, 143, 145]	[51, 140, 149]	[85, 132, 157]
[119, 120, 169]	[52, 165, 173]	[19, 180, 181]
[57, 176, 185]	[104, 153, 185]	[95, 168, 193]
[28, 195, 197]	[84, 187, 205]	[133, 156, 205]
[21, 220, 221]	[140, 171, 221]	[60, 221, 229]
[105, 208, 233]	[120, 209, 241]	[32, 255, 257]
[23, 264, 265]	[96, 247, 265]	[69, 260, 269]
[15, 252, 277]	[160, 231, 281]	[161, 240, 289]
[68, 285, 293] .		

Se i tre numeri che formano una terna primitiva sono moltiplicati per un numero si ricava una *terna pitagorica derivata* come mostrano gli esempi che seguono:

* [3 – 4 – 5] * 2 = [6 – 8 – 10] ;
* [3 – 4 – 5] * 3 = [9 – 12 – 15] ;
* [3 – 4 – 5] * 4 = [12 – 16 – 20] ;
* [3 – 4 – 5] * 5 = [15 – 20 – 25] ;
* [3 – 4 – 5] * 6 = [18 – 24 – 30] .

È anche possibile moltiplicare i componenti di una terna primitiva per un numero minore di 1, ad esempio 0,5:

[3 – 4 – 5] * 0,5 = [1,5 – 2 – 2,5] .

La terna [1,5 – 2 – 2,5] è anch'essa pitagorica.

Proprietà generali delle terne pitagoriche

È facile verificare che le terne pitagoriche formate da numeri interi possiedono le seguenti proprietà:

* un numero è sempre divisibile per 3;
* un altro numero è sempre divisibile per 5 (in alcuni casi lo stesso numero è divisibile sia per 3 che per 5);
* il prodotto dei due numeri più piccoli (corrispondenti alle lunghezze dei cateti) è sempre divisibile per 12;
* il prodotto dei tre numeri di una terna è sempre divisibile per 60.

La famiglia del triangolo 3-4-5

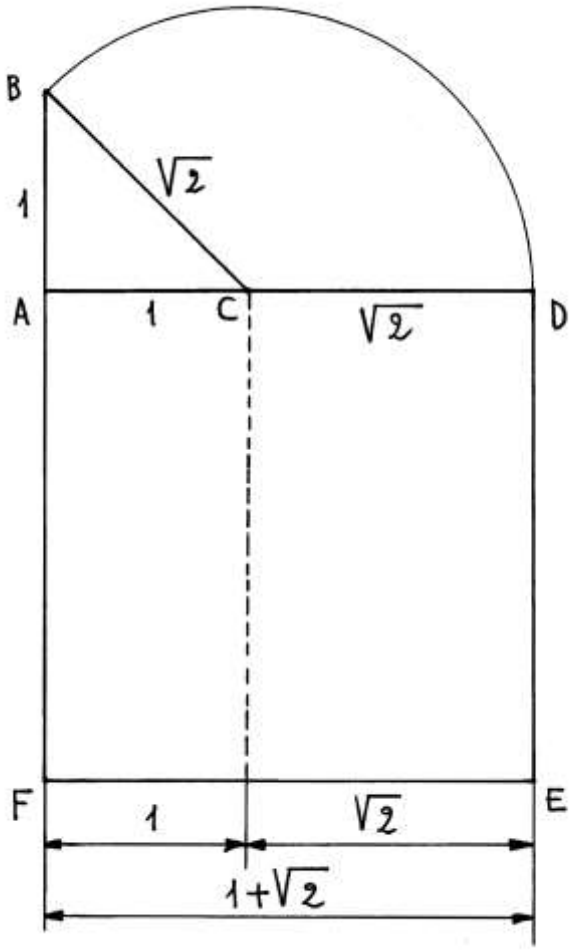
Fra i triangoli pitagorici esiste una famiglia caratterizzata da terne contenenti *numeri consecutivi*: la prima è quella 3-4-5.

La seconda terna con numeri consecutivi è quella 20-21-29.

Il ricercatore americano Clifford Pickover ha elaborato una formula e ha scritto un programma nel linguaggio BASIC per calcolare le lunghezze dei lati dei triangoli appartenenti a questa famiglia. Lo stesso Pickover li ha chiamati *triangoli che pregano*.

La procedura proposta dal ricercatore americano è la seguente: essa muove dalla fissazione della lunghezza dell'*ipotenusa*. Occorre introdurre una costante, *k*, a partire dal suo valore iniziale che è $k = (\sqrt{2} + 1)^2 \approx 5{,}828427$.

Il significato geometrico della costante è spiegato nella figura che segue:



ABC è un triangolo rettangolo *isoscele* con i cateti lunghi *convenzionalmente* 1. L'ipotenusa BC è quindi lunga √2 .

Prolungare verso destra AC e verso il basso BA.

Fare centro in C e con raggio CB tracciare un arco da B fino a incontrare il prolungamento di AC nel punto D.

Il segmento AD è lungo: $AD = AC + CD = 1 + \sqrt{2} = \sqrt{2} + 1$.

Su AD costruire il quadrato ADEF. Esso ha area

$$\text{Area}_{ADEF} = (\sqrt{2} + 1)^2 = k .$$

La costante k equivale all'area di ADEF.

Moltiplicare 1 per la costante k e arrotondare il risultato per difetto all'intero più vicino:

$$1 * k \approx 5{,}828427 \rightarrow 5 .$$

In matematica, talvolta la *parte intera* di un numero e cioè quello risultante dall'arrotondamento per difetto è indicata con l'impiego di due simboli a forma di "L":

$$\llcorner (1 * k) \lrcorner = 5$$

Non esiste una terna pitagorica che corrisponda a un triangolo rettangolo con ipotenusa lunga 1.

Occorre procedere oltre e moltiplicare l'ultimo risultato intero – 5 – per k e arrotondare il risultato per difetto all'intero più vicino:

$$5 * k \approx 5 * 5{,}828427 \approx 29{,}14213 \rightarrow 29.$$

La procedura può continuare con la stessa sequenza.

I due interi finora calcolati, 5 e 29, sono le lunghezze delle ipotenuse dei primi due componenti di questa famiglia.

A partire dalle lunghezze delle ipotenuse, Pickover utilizza i seguenti passi per ricavare quelle dei cateti.

Consideriamo il valore 5:

* Elevare al quadrato: $5^2 = 25$.
* Dividere il risultato per 2: $25 : 2 = 12,5$.
* Estrarre la radice quadrata: $\sqrt{(12, 5)} \approx 3,5355$.

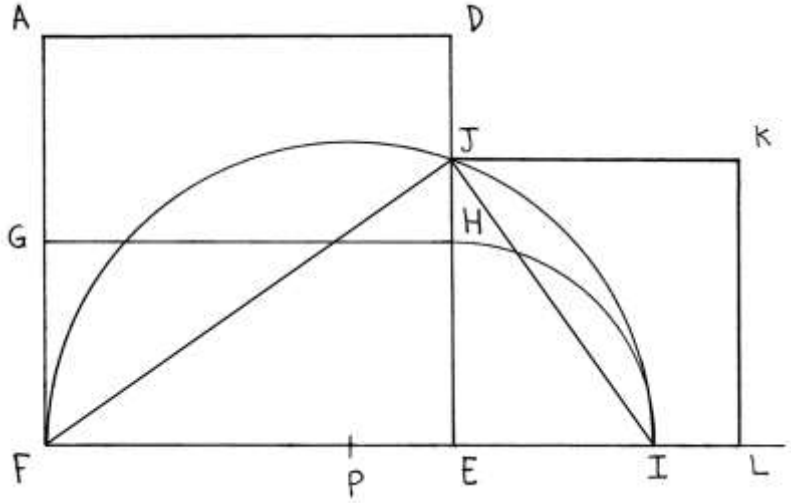
Il *numero reale* 3,5355 va arrotondato per difetto o per eccesso agli interi più vicini fra i quali è compreso:

* 3,5355 arrotondato *per difetto* a 3, che è la lunghezza del *cateto minore*.
* 3,5355 arrotondato *per eccesso* a 4, che è la lunghezza del *cateto maggiore*.

È stata appena generata la terna 5-3-4.

Il prodotto delle lunghezze dei due cateti, 3*4 = 12, si avvicina a 12,5 , numero razionale la cui radice quadrata li ha generati.

La figura che segue completa la precedente e descrive l'origine delle lunghezze dei due cateti del triangolo 5-3-4:



ADEF è il quadrato già incontrato. AD è, in scala, lungo quanto l'ipotenusa di un triangolo rettangolo, ad esempio 5.

GH è la *mediana* orizzontale che divide ADEF in due rettangoli di uguale superficie, ADHG e GHEF: l'area di ADEF è $5^2 = 25$ e quella di ciascuno dei due rettangoli è

$$\text{Area}_{ADHG} = \text{Area}_{GHE}F = ½ * \text{Area}_{ADEF} = 25/2 = 12,5 .$$

La procedura di Pickover chiede l'estrazione della radice quadrata di 12,5 e cioè domanda la lunghezza del lato del quadrato di area uguale a quella del rettangolo GHEF. A questo scopo provvede la costruzione geometrica in figura: prolungare verso destra il lato FE. Fare centro in E e con raggio EH tracciare un arco da H fino a tagliare in I il prolungamento di FE.

Determinare il punto medio di FI: è P.

Con centro in P e raggio PE = PI disegnare una semicirconferenza da F a I: essa interseca il lato DE in un punto, J.

FJI è un triangolo rettangolo inscritto nel semicerchio FJI.

L'altezza JE è *medio proporzionale* fra le proiezioni dei cateti (FJ e JI) sull'ipotenusa (FI):

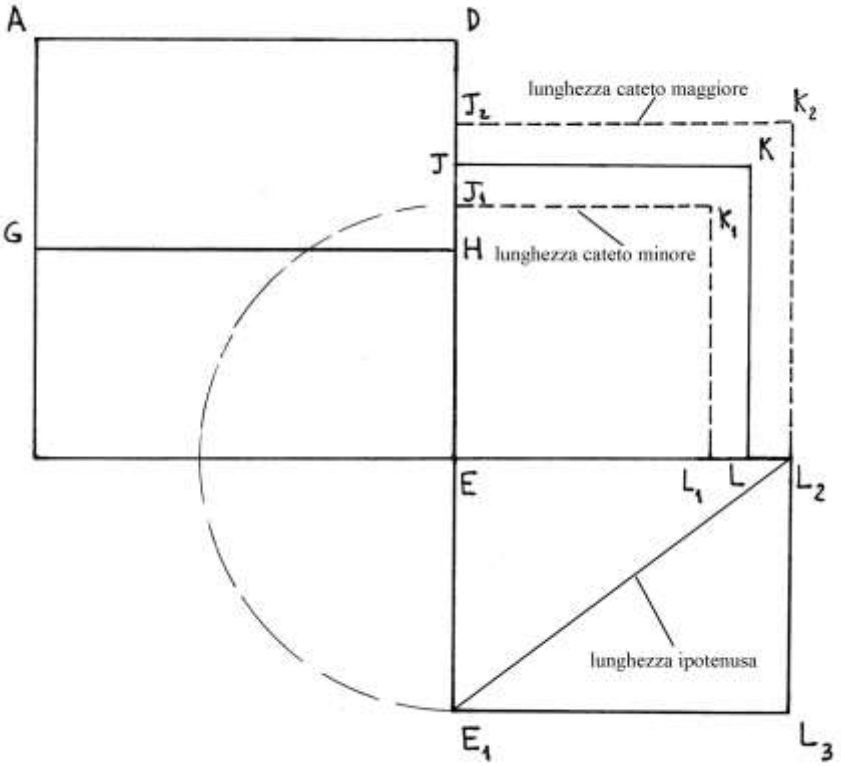
$$FE : EJ = EJ : EI \qquad \text{da cui} \qquad EJ^2 = FE * EI .$$

Fino a questo passaggio è stato applicato il 2° teorema di Euclide sui triangoli rettangoli inscritti.

Sostituendo nella formula i valori di FE (5) e di EI = EH = 5/2) si ha:

$EJ^2 = 5 * 2,5 = 12,5$ e il lato EJ è lungo $EJ = \sqrt{(12,5)} \approx 3,5355$.

La figura che segue conclude la descrizione grafica della costruzione della terna 5-3-4:



EJKL è il quadrato costruito sul lato EJ.

EG_1 è la lunghezza approssimata per difetto all'intero più vicino di quella di EJ e corrisponde al cateto minore, lungo 3, del triangolo 5-3-4.

A sua volta, EG_2 è la lunghezza approssimata per eccesso di EJ e equivale a quella del cateto più lungo della terna 5-3-4 e cioè 4.

I quadrati $EJ_1K_1L_1$ e $EJ_2K_2L_2$ sono costruiti sui due cateti.

Prolungare verso il basso DE e K_2L_2. Fare centro nel punto E e, con raggio EJ_1, tracciare un arco da J_1 fino a incontrare il prolungamento di DE in E_1. Con la stessa apertura fare centro in L_2 e fissare il punto L_3.

Il rettangolo $EL_2L_3E_1$ ha dimensioni *convenzionali* 4 * 3 e ha area approssimativamente uguale a quella del quadrato EJKL.

E_1L_2 è una delle due diagonali del rettangolo $EL_2L_3E_1$ ed ha lunghezza:

$$E_1L_2 = \sqrt{(E_1L_3^2 + L_2L_3^2)} = \sqrt{(4^2 + 3^2)} = \sqrt{(16 + 9)} = 5 .$$

EL_2E_1 e $L_2L_3E_1$ sono due triangoli rettangoli i cui lati hanno lunghezze date dalla terna 5-3-4.

Vediamo ora il caso successivo, con ipotenusa lunga 29. I passi occorrenti per generare gli altri due numeri della terna sono i seguenti:

* Elevare al quadrato: $29^2 = 841$.
* Dividere per 2: $841 : 2 = 420,5$.
* Estrarre la radice quadrata: $\sqrt{(420,5)} \approx 20,506$.

Il numero reale va arrotondato come già fatto nel caso precedente:

* 20,506 arrotondato *per difetto* a 20, che è la lunghezza del *cateto minore*.
* 20,506 arrotondato *per eccesso* a 21, che è la lunghezza del *cateto maggiore*.

È stata creata la terna 29-20-21.

Il prodotto delle lunghezze dei due cateti, 20*21 = 420, si avvicina al valore di 420,5 la cui radice quadrata ha originato i due numeri consecutivi.

Concludiamo con la terza terna di questa famiglia.

Moltiplicare la lunghezza dell'ipotenusa della seconda terna per la costante k:

$29 * k \approx 29 * 5{,}828427 \approx 169{,}024383$, arrotondato per difetto a 169.

I passi della procedura sono i seguenti:

* elevare al quadrato 169: $169^2 = 28561$.
* Dividere per 2: $28561 : 2 = 14280{,}5$.
* Estrarre la radice quadrata: $\sqrt{(14280{,}5)} \approx 119{,}501$.

L'ultimo risultato va arrotondato:

* 119,501 arrotondato per difetto a 119, che è la lunghezza del cateto minore;
* 119,501 arrotondato per eccesso a 120, che è la lunghezza del cateto maggiore.

169, 119 e 120 formano una terna pitagorica e vale la relazione:

$169^2 = 119^2 + 120^2$.

Le ipotenuse (5, 29 e 169) delle prime tre terne formano una *progressione geometrica* di ragione k e lo stesso vale per le lunghezze dei cateti:

$169 \approx 29 * k \approx (5 * k) * k \approx 5 * k^2$

$119 \approx 20 * k \approx (3 * k) * k \approx 3 * k^2$

$120 \approx 21 * k \approx (4 * k) * k = 4 * k^2$.

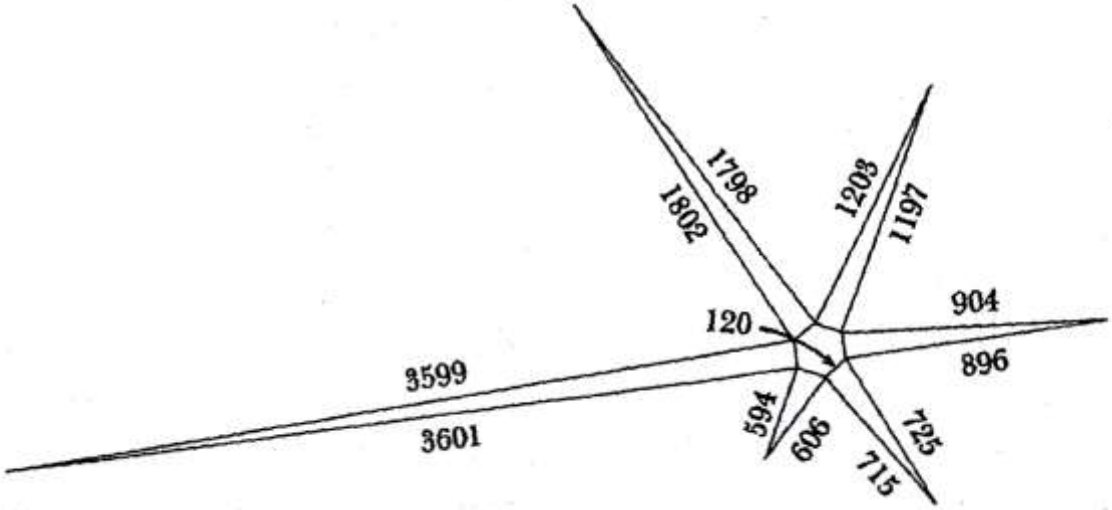
La tabella che segue riassume i dati relativi alle prime quattro terne di questa famiglia:

lunghezza ipotenusa	*lunghezza cateto minore*	*lunghezza cateto maggiore*
5	3	4
29	20	21
169	119	120
985	696	697

Semplici calcoli aritmetici dimostrano che le tre serie di numeri sono progressioni geometriche di ragione $k \approx 5{,}828427$.

<u>Una curiosità</u>

Nella figura che segue, riprodotta da p. 193 del testo di Pickover, il ricercatore americano ha costruito un grafico basato su di un esagono regolare con lati lunghi 120:

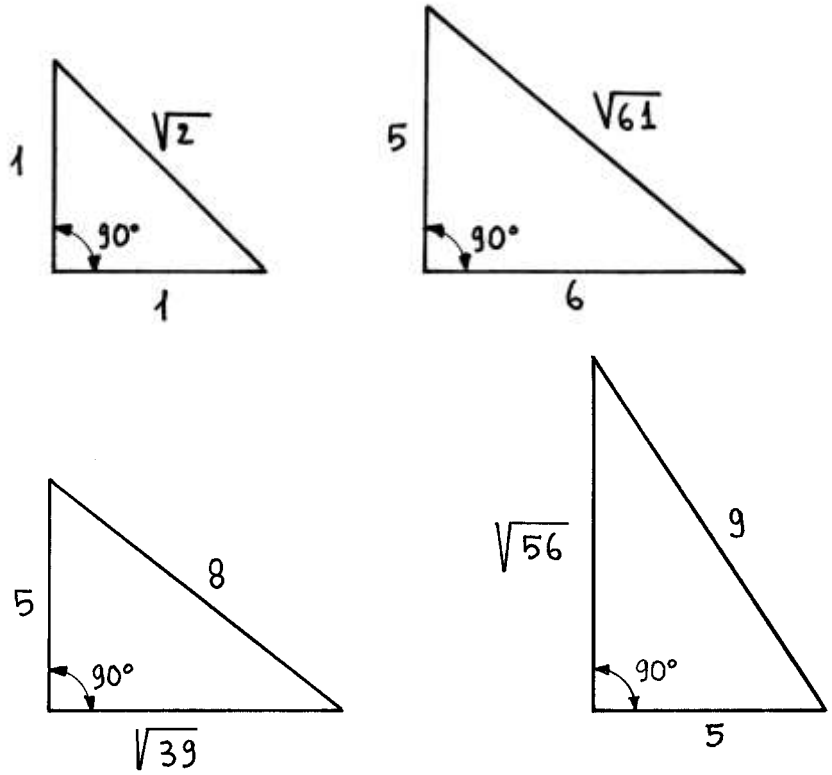


I lati corrispondono ai cateti più corti di sei triangoli pitagorici che hanno in comune il cateto minore.

A che cosa serve la conoscenza delle terne pitagoriche

Le terne pitagoriche trovano molte applicazioni nella *geometria pratica* e nella tecnologia. La loro conoscenza permette di impiegare triangoli rettangoli con lati lunghi numeri interi e tutto ciò allo scopo di semplificare i calcoli.

Infatti, non tutti i triangoli rettangoli hanno lati con lunghezze rappresentate da numeri interi o razionali, come dimostrano i quattro esempi che seguono:



Queste quattro terne *non* sono pitagoriche.

Origine delle terne pitagoriche primitive secondo Pitagora

Il matematico e ingegnere egiziano Erone (I secolo d.C.) e il matematico bizantino Proclo (412 – 485) attribuirono a Pitagora (circa 570 – 495 a.C.) una regola per la generazione di triangoli rettangoli con numeri interi *dispari* e diversi da 1.

La regola parte dalla scelta di un numero intero *dispari*, indicato con *n*, che corrisponde alla lunghezza del cateto più corto.

Facciamo un esempio e scegliamo il numero $n = 3$: esso rappresenta la lunghezza del cateto più corto del triangolo rettangolo equivalente.

La lunghezza del secondo cateto è data dalla formula:

$$\text{cateto maggiore} = \frac{n^2 - 1}{2} = \frac{3^2 - 1}{2} = 4 .$$

Infine, l'ipotenusa è data da

$$\text{ipotenusa} = \left(\frac{n^2-1}{2}\right) + 1 = 4 + 1 = 5$$

.

L'ipotenusa è stata calcolata sommando 1 alla lunghezza del cateto maggiore.

Il triangolo che ne risulta è la terna pitagorica primitiva 3-4-5.

Facciamo un altro esempio per chiarire le idee e scegliamo il numero primo 5 quale lunghezza del cateto più corto.

Il cateto maggiore è lungo

$$\frac{5^2-1}{2} = \frac{25-1}{2} = 12$$

e l'ipotenusa è lunga: 12 + 1 = 13 .

La terna pitagorica che ne risulta è 5-12-13 che è la seconda primitiva.

Origine delle terne pitagoriche primitive secondo Platone

Sempre stando a Proclo, Platone (428 – 348 a.C.) avrebbe costruito le terne pitagoriche primitive a partire da un *numero pari*.

Il metodo è così articolato:

* scegliere un numero *pari*, ad esempio $n = 4$ che è la lunghezza del cateto più lungo del triangolo corrispondente alla terna;
* il cateto minore è dato da

$$\left(\frac{n}{2}\right)^2 - 1 = \left(\frac{4}{2}\right)^2 - 1 = 2^2 - 1 = 3$$

;

* infine, l'ipotenusa è ottenuta da

$$\left(\frac{n}{2}\right)^2 + 1 = \left(\frac{4}{2}\right)^2 + 1 = 2^2 + 1 = 5$$

.

La terna pitagorica che ne risulta è 4-3-5 che è identica a quella 3-4-5 facendole subire delle trasformazioni; la figura che segue mette a confronto i due metodi: a sinistra il triangolo 4-3-5 secondo il metodo di Platone e a destra quello ottenuto applicando il metodo di Pitagora:

Origine delle terne pitagoriche primitive secondo Diofanto

Ai due metodi precedenti va aggiunto quello messo a punto dal matematico bizantino Diofanto di Alessandria (III – IV secolo d.C.) che si basò sugli *Elementi* di Euclide (III secolo a.C.).

Diofanto fissò una semplice regola per determinare una terna pitagorica primitiva:

* scegliere due diversi numeri interi, ad esempio $p = 2$ e $q = 1$;
* calcolare il loro doppio prodotto: $2 * p * q = 2 * 2 * 1 = 4$;
* calcolare la differenza fra i loro quadrati: $p^2 - q^2 = 2^2 - 1^2 = 3$;
* calcolare la somma dei loro quadrati: $p^2 + q^2 = 2^2 + 1^2 = 5$.

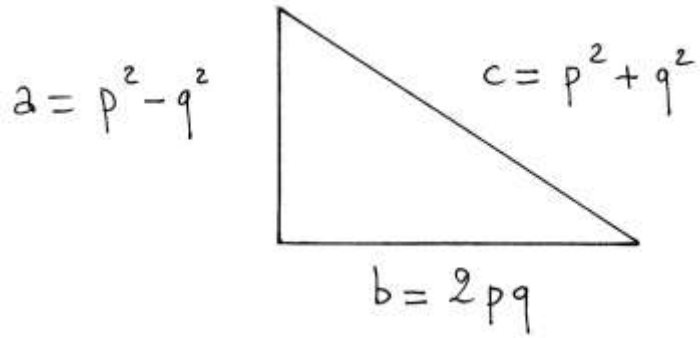
Questi tre numeri – 4, 3 e 5 – formano una terna pitagorica.

Scegliendo altri due numeri, $p = 3$ e $q = 2$, il risultato è:

* $2 * p * q = 2 * 3 * 2 = 12$;
* $p^2 – q^2 = 3^2 – 2^2 = 9 – 4 = 5$;
* $p^2 + q^2 = 3^2 + 2^2 = 9 + 4 = 13$.

I numeri 5-12-13 formano la terna pitagorica primitiva che segue quella 3-4-5 e corrisponde a un triangolo rettangolo con lati lunghi 5, 12 e 13.

La figura che segue descrive il metodo di Diofanto:



I numeri p e q sono interi *coprimi* fra loro: essi non hanno divisori comuni tranne 1 o -1. Sull'argomento vedere il successivo APPROFONDIMENTO.

Applicando il teorema di Pitagora al precedente triangolo si ottiene quanto segue:

$$a^2 + b^2 = c^2 = (p^2 – q^2)^2 + (2pq)^2 = p^4 + q^4 – 2*p^2*q^2 + 4*p^2*q^2 =$$
$$= p^4 + q^4 + 2*p^2*q^2 = (p^2 + q^2)^2$$

Ne consegue: $c = p^2 + q^2$.

In una terna pitagorica uno dei due numeri più piccoli è *dispari* e l'altro è *pari*: nel caso della terna 3-4-5, il 3 è dispari e il 4 è pari.

Il quadrato di un numero dispari è ancora dispari: $3^2 = 9$, mentre quello di un numero pari resta pari: $4^2 = 16$.

La somma dei quadrati di un numero pari e di un numero dispari è dispari. Un esempio chiarisce questa affermazione:

$$a^2 + b^2 = c^2$$
$$3^2 + 4^2 = 5^2$$
$$9 + 16 = 25$$

Il quadrato di 5 (25) è *dispari*.

In generale, i numeri che formano terne pitagoriche sono *divisibili* per 3, oppure per 4 o per 5 oppure per due di questi numeri con il caso limite della terna 3-4-5 e dei suoi multipli, divisibili per 3, 4 e 5.

Il prodotto dei cateti (a * b) di un triangolo rettangolo è sempre divisibile per 12 (3 * 4) e il prodotto dei tre lati (a * b * c) è divisibile per 60 (12 * 5).

La tabella che segue contiene le prime terne pitagoriche *primitive* secondo il metodo di Diofanto:

p	q	$a = p^2 - q^2$	$b = 2*p*q$	$c = p^2 + q^2$
2	1	3	4	5
3	2	5	12	13
4	3	7	24	25
5	4	9	40	41
6	5	11	60	61
7	6	13	84	85
8	7	15	112	113
9	8	17	144	145
10	9	19	180	181

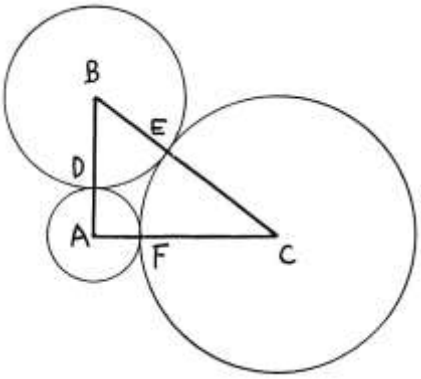
Un sommario esame delle cifre contenute nella tabella porta a alcune conclusioni:

* *p* è sempre maggiore di *q*;
* in questo caso, i valori di *p* e di *q* sono due progressioni aritmetiche di ragione 1;
* i valori di *a* crescono secondo una progressione aritmetica di ragione 2;
* i valori di *b* e di *c* crescono secondo progressioni aritmetiche di ragione 4;
* infine, i valori di *c* sono legati a quella di *b* dalla relazione $c = b + 1$.

L'ultima proprietà è interessante: i triangoli rettangoli costruiti con queste terne sono *quasi isosceli*.

Origine geometrica del triangolo 3-4-5

Il triangolo rettangolo 3-4-5 può essere generato con un metodo puramente geometrico, con la costruzione mostrata nella figura che segue:



Disegnare una circonferenza di raggio 1 con centro in A e tracciare due raggi fra loro perpendicolari, che tagliano la circonferenza nei punti D e F e prolungarli come in figura.

Fissare il punto B a distanza DB = 2 e farvi centro con questo raggio: questa seconda circonferenza è tangente alla prima in D.

Infine, fissare il punto C a distanza di 3 da F e fare centro in C con raggio CF. Questa terza circonferenza è tangente alle prime due nei punti E e F.

I tre centri, A, B e C, sono i vertici del triangolo rettangolo 3-4-5.

Riepiloghiamo le lunghezze dei diversi segmenti presenti nella figura:

* AB = AD + DB = 1 + 2 = 3 ;
* BC = BE + EC = 2 + 3 = 5 ;
* AC = AF + FC = 1 + 3 = 4 .

I raggi delle tre circonferenze formano una progressione aritmetica di ragione 1: 1-2-3. Le lunghezze dei lati del triangolo formano anche esse una progressione aritmetica di ragione 1: 3-4-5.

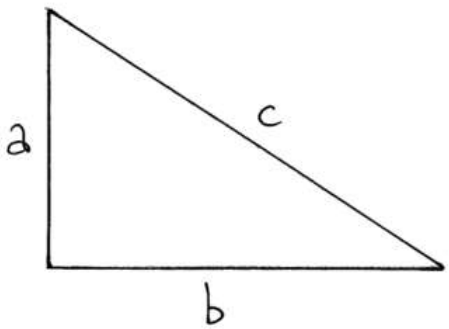
Triangoli rettangoli razionali

I numeri 9, 25, 49, 81, … sono quadrati *dispari* di numeri *dispari*: 3, 5, 7, 9, …

Questi numeri possiedono un'importante proprietà scoperta dagli appartenenti alla Scuola dei pitagorici.

I numeri sono i quadrati della lunghezza di un cateto di certi triangoli rettangoli.

Nella figura che segue, a è il cateto verticale (il minore), b è il cateto maggiore e c l'ipotenusa:



Nel caso di 9, esso corrisponde al quadrato della lunghezza del *cateto minore*:

$a^2 = 3^2 = 9$

Il secondo cateto, b, è dato dalla formula

$b = (a^2 – 1)/2 = (9 – 1)/2 = 8/2 = 4$.

L'ipotenusa, c, è data da:

$c = (a^2 + 1)/2 = (9 + 1)/2 = 10/2 = 5$.

Valgono le seguenti relazioni:

$c^2 = a^2 + b^2$

$5^2 = 3^2 + 4^2$

$25 = 9 + 16$

Nel caso del numero quadrato 25 $(a^2 = 5^2 = 25)$, impieghiamo le precedenti formule:

$b = (a^2 – 1)/2 = (25 – 1)/2 = 12$

$c = (a^2 + 1)/2 = (25 + 1)/2 = 13$.

Il triangolo 5 – 12 – 13 è rettangolo e i tre numeri formano una *terna pitagorica*:

$5^2 + 12^2 = 13^2$

Consideriamo ora il caso di $7^2 = 49$.

Il cateto più corto è lungo $a = 7$.

Il secondo cateto, b, è lungo:

$b = (a^2 – 1)/2 = (49 – 1)/2 = 24$.

L'ipotenusa, c, è lunga:

$c = (a^2 + 1)/2 = (49 + 1)/2 = 25$.

La terna 7 – 24 – 25 è pitagorica e il triangolo è rettangolo.
Tutti e tre questi triangoli rettangoli sono chiamati *razionali*.
La regola generale che si può ricavare da questi tre esempi è:

Il quadrato dispari della lunghezza del cateto minore di un triangolo rettangolo fornisce le lunghezze degli altri due lati di un triangolo rettangolo razionale.

La regola può essere riassunta con la seguente formula:

$$a^2 + [(a^2 - 1)/2]^2 = [(a^2 + 1)/2]^2$$

Essa equivale a

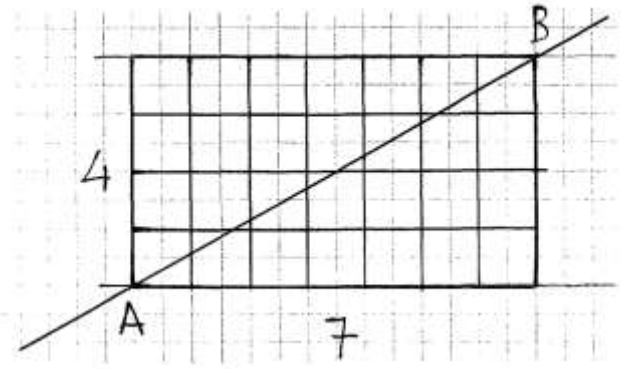
$$a^2 + b^2 = c^2 .$$

- APPROFONDIMENTO -

I coprimi

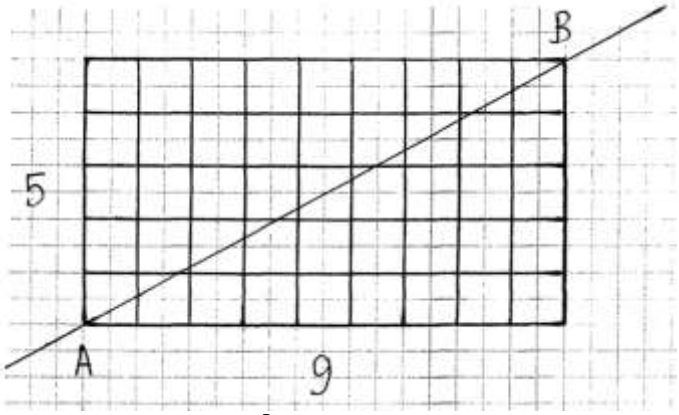
Ad esempio 4 (= 2^2) che *non* è un primo e 7 che è un primo, sono fra loro *coprimi* perché hanno in comune solo un divisore, 1.

Il grafico seguente è formato da una griglia rettangolare di 4 x 7 quadrati di lato unitario:



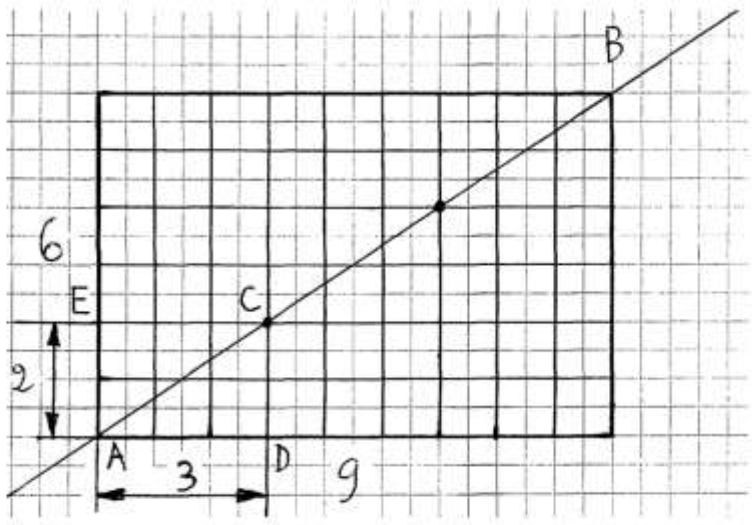
La retta passante per i punti A e B *non* incontra alcun vertice interno della griglia.

Anche i numeri 5 e 9 (= 3^2) sono fra loro *coprimi* e nella griglia ad esse relativa la diagonale AB non incontra alcun vertice:



Infine, nel caso di 6 (=2*3) e 9 (= 3^2) i numeri *non* sono coprimi perché hanno *due* divisori comuni: 1 e 3.

Il grafico che segue descrive la situazione:



La diagonale AB interseca due volte i vertici interni della griglia.

Se il punto A ha coordinate [0, 0], il punto C ha coordinate [3, 2] e le sue proiezioni D e E le hanno rispettivamente [3, 0] e [0, 2].

La diagonale AB è divisa in 3 parti uguali e 3 è uno dei divisori comuni ai due numeri 6 e 9.

La verifica se due numeri interi sono coprimi può essere ottenuta semplicemente per via grafica con una quadrettatura come quella usata nei tre esempi appena presentati.

In generale, la diagonale di una griglia rettangolare con lati lunghi quanto due numeri interi non taglia alcun vertice interno del quadrettato se i due numeri sono fra loro coprimi.

- -

Le frazioni pitagoriche

Si deve al matematico Diofanto di Alessandria (III – IV secolo d.C.) la definizione di *frazione pitagorica*.

Data una terna pitagorica (a, b, c) di numeri interi, le frazioni

a/b e b/a sono chiamate *pitagoriche*.

Nella terna il numero c è il maggiore ed è legato agli altri due dalla relazione

$c^2 = a^2 + b^2$.

Diofanto dimostrò che le frazioni pitagoriche hanno la forma

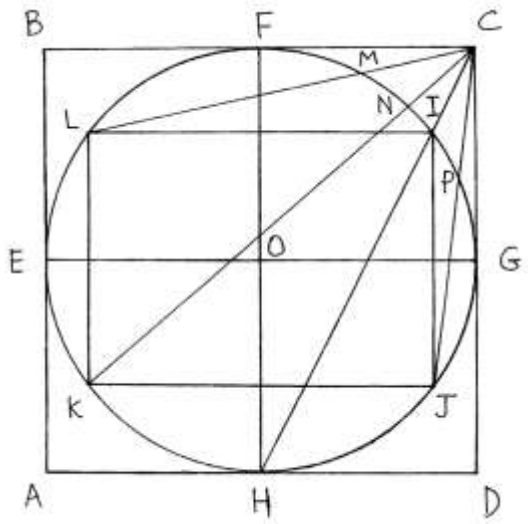
$a/b = (p^2 – q^2)/2*p*q$ oppure $b/a = 2*p*q/(p^2 – q^2)$

Sul significato di queste espressioni e sulla loro rappresentazione grafica rimandiamo al precedente paragrafo.

Le terne pitagoriche di Vogeler

Il matematico americano Roger Vogeler ha dimostrato la costruibilità di alcune terne pitagoriche usando un solo diagramma geometrico (fonte Conway e Guy).

ABCD è un quadrato; E, F, G e H sono i punti medi dei suoi quattro lati:



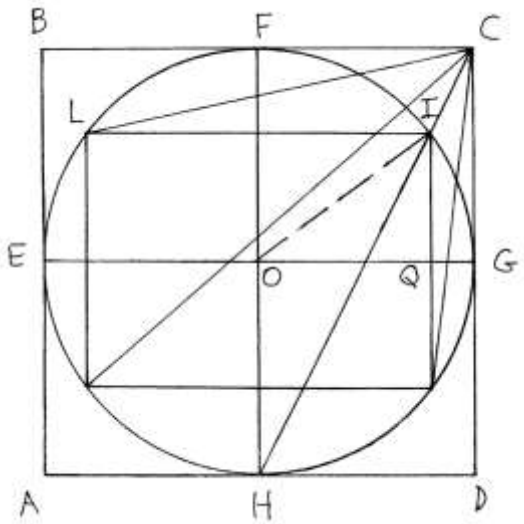
O è il centro della circonferenza *inscritta* nel quadrato e di raggio OE lungo metà del lato del quadrato.

Da un vertice del quadrato (ad esempio C) tracciare un segmento fino a un punto medio opposto (nell'esempio, H). Esso taglia la circonferenza in un punto, I.

A partire da I, costruire il rettangolo IJKL.

Dal punto C disegnare i segmenti CL, CK e CJ. Essi tagliano la circonferenza nei punti M, N e P.

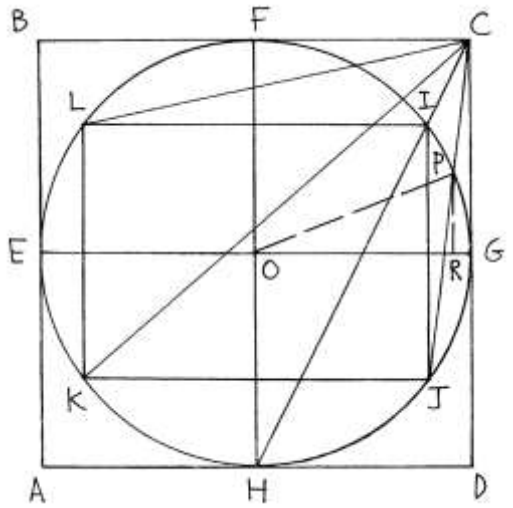
Il segmento IJ interseca il diametro EG nel punto Q: il triangolo OIQ è rettangolo e ha i lati nel rapporto 3 – 4 – 5: QI : 3 = OQ : 4 = OI : 5 .



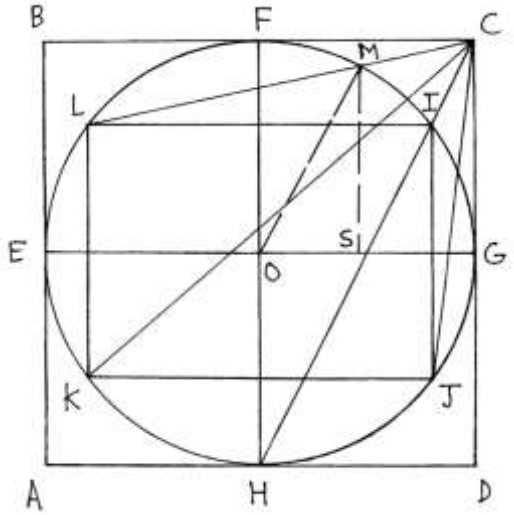
Usare il punto P e da esso abbassare la perpendicolare al diametro EG per fissare il punto R. Collegare P con O.

Il triangolo OPR è rettangolo e i suoi lati hanno lunghezze nel rapporto 5 – 12 – 13:

PR : 5 = OR : 12 = OP : 13



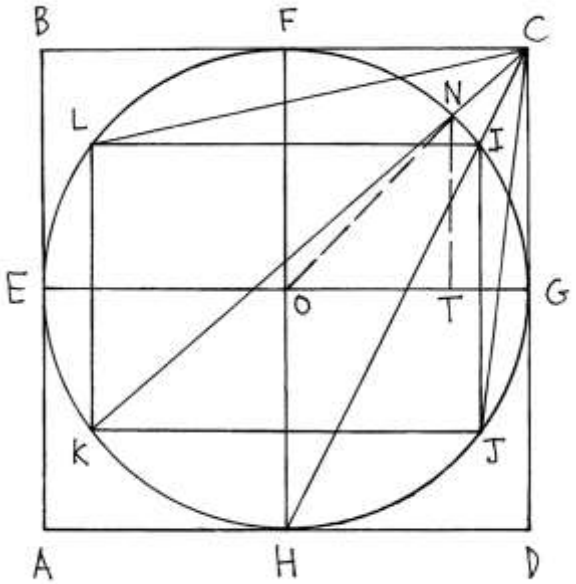
Dal punto M tracciare il raggio MO e la perpendicolare MS al diametro EG:



Il triangolo rettangolo OMS ha lati lunghi nel rapporto della terna pitagorica 8 – 15 – 17:

OS : 8 = MS : 15 = OM : 17 .

Infine, collegare il punto N con O e condurre la perpendicolare NT al diametro EG.

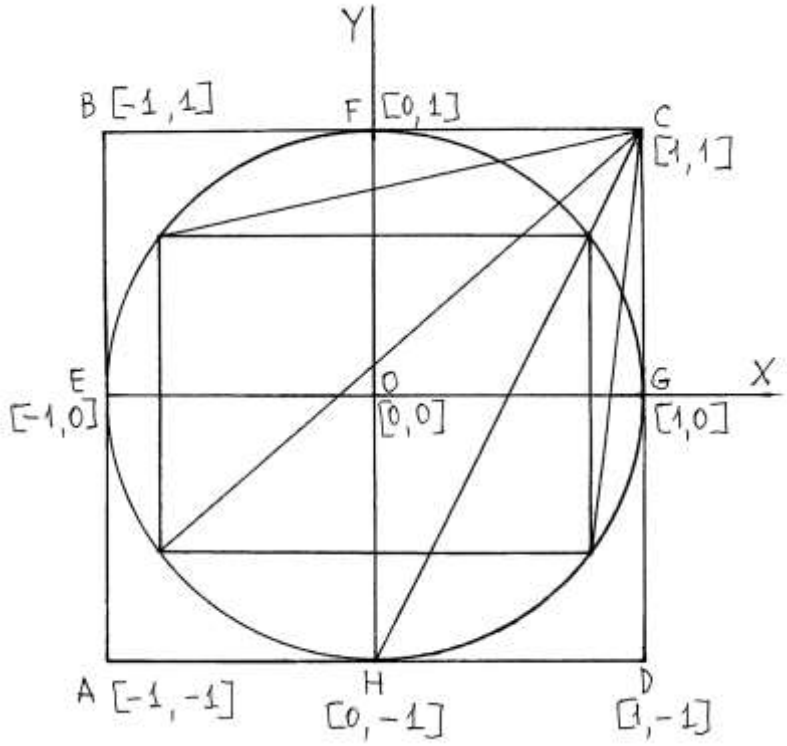


Il triangolo rettangolo ONT ha lati lunghi in proporzione a un'altra terna pitagorica:

$$OT : 20 = NT : 21 = ON : 29$$

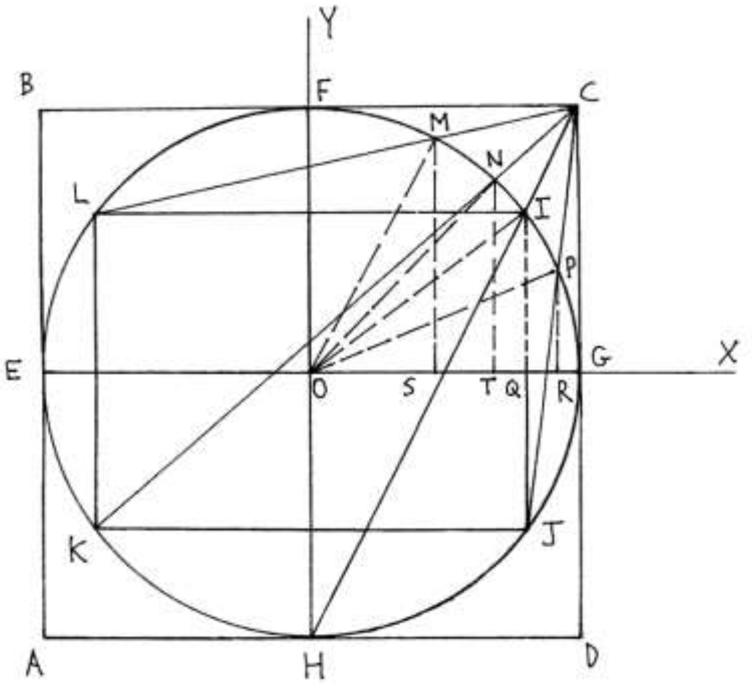
- APPROFONDIMENTO -

Tutte le precedenti costruzioni possono essere riportate su di un *piano cartesiano* con origine degli assi nel punto O, centro della circonferenza, di coordinate [0, 0]:



Sulla figura sono indicate fra *parentesi quadre* ([ ]) le coordinate dei punti significativi della costruzione base nell'ipotesi che il raggio OE sia *convenzionalmente* lungo 1e il lato AB del quadrato sia lungo 2.

La figura che segue mostra tutti e quattro i triangoli rettangoli formanti terne pitagoriche con i lati *tratteggiati*:



La tabella che segue contiene le coordinate cartesiane di tutti i vertici dei quattro triangoli formanti altrettante terne pitagoriche e le ampiezze dei loro angoli interni diversi dall'angolo retto:

terne	*vertici*	*coordinate*	*angoli caratteristici*
3-4-5	O, I, Q	O [0, 0] I [4/5, 3/5] Q [4/5, 0]	IOQ ≈ 36,8699° OIQ ≈ 53,1301°
5-12-13	O, P, R	O [0, 0] P [12/13, 5/13] R [12/13, 0]	POR ≈ 22,62° OPR ≈ 67,38°
8-15-17	O, M, S	O [0, 0] M [8/17, 15/17] S [8/17, 0]	MOS ≈ 28,072° OMS ≈ 61,928°
20-21-29	O, N, T	O [0, 0] N [20/29, 21/29] T [20/29, 0]	NOT ≈ 46,40° ONT ≈ 43,60°

- -

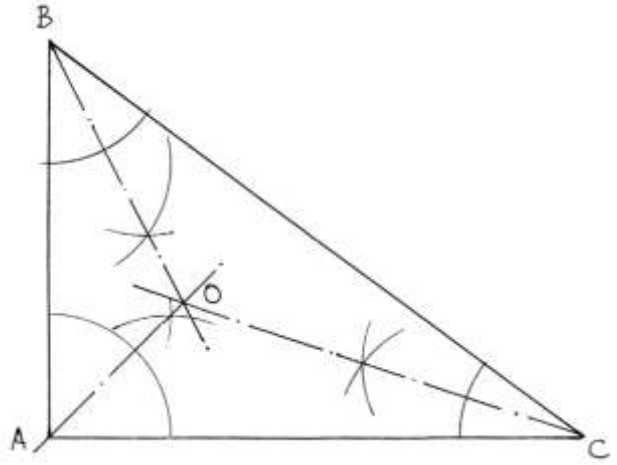
II PARTE

LIU HUI e i triangoli rettangoli

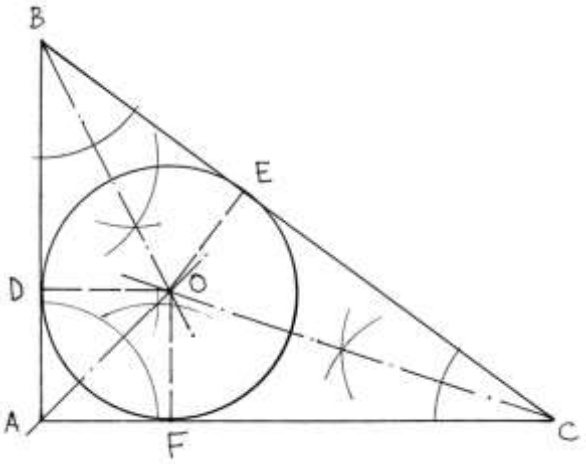
Il matematico cinese Liu Hui (220 – circa 280 d.C.) pubblicò nel 263 circa un commento a un famoso trattato matematico (*Nove capitoli sulle arti matematiche*) risalente a un periodo compreso fra il 300 a.C. e il 200 d.C.

Liu Hui elaborò una serie di formule per calcolare il raggio (o il diametro) del cerchio inscritto in un qualsiasi *triangolo rettangolo*.

Nella figura che segue, il punto O è l'*incentro*, intersezione delle bisettrici degli angoli interni di un triangolo qualsiasi (nell'esempio, ABC è *rettangolo* in A):

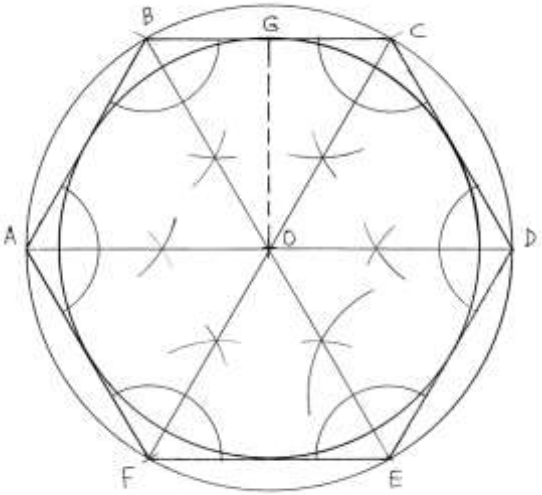


L'incentro è il centro del cerchio inscritto nel triangolo, come spiega la figura che segue. Il cerchio di centro O è tangente ai lati del triangolo nei punti D, E e F; i raggi OD, OE e OF sono perpendicolari ai rispettivi lati.



Il cerchio inscritto è chiamato *incerchio* e *inraggio* è il suo raggio.

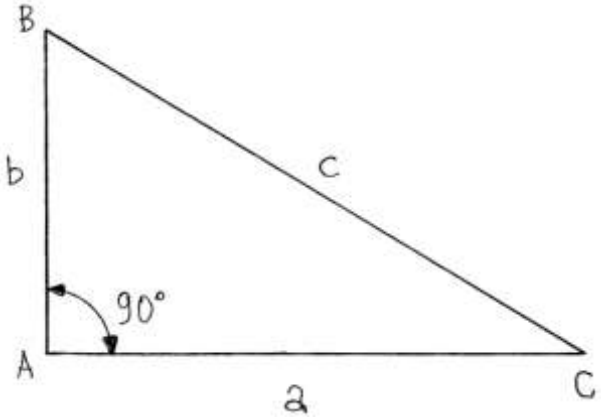
La figura che segue rappresenta un esagono *regolare* inscritto in un cerchio di centro O:



Costruire le bisettrici dei sei angoli interni: esse si intersecano nel punto che oltre ad essere il centro del cerchio circoscritto è anche l'*incentro* del poligono e quindi il centro del cerchio inscritto nell'esagono.

Dal punto O condurre la perpendicolare a un lato, ad esempio BC: il segmento OG è l'altezza del triangolo equilatero OBC ed è anche il raggio del cerchio inscritto nell'esagono: questo ultimo è tangente al poligono nei punti medi dei suoi lati.

In un generico triangolo rettangolo, a è la lunghezza del cateto AC, b quella del cateto AB e c è quella dell'ipotenusa:



Liu Hui stabilì le formule per calcolare per via aritmetica il *diametro* d della circonferenza inscritta in un triangolo rettangolo e di conseguenza il *raggio* r:

$$d = \frac{2 \cdot a \cdot b}{a+b+c} \qquad \text{da cui } r = \frac{a \cdot b}{a+b+c}$$

Liu Hui fornì una seconda formula:

d = a – (c – b) = a + b – c , da cui

$$r = \frac{a+b-c}{2}$$

Infine, egli presentò un terza formula:

$$d = \sqrt{2(c-a)\cdot(c-b)}$$

Liu Hui dimostrò la validità delle sue tre formule con dei diagrammi.

- APPROFONDIMENTO -

L'applicazione delle formule di Liu Hui richiede solo la conoscenza delle lunghezze dei due cateti e la certezza che l'angolo in A sia retto.

L'ipotenusa, BC = c, è calcolabile con il teorema di Pitagora:

$$BC = c = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Nel caso in cui a, b e c formino una *terna pitagorica* (come è il caso dei successivi esempi 3-4-5, 5-12-13, 8-15-17 e 7-24-25), il calcolo della lunghezza dell'ipotenusa è facile perché è un numero intero.

Nei casi diversi da quelli che formano terne pitagoriche, le formule di Liu Hui si complicano:

$$d = \frac{2 \cdot a \cdot b}{a + b + \sqrt{a \cdot b}}$$ da cui

$$r = \frac{a \cdot b}{a + b + \sqrt{a \cdot b}}$$

$$d = a + b - \sqrt{a \cdot b} \qquad \text{da cui } r = \frac{a + b - \sqrt{a \cdot b}}{2}$$

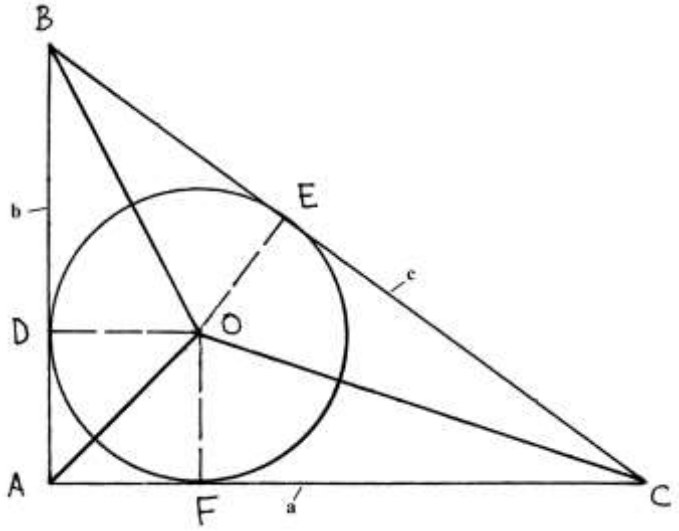
Infine vedremo un esempio di calcoli complicati come quello del triangolo rettangolo 5-9-√106 (che *non* è pitagorico).

La geometria cinese dell'epoca di Liu Hui preferiva dimostrare attraverso processi di scomposizione e ricomposizione di figure, traslazioni e comparazioni fra aree. Essa aveva una finalità più pratica della geometria euclidea e usava procedure perfettamente corrette.

- -

L'origine delle formule di Liu Hui

Le bisettrici dei tre angoli interni si incontrano nell'incentro O e dividono il triangolo ABC in tre triangoli scaleni: AOB, BOC e AOC.



Con le lettere a, b e c sono indicate le lunghezze dei due cateti e dell'ipotenusa.

I segmenti OD, OE e OF sono tre raggi del cerchio inscritto e risultano perpendicolari ai tre lati del triangolo: essi sono le altezze dei triangoli AOB, BOC e AOC.

L'area del triangolo ABC è data dalla somma delle aree dei tre triangoli:

$$\text{Area}_{ABC} = \text{Area}_{AOB} + \text{Area}_{BOC} + \text{Area}_{AOC} =$$

$$= \frac{AB \cdot \text{raggio}}{2} + \frac{BC \cdot \text{raggio}}{2} + \frac{AC \cdot \text{raggio}}{2} =$$

$$= \frac{AB + BC + AC}{2} \cdot \text{raggio} = \frac{\text{perimetro} \cdot \text{raggio}}{2}$$

Da questa formula è ricavata la lunghezza del raggio:

$$\text{raggio} = \frac{2 \cdot \text{Area}_{ABC}}{\text{perimetro}}$$

L'area di ABC è:

$$\text{Area}_{ABC} = \frac{AC \cdot AB}{2} = \frac{a \cdot b}{2}$$

Il perimetro vale (a + b + c).

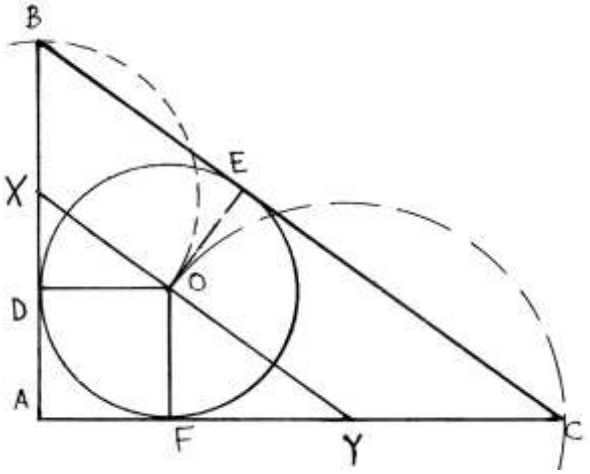
La formula del raggio diviene:

$$\text{raggio} = \frac{2 \cdot \frac{a \cdot b}{2}}{a + b + c} = \frac{a \cdot b}{a + b + c}$$

Questa è la dimostrazione della prima delle tre formule di Liu Hui.

%%%%%%%%%%%%%%%

Liu Hui usò un altro metodo grafico per dimostrare la sua prima formula. Eccone la ricostruzione: nel triangolo rettangolo ABC tracciare una linea parallela all'ipotenusa BC passante per l'incentro O: è il segmento XY.



Sono creati i triangoli rettangoli DXO, FOY e AXY: tutti e tre sono simili al triangolo ABC.

Fare centro nel punto X e con raggio XO tracciare un arco di circonferenza da O fino a passare per il vertice B: l'ipotenusa XO è lunga quanto XB.

Fare centro nel punto Y e con raggio YO disegnare un arco da O fino al punto C: l'ipotenusa OY è lunga quanto YC.

Il perimetro del triangolo rettangolo DXO è:

perimetro DXO = DO + XD + OX = r + XD + XB = AD + XD + XB = AB = b .

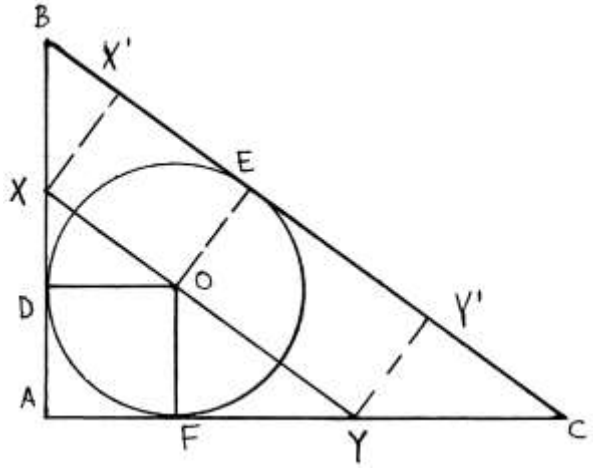
Il perimetro del triangolo rettangolo FOY è:

perimetro FOY = FO + OY + FY = r + YC + FY = AF + + FY + YC = AC = a .

Quindi, i perimetri dei triangoli DXO e FOY sono uguali alle lunghezze dei due cateti ai quali si appoggiano: rispettivamente AB = b e AC = a.

I lati dei due triangoli appena citati sono ricavati dalla divisione in parti diseguali dei cateti di riferimento.

Una conferma delle relazioni fra le lunghezze dei lati dei triangoli rettangoli DXO, FOY e ABC proviene dalla costruzione che segue (anch'essa dovuta a Liu Hui):



Dai punti X e Y condurre le perpendicolari all'ipotenusa BC: sono XX' e YY'.

I segmenti XX' e YY' sono paralleli al raggio OE e hanno la sua lunghezza.

Il cateto BX' è lungo quanto XD perché i triangoli rettangoli XBX' e XOD hanno uguali dimensioni..

A sua volta, il cateto CY' è lungo quanto FY, perché i triangoli rettangoli YCY' e YOF hanno le stesse dimensioni.

Consideriamo ora i triangoli simili DXO e ABC. Fra le lunghezze dei rispettivi lati esistono dei rapporti:

DO : AC = DX : AB = XO : BC .

Alla proporzione è applicabile una proprietà relativa alle *catene di rapporti uguali*: la somma degli *antecedenti* (DO, DX e XO) sta alla somma di tutti i *conseguenti* (AC, AB e BC) come ciascun antecedente sta al suo conseguente. Quindi la proporzione diviene:

(DO + DX + XO) : (AC + AB + BC) = DO : AC

(AD + DX + XB) : (AC + AB + BC) = DO : AC

Nella proporzione sostituiamo i valori noti:

(r + DX + XO) : (a + b + c) = r : a

b : (a + b + c) = r : a

Da questa proporzione si ricava il valore del raggio del cerchio inscritto:

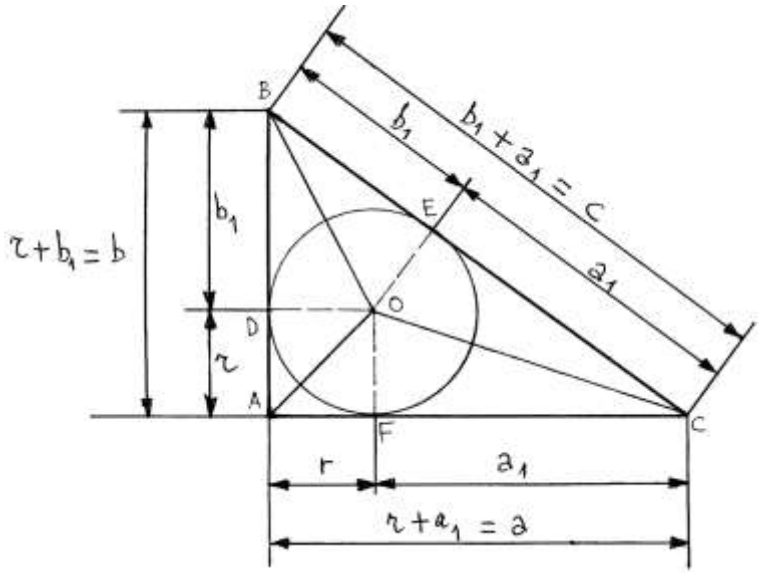
$$r = \frac{b \cdot a}{a + b + c}$$

che è la formula già incontrata.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%

La *seconda formula* ha origine da semplici considerazioni geometriche.

La figura che segue introduce una divisione dei tre lati del triangolo rettangolo ABC, che è prodotta dai tre *piedi*, D, E e F, delle tre altezze OD, OE e OF.



I segmenti OD, OE e OF sono raggi del cerchio inscritto.

Nelle formule che seguono, r è il raggio e d il diametro del cerchio.

Il cateto AB è lungo:

AB = b = AD + DB = r + b_1 dove b_1 è la lunghezza di DB.

A sua volta, il cateto AC è lungo:

AC = a = AF + FC = r + a_1.

Infine, l'ipotenusa BC è divisa in due segmenti:

BC = c = BE + EC.

I triangoli rettangoli ODB e OEB hanno uguali dimensioni: essi possiedono un lato comune, l'ipotenusa OB, e i loro cateti minori, OD e OE, hanno uguale lunghezza perché entrambi sono raggi del cerchio di centro O. Ne consegue che il segmento BE è lungo quanto BD e cioè b_1.

Analoghe considerazioni valgono per i triangoli rettangoli OEC e OFC per cui il segmento EC è lungo come FC e cioè a_1.

Quindi, l'ipotenusa BC è lunga:

$BC = b_1 + a_1$.

Effettuiamo le seguenti operazioni:

I.

$c - b = (b_1 + a_1) - (r + b_1) = a1 - r = (a - r) - r = a - 2r = a - d$ e quindi
$c - b = a - d$, da cui $d = a + b - c$
Il raggio r è dato da:

$$r = \frac{a + b - c}{2}.$$

II.

$c - a = (b_1 + a_1) - (r - a_1) = b_1 + a_1 - r - a_1 = b_1 - r = (b - r) - r = b - 2r = b - d$
e quindi $c - a = b - d$. Il diametro d è dato da: $d = a + b - c$.
La lunghezza del raggio è:

$$r = \frac{a + b - c}{2}$$

III.

$a + b = (a_1 + r) + (b_1 + r) = a1 + b1 + 2r = c + d$ e quindi $a + b = c + d$.
Il diametro è dato da $d = a + b - c$ e il raggio è lungo

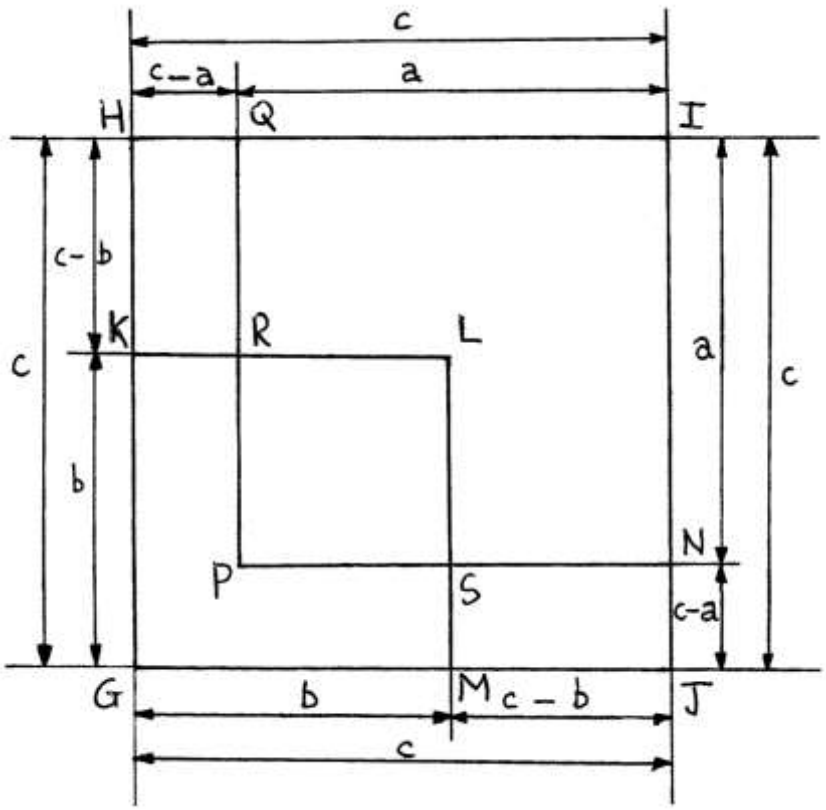
$$r = \frac{a + b - c}{2}$$

Tutte e tre le operazioni portano allo stesso risultato.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Di seguito è proposta una dimostrazione della *terza formula* con l'aiuto di un grafico risalente a Liu Hui.

Costruire il quadrato GHIJ con il lato lungo quanto l'ipotenusa BC (= c) del precedente triangolo rettangolo:



A partire dal vertice G costruire il quadrato GKLM con lato lungo quanto il cateto AB (= b).

Infine, a partire dal vertice I disegnare il quadrato INPQ con lato lungo quanto il cateto AC (= a).

PRLS è un quadrato che ha lati lunghi: LS = LM – SM = b – (c – a) = a + b – c .

Questa espressione corrisponde alla lunghezza del *diametro* del cerchio inscritto calcolata con la seconda formula di Liu Hui.

I rettangoli KHQR e MSNJ hanno uguali dimensioni e la stessa area:

Area KHQR = KH*KR = (c – b)*(c – a) = (c – a)*(c – b) ;

Area MSNJ = MS*MJ = (c – a)*(c – b) .

La somma delle aree dei due rettangoli è:

somma = (c – a)*(c – b) + (c – a)*(c – b) = 2*(c – a)*(c – b) .

L'area del quadrato PRLS è uguale alla somma delle aree dei rettangoli KHQR e MSNJ.

Sostituendo i valori trovati in precedenza: $(a + b – c)^2 = 2*(c – a)*(c – b)$.

L'espressione a sinistra è la lunghezza del diametro ricavata con la seconda formula di Liu Hui:

$$d^2 = 2*(c – a)*(c – b) .$$

Estraendo la radice quadrata di questa ultima espressione si ricava la *terza formula* di Liu Hui:

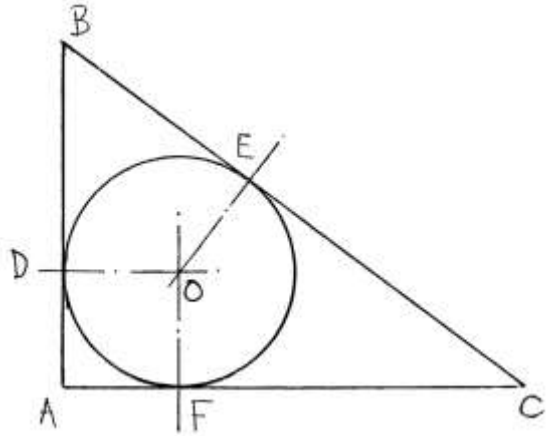
$$d = \sqrt{2 \cdot (c - a) \cdot (c - b)}$$

Il metodo impiegato da Lui Hui è basato sulla dissezione delle figure.

Il precedente grafico può servire anche alla dimostrazione del cosiddetto teorema di Pitagora (o *teorema dell'ipotenusa*).

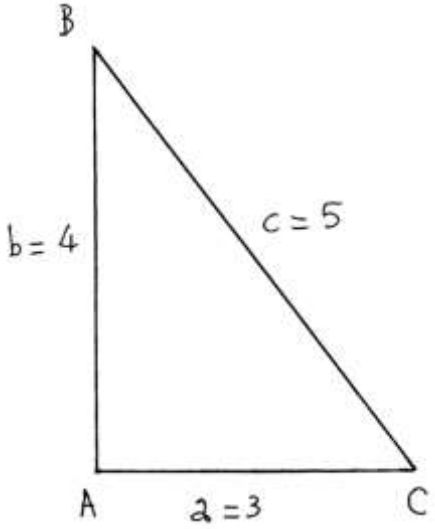
Il triangolo rettangolo 3-4-5

Nel caso del triangolo rettangolo 3-4-5, il punto O è l'incentro e il raggio OD è lungo:



$$r = OD = (AC + AB - BC)/2 = (4 + 3 - 5)/2 = 1$$

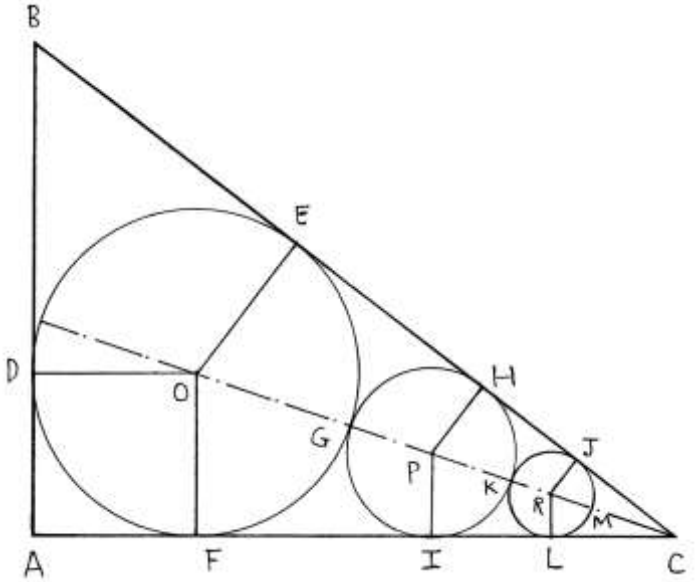
La formula vale anche nel caso in cui il triangolo sia disposto con il cateto più corto (lungo 3) orizzontale e quello più lungo verticale:



- APPROFONDIMENTO -

Cerchi inscritti in un triangolo 3-4-5

Nella figura che segue è riprodotto il triangolo 3-4-5:



Costruire la bisettrice dell'angolo BCA.

Come già visto, il cerchio di centro O ha raggio lungo 1: il punto O giace sulla bisettrice che taglia nel punto G.

Lungo la bisettrice, a partire da G determinare il punto P, a distanza convenzionale ½ (e cioè metà del raggio OG), fare centro nel punto P e, con raggio PG, tracciare un secondo cerchio che risulta tangente all'ipotenusa nel punto H e al cateto orizzontale in I.

Questo secondo cerchio incontra la bisettrice nel punto K. A partire da K misurare lungo la bisettrice la distanza KR uguale a

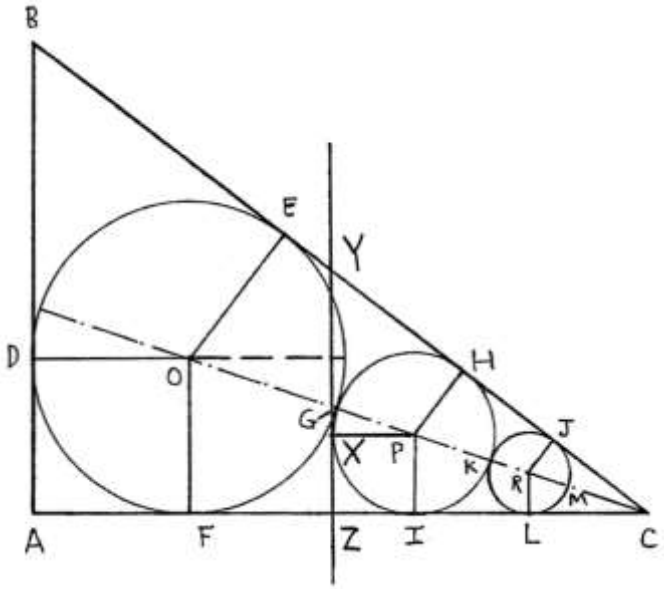
KR = PG/2 = (OD/2)/2 = OD/4.

Con centro in R e raggio RK disegnare un terzo cerchio che è tangente all'ipotenusa in J e al cateto orizzontale in L. Infine, esso interseca la bisettrice nel punto M.

A partire da questo ultimo punto è possibile costruire un quarto cerchio con raggio uguale alla metà di quello KR e quindi uguale a OD/8.

I raggi dei cerchi tangenti che hanno i centri posizionati sulla bisettrice dell'angolo BCA decrescono secondo una *progressione geometrica* di ragione ½.

Modifichiamo la precedente figura con le aggiunte mostrate nello schema che segue:



Tracciare il raggio orizzontale PX.

Per il punto X disegnare una retta parallela al cateto AB: essa taglia l'ipotenusa nel punto Y e il cateto orizzontale in Z.

Il triangolo ZYC è *simile* a quello ABC e quindi le lunghezze dei suoi lati rispettano la proporzione

ZY : 3 = ZC : 4 = YC : 5 .

La retta passante per Y e Z divide *a metà* i tre lati del triangolo rettangolo ABC:

ZC : AC = ZY : AB = YC : BC = 1 : 2 .

Ne consegue che questo rapporto vale pure fra le lunghezze dei raggi:

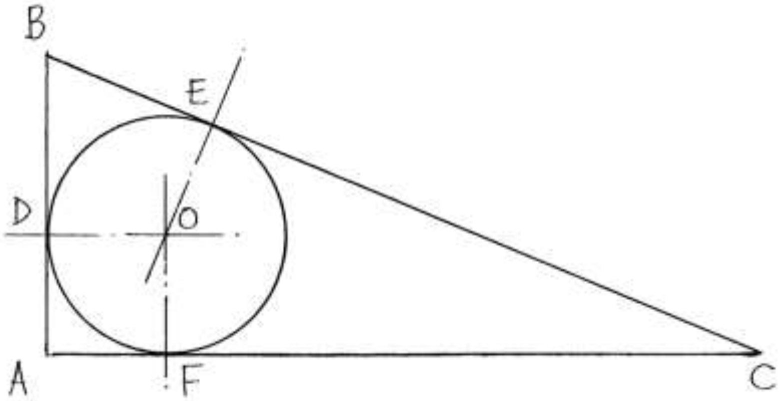
PG : OD = 1 : 2 .

Liu Hui era giunto a queste conclusioni?

- -

<u>Il triangolo rettangolo 5-12-13</u>

Nel caso del triangolo rettangolo 5-12-13,



il raggio OD è lungo

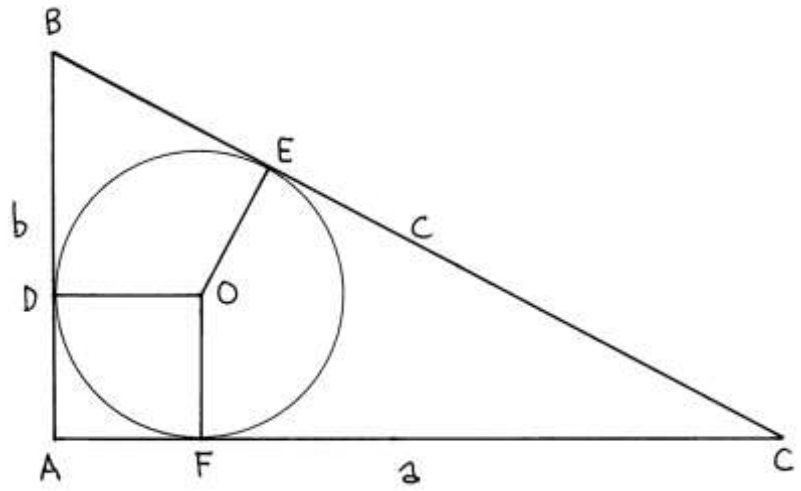
$$r = OD = \frac{AC + AB - BC}{2} = \frac{5 + 12 - 13}{2} = 2$$

<u>Il triangolo rettangolo 8-15-17</u>

ABC è un triangolo rettangolo che ha i cateti AB e AC lunghi 8 e 15:

AC = a = 15

AB = b = 8



L'ipotenusa BC è lunga:

$$c = BC = \sqrt{AB^2+AC^2} = \sqrt{8^2+15^2} = \sqrt{289} = 17$$

Il diametro del cerchio inscritto è:

$$d = \frac{2\,a\cdot b}{a+b+c} = \frac{2\cdot 8\cdot 15}{8+15+17} = \frac{240}{40} = 6$$

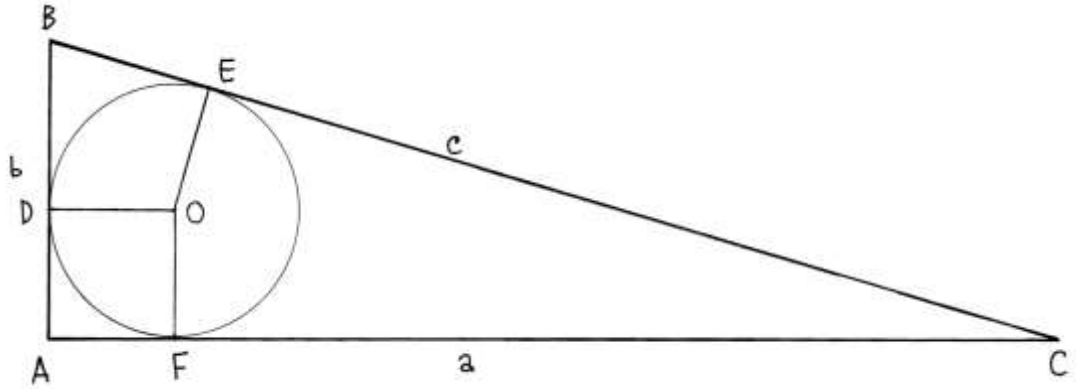
I raggi OD, OE e OF sono lunghi 3 e risultano perpendicolari ai lati del triangolo.

<u>Il triangolo rettangolo 7-24-25</u>

ABC è un triangolo rettangolo con i cateti AB e AC lunghi:

AC = a = 24

AB = b = 7



L'ipotenusa BC è lunga:

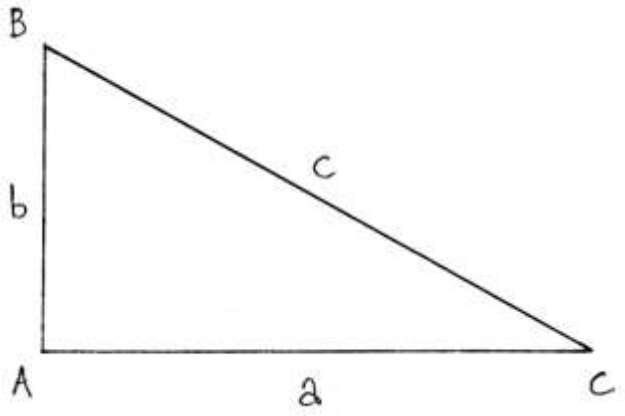
$$c = BC = \sqrt{AB^2+AC^2} = \sqrt{7^2+24^2} = \sqrt{49+576} = \\ = \sqrt{625} = 25$$

Il diametro del cerchio inscritto è:

d = (2*a*b)/(a + b + c) = (2*7*24)/(7 + 24 + 25) = 336/56 = 6 .

Il triangolo rettangolo con cateti lunghi 5 e 9

ABC è un triangolo rettangolo che ha i cateti AB e AC lunghi rispettivamente 5 e 9:



L'ipotenusa BC è lunga:

$$BC = c = \sqrt{AC^2 + AB^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9^2 + 5^2} =$$
$$= \sqrt{81 + 25} = \sqrt{106} \cong 10{,}3$$

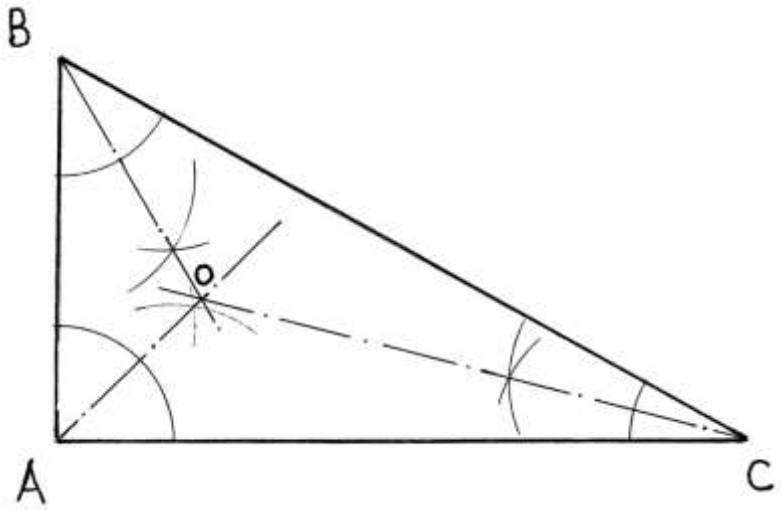
Le lunghezze di AB, AC e BC *non* formano una terna pitagorica: $5 - 9 - \sqrt{106}$.

La radice quadrata di 106 non è un numero intero per cui risulta difficile calcolare con precisione la lunghezza del raggio della circonferenza inscritta:

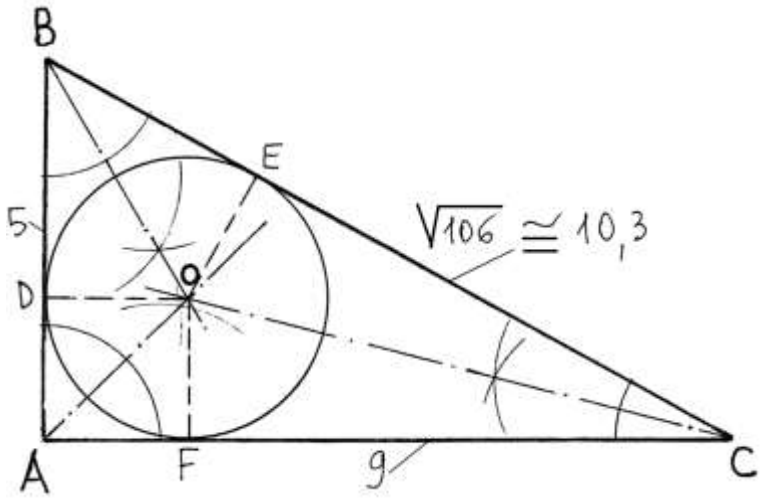
$$OD = r = \frac{AC + AB - BC}{2} = \frac{9 + 5 - \sqrt{106}}{2} \cong$$

$\cong$ (9 + 5 – 10,3)/2 $\cong$ 1,85.

La soluzione può essere ottenuta per via geometrica costruendo le bisettrici dei tre angoli interni:



In questo caso la costruzione geometrica permette di disegnare un esatto cerchio inscritto con centro in O e raggio OD:

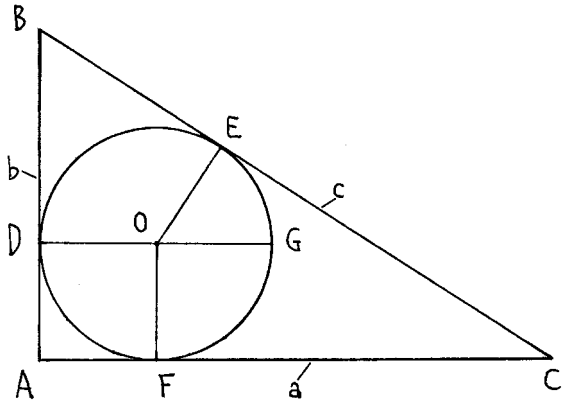


OD = r = [14 – √(106)]/2 ≅ 1,85 .

TABELLA – LE TRE FORMULE DI LIU HUI

Riteniamo opportuno ricapitolare le tre formule proposte da Liu Hui per calcolare il diametro o il raggio del cerchio inscritto in un triangolo rettangolo.

La figura che segue è il riferimento dei triangoli.



Le lunghezze dei due cateti sono *a* e *b* mentre quella dell'ipotenusa è indicata con *c*.

OD, OE, OF e OG sono raggi del cerchio:

OD = OE = OF = OG = *r* e DG è il diametro *d*.

formule	*espressioni*
prima	$d = \frac{2 \cdot a \cdot b}{a+b+c}$ da cui $r = \frac{a \cdot b}{a+b+c}$
seconda	d = a – (c – b) = a + b – c , da cui $r = \frac{a+b-c}{2}$
terza	$d = \sqrt{2(c-a)\cdot(c-b)}$

- APPROFONDIMENTO -

Ulteriori sviluppi del metodo di Liu Hui

Nella formula

$$d = \frac{2 \cdot a \cdot b}{a+b+c}$$

il *denominatore* (a + b + c) è il *perimetro* p del triangolo rettangolo.

La formula precedente può essere scritta come segue:

$$d = \frac{2 \cdot a \cdot b}{p}$$

La tabella che segue contiene i dati relativi alle terne pitagoriche con lunghezza dell'ipotenusa c minore di 100; a e b sono i due cateti. Le terne sono scritte come [a, b, c]:

numero	terne	perimetri p = a + b + c	diametri $d = \frac{2 \cdot a \cdot b}{p}$
1	[3, 4. 5]	12	2
2	[5, 12, 13]	30	4
3	[7, 24, 25]	56	6
4	[8, 15, 17]	40	6
5	[9, 40, 41]	90	8
6	[11, 60, 61]	132	10
7	[12, 35, 37]	84	10
8	[13, 84, 85]	182	12
9	[16, 63, 65]	144	14
10	[20, 21, 29]	70	12
11	[28, 45, 53]	126	20
12	[33, 56, 65]	154	24
13	[36, 77, 85]	198	28
14	[39, 80, 89]	208	30
15	[48, 55, 73]	176	30
16	[65, 72, 97]	234	40

La seguente tabella contiene i due prodotti [a * b] e [a * b * c] delle *sedici* terne:

numero	terne	a·b	a·b·c
1	[3, 4. 5]	12	60
2	[5, 12, 13]	60	780
3	[7, 24, 25]	168	4200
4	[8, 15, 17]	120	2040
5	[9, 40, 41]	360	14760
6	[11, 60, 61]	660	40260
7	[12, 35, 37]	420	15540
8	[13, 84, 85]	1092	92820
9	[16, 63, 65]	1008	65520
10	[20, 21, 29]	420	12180
11	[28, 45, 53]	1260	66780
12	[33, 56, 65]	1848	120120
13	[36, 77, 85]	2772	235620
14	[39, 80, 89]	3120	277680
15	[48, 55, 73]	2640	192720
16	[65, 72, 97]	4680	453960

I prodotti delle lunghezze dei due cateti [a * b] e dei tre lati [a * b * c] sono *divisibili* rispettivamente per 12 e per 60:

$a \cdot b$	$a \cdot b \cdot c$	$\frac{a \cdot b}{12}$	$\frac{a \cdot b \cdot c}{60}$
12	60	1	1
60	780	5	13
168	4200	14	70
120	2040	10	34
360	14760	30	246
660	40260	55	671
420	15540	35	259
1092	92820	91	1547
1008	65520	84	1092
420	12180	35	203
1260	66780	105	1113
1848	120120	154	2002
2772	235620	231	3927
3120	277680	260	4628
2640	192720	220	3212
4680	453960	390	7566

- -

Nota

Nell’articolo di Todd et alii, citato in bibliografia, è dimostrato un importante principio: in un triangolo rettangolo pitagorico il cerchio inscritto ha sempre diametro misurato da un *numero intero*.

Bibliografia

1. Bernal Martin, “Atena nera”. Le radici afroasiatiche della civiltà classica, trad. it., Milano, Il Saggiatore, 2011, pp. 504.
2. Convay John H. – Guy Richard K., “Il libro dei Numeri”, trad. it., Milano, Hoepli, 1999, pp. VIII-277.
3. Gherveghese Joseph George, “C’era una volta un numero”. La vera storia della matematica, trad. it., Milano, Il Saggiatore, 2000, pp. 444.
4. Lam Lay-Yong & Shen Kangshengo, “Right-Angled Triangles in Ancient China”, “Archive for History of Exact Sciences”, volume 30, issue 2, 1984, pp. 87 – 112.
5. Pickover Clifford, “Le meraviglie dei numeri”, trad. it., Milano, RBA Italia, 2008, pp. 325.
6. Siu Man-Keung, “Proof and pedagogy in ancient China: examples from Liu Hui’s commentary on Jiu Zhang Suan Shu”, ”Educational Studies in Mathematics”, 24, 1993, pp. 345-357.
7. Todd Philip – Lyublinskaya Irina – Ryzhik Valery, “Symbolic Geometry Software and Proofs”, “Computer Math Learning”, 2010, 15, pp. 151-159.