sergio(punto)calzolani(at)outlook(punto)it

Parole chiave: pietra tombale Hugues Libergier, Reims, Medioevo, canna, squadra, compasso, linee, palmo, mano, spanna, piede, cubito, triangoli aurei, sezione aurea, successione di Fibonacci, John James

GLI STRUMENTI DI LAVORO DI LIBERGIER

Hugues Libergier (circa 1200 - 1263) fu l’architetto dell’abbazia di Saint-Nicaise, a Reims in Francia.

Alla sua morte, sulla sua tomba fu apposta una pietra tombale che è sopravvissuta alle devastazioni della Rivoluzione francese: nel 1798 Saint-Nicaise fu distrutta e si salvò soltanto la lastra tombale, oggi conservata all’interno della Cattedrale di Reims.

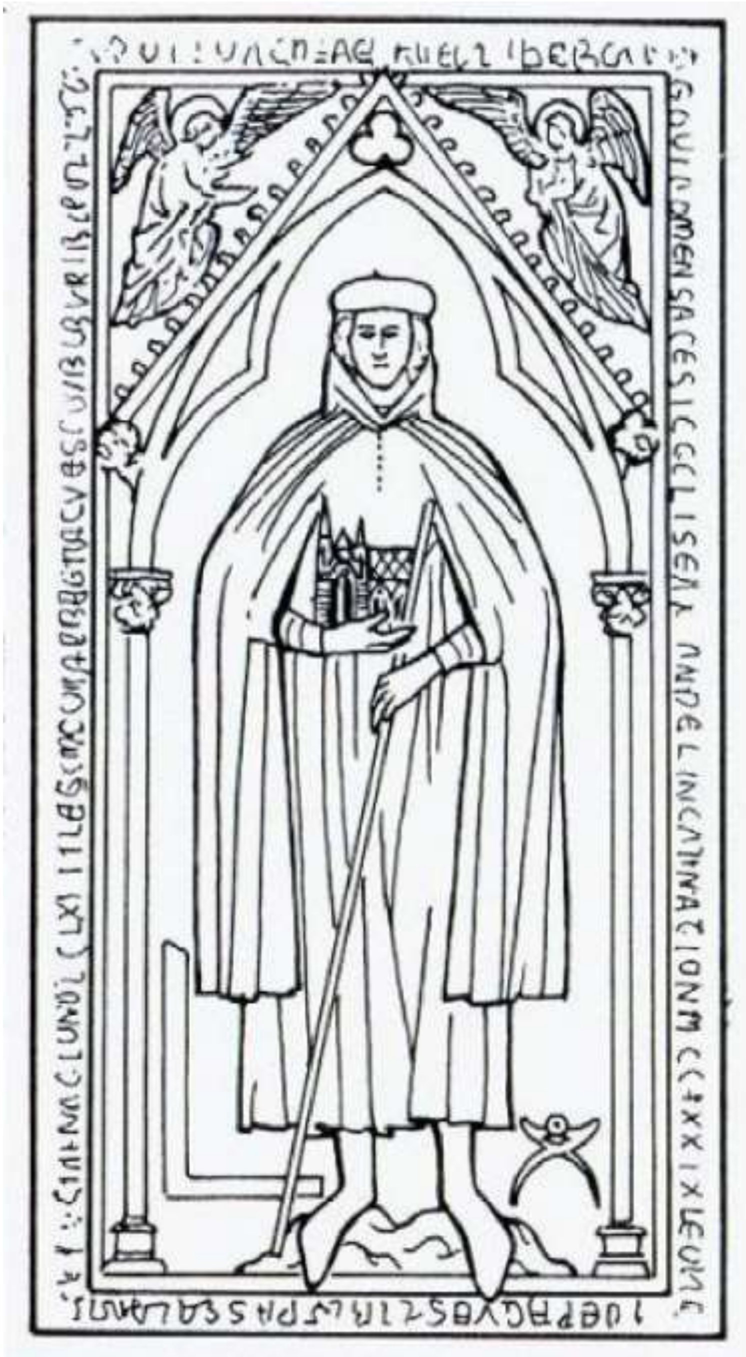
Sui quattro lati è presente un epitaffio che contiene la seguente frase:

> “*Ci gît Maître Hue Libergier, qui a commencé cette Eglise l’an de l’Incarnation 1229. le Mercredi d’après Pâques, & morut l’an 1263. le Vendredi d’après Pâques: pour Dieu priez pour lui*”.

La traduzione completa è la seguente:

“Qui giace maestro Ugo Libergier che iniziò questa chiesa nell’anno dell’Incarnazione MCCXXIX, il martedì di Pasqua e egli trapassò l’anno dell’Incarnazione MCCLXIII, il sabato dopo Pasqua”.

Altre fonti riportano iscrizioni leggermente diverse.



Libergier tiene in braccio un modello della chiesa dell’abbazia.

\- APPROFONDIMENTO -

Le proprietà della lastra

La pietra tombale fu incisa su una lastra di *calcare*.

Le sue dimensioni sono:

* Altezza: 275 cm.
* Larghezza: 135 cm.
* Profondità: 25 cm.

(Fonte: https://www.pop.culture.gouv.fr/notice/palissy/PM51001269, visitato il 13 maggio 2020).

\- -

Sulla pietra sono incisi alcuni degli strumenti da lui usati nel suo lavoro di progettista e di costruttore:

- Una *canna*, che regge con la mano sinistra.
- Una *squadra*, in basso a sinistra nell'immagine.
- Un *compasso*, visibile in basso a destra.

La canna – chiamata anche *canna reale* – usata dai capomastri costruttori di cattedrali gotiche (come Libergier), era lunga circa 125 cm (124,72 cm, per la precisione) [Sull'argomento, vedere il successivo paragrafo "*Le dimensioni misurate sulla lastra*].

La sua lunghezza era misurata in *linee*: 1 linea corrispondeva a 0,22472 cm o 2,2472 mm. La canna era pertanto lunga 555 linee. La linea possedeva un sottomultiplo, il *punto*: 1 linea = 12 punti e 1 punto valeva l'equivalente di 0,1872(6) mm: il numero è *periodico*, 1872 è l'antiperiodo e 6 è il suo periodo, qui racchiuso fra parentesi tonde, (6) per evidenziarlo.

La *linea* è un'unità di misura sopravvissuta all'introduzione del sistema metrico decimale ed è tuttora impiegata nell'industria orologiaria svizzera per la misura dei *movimenti*. È talvolta chiamata *linea svizzera*. Una lunghezza espressa in linee è scritta con tre apostrofi: 555''' oppure con il simbolo L (555 L).

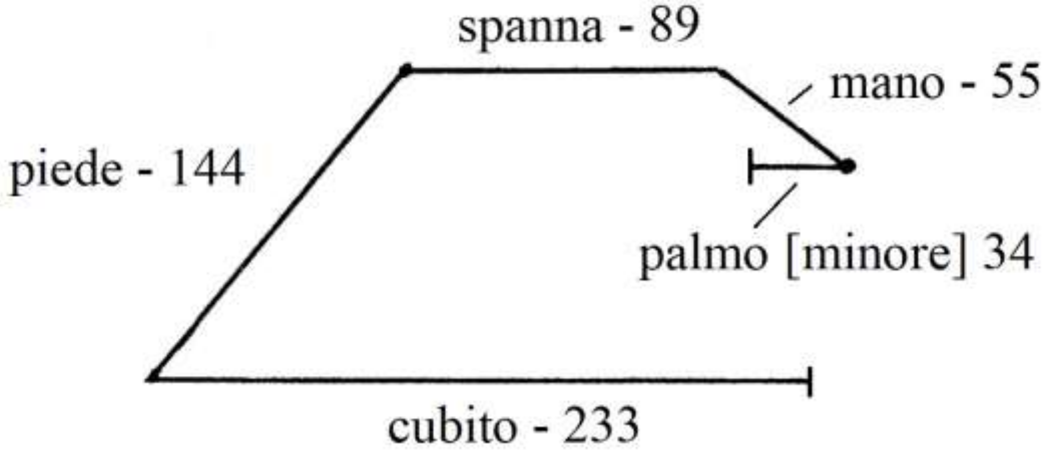
In origine, una *linea* corrispondeva alla lunghezza *convenzionale* di un chicco di *orzo*. Il *pollice* era un multiplo della linea e valeva 12 linee, equivalendo a 2,69664 cm.

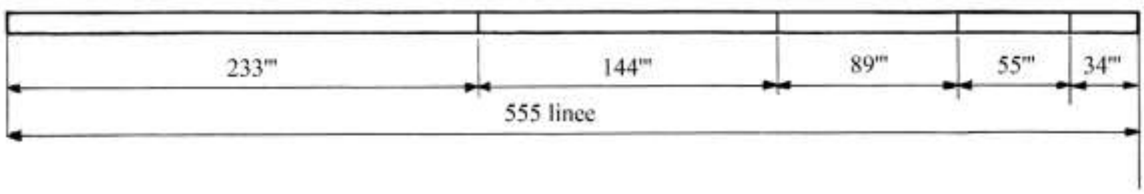
La canna medievale recava quattro tacche che la dividevano in *cinque* parti di lunghezza differente e crescente:

- 7,64 cm, corrispondenti a 34 linee (*palmo* o *palmo minore*);
- 12,36 cm, corrispondenti a 55 linee (*mano*, anche nota come *4 dita*);
- 20 cm, corrispondenti a 89 linee (*spanna*);
- 32,36 cm, corrispondenti a 144 linee (*piede*);
- 52,36 cm, corrispondenti 233 linee (*cubito*).

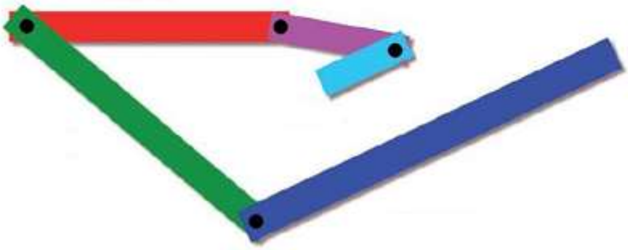
La lunghezza di questo *piede* differisce da quella del *piede romano*, pari a 29,57 cm.

Le figure mostrano le cinque aste articolate con la lunghezza espressa in *linee*:

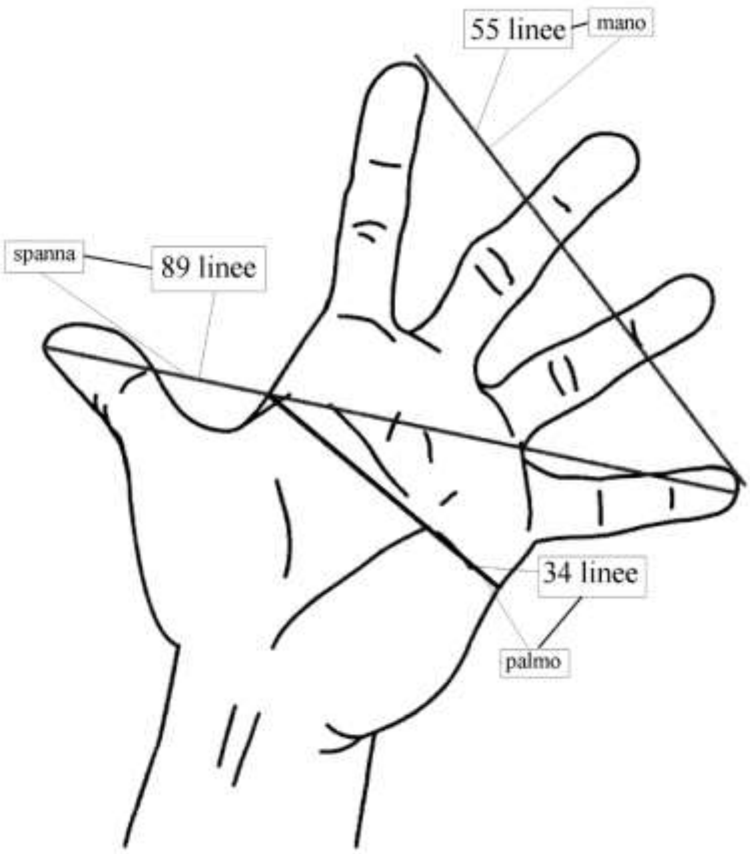




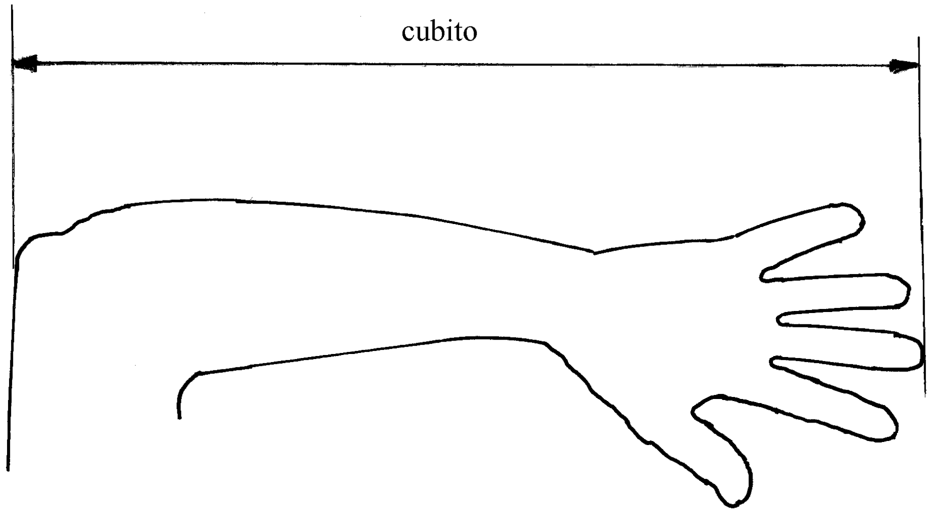
Per renderla facilmente trasportabile e usabile, è probabile che la canna fosse *articolata* come un moderno metro a stecche:



Le cinque lunghezze dell’asta avevano origine *antropomorfica*, perché derivate da parti del corpo umano: le prime tre erano ricavate dalle dimensioni convenzionali della larghezza del *palmo* (34 linee), della *mano* (55 linee) e della *spanna* (89 linee):



La quarta lunghezza, pari a 144 linee, era la misura convenzionale del *piede* e la quinta corrispondeva alla lunghezza del *cubito* (233 linee) e cioè la lunghezza dell’*avambraccio* dal gomito fino alla punta del dito medio:



Il rapporto fra una lunghezza (espressa in centimetri oppure in linee) e la precedente tendeva verso il valore di 1,618 e cioè verso la *sezione aurea*. Quei numeri erano in *progressione geometrica* con ragione 1,618: più crescono le lunghezze degli elementi dell'asta e più il rapporto si avvicina a 1,618.

I numeri espressi in linee formano cinque elementi consecutivi di una *successione di Fibonacci* (dal nome del matematico pisano Leonardo Fibonacci, 1170 circa – 1240 circa): ciascun numero è uguale alla somma dei due precedenti e il rapporto fra un numero e il precedente tende al valore 1,618… o Φ.

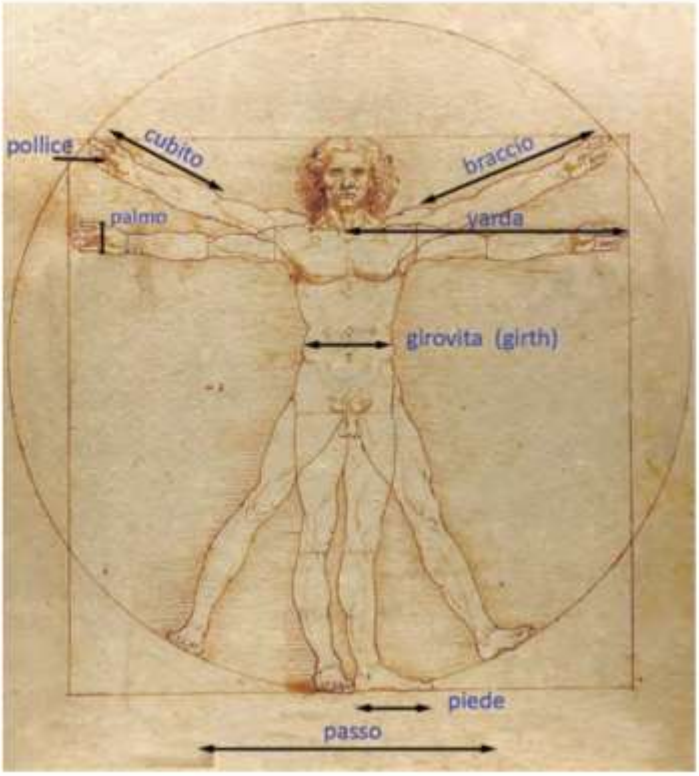
I primi numeri della successione sono i seguenti (in **neretto** e in corpo più grande sono quelli usati nella suddivisione della canna):

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, **34**, **55**, **89**, **144**, **233**, 377, 610, 987 …

La forma della *squadra* è descritta in altro paragrafo.

Il cosiddetto "Uomo vitruviano"

La figura che segue, tratta da Carboni e De Vincenzi, presenta la sovrapposizione di alcune unità di misura lineari per così dire *anatomiche* sul famosissimo disegno di Leonardo da Vinci: essa può risultare utile per conoscere con maggior precisione le diverse unità derivate dal corpo umano.



In particolare, sono evidenziate e distinte le lunghezze del *cubito* e del *braccio*.

La *yarda* è un'unità del sistema anglosassone e corrisponde a 0,9144 m.

Due yarde formano un *fathom* che vale 1,88288 m. La lunghezza è misurata fra le estremità del dito medio delle due mani.

Talvolta, il *fathom* era erroneamente chiamato braccio, ma più correttamente in alcuni Stati europei era conosciuto come *tesa*, unità medievale di origine francese che si diffuse anche in Piemonte.

- APPROFONDIMENTO -

La *linea* quale unità di misura lineare fu introdotta nel Medioevo, molto probabilmente in Francia: da ciò deriva la denominazione di *linea di Parigi*, espressione con la quale è talvolta indicata.

Essa fu definita come la *dodicesima* parte del *pollice francese*, lungo circa 2,7 cm (per la precisione 2,69664 cm).

Il *pollice angloamericano* (*inch*) è lungo 2,54 cm. Questo ultimo è comunemente diviso in frazioni: ½, ¼, 1/8, ecc.

Gli appartenenti alla corporazione dei costruttori medievali francesi stabilirono di usare una *cinquina* di unità di misura lineari (palmo, mano, spanna, piede e cubito) le cui lunghezze sommate formavano quella di una *canna* lunga 555 linee.

Sempre in Francia, i produttori di tappi di sughero per le bottiglie di vino usavano misurare in *pollici* e in *linee*.

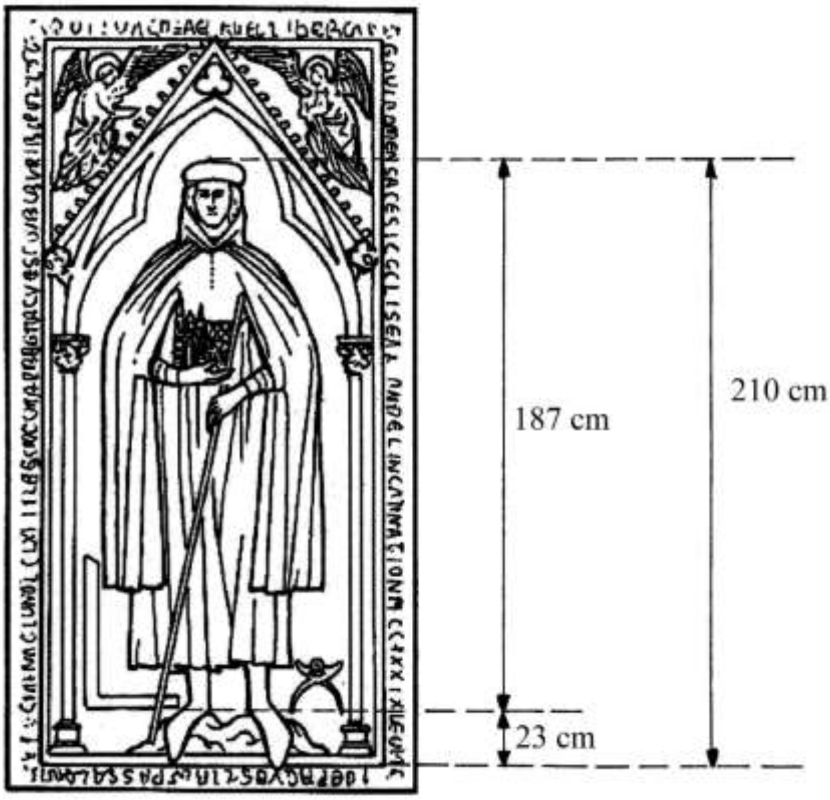
In passato alcuni componenti delle *lampade a olio* erano misurate in *linee*.

Infine, i nastri usati per rifinire i cappelli da uomo usavano misure espresse in *linee*.

- -

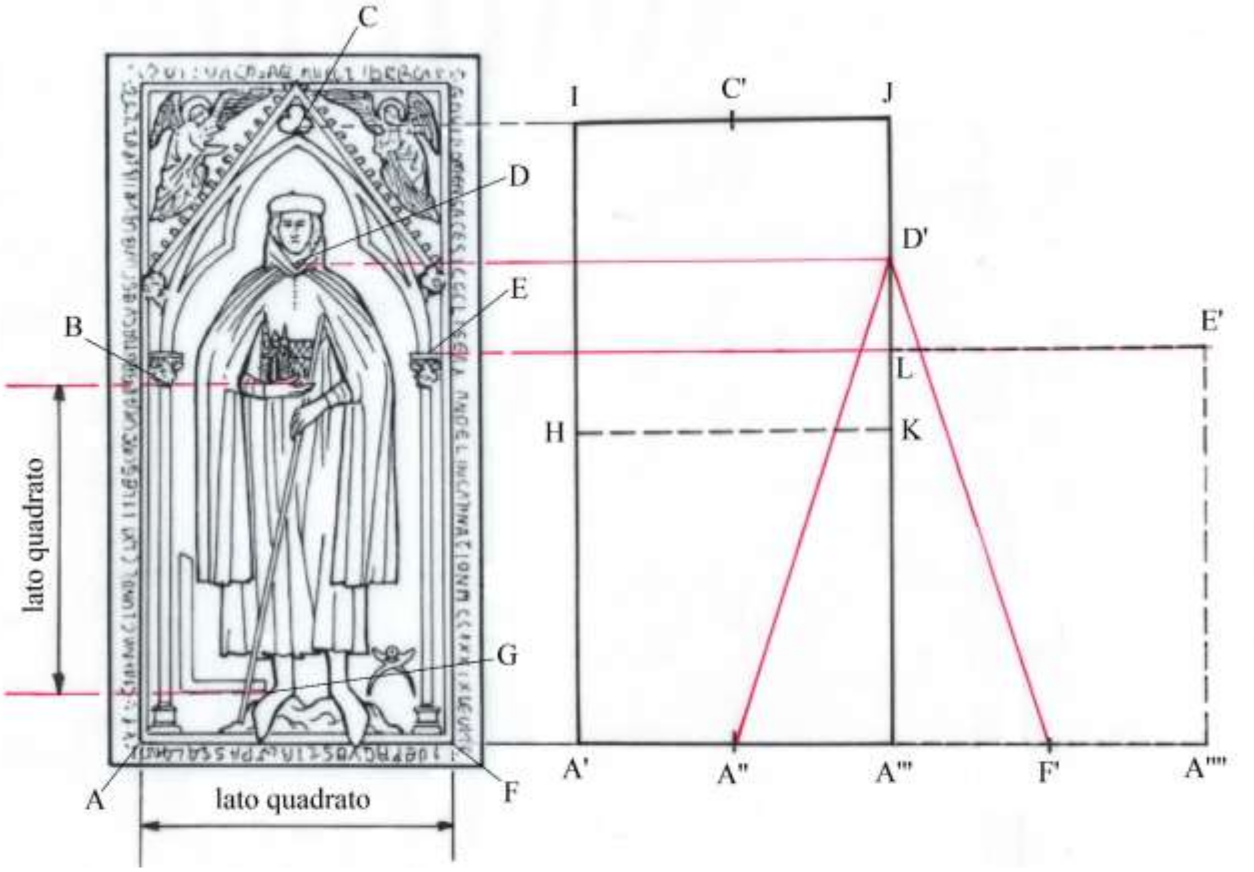
<u>LE DIMENSIONI MISURATE SULLA LASTRA</u>

Le dimensioni verticali della lastra sono presentate nel grafico che segue:



L'altezza complessiva era di 210 cm e quella della figura dell'architetto era di 187 cm: i rimanenti 23 cm misuravano la lunghezza dalle caviglie alle punte dei piedi.

Con una certa approssimazione, peraltro accettabile, sulla superficie della lastra sono stati individuati alcuni poligoni caratteristici:



Sulla destra del grafico sono ricostruiti quei poligoni.

AF è il lato di un quadrato: anche la distanza fra la proiezione verso sinistra del punto G e quella del punto B è un altro lato dell'ipotetico quadrato di lato AF.

A'HIJKA''' è un *doppio quadrato* che ha base A'A''', lunga quanto AF, e altezza A'I pari al doppio della lunghezza di AF.

D'A''' è l'altezza del triangolo isoscele A''D'F', che è un *triangolo aureo*: infatti l'angolo in D' è ampio 36° e quelli nei vertici A'' e F' sono di 72°.

Il segmento EF è l'altezza della colonna di destra misurata fino al capitello: proiettandola essa origina il rettangolo A'''LE'A'''': i lati di questo rettangolo sono lunghi in proporzione a 3 e a 4 e cioè vale proporzione

A'''A'''' : 3 = A'''L : 4 .

Tracciando una delle diagonali del rettangolo, A'''E' oppure A''''L, si ottengono due triangoli pitagorici (nella figura non sono disegnate le diagonali). Infatti:

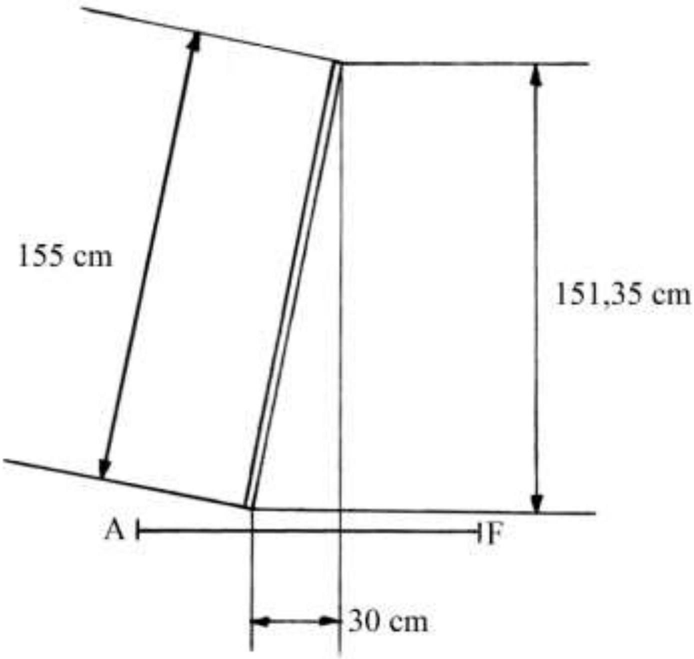
$A'''E' = \sqrt{[(A'''A'''')^2 + (A''''E')^2]} \equiv \sqrt{(3^2 + 4^2)} \equiv \sqrt{(25)} \equiv 5$.

[Il simbolo "≡" sta per *proporzionale a*…].

L'ipotenusa A'''E' è componente di un triangolo pitagorico che ha lati lunghi in proporzione alla terna primitiva 3-4-5.

LA CANNA

Numerose fonti fissano la lunghezza della *canna* in 125 cm. Se l'altezza di Libergier misurata sulla lastra è stata determinata in 187 cm, facendo dei semplici calcoli la lunghezza della canna risulterebbe in proporzione uguale a 155 cm. Lo schema che segue offre le dimensioni dell'ipotetico triangolo rettangolo di cui il bordo destro della canna formerebbe l'ipotenusa:



AF è il lato del quadrato fissato nella penultima figura. I cateti del triangolo rettangolo ipotetico sono uno parallelo e l'altro perpendicolare a AF.

In sintesi, fra le due dimensioni, l'altezza di Libergier e la lunghezza della canna, esiste una proporzione:

altezza Libergier : lunghezza canna ≈ 187 cm : 155 cm ≈ 6 : 5.

Sulla base di questo rapporto, che è un dato di fatto facilmente ricavabile dalle misurazioni sull'immagine della lastra, possiamo risalire all'altezza di Libergier ricavandola dall'ipotetica lunghezza della canna, fissata in 125 cm (rivedere a pagina 3):

altezza Libergier = lunghezza canna * 6/5 = 125 * 6/5 = 150 cm, misura assai discutibile pure per un uomo del XIII secolo raffigurato di ottimo aspetto e quindi in buone condizioni di salute.

- APPROFONDIMENTO -

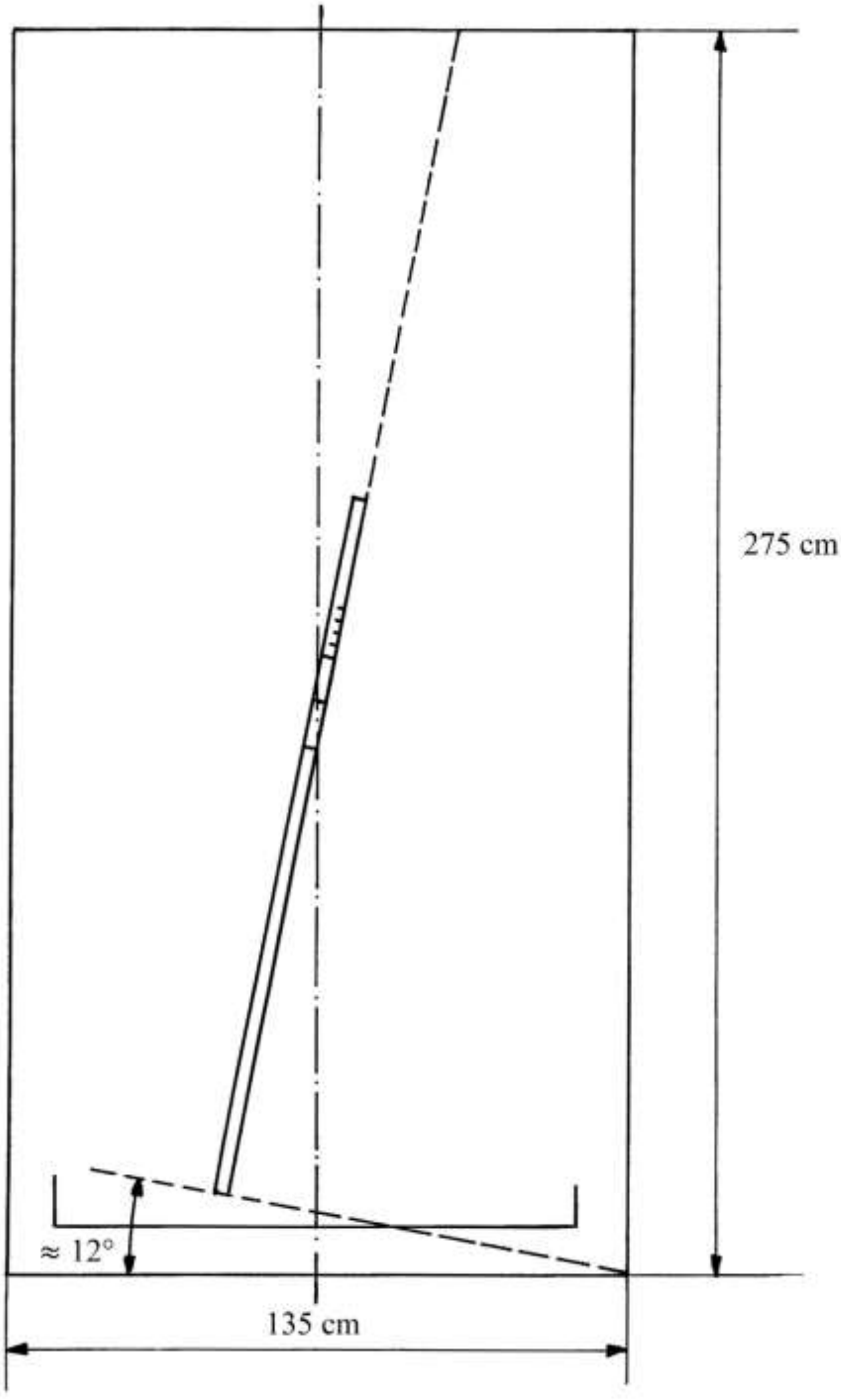
La lunghezza della canna

Lo schema che segue è rielaborato dal lavoro del ricercatore catalano Lloveras i Monserrat che ha dedicato un accurato studio alla lastra tombale di Libergier, citato in bibliografia.

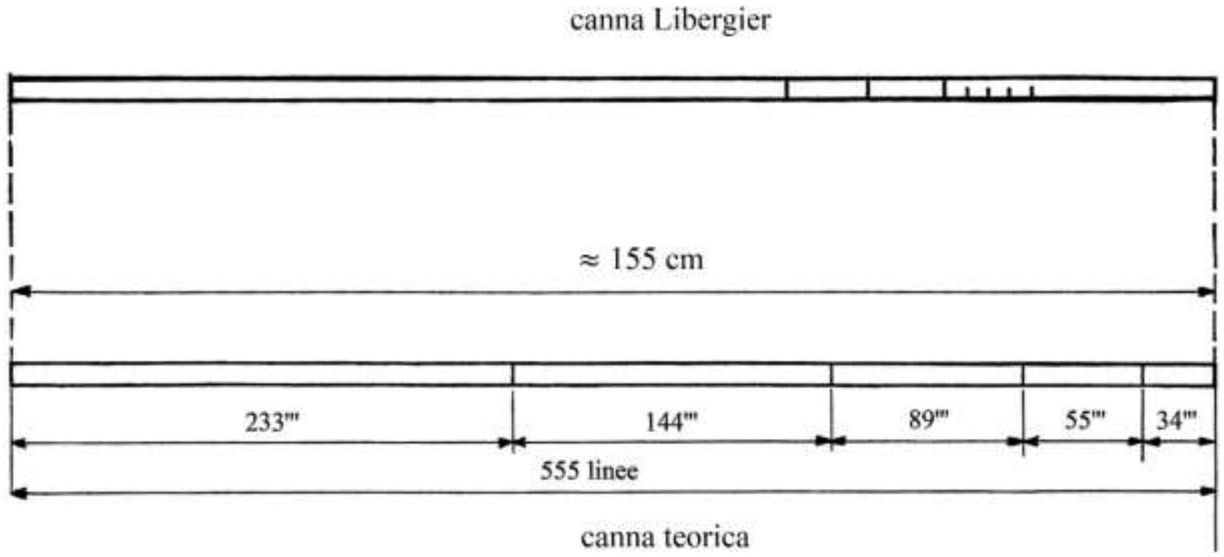
Il suo lavoro è basato su di un'attenta misurazione delle dimensioni della lastra e delle figure che vi sono incise. Le sue conclusioni sono degne di fede; egli ha considerati solo due dei tre strumenti simboli del lavoro di Libergier: la squadra e la canna e ha traslasciato il compasso.

La lunghezza della canna è stata misurata da Lloveras i Monserrat in 154,508 cm, valore che qui è approssimato a 155 cm. Nel suo schema ha evidenziato in *giallo* la canna e qui sono sono state segnate in *rosso* le tacche:

La canna è disegnata inclinata rispetto ai bordi della lastra:

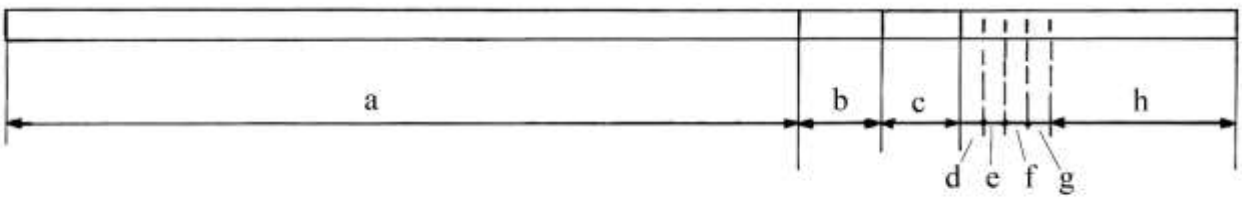


Come abbiamo visto in precedenza, una canna teorica era lunga 555 linee corrispondenti a 124,72 cm o a circa 125 cm. La canna misurata sulla lastra tombale di Libergier era invece più lunga, con un’accettabile approssimazione, 155 cm. Essa reca alcune tacche incise, ma esse non sembrano corrispondere a quelle di una canna teorica, come spiega il confronto presentato nella figura:



Le tacche individuate sulla canna incisa possono essere state definite casualmente dallo scalpellino, oppure egli non aveva a portata di mano un modello reale.

La canna è divisa in diversi segmenti:



La tabella che segue riporta le lunghezze *approssimate* in centimetri e in *linee proporzionali*: la lunghezza convenzionale della canna teorica è ≈ 125 cm = 555 linee. La canna di Libergier ha lunghezza uguale a ≈ 155/125 ≈ 1,24 volte: nella colonna di destra sono indicate le corrispondenti lunghezze in linee, tutto moltiplicate per la costante 1,24:

Segmenti	Lunghezze in centimetri	Lunghezze in linee * 1,24
a	99,5	356 * 1,24 = 441,44
b	10,5	38 * 1,24 = 47,12
c	10	36 * 1,24 = 44,64
d	3	11 * 1,24 = 13,64
e	2,75	10 * 1,24 = 12,4
f	2,75	10 * 1,24 = 12,4
g	3	11 * 1,24 = 13,64
h	23,5	83 * 1,24 = 102,92
Totali	155 cm	555 * 1,24 = 688,2 linee

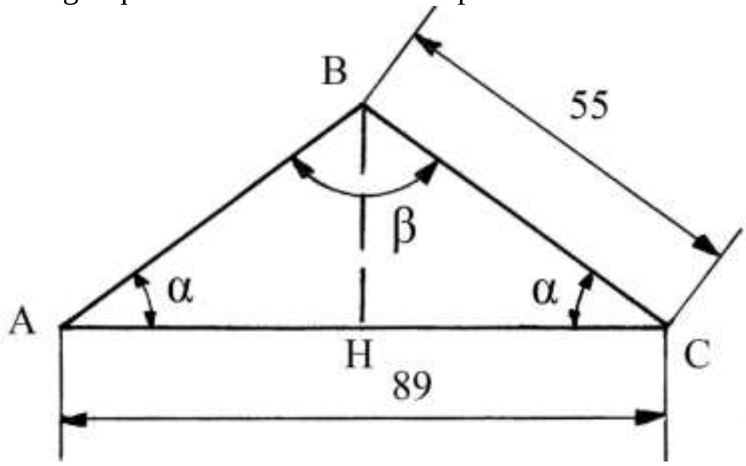
- -

La canna e i triangoli aurei

I cinque elementi della canna offrivano ai costruttori e agli artigiani medievali diverse opportunità geometriche.

Opportunamente disposti, quegli elementi davano origine a due tipi di triangoli isosceli che erano pure *aurei*.

Il primo tipo aveva base lunga quanto un elemento (tranne il più piccolo, il palmo di 34 linee) e i lati uguali lunghi quanto un elemento che lo precede nella successione:



I due angoli α avevano ampiezza facilmente ricavabile con il calcolo della funzione trigonometrica coseno:

$\cos \alpha = HC/BC = (89/2)/55 = 89/110 \approx 0{,}80(90)$

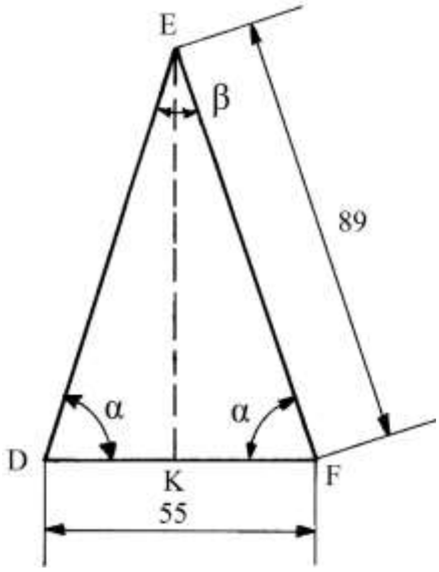
Da esso derivano i seguenti dati:

$\alpha \approx 35{,}992° \rightarrow 36°$

$\beta \approx 180° - 2*\alpha \approx 180° - 2*36° \approx 108°$.

Il triangolo isoscele ABC è *aureo*.

Il secondo tipo di triangoli isosceli aveva la base lunga quanto un elemento (tranne il maggiore, 233 linee) e i lati obliqui lunghi quanto l'elemento successivo:



In questo caso l'angolo α vale:

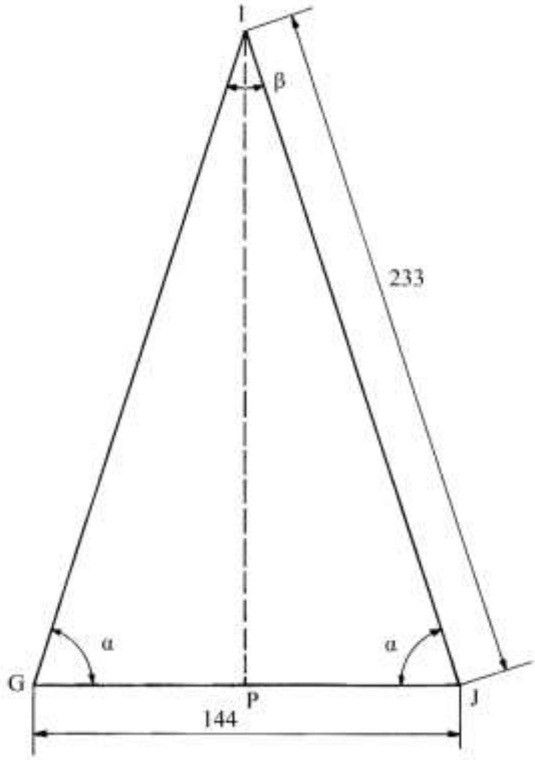
$\cos \alpha = KF/EF = (55/2)/89 = 55/178 \approx 0{,}308988$.

Gli angoli α e β hanno ampiezze uguali a:

$\alpha \approx 72°$

$\beta = 180° - 2* \alpha \approx 180° - 2*72° = 36°$.

L'esempio che segue è quello di un triangolo, GIJ, isoscele e anch'esso aureo. I suoi lati obliqui sono lunghi 233 e la base 144:



L'angolo α vale:

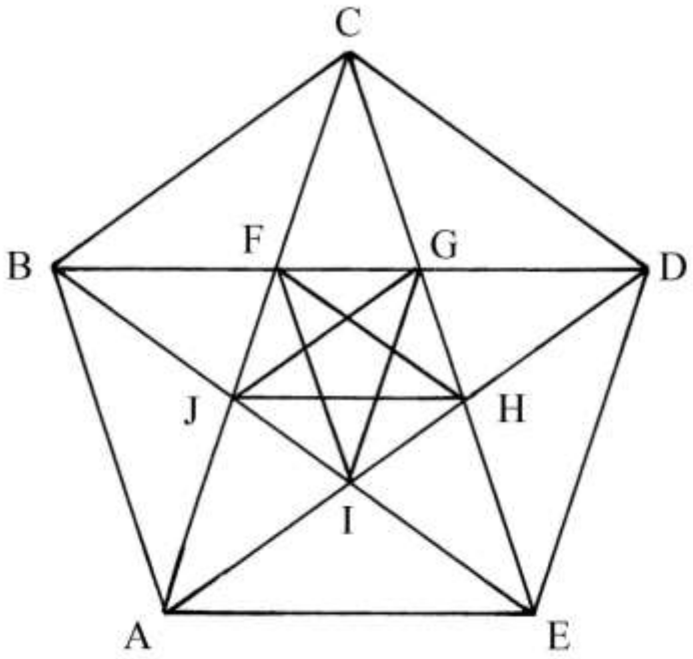
$\cos \alpha = GP/GI = (144/2)/233 = 72/233 \approx 0{,}309012875.$

Con un'accettabile approssimazione, gli angoli α e β hanno le seguenti ampiezze:

$\alpha \approx 72°$ e $\beta \approx 36°$.

<u>Un'importante proprietà geometrica della canna</u>

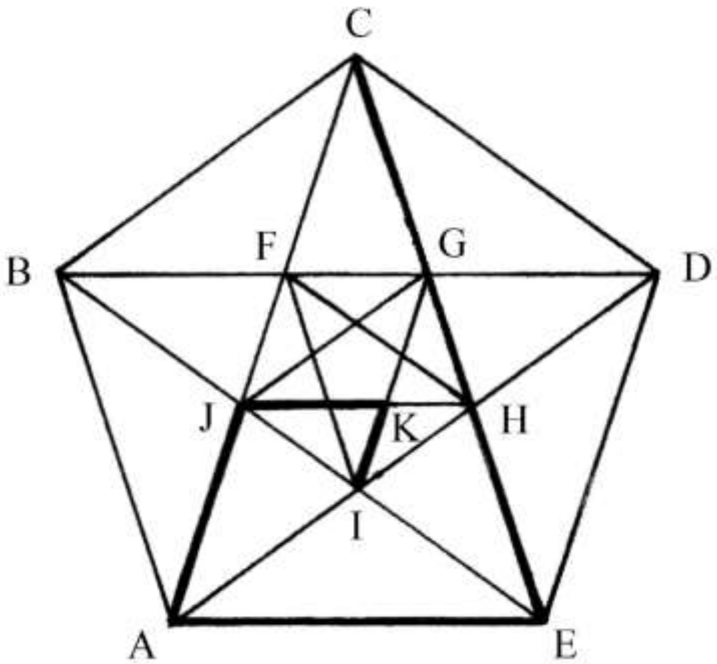
ABCDE è un pentagono regolare. Tracciare le sue diagonali: le loro intersezioni sono i vertici del più piccolo pentagono regolare FGHIJ, che è ruotato di 180° rispetto al primo:



Disegnare le diagonali del pentagono interno.

I cinque segmenti che, di seguito, sono presi in considerazione vengono evidenziati con tratto più spesso.

Se il lato AE è lungo *convenzionalmente* 1 *piede* (cioè 144 linee), la diagonale CE è lunga quanto un *cubito* (233 linee):



Il rapporto fra queste lunghezze è:

$CE/AE = 233/144 \approx 1{,}618 = \phi$.

Il segmento AJ è lungo 89 linee e corrisponde a una *spanna*. Il rapporto fra AE e AJ è:

$AE/AJ = 144/89 \approx 1{,}61797 \approx \phi$.

Il segmento JK è lungo 55 linee e equivale a una *mano*. Il rapporto fra le lunghezze di AJ e JK è:

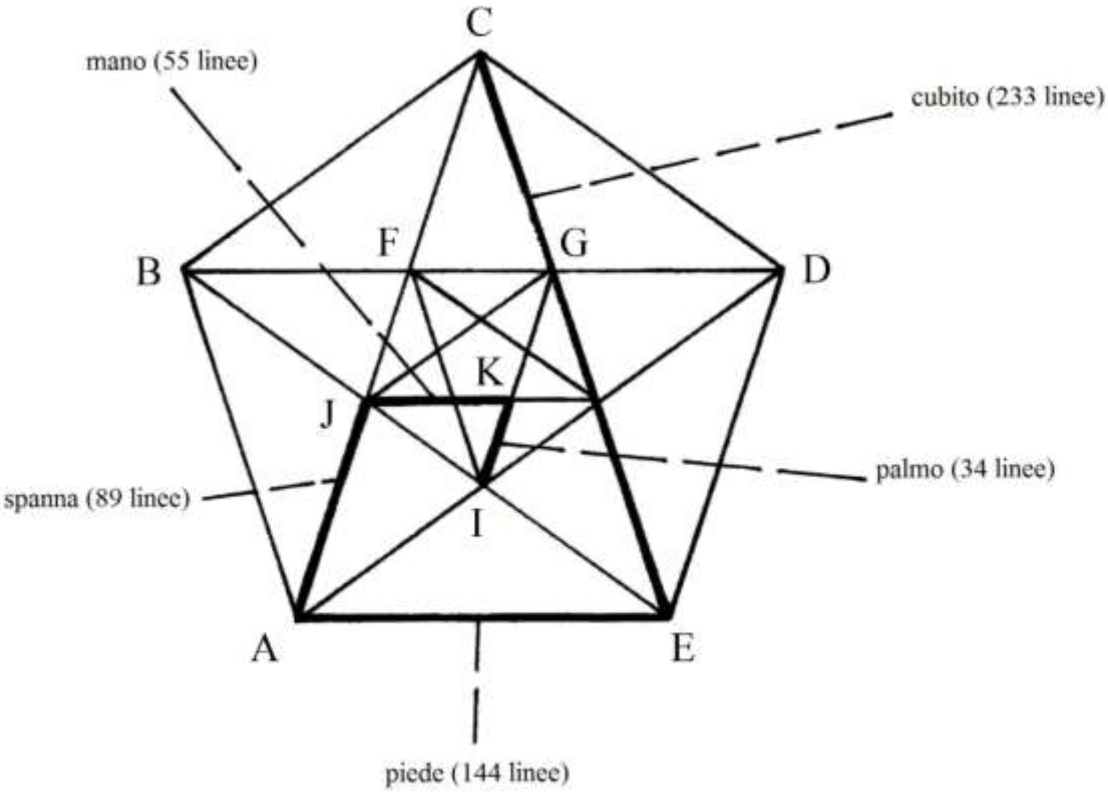
$$AJ/JK = 89/55 \approx 1{,}618 = \phi \ .$$

Infine, il segmento KI è la lunghezza del *palmo* e vale 34 linee. Il rapporto fra JK e KI è:

$$JK/KI = 55/34 \approx 1{,}6176 \approx \phi \ .$$

Nella spezzata CEAJKI il rapporto fra due tratti *consecutivi* è sempre uguale o vicinissimo al valore di Φ.

La figura che segue presenta le diverse lunghezze dei segmenti della spezzata:



-

La spezzata è semplicemente la *canna* usata dai costruttori medievali.

Il segmento JK (una mano lunga 55 linee) è lungo quanto il lato del pentagono interno FGHIJ. Il rapporto fra le lunghezze dei lati del pentagono esterno e di quello interno è:

$$AE/JK = 144/55 \approx 2{,}61818 \approx \phi^2 \ .$$

Una canna articolata poteva essere usata per la costruzione del pentagono.

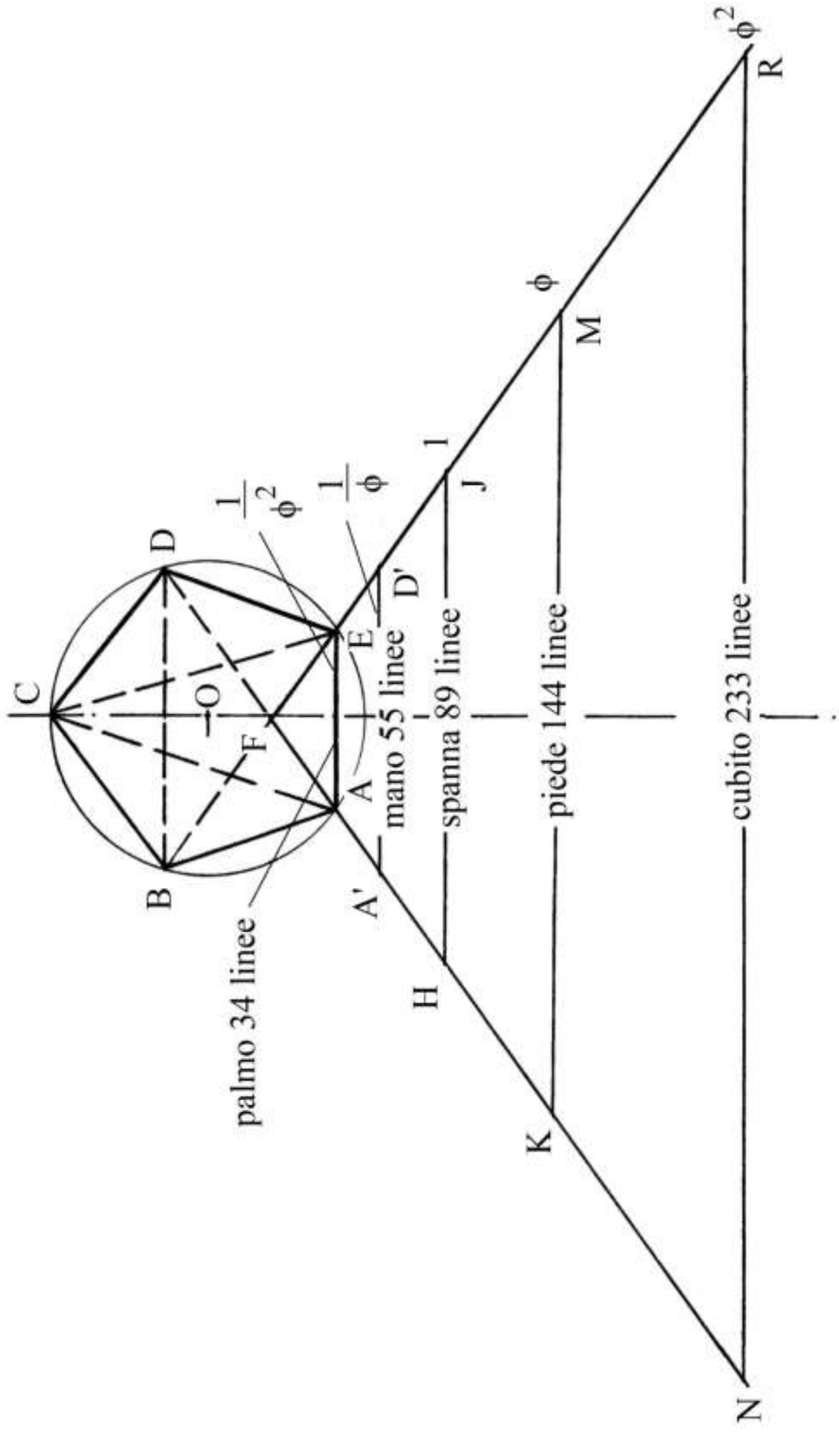
Il pollice quale unità base

Alla base di tutte queste unità di misura medievali si trovava il *pollice*, di lunghezza uguale a 12 linee e quindi a 1/12 di piede.

Al vertice di questa sistema era la *tesa*, formata da 1 canna (555 linee) e da un cubito (233 linee), per un totale di 788 linee e 1,949 m:

Nome unità	Componenti dell’asta	Lunghezza in linee
pollice		12
palmo		34
mano		55
spanna	mano + palmo	89
piede	mano + spanna	144
cubito	spanna + piede	233
canna	palmo + mano + spanna + piede + cubito	555
tesa	cubito + canna	788

Le cinque unità di misura che formano una *canna* sono rappresentabili con il grafico della figura che segue:



ABCDE è un pentagono regolare inscritto in una circonferenza di centro O.

La lunghezza *convenzionale* del lato del pentagono, AE, è fissata in 34 *linee* ed esso è lungo quanto un *palmo*, il primo elemento che forma la canna.

Disegnare le diagonali del pentagono e prolungare verso il basso quelle DA e BE: esse si incontrano nel punto interno F formando un angolo AFE ampio 108°.

L'angolo ACE è ampio 36° e cioè un terzo di quello AFE.

Prolungare verso il basso il diametro verticale COF.

Dall'alto verso il basso sono tracciate in ordine crescente di lunghezza le altre quattro unità di misura.

La lunghezza della *mano* nel grafico, A'D', è uguale a quella di una diagonale del pentagono regolare (ad esempio AD) e cioè 55 linee.

HJ è lungo 89 linee e cioè una *spanna*.

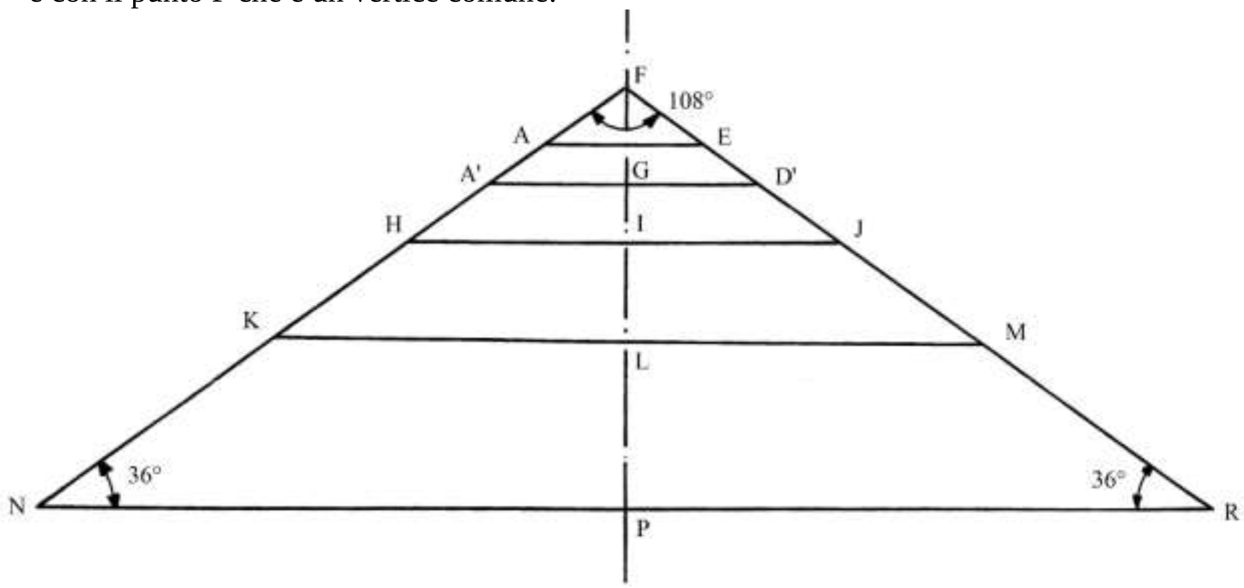
KM è lungo un *piede* e cioè 144 linee.

Infine, NR è la lunghezza di un *cubito* che vale 233 linee.

Se la *spanna* è convenzionalmente scelta di lunghezza 1 (1 spanna = 89 linee), le lunghezze delle altre unità risultano sottomultipli o multipli secondo una progressione geometrica di ragione Φ.

La lunghezza totale della canna, 555 linee, è un numero che *non* fa parte della successione di Fibonacci perché esso è il risultato della *somma aritmetica* di tutti i cinque numeri che indicano le unità di misura e non è il prodotto di un precedente membro della successione per la costante Φ.

Il grafico che segue estrae dal precedente schema cinque triangoli isosceli simili, tutti *aurei* e con il punto F che è un vertice comune:

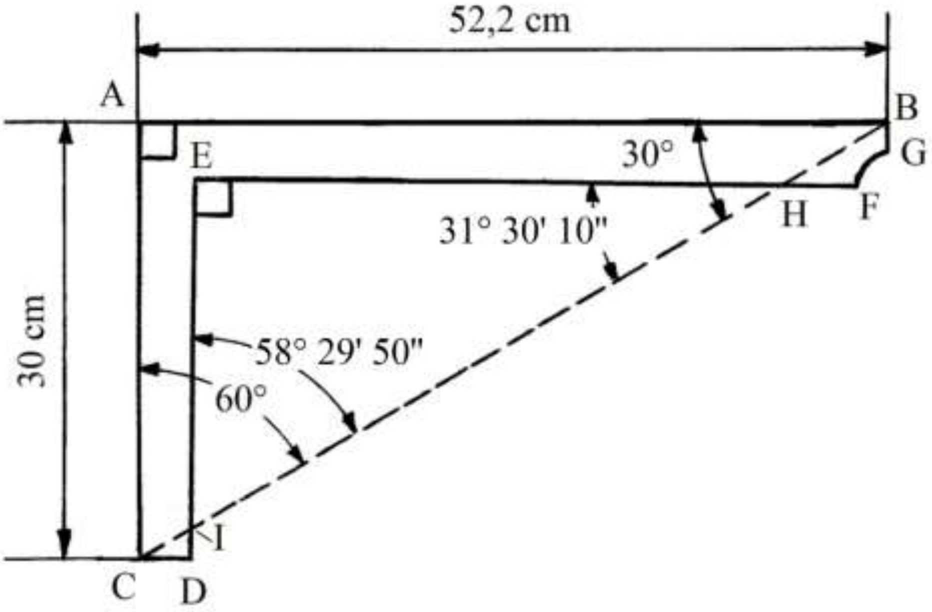


Sono aurei perché l'angolo nel vertice F è ampio 108° e gli angoli nei vertici N e R sono di 36°.

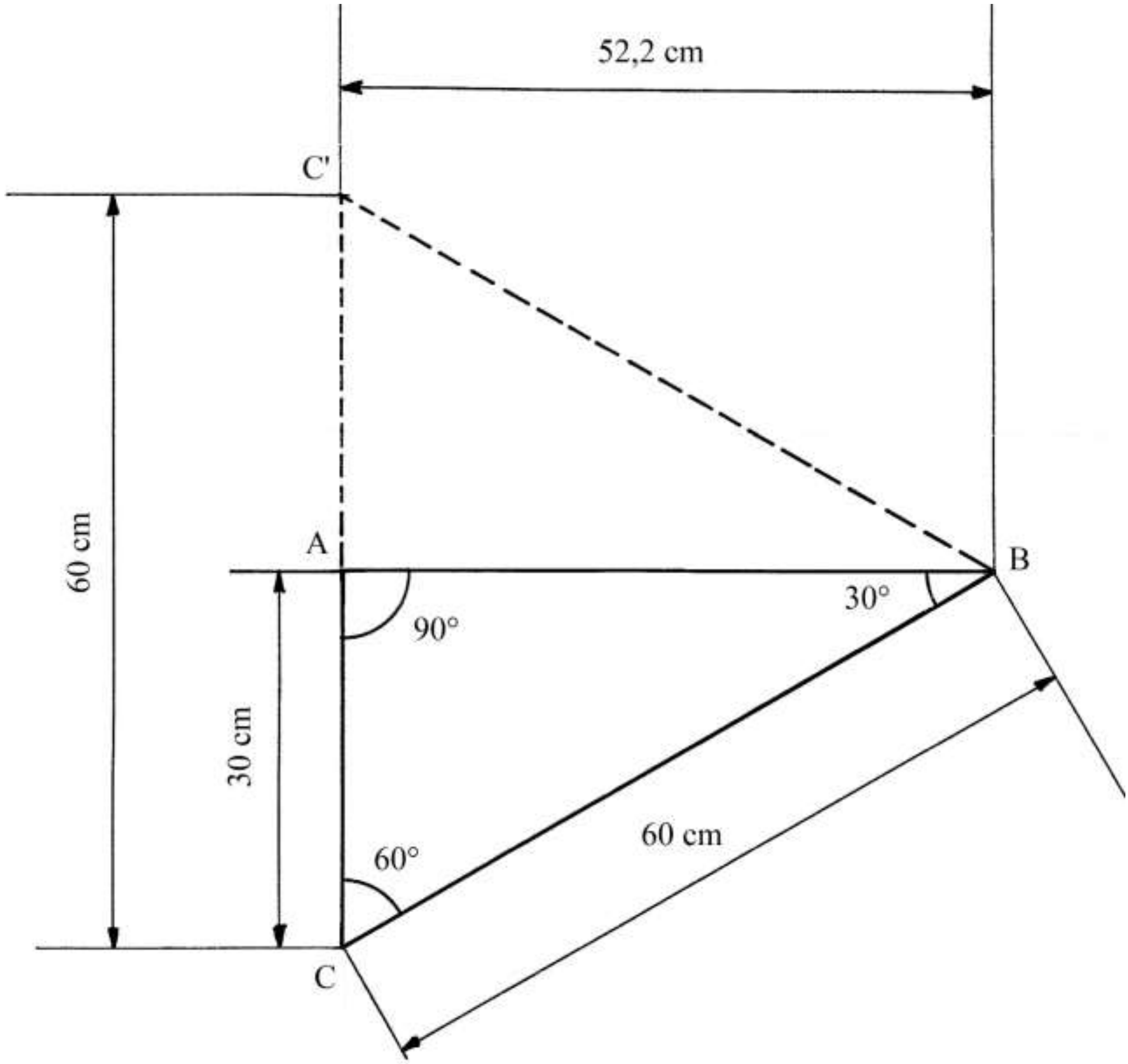
Anche gli angoli interni nei vertici A, E, A', D', H, J, K e M hanno ampiezze uguali a 36°.

LA SQUADRA DI LIBERGIER

Il grafico che segue è ricavato dal lavoro di Renzo Chiovelli. Sono state aggiunte le lettere ai vertici per migliorarne la descrizione:



La squadra ha bordi *non paralleli*.



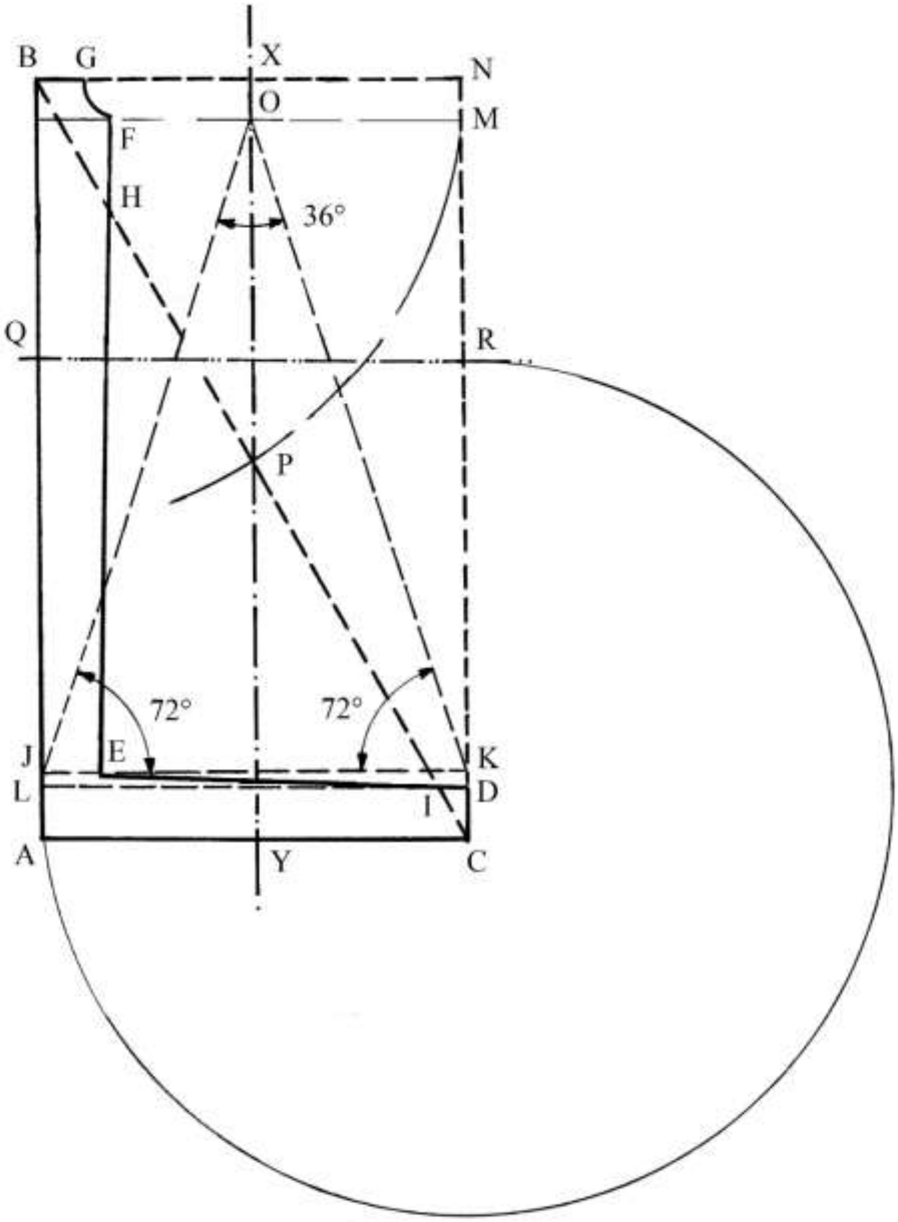
Il triangolo ABC è rettangolo ed è originato dal sezionamento di un ipotetico triangolo equilatero CC'B lungo l'altezza BA.

Chiovelli ritiene, a p. 253 del suo volume, che la forma dell'incisione e le dimensioni della squadra che appaiono sulla lastra tombale siano esattissime perché:

"…la raffigurazione sulla lastra tombale dell'architetto fu probabilmente ottenuta poggiandovi una squadra reale ed incidendovi i bordi con cura, pertanto essa rappresenterebbe le dimensioni al vero della squadra originaria. Dal rilievo accurato dell'incisione di questa squadra, i cui bracci misurano lunghezze di 52,2 x 30 cm, risulta che congiungendo con una retta facente da ipotenusa i due angoli esterni degli estremi dei bracci, oltre ai classici angoli di 60° e 30°, si possono ottenere, mediante l'intersezione della stessa retta con i bordi interni, altri angoli che misurano 58° 29' 50" e 31° 30' 10…".

Anche per la canna e il compasso fu usato il metodo impiegato per rappresentare la squadra, e cioè poggiando questi strumenti sulla lastra per segnare i loro bordi?

Il grafico che segue è costruito sul precedente schema:



La squadra è inscritta nel rettangolo ABNC e BC è una sua diagonale.

XY è l'asse di simmetria verticale e la mediana maggiore del rettangolo.

Tracciare i segmenti JK (passante per E) e LD: entrambi sono paralleli al lato AC.

Per il punto F condurre la perpendicolare FOM all'asse XY (e parallela a BN e a AB).

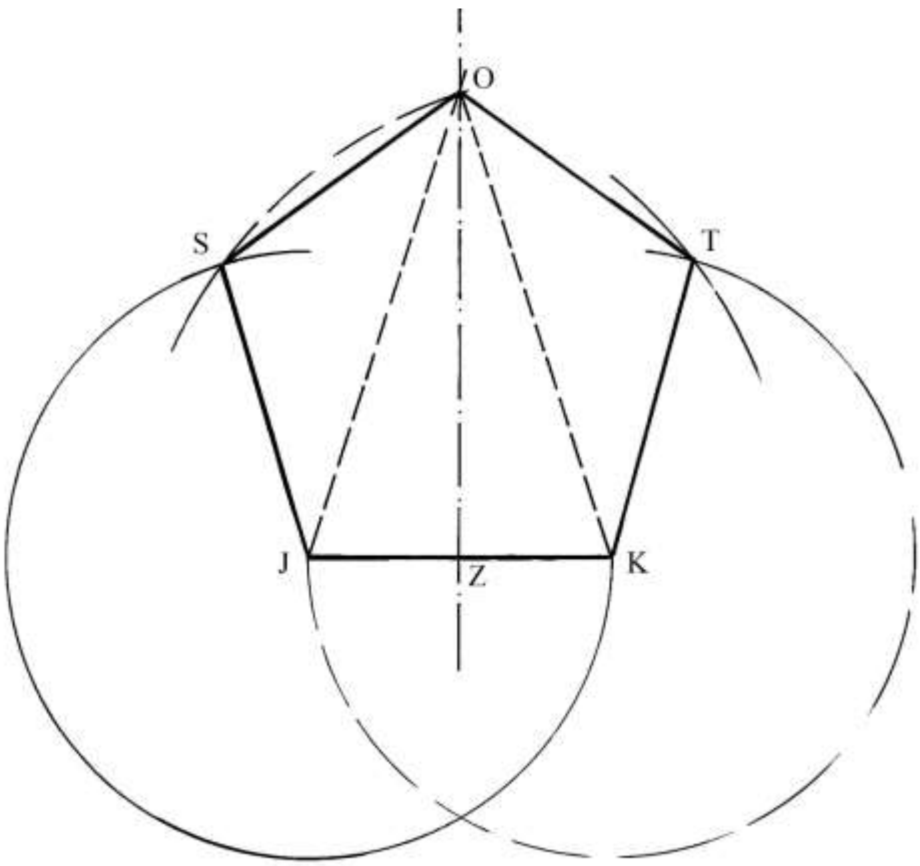
Disegnare il triangolo isoscele JOK: esso è *aureo* perché ha l'angolo in O ampio 36° e gli angoli in J e in K di 72°. Questo particolare triangolo era usato per costruire il pentagono a partire da un lato lungo quanto JK.

Fare centro in B e con raggio BN tracciare l'arco da N fino a incontrare in P l'asse XY e la diagonale BC.

Con raggio DL=CA fare centro in D e disegnare un arco da L fino a tagliare DN nel nuovo punto R: LQRD è un quadrato.

Sul grafico, LB corrisponde alla lunghezza del *cubito* e LD a quella del *piede*.

Riconsideriamo il triangolo isoscele aureo JOK evidenziato nel precedente schema:



JK è il lato di un pentagono regolare e i lati OJ e OK sono due diagonali del poligono da costruire. J, O e K sono tre vertici del pentagono. Infatti il rapporto fra le lunghezze dei lati è:

$OJ = OK = JK * \phi$.

Disegnare l'altezza OZ.

Fare centro in J e in K e con raggio JK tracciare due ampi archi di circonferenza.

Con il compasso misurare la lunghezza di JO = KO e fare centro in J e in K per disegnare due archi che intersecano i precedenti nei punti S e T.

JSOTK è il pentagono regolare cercato.

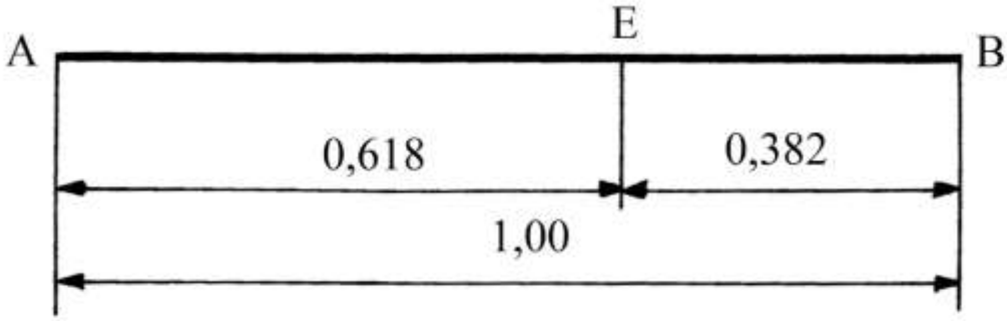
Nel Medioevo non era comunemente usato il compasso, come è stato fatto qui sopra, ma la costruzione del pentagono era ottenuta con la sola squadra effettuando una serie di rotazioni.

La sezione aurea

Risale a Euclide la prima definizione della *sezione aurea* (ma non l'attuale denominazione, che è piuttosto recente): egli la definì come la "divisione di un segmento in *media* e *ultima ragione*".

In termini più discorsivi, si tratta di dividere un segmento in modo che il rettangolo che ha per lati l'intero segmento (AB) e la sua parte minore (EB) sia equivalente al quadrato che ha lato lungo quanto la parte maggiore dello stesso segmento (AE).

La figura che segue descrive la situazione:



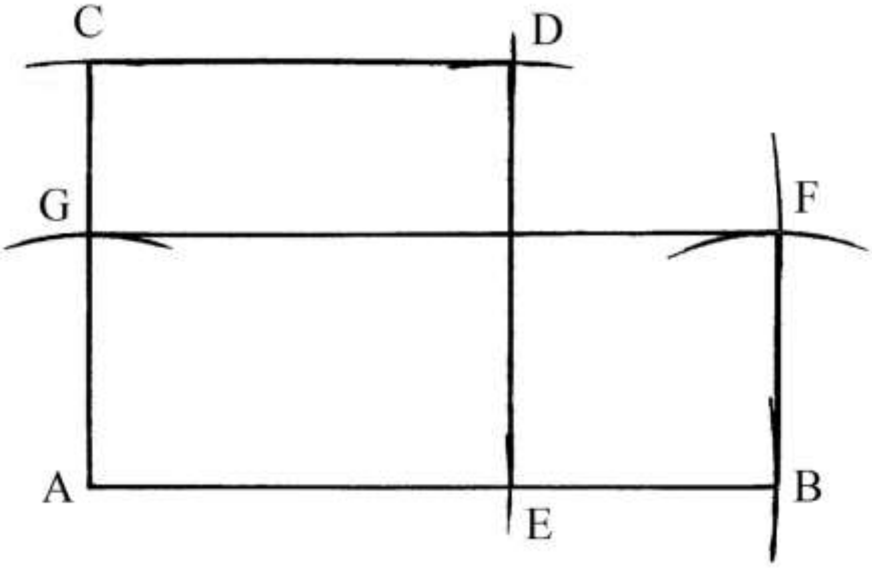
Il segmento AB è lungo 1 unità convenzionale. Esso è diviso dal punto E in due parti:

- AE è la *media ragione* ed è lungo ≈ 0,618 unità;
- EB è l'*ultima ragione* ed è lungo ≈ 0,382 unità.

I due coefficienti 0,618 e 0,382 sono leggermente approssimati: il primo per *difetto* e il secondo per *eccesso*.

Il rettangolo ABFG (con BF = BE) possiede la stessa superficie del quadrato di lato AE:

$$AB * BF = AE^2 .$$

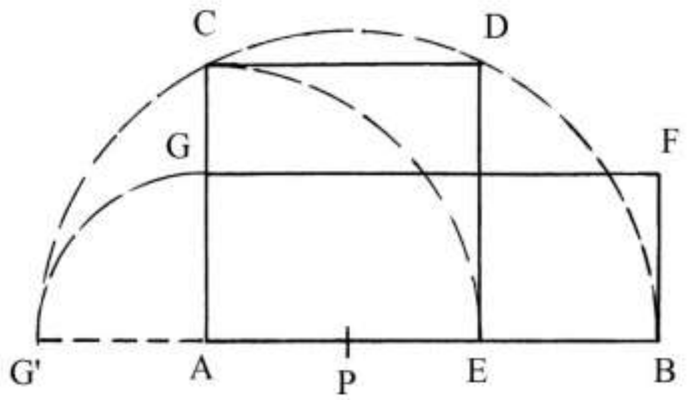


\- APPROFONDIMENTO -

Nella figura che segue è presentata la costruzione inversa rispetto alla precedente.

AGFB è un rettangolo che ha lati:

* AB è proporzionale a 1;
* AG ha lunghezza proporzionale a 0,382.



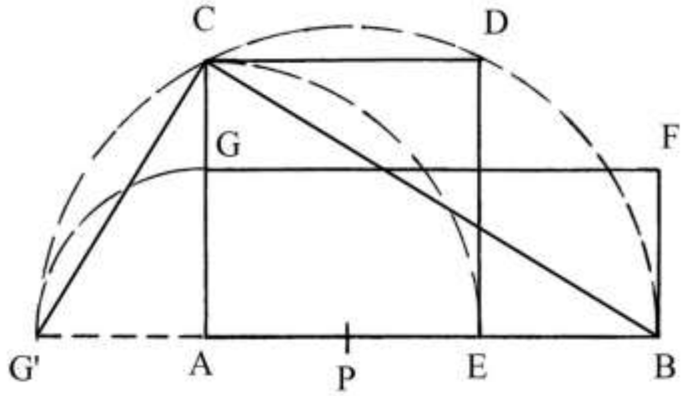
Prolungare verso sinistra il lato AB. Fare centro in A e, con raggio AG, tracciare l’arco GG’.

Determinare il punto medio di G’B: è P.

Fare centro in P e con raggio PG’ = PB disegnare una semicirconferenza. Prolungare verso l’alto il lato AG fino a incontrare la semicirconferenza nel punto C.

Il segmento AC è il lato del quadrato ACDE che ha area uguale a quella del rettangolo AGFB.

G’CB è un triangolo rettangolo inscritto in un semicerchio:



Per il secondo teorema di Euclide sui triangoli rettangoli inscritti vale la seguente proporzione:

AG’: AC = AC : AB, da cui:

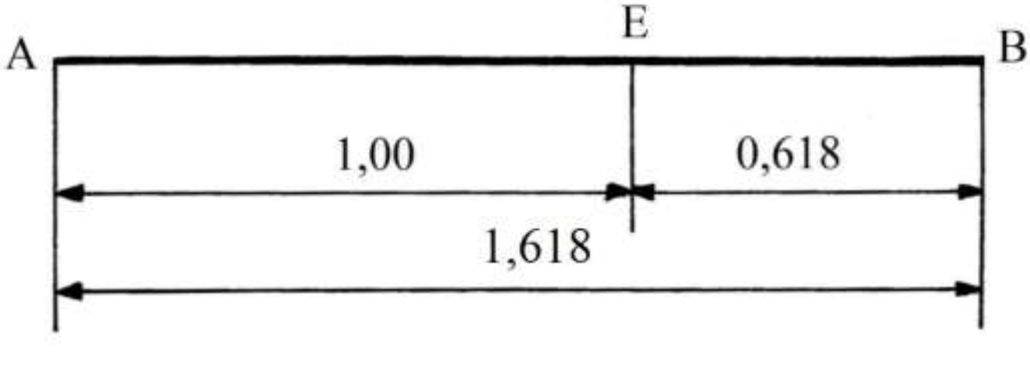
AC^2 = AG’ * AB = AG * AB e

AC = √(AG * AB) = √(0,382 * 1) = √0,382 = 0,618…

La soluzione è corretta.

- -

La divisione del segmento AB può essere presentata anche con la proporzione che è descritta nella figura che segue:



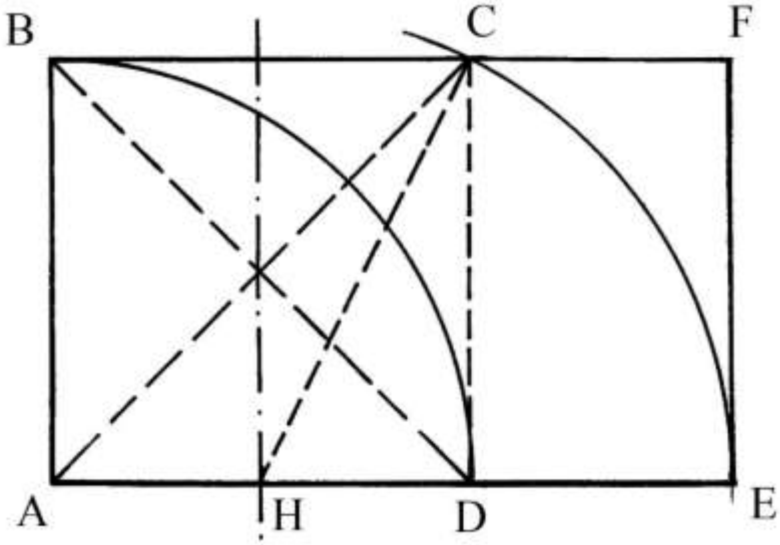
Il segmento AB è lungo ≈ 1,618 unità: AE è lungo 1 e EB è lungo ≈ 0,618.
I numeri 0,618 e 1,618 sono entrambi approssimati per *difetto*.

Il numero 0,618 è spesso indicato con il simbolo **φ**, lettera dell'*alfabeto greco* Phi, minuscola.

Il numero 1,618 viene indicato con il simbolo **Φ**, lettera dell'alfabeto greco Phi, maiuscola. Il simbolo fu scelto in onore dello scultore e architetto ateniese Fidia (vissuto fra il 490 e il 430 a.C.).

<u>Costruzione della sezione aurea</u>

ABCD è un quadrato e il punto H è il medio del lato AD:



Disegnare le diagonali AC e BD e il segmento HC.

Facendo centro in H con raggio HC, tracciare l'arco di circonferenza da C fino ad intersecare in E il prolungamento di AD.

AD è la sezione aurea del segmento AE e cioè ne è la *media ragione*:

AE : AD = AD : DE

Il segmento HC è l'ipotenusa del triangolo rettangolo HDC e applicando il teorema cosiddetto di Pitagora si hanno le seguenti relazioni:

$HC^2 = HD^2 + CD^2$ ma HD = ½ * CD per cui sostituendo si ha:

$HC^2 = (1/2 * CD)^2 + CD^2 = 5/4 * CD^2$

$HC = (\sqrt{5})/2 * CD$.

$\sqrt{5} \approx 2{,}236$ e $(\sqrt{5})/2 \approx 1{,}118$.

Nella figura, i rapporti fra le lunghezze dei segmenti sono:

$AE/AD \approx 1{,}618 = \Phi$

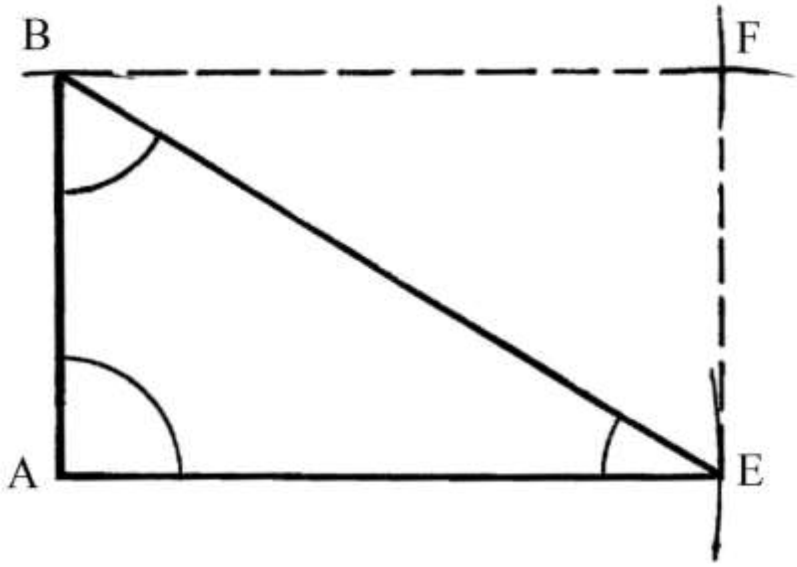
$\Phi \approx 1 + 0{,}618$ e cioè $\Phi = 1 + \varphi$.

$DE/AE \approx 0{,}382 = 1 - \varphi$

$AD/AE \approx 0{,}618 = \varphi$

$DE/AD \approx 0{,}618 = \varphi$

Semplifichiamo la figura precedente e disegniamo pure la diagonale BE:



Il rapporto fra le lunghezze dei due cateti del triangolo rettangolo ABE, AB e AE, è:

$AE/AB \approx 1,618$

Infatti:

$AE : AB \approx 1,618 : 1$

La lunghezza della diagonale BE si ricava con il teorema cosiddetto di Pitagora:

$BE^2 = AE^2 + AB^2$, ma $AE \approx 1,618 * AB$ e quindi

$BE^2 \approx (1,618 * AB)^2 + AB^2 \approx 2,618 * AB^2 + AB^2 \approx 3,618\ AB^2$, da cui

$BE \approx AB * \sqrt{(3,618)}$.

Nota: Un'interessante proprietà del numero aureo è che i suoi multipli e i suoi sottomultipli contengono sempre la stringa ",618…".

Gli angoli del triangolo rettangolo ABE hanno le seguenti ampiezze:

- Nel vertice A: 90°,
- In B: 58° 16' 57",
- In E: 31° 43' 03".

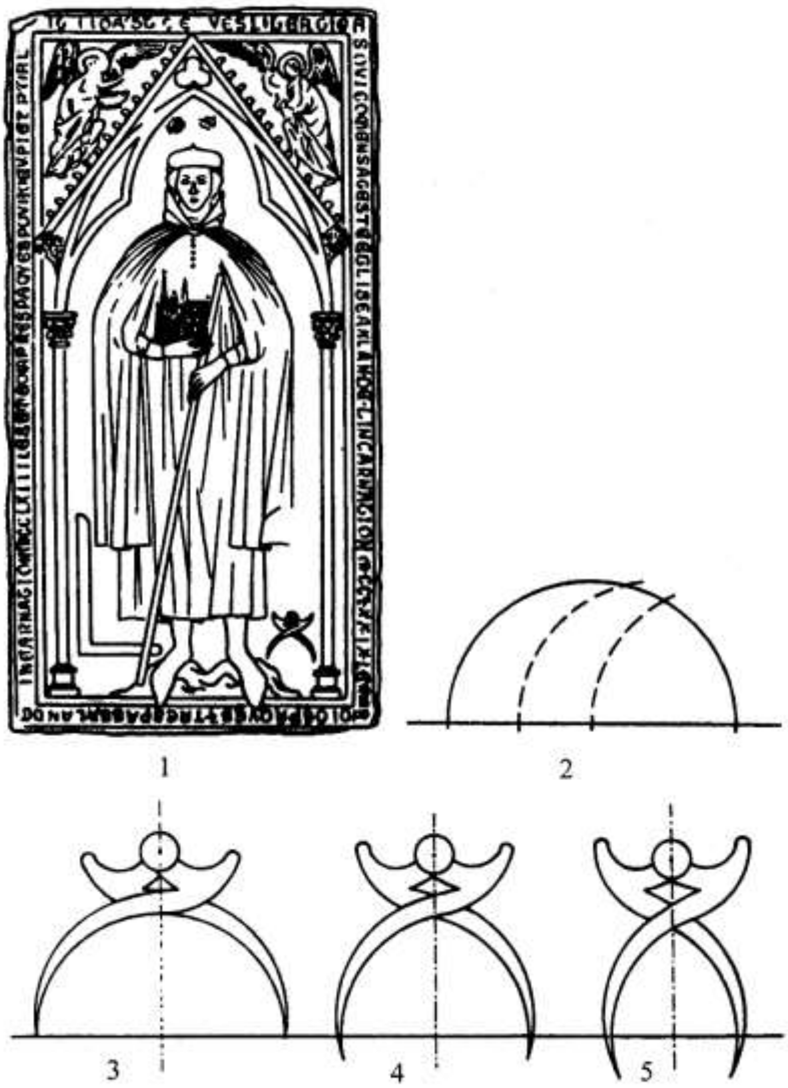
Gli angoli di 58° 29' 50'' e di 31° 30' 10'' calcolati per la squadra di Libergier si avvicinano quasi esattamente a quelli presenti nel triangolo ABE che è la metà di un *rettangolo aureo*.

Quindi, la squadra di Libergier poteva essere usata per tracciare figure legate alla sezione aurea.

IL COMPASSO DI LIBERGIER

Il *compasso* di Libergier è anche chiamato *serpentino*: modelli simili sono rappresentati in altre incisioni medievali.

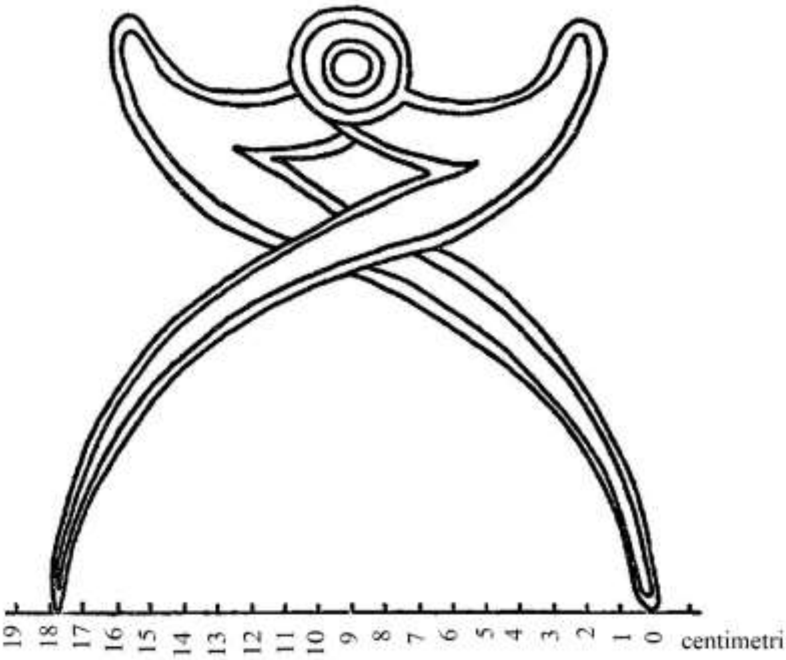
Secondo l’interpretazione data da alcuni studiosi francesi (fra i quali Roland Bechmann nel suo studio “Le radici delle cattedrali”), il compasso era usato per disegnare il profilo di tre diversi tipi di arco caratterizzati dallo stesso raggio, come spiega la figura che segue tratta da questo Autore:



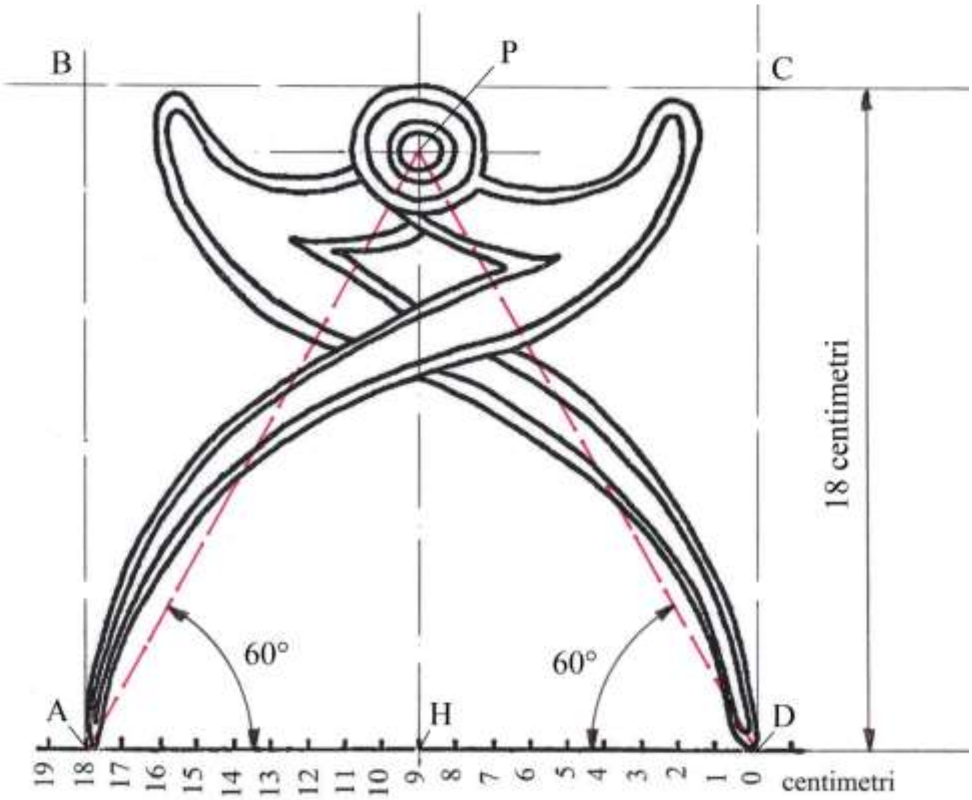
IPOTESI DI UTILIZZAZIONE DELLO STRUMENTO DI LIBERGIER
1) Pietra tombale di H. Libergier a Reims (da R. Oursel). A destra il “compasso”.
2) Come tracciare tre archi con la stessa apertura a compasso (= il raggio), da Villard de Honnecourt (cfr. Tav. XXXVIII di Lassus).
3), 4) e 5) Tracciato di 3 archi con il medesimo raggio, disegnati con l’aiuto dello strumento di Libergier.

A sinistra (3) è disegnato l’arco *a tutto sesto*, al centro (4) è un arco *a due terzi* e a destra (5) è tracciato un arco *a sesto acuto*.

Lo schema che segue è rielaborato dall’articolo di Guy Beaujouan citato in bibliografia; le due punte sono distanziate di quasi 18 cm:



Il compasso è inscrivibile in un quadrato ABCD che ha lati lunghi 18 cm:



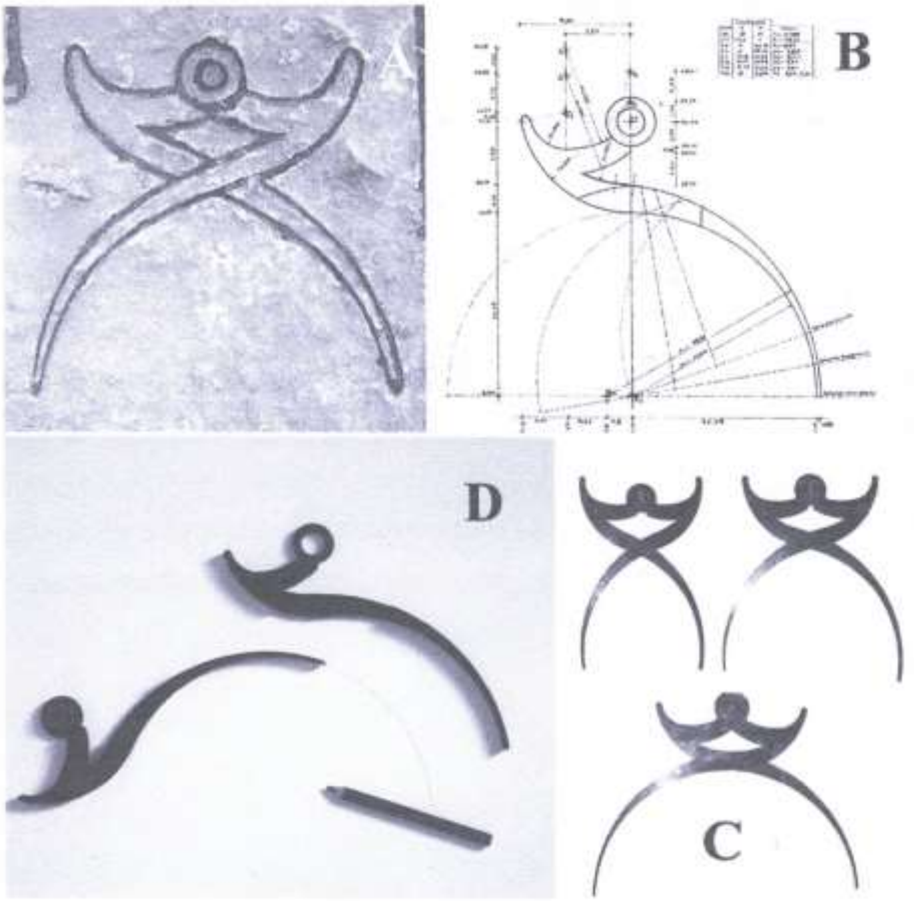
Il punto H è l'intersezione dell'asse di simmetria verticale con il lato AD. Il punto P è il centro delle circonferenze concetriche che sono nell'impugnatura e PH è un'altezza del triangolo APD che è equilatero perché i suoi angoli interni misurano 60°.

Lo strumento sarebbe stato manovrato usando entrambe le mani.

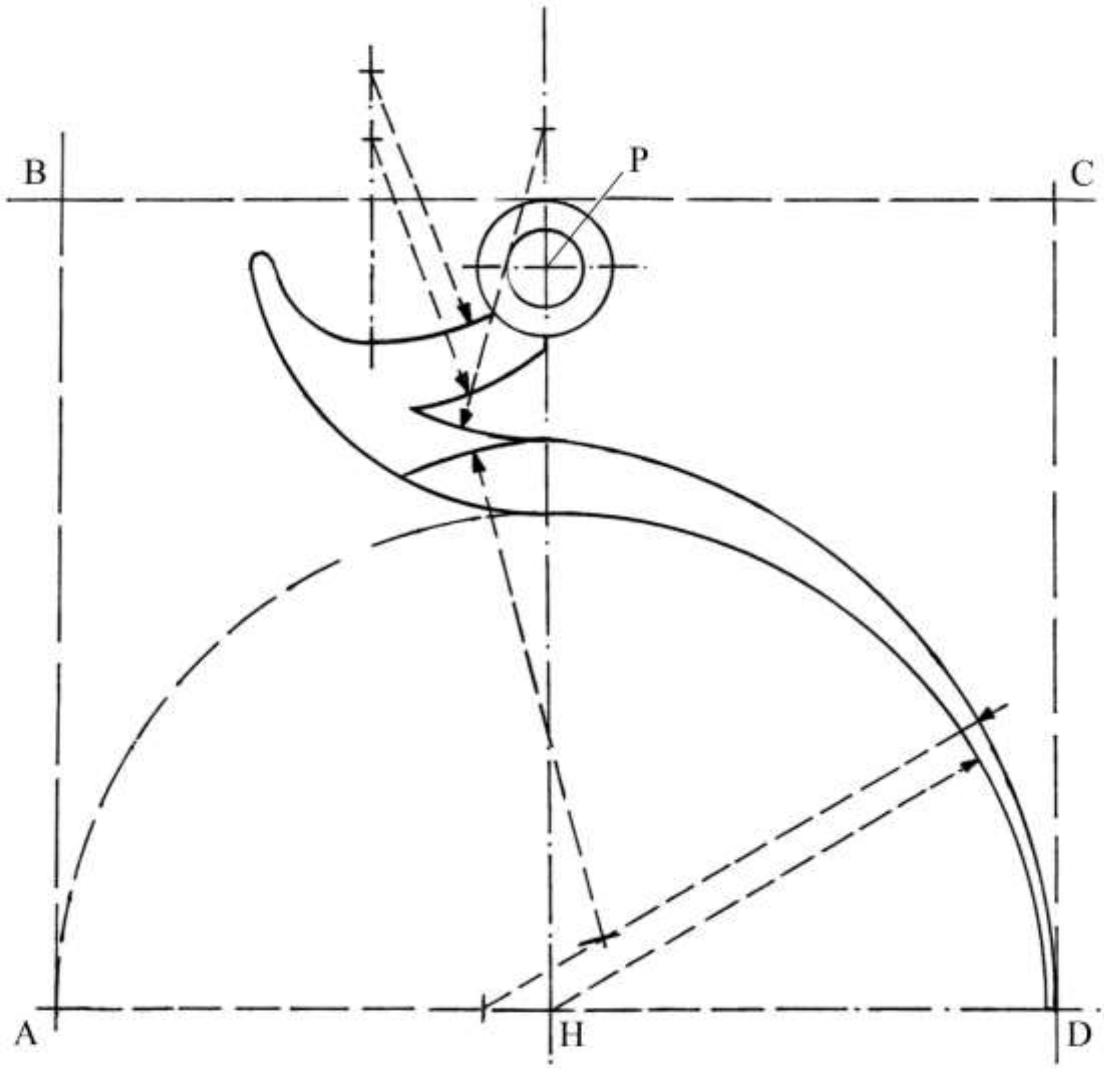
È stata avanzata l'ipotesi che esso fosse impiegato anche per rilevare e misurare le sporgenze e gli incavi delle modanature.

Nel corso degli ultimi anni, il compasso è stato oggetto di alcuni studi pubblicati da ricercatori italiani.

Lo storico dell'arte Francesco Abbate ha riprodotto il compasso e lo ha disegnato smontato:

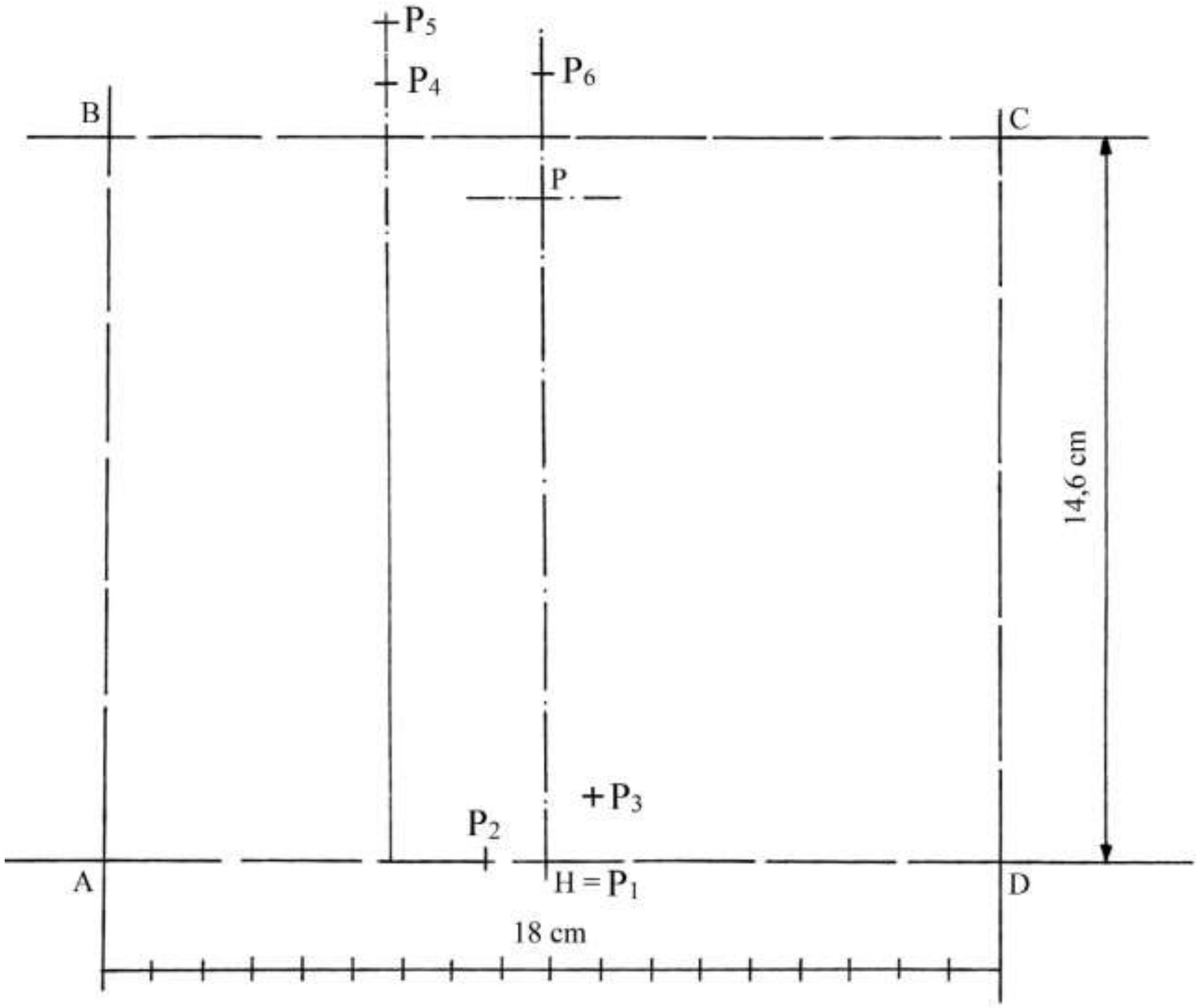


Il grafico che segue è una rielaborazione della lettera B del precedente schema:



L’asta o branchia destra del compasso è stata ridisegnata tracciando gli archi di circonferenza delle curve del profilo. Sono indicati i diversi raggi e evidenziati i centri degli archi.

L’asta è inscritta nel rettangolo ABCD che ha le dimensioni indicate nello schema che segue:



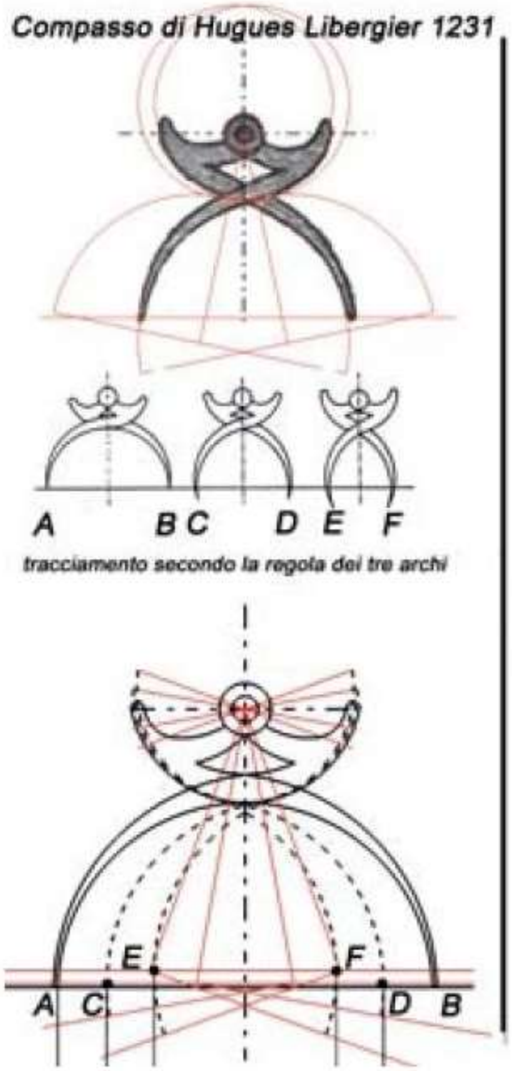
I centri delle circonferenze e degli archi evidenziati nella penultima figura sono qui sopra indicati con P, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 e P_6.

Lo schema dell'Abbate ha scorciato l'altezza dell'asta da 18 a 14,6 cm, con un rapporto di 0,81.

Le lunghezze dei raggi e i punti significativi degli archi possono essere misurati sui due grafici.

Mara Capone ha fornito un'interpretazione dell'uso del compasso di Libergier per la tracciatura di diversi tipi di archi: le diverse posizioni assunte dalle aste negli schemi che seguono sarebbero servite per tracciare o controllare i profili di quegli archi.

La figura fa riferimento a un anno, il 1231, nel quale Libergier era vivo e lavorava (fin dal 1229) nel cantiere della chiesa di Saint-Nicaise: equivocando sulla lettura dell'epigrafe che contorna la sua lastra tombale, alcuni autori attribuiscono al 1229 la data di nascita dell'architetto: invece, in quell'anno ebbe inizio la sua opera di progettista e costruttore di quella chiesa di Reims.



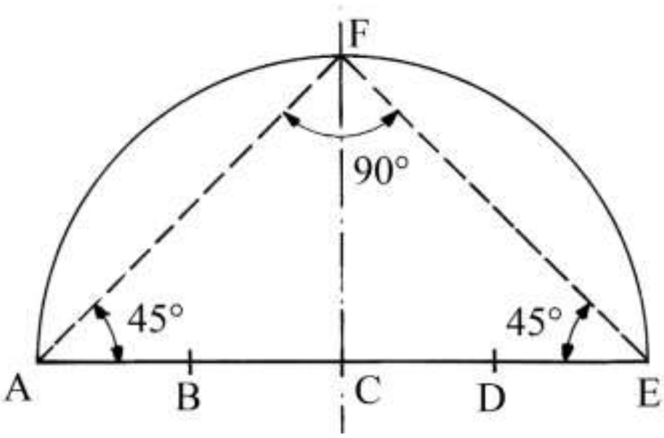
Se il compasso fosse stato effettivamente usato – ed è solo un'ipotesi – per disegnare e verificare i profili degli archi, la sua forma sarebbe stata modificata impugnandola con entrambe le mani e facendo ruotare le due aste intorno al loro comune centro.

Di quale materiale era fatto il compasso? Forse di un cattiva lega di ferro? Il bronzo era troppo costoso e il legno si consumava velocemente. Per inciso: di quali materiali erano fatti la canna e la squadra? Di legno?

%%%%%%%%%%%%%%%%%%

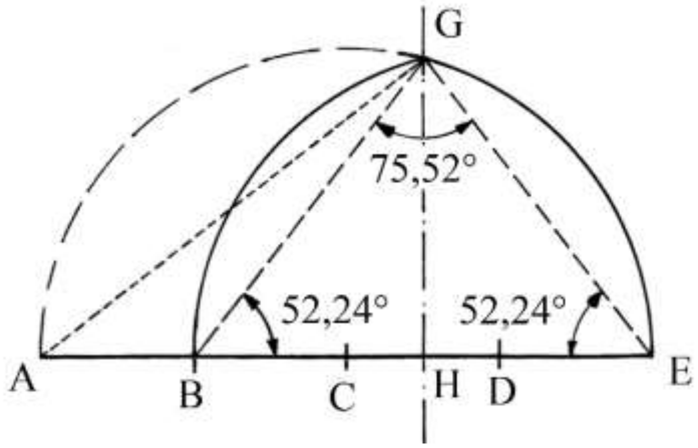
La base dei tre tipi di archi tracciabili con il compasso di Libergier è il diametro ABCDE (nello schema che segue), diviso in quattro parti di uguali lunghezze.

Nel caso dell'*arco a tutto sesto*, il profilo è ottenuto tracciando la semicirconferenza AFE con centro in C e raggio CA=CE:



Il triangolo inscritto nel semicerchio, AFE, è rettangolo e isoscele.

Nel caso dell'*arco a due terzi*, il suo profilo è generato dall'intersezione di due archi di circonferenza di raggio CA, disegnati facendo centro nei punti B e E:



Essi si intersecano in G la cui proiezione sul diametro AE è il punto H.

La figura inscritta, BGE, è un triangolo isoscele che ha base BE lunga 3/4 di AE e altezza GH.

AGE è un triangolo rettangolo inscritto nel semicerchio AGE, che ha centro in C.

Il punto H è il medio di CD:

CH = HD = CD/2 .

Per il secondo teorema di Euclide sui triangoli rettangoli vale la relazione:

AH : GH = GH : HE .

L'altezza GH è medio proporzionale fra le lunghezze delle proiezioni dei cateti sull'ipotenusa AE.

AH è lungo:

AH = AC + CH = 2*CD + CD/2 = 5/2 * CD =5/2 * (AB/4) = 5/8 * AB.

La lunghezza del segmento HE è data da:

HE = AB – AH = AB – 5/8 * AB = 3/8 * AB.

Sostituendo questi valori nella proporzione si ha:

$GH^2 = AH * HE = (5/8 * AB) * (3/8 * AB) = 15/64 * AB^2$.

Ne consegue:

GH = AB * (√15)/8 .

La tangente dell'angolo GBH è data da:

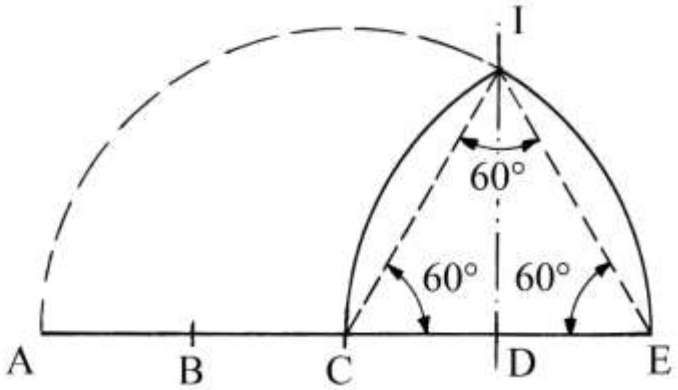
tg GBH = GH/BH = [AB * (√15)/8]/(3/8 * AB) = (√15)/3 ≈ 1,29099.

A questo valore corrisponde un angolo GBH = GBE ≈ 52,24°.

L'angolo BGE è ampio:

BGE = 180° – GBE – GEB ≈ 180° - 2 * 52,24° ≈ 75,52°

Infine, l'*arco a sesto acuto* ha un profilo che è definito dall'intersezione di due archi di circonferenza di raggio CA con centri in C e in E:



Il punto di incontro degli archi è I la cui proiezione sul diametro AB è il punto D.
Il triangolo inscritto, CIE, è equilatero e ID è una sua altezza.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Un ricercatore italiano, Andrea Vitussi, ha costruito un modello in cartone e poi in legno di *mogano* del compasso di Libergier: le fasi della sua realizzazione sono illustrate sul sito https://www.andreavitussi.com/ric-libergier (visitato il 19 aprile 2021).

APPENDICE
==========

John Roger Haughton James è un architetto anglo-australiano, nato nel 1931.

Fra gli altri temi ha studiato l'architettura gotica e in particolare alcune cattedrali medievali costruite in Francia.

Un suo articolo, citato in bibliografia, ha studiato le proprietà geometriche dei tre strumenti incisi sulla pietra tombale di Hues Libergier.

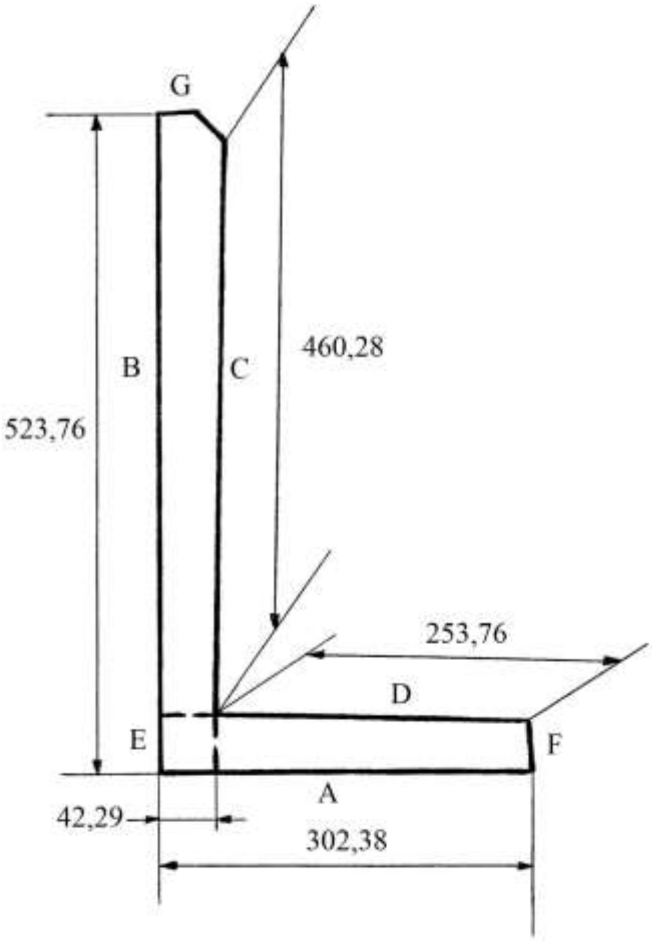
James ha riprodotto gli strumenti e ha fornite le loro dimensioni tentando di dare una spiegazione riguardo ai loro rapporti.

Le sue interpretazioni delle caratteristiche dei tre strumenti incisi sulla lastra tombale di Libergier sono qui riportate per opportuna informazione, senza esprimere alcun giudizio sulla loro attendibilità: sta agli studiosi del ramo – medievisti, storici della geometria, ingegneri e architetti – dare una risposta.

Negli schemi proposti da questo Autore le dimensioni sono espresse in *millimetri*.

La squadra di Libergier

Il grafico che segue riproduce la squadra di Libergier: su di esso sono indicati gli spigoli, contrassegnati con le lettere maiuscole A, B, C, D, E, F e G:

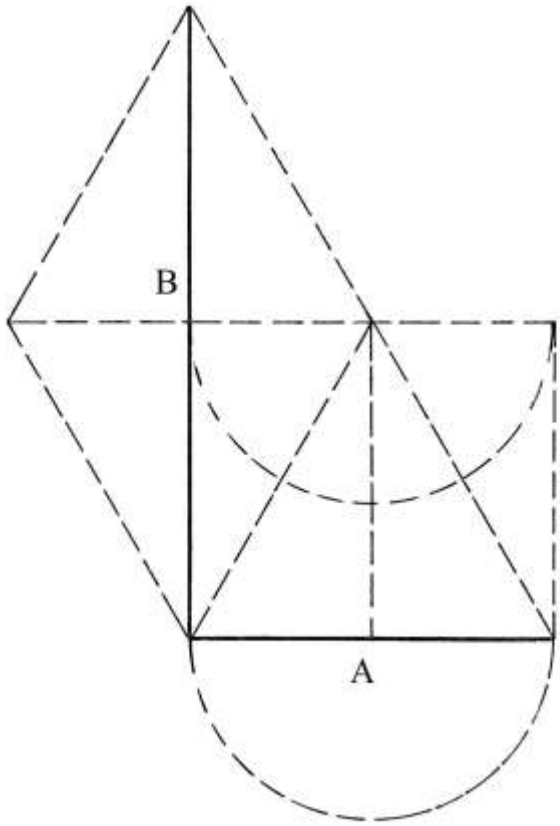


La lunghezza dello spigolo B è da James ritenuta uguale a quella del *cubito reale egizio* che misurava mediamente 525 mm.

Fra le lunghezze degli spigoli B e A intercorrerebbe una precisa proporzione:

B : A = 523,76 : 302,38 = 1,732125 : 1 = √3 : 1.

Il rapporto esistente fra le lunghezze dei due spigoli sarebbe quello intercorrente fra la lunghezza del doppio dell'altezza di un triangolo equilatero e quella di un lato del triangolo stesso. Lo schema che segue fornisce un esempio di costruzione del rapporto √3:



Infatti si ha: B : A = √3 : 1.

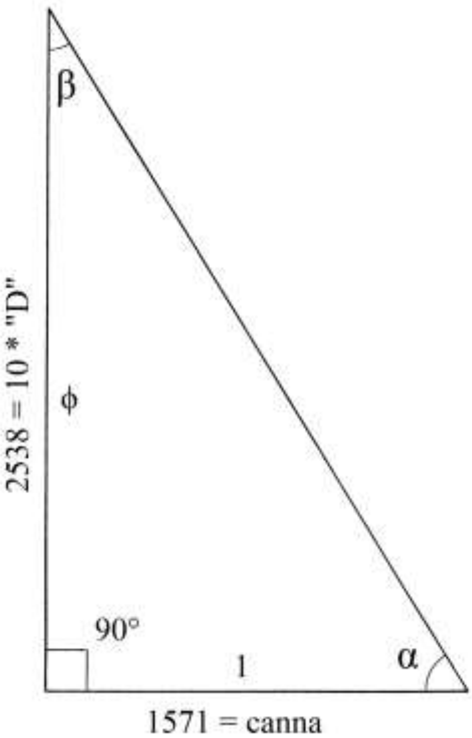
I progettisti e i costruttori medievali, categoria alla quale apparteneva Libergier, possedevano una ragionevole conoscenza delle proprietà geometriche delle figure piane, quali in particolare il triangolo equilatero e il quadrato, entrambe costruibili con la squadra.

Il triangolo equilatero e il quadrato erano due figure basilari sfruttate dai costruttori nell'elaborazione dei loro grandi progetti.

La lunghezza dei lati dell'ipotetico quadrato presente nell'origine delle due braccia e di cui lo spigolo E è un esempio è uguale a 42,29 mm: secondo James essa sarebbe lunga un sesto dello spigolo D:

"D"/6 = 253,76/6 = 42,29(3) → 42,29 mm.

James costruisce un triangolo rettangolo che è conosciuto come *triangolo della sezione aurea*:



Il cateto minore è lungo 1571 mm e cioè quanto la *canna* e quello maggiore ha lunghezza 2538 mm, valore che corrisponde a *dieci* volte la lunghezza dello spigolo "D" della squadra.

L'angolo α ha tangente data da:

tg α = 2538/1571 = 1,6155…, al quale corrisponde un angolo α = 58,24°.

L'angolo complementare β è ampio:

β = 90° – α = 90° – 58,24° = 31,76°.

Il rapporto fra la lunghezza del cateto maggiore e quella del cateto minore, 1,6155…, è assai vicino al valore di ϕ che è 1,618…

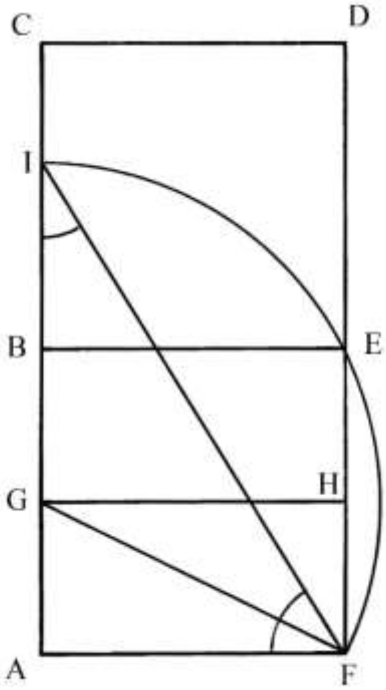
Ciò spiega la presenza dei simboli "ϕ" e "1" sui due cateti.

\- APPROFONDIMENTO -

Triangolo della sezione aurea

Un squadra che ha cateti lunghi in proporzione a 1 e a Φ è costruibile con il metodo descritto di seguito.

Utilizziamo il doppio quadrato ABCDEF:



Tracciare la mediana GH nel quadrato ABEF e la diagonale GF.

Fare centro nel punto G e con raggio GF disegnare un arco passante per i punti F e E, fino a tagliare AC nel punto I.

AIF è un triangolo rettangolo che ha angoli di ampiezza: AFI = 58,28° e AIF = 31,72°.

La lunghezza *convenzionale* di AF è 1 e quella di AG è ½.

La diagonale GF è lunga:

$$GF = \sqrt{(AF^2 + AG^2)} = \sqrt{[1^2 + (½)^2]} = \sqrt{(5/4)} = (\sqrt{5})/2 .$$

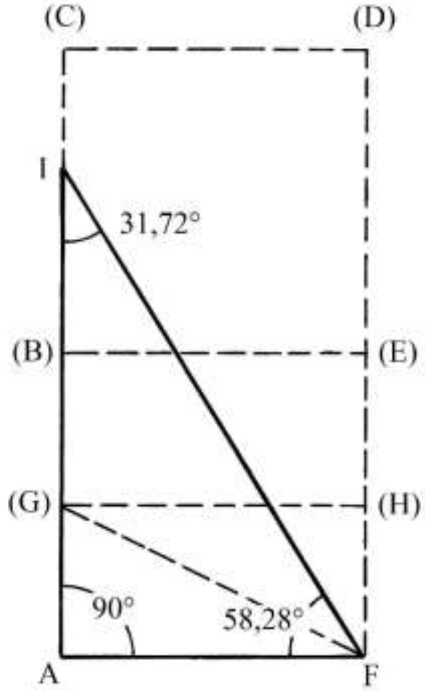
A sua volta, il segmento AI è lungo:

$$AI = AG + GI = AG + GF = ½ + (\sqrt{5})/2 = (\sqrt{5} + 1)/2 = \phi \approx 1{,}618\ldots$$

La lunghezza di FI è:

$$FI = \sqrt{(AI^2 + AF^2)} = \sqrt{(\phi^2 + 1^2)} \approx 1{,}902\ldots$$

Il triangolo AIF è rettangolo e *aureo*. I suoi angoli hanno le ampiezze riportate nella figura:



Le differenze con il triangolo rettangolo ipotizzato da James sono minime:

Angoli squadra sezione aurea	Corrispondenti angoli ipotesi James
58,28°	α = 58,24°
31,72°	β = 31,76°

\- -

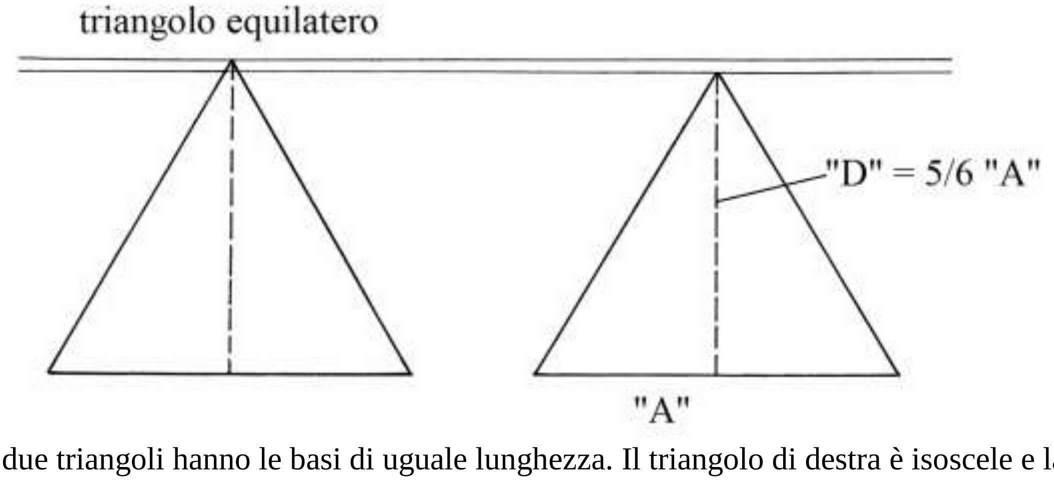
Fra le lunghezze degli spigoli A e D vi è una proporzione:

“A” : “D” = 302,38 : 253,76 ≈ 6 : 5.

La frazione 6/5 e il suo reciproco sono interessanti: 5/6 vale 0,8(3). Questo valore non è troppo lontano dal rapporto esistente fra l’altezza *h* di un triangolo equilatero e la lunghezza ℓ del lato:

$h = (\sqrt{3})/2 * \ell = 0{,}866\ldots * \ell.$

La differenza fra le due costanti – 0,8(3) e 0,866 – non era grande e la frazione 5/6 poteva essere impiegata per la costruzione approssimata del triangolo equilatero:



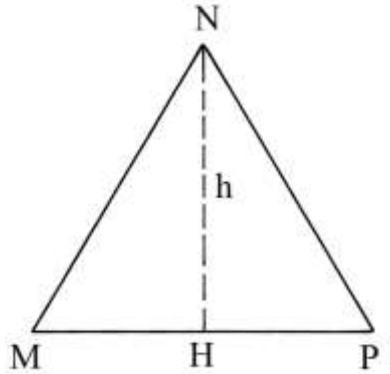
I due triangoli hanno le basi di uguale lunghezza. Il triangolo di destra è isoscele e la sua altezza è leggermente più corta di quella del triangolo equilatero: essa è 5/6 del lato di base.

Il triangolo di destra è *quasi equilatero*.

Nel Medioevo erano disponibili altre due costanti approssimate del rapporto fra le lunghezze dell'altezza e del lato di un triangolo *quasi* equilatero:

* la costante di Erone: 13/15;
* la costante proposta da Gerberto d'Aurillac (papa Silvestro II – circa 940/950 – 1003): 6/7.

Calcoliamo la lunghezza dei lati MN e PN del triangolo isoscele quasi equilatero:



$MN^2 = MH^2 + HN^2 = (\ell/2)^2 + (5/6 * \ell)^2 = \ell^2/4 + 25/36 * \ell^2 = \ell^2 * (1/4 + 25/36) =$
$= \ell^2 * (9 + 25)/36 = 34/36 * \ell^2 = 17/18 * \ell^2.$
$MN = PN = \ell * \sqrt{(17/18)} \approx 0{,}9718 * \ell.$

La differenza con la lunghezza del lato di base MP è minima.

Infine, fra le lunghezze dei bordi C e D intercorre un'altra proporzione:

"C" : "D" = 460,28 : 253,76 ≈ $\pi : \sqrt{3}$.

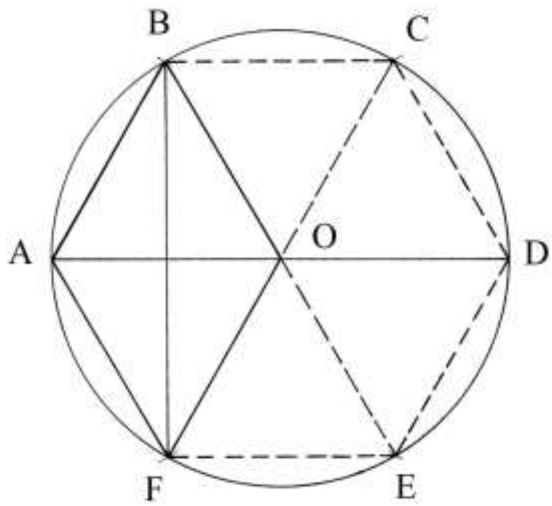
Dato che Archimede aveva introdotto per π il valore approssimato 22/7, l'ultima proporzione può essere scritta come segue:

"C" : "D" = 460,28 : 253,76 ≈ 22/7 : $\sqrt{3}$.

Sorge però un dubbio: che si tratti di una casualità? È un po' difficile individuare una relazione fra gli ultimi termini della proporzione.

ABCDEF è un esagono regolare inscritto nel cerchio di centro O e raggio OA lungo convenzionalmente 1.

AD, BE e CF sono tre diametri:



ABOF è *un rombo* le cui diagonali sono lunghe:

* BF, diagonale maggiore, è $\sqrt{3}$;
* AO, diagonale minore, è lunga 1, quanto i quattro lati del rombo.

Il triangolo equilatero è inscrivibile in un cerchio, il rombo no.

La circonferenza *c* del cerchio è lunga:

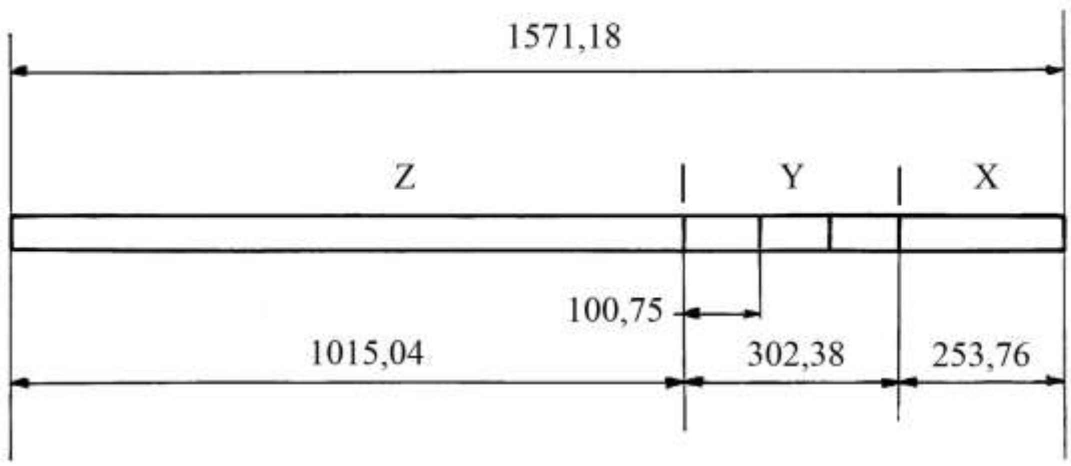
c = 2*π*raggio = 2*π*1 = 2*π.

L'arco sotteso dal rombo, BAF, è un terzo dell'angolo giro ed è lungo

BAF = 1/3 * c = 2/3 * π.

La canna di Libergier

Lo schema che segue riproduce il grafico pubblicato da James riguardo alle dimensioni, sempre espresse in millimetri, della canna di Libergier e delle sue ripartizioni:



Anche in questo schema le singole ripartizioni sono indicate con lettere maiuscole: X, Y e Z.

James individua l'uguaglianza fra la lunghezza dello spigolo "D" della squadra e quella del tratto "X" della canna:

"D" : "X" = 253,76 : 253,76 = 1 : 1.

Anche le lunghezze del bordo "A" della squadra e quella del tratto "Y" sembrano uguali:

"A" : "Y" = 302,38 : 302,38 = 1 : 1.

Il tratto Z è lungo quattro volte quello X:

"Z" = 4 * "X" = 4 * 253,76 = 1015,04 mm.

Fra le lunghezze di due bordi della squadra e quelle di due tratti della canna esiste un'uguaglianza:

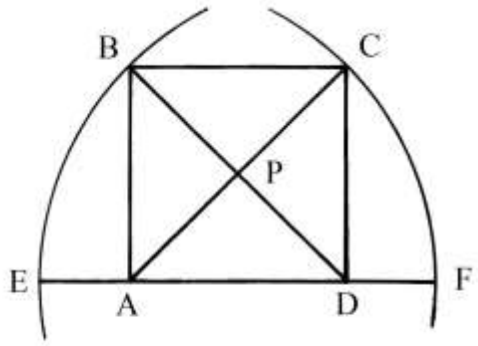
"D" + "A" = "X" + "Y" → 253,76 + 302,38 = 253,76 + 302,38.

Sempre riguardo alla canna, James ritiene di individuare un'altra proporzione:

"(X + Y)" : "Z" = (253,76 + 302,38) : 1015,04 = 556,14 : 1015,04 ≈

≈ 1 : 1,82515 ≈ 1 : (2*√2 – 1) ≈ 1 : (2,82842 – 1).

James propone una semplice costruzione geometrica per ricavare l'esatta lunghezza di (2*√2 – 1):



ABCD è un quadrato che ha lati convenzionalmente lunghi 1. Prolungare verso destra e verso sinistra il lato orizzontale AD. Tracciare le diagonali AC e BD: la loro lunghezza è:

$AC = BD = \sqrt{(AD^2 + CD^2)} = \sqrt{(1^2 + 1^2)} = \sqrt{2}$.

Fare centro nei punti A e D e con raggio AC = DB tracciare due archi passanti per B e per C: essi tagliano il prolungamento di AD nei punti E e F.

Il segmento EA è lungo quanto quello DF.

La lunghezza di EA è data da:

$EA = ED – AD = DB – AD = \sqrt{2} – 1$.

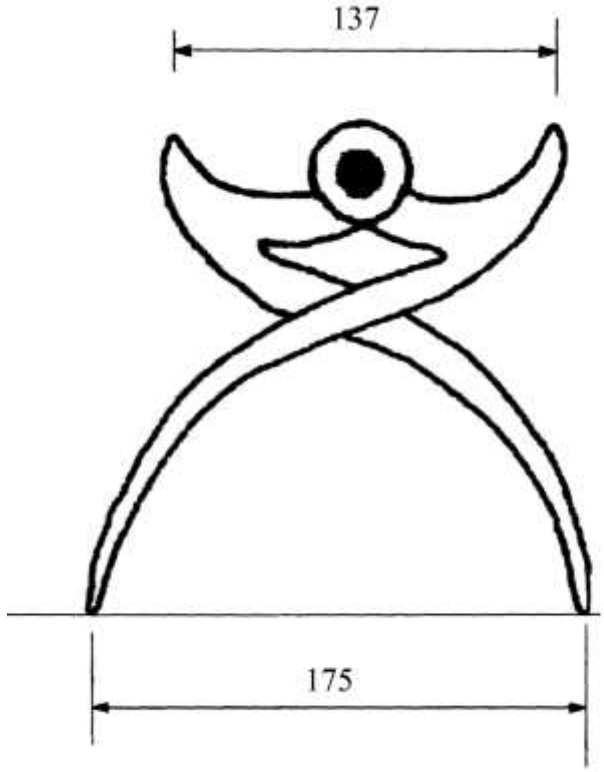
La lunghezza di EF è:

$EF = EA + AD + DF = 2*EA + AD = 2 * (\sqrt{2} – 1) + 1 = 2*\sqrt{2} – 2 + 1 = 2*\sqrt{2} – 1$.

Questa costruzione fornisce l'esatta proporzione fra le lunghezze di "Z" e di "(X + Y)".

<u>Il compasso di Libergier secondo James</u>

James ha misurato in millimetri la distanza fra le punte delle coppie di aste:



Nella coppia di punte superiori la distanza è lunga 137 mm e in quella inferiore è 175 mm.

L'Autore ha introdotto la seguente proporzione:

$137 : \pi = 175 : 4$.

Infatti si ha:

$137 : 3{,}14 = 175 : 4.$

I prodotti dei medi e degli estremi valgono:

$137 * 4 = 548$

$3{,}14 * 175 = 549{,}5.$

I due prodotti sono quasi uguali.

Ricaviamo il valore approssimato di π dalla proporzione:

$\pi = (137 * 4)/175 = 3{,}13(142857).$

Il rapporto fra π e 4 è praticamente uguale a quello 11 : 14:

$\pi : 4 \approx 11 : 14.$

Come è noto, la costante 11/14 è stata usata per secoli nella formula per il calcolo dell'area di un cerchio di cui erano noti il raggio *r* e il diametro $d = 2*r$:

$\text{Area}_{\text{CERCHIO}} = \pi * r^2 = \pi * (d/2)^2 = \pi * d^2/4 = d^2 * \pi/4$. Ecco comparire la costante "$\pi/4$".

Sulla scorta dell'opera di Archimede, almeno a partire dai Gromatici romani per secoli il valore della costante π è stato approssimato alla frazione 22/7.

La formula dell'area del cerchio diviene:

$\text{Area}_{\text{CERCHIO}} = d^2 * (22/7)/4 = d^2 * 22/28 = 11/14 * d^2.$

Bibliografia

1. Abbate Francesco, “The Planning and Building Instruments of Architects in the Late Middle Ages”, 2006, https://www.arct.cam.ac.uk/Downloads/ichs/vol-1-111-126-abbate.pdf
2. “L’Art des bâtisseurs romans”, Association des Amis de l’Abbaye, Boscodon, 1987, pp. non numerate.
3. Beaujouan Guy, “Réflexions sur les rapports entre théorie et pratique au moyen âge”, pp. 437-484, in “The cultural contest of medieval learning”, a cura di John Emery Murdoch e Edith Dudley Sylla, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht+Boston, 1975, pp. X+566.
4. Bechmann Roland, “Le radici delle cattedrali”, trad. it., Roma Edizioni Arkeios, 2006, pp. 326.
5. Capone Mara, “La discretizzazione della forma. Genesi e trasformazione: la geometria segreta dei reticoli spaziali delle volte gotiche”, “Disegnare idee immagini”, Roma, Gangemi Editore, anno XXIV, 2014, n. 49, pp. 36-47.
6. Carboni Donatella – De Vincenzi Matteo, “Storia dei sistemi di misura: un problema tecnico e sociale”, in “L’unificazione metrologica” a cura di Fabrizio Benincasa, Sassari-Firenze, CNR – Istituto di Biometeorologia, 2013, pp. 1-44.
7. Du Colombier Pierre, “Le compas du maître d’oeuvre”, “Bulletin de la Société Nationale des Antiquaires de France”, 1966, 1967, pp. 17-26.
8. James John, “The tools of Hues Libergier”, “Architectural Theory Review”, ii 1997, pp. 142-149, https://creationofgothic.org/COGA/files/articles/Libergier.pdf (accesso effettuato il 17.04.2021).
9. Legendre Léonard – Veillerot Jean-Michel, “L’architecte, l’équerre et la géometrie instrumentale au moyen âge: Analyse du plan de la Cathédrale de Reims”, in “Mediévalés”, n. 1, 1982, pp. 48-84.
10. Lloveras i Monserrat Kim [Joaquin], “Hugues Libergier i l’Escaire NT”, agosto 2012, https://upcommons.upc.edu/handle/2117/16535?show=full “201207 Libergier NT A4 Tot.pdf”.
11. Sené Alain, “Un instrument de précision au service des artistes du moyen âge: l’équerre”, in “Cahiers de civilisation médiévale”, 13, n. 52, octobre-décembre 1970, pp. 349-358.
12. Wu Nancy, “Hugues Libergier and his Instruments”, “Nexus Network Jornal”, volume II, 2000, pp. 93-102.