sergio(punto)calzolani(at)outlook(punto)it

Parole chiave: misura dei quadrilateri; misura dei triangoli; trapezi isosceli, rettangoli e scaleni; terreni di forma circolare: cerchi, semicerchi e segmenti circolari, ellisse; teorema delle corde; misura di poligoni con più di quattro lati; divisione delle figure: triangoli e quadrilateri; volumi di prismi, cilindri, piramidi, coni, tronchi di piramide e tronchi di cono; metodi e strumenti di misura.

L'OPERA GEOMETRICA DI SAVASORDA

Abraham Bar Hiyya è stato un astronomo e un matematico ebreo catalano, nato a Barcellona (fra il 1065 e il 1070) e morto in Provenza (intorno al 1136). È noto con il nome di *Savasorda*, corruzione del titolo arabo di "Capo della Guardia".

Fra le sue opere vi è un importante trattato di geometria pratica, probabilmente ispirato a precedenti testi arabi: *Hibbur hameixihà uehatixbóret*. Fra le fonti di Savasorda non sembra esservi il trattato geometrico, anonimo, in ebraico, "*Misnat ha middot*", tradotto in inglese e pubblicato nella prima parte del testo di Salomon Gandz citato in bibliografia. Gandz lo datò al 150 d.C., ma successivi studi lo attribuiscono al secolo IX e lo ritengono compilato a Baghdad sulla base di varie opere di autori islamici, fra i quali sembrano esservi al-Khwarizmi e Abu'l-Wafa.

Con l'aiuto del matematico e astronomo italiano Platone da Tivoli (attivo almeno fra il 1110 e il 1145) a Barcellona tradusse dall'ebraico in latino il suo trattato geometrico con il titolo *Liber Embadorum* ("Il libro delle aree").

Lo storico della matematica tedesco Maximilian Curtze pubblicò nel 1902 l'edizione latina del "Liber Embadorum" con a fianco la versione tedesca.

Altre due traduzioni tedesche furono pubblicate da Michael Guttmann (nel 1912-13) e da Moritz Steinschneider (nel 1925).

Nel 1931, lo studioso catalano Josep Maria Millàs i Vallicrosa pubblicò la versione del "Liber Embadorum" in catalano.

Molti studiosi ritengono che il "Liber Embadorum" sia stato fra le principali fonti della "*Practica geometriae*" di Leonardo da Pisa (Fibonacci) terminata nel 1220.

Anche molti trattati italiani del Medioevo sembrano aver attinto, direttamente o indirettamente (tramite il lavoro di Fibonacci) dall'opera di Savasorda.

L'importanza di questo trattato è confermata dall'uso dell'espressione *Savasorra* quale denominazione di alcuni trattati medievali di geometria: qualcosa di simile era già caduto riguardo al termine *algoritmo* derivato dal cognome del matematico persiano al-Khwarizmi (circa 780-850).

Savasorda è ritenuto fra i creatori del lessico scientifico ebraico.

Il secondo testo di Savasorda (*Yesode ha-tebuna u-migdal ha-emuna*) era un'opera di natura enciclopedica, della quale si sono conservate parti dell'*Introduzione* (di tema biblico) e l'inizio della *Prima parte* che contiene argomenti di Aritmetica teorica e pratica, Geometria, Ottica e un inizio di Musica. La parte matematica sembra essere un adattamento da fonti arabe.

Questo articolo non è una traduzione del testo di Savasorda dal catalano o dal latino, ma soltanto una descrizione dei problemi geometrici che egli ha affrontato e spiegato. Le fonti principali sono indicate in bibliografia: si è qui utilizzata la versione in catalano di Millàs i Vallicrosa.

In un'ampia *Introduzione* di ben 29 pagine Millàs i Vallicrosa ha riassunto i contenuti dei quattro capitoli del trattato. Savasorda premise un *Prologo* e aggiunse un'*Appendice* finale.

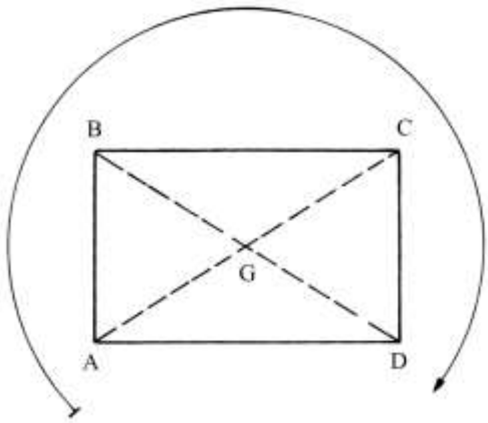
Sempre nell'*Introduzione* Millàs i Vallicrosa ha trascritto le procedure usate da Savasorda in formule secondo le attuali convenzioni.

Il trattato di Savasorda è diviso in *quattro* capitoli:

- Capitolo I: i principi della Geometria e dell'Aritmetica.
- Capitolo II: la misura dei terreni secondo le loro diverse forme: quadrangolari, triangoli, circolari.
- Capitolo III: la divisione delle figure descritte nel capitolo precedente.
- Capitolo IV: misura delle cose.

Gli schemi contenuti nella traduzione in catalano sono stati ridisegnati, *in scala*.

Le lettere scritte sui vertici delle figure sono state apposte cercando di rispettare il *senso orario*:



Infine, è opportuno far notare come, nonostante la sua notevole importanza storica, non sia mai stata pubblicata una versione in italiano.

<u>*Note*</u>

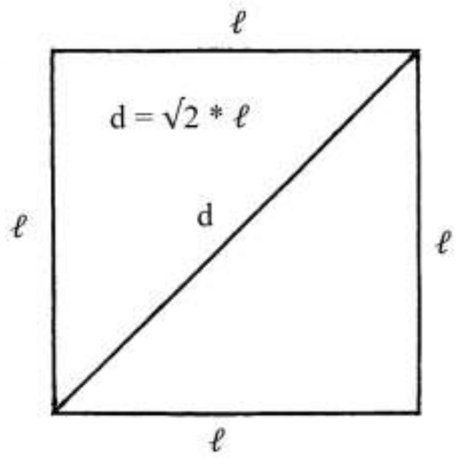
a) Alcuni paragrafi di diversi capitoli sono omessi nel testo che segue perché Savasorda vi aveva esposto concetti solo teorici o puramente descrittivi (ad esempio la terminologia degli enti geometrici elementari).
b) La descrizione dei problemi presentati e delle soluzioni offerte da Savasorda è spesso ampliata con appositi riquadri – gli APPROFONDIMENTI – debitamente evidenziati. Ovviamente si tratta di contenuti, approfondimenti e citazioni di lavori di altri Autori, introdotti da chi scrive e non dovuti a Savasorda o al curatore della traduzione catalana.
c) Nel testo di Savasorda non tutti i problemi geometrici sono accompagnati da schemi: qui sono stati disegnate apposite figure basate sulle dimensioni contenute nel testo originale.
d) Alcuni disegni presenti nel testo in catalano sono *fuori scala*: in questo articolo si è cercato di realizzarli in scala.
e) Le soluzioni numeriche presentate da Savasorda sono spesso espresse con *numeri misti*, contenenti una parte frazionaria: ad esempio (8 + 4/7). Nel caso che sarà possibile il numero misto verrà scritto nel modo che utilizziamo oggi, eliminando la frazione:

   $(3 + ½) \rightarrow 3{,}5$.

PROLOGO

Nel *Prologo*, Savasorda introduce alcune costanti.

La prima è $\sqrt{2}$, il rapporto fra la lunghezza della diagonale e quella di un lato di un quadrato:

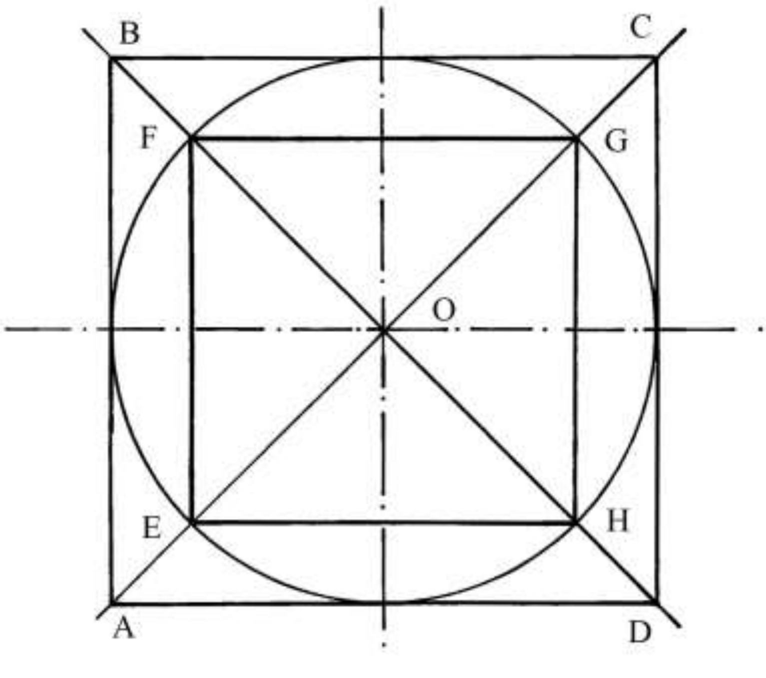


Egli approssima tale costante come segue:

$$\sqrt{2} \approx 1{,}4142 \approx 1{,}4 + 0{,}0142 \approx (1 + 2/5) + 1/70 \approx 1 + 2/5 + 1/70.$$

Cerchio e quadrato

ABCD è un quadrato al cui interno è inscritto un cerchio di centro O, coincidente con quello del quadrato:



Il lato del quadrato, AD, ha la stessa lunghezza del diametro del cerchio, *d*.

AC e BD sono le diagonali del quadrato. Inoltre sono tracciati due diametri fra loro perpendicolari che sono anche le due *mediane* del quadrato dato che passano per i punti medi dei quattro lati.

All'interno del cerchio è inscritto un secondo quadrato, EFGH, con i lati paralleli a quelli di ABCD: i vertici E, F, G e H sono determinati dalle intersezioni della circonferenza con le diagonali AC e BD.

EG e FH sono due diametri del cerchio e le diagonali del quadrato EFGH.

L'area di ABCD è: $AD^2 = d^2$.

Seguendo Archimede, Savasorda attribuisce al rapporto fra la lunghezza della *circonferenza* e quella del suo *diametro* il valore

$(3 + 1/7) = (22/7) \approx 3{,}142857\ldots$ che è una buona approssimazione di $\pi \approx 3{,}141592$.

Sempre secondo Savasorda (che di nuovo si rifà a Archimede), l'area del cerchio è assimilata a quella di un triangolo che ha la base lunga quanto la circonferenza e l'altezza lunga come il raggio *r*:

$\text{Area}_{\text{CERCHIO}} = (\text{base} * \text{altezza})/2 = (22/7 * \text{diametro} * \text{raggio})/2 =$
$= (22/7 * d * d/2)/2 = 11/14 * d^2$.

L'area del quadrato EFGH è: $\text{Area}_{\text{EFGH}} = EF^2$.

È nota la lunghezza delle diagonali EG e FH: $EG = FH = d$.

Il rapporto fra la lunghezza di una diagonale e quella di un lato di un quadrato è $\sqrt{2}$ e quindi ne consegue:

$EG = d = \sqrt{2} * EF$, da cui:
$EF = EG/\sqrt{2} = d/\sqrt{2} = (\sqrt{2})/2 * d$.

L'area del quadrato EFGH è quindi:

$A_{\text{EFGH}} = EF^2 = (d/\sqrt{2})^2 = d^2/2$.

La figura offrì a Savasorda lo spunto per determinare il rapporto fra la lunghezza di una diagonale e quella del lato di un quadrato. Egli sviluppò il numero irrazionale $\sqrt{2}$ nella forma che segue:

$\sqrt{2} \approx 1{,}4142 \approx 1{,}4 + 0{,}0142 \approx (1 + 2/5) + 0{,}0142 \approx (1 + 2/5) + (1/70) =$
$= (1 + 2/5 + 1/70)$.

L'area compresa fra il quadrato ABCD e il cerchio di diametro d = EG = AD è data da:

$A_{\text{ABCD}} - A_{\text{CERCHIO}} = d^2 - 11/14 * d^2 = 3/14 * d^2$.

L'area compresa fra cerchio e il quadrato EFGH è data da:

$A_{\text{CERCHIO}} - A_{\text{EFGH}} = 11/14 * d^2 - d^2/2 = (11 - 7)/14 * d^2 = 4/14 * d^2 = 2/7 * d^2$.

Il rapporto fra questa ultima area *residuale* e quella del cerchio è:

$4/14 * d^2 : 11/14 * d^2 = 4 : 11 = 4/11 \approx 0{,}(36)36$.

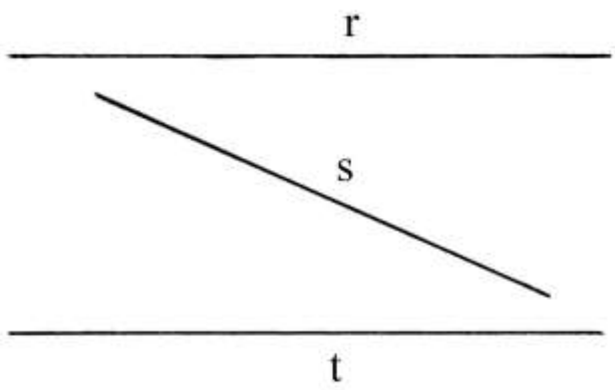
L'espressione (36) indica la stringa che si ripete all'infinito: il rapporto 4/11 ha come risultato un numero decimale periodico.

Il rapporto non è molto lontato da quello di 1/3.

<u>CAPITOLO I</u>

Il 1° capitolo ha finalità *didattiche*: Savasorda definì le entità geometriche elementari avvalendosi dell'aiuto di alcuni disegni:

* angolo retto;
* angolo acuto;
* angolo ottuso;
* rette parallele;
* rette diagonali: nella figura che segue *r* e *t* sono due *rette parallele* e *s* è una *retta obliqua* rispetto a *r* e a *t*:



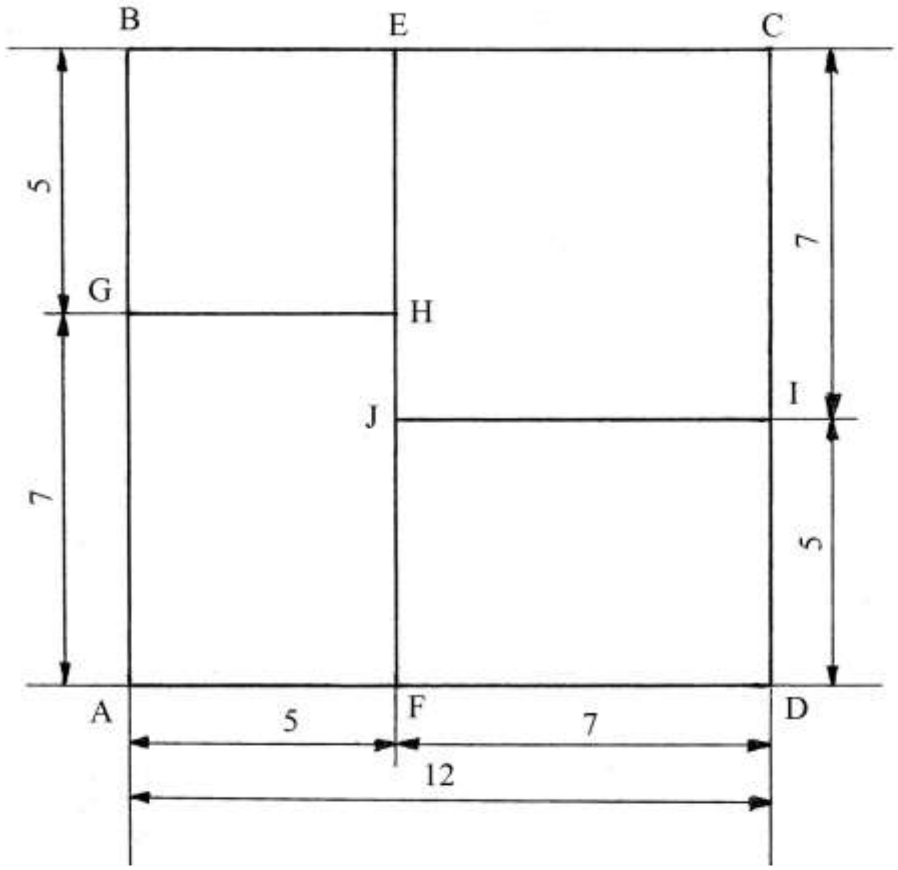
;

* cerchio, centro e diametro;
* triangolo equilatero;
* triangolo isoscele;
* triangolo scaleno;
* triangolo rettangolo;
* triangolo ottusangolo;
* quadrato;
* rettangolo;
* rombo;
* parallelogramma;
* quadrilateri.

Savasorda passò poi a esporre alcuni concetti aritmetici: quadrato e cubo di un numero e radice quadrata.

<u>Scomposizione di un quadrato</u>

ABCD è un quadrato con lati lunghi 12 cubiti.



I lati AD e Bc sono divisi dal segmento EF in due parti lunghe rispettivamente AF = BE = 5 cubiti e FD = EC = 7 cubiti.

Il quadrato è scomposto in quattro quadrilateri:

* i quadrati ECIJ (che ha lati lunghi 7 cubiti) e GBEH (con lati di 5 cubiti);
* i rettangoli AGHF e FJID.

Questi ultimi due quadrilateri hanno uguali dimensioni (5 e 7 cubiti) e la stessa area:

Area AGHF = Area FJID = $7*5 = 5*7 = 35$ cubiti^2.

Con questa scomposizione Savasorda volle dimostrare che l'area del quadrato ABCD è data dalla somma delle aree parziali che seguono:

Area ABCD = Area ECIJ + Area GBEH + Area AGHF + Area FJID =

$= 7^2 + 5^2 + 7*5 + 5*7 = 7^2 + 5^2 + 2*(7*5) = 49 + 25 + 70 = 144$ cubiti^2.

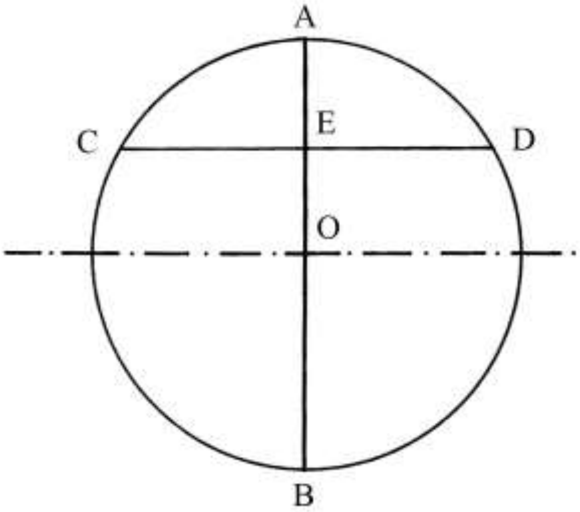
L'area del quadrato ABCD è infatti: Area ABCD = $12^2 = 144$ cubiti^2.

Chiamando AD = lato , AG = a e GB = b, le precedenti espressioni possono essere scritte come segue:

$lato^2 = (a + b)^2 = (a^2 + b^2 + 2*a*b)$.

<u>Corde perpendicolari</u>

Nel cerchio descritto nella figura che segue, il diametro AB è intersecato *perpendicolarmente* dalla corda CD: i due segmenti si incontrano nel punto E.

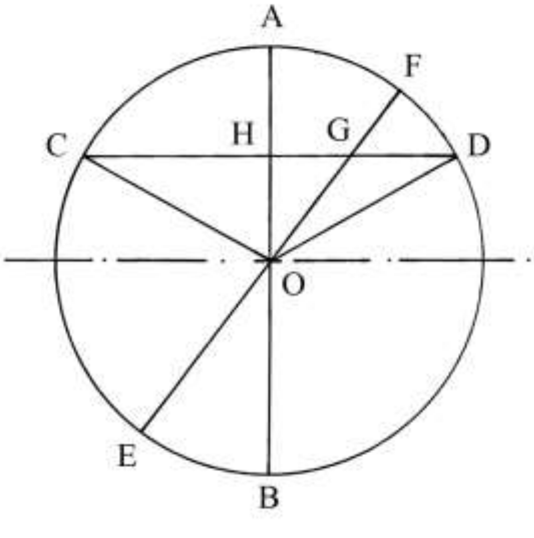


Savasorda dimostrò che i prodotti delle lunghezze dei segmenti che si formano su ciascuna corda sono uguali:

$$AE * EB = CE * ED$$

La sua fonte è la proposizione 35 del libro III degli *Elementi* di Euclide che afferma:
"Se in un cerchio due linee si tagliano ad angolo retto, il rettangolo costruito sui segmenti di una è uguale al rettangolo costruito sui segmenti dell'altra".

Tracciare i raggi OC e OD:



Disegnare un diametro qualsiasi, ad esempio EF, che taglia la corda CD in un punto, G.
Savasorda affermò la fondatezza della seguente affermazione:
"La somma del prodotto delle lunghezze dei segmenti nei quali è divisa CD dal punto G e del quadrato di HG è uguale al quadrato di metà della corda CD (e cioè HD)":

$CG * GD + HG^2 = HD^2$.

Aggiundendo a entrambi i membri dell'uguaglianza il quadrato della lunghezza di OH si ha:

$(CG * GD + HG^2) + OH^2 = HD^2 + OH^2$.

$CG * GD + (HG^2 + OH^2) = HD^2 + OH^2$

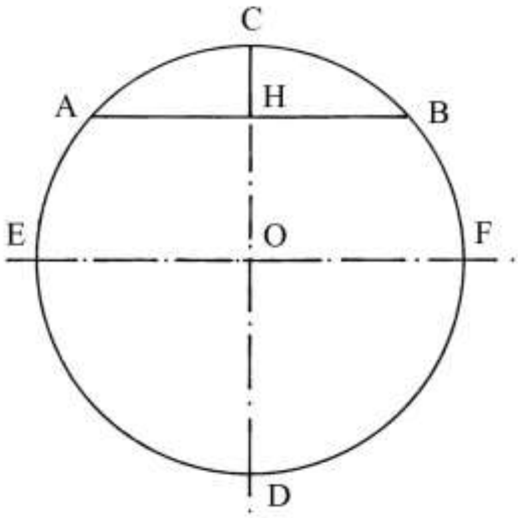
Il triangolo OHG è rettangolo nel vertice H:

$OG^2 = HG^2 + OH^2$, per cui la precedente uguaglianza diviene:

$CG * GD + OG^2 = HD^2 + OH^2$.

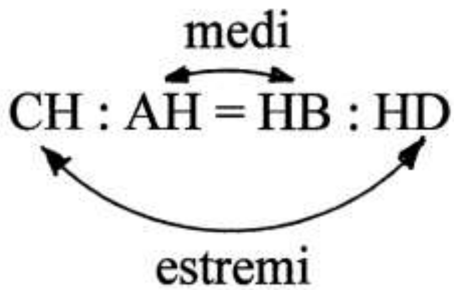
Successivamente, il *teorema delle corde* fu largamente impiegato dagli abacisti toscani del Medioevo: Paolo Gherardi (XIII-XIV secolo), Paolo dell’Abbaco (XIII-XIV secolo), Tommaso della Gazzaia (XIV-XV secolo) e Orbetano da Montepulciano (XV secolo). Tutti subirono l’influenza di Savasorda (e di Fibonacci)?

Essi lo applicarono alla soluzione dei problemi relativi ai segmenti circolari:



Le corde AB e CD sono entrambe inscritte nella stessa circonferenza e si intersecano ad angolo retto nel punto H, tagliando in due parti uguali la corda AB.

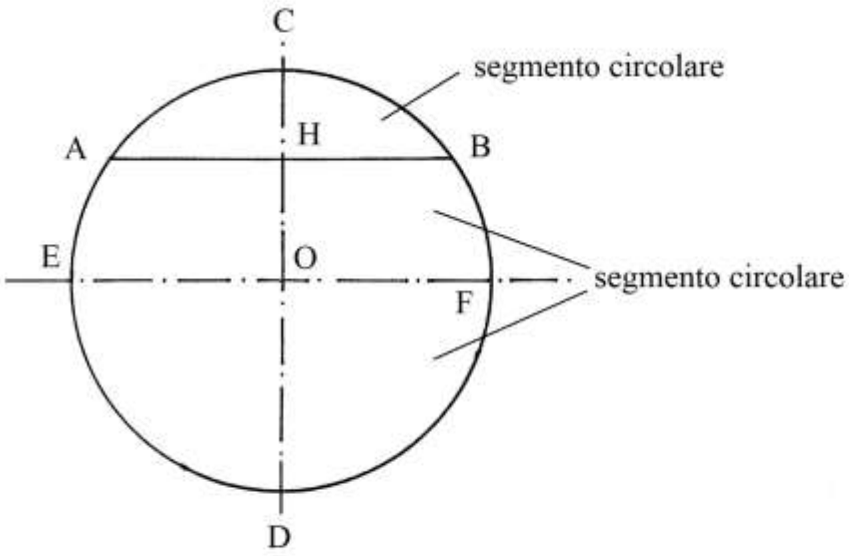
I due segmenti che formano una corda (ad esempio AH e HB) sono i *medi* e i due segmenti dell’altra corda (CH e HD) sono gli *estremi* di una proporzione:



Ne consegue: HD = AH * HB/CH .

Aggiungere la lunghezza della freccia CH a quella del segmento HD per ottenere quella del diametro CD: CD = CH + HD.

Nota: una corda divide un cerchio in *due* segmenti circolari:



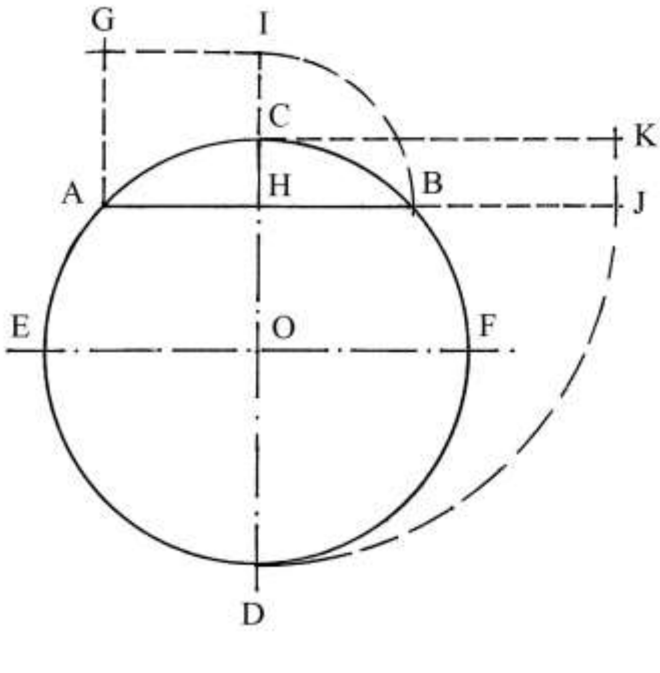
- APPROFONDIMENTO -

Il teorema delle corde

Dalla proposizione CH : AH = HB : HD deriva

CH * HD = AH * HB.

Costruire i due rettangoli basati sulle lunghezze dei quattro segmenti che formano le due corde: (AH e HB) e (CH e HD).



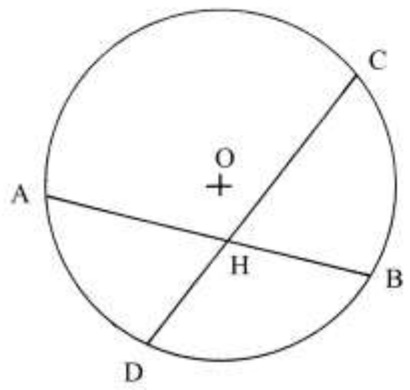
* il rettangolo [ma in questo caso è un quadrato perché AH = HB] AGIH ha dimensioni AH * HB;
* il rettangolo HCKJ che ha dimensioni CH * HD.

I due poligoni hanno *uguale superficie*.

La figura è un caso particolare del *teorema delle corde*: le due corde, AB e CD, si intersecano ad angolo retto.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

In generale, il teorema vale per qualunque coppia di corde che si intersecano all'interno di un cerchio, senza formare angoli particolari e senza che almeno una delle due sia un diametro, come è il caso della figura che segue:



Anche in questo caso vale la relazione

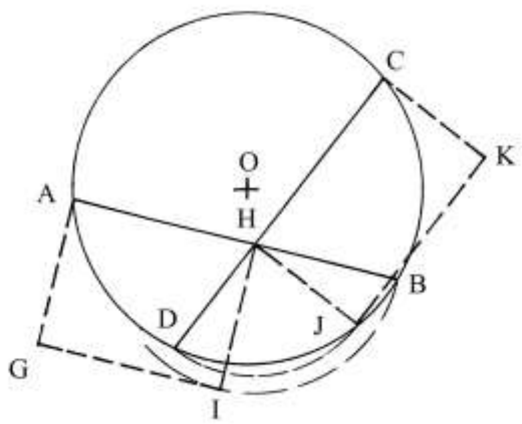
AH : DH = HC : HB da cui

AH * HB = DH * HC.

La figura che segue conclude la costruzione. Dai punti A, C e H tracciare le perpendicolari alle due corde.

Fare centro in H e con raggio HB disegnare un arco da B fino a incontrare in I la perpendicolare uscente da H.

Sempre con centro in H e raggio HD tracciare un arco da D fino a fissare J sull'altra perpendicolare condotta da H.



Sulle coppie di lati (AH e HI) e (HC e HJ) costruire i rettangoli AHIG e HCKJ: essi hanno uguale superficie.

Il teorema delle corde afferma: nel caso di due corde generiche interne a un cerchio e intersecantesi, il rettangolo costruito sui due segmenti di una corda ha la stessa superficie del rettangolo costruito sui segmenti dell'altra corda.

- -

CAPITOLO II

==========

Il capitolo è diviso in *cinque* parti:

1. Misura dei quadrilateri con lati uguali e angoli retti.
2. Misura dei triangoli.
3. Misura dei quadrilateri con lati differenti e angoli non tutti retti.
4. Misura dei campi di forma circolare o semicircolare e dei segmenti circolari.
5. Misura dei terreni che hanno più di *quattro* lati.

PARTE PRIMA

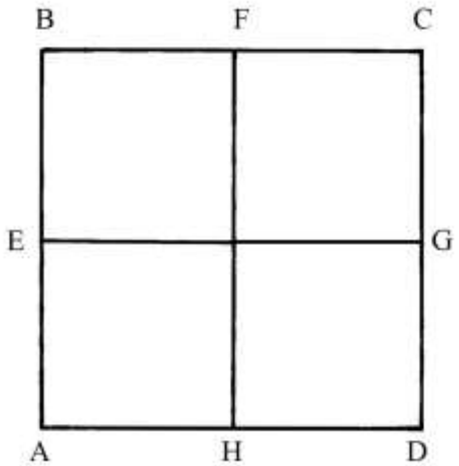
MISURA DEI QUADRILATERI CON LATI UGUALI O CON ANGOLI RETTI

Il capitolo è diviso in cinque parti:

1. Misura dei quadrilateri con lati uguali e angoli retti.
2. Misura dei triangoli.
3. Misura dei quadrilateri con lati di differente lunghezza e angoli non tutti retti.
4. Misura dei campi di forma circolare o semicircolare e dei segmenti circolari.
5. Misura dei terreni che hanno più di quattro lati.

Quadrato

Il quadrato ABCD ha lati lunghi 2 cubiti ed è diviso dalle due mediane (EH e ZT) in quattro quadrati uguali, simili a ABCD.



I quattro quadrati hanno lati lunghi 1 cubito e tutti hanno area uguale a 1 cubito^2.

L'area di ABCD è:

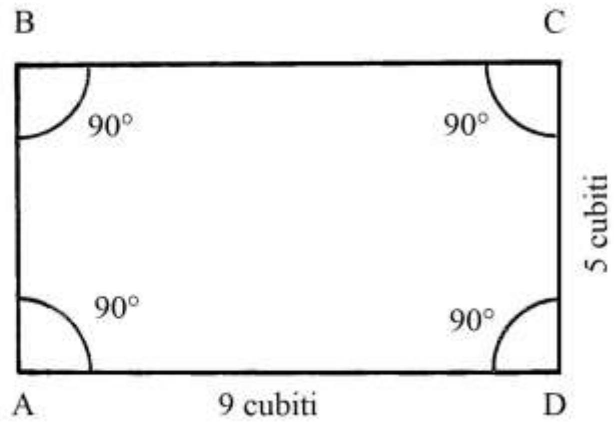
$A_{ABCD} = AB^2 = 2^2 = 4$ cubiti^2.

Se la lunghezza dei lati del quadrato ABCD fosse 10 cubiti, la sua area sarebbe uguale a:

$10^2 = 100$ cubiti^2.

Area di un rettangolo

Un quadrilatero possiede soltanto lati opposti paralleli e di uguale lunghezza e presenta tutti angoli retti: è un *rettangolo*.



Il rettangolo ha le seguenti dimensioni:

* AD = BC = 9 cubiti;
* AB = CD = 5 cubiti.

La sua area è:

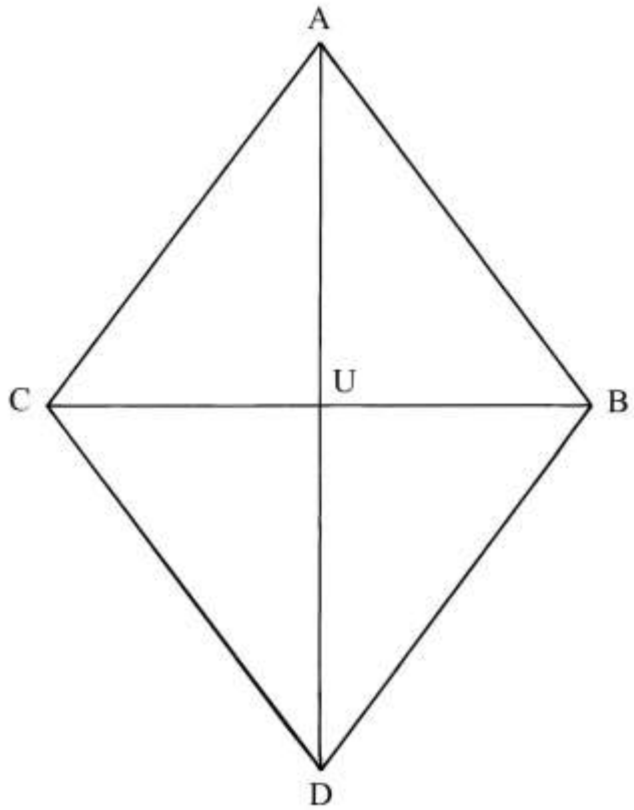
$$A_{ABCD} = AD * AB = 9 * 5 = 45 \text{ cubiti}^2.$$

Rombo

Un rombo ha lati di uguale lunghezza, come un quadrato, ma non possiede alcun angolo retto.

Savasorda segnala la difficoltà di misurare gli angoli interni di un rombo.

Però questo quadrilatero possiede un'interessante proprietà geometrica: le due diagonali si intersecano perpendicolare al centro e si dividono reciprocamente in due parti uguali:



Infatti si ha:

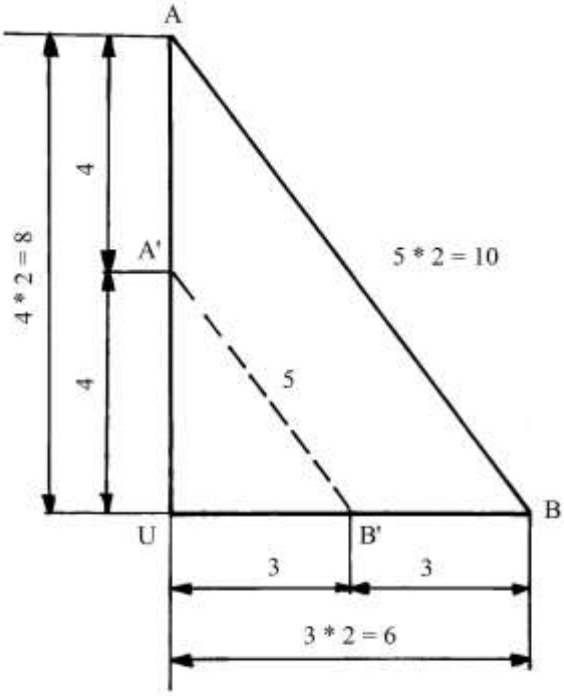
* AU = UD e
* CU = UB.

I lati del rombo ABDC sono lunghi 10 cubiti e le diagonali sono:

* AD = 16 cubiti;
* CB = 12 cubiti.

Nota: *incontreremo altri problemi basati su questo particolare quadrilatero*.

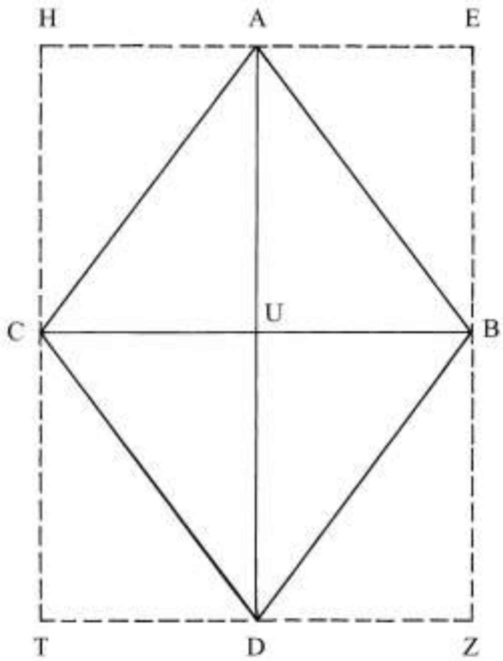
Le diagonali AD e CB dividono il rombo in quattro triangoli rettangoli di uguali dimensioni. Lo schema che segue considera uno dei quattro triangoli, quello UAB:



I lati del triangolo hanno lunghezze che formano la terna derivata 6-8-10 che proviene dalla terna primitiva 3-4-5 moltiplicando i suoi componenti per la stessa costante “2”.

Il rombo è inscrivibile nel rettangolo HEZT che ha dimensioni:

* TZ = 12 cubiti;
* HT = 16 cubiti.

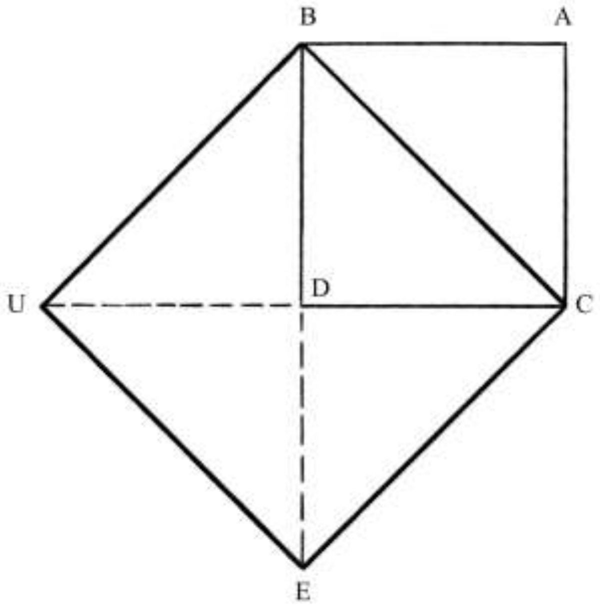


L’area del rombo è:

A_{ABDC} = (AD * CB)/2 = (16 * 12)/2 = 192/2 = 96 cubiti^2.

Diagonale di un quadrato

ABDC è un quadrato che ha lati lunghi 10 cubiti.



Il problema chiede la lunghezza della diagonale BC.

È da notare che le lettere apposte ai vertici dello schema originale di ABDC seguono un andamento da destra verso sinistra:

B ← A

D ← C.

Qui è stata mantenuta la disposizione originaria.

Sulla diagonale BC è costruito il quadrato BCEU: Prolungare i lati BD e DC: BCEU è diviso in quattro triangoli rettangoli di uguali dimensioni che hanno tutti la stessa area del triangolo rettangolo ABC.

Ne consegue che BCEU ha area uguale a:

$A_{BCEU} = 4 * A_{BDC} = 4 * A_{ABC} = 4 * (A_{ABDC})/2 = 2 * A_{ABDC}$.

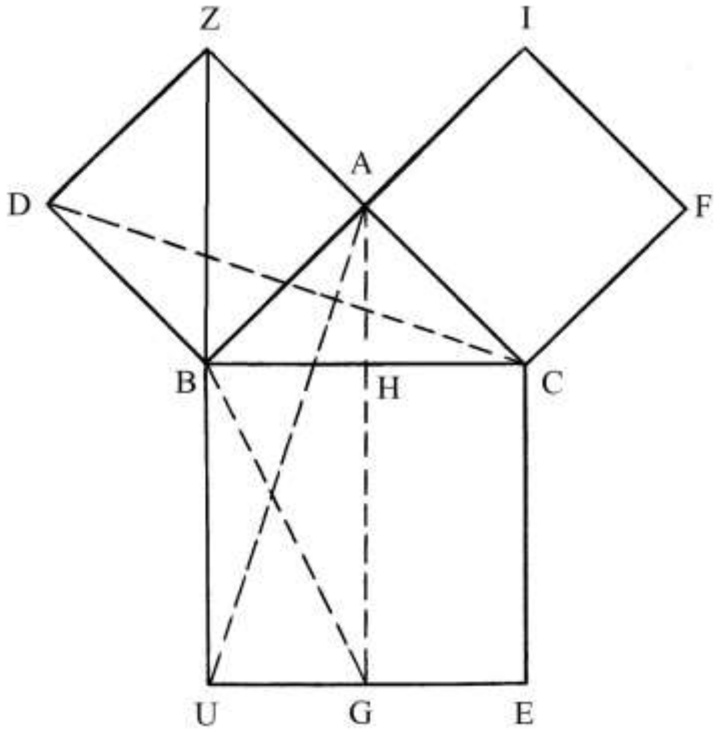
La diagonale BC è lunga:

$BC^2 = BD^2 + DC^2 = 10^2 + 10^2 = 100 + 100 = 200$ e

$BC = \sqrt{200} \approx (14 + 1/7 -$ *poca cosa*$)$ cubiti.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Savasorda propone un'ulteriore dimostrazione:



Sul triangolo rettangolo isoscele ABC sono costruiti tre quadrati:

* ABDZ,
* AIFC,
* BCEU.

Il terzo quadrato è disegnato su BC che è la diagonale del quadrato ABDC della precedente figura.

In questo nuovo schema, Savasorda traccia i seguenti segmenti:

* BZ che ha lunghezza uguale a quelle di BC e di BU;
* DC;
* AU.

Dal punto A è tracciata la linea AHG che divide a metà il quadrato BCEU lungo la mediana HG.

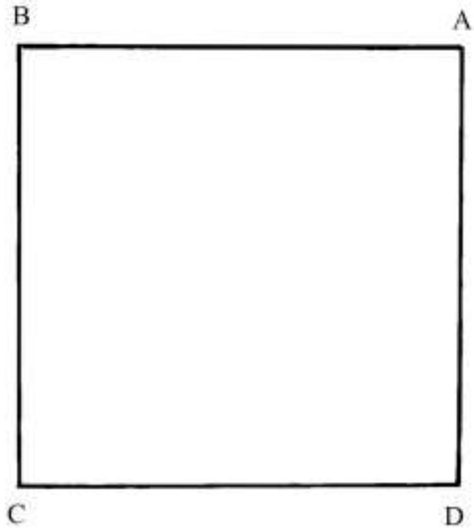
Savasorda introduce le seguenti uguaglianze fra le aree:

* ABU = DBC = ABDZ/2 = BHGU/2;
* BDZ = DBC;
* BZA = DBC;
* BDZA = BHEU.

<u>Quadrato di area incognita</u>

È dato un quadrato di cui sono incognite la lunghezza dei lati e l'area: è nota soltanto la differenza Δ, *in valore assoluto*, fra l'area *A* e il perimetro *p*:

$A_{ABCD} – p = 21 = \Delta$.



Il perimetro *p* è dato da:

$p = 4 * AD$.

La soluzione proposta da Savasorda contiene i seguenti passi:

* dividere il numero *n* dei lati del quadrato per 2: $n/2 = 4/2 = 2$;
* elevare al quadrato: $2^2 = 4$;
* sommare con la differenza Δ: $4 + 21 = 25$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{25} = 5$;
* sommare alla metà del numero dei lati: $5 + 2 = 7$ cubiti, lunghezza dei lati del quadrato.

L'area è:

$A_{ABCD} = 7^2 = 49$ cubiti^2.

Il perimetro *p* è:

$p = 4 * AD = 4 * 7 = 28$ cubiti.

La differenza fra i valori assoluti è:

$|A_{ABCD}| - |p| = |49| - |28| = |21|$.

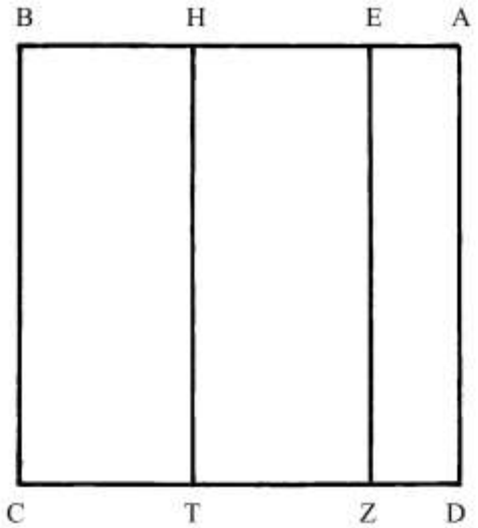
La procedura usata da Savasorda può essere riassunta nella formula che segue:

* n = numero lati = 4;
* $p = 4 * \text{lato} = 4 * \ell$.

$\ell = \sqrt{[(n/2)^2 + \Delta]} + n/2$.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Savasorda spiega la sua procedura con l'aiuto di uno schema che è qui riprodotto rispettando le proporzioni del disegno originale:



La figura originale, Fig. 44 a pagina 36 del volume, reca tre lettere della base scritte all'interno dello schema:

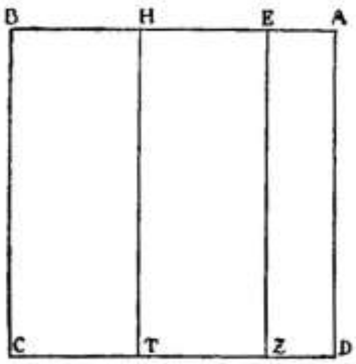


Fig. 44

Nel quadrato ABCD l'Autore fissa il rettangolo EADZ che ipotizza avere area uguale a 21. Il rimanente rettangolo BEZC è diviso in due parti uguali dalla corda HT, parallela a BC e a EZ.

L'area di BEZC, in valore assoluto, è uguale al perimetro *p*.

L'Autore afferma che vale la seguente relazione:

$AB * AE + EH^2 = AH^2$.

Ma AB * AE è uguale all'area del rettangolo EADZ che è ampio 21.

Fissa poi il quadrato di EH uguale a 4 e EH = BH = 2.

Sommando si ha:

$AB * AE + EH^2 = EADZ + EH^2 = 21 + 4 = 25$.

La radice quadrata di 25 è 5 che sommata alla lunghezza di EH dà:

5 + EH = 5 + 2 = 7 cubiti, lunghezza dei lati del quadrato.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Oggi il problema verrebbe risolto con semplici operazioni algebriche assegnando alla lunghezza dei lati il valore dell'incognita *x*:

$A_{ABCD} – p = 21$

$x^2 – 4 * x = 21$

$x^2 – 4 * x – 21 = 0$ da cui

$x_1 = 7$ e $x_2 = -3$.

La radice corretta è la prima, $x_1 = 7$.

- APPROFONDIMENTO -

Problemi simili a questo erano noti agli scribi paleobabilonesi (18° secolo a.C.). Ne hanno scritto diffusamente Jens Høyrup e Hubert K.L. Busard e in particolare negli articoli citati in bibliografia.

Ad esempio, un problema babilonese chiedeva di ricavare le lunghezze dei lati di un campo di forma quadrata conoscendo solo la somma della sua area e del perimetro.

I Babilonesi risolvevano i problemi con accorgimenti di natura geometrica.

- -

Un altro quadrato

Il successivo problema presentato da Savasorda è, per così dire, opposto a quello precedente.

È data la somma *S* dell'area *A* del quadrato e del perimetro *p*, che vale 77 (sempre in valore assoluto):

$$A_{QUADRATO} + p = S = 77.$$

Il problema chiede la lunghezza dei lati e l'area del quadrato.

La procedura impiegata ricalca quella usata per la soluzione del precedente problema:

* sommare a 77 il numero dei lati del quadrato: $77 + 4 = 81$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{81} = 9$;
* dividere per 2 il numero dei lati: $4/2 = 2$;
* sottrarre da 9: $9 – 2 = 7$ cubiti, lunghezza dei lati del quadrato.

L'area è:

$$A_{QUADRATO} = 72 = 49 \text{ cubiti}^2.$$

Il perimetro *p* è:

$$p = 4 * 7 = 28 \text{ cubiti}.$$

La loro somma è:

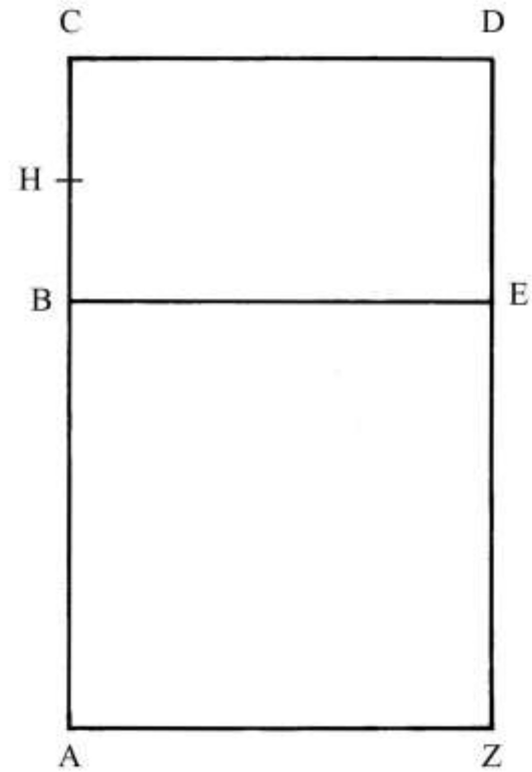
$A_{QUADRATO} + p = 49 + 28 = 77$, ciò che dimostra la correttezza della soluzione.

Anche questa procedura può essere riassunta con una formula:

$\ell = \sqrt{[(n/2)^2 + S]} + n/2$, con

* ℓ = lunghezza dei lati in cubiti;
* n = numeri dei lati = 4;
* S = somma, in valore assoluto, di *Area* e *perimetro*.

Savasorda dimostra la soluzione da lui offerta con lo schema che segue:



ABEZ è il quadrato oggetto del problema: Savasorda non fornisce indicazioni sulla lunghezza dei lati. Prolungare verso l'alto i lati AB e ZE.

Da B e da E sono fissati i punti C e D a distanza:

BC = ED = 4 cubiti.

Il prodotto AB * BC vale:

AB * BC = AB * 4.

La somma di ABEZ e di CBED dà:

ABEZ + CBED = 77.

H è il punto medio di CB.

Savasorda introduce la seguente uguaglianza:

$CA * AB + BH^2 = HA^2$.

Poi si ha:

CA * AB = ACDZ = 77.

$BH^2 = (4/2)^2 = 4$

$AH^2 = 77 + 4 = 81$ e

$AH = \sqrt{81} = 9$

AB = AH – HB = 9 – 2 = 7 cubiti.

L'area di ABEZ è:

$A_{ABEZ} = AB^2 = 7^2 = 49$ cubiti^2.

Il perimetro *p* di ABEZ è:

p = 4 * AB = 4 * 7 = 28 cubiti.

La somma S, in valore assoluto, di area e perimetro è:

$S = |A_{ABEZ}| + |p| = |49| + |28| = |77|$.

- APPROFONDIMENTO -

Con una semplice procedura algebrica, il problema si può oggi risolvere come segue: "x" è la lunghezza incognita del lato del quadrato.

$A_{ABEZ} = x^2$
$p = 4 * x$
$A_{ABEZ} + p = 77$
$x^2 + 4 * x = 77$
$x^2 + 4 * x - 77 = 0$
$x_1 = 7$ e $x_2 = -11$.
La radice corretta è x_1.

- -

Un altro quadrato

Un terzo quadrato possiede una proprietà: la differenza Δ fra il perimetro e l'area è uguale a 3.

Sono chiesti la lunghezza *ℓ* dei lati e l'area *A*.

$\Delta = p - A_{QUADRATO} = 4 * \ell - \ell^2 = 3$.

La procedura aritmetica usata da Savasorda contiene i seguenti passi:

* dividere per 2 il numero *n* dei lati del poligono: $n/2 = 4/2 = 2$;
* elevare al quadrato: $2^2 = 4$;
* sottrarre la differenza Δ: $4 - \Delta = 4 - 3 = 1$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{1} = 1$;
* sommare a metà del numero dei lati: $1 + n/2 = 1 + 4/2 = 1 + 2 = 3$ cubiti, lunghezza dei lati del quadrato.

Il perimetro *p* è lungo:

$p = 4 * 3 = 12$ cubiti.

L'area è:

$A_{QUADRATO} = 3^2 = 9$ cubiti^2.

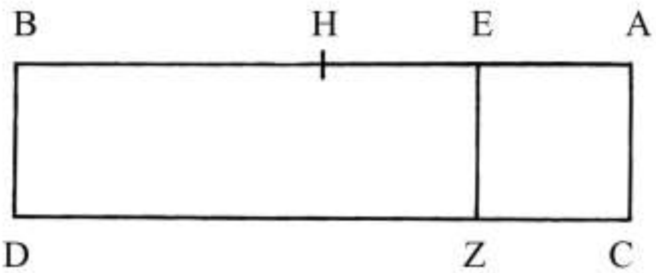
La differenza Δ vale:

$\Delta = p - A_{QUADRATO} = 12 - 9 = 3$.

La procedura è riassunta nella formula che segue:

$\ell = n/2 * \sqrt{[(n/2)^2 - \Delta]}$.

La soluzione data da Savasorda prevede l'aiuto di uno schema:



Il rettangolo ABDC ha lunghezza AB uguale a 4 (come il numero dei lati del quadrato) cubiti e larghezza AC 1 cubito.

I punti E e Z sono fissati rispettivamente a distanza di 1 cubito da A e da C.

ACZE è un quadrato con lati lunghi 1 cubito.

Il rettangolo EBDZ ha lunghezza 3 cubiti e larghezza 1 cubito.

Il punto H è il medio di AB; EH è lungo:

$EH = AH - AE = (AB/2) - AE = 4/2 - 1 = 2 - 1 = 1$.

Vale l'uguaglianza:

$AE * EB + EH^2 = AH^2$.

Infatti:

$1 * 3 + 1^2 = 2^2$

$3 + 1 = 4$

Dal quadrato di AH sottrarre il prodotto di AE per EB:

$AH^2 – AE * EB = 2 – 1 * 3 = 4 – 3 = 1$.

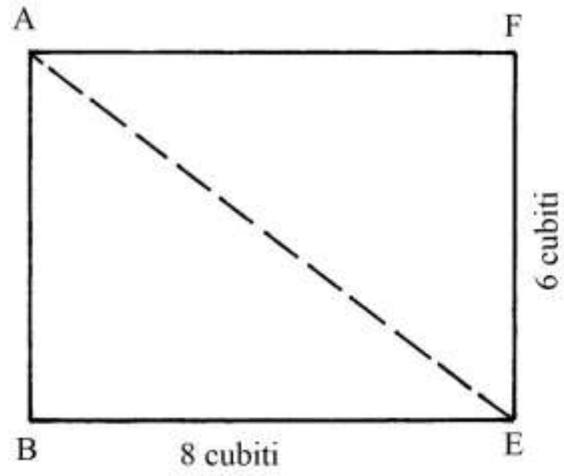
Il quadrato di EH è:

$EH^2 = 1^2 = 1$.

Diagonale di un rettangolo

Un rettangolo ha lati lunghi 8 e 6 cubiti.

Il problema chiede la lunghezza delle diagonali.

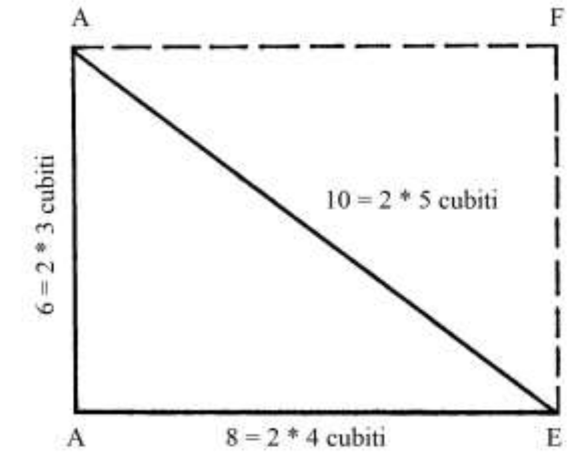


AE è una delle due diagonali del rettangolo: essa lo divide in due triangoli rettangoli di uguali dimensioni che sono AFE e ABE.

La sua lunghezza è ricavata con la seguente procedura:

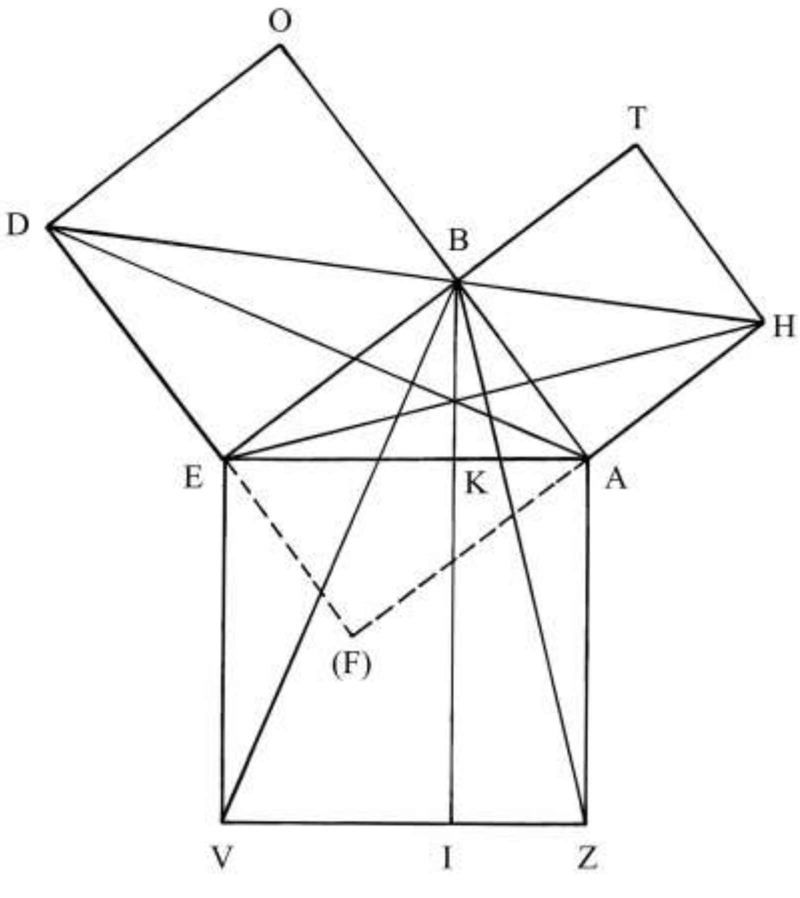
* elevare al quadrato la lunghezza di BE: $8 * 8 = 64$;
* elevare al quadrato la lunghezza di AB: $6 * 6 = 36$;
* sommare i due quadrati: $64 + 36 = 100$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{100} = 10$ cubiti, lunghezza della diagonale AE.

I due triangoli AFE e ABE hanno lati lunghi quanto i componenti della terna derivata 6-8-10 ricavata dalla terna primitiva 3-4-5 secondo un modulo “2”:



Savasorda offre una soluzione grafica che ricalca quella già incontrata nel caso della costruzione della diagonale di un quadrato.

Il triangolo rettangolo è il nucleo dal quale viene avviata la costruzione:



Esso viene adagiato sulla diagonale AE che è disposta orizzontalmente.

Su EB e su AB sono costruiti i quadrati EBOD e ABTH. I lati E(F) e (F)A derivano dal rettangolo iniziale e sono *tratteggiati*.

Sulla diagonale AE, ipotenusa del triangolo rettangolo ABE, è tracciato il quadrato AEVZ.

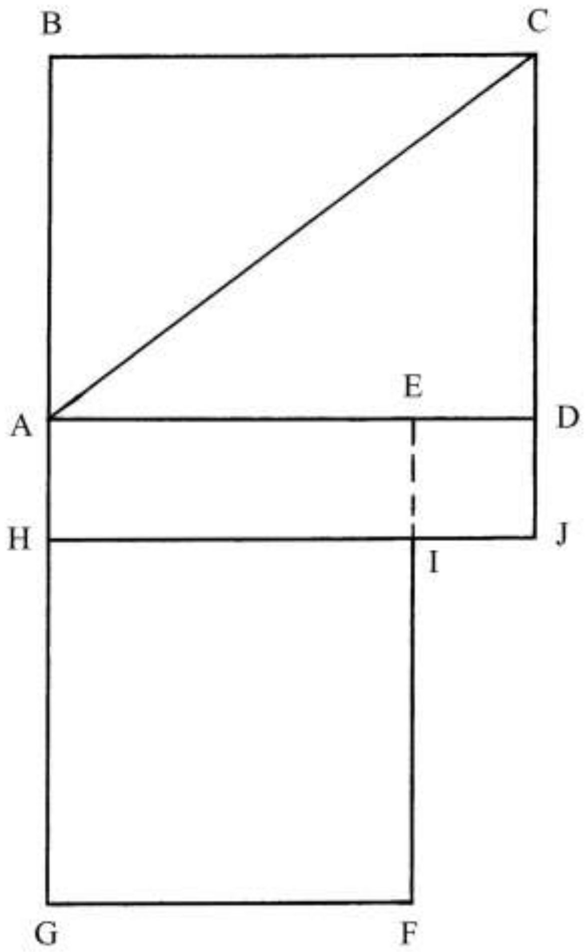
Dal vertice B è abbassata la perpendicolare a EA e a VZ: è BKI.

Le diagonali DB e BH giacciono sulla stessa retta passante per D, B e H.

I segmenti DA, HE, BV e BZ concludono la costruzione.

Un altro rettangolo

Un rettangolo ha diagonali lunghe 10 cubiti. La lunghezza supera la larghezza di 2 cubiti. Il problema chiede le lunghezze dei lati e l'area del rettangolo.
ABCD è il rettangolo e AC è una diagonale che è lunga 10 cubiti.



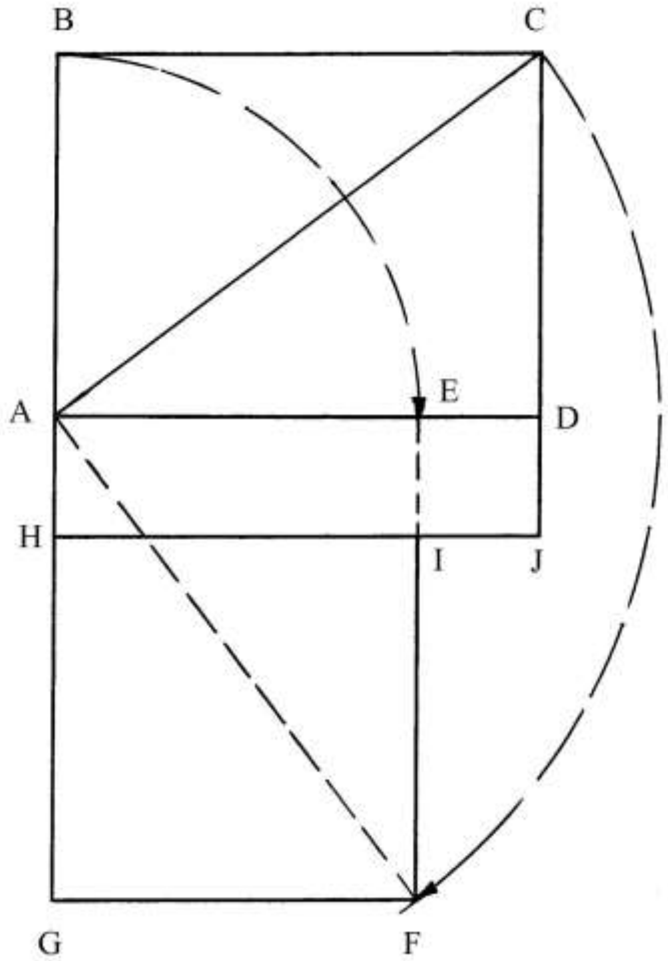
La soluzione per via aritmetica è:

* elevare al quadrato la lunghezza della diagonale: $10^2 = 100$;
* elevare al quadrato la differenza fra le lunghezze dei lati: $2^2 = 4$;
* sottrarre da 100: 100 – 4 = 96;
* dividere per 2: 96/2 = 48 cubiti^2, area del rettangolo;
* dividere per 2 la differenza fra le lunghezze dei lati: 2/2 = 1;
* aggiungere all'area: 1 + 48 = 49;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{49} = 7$;
* aggiungere la metà della differenza fra le lunghezze dei lati: 7 + 1 = 8 cubiti, lunghezza del rettangolo (AD = BC);
* sottrarre da 7 la metà della differenza fra le lunghezze dei lati: 7 – 1 = 6 cubiti, larghezza del rettangolo (AB = CD).

Savasorda descrisse la soluzione con due schemi, il primo dei quali è riprodotto qui sopra. Il secondo schema originale non è ritenuto rilevante per la soluzione del problema.

Sulla base AD è disegnato un secondo rettangolo, AEFG, con le stesse dimensioni di quello ABCD. AG è allineato a BA e AE giace su AD.

EDIJ è un quadrato che ha lati lunghi 2 cubiti e cioè quanto la differenza fra le lunghezze di AD e di AB.



Savasorda fornisce un'ulteriore indicazione: il quadrato della lunghezza della diagonale meno il quadrato della differenza fra le lunghezze di due lati consecutivi (AD e AB) è uguale al doppio del quadrato dell'area del rettangolo:

$AC^2 – (AD – AB)^2 = 2 * A_{ABCD}$

$10^2 – 2^2 = 2 * 48$

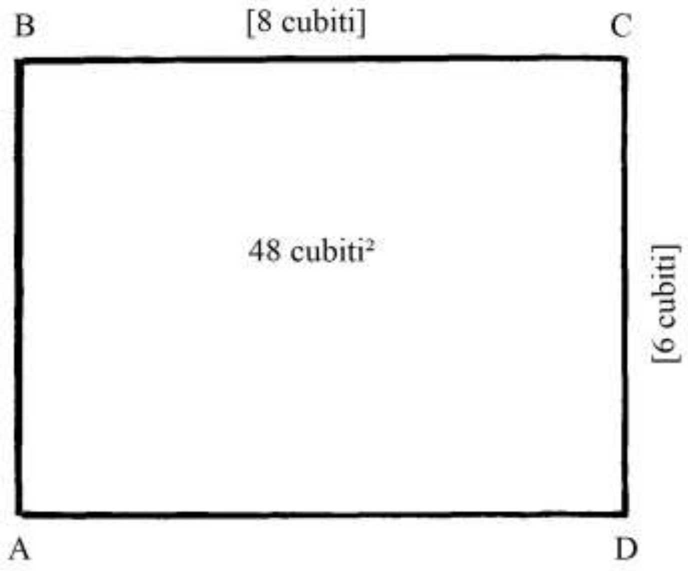
$100 – 4 = 96$

$96 = 96.$

<u>Un altro rettangolo</u>

Un rettangolo ha area uguale a 48 cubiti^2 e la somma delle lunghezze di due lati consecutivi è 14 cubiti.

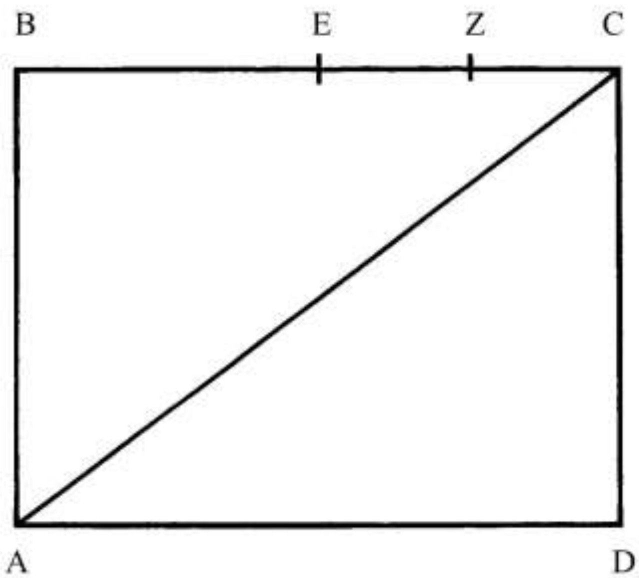
Il problema chiede la lunghezza dei lati.



La soluzione aritmetica è data dalla seguente procedura:

* dividere per 2 la somma delle lunghezze: $14/2 = 7$;
* elevare al quadrato: $7^2 = 49$;
* sottrarre l'area: $49 – 48 = 1$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{1} = 1$;
* aggiungere "1" a metà della somma delle lunghezze: $7 + 1 = 8$ cubiti, lunghezza di AD e di BC;
* sottrarre "1" dalla metà della somma delle lunghezze: $7 – 1 = 6$ cubiti, lunghezza di AB e di CD.

Savasorda offre un'ulteriore informazione:



Sul lato BC sono fissati due punti: E è il medio di BC e Z è posizionato fra E e C.
Il lato BC è diviso in due modi differenti:

* in parti uguali: BE = EC;
* in parti di diverse lunghezze: BZ > ZC.

Secondo Savasorda deve valere la seguente uguaglianza:

$$BZ * ZC + (BZ – BE)^2 = BE^2.$$

L’area di un rettangolo non può essere maggiore del quadrato della semisomma delle lunghezze di due lati adiacenti:

$$A_{ABCD} < [(AB + BC)/2]^2.$$

Nel caso di questo rettangolo si ha:

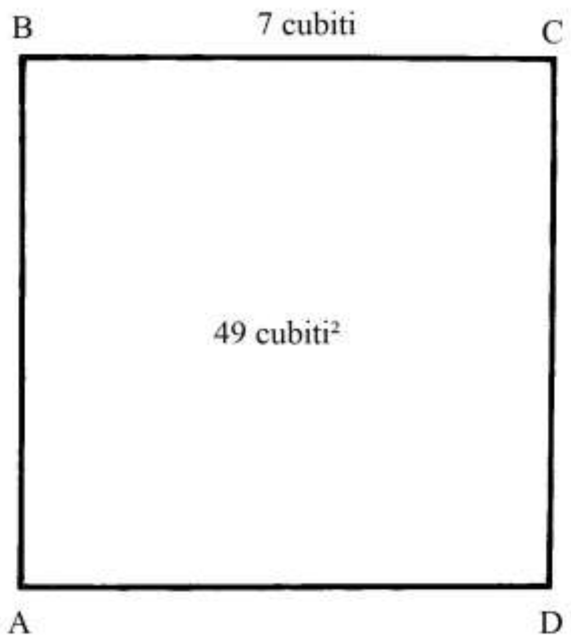
$$48 < [(6 + 8)/2]^2$$
$$48 < 7^2$$
$$48 < 49.$$

Savasorda conclude con un esempio: un rettangolo ha area di 48 cubiti^2 e la semisomma delle lunghezze di due lati consecutivi è 13:

$$(AB + BC)/2 = 13/2$$
$$(13/2)^2 = 42,25$$

42,25 è *minore* dell’area uguale a 48 cubiti^2: questo rettangolo non esiste.

Un caso limite è rappresentato dal quadrato:



L’area di ABCD è:

$$A_{ABCD} = AB^2 = 7^2 = 49 \text{ cubiti}^2.$$

La somma delle lunghezze di due lati consecutivi è:

$$(AB + BC) = (7 + 7) = 14.$$

Il quadrato della metà della somma dei due lati consecutivi è:

$$[(AB + BC)/2]^2 = [(AB + AB)/2]^2 = AB^2 = 7^2 = 49 = A_{ABCD}.$$

Il risultato è ovvio: l’area di un quadrato è data dal prodotto della lunghezza di un lato per sé stessa.

<u>Un altro rettangolo</u>

In un rettangolo, la somma delle lunghezze della diagonale e di un lato è 18 cubiti. L’altro lato è lungo 6 cubiti.

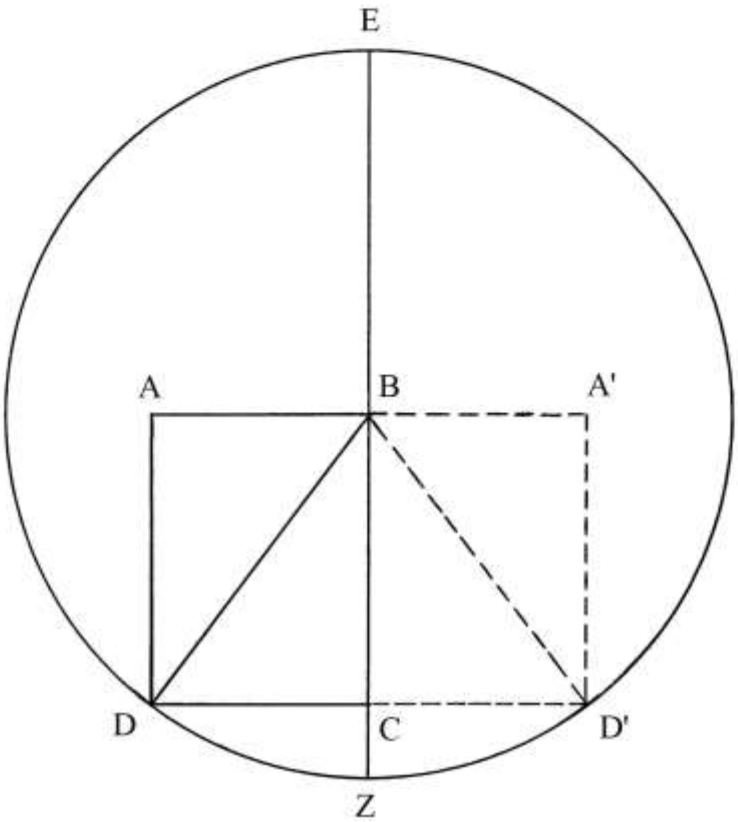
Il problema chiede di calcolare l’area e le lunghezze della diagonale e del primo lato.

La soluzione aritmetica offerta contiene i seguenti passi:

* elevare al quadrato la lunghezza del lato noto: $6^2 = 36$;
* dividere per la somma 18: 36/18 = 2;
* sommare 2 e 18: 2 + 18 = 20;
* dividere per 2: 20/2 = 10 cubiti, lunghezza della diagonale;
* sottrarre dalla somma 18: 18 – 10 = 8 cubiti, lunghezza del primo lato;
* moltiplicare le lunghezze dei due lati: 6 * 8 = 48 $cubiti^2$, area del rettangolo.

La soluzione conferma un dato di fatto: anche questo quadrilatero ha le dimensioni del rettangolo dei precedenti problemi.

Savasorda ricorre poi a una soluzione geometrica:



ABCD è il rettangolo e BD è la sua diagonale. BD è anche il raggio del cerchio di centro B.
AB e DC sono i lati corti del rettangolo ABCD e sono lunghi 6 cubiti.
EC è lungo:

EC = EB + BC = 18 cubiti = somma nota di queste due lunghezze.

La soluzione scelta da Savasorda è basata sul *teorema delle corde*.
BA'D'C è il rettangolo simmetrico a quello ABCD, rispetto all'asse EBC.
EZ e DD' sono due *corde* che in intersecano ad angolo retto in C.
Vale la proporzione:

EC : CD = CD' : CZ ma = CD'= CD, per cui si ha:
EC : CD = CD : CZ   e
$CZ = CD^2/EC = 6^2/18 = 36/18 = 2$ cubiti.

Ne consegue:

EZ = EC + CZ = 18 + 2 = 20 cubiti.
BC = BZ – CZ = EZ/2 – CZ = 20/2 – 2 = 8 cubiti.

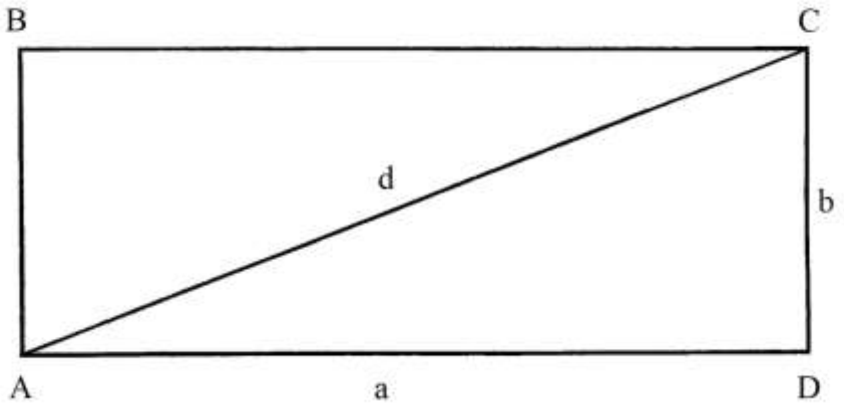
Un altro rettangolo

Un rettangolo ha le diagonali lunghe 13 cubiti e ha area A di 60 cubiti^2. Il problema domanda la lunghezza dei lati.

La soluzione è data dai seguenti passi:

* raddoppiare l'area: A * 2 = 60 * 2 = 120;
* elevare al quadrato la lunghezza di una diagonale: $13^2 = 169$;
* sottrarre il doppio dell'area: 169 – 120 = 49;
* estrarre la radice quadrata: √49 = 7, differenza fra le lunghezze dei lati;

[Savasorda ricorda che il doppio dell'area del rettangolo più il quadrato della differenza fra le lunghezze di due lati consecutivi è uguale al quadrato della lunghezza di una diagonale:



L'espressione "a * b" è l'area di ABCD, "(a – b)" è la differenza fra le lunghezze dei lati e "$(a^2 + b^2) = d^2$" è il quadrato della lunghezza della diagonale AC.

Verifichiamo la correttezza dell'affermazione di Savasorda:

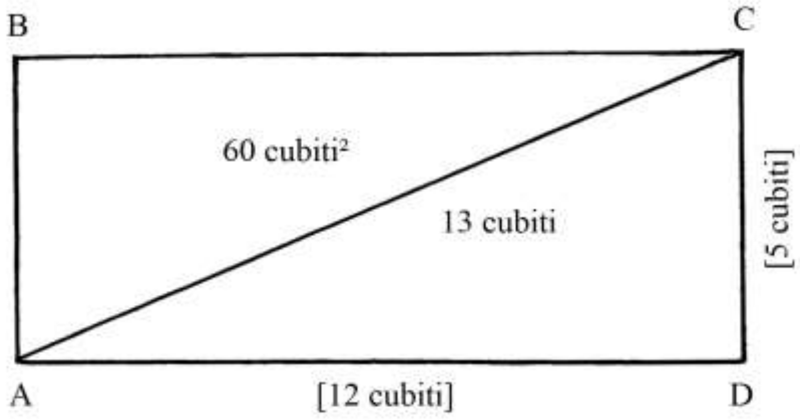
$2 * (a * b) + (a - b)^2 = d^2$

$2 * a * b + a^2 - 2 * a * b + b^2 = d^2$

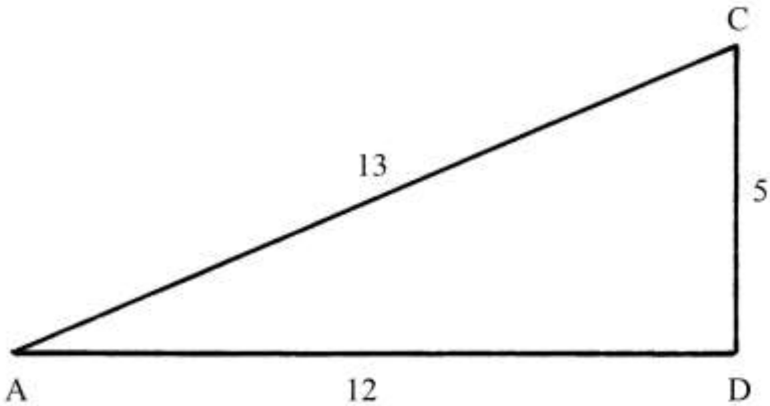
$a^2 + b^2 = d^2$: l'ipotesi di Savasorda è confermata];

* dividere per l'ultima radice: 7/2 = 3,5;
* elevare al quadrato: $3{,}5^2 = 12{,}25$;
* sommare con l'area: 12,25 + 60 = 72,25;
* estrarre la radice quadrata: √72,25 = 8,5;
* sommare con metà della differenza delle lunghezze dei lati: 8,5 + 7/2 = 8,5 + 3,5 = = 12 cubiti, lunghezza del rettangolo [AD = BC];
* sottrarre metà della differenza delle lunghezze da 8,5: 8,5 – 7/2 = 8,5 – 3,5 = = 5 cubiti, larghezza del rettangolo [AB = CD].

Lo schema che segue mostra il rettangolo:



La diagonale AC divide ABCD in due triangoli rettangoli con lati lunghi quanto i componenti della seconda terna primitiva: 5-12-13:



La soluzione utilizzata da Savasorda può essere sintetizzata con le due seguenti formule:

$a = \sqrt{\{[(\sqrt{2} * A - d^2)/2]^2 + A\}} + (a - b)/2$ e
$b = \sqrt{\{[(\sqrt{2} * A - d^2)/2]^2 + A\}} - (a - b)/2$.

<u>Rombo</u>

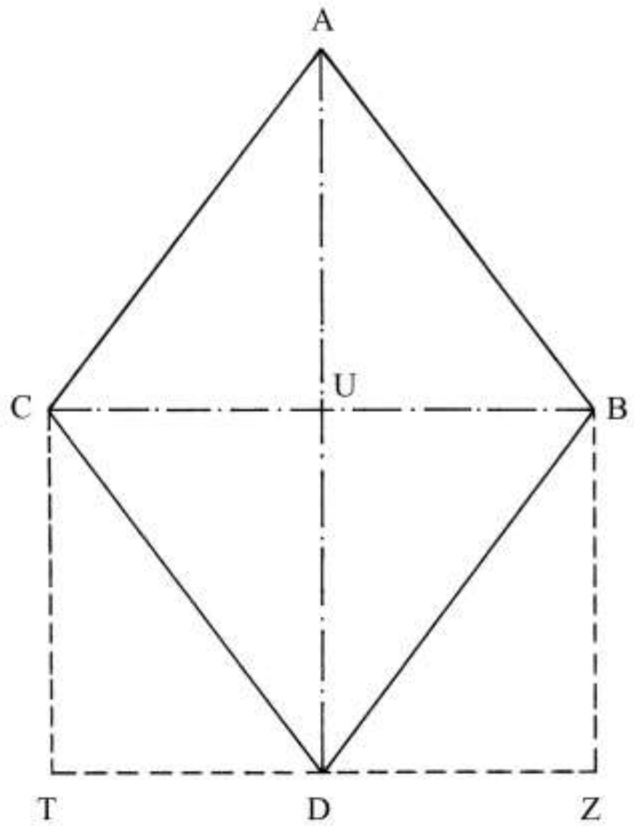
Un rombo ha due diagonali lunghe 16 e 12 cubiti.

Il problema chiede la lunghezza dei lati del quadrilatero.

L'area di un rombo è data dal prodotto della lunghezza di una semidiagonale per quella dell'altra:

$A_{ABDC} = (AD/2) * CB = AU * CB = (16/2) * 12 = 8 * 12 = 96$ cubiti^2.

Il quadrilatero ha le stesse dimensioni di quello considerato in un precedente problema.



La lunghezza dei lati è ricavata con la seguente procedura:

* dividere per due le lunghezze delle diagonali: $16/2 = 8$ e $12/2 = 6$;
* elevare al quadrato le lunghezze delle due semidiagonali: 8^2 e 6^2;
* sommare i due quadrati: $8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{100} = 10$ cubiti, lunghezza dei lati del rombo.

La procedura ha considerato uno dei triangoli rettangoli generati dall'intersezione delle diagonali AD e CB, ad esempio quello DUB. Infatti:

$BD^2 = DU^2 + UB^2 = (AD/2)^2 + (CB/2)^2 = (16/2)^2 + (12/2)^2 = 8^2 + 6^2 =$
$= 64 + 36 = 100$ e
$BD = \sqrt{100} = 10$ cubiti.

<u>Un altro rombo</u>

Un rombo ha area uguale a 96 cubiti^2 e una diagonale è lunga 16 cubiti.
Il problema chiede la lunghezza dell'altra diagonale.
Savasorda utilizza il quadrilatero oggetto del precedente problema.
Dividendo l'area per la lunghezza della diagonale nota si ha:

$96/16 = 6$ cubiti, che è la lunghezza della semidiagonale UB della precedente figura.

La diagonale minore CB è lunga il doppio di UB: 12 cubiti.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Un altro problema è basato sul rombo considerato nei due precedenti problemi.
Il rombo ha area uguale a 96 cubiti^2 e i suoi lati sono lunghi 10 cubiti.
Il problema chiede la lunghezza delle due diagonali.
La soluzione contiene i seguenti passi:

* moltiplicare la lunghezza di un lato per sé stessa: $10 * 10 = 100$;
* sommare con l'area: $100 + 96 = 196$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{196} = 14$, somma delle lunghezze delle due semidiagonali;
* dividere per 2: $14/2 = 7$;
* elevare al quadrato: $7^2 = 49$;
* sottrarre metà dell'area del rombo: $49 – 96/2 = 49 – 48 = 1$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{1} = 1$;
* sommare a 7: $1 + 7 = 8$ cubiti, lunghezza della semidiagonale maggiore (AU = UD);
* sottrarre da 7: $7 – 1 = 6$ cubiti, lunghezza della semidiagonale minore (CU = UB).

Savasorda conclude con un'affermazione:

la somma del quadrato di un lato del rombo (ad esempio BD) con l'area del rombo è uguale al quadrato della somma delle lunghezze delle semidiagonali:

$BD^2 + A_{ABDC} = [(AD + BC)/2]^2$

$100 + 96 = (16/2 + 12/2)^2$

$196 = (8 + 6)^2$

$196 = 14^2$

$196 = 196.$

PARTE SECONDA
SULLA MISURA DEI TRIANGOLI

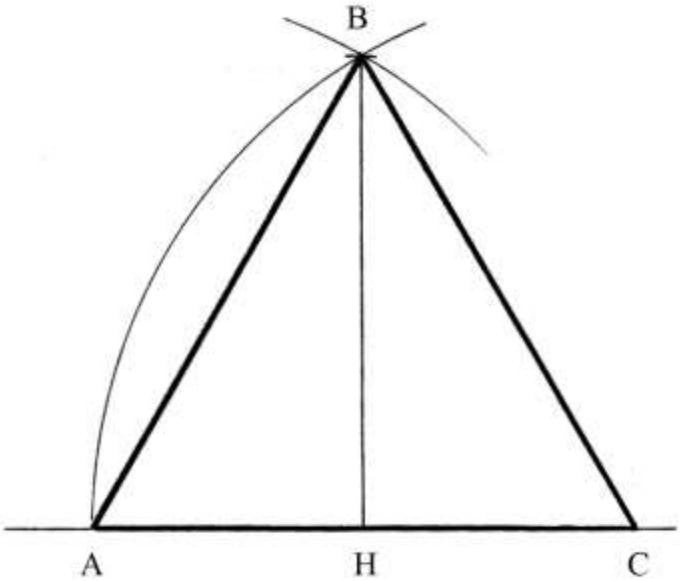
A) TRIANGOLI EQUILATERI

Triangolo equilatero

Il triangolo equilatero ABC ha lati lunghi *10 cubiti*: nel sistema metrologico romano, il cubito è un multiplo del *piede* (che corrisponde a 29,57 cm) per cui

$$1 \text{ cubito} = (1 + ½) * \text{piede} = 44{,}355 \text{ cm}.$$

È ragionevole supporre che Savasorda abbia utilizzato le unità metriche del sistema metrologico di Roma sopravvissute nel Medioevo.



BH è l'altezza relativa al lato AC; i segmenti AH e HC hanno lunghezza uguale a 5 cubiti.

Savasorda calcolò correttamente la lunghezza dell'altezza BH:

$$BH = \sqrt{(AB^2 - AH^2)} = \sqrt{(10^2 - 5^2)} = \sqrt{75} \approx 8{,}66 \text{ cubiti.}$$

L'area del triangolo equilatero è data dal prodotto dell'altezza per la lunghezza della metà del lato di base (o metà dell'altezza per la base):

$$A_{ABC} = BH * AH \approx 8{,}66 * 5 \approx 43{,}3 \text{ cubiti}^2.$$

Savasorda indica il risultato come 43 cubiti^2 più un terzo meno qualcosa (di un cubito^2):

$$A_{ABC} = (43 + 1/3 - \text{qualcosa}) \text{ cubiti}^2.$$

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Savasorda criticò un metodo usato dai pratici per il quale l'altezza di un triangolo equilatero era data da:

$$\text{altezza} = \text{lato} - 2/15 * \text{lato} = 13/15 * \text{lato} = 0{,}8(66) * \text{lato}.$$

La differenza con il risultato fornito dal metodo corretto è minima.

Savasorda applicò il metodo dei pratici al caso di un triangolo equilatero con lati lunghi 15 cubiti; la sua altezza era data da:

$(13/15) * 15 = 13$ cubiti.

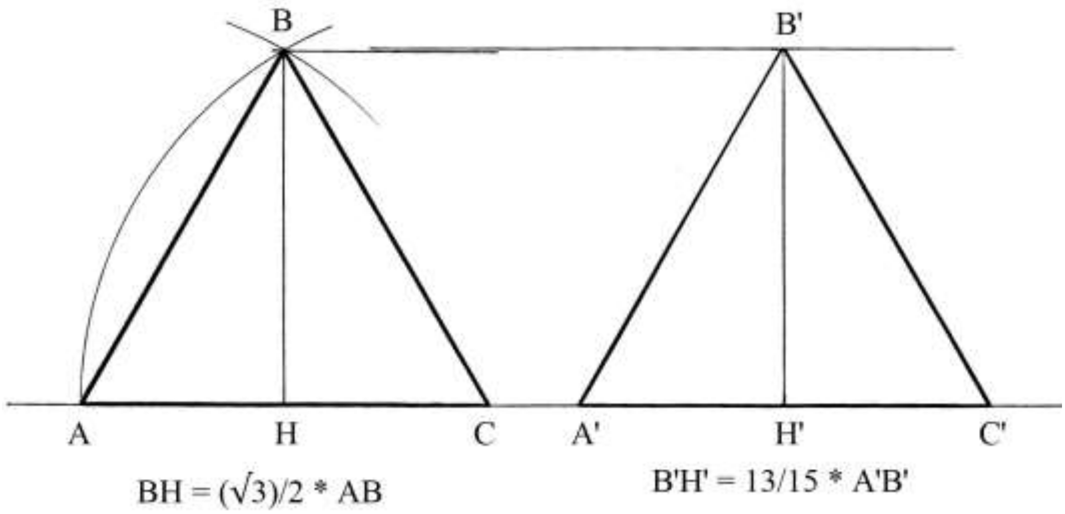
L'area di questo ipotetico secondo triangolo equilatero, A'B'C', è:

$A_{A'B'C'} = BH * AH = 13 * 15/2 = 97{,}5$ cubiti^2.

I pratici calcolavano l'area con la procedura che segue:

* moltiplicare la lunghezza di un lato per sé stessa: $15^2 = 225$;
* dividere per 3: $225 : 3 = 75$;
* calcolare la decima parte del quadrato del lato: $225 : 10 = 22{,}5$ (*22 e un mezzo*, come scriveva Savasorda);
* sommare le due frazioni: $1/3 * 225 + 1/10 * 225 = 75 + 22{,}5 = 97{,}5$ cubiti^2.

Savasorda accertò che il metodo usato dai pratici forniva un risultato approssimato accettabile, anche se leggermente errato per eccesso, come spiega la figura che segue:



Infatti la corretta lunghezza dell'altezza BH è data da:

$BH = \sqrt{[15^2 - (15/2)^2]} = \sqrt{(225 - 56{,}25)} = \sqrt{168{,}75} \rightarrow \sqrt{169} \approx 13$ cubiti.

L'area calcolata con formula e dati corretti è:

$A_{ABC} = (\text{base} * \text{altezza})/2 = (15 * \sqrt{168{,}75})/2 \approx 97{,}4278$ cubiti^2.

Savasorda chiarì che questo metodo approssimato usato dai pratici era applicabile soltanto al caso del triangolo equilatero; per un generico triangolo l'area andava calcolata moltiplicando l'altezza per metà della base (o viceversa).

- APPROFONDIMENTO -

Il rapporto *approssimato* 13/15 fra l'altezza e la lunghezza di un lato del triangolo equilatero risale almeno a Erone di Alessandria (I secolo d.C.).

Egli elaborò una formula approssimata per calcolare l'area di un triangolo equilatero conoscendo soltanto la lunghezza del lato:

$\text{Area} = (13/30) * \text{lato}^2$.

La formula può essere scritta come segue:

$\text{Area} = [(13/30) * \text{lato}] * \text{lato}$.

L'espressione racchiusa fra parentesi quadre vale

[(13/30) * lato] = altezza/2 , per cui si ricava la seguente formula:

altezza = (13/15) * lato.

È così spiegata la costante 13/15 il cui uso era criticato da Savasorda.

Lo stesso Gerberto di Aurillac (circa 950 – 1003), Papa Silvestro II, utilizzò questa costante, evidentemente anch'egli influenzato dalla geometria dei Gromatici romani e da Erone.

- -

Un problema inverso relativo al triangolo equilatero

Savasorda presentò un problema inverso: è nota l'altezza del triangolo equilatero ma è ignota la lunghezza dei lati.

Egli espose un metodo: elevare al quadrato l'altezza (13 cubiti) e sommare al risultato 1/3 dello stesso quadrato.

La radice quadrata della somma è la lunghezza del lato del triangolo equilatero:

lato triangolo = $\sqrt{(4/3 * \text{altezza}^2)} = \sqrt{(4/3 * 13^2)} \approx \sqrt{[225,(33)]} \approx$

$\approx$ 15,0111 cubiti → 15 cubiti.

Nota: 225,(33) è un numero decimale periodico: (33) è il *periodo* che si ripete all'infinito.

Dalla formula precedente è ricavata una formula inversa per calcolare la lunghezza dell'altezza:

altezza = $\sqrt{(3/4 * \text{lato}^2)}$.

Nel caso di un triangolo equilatero con lato lungo 15 cubiti, l'altezza vale:

altezza = $\sqrt{(3/4 * 15^2)} = \sqrt{168,75} \rightarrow \sqrt{169}$ = 13 cubiti.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Savasorda affrontò un altro problema inverso: quello di calcolare l'area di un triangolo equilatero conoscendo soltanto l'altezza.

Elevare al quadrato l'altezza e calcolare i [5/9 + (1/5) * (1/9)] del quadrato

Il risultato è l'area del triangolo equilatero. L'esempio fornito è quello di un'altezza uguale a $\sqrt{75} \approx$ 8,66 cubiti.

In cifre:

$5/9 * \text{altezza}^2 + 1/5 * 1/9 * \text{altezza}^2 = (5/9 + 1/45) * \text{altezza}^2 = 26/45 * \text{altezza}^2 =$

$= 26/45 * 75 = 43,(33)$ cubiti^2, che è l'area del triangolo equilatero.

Il lato del triangolo equilatero è lungo

lato = (2 * area)/altezza = (2 * 43,33)/8,66 $\approx$ 10 cubiti.

Alcune conclusioni sono tratte da Savasorda:

- usando le formule corrette, il quadrato dell'altezza *h* di un triangolo equilatero è uguale a ¾ del quadrato della lunghezza di un lato:

  $h^2 = ¾ * \text{lato}^2$;

- l'area di un triangolo equilatero è uguale a 1/3 del quadrato della lunghezza di un lato più 1/10 di questo dato:

  $A_{\text{TRIANGOLO}} = (1/3 + 1/10) * \text{lato}^2 = (10 + 3)/30 * \text{lato}^2 = 13/30 * \text{lato}^2$.

Nota: l'espressione [5/9 + (1/5) * (1/9)] è l'approssimazione del valore di $(\sqrt{3})/3$.

Infatti, valgono le due seguenti relazioni:

altezza: $h = (\sqrt{3})/2 * lato$ e la relazione inversa

$lato = 2/\sqrt{3}) * h = 2 * (\sqrt{3})/3 * lato$.

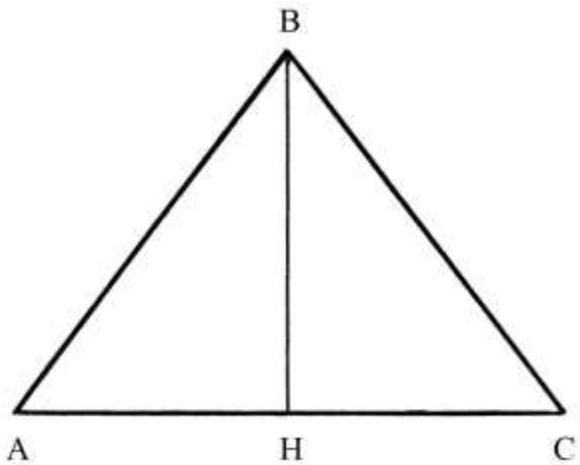
La frazione contenuta nell'ultima formula presenta le seguenti equivalente:

$(\sqrt{3})/3 \approx 0,577 \approx (5/9 + 1/45) \approx 26/45$ e l'espressione usata da Savasorda nella soluzione del problema è una buona approssimazione.

B) TRIANGOLI ISOSCELI

Triangoli isosceli

Savasorda traccia l'altezza (BH) verso il lato disuguale che nella figura è quello AC:



I lati obliqui AB e BC sono lunghi 15 e la base AC è lunga 18.

Il testo calcola l'altezza applicando il teorema di Pitagora a uno dei due triangoli rettangoli (ABH e BHC):

$BH = \sqrt{(AB^2 – AH^2)} = \sqrt{[15^2 – (18/2)^2]} = \sqrt{(225 – 81)} = \sqrt{144} = 12$.

Il passo successivo è il calcolo dell'area del triangolo che Savasorda ottiene correttamente moltiplicando l'altezza per metà della lunghezza del lato di base:

$A_{ABC} = BH * AH = 12 * 9 = 108$.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Un problema inverso parte dalla conoscenza delle lunghezze dell'altezza (12) e del lato di base (18) e chiede di ricavare la lunghezza dei due lati obliqui.

Di nuovo, Savasorda ricorre al teorema di Pitagora applicandolo al triangolo rettangolo ABH:

$AB = \sqrt{(BH^2 + AH^2)} = \sqrt{[12^2 + (18/2)^2]} = \sqrt{(144 + 81)} = \sqrt{225} = 15$.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Un'ulteriore variante del problema è basato sulla conoscenza della lunghezza dei due lati obliqui (15 cubiti) e dell'area del triangolo isoscele (108 cubiti^2).

Per spiegare il metodo, peraltro corretto, impiegato da Savasorda per risolvere il problema, usiamo dei simboli per indicare i dati:

* area: S ;
* base AC = b ;
* lati AB e BC = ℓ ;
* altezza BH = h .

Il metodo proposto da Savasorda è il seguente:

* raddoppiare l'area: $2 * S = 2 * 108 = 216$;
* calcolare il quadrato della lunghezza del lato obliquo (AB o BC): $\ell^2 = 15^2 = 225$;
* sottrarre da questo ultimo risultato il doppio dell'area: $\ell^2 – 2 * S = 225 – 216 = 9$;
* estrarre la radice quadrata della differenza: $\sqrt{(\ell^2 – 2 * S)} = \sqrt{9} = 3$.

Questo ultimo risultato – 3 – è la differenza fra l'altezza h e metà della base b:

$h – b/2 = 3$;

* dividere 3 per 2 e elevare al quadrato: $(3/2)^2 = (1,5)^2 = 2,25$;
* sommare 2,25 all'area: $2,25 + S = 2,25 + 108 = 110,25$;
* calcolare la radice di 110,25: $\sqrt{110,25} = 10,5$;
* sommare questo ultimo risultato a metà della differenza (h – b/2) e cioè:

$10,5 + (h – b/2)/2 = 10,5 + 3/2 = 12$, il valore dell'altezza del triangolo isoscele;
* nell'espressione (h – b/2) = 3 sostituire a *h* il suo valore, 12:

$12 – b/2 = 3$

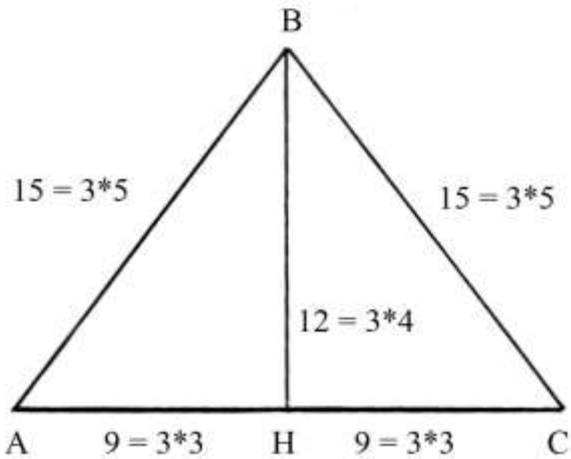
$12 – 3 = b/2$

$9 = b/2$

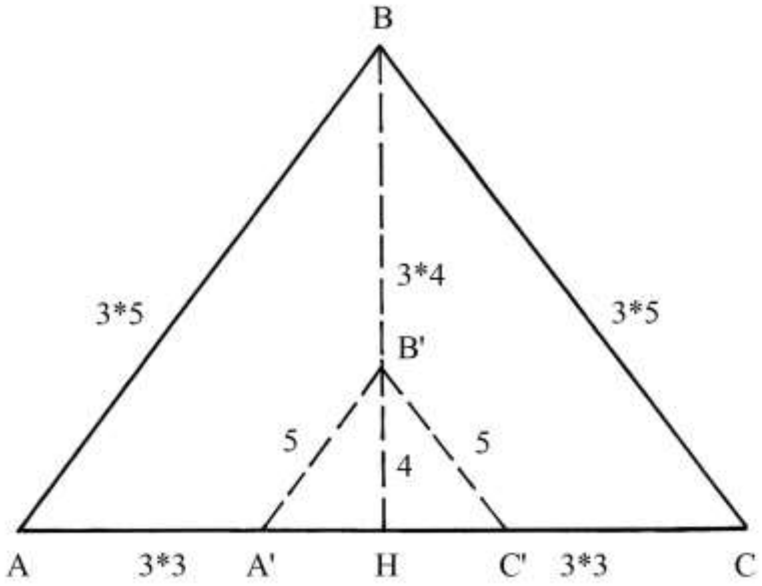
$b = 9 * 2 = 18$, lunghezza della *base* AC.

- APPROFONDIMENTO -

L'altezza BH divide il triangolo isoscele ABC in due triangoli rettangoli di uguali dimensioni: ABH e BHC:



Le lunghezze dei lati dei due triangoli formano due terne 9 – 12 – 15 che sono multiple di un *fattore 3* della terna pitagorica 3 – 4 – 5.



- -

C) <u>TRIANGOLI SCALENI</u>

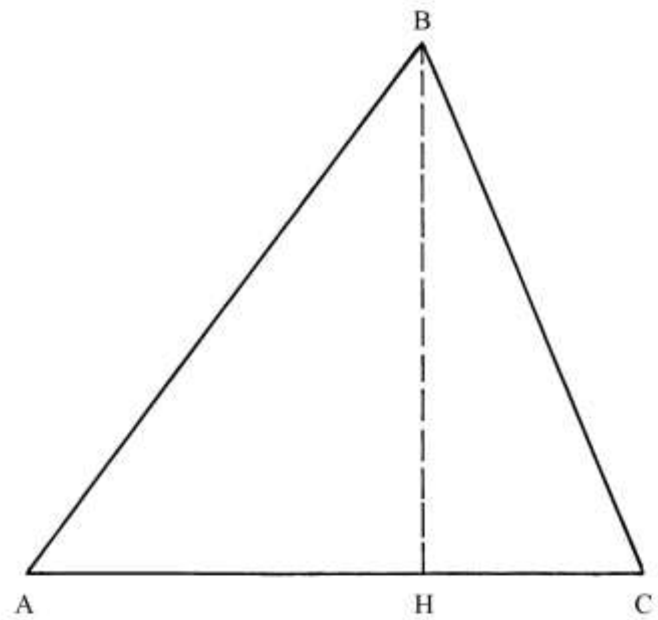
<u>I triangoli scaleni</u>

Un triangolo scaleno può essere:

* rettangolo;
* ottusangolo;
* acutangolo.

<u>Triangoli scaleni acutangoli</u>

Il triangolo della figura che segue ha lati lunghi AB = 15 cubiti, AC = 14 cubiti e BC = 13 cubiti.



L’altezza BH è incognita: la sua conoscenza è necessaria per calcolare l’area del triangolo.

Savasorda propone un metodo per calcolare la lunghezza della parte maggiore (AH) della base AC:

* calcolare il quadrato del lato più lungo: $AB^2 = 15^2 = 225$;
* calcolare il quadrato della base: $AC^2 = 14^2 = 196$;
* sommare i due quadrati: $225 + 196 = 421$;
* calcolare il quadrato del lato corto: $BC^2 = 13^2 = 169$;
* sottrarre questo ultimo dato dalla somma dei primi due quadrati:
$$AB^2 + AC^2 – BC^2 = 421 – 169 = 252;$$
* dividere questo ultimo risultato per 2: $252 : 2 = 126$;
* infine, dividere l’ultimo quoziente per la lunghezza della base AC:
$26 : 14 = 9$ cubiti che è la lunghezza del segmento AH.

I passi del metodo di Savasorda sono sintetizzati nella formula seguente:
$$AH = (AB^2 + AC^2 – BC^2)/(2 * AC).$$

Il segmento HC è lungo: $HC = AC – AH = 14 – 9 = 5$ cubiti.

Per ricavare la lunghezza di questo ultimo segmento, Savasorda propone una procedura simile a quella usata in precedenza per ricavare quella di AH:

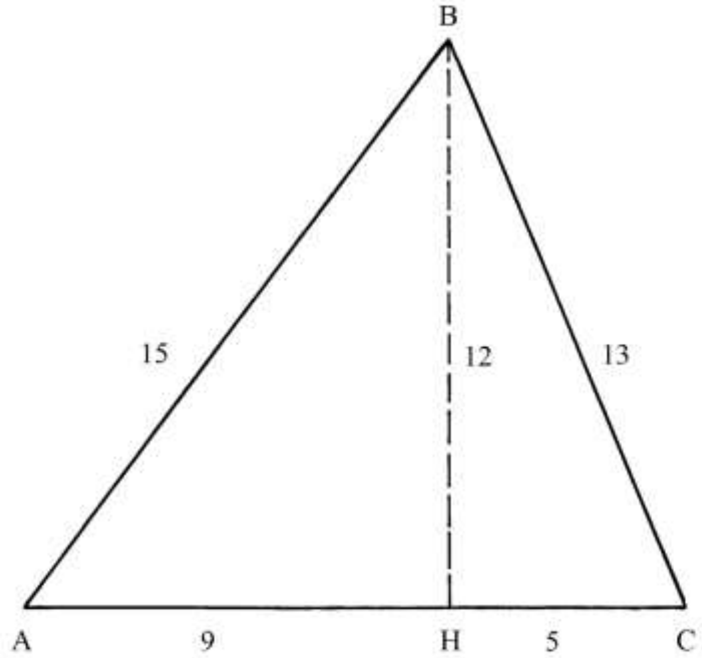
* sommare i quadrati del lato più corto (BC) e della base:
$$BC^2 + AC^2 = 13^2 + 14^2 = 169 + 196 = 365;$$
* sottrarre dall’ultimo dato il quadrato del lato più lungo (AB):
$$365 – AB^2 = 365 – 15^2 = 365 – 225 = 140;$$
* dividere questo risultato per 2: $140 : 2 = 70$;
* dividere questo ultimo quoziente per la lunghezza della base AC:
$70 : 14 = 5$ cubiti che è la lunghezza del segmento HC.

Anche questa procedura può essere riassunta in una formula:
$$HC = (BC^2 + AC^2 – AB^2)/(2 * AC).$$

Infine, l’altezza BH è calcolata applicando il teorema di Pitagora a uno dei due triangoli rettangoli delimitati da BH e cioè ABH e BHC:
$$BH = \sqrt{(AB^2 – AH^2)} = \sqrt{(15^2 – 9^2)} = \sqrt{(225 – 81)} = \sqrt{144} = 12$$ oppure:

$BH = \sqrt{(BC^2 - HC^2)} = \sqrt{(13^2 - 5^2)} = \sqrt{(169 - 25)} = \sqrt{144} = 12.$

I triangoli rettangoli ABH e BHC hanno lati le cui lunghezze formano due *terne pitagoriche*: 9 – 12 – 15 (che è multipla di un fattore 3 della terna 3 – 4 – 5) e 5 – 12 – 13, come riassume la figura che segue:



L'area del triangolo scaleno ABC è:

$A_{ABC} = (\text{base} * \text{altezza})/2 = (AC * BH)/2 = (14 * 12)/2 = 84$ cubiti^2.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Il problema della determinazione dell'altezza BH si può oggi risolvere con una semplice equazione con un'incognita. Chiamando *x* la lunghezza di AH, si ha:

$AH = \sqrt{(AB^2 - AH^2)} = \sqrt{(15^2 - x^2)}.$

La lunghezza di HC è:

$HC = AC - AH = 14 - x.$

La lunghezza di BH è ricavabile anche con la segue formula:

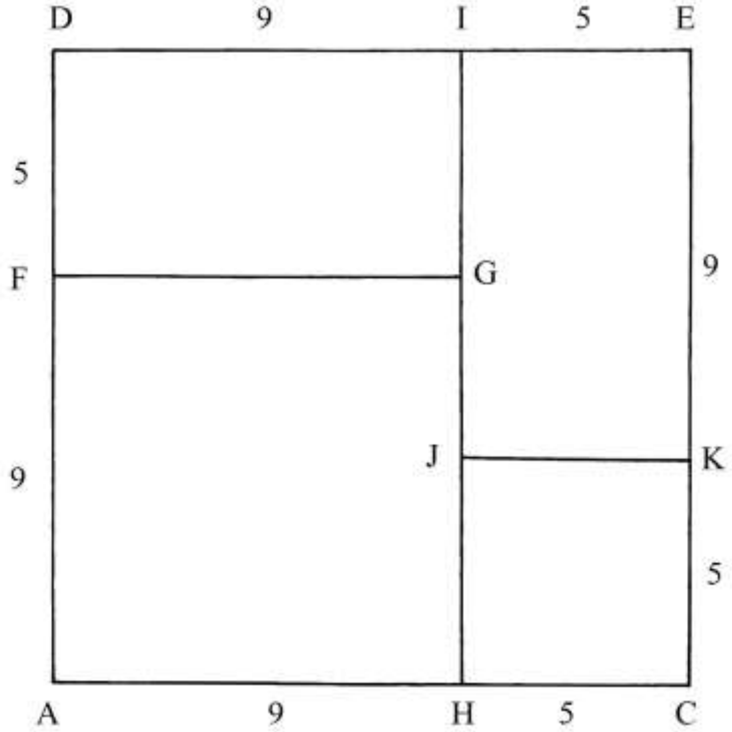
$BH = \sqrt{(BC^2 - HC^2)} = \sqrt{[13^2 - (14 - x)^2]}.$

Eguagliando le due equazioni ed elevando al quadrato si ha:

$\sqrt{(15^2 - x^2)} = \sqrt{[13^2 - (14 - x)^2]}$
$(15^2 - x^2) = [13^2 - (14 - x)^2]$
$225 - x^2 = 169 - (196 - 28 * x + x^2)$
$225 - x^2 = 169 - 196 + 28 * x - x^2$
$225 - 169 + 196 = 28 * x$
$252 = 28 * x$
$x = 252/28 = 9.$

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Savasorda spiegò il suo metodo facendo l'esempio di un segmento (AC nella figura che segue), di lunghezza uguale a quella della base AC del triangolo scaleno ABC:



AC è diviso in due parti di differente lunghezza: AH e HC, lunghi rispettivamente 9 e 5.

Il quadrato ADEC è costruito sul lato AC. Esso è scomposto in due quadrati (AFGH costruito su AH e HJKC costruito su HC) e due rettangoli (FDIG e JIEK).

I due rettangoli hanno uguali dimensioni: i lati più lunghi (FG e JI) sono pari a AH e i lati più corti (FD e JK) hanno la lunghezza di HC.

In termini aritmetici l'area di ADEC è data da:

$AC^2 = AH^2 + HC^2 + 2 * AH * HC = (AH + HC)^2$

Savasorda suggerì un'altra soluzione per la determinazione delle lunghezze di AH e di HC:

* calcolare i quadrati delle lunghezze dei lati convergenti nel vertice B (opposto a AC) e sottrarre il minore dal maggiore: $AB^2 – BC^2 = 15^2 – 13^2 = 225 – 169 = 56$;
* dividere questo ultimo risultato per 2: 56 : 2 = 28;
* dividere questo quoziente per la lunghezza della base AC: 28 : AC = 28 : 14 = 2;
* aggiungere o togliere questo quoziente alla/dalla metà di AC:
  AC/2 + 2 = 14/2 + 2 = 7 + 2 = 9, lunghezza di AH;
  AC/2 – 2 = 14/2 – 2 = 7 – 2 = 5, lunghezza di HC.

Le due diverse soluzioni sono espresse con le formule che seguono:

$(AB^2 – BC^2)/(2 * AC) + 2 = AH$
$(AB^2 – BC^2)/(2 * AC) – 2 = HC.$

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Una variante di questo metodo è la seguente procedura:

* dividere il resto 56 (ricavato sopra da $AB^2 – BC^2$) per la lunghezza della base AC:
  56 : 14 = 4 ;
* sommare il quoziente 4 alla lunghezza della base AC: 4 + 14 = 18;

* dividere questo risultato per 2: 18 : 2 = 9 che è la lunghezza di AH;
* sottrarre il quoziente 4 dalla lunghezza di AC: 14 – 4 = 10 ;
* dividere questo ultimo dato per 2: 10 : 2 = 5 che è la lunghezza di HC.

La procedura è riassunta nelle due seguenti formule:

$$[(AB^2 - BC^2)/AC + AC]/2 = AH$$

$$AC - (AB^2 - BC^2)/(2 * AC) = HC.$$

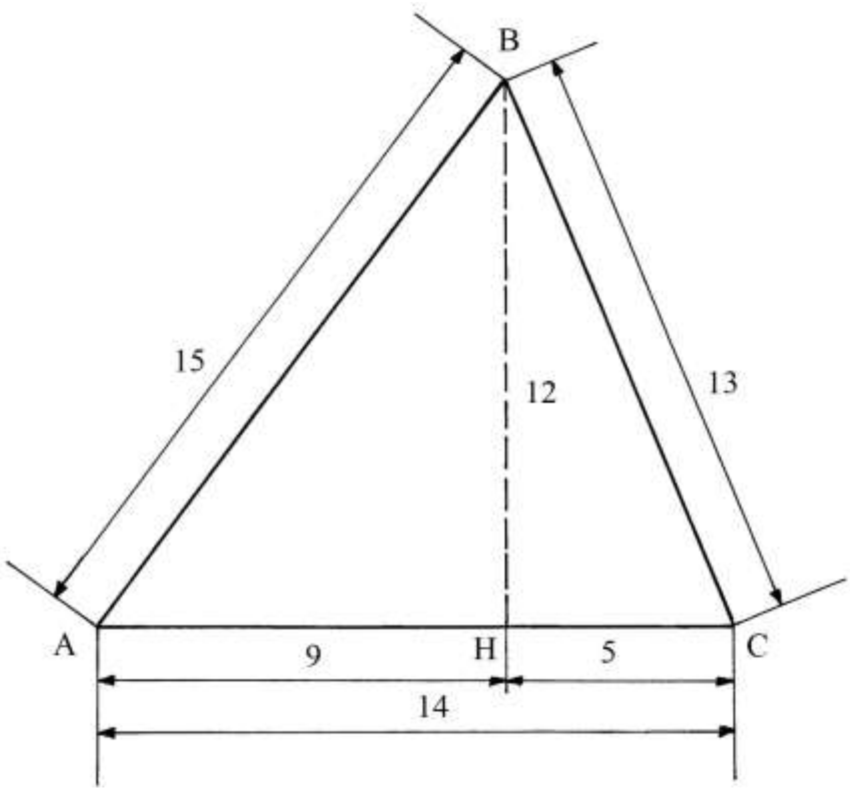
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Savasorda affrontò poi un problema inverso. Di un triangolo scaleno e acutangolo sono noti l’altezza (BH =12 cubiti) e le lunghezze dei lati obliqui (AB = 15 e BC = 13 cubiti).

Deve essere determinata la lunghezza della base AC.

* Elevare al quadrato la lunghezza del lato più corto: $BC^2 = 13^2 = 169$;
* elevare al quadrato l’altezza: $BH^2 = 12^2 = 144$;
* sottrarre 144 da 169: 169 – 144 = 25;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{25} = 5$, lunghezza della parte più corta della base (HC);
* elevare al quadrato la lunghezza del lato più lungo: $AB^2 = 15^2 = 225$;
* elevare al quadrato l’altezza: $BH^2 = 12^2 = 144$;
* sottrarre il secondo quadrato dal primo: 225 – 144 = 81;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{81} = 9$, parte più lunga della base (AH).

La conclusione porta a riconoscere le dimensioni dell’iniziale triangolo scaleno nella terna 13 – 14 – 15, che costituisce un esempio classico, presente in numerosi trattati di altri Autori:



%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Un altro problema inverso muove dalla conoscenza della somma dell'area e dell'altezza (area + altezza = 96) e della lunghezza della base (14).

Viene chiesta la lunghezza dell'altezza.

Ecco i passi della procedura seguita da Savasorda:

* prendere metà della base: 14 : 2 = 7;
* aggiungere 1: 7 + 1 = 8;
* dividere la somma (96) per 8: 96 : 8 = 12, altezza del triangolo scaleno.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

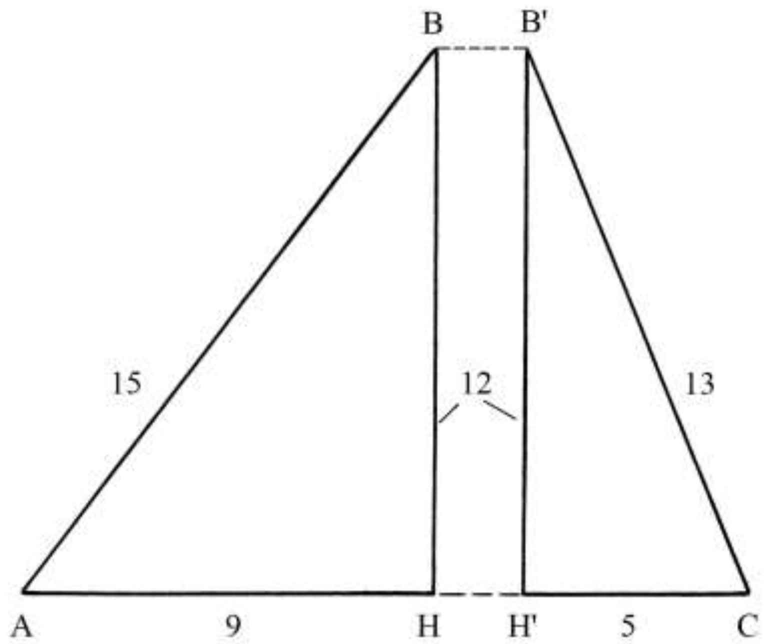
L'altezza BH scompone il triangolo ABC in due triangoli rettangoli:

* ABH, con lati lunghi 9-12-15;
* B'H'C, con lati lunghi 5-12-13.

Le lunghezze dei lati di ABH formano una *terna derivata* dalla *terna primitiva* 3-4-5 che è moltiplicata della costante 3:

3 * (3-4-5) = 9-12-15.

Le lunghezze dei lati di B'H'C formano la *terna primitiva* 5-12-13.



- APPROFONDIMENTO -

Savasorda spiegò i metodi diretti e indiretti per analizzare e risolvere i problemi relativi ai triangoli equilateri e a quelli scaleni con una serie di esempi pratici, quasi anticipando i metodi usati dagli abacisti toscani del Medioevo nei loro trattati: anche questi ultimi descrivevano numerosi casi pratici senza ricorrere alla teoria.

Savasorda e gli abacisti esponevano la soluzione di un problema diretto poi affrontavano un problema inverso.

Il triangolo scaleno 13-14-15 fu largamente studiato da Erone di Alessandria (I secolo d.C.): su questo importante Autore, probabilmente di origini egizie, suggerisco di consultare il mio articolo divulgativo citato in bibliografia.

Erone di Alessandria scrisse diverse opere di matematica applicata, geometria e meccanica. La versione inglese della voce dedicata a Erone su Wikipedia lo qualifica come “*a Greco-Egyptian mathematician and engineer*”.

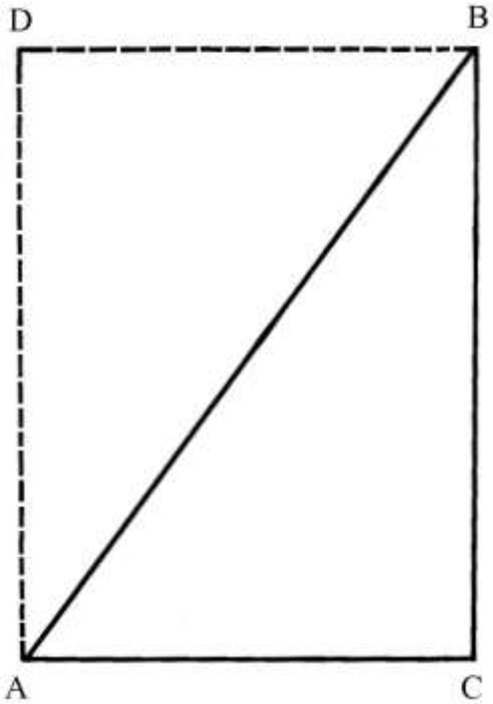
- -

D) TRIANGOLI RETTANGOLI

Triangoli rettangoli

Savasorda affrontò l’argomento dimostrando nei fatti la conoscenza del cosiddetto *teorema di Pitagora*: la somma dei quadrati delle lunghezze dei due cateti di un triangolo rettangolo è uguale al quadrato della lunghezza dell’ipotenusa.

Conosceva pure la formula per calcolare l’area di un triangolo rettangolo moltiplicando le lunghezze dei due cateti e dividendo per 2 il risultato: secondo Savasorda un cateto viene considerato come la *base* e l’altro come l’*altezza* del triangolo.



Il triangolo rettangolo ABC è metà del rettangolo ADBC che è diviso in due parti uguali dalla diagonale AB.

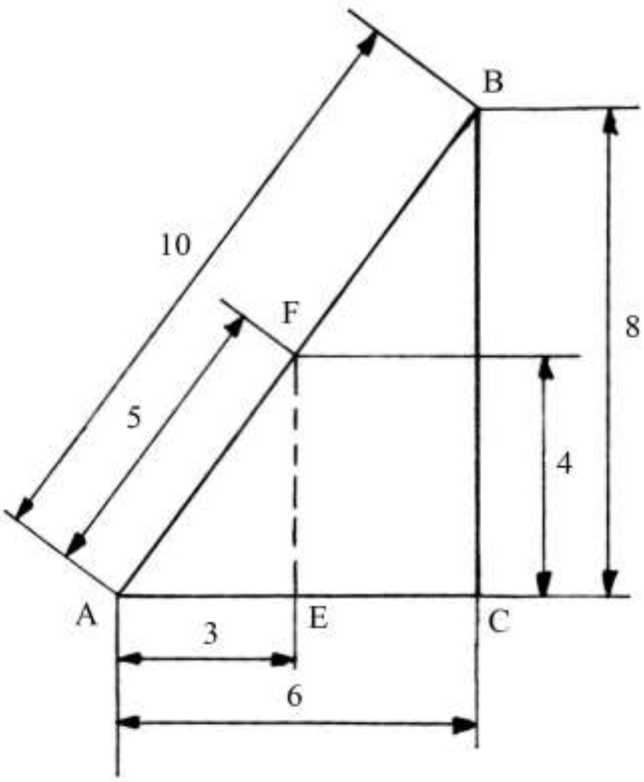
Il cateto AC è lungo 6 cubiti e quello BC 8 cubiti.

L’ipotenusa AB è lunga 10 cubiti, come dimostrato da Savasorda con la seguente procedura:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

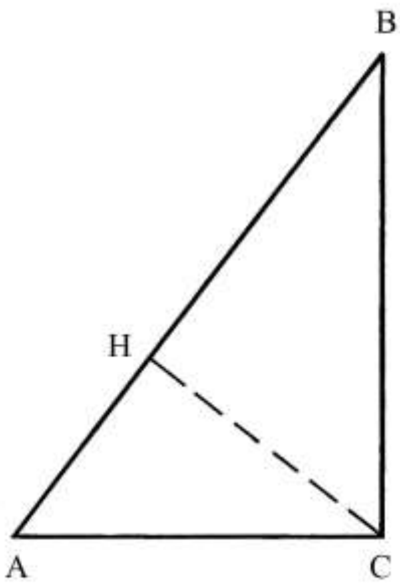
$10^2 = 6^2 + 8^2$
$100 = 36 + 64 = AB^2$
$\sqrt{100} = 10 = AB$

Le lunghezze dei tre lati del triangolo formano una *terna pitagorica derivata*, 6 – 8 – 10, che è multipla di un fattore 2 della *terna primitiva* 3 – 4 – 5.



%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Savasorda passò poi a risolvere un problema inverso. Nel triangolo rettangolo ABC condusse dal punto C la perpendicolare all’ipotenusa AB che incontrò nel punto H:



Per determinare la lunghezza del segmento AH Savasorda propose la seguente procedura:

* sommare i quadrati dell'ipotenusa AB e del cateto AC:
$$AB^2 + AC^2 = 10^2 + 6^2 = 100 + 36 = 136;$$
* sottrarre da questo ultimo risultato il quadrato del cateto BC:
$$136 – BC^2 = 136 – 8^2 = 136 – 64 = 72;$$
* dividere 72 per 2: 72 : 2 = 36;
* dividere 36 per la lunghezza di AB: 36 : 10 = 3,6 che è la lunghezza di AH;
* elevare al quadrato AH e sottrarre dal quadrato del cateto AC:
$$AC^2 – AH^2 = 6^2 – 3{,}6^2 = 36 – 12{,}96 = 23{,}04;$$
* estrarre la radice quadrata di questo ultimo risultato: $\sqrt{23{,}04} = 4{,}8$, lunghezza di CH.

Conoscendo la lunghezza di AB è facile ricavare quella del segmento HB:

HB = AB – AH = 10 – 3,6 = 6,4.

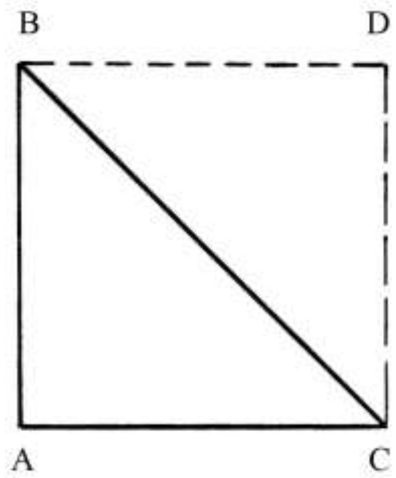
Moltiplicando la lunghezza di AB per quella di CH e dividendo il risultato per 2 si ottiene l'area del triangolo ABC in cubiti^2:

$A_{ABC} = (AB * HC)/2 = (10 * 4{,}8)/2 = 24$, che è lo stesso valore trovato dividendo per 2 il prodotto dei cateti AC e BC:

$A_{ABC} = (AC * BC)/2 = (6 * 8)/2 = 24$.

<u>Triangolo rettangolo isoscele</u>

Un triangolo rettangolo isoscele, ABC, è generato tagliando un quadrato in due parti uguali con una diagonale (BC nella figura che segue):



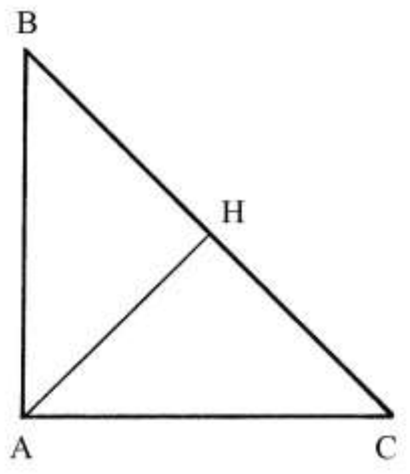
I cateti AB e AC sono lunghi 10 cubiti. La lunghezza dell'ipotenusa BC è data da

$BC = \sqrt{(AB^2 + AC^2)} = \sqrt{(10^2 + 10^2)} = \sqrt{200} = 10 * \sqrt{2}$.

L'area del triangolo è:

$A_{ABC} = (AB * AC)/2 = (10 * 10)/2 = 50$ cubiti^2.

Dal vertice A tracciare la perpendicolare AH all'ipotenusa BC: questo nuovo segmento è l'altezza relativa alla base BC:



L'area di un triangolo è data dal semiprodotto dell'altezza (AH) per la base (BC) ad essa relativa e applicando la formula inversa Savasorda calcolò l'altezza AH:

$A_{ABC} = (AH * BC)/2$ e

$AH = (2 * A_{ABC})/BC = (2 * 50)/(10 * \sqrt{2}) = (100 * \sqrt{2})/(10 * 2) = 5 * \sqrt{2}$.

Savasorda non fece notare che AH ha la stessa lunghezza in cubiti dei segmenti BH e HC:

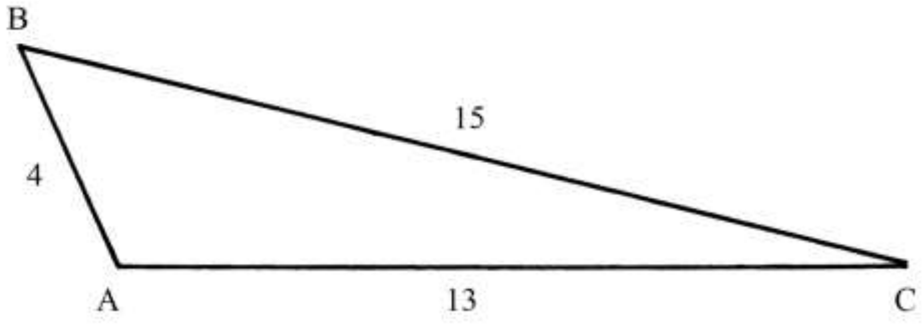
$AH = BH = HC = 5 * \sqrt{2}$.

Infatti, AH è parte – metà – della diagonale AD del precedente quadrato ABDC.

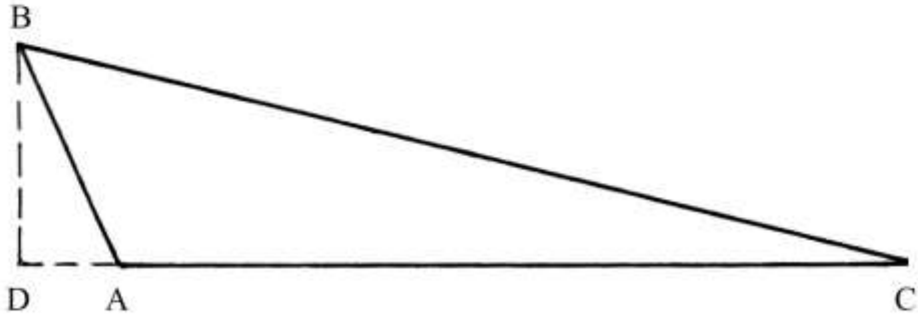
E) TRIANGOLI OTTUSANGOLI

Triangoli ottusangoli

ABC è un triangolo ottusangolo con l'angolo BAC maggiore di 90° e quindi *ottuso*.
Le dimensioni dei lati in *cubiti* sono riportate nella figura che segue:



Questo tipo di triangoli possiede un'interessante proprietà: il quadrato della lunghezza del lato opposto (BC) all'angolo ottuso (BAC) è uguale alla somma dei quadrati delle lunghezze degli altri due lati (AB e AC) più il doppio del prodotto della lunghezza di uno di questi due lati per l'altezza relativa ad esso:



Secondo la notazione moderna, questa affermazione diviene:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2 * AC * AD$$

Ecco la spiegazione della precedente formula. Prolungare verso sinistra il lato AC e dal vertice B abbassare la perpendicolare BD: questo segmento è l'altezza *esterna* del triangolo ABC rispetto alla base AC.

Nella precedente figura sono presenti due triangoli rettangoli: BDA e BCD.
Dimostriamo la correttezza della citata formula di Savasorda.
Nel triangolo rettangolo BDA si ha la seguente relazione:

$$AB^2 = BD^2 + AD^2$$

Sostituiamo a AB il suo valore noto, che è 4, e chiamiamo AD = *x*. La precedente relazione diviene:

$$4^2 = BD^2 + x^2 \qquad \text{da cui}$$

$$BD^2 = 16 – x^2 \qquad (1).$$

Nel triangolo rettangolo BCD si ha:

$$BC^2 = BD^2 + DC^2.$$

Sostituendo i valori numerici noti nella precedente formula e sapendo che (DC = DA + AC) si ottengono i seguenti risultati:

$15^2 = BD^2 + (DA + AC)^2$
$15^2 = BD^2 + (x + 13)^2$
$225 = BD^2 + x^2 + 26 * x + 169$
$BD^2 = 225 – x^2 – 26 * x – 169$
$BD^2 = 56 – x^2 – 26 * x$ (2).

Eguagliando le due espressioni (1) e (2) di BD^2 si ha:

$16 – x^2 = 56 – x^2 – 26 * x$
$26 * x = 56 – 16$
$26 * x = 40$
$x = 40/26 = 20/13 = AD$.

Sostituiamo questo valore di x nella formula di Savasorda:

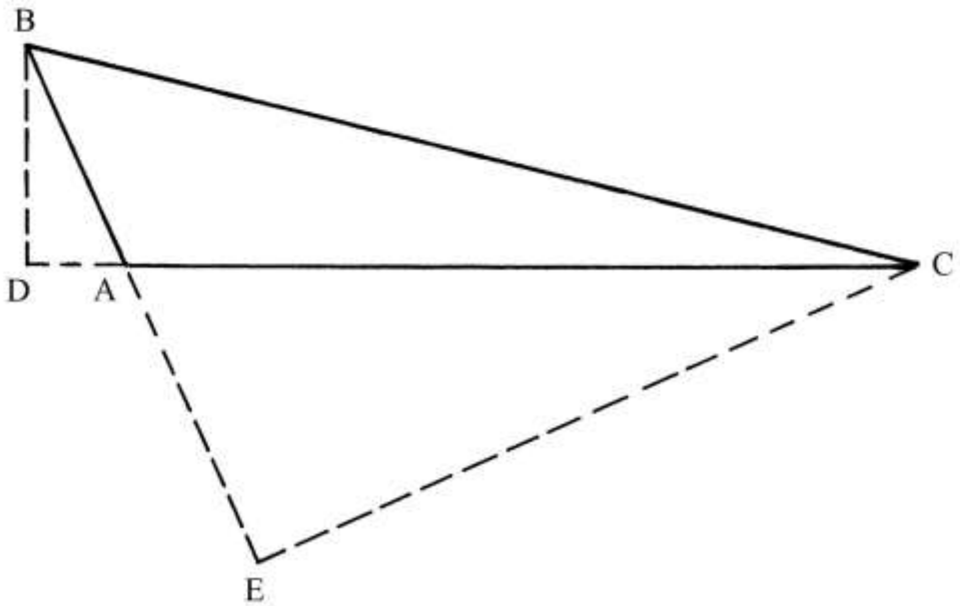
$BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2 * AC * AD$
$15^2 = 4^2 + 13^2 + 2 * 13 * 20/13$
$225 = 16 + 169 + 40$
$225 = 225$

La formula usata da Savasorda è corretta.

Nota: l'altezza BD cade all'esterno del triangolo, sul prolungamento del lato AC: per questo motivo, nella formula $BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2*AC*AD$ vi è il segno "+" davanti al *doppio prodotto* "2*AC*AD".

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Nella figura che segue (basata sul precedente triangolo ABC), il lato BA è prolungato e dal vertice C è tracciata la perpendicolare verso il prolungamento: le due linee si incontrano nel punto E.



CE è l'altezza del triangolo rispetto al lato BC: essa giace esternamente al poligono.

Le lunghezze dei lati del triangolo in *cubiti* sono le stesse del precedente: AB = 4, AC = 13 e BC = 15.

Ecco i passi della procedura usata da Savasorda:

* calcolare la differenza fra il quadrato della lunghezza del lato più lungo (BC) e la somma dei quadrati delle lunghezze degli altri due:
$BC^2 – (AB^2 + AC^2) = 15^2 – (4^2 + 13^2) = 225 – (16 + 169) = 225 – 185 = 40$;

* dividere per 2 la differenza appena calcolata: $40 : 2 = 20$;

* dividere questo ultimo quoziente per la lunghezza di un lato, ad esempio quella di AB:
$20/AB = 20/4 = 5$ cubiti, lunghezza di AE.

L'altezza CE è calcolata con il teorema di Pitagora applicato al triangolo rettangolo ACE:

$$CE = \sqrt{(AC^2 – AE^2)} = \sqrt{(13^2 – 5^2)} = \sqrt{(169 – 25)} = \sqrt{144} = 12 \text{ cubiti.}$$

L'area del triangolo ABC è data da:

$$A_{ABC} = (AB * CE)/2 = (4 * 12)/2 = 24 \text{ cubiti}^2.$$

L'altezza BD è data da:

$$BD = \sqrt{(AB^2 – AD^2)} = \sqrt{[4^2 – (20/13)^2]} = \sqrt{(16 – 400/169)} = \sqrt{[(2704 – 400)/169]} =$$
$$= \sqrt{(2304/169)} = 48/13 = (3 + 9/13) \text{ cubiti.}$$

Nota: la lunghezza di AD è stata determinata nella soluzione del precedente problema: AD = 20/13.

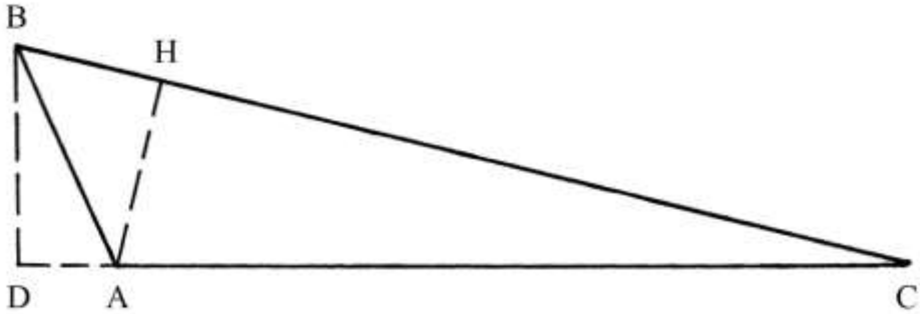
L'area del triangolo ABC è data da:

$$A_{ABC} = (AC * BD)/2 = (13 * 48/13)/2 = (13 * 48)/(2 * 13) = 24 \text{ cubiti}^2.$$

Il risultato è identico a quello ottenuto in precedenza con il semiprodotto di AB * CE.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Un ulteriore metodo per calcolare l'area del triangolo ABC richiede la tracciatura dell'altezza AH che è relativa al lato BC:



Applicando il teorema di Pitagora ai triangoli rettangoli BAH e CAH è possibile ricavare la lunghezza dell'altezza AH che è il cateto comune ai due triangoli rettangoli:

$$AH^2 = AB^2 – BH^2 = 4^2 – BH^2$$
$$AH^2 = AC^2 – HC^2 = 13^2 – HC^2$$

Fissando BH = x, le due espressioni precedenti divengono

$$AH^2 = 16 – x^2$$
$$AH^2 = 169 – (BC – BH)^2 \quad \rightarrow \quad AH^2 = 169 – (15 – x)^2$$

Eguagliando le due espressioni che forniscono AH^2 si ottiene:

$$16 – x^2 = 169 – (225 – 30 * x + x^2)$$
$$16 –x^2 = 169 – 225 + 30 * x – x^2$$

16 – 169 + 225 = 30 * x
72 = 30 * x
x = 72/30 = 2,4 cubiti = BH.

Ne consegue che:
AH = $\sqrt{(AB^2 – BH^2)} = \sqrt{(4^2 – 2,4^2)} = \sqrt{(16 – 5,76)} = \sqrt{10,24}$ = 3,2 cubiti.

Usando l'altezza AH, l'area del triangolo ABC è:
A_{ABC} = (AH * BC)/2 = (3,2 * 15)/2 = 24 cubiti^2.

Tutte le formule impiegate con le tre diverse altezze (BD, CE e AH) forniscono un identico risultato per l'area di ABC: 24 cubiti^2.

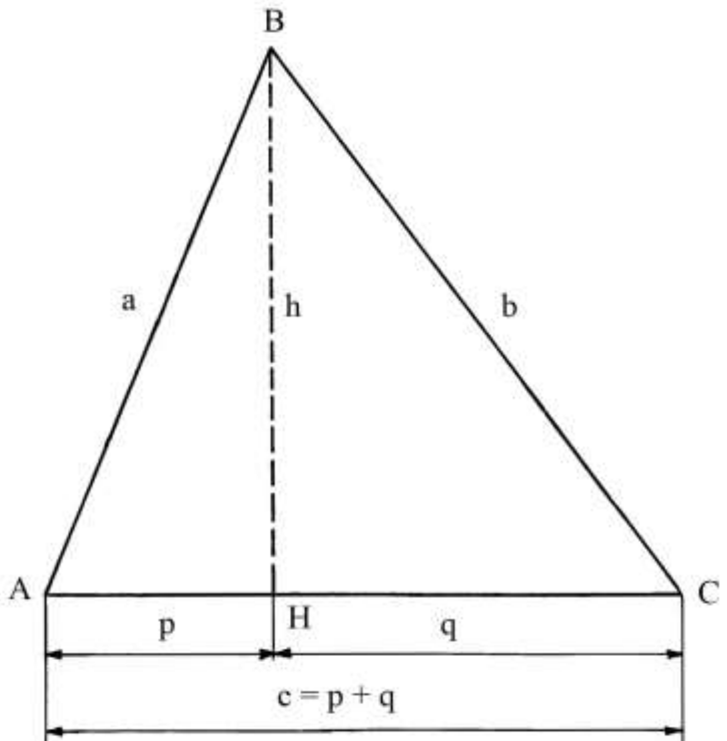
- APPROFONDIMENTO -

La formula $BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2*AC*AD$ usata da Savasorda per calcolare il quadrato della lunghezza del lato BC del triangolo ottusangolo ABC è un caso particolare dello studio dei rapporti metrici fra le lunghezze dei lati dei triangoli già compiuto dal matematico e ingegnere Erone di Alessandria (I secolo d.C.).

Riprendiamo in considerazione il triangolo scaleno 13-14-15:

Nella figura che segue i lati hanno le seguenti lunghezze:

- AB = a = 13
- BC = b = 15
- AC = c = 14.



Questo particolare triangolo fu utilizzato da

- Erone di Alessandria;
- Varrone;
- i Gromatici *Marcus Iunius Nipsus* (II secolo d.C.) e Epafrodito (II – III secolo);
- Boezio;
- forse Gerberto (Papa Silvestro II);
- Savasorda;
- Leonardo Fibonacci (*Practica Geometrie)*;
- Piero della Francesca, nel *Trattato d'abaco* (fogli 80 *recto*, 80 *verso*, 81 *recto*-a, 81 *verso*, 82 *recto*);
- Giorgio Valla (1447 – 1500) nel "*De expetendis et fugiendis rebus opus*", pubblicato a Venezia nel 1501;
- Niccolò Fontana, detto Tartaglia (circa 1499 – 1557).

La costanza nel tempo e presso numerosi e importanti geometri dell'uso di questo triangolo può essere spiegata con le sue interessanti proprietà geometriche (possesso di lunghezze dei lati e di almeno un'altezza e area espresse da numeri interi) che evitavano il ricorso a complesse operazioni quali l'estrazione di radici quadrate.

BH è l'altezza relativa alla base AC.

Il punto H divide il lato di base in due parti, *p* e *q*, che sono rispettivamente le *proiezioni* dei lati AB e BC:

$$AC = AH + HC \quad \leftrightarrow \quad c = p + q$$

Applicando il teorema di Pitagora ai due triangoli rettangoli ABH e BCH si ha:

$$BH^2 = AB^2 - AH^2$$
$$h^2 = a^2 - p^2$$

$$BH^2 = BC^2 - HC^2$$
$$h^2 = b^2 - q^2$$

Le due formule si equivalgono:

$$a^2 - p^2 = b^2 - q^2$$

Ma $p = c - q$ e sostituendo

$$a^2 - (c - q)^2 = b^2 - q^2$$
$$a^2 - (c^2 - 2*c*q - q^2) = b^2 - q^2$$
$$a^2 - c^2 + 2*c*q - q^2 = b^2 - q^2$$
$$2*c*q = b^2 + c^2 - a^2$$

Ne consegue:

$q = (b^2 + c^2 - a^2)/(2 * c)$, formula che può essere trasformata in

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2*c*q$$

[il segno davanti al doppio prodotto 2*c*q è '*meno*' perché l'altezza BH cade all'interno del triangolo].

Quest'ultima è la formula impiegata da Erone per risolvere il problema.

Sostituendo nella formula precedente i valori noti si ha:

$$q = (15^2 + 14^2 - 13^2)/(2 * 14) = (225 + 196 - 169)/28 = 252/28 = 9.$$

La lunghezza di *p* è:

$$p = c - q = 14 - 9 = 5 .$$

La formula di Erone usata per determinare *p* è la seguente:

$$p = (a^2 + c^2 – b^2)/(2 * c) = (13^2 + 14^2 – 15^2)/(2 * 14) = 140/28 = 5.$$

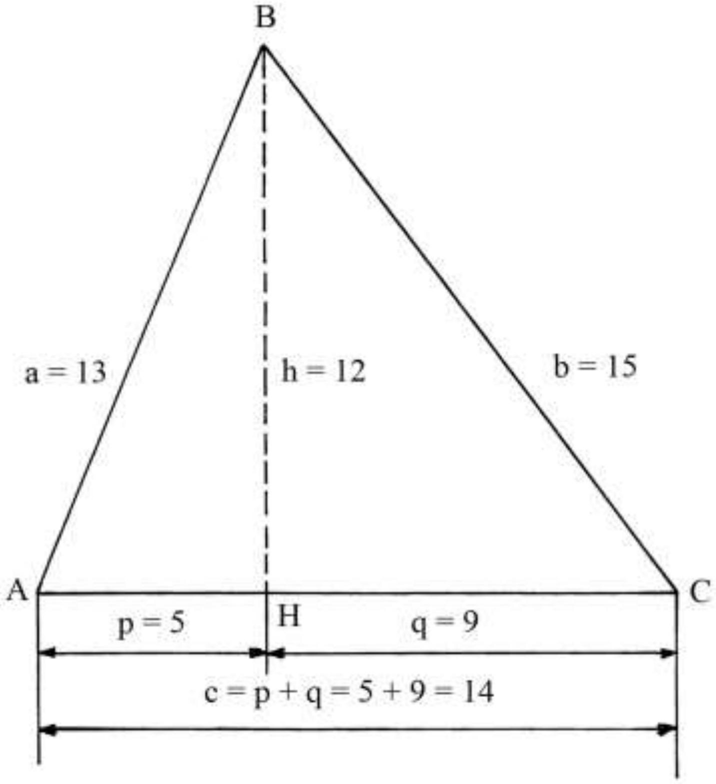
L'altezza BH = h è lunga:

$$BH^2 = AB^2 – AH^2.$$

$$BH = \sqrt{(AB^2 – AH^2)} = \sqrt{(13^2 – 5^2)} = \sqrt{(169 – 25)} = \sqrt{144} = 12,$$ oppure:

$$BH^2 = BC^2 – HC^2$$

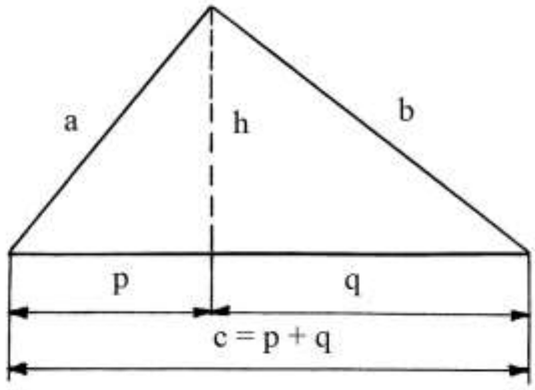
$$BH = \sqrt{(BC^2 – HC^2)} = \sqrt{(15^2 – 9^2)} = \sqrt{(225 – 81)} = \sqrt{144} = 12.$$



L'origine delle due formule di Erone

Come abbiamo visto, il metodo di Erone per calcolare l'area di un triangolo di cui sono note le lunghezze dei lati segue due strade alternative:

1. Determinare la lunghezza della proiezione di un lato obliquo sulla base (p o q). Se essa è un numero naturale (e cioè intero e positivo), Erone calcola l'altezza *h* relativa alla base *c* applicando il teorema di Pitagora:



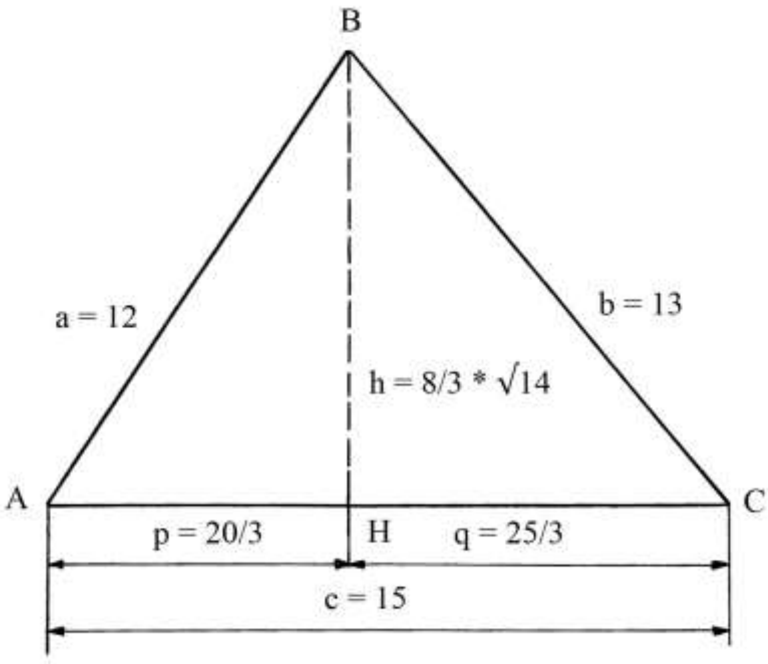
$h = \sqrt{(a^2 - p^2)}$ e
$h = \sqrt{(b^2 - q^2)}$.

Nel caso che *h* sia rappresentato da un numero naturale, Erone usa la tradizionale formula per calcolare l'area di un triangolo:

$A = (c * h)/2$.

2. Nel caso che le proiezioni *p* e *q* e l'altezza *h* abbiano lunghezze espresse da numeri non razionali, Erone propone l'uso della formula già incontrata.

Il triangolo 12-13-15 è usato da Erone per dimostrare la necessità di impiego di questa ultima formula.



Le lunghezze di *p*, *q* e *h* sono rappresentate da numeri periodici o da numeri irrazionali, per cui è necessario impiegare la formula già impiegata:

$q = (b^2 + c^2 - a^2)/(2 * c) = (13^2 + 15^2 - 12^2)/(2 * 15) = (169 + 225 - 144)/39 =$
$= 25/3$

$p = c – q = 15 – 25/3 = 20/3$.

$h^2 = a^2 – p^2 = 12^2 – (20/3)^2 = 144 – 400/9 = (1296 – 400)/9 = 896/9$ e
$h = \sqrt{(896/9)} = 8/3 * \sqrt{14}$.

L'area di ABC è calcolata con la nota formula che impiega il *perimetro, 2*m: m* è il *semiperimetro*:

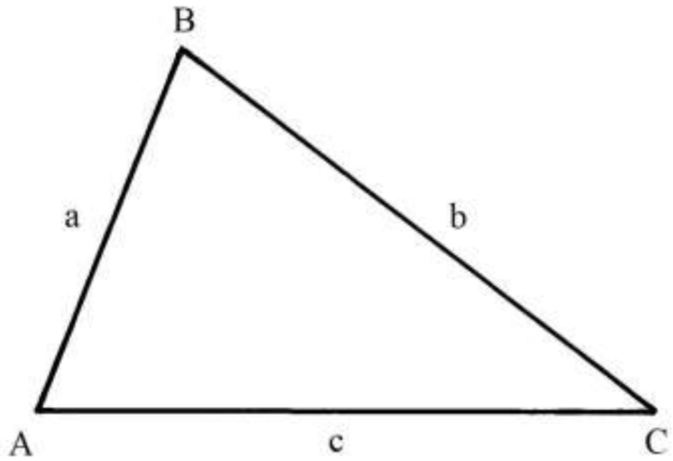
$2*m = a + b + c = 12 + 13 + 15 = 40$ e
$m = 40/2 = 20$.

$A_{ABC} = \sqrt{[m * (m – a) * (m – b) * (m – c)]} = \sqrt{[20 * (20 – 12) * (20 – 13) * (20 – 15)]} =$
$= \sqrt{(20 * 8 * 7 * 5)} = \sqrt{5600} = 20 * \sqrt{14}$.

- APPROFONDIMENTO -

La formula per l'area di un triangolo

Si deve a Erone di Alessandria una formula per calcolare l'area A di un qualsiasi triangolo di cui sono note le lunghezze dei tre lati, a, b e c, e quindi la lunghezza del *semiperimetro* m:



Infatti: $a + b + c$ = perimetro ABC = $2 * m$.
La formula è la seguente:

$A_{ABC} = \sqrt{[m * (m – a) * (m – b) * (m – c)]} =$
$= \sqrt{\{(a + b – c)/2 * [(a + b + c)/2 – a] * [(a + b + c)/2 – b] * [a + b + c)/2 – c]\}} =$
$= \sqrt{[(a + b – c)/2 * (b + c – a)/2 * (a + c – b)/2 * (a + b – c)/2]} =$
$= \{\sqrt{[(a + b + c) * (b + c – a) * (a + c – b) * (a + b – c)]}\}/4$.

La formula calcola l'area di un qualsiasi triangolo senza che occorra misurare l'altezza relativa a un lato.

Nota: i moderni storici della matematica attribuiscono a Archimede il merito dell'invenzione o scoperta di questa importante formula.

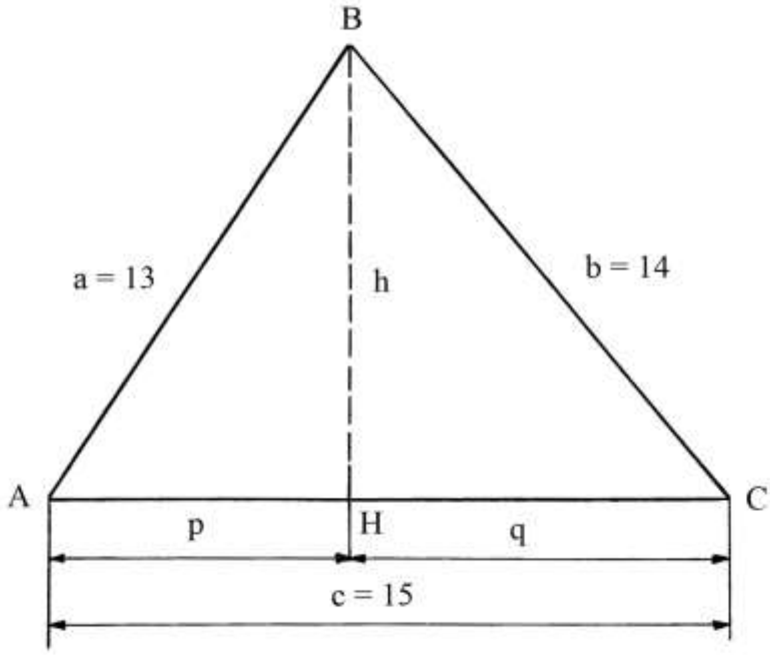
- -

Come già visto in precedenza, tracciando l'altezza relativa al lato lungo 14 (che è quello disposto *orizzontalmente*), il triangolo ABC viene diviso in due triangoli rettangoli, i quali hanno lati lunghi in proporzione a due *terne pitagoriche*:

- 5 – 12 – 13 [$5^2 + 12^2 = 13^2$];
- 9 – 12 – 13 [$9^2 + 12^2 = 13^2$].

Modificando la disposizione dei lati, la situazione cambia.

Ponendo il lato lungo 15 quale base orizzontale, il segmento *p* è lungo:



$p = (a^2 + c^2 - b^2)/(2 * c) = (13^2 + 15^2 - 14^2)/(2 * 15) = (169 + 225 - 196)/30 =$
$= 198/30 = 6,6$.

Il segmento *q* è lungo:

$q = c - p = 15 - 6,6 = 8,4$.

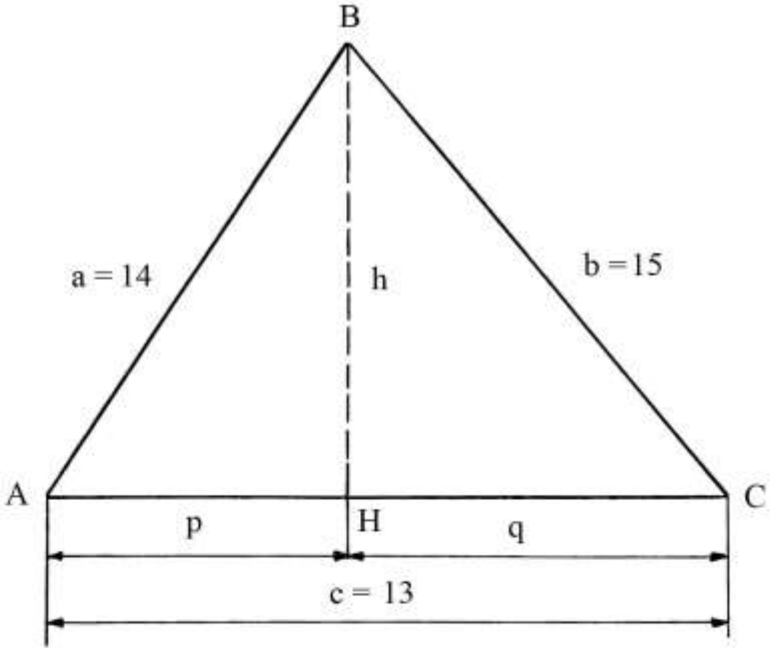
L'altezza BH è lunga:

$BH^2 = AB^2 - AH^2$ da cui

$BH = \sqrt{(13^2 - 6,6^2)} = \sqrt{(169 - 43,56)} = \sqrt{125,44} = 11,2$.

L'altezza BH divide ABC in due triangoli rettangoli: le lunghezze dei loro lati *non* formano alcuna terna pitagorica.

Infine, il terzo caso è quello del triangolo che ha la base AC lunga 13:



Il segmento *p* è lungo:

$p = (a^2 + c^2 – b^2)/(2 * c) = (14^2 + 13^2 – 15^2)/(2 * 13) = (196 + 169 – 225)/26 =$
$= 140/26 = 70/13 \approx 5,38$

Il segmento *q* è lungo:

$q = c – p = 13 – 70/13 = (169 – 70)/13\ 99/13 \approx 7,61.$

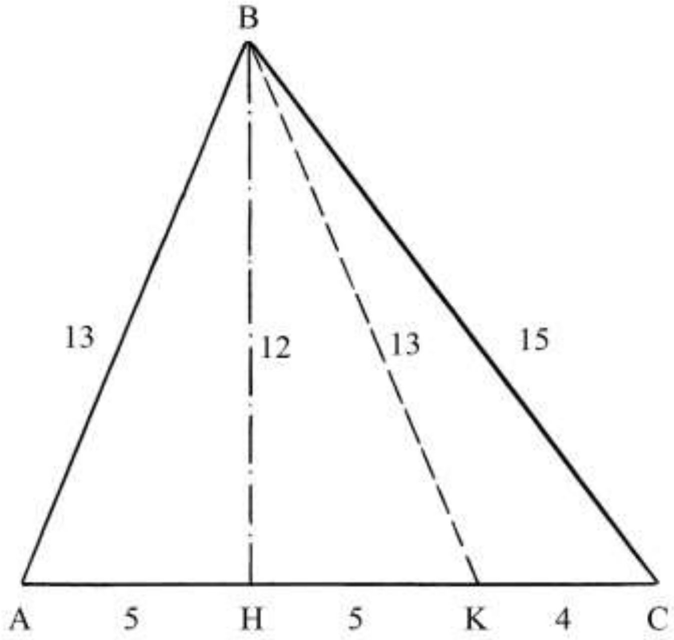
L'altezza BH è:

BH = √(AB2 – AH2) = √[142 – (70/13)2] = √(196 – 4900/169) =
= √[(33124 – 4900)/169] = √(28224/169) = 168/13 ≈ 12,92.

Anche in questo caso le lunghezze dei triangoli rettangoli generati dall'altezza BH *non* formano terne pitagoriche.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

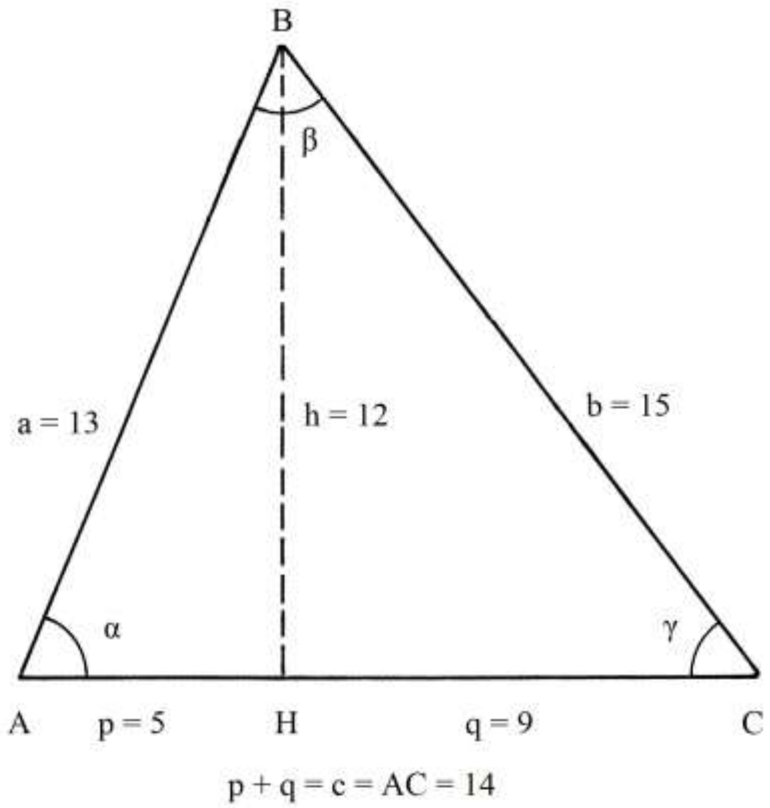
Il triangolo 13 – 14 – 15, con la base AC lunga 14, può essere scomposto in un triangolo isoscele ABK e in un triangolo scaleno KBC:



- APPROFONDIMENTO -

<u>Il teorema del coseno</u>

La figura che segue riproduce il triangolo 13-14-15 con l'indicazione dei tre angoli interni: α (nel vertice A), β (in B) e γ (in C).



Per calcolare la lunghezza della proiezione *p* di AB sul lato orizzontale utilizziamo la formula già impiegata:

$$p = (a^2 + c^2 – b^2)/(2 * c).$$

.

La formula è trasformata come segue:

$a^2 + c^2 – b^2 = 2 * c * p$ [oppure $AB^2 + AC^2 – BC^2 = 2 * AC * AH$]

$a^2 + c^2 – 2 * c * p = b^2$ [oppure $AB^2 + AC^2 – 2 * AC * AH = BC^2$].

La formula può essere spiegata nei seguenti termini: il quadrato di un lato (BC = *b*) è uguale alla somma dei quadrati degli altri due lati (AB = *a* e AC = *c*) *meno* il doppio prodotto di uno dei due ultimi lati (*a* oppure *c*) per la proiezione del lato (*p* oppure *q*) sulla base AC (oppure *più* il doppio prodotto nel caso che l'altezza cada fuori dal triangolo, come accade nel caso del triangolo ottusangolo visto in precedenza): $b^2 + c^2 – a^2 = 2 * c * q$.

La proiezione coinvolta nella formula – *p* oppure *q* – è quella *opposta* al lato del triangolo ABC della cui lunghezza si vuole calcolare il quadrato.

Questa regola è nota anche come *teorema di Carnot* (dal nome del matematico francese Lazare Carnot, 1753 – 1823). Il teorema si deve però al matematico e astronomo persiano Al-Kashi (1380 circa – 1429).

È conosciuto come *teorema del coseno*.

Le lunghezze dei segmenti AH e HC possono essere calcolate con la trigonometria.

I triangoli ABH e BHC sono rettangoli.

Il cateto AH è:

$$p = AH = AB * \cos \alpha = a * \cos \alpha$$

e il cateto HC vale

$$q = HC = BC * \cos \gamma = b * \cos \gamma.$$

Sostituendo nelle formule precedenti a *p* il valore appena calcolato si ha:

$$a^2 + c^2 – 2 * c * \cos \alpha = b^2.$$

Un principio generale

Da tutti gli esempi precedenti, Savasorda ricavò una serie di regole di carattere generale per i triangoli.

Se in un triangolo, il quadrato del lato più lungo è uguale alla somma dei quadrati degli altri due, il triangolo è *rettangolo*: è il caso del triangolo 6 – 8 – 10:

$$6^2 + 8^2 = 10^2 \rightarrow 36 + 64 = 100 \rightarrow 100 = 100 .$$

Se il quadrato del lato più lungo è maggiore della somma dei quadrati degli altri due, il triangolo è *ottusangolo*: è il caso del triangolo 4 – 13 – 15 perché

$$15^2 > 4^2 + 13^2 \rightarrow 225 > 16 + 169 \rightarrow 225 > 185 .$$

Infine, se il quadrato del lato più lungo è minore della somma dei quadrati degli altri due, il triangolo è *acutangolo* come è il caso di un triangolo 15 – 15 – 18 perché

$$18^2 < 15^2 + 15^2 \rightarrow 324 < 225 + 225 \rightarrow 324 < 450$$

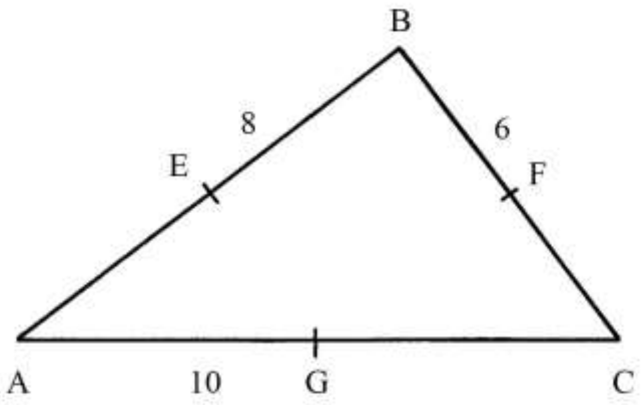
oppure di un triangolo equilatero con lati lunghi, ad esempio, 15, perché

$$15^2 < 15^2 + 15^2 \rightarrow 225 < 225 + 225 \rightarrow 225 < 450 .$$

La formula di Erone

A conclusione della parte relativa all'analisi dei triangoli, per calcolare l'area di un triangolo qualsiasi Savasorda introdusse la *formula di Erone*, pur senza citarla espressamente e senza indicare il nome del suo autore (Erone di Alessandria o forse Archimede).

L'esempio fornito nel testo è quello di un triangolo scaleno (che di fatto è un triangolo rettangolo con i lati di lunghezza multipla di un fattore 2 della terna primitiva 3 – 4 – 5):



E, F e G sono i punti medi dei tre lati.

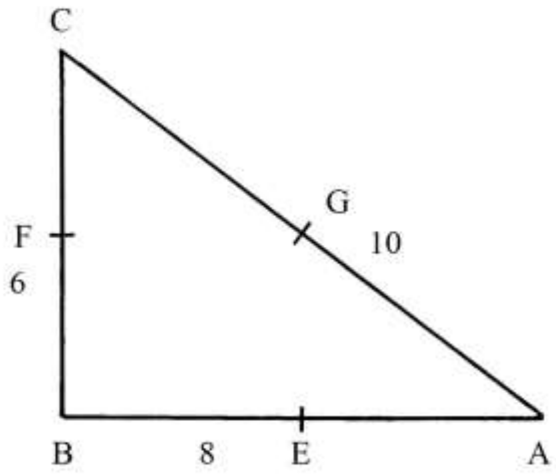
Ecco il metodo usato da Savasorda:

* sommare le lunghezze dei tre lati (e cioè calcolare il perimetro 2*p:
  2*p = AB + BC + AC = 8 + 6 + 10 = 24 cubiti;
* dividere il perimetro per 2: 2*p/2 = 24/2 = 12 = p;
* moltiplicare il valore di *p* per le *differenze* – Savasorda le chiama *eccedenze* – fra *p* stesso e le lunghezze dei tre lati:
  p * (p – AB) * (p – BC) * (p – AC) = 12 * (12 – 8) * (12 – 6) * (12 – 10) =
  = 12 * 4 * 6 * 2 = 576, quadrato dell'area di ABC;
* estrarre la radice quadrata di 576: $\sqrt{576} = 24$ cubiti^2, l'area del triangolo ABC.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

In questo caso sarebbe stato sufficiente moltiplicare le lunghezze dei due cateti (AB e BC) e dividere il risultato per 2:

$A_{ABC} = (AB * BC)/2 = (8 * 6)/2 = 24$ cubiti^2.



PARTE TERZA

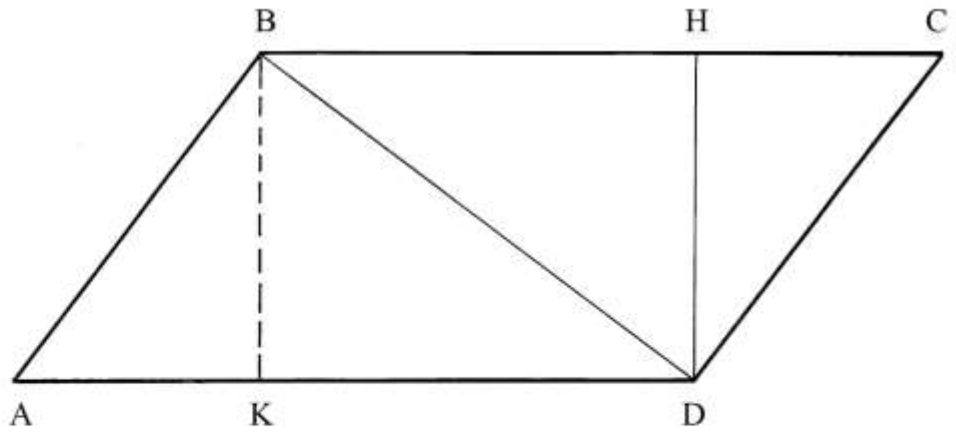
MISURA DEI QUADRILATERI

(con lati disuguali e senza tutti gli angoli retti)

Questa terza parte del Capitolo II si occupa all'analisi degli altri quadrilateri.

Parallelogrammi

Il parallelogramma ABCD ha i lati paralleli che sono lunghi AD = BC = 25 e AB = DC = 15 e la diagonale BD è lunga 20 cubiti:



BK e DH sono due altezze.

Il triangolo ABD è rettangolo perché le lunghezze dei suoi lati formano una terna derivata: 15 – 20 – 25 → 5 * [3 – 4 – 5].

L'area di ABD è:

$A_{ABD} = (AB * BD)/2 = (15 * 20)/2 = 150$ cubiti^2.

L'altezza BK è ricavabile dalla formula inversa:

$BK = 2 * A_{ABD}/AD = (2 * 150)/25 = 12$ cubiti.

La diagonale BD divide il parallelogramma ABCD in due triangoli (ABD e BCD) di uguali dimensioni e superfici: entrambi sono *rettangoli*.

L'area del parallelogramma è data dalla somma delle aree dei due triangoli:

$\text{Area}_{ABCD} = \text{Area}_{ABD} + \text{Area}_{BCD} = 2 * \text{Area}_{ABD} = 2 * 150 = 300$ cubiti^2.

L'area del parallelogramma è pure ricavabile dal prodotto della base AD per l'altezza (BK o HD):

$\text{Area}_{ABCD} = AD * BK = 25 * 12 = 300$ cubiti^2.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Savasorda concluse il paragrafo criticando il metodo usato nelle città della Francia meridionale (da lui chiamate *città di Sarfat*) per calcolare l'area del parallelogramma, metodo errato strettamente imparentato a quello dell'antichissima *formula degli agrimensori*.

Con questo metodo l'area è ottenuta dal prodotto delle semisomme dei lati opposti:

$A_{ABCD} = (AD + BC)/2 * (AB + CD)/2 = (25 + 25)/2 * (15 + 15)/2 =$

$= 25 * 15 = 375$ cubiti^2.

L'errore *per eccesso* prodotto da questo metodo è significativo:

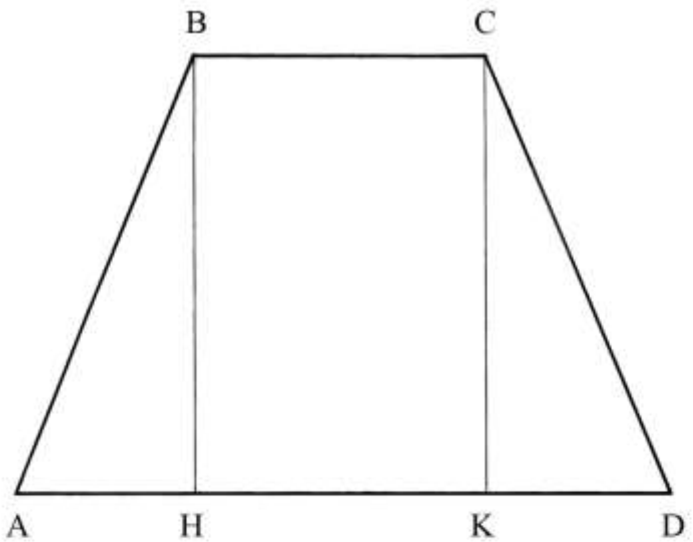
errore = (area errata – area corretta)/area corretta = (375 – 300)/300 = 75/300 = 25%.

CLASSE PRIMA

A) Forma 1.ª

Trapezio isoscele

Il primo esempio presentato da Savasorda è un trapezio isoscele con le due basi parallele e di differente lunghezza: AD = 18 e BC = 8 cubiti:



I lati obliqui AB e CD sono lunghi 13 cubiti.

Savasorda chiamò la base superiore BC *cap* = *capo*, *testa* e la base maggiore AD *base*.

BH e CK sono le due altezze di uguali dimensioni e sono incognite.

La lunghezza dei segmenti AH e KD è:

AH + KD = AD – BC = 18 – 8 = 10 cubiti.

La lunghezza di AH è:

AH = KD = (AH + KD)/2 = 10/2 = 5 cubiti.

ABH e KCD sono due triangoli rettangoli di uguali dimensioni.

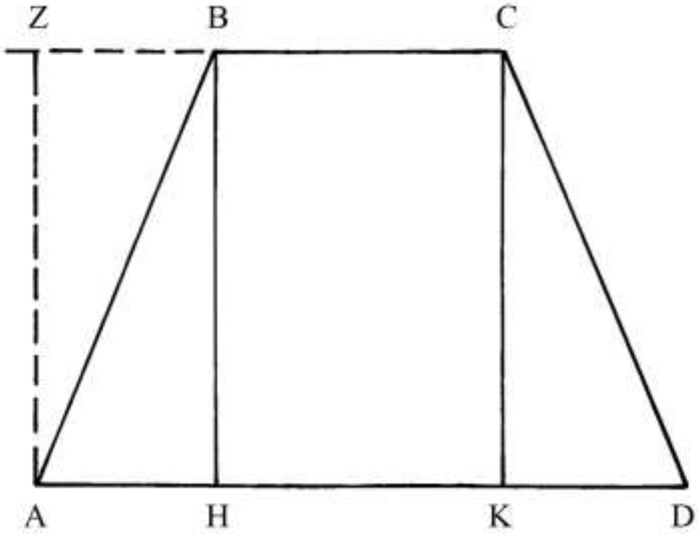
Con il teorema di Pitagora (peraltro non espressamente citato da Savasorda) applicato al triangolo rettangolo ABH è facile calcolare la lunghezza dell'altezza BH che ne è il cateto maggiore:

$BH = \sqrt{(AB^2 – AH^2)} = \sqrt{(13^2 – 5^2)} = \sqrt{(169 – 25)} = \sqrt{144} = 12$ cubiti.

L'area del trapezio è correttamente calcolata da Savasorda sommando l'area del rettangolo HBCK e del rettangolo che ha dimensioni AH * BH:

$Area_{ABCD} = BH * BC + AH * BH = BH * (BC + AH) = 12 * (8 + 5) =$
$= 12 * 13 = 156$ $cubiti^2$.

Il rettangolo AZCK ha la stessa superficie del trapezio ABCD.

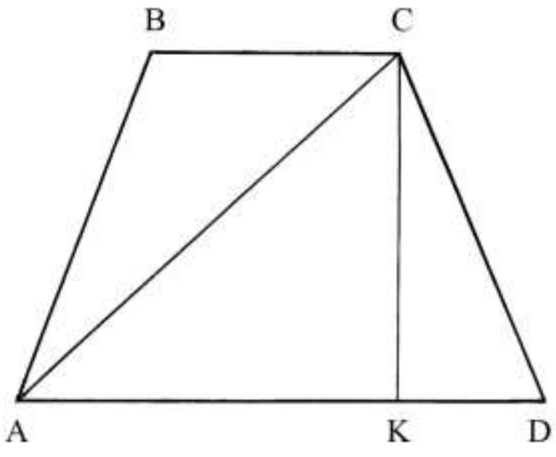


Attualmente per calcolare l'area di un trapezio è usata una diversa formula, anch'essa corretta: moltiplicare la semisomma delle due basi per l'altezza:

$A_{ABCD} = (AD + BC)/2 * BH = (18 + 8)/2 * 12 = 26/2 * 12 = 13 * 12 =$
$= 156$ cubiti^2.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Un successivo problema basato sul precedente trapezio isoscele chiede di calcolare la lunghezza della diagonale AC che è l'ipotenusa del triangolo rettangolo ACK:



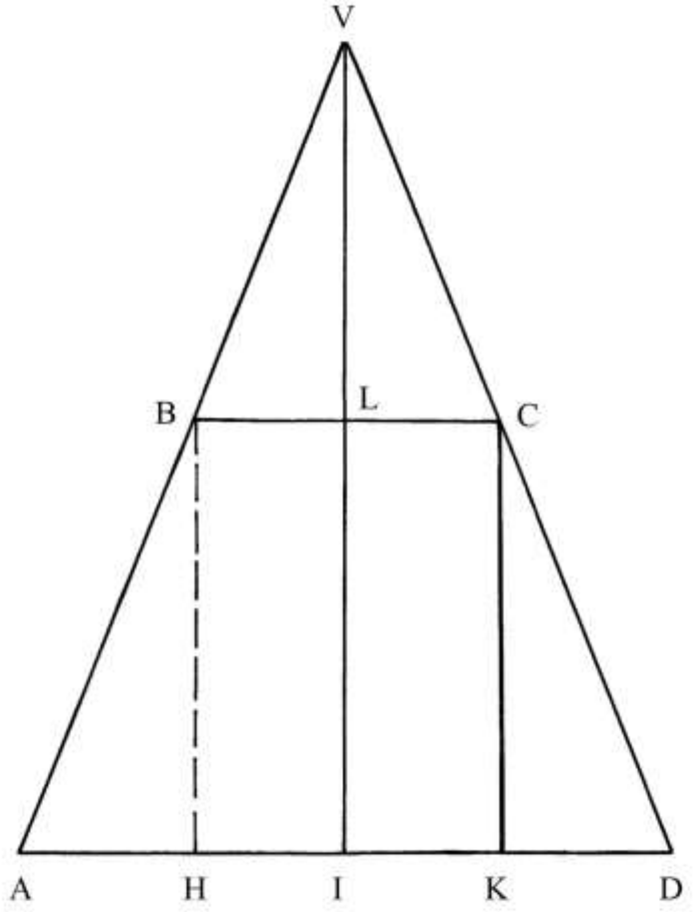
Il cateto AK è lungo: AK = AD – KD = 18 – 5 = 13 cubiti.
La lunghezza dell'ipotenusa AC è:

$AC = \sqrt{(AK^2 + CK^2)} = \sqrt{(13^2 + 12^2)} = \sqrt{(169 + 144)} = \sqrt{313} \approx 17{,}69$ cubiti.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

La figura che segue mostra il trapezio isoscele ABCD che deriva dal taglio di un triangolo isoscele effettuato con una retta passante per i vertici B e C.

La base minore è lunga 8 [cubiti], la differenza fra le due basi è 10 e i lati obliqui AB e CD sono lunghi 13.



Per ricostruire il triangolo a partire dal trapezio *noto*, prolungare verso l'alto i due lati obliqui (AB e CD): essi si incontrano nel vertice V.

Da questo punto abbassare l'altezza VI: essa interseca la base BC nel punto medio L.

Il trapezio ABCD è definito da Savasorda con l'espressione *capo tagliato*.

Per calcolare la lunghezza dei segmenti BV = CV, Savasorda propose la seguente procedura:

* moltiplicare la lunghezza della base minore per quella del lato obliquo: BC * AB = 8 * 13 = 104;
* calcolare la differenza fra le lunghezze delle due basi: AD – BC = 18 – 8 = 10;
* calcolare i 4/5 della lunghezza del lato obliquo BV: 4/5 * AB = 4/5 * 13 = = 10,4 cubiti = BV.

Savasorda espresse questo ultimo risultato nella forma in parte frazionaria: (10 + 2/5).

\- APPROFONDIMENTO -

Savasorda non calcolò l'area del trapezio. Essa è data da:

A_{ABCD} = (AD + BC)/2 * BH.

L'altezza BH (= LI = CK) è lunga:

$BH = \sqrt{(AB^2 – AH^2)}$.

La lunghezza di AH è:

$AH = KD = (AD – HK)/2 = (AD – BC)/2 = (18 – 8)/2 = 10/2 = 5$.

Quindi BH è:

$BH = \sqrt{(13^2 – 5^2)} = \sqrt{(169 – 25)} = \sqrt{144} = 12$.

I triangoli BVL e ABH sono simili:

AB : AH = BV : BL da cui

BV = (AB * BL)/AH = (13 * 4)/5 = 52/4 = 10,4 cubiti: il risultato offerto da Savasorda è corretto.

La lunghezza di VL è ricavabile con lo stesso metodo:

VL : BH = BL : AH da cui

VL = (BH * BL)/AH = (12 * 4)/5 = 48/5 = 9,6.

L'altezza totale VI è:

VI = LI + VL = 12 + 9,6 = 21,6.

Infine, la lunghezza di AV è:

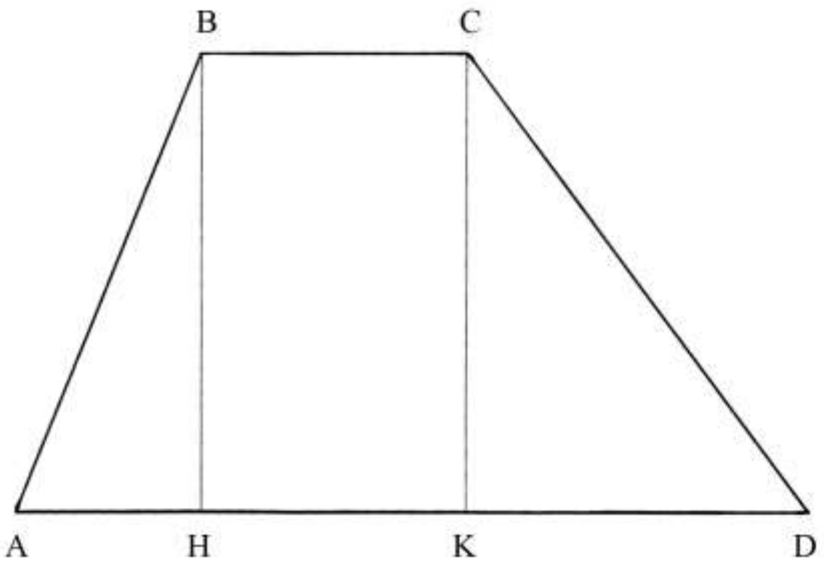
AV = AB + BV = 13 + 10,4 = 23,4.

- -

B) Forma 2.ª

Trapezio scaleno

ABCD è un trapezio scaleno con i lati obliqui di differente lunghezza: AB = 13 cubiti e CD = 15 cubiti.



È nota soltanto la differenza fra le lunghezze delle due basi: (AD – BC) = 14 cubiti.

Ecco i passi della procedura usata da Savasorda per determinare le altezze:

* calcolare i quadrati delle lunghezze dei due lati obliqui e la loro differenza:

  $CD^2 – AB^2 = 15^2 – 13^2 = 225 – 169 = 56$;

* dividere la differenza 56 per la differenza fra le lunghezze delle basi: 56 : 14 = 4;
* dividere questo quoziente per 2: 4 : 2 = 2;
* sommare questo ultimo quoziente con metà della differenza fra le lunghezze delle basi:

  2 + (14/2) = 2 + 7 = 9 cubiti, che è la lunghezza di KD;

*	sottrarre il quoziente 2 dalla metà della differenza delle lunghezze delle basi:

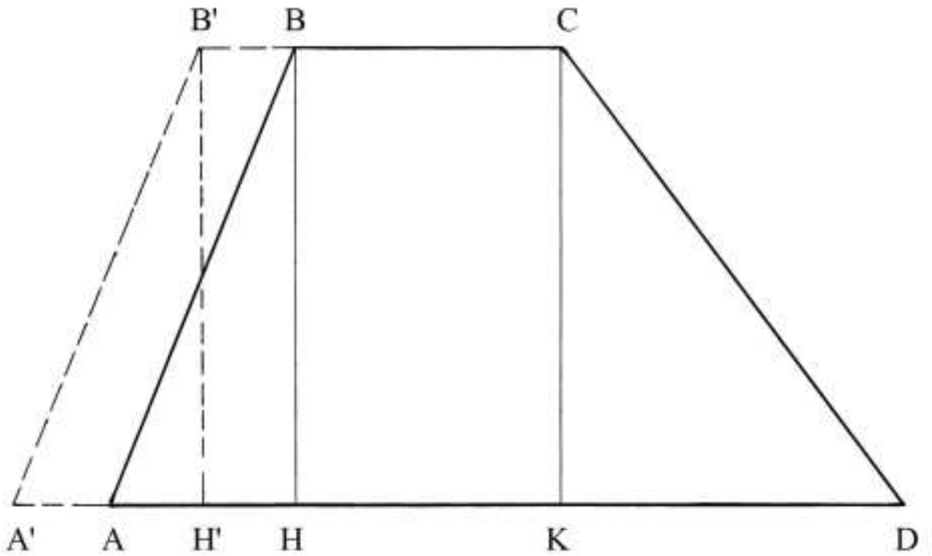
$$(14/2) – 2 = 7 – 2 = 5 \text{ cubiti, che è la lunghezza di AH.}$$

Per determinare l'altezza CK è sufficiente applicare il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo CKD:

$$CK = \sqrt{(CD^2 – KD^2)} = \sqrt{(15^2 – 9^2)} = \sqrt{(225 – 81)} = \sqrt{144} = 12 \text{ cubiti.}$$

Con i dati a disposizione non è possibile ricavare le lunghezze delle due basi e quindi calcolare l'area del trapezio. Savasorda non fornisce alcuna informazione su questo argomento. Una conferma della difficoltà è fornita dall'analisi della figura che segue.

Il trapezio A'B'CD ha lati obliqui delle stesse dimensioni di quello ABCD e la stessa altezza: B'H' = BH = CK:



I segmenti B'B e A'A hanno uguale lunghezza.

Avendo aggiunto alle due basi lunghezze uguali, la differenza fra quelle delle basi non è cambiata:

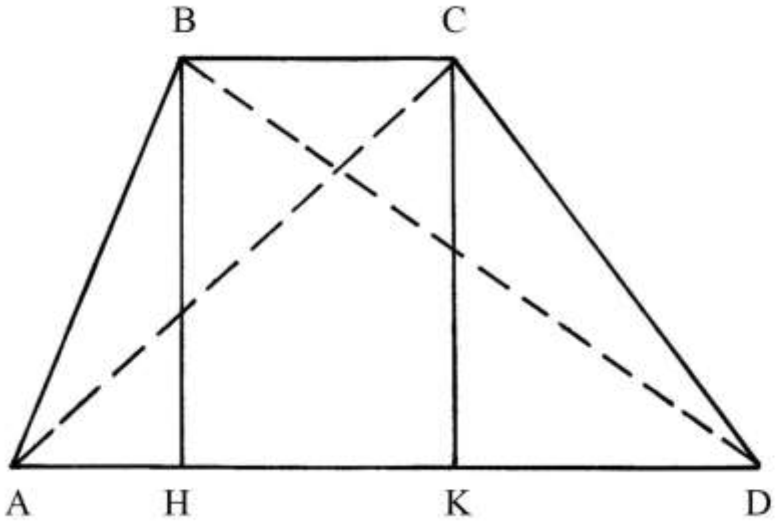
A'D – B'C = (A'A + AD) – (B'B + BC) = A'A + AD – B'B – BC = AD – BC = 14 cubiti.

Il problema del calcolo delle lunghezze delle basi e dell'area non è solubile neanche in questo caso.

Un altro trapezio scaleno

Il trapezio ABCD è scaleno. Sono note l'altezza BH = 12 cubiti e la semisomma delle lunghezze delle basi, in cubiti:

semisomma delle basi = (AD + BC)/2 = 30 cubiti.



L'area del trapezio è facilmente calcolabile con i dati noti:

$$A_{ABCD} = (AD + BC)/2 * BH = 30 * 12 = 360 \text{ cubiti}^2.$$

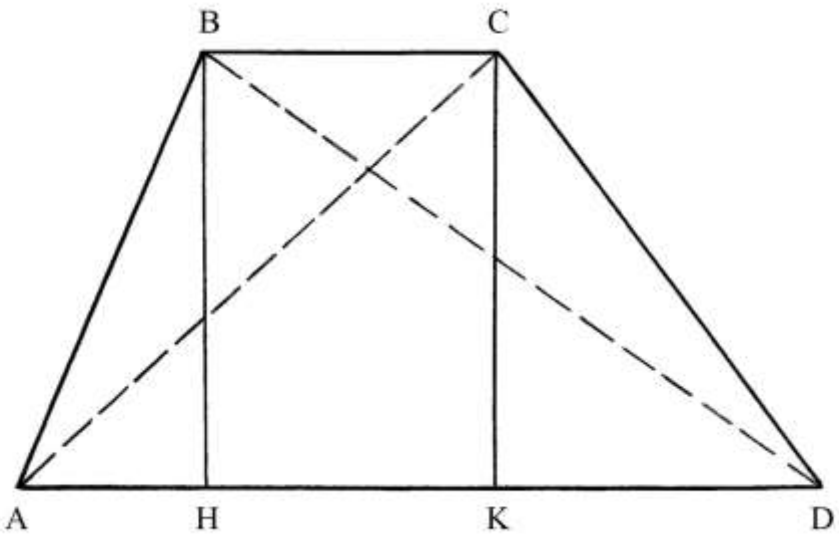
Nota: *a p. 65, § 83 del testo di Savasorda, l'area è calcolata dall'espressione "12 * 15" invece della corretta "30 * 12".*

<u>Un altro trapezio scaleno</u>

Il trapezio scaleno della figura che segue ha le seguenti dimensioni:

* BC = 8;
* AH = 5;
* HK = 8;
* KD = 9;
* BH = CK = 12 cubiti.

La base maggiore AD è lunga 22 cubiti e quella minore BC 8 cubiti.



Ne consegue che AK = AH + HK = 5 + 8 = 13 cubiti.

La diagonale AC è lunga:

$$AC = \sqrt{(AK^2 + CK^2)} = \sqrt{(13^2 + 12^2)} = \sqrt{(169 + 144)} = \sqrt{313} \approx 17,69 \text{ cubiti.}$$

Infine, la diagonale BD è lunga:

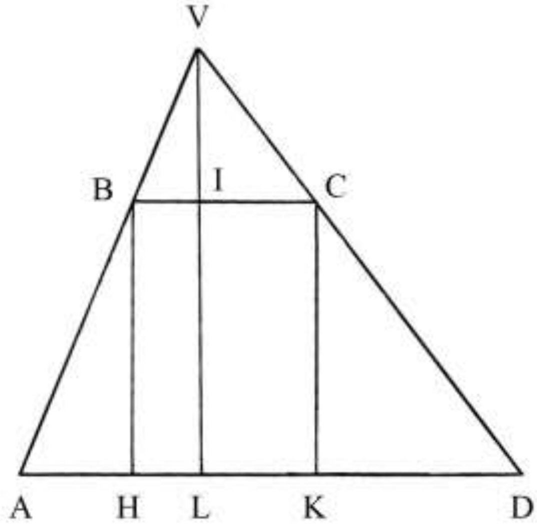
$$BD = \sqrt{[BH^2 + (HK + KD)^2]} = \sqrt{[12^2 + (8 + 9)^2]} = \sqrt{(144 + 289)} = \sqrt{433} \approx$$
$$\approx 20,80 \text{ cubiti.}$$

Triangolo scaleno

Questo nuovo problema utilizza la figura descritta nel precedente paragrafo. Il trapezio scaleno ABCD è originato dal taglio effettuato su di un triangolo scaleno AVD lungo il segmento BC parallelo alla base AD.

Le dimensioni del trapezio sono uguali a quelle del precedente problema.

Il triangolo AVD è ricostruito prolungando verso l'altro dei lati AB e CD: il problema chiede le dimensioni dei lati del triangolo.



Savasorda usò una procedura per calcolare le lunghezze dei lati AV e DV e dell'altezza VL.

Ecco i passi:

* calcolare la differenza fra le lunghezze delle due basi: AD – BC = 22 – 8 = 14;
* dividere la lunghezza del segmento AH (5) per la differenza fra le lunghezze delle due basi del trapezio, 14: 5/14 = (4/14 + 1/14) = [2/7 + (1/2 * 1/7)] [Savasorda usò questa curiosa notazione in parte frazionaria];
* calcolare i 5/14 della lunghezza della base maggiore AD: 22 * 5/14 = (7 + 6/7) = (8 – 1/7), lunghezza in cubiti del segmento AL;
* il segmento HL è lungo: HL = AL – AH = (8 – 1/7) – 5 = (3 – 1/7);
* moltiplicare le lunghezze di HL e di AK (che come visto nel precedente paragrafo è di 13 cubiti): (3 – 1/7) * 13 = (39 – 13/7) = (37 + 1/7);
* dividere questo ultimo risultato per la lunghezza di AH: (37 + 1/7)/5 = (37 * 7 +1)/5 = = [(259 + 1)/7]/5 = 260/35 = 52/7 = (7 + 2/7) cubiti, lunghezza in cubiti di VB.

Per determinare la lunghezza di VC, Savasorda propose una procedura simile a quella appena descritta per VB:

* calcolare la lunghezza di LD: LD = AD – AL = 22 – (8 – 1/7) = (14 + 1/7) cubiti;

* determinare la lunghezza di LK: LK = LD – KD = (14 + 1/7) – 9 = (5 + 1/7) cubiti;
* moltiplicare questo ultimo risultato per la lunghezza di CD (15 cubiti) e dividere per la lunghezza di KD (9 cubiti): (5 + 1/7) * 15/9 = 36/7 * 15/9 = (8 + 4/7) cubiti, lunghezza di VC.

Per ricavare l'altezza VI, moltiplicare la lunghezza di HL per l'altezza BH e dividere il risultato per la lunghezza di AH:

VI = (HL * BH)/AH = (3 – 1/7) * 12/5 = (20/7 * 12)/5 = 48/7 = (7 – 1/7) cubiti.

A sua volta, l'altezza VL è data da:

VL = VI + IL = VI + BH = (7 – 1/7) + 12 = (19 – 1/7) = (18 + 6/7) cubiti.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

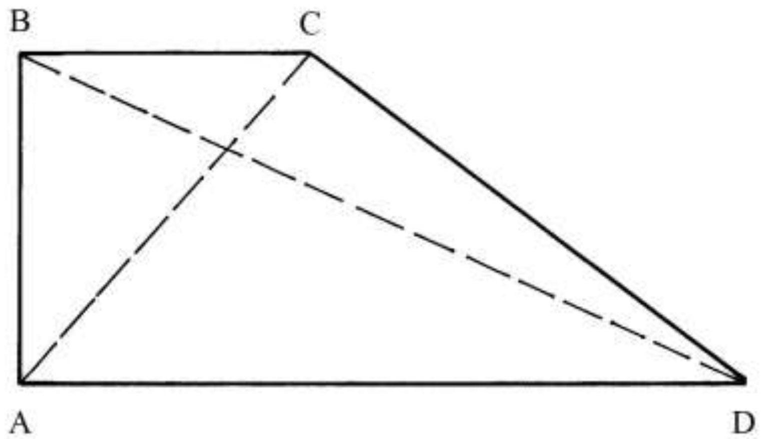
Il problema può anche essere risolto con l'applicazione del principio dei *triangoli simili* a due coppie di triangoli rettangoli:

* ABH e AVL;
* CKD e VLD.

C) Forma 3.ª

Trapezio rettangolo

ABCD è un trapezio rettangolo. Le sue dimensioni note sono: AD = 20, BC = 8 e AB = 9.



L'area del trapezio venne calcolata da Savasorda con la corretta formula

A_{ABCD} = (somma basi)/2 + altezza = (AD + BC)/2 * AB = (20 + 8)/2 * 9 =
= 28/2 * 9 = 14 * 9 = 126 cubiti^2.

La lunghezza della diagonale minore AC è:

$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 9^2 + 8^2 = 81 + 64 = 145$, da cui
$AC = \sqrt{145} \approx 12{,}04$ cubiti.

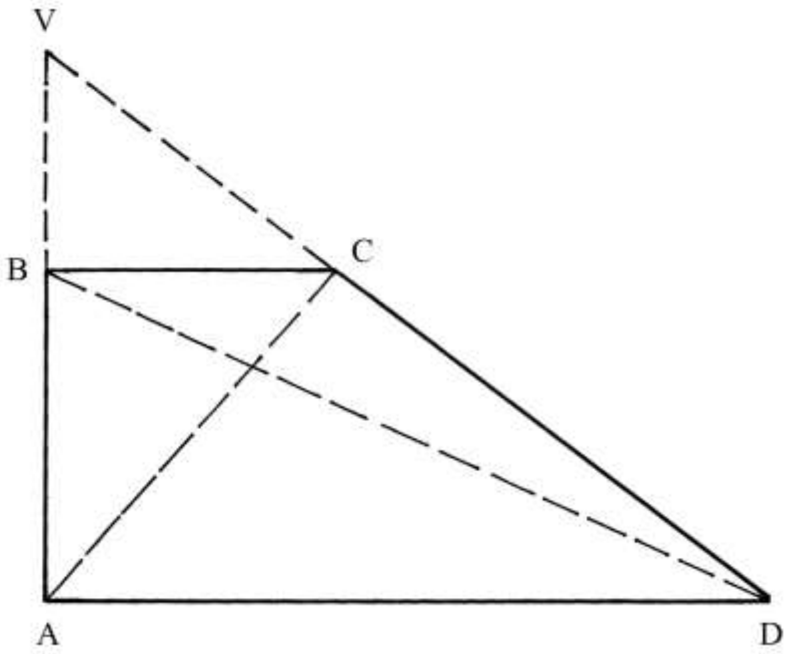
La diagonale maggiore BD è lunga:

$BD^2 = AB^2 + AD^2 = 9^2 + 20^2 = 481$, da cui
$BD = \sqrt{481} \approx 21{,}93$ cubiti.

Le diagonali AC e BD sono, rispettivamente, le ipotenuse dei triangoli rettangoli ABC e ABD.

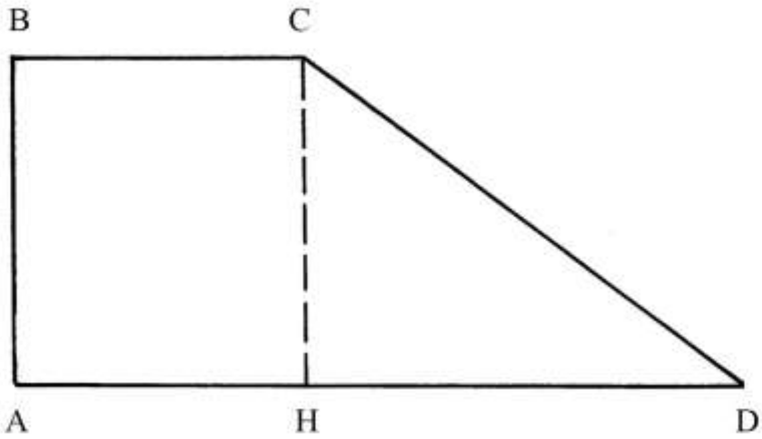
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Savasorda affrontò poi la costruzione del triangolo rettangolo dal cui sezionamento derivava il precedente trapezio rettangolo:



Le dimensioni sono quelle già viste per il trapezio ABCD.

Occorre calcolare la lunghezza del lato obliquo CD, che è l'ipotenusa del triangolo rettangolo CHD:



Il cateto HD è lungo quanto la differenza fra le basi:

$$HD = AD - AH = AD - BC = 20 - 8 = 12 \text{ cubiti}$$

La lunghezza di CD è data da:

$$CD = \sqrt{(HD^2 + CH^2)} = \sqrt{(12^2 + 9^2)} = \sqrt{(144 + 81)} = \sqrt{225} = 15 \text{ cubiti.}$$

Il metodo proposto da Savasorda contiene alcuni passi per calcolare le dimensioni dei lati ignoti del triangolo AVD:

* moltiplicare la base minore BC per CD: $BC * CD = 8 * 15 = 120$;
* dividere questo prodotto per la differenza fra le basi:

$$(BC * CD)/(AD - BC) = 120/(20 - 8) = 120/12 = 10$$ cubiti, lunghezza di CV.

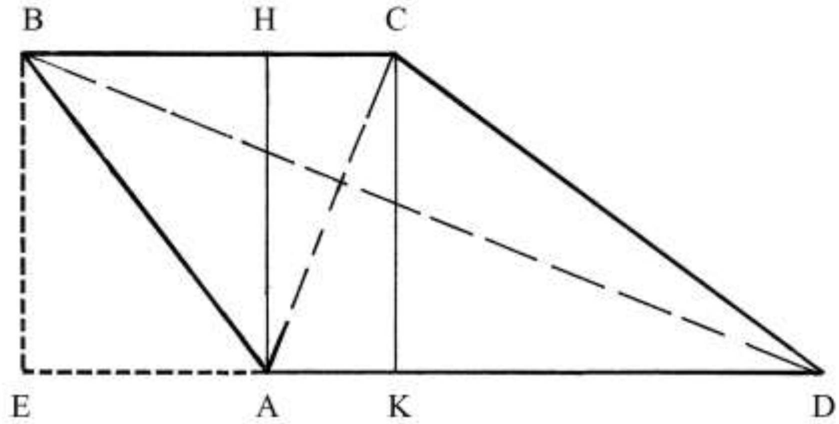
La lunghezza del cateto BV è ottenuta da

$$BV = (BC * AB)/(AD - BC) = (8 * 9)/(20 - 8) = 72/12 = 6$$ cubiti.

D) Forma 4.ª

Un trapezio scaleno

Savasorda descrisse un trapezio scaleno da lui definito con l’espressione *trapezio declinante*:



In figura sono mostrate tre altezze, una delle quali (quella BE) cade all’esterno del poligono, il trapezio ABCD.

Le dimensioni note sono: AD = 21, BC = 14, AB = 15 e CD = 20.

Devono essere determinate l’altezza e l’area.

Ecco i passi della procedura descritta da Savasorda con sole parole:

* calcolare la differenza fra le lunghezze delle due basi: $(AD - BC) = (21 - 14) = 7$;
* sommare il quadrato di questa differenza al quadrato del lato più corto, AB:

$$(AD - BC)^2 + AB^2 = 7^2 + 15^2 = 49 + 225 = 274;$$

* calcolare il quadrato del lato maggiore, CD, e da esso sottrarre il dato precedente (274):

$$CD^2 - 274 = 20^2 - 274 = 400 - 274 = 126;$$

* dividere per 2 il risultato precedente: $126 : 2 = 63$;
* dividere il quoziente per la differenza fra le basi: $63 : 7 = 9$;
* sommare questo secondo quoziente alla differenza fra le basi:

$$9 + 7 = 16$$ cubiti, lunghezza di KD.

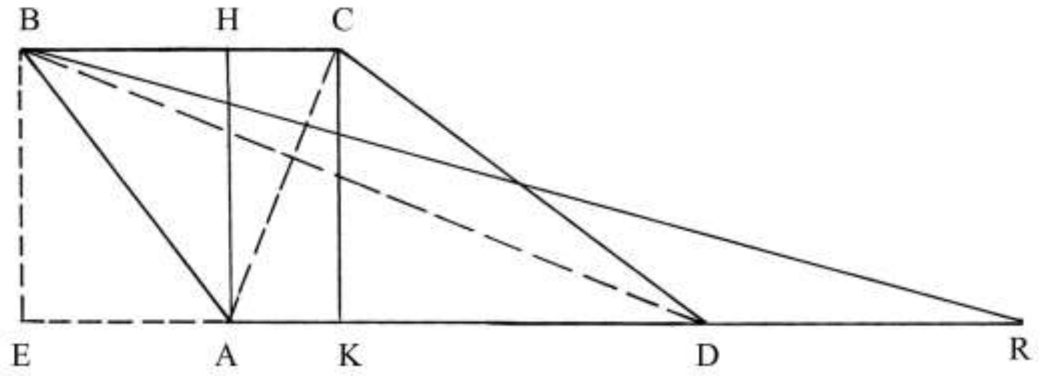
L’ultimo risultato è confermato dall'applicazione del Teorema di Pitagora al triangolo rettangolo CKD:

$$KD = \sqrt{(CD^2 - CK^2)} = \sqrt{(20^2 - 12^2)} = \sqrt{(400 - 144)} = \sqrt{256} = 16$$ cubiti.

L’area del trapezio è calcolata da Savasorda moltiplicando la semisomma delle basi per l’altezza:

$$A_{ABCD} = (AD + BC)/2 * AH = (21 + 14)/2 * 12 = 35/2 * 12 = 210 \text{ cubiti}^2.$$

La verifica della validità di questo risultato è offerta con la figura che segue:



Prolungare il segmento ED verso destra. Dal punto D riportare la lunghezza della base minore BC (14 cubiti): DR = BC; tracciare il segmento BR.

Nella figura è contenuto il triangolo scaleno BAR che è ottusangolo perché lo è l'angolo BAR.

Questo triangolo ha la base AR che è lunga:

AR = AD + DR = AD + BC = 21 + 14 = 35 cubiti.

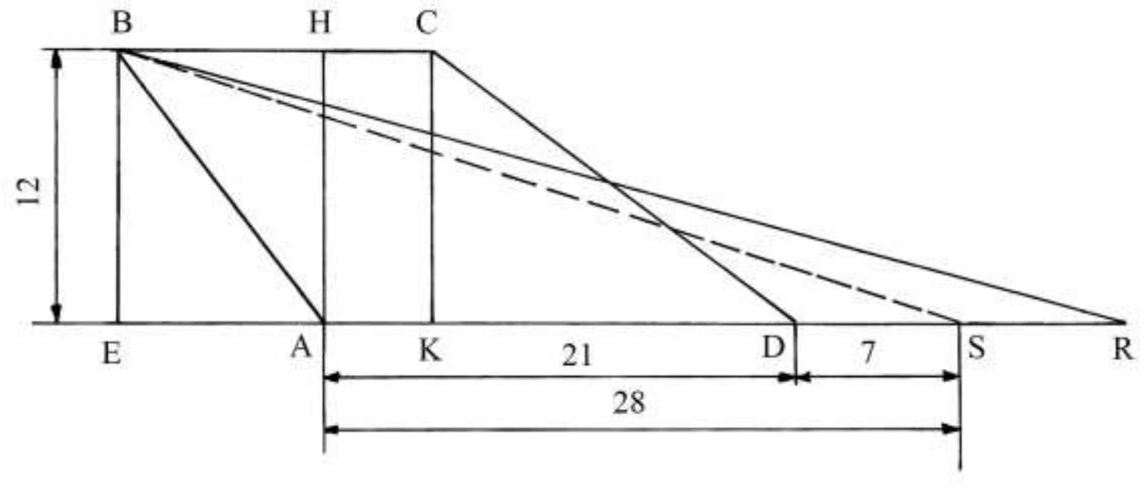
Il segmento BE è l'altezza del triangolo BAR rispetto alla base AR; la sua area è data da:

A_{BAR} = (AR * BE)/2 = (35 * 12)/2 = 210 cubiti^2.

Il trapezio ABCD e il triangolo scaleno BAR hanno uguale superficie.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Il testo stampato contiene a p. 69 un errore perché propone di aggiungere alla base maggiore AD la *differenza* fra le lunghezze delle basi (AD – BC = 7) invece della lunghezza della base minore BC = 14 cubiti: con questa soluzione erronea il punto S è a distanza 7 cubiti dal punto D (invece di fissare il punto R a distanza 14 da D, per cui SR è lungo 7):



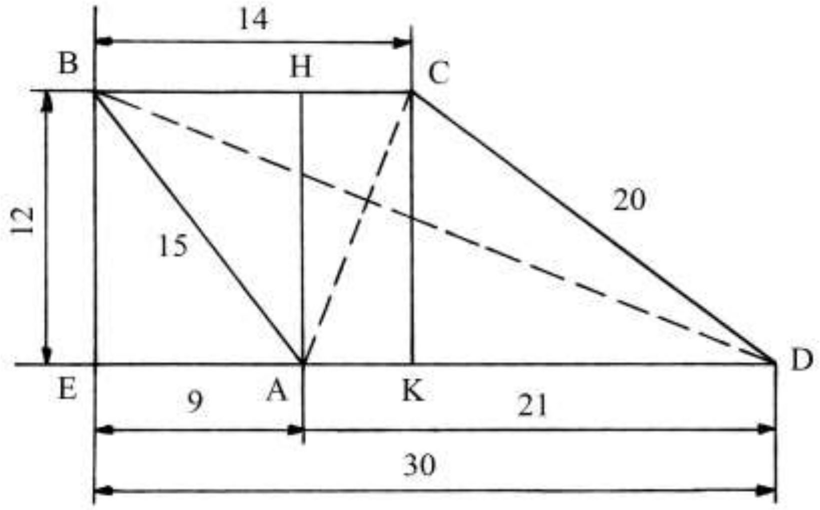
La nuova base AS è lunga: AS = AD + DS = 21 + 7 = 28 cubiti.

L'area del triangolo scaleno BAS è:

A_{BAS} = (AS * BE)/2 = (28 * 12) = 168 cubiti^2.

Il risultato è inferiore a quello corretto e il triangolo BAS non ha la stessa superficie del trapezio ABCD.

La figura che segue riassume tutte le dimensioni dei lati di ABCD:



Infine, Savasorda calcolò le lunghezze delle due diagonali del trapezio: BD e AC.

BD è l'ipotenusa del triangolo rettangolo BED e la sua lunghezza è data da

$$BD = \sqrt{(EB^2 + ED^2)} = \sqrt{(12^2 + 30^2)} = \sqrt{(144 + 900)} = \sqrt{1044} \approx 32{,}31 \text{ cubiti.}$$

La diagonale minore, AC, è l'ipotenusa del triangolo rettangolo AHC.

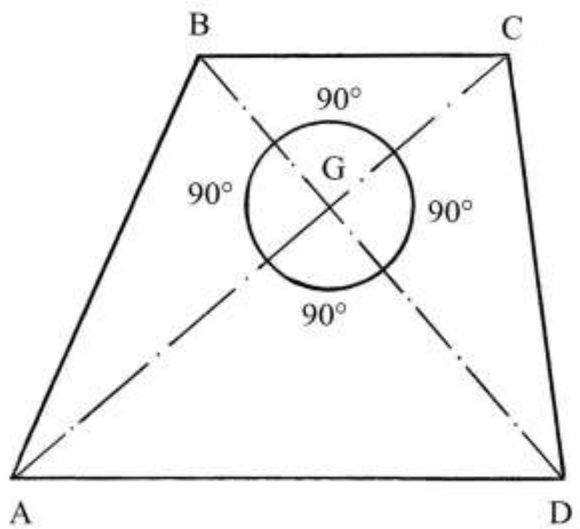
Il segmento HC (cateto minore di AHC) ha la stessa lunghezza di AK:

$$HC = BC - BH = BC - EA = 14 - 9 = 5 \text{ cubiti.}$$

Ne consegue:

$$AC = \sqrt{(HC^2 + AH^2)} = \sqrt{(5^2 + 12^2)} = \sqrt{(25 + 144)} = \sqrt{169} = 13 \text{ cubiti.}$$

Nota: Savasorda non considerò espressamente i casi di trapezi con le diagonali perpendicolari:



- APPROFONDIMENTO -

I disegni contenuti nel volume con la traduzione in catalano dell'opera di Savasorda, curata da Miquel Guttmann e Millàs I Vallicrosa (citata in bibliografia), sono un po' approssimativi perché non sembrano essere tracciati in scala.

La figura che segue è tratta da p. 69 del volume ed è numerata come la 69:

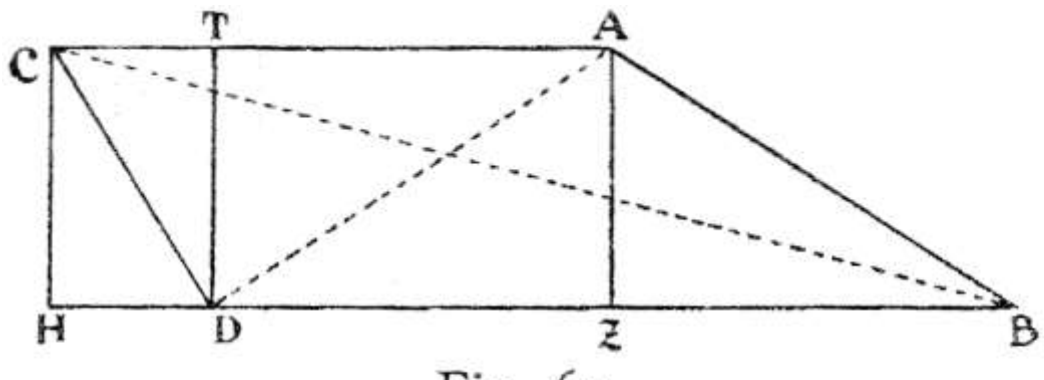
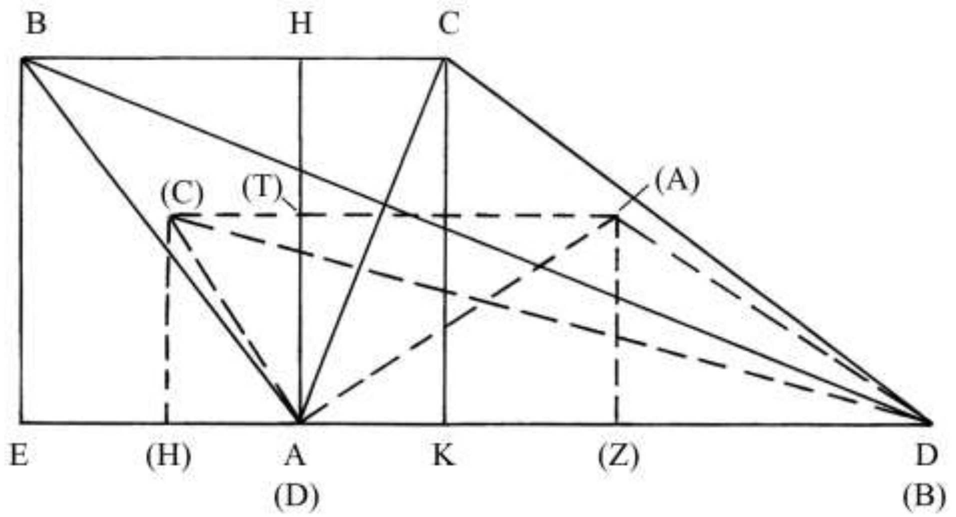


Fig. 69

Essa si riferisce al problema del trapezio scaleno descritto nel precedente paragrafo.

Nella figura che segue sono sovrapposte la figura originale n. 69 e il disegno con le dimensioni secondo le corrette proporzioni:



Sono state fatte combaciare le due basi maggiori AD del disegno esatto e (D)-(B) della figura non corretta.

Le lettere dei vertici del trapezio non corretto sono scritte fra *parentesi tonde*: (A), (B), (C), (D), (H), (T) e (Z).

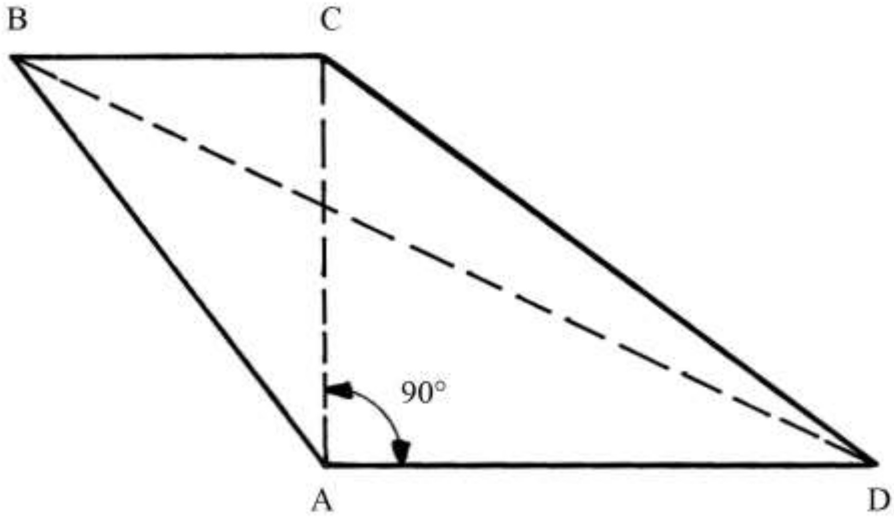
Altri disegni contenuti nel volume sono affetti da problemi simili.

In questo lavoro, i disegni sono stati realizzati rispettando le proporzioni.

- -

Un trapezio scaleno

Savasorda presentò un caso particolare di trapezio scaleno: la diagonale minore AC è anche un'altezza del trapezio ABCD:



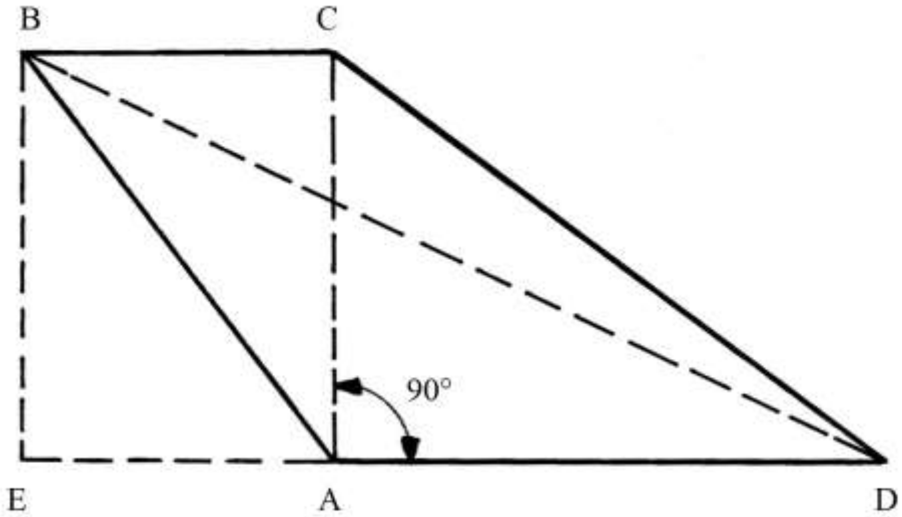
Le due basi sono lunghe AD = 16 e BC = 9 e i lati AB = 15 e CD = 20 cubiti.

Devono essere determinati l'altezza AC e l'area del trapezio.

La diagonale AC è il cateto maggiore del triangolo rettangolo BCA e il cateto minore del triangolo rettangolo ACD ed è lunga:

$$AC = \sqrt{(AB^2 - BC^2)} = \sqrt{(15^2 - 9^2)} = \sqrt{(225 - 81)} = \sqrt{144} = 12.$$

Prolungare verso sinistra la base AD e dal punto B abbassare la perpendicolare fino a fissare il punto E: il segmento BE è lungo quanto l'altezza CA:



La diagonale maggiore, BD, è l'ipotenusa del triangolo rettangolo EBD. Il cateto ED è lungo:

$$ED = EA + AD = BC + AD = 9 + 16 = 25 \text{ cubiti.}$$

La diagonale BD è lunga:

BD = $\sqrt{(ED^2 + BE^2)} = \sqrt{(ED^2 + CA^2)} = \sqrt{(252 + 122)} = \sqrt{(625 + 144)} = \sqrt{769} \approx$
$\approx 27{,}73$ cubiti.

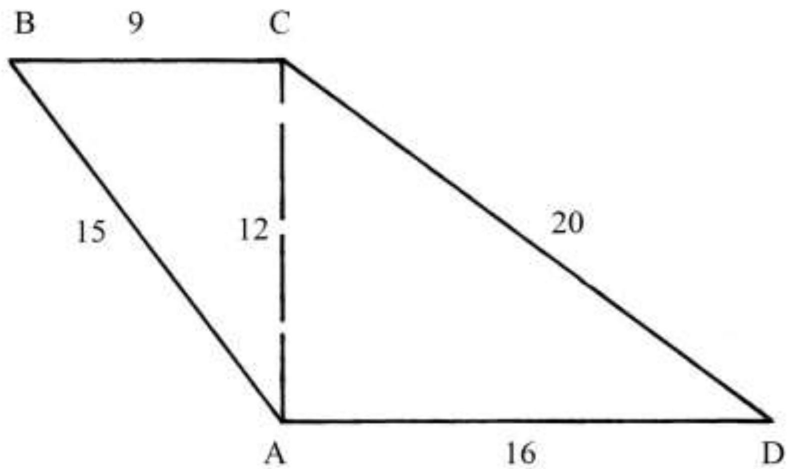
L'area del trapezio ABCD è data da:

A_{ABCD} = (somma basi)/2 * altezza = (AD + BC)/2 * CA = (16 + 9)/2 * 12 =
= 150 cubiti^2.

\- APPROFONDIMENTO -

La diagonale minore AC divide il trapezio ABCD in due triangoli rettangoli i cui lati hanno lunghezze che formano terne derivate dalla primitiva {3-4-5}:

* ABE: {9-12-15} = 3 * {3-4-5};
* ACD: {12-16-20} = 4 * {3-4-5}.

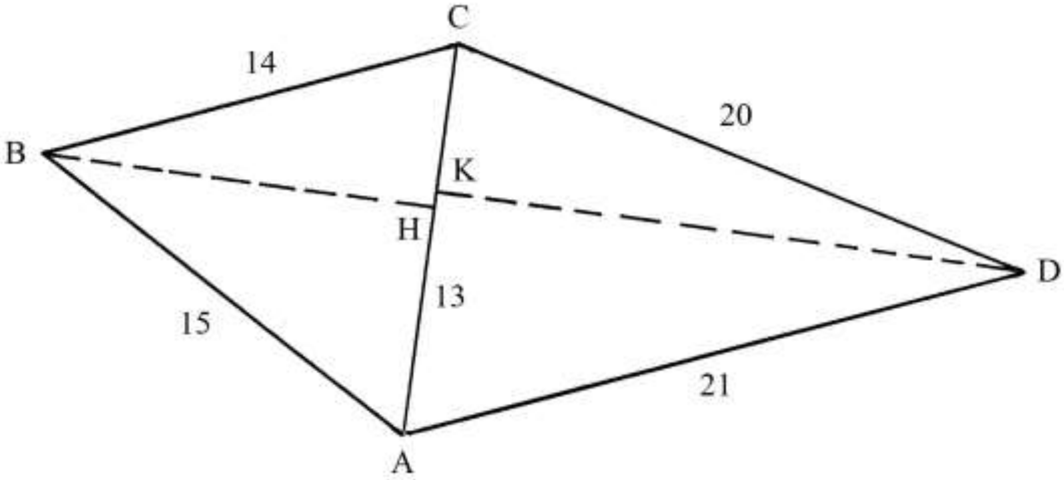


\- -

CLASSE SECONDA

Quadrilateri

Il quadrilatero della figura che segue ha i lati opposti *non paralleli*:



Le lunghezze in cubiti dei quattro lati sono scritte sulla figura.

Per calcolare l'area del quadrilatero, Savasorda suggerì di dividerlo in due triangoli per mezzo della diagonale minore AC (lunga 13 cubiti) e di tracciare le due altezze BH e DK.

Evidentemente, il metodo di Savasorda prevedeva il calcolo dell'area di ciascuno dei due triangoli (ABC e ACD) mediante la misura delle rispettive altezze.

Nel testo sono forniti due risultati:

A_{ABC} = (96 + 1/3 + 1/5 + metà di poca cosa);
A_{ACD} = (150 + 2/3 + 1/5 + metà di poca cosa).

Sommando i due valori Savasorda ottenne l'area del quadrilatero ABCD che egli espresse nella seguente curiosa forma:

A_{ABCD} = (247 + 1/5 + metà di poca cosa) invece di:
A_{ABCD} = (247 + 2/5 + metà di poca cosa).
.

I risultati ai quali giunse sono errati.

Applicando la formula di Erone (che Savasorda non impiegò) ai due triangoli si ottengono i seguenti risultati:

* perimetro ABC = 15 + 14 + 13 = 42 = 2*p da cui semiperimetro ABC p = 21 cubiti;
* perimetro ACD = 13 + 20 + 21 = 54 = 2*p da cui semiperimetro ACD p = 27 cubiti.

La formula di Erone per il calcolo dell'area di un triangolo generico è:

$A_{TRIANGOLO} = \sqrt{[p * (p – lato1) * (p – lato2) * (p – lato3)}.$

Le aree dei due triangoli sono le seguenti:

$A_{ABC} = \sqrt{[21 * (21 – 15) * (21 – 14) * (21 – 13)]} = \sqrt{(21 * 6 * 7 * 8)} = \sqrt{7056} =$
$= 84$ cubiti^2.
$A_{ACD} = \sqrt{[27 * (27 – 13) * (27 – 20) * (27 – 21)]} = \sqrt{(27 * 14 * 7 * 6)} =$
$= \sqrt{15876} = 126$ cubiti^2.

L'area totale del quadrilatero ABCD è data dalla somma delle aree dei due triangoli:

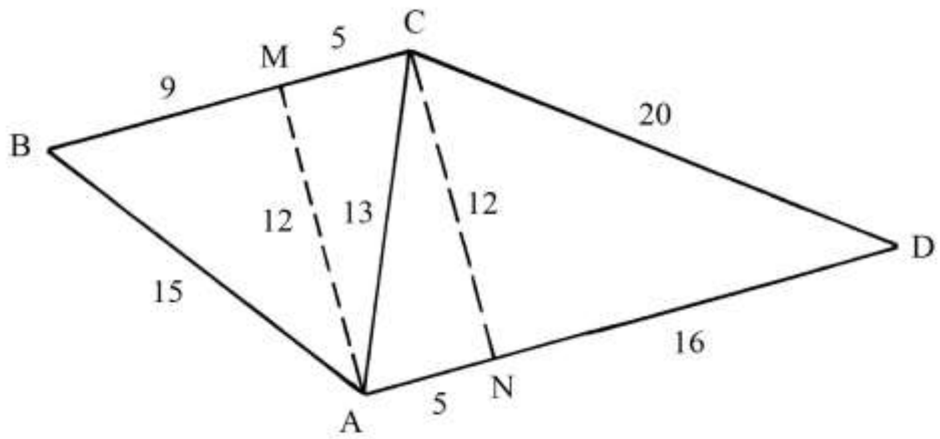
$A_{ABCD} = A_{ABC} + A_{ACD} = 84 + 126 = 210$ cubiti^2.

Né il traduttore (Millàs i Vallicrosa) né il curatore (Guttmann) hanno segnalati gli errori.

- APPROFONDIMENTO -

La diagonale minore AC divide il quadrilatero ABCD in due triangoli: essi sono due *triangoli di Erone*. ABC è già stato descritto in precedenti paragrafi.

I triangoli di Erone possiedono un'importante proprietà: le lunghezze dei lati, di almeno un'altezza e le loro aree sono espresse da *numeri interi*.



AM è un'altezza di ABC, è lunga 12 e divide BC in due segmenti:

* BM = 9;
* MC = 5.

CN è un'altezza di ACD ed è anch'essa lunga 12. Divide il lato AD in due segmenti:

* AN = 5;
* ND = 16.

AMCN è un rettangolo che ha lati lunghi:

* AN = MC = 5;
* AM = CN = 12.

AC è una diagonale del rettangolo AMCN e la sua lunghezza nota – 13 – è data da:

$AC^2 = AM^2 + MC^2$

$13^2 = 12^2 + 5^2$

$169 = 144 + 25$

$169 = 169.$

L'area di ABC è:

$A_{ABC} = (BC * AM)/2 = (14 * 12)/2 = 168/2 = 84.$

L'area di ACD è:

$A_{ACD} = (AD * CN)/2 = (21* 12)/2 = 252/2 = 126.$

Questi risultati sono uguali a quelli forniti dall'applicazione della formula di Erone per l'area dei triangoli.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

L'espressione *poca cosa* per indicare valori molto piccoli, quasi trascurabili, non è stata un'esclusiva di Savasorda.

Due secoli dopo, l'abacista fiorentino Paolo Gherardi, vissuto a lungo a Montpellier, nei primi decenni del Trecento, l'ha usata nella soluzione di alcuni problemi di geometria piana nel suo trattato, scritto nel fiorentino dell'epoca, "*Liber habaci*" nelle due forme seguenti:

* *pocha cosa più* ;
* *pocha cosa meno* .

- -

PARTE QUARTA

MISURA DEI TERRENI DI FORMA CIRCOLARE

A)

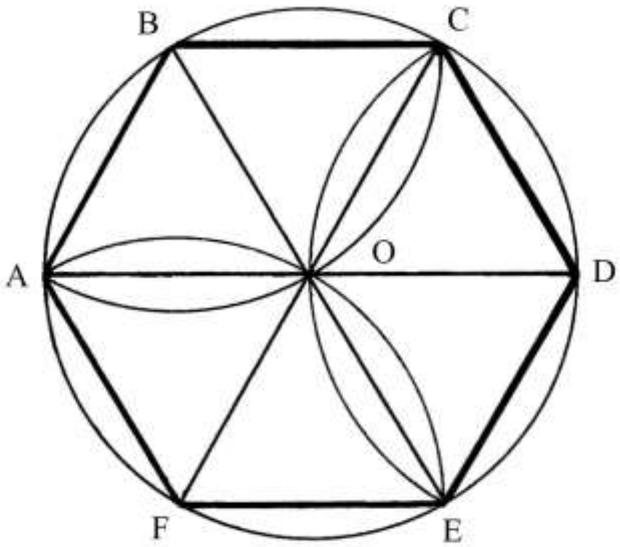
Cerchio

Nel caso del cerchio, Savasorda applicò le formule di Archimede (citate in un precedente paragrafo) per calcolare la lunghezza della circonferenza e l'area conoscendone il diametro:

circonferenza = (3 + 1/7) * diametro = 22/7 * diametro = 22/7 * (2 *raggio) =
= 44/7 * raggio.

A_{CERCHIO} = semicirconferenza * diametro/2 = (22/7 * diametro)/2 * raggio =
= (22/7 * diametro)/2 * diametro/2 = 11/14 * diametro^2.

Nella figura che segue è disegnato un cerchio e la circonferenza è divisa in *sei* parti uguali:



Sulla circonferenza si trovano i vertici dell'esagono regolare ABCDEF.

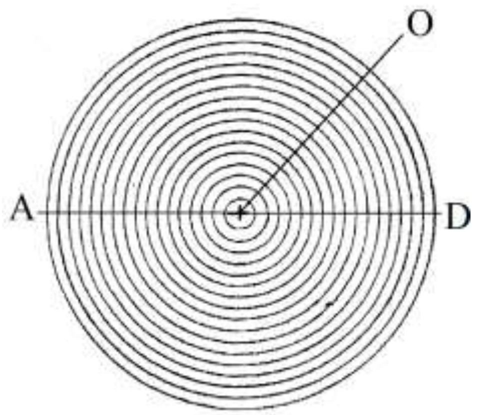
Nella figura sono tracciati tre diametri: AD, BE e CF che, ovviamente, hanno lunghezza doppia del raggio OA.

I lati dell'esagono hanno la stessa lunghezza del raggio OA.

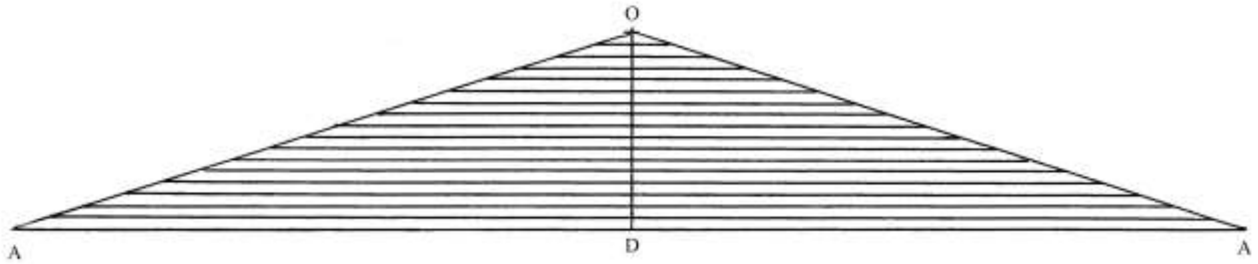
Ciascun lato dell'esagono è una *corda* che sottende un *arco* che è più lungo della stessa corda e quindi del raggio: da questa considerazione, Savasorda trasse la conferma dell'eccedenza della lunghezza della circonferenza rispetto al perimetro dell'esagono di una quantità uguale a 1/7 del diametro:

perimetro esagono = 6 * raggio = 3 * diametro, quindi:
circonferenza = perimetro esagono + 1/7 * diametro =
= 3 * diametro + 1/7 * diametro = (3 + 1/7) * diametro = 22/7 * diametro.

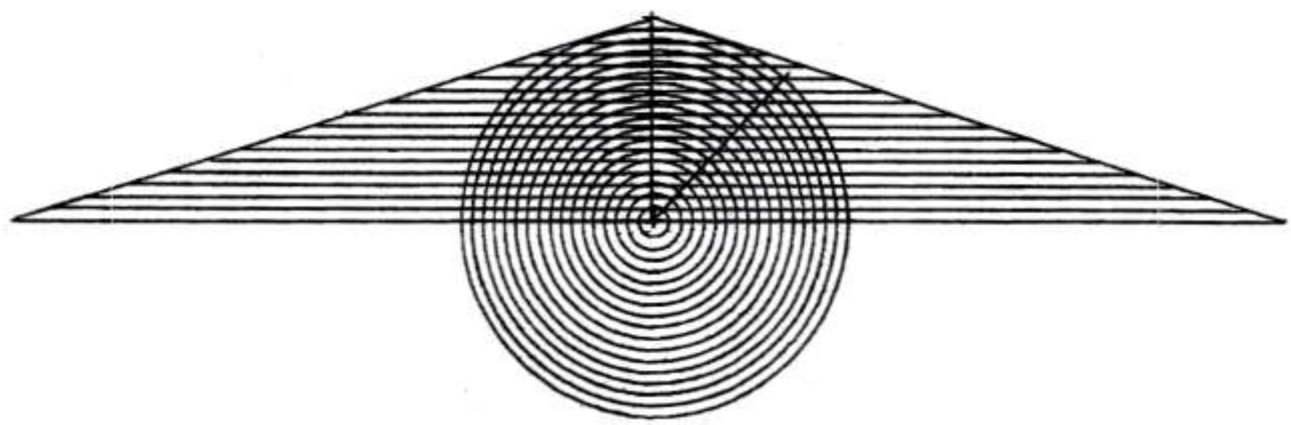
Savasorda dimostrò la sua tesi con un metodo geometrico: egli disegnò un cerchio con al suo interno 17 circonferenze concentriche:



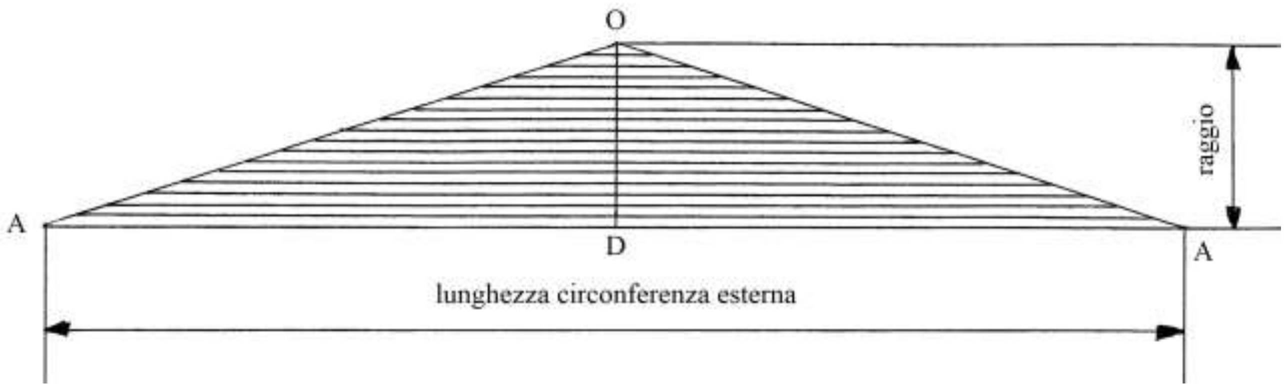
Tagliando questa figura dall’esterno verso il centro O, le diciassette circonferenze furono convertite in segmenti paralleli e di lunghezza decrescente dall’esterno verso l’interno formando un triangolo isoscele:



La sovrapposizione dei due ultimi grafici fornisce il risultato che è mostrato nella figura che segue:



L’altezza OD è lunga quanto il raggio della circonferenza esterna e il lato di base ADA è lungo quanto la stessa circonferenza esterna:



L’area di questo triangolo isoscele è data da:

A_{AOA} = (base * altezza)/2 = semibase * altezza = AD * DO.

Ma, nel triangolo isoscele, AD è la lunghezza della semicirconferenza esterna e cioè – usando le formule di Archimede – si ha:

circonferenza = 22/7 * diametro
semicirconferenza = (22/7 * diametro)/2 = 11/7 * diametro = 22/7 * raggio.

Sostituendo questi dati nella formula dell’area di AOA si ottiene:

A_{AOA} = (22/7 * raggio) * raggio = 22/7 * raggio^2 = 22/7 * 7^2 = 154 cubiti^2.

Sempre applicando le formule di Archimede, l’area del cerchio di diametro AD = 14 cubiti è data da:

$A_{CERCHIO}$ = diametro^2 – 1/7 * diametro^2 – ½ *1/7 * diametro^2 =
= (1 – 1/7 – 1/14) * diametro^2 = (14 – 2 – 1)/14 * diametro^2 = 11/14 * diametro^2 =
= 11/14 * 14^2 = 11 * 14 = 154 cubiti^2.

L’area del triangolo isoscele AOA è *uguale* a quella del cerchio di diametro AD.

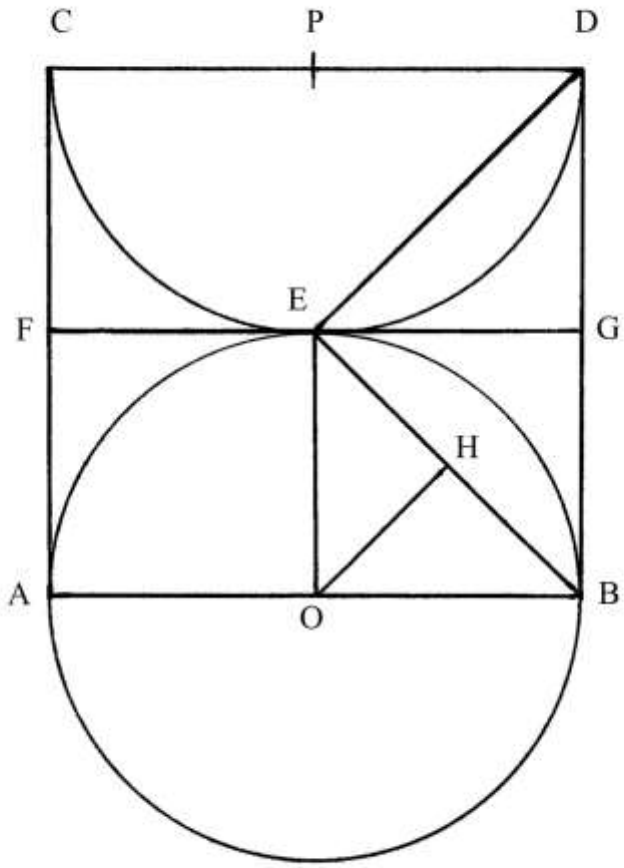
Nota: a causa di un evidente errore di stampa, a p. 73 del trattato di Savasorda l’area del cerchio è indicata in 164 invece che in 154 cubiti^2.

Area del cerchio

Un altro metodo descritto da Savasorda per calcolare l’area di un cerchio conoscendo soltanto il diametro lungo 14 cubiti è di seguito spiegato.

Nota: Savasorda fa riferimento alla costruzione descritta nel precedente paragrafo e usa la stessa lunghezza del diametro, 14 cubiti, e nel caso qui spiegato calcola correttamente l’area del cerchio in 154 anziché in 164 cubiti^2.

La figura che segue riassume la dimostrazione di Savasorda: egli calcolò l’area degli spazi delimitati dal quadrato e dal cerchio in esso inscritto per poi risalire alla verifica della validità della precedente formula che forniva l’area del cerchio:



AB è il diametro orizzontale del cerchio ed è lungo 14 cubiti (come nei casi visti in precedenza).

Sul diametro AB costruire il quadrato ACDB. Determinare il punto medio del lato CD: è P.

Fare centro nel punto P con raggio OA e tracciare una semicirconferenza interna al quadrato e tangente nel punto E alla circonferenza di centro O.

Per il punto E disegnare la mediana FG.

Collegare il punto E con B e con D.

Dal centro O condurre la perpendicolare alla corda EB: è OH.

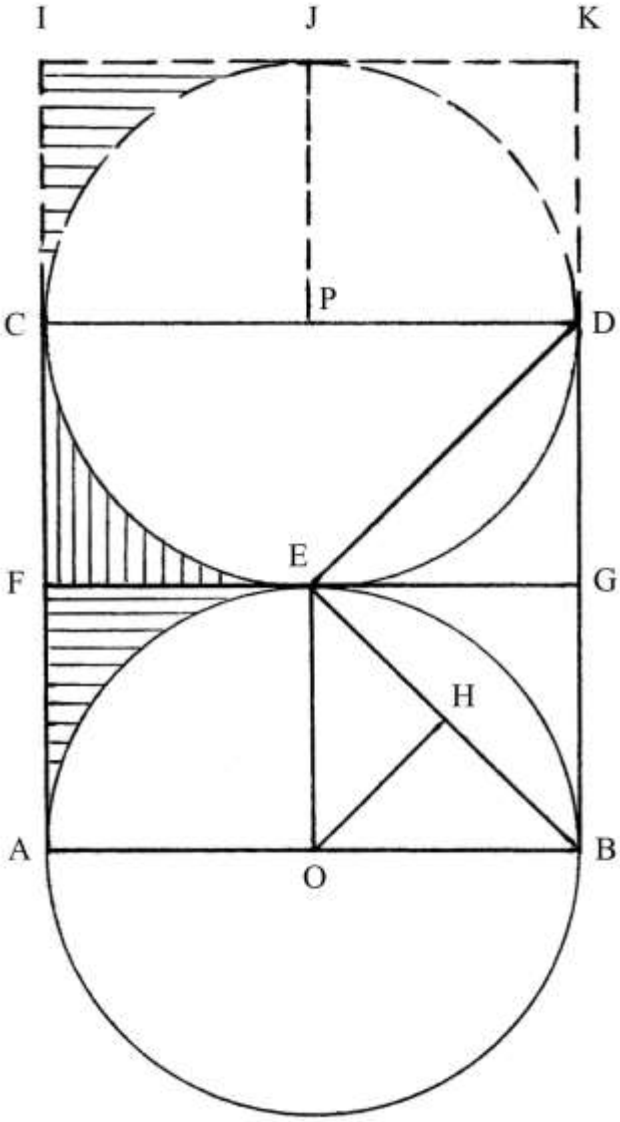
L'area del quadrato ACDB è:

$A_{ACDB} = AB^2 = 14^2 = 196$ cubiti^2.

Il semicerchio CED ha la stessa area del semicerchio AEB.

Fare centro nel punto P per completare la circonferenza che ha diametro orizzontale CD; dal punto P elevare il raggio perpendicolare a CD: esso incontra la circonferenza nel punto J. Completare l'inscrizione di questa seconda circonferenza nel nuovo quadrato FIKG.

Il cerchio di centro P ha superficie minore di quella del quadrato in cui è inscritto: la differenza è data dai *triangoli curvi* FCE, CIJ, JKD e DGE come mostra la figura che segue:



Ricordiamo che l'area dei quadrati ACDB e FIKG è uguale a 196 cubiti^2 e che l'area del cerchio di centro P è uguale a 154 cubiti^2.

La differenza fra l'area del quadrato FIKG e quella del cerchio di centro P è data da:

differenza = $14^2 – 11/14 * 14^2 = 196 – 154 = 42$ cubiti^2.

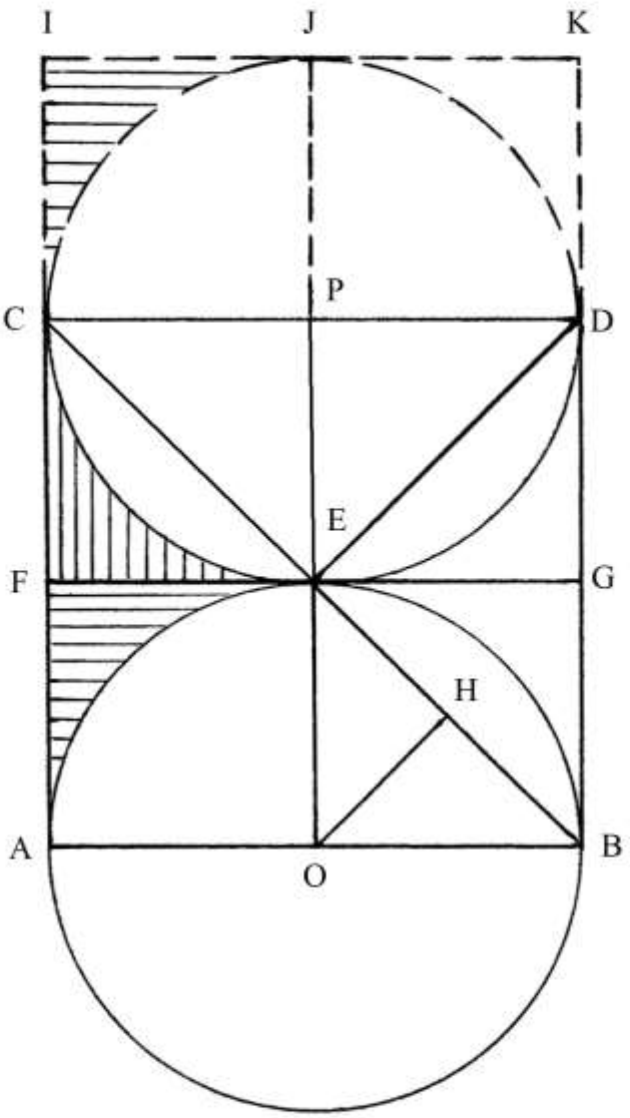
Savasorda usò la sua caratteristica forma mista, in parte frazionaria, per ricavare questo risultato:

differenza = lato^2 – 11/14 * lato^2 = 3/14 * lato^2 = (2 + 1)/14 * lato^2 =
= (2/14 + 1/14) * lato^2 = (1/7 + 1/14) * lato^2 = (1/7 + 1/14) * 14^2 =
= (1/7 + 1/14) * 196 = 28 + 14 = 42 cubiti^2.

I triangoli BEG e EGD sono rettangoli e isosceli. Ciascuno di essi ha superficie uguale a 1/8 di quella dei quadrati ACDB e FIKG e cioè:

Area $_{EGD}$ = Area $_{FIKG}$: 8 = 196 : 8 = 24,5 cubiti^2.

Occorre ora calcolare l'area di un *settore circolare*, ad esempio quello CPE, che è delimitato dall'arco CE e dai raggi PC e PE:



Questo settore è assimilabile a un triangolo isoscele con la base lunga quanto l'arco CE e l'altezza quanto il raggio PC:

$A_{\text{SEGMENTO CPE}}$ = (arco CE * PC)/2 = circonferenza/4 * PC/2 = 44/4 * 7/2 =
= 11 * 7/2 = 38,5 cubiti^2

o, come scrive Savasorda, (38 più un mezzo) cubiti^2.

La corda CE è la diagonale del quadrato FCPE il cui lato è lungo quanto il raggio delle circonferenze e cioè 7 cubiti; la lunghezza di CE è:

$CE = \sqrt{(PC^2 + PE^2)} = \sqrt{(7^2 + 7^2)} = \sqrt{(49 + 49)} = \sqrt{98} \approx 9{,}899$ cubiti.

Savasorda arrotondò per eccesso il risultato a 9,9 cubiti che egli, al solito, espresse nella forma (9 + 9/10) cubiti.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Il segmento OH è disegnato in tutte le precedenti figure perché presente nel testo originale, ma la sua presenza allunga la soluzione del problema geometrico.

La lunghezza di BH è la metà di quella di EB e cioè

$(9 + 9/10)/2 = (4 + 9/10 + 1/20)$ cubiti secondo la notazione usata da Savasorda, espressione che corrisponde a 4,95 cubiti.

Savasorda calcolò poi il quadrato del raggio OB (che equivale all'area del quadrato OEGB):

$OB^2 = 7^2 = 49$ cubiti^2.

Nel triangolo rettangolo isoscele OHB vale il teorema di Pitagora:

$OB^2 = BH^2 + OH^2$

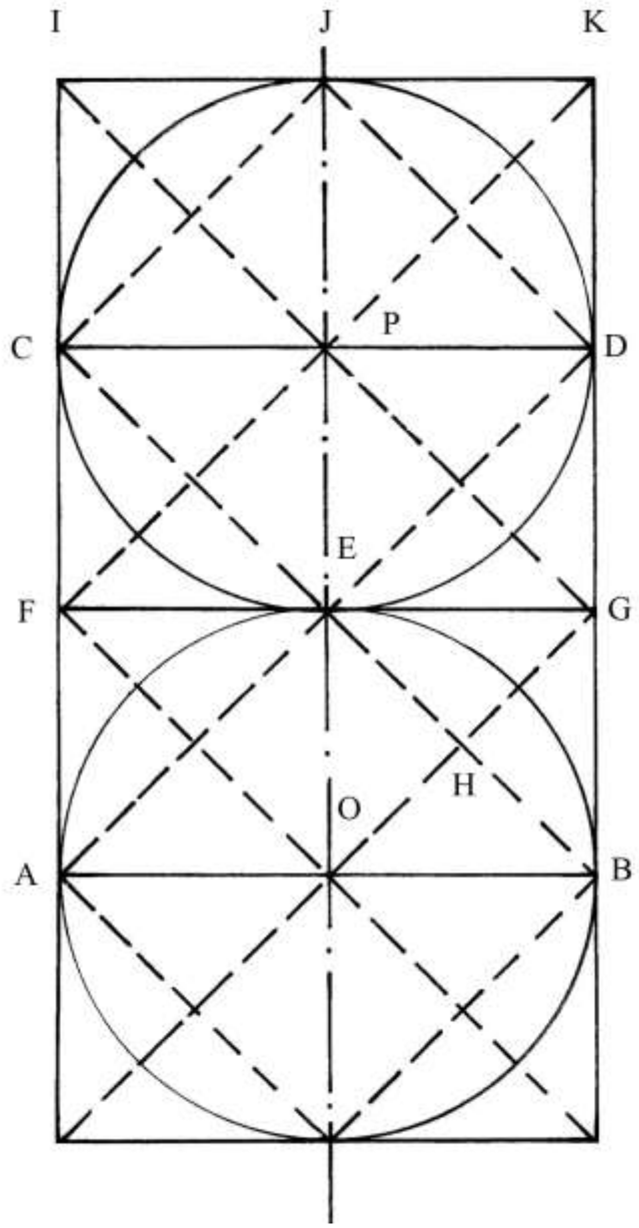
$OH2 = OB^2 – BH^2$

$OH = \sqrt{(OB^2 – BH^2)} = \sqrt{(7^2 – 4{,}95^2)} = \sqrt{(49 – 24{,}5025)} = \sqrt{24{,}4975} \approx 4{,}95$ cubiti.

Il risultato è ovvio perché i segmenti EH, BH e OH hanno uguale lunghezza, il cui valore è stato ricavato in precedenza.

Seguiamo la procedura di Savasorda basata sull'analisi del quadrato OEGB, dei triangoli EOB e EGB e dei triangoli EOH e OHB.

Tutti i triangoli rettangoli, i settori circolari e i segmenti circolari creati dalle diagonali tratteggiate nella figura che segue hanno le stesse dimensioni delle analoghe entità geometriche contenute nel quadrato OEGB:



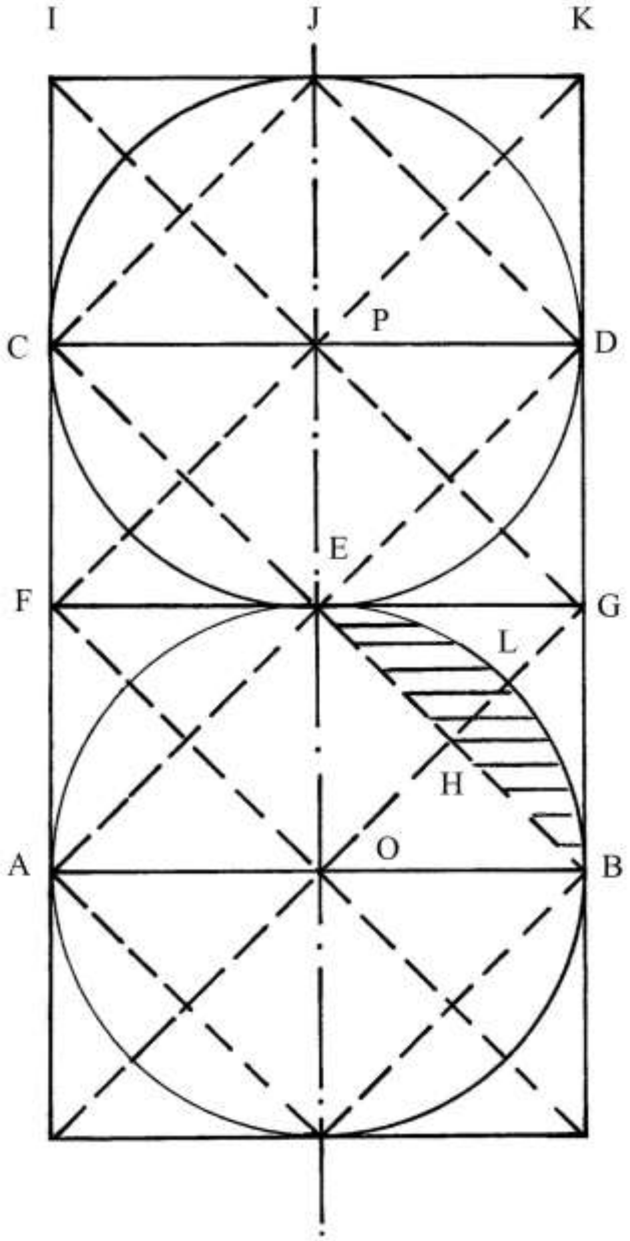
L’area del triangolo OEB è uguale a

$A_{OEB} = ½ * A_{OEGB} = ½ * 7^2 = 49/2 = 24,5$ cubiti^2.

L’area del segmento circolare ELBH è data da:

$A_{ELBH} = A_{OELB} – A_{OEB} = 38,5 – 24,5 = 14$ cubiti^2.

OELB è un settore circolare che ha area uguale a *un quarto* di quella del cerchio di centro O e raggio OE e OEB è un triangolo rettangolo isoscele: lo schema che segue evidenzia ELBH:



Il triangolo BED è rettangolo e isoscele ed è formato dall’unione di due triangoli rettangoli di uguali dimensioni, EBG e EGD, che hanno le stesse proprietà geometriche di EOB.

L’area di BED è il doppio di quella di OEB e cioè 24,5 * 2 = 49 cubiti^2.

La precisione del calcolo dell'area del cerchio

Savasorda ricorda che per i pratici il rapporto fra le lunghezze della circonferenza e del diametro, il nostro π, era:

"π" ≈ (3 + 1/7) ≈ 3,142857.

L'area di un cerchio inscritto in un quadrato è data dal quadrato della lunghezza del lato meno un settimo e meno un quattordicesimo:

A_{CERCHIO} = lato^2 * (1 – 1/7 – 1/14) = lato^2 * (14 – 2 – 1)/14 = 11/14 * lato^2 =
= 11/14 * diametro^2.

Secondo Savasorda gli astronomi suoi contemporanei usavano un'approssimazione più accurata per il valore di π:

[3 + (8,5/60)] = 3,141(666).

Questo ultimo valore si avvicina maggiormente a quello di π:

π ≈ 3,1415926.

Con un cerchio inscritto che ha diametro lungo 14 cubiti, il suo quadrato è: 14^2 = 196.

Per gli astronomi, l'area del cerchio inscritto era data dal quadrato del diametro meno la sua quarta parte e meno la quarta parte moltiplicata per la costante (8,5/60).

La differenza fra l'area del quadrato con lati lunghi 14 e quella del cerchio inscritto è:

differenza = 196 * (1/4 – ¼ * 8,5/60) = 196/4 * (1 – 8,5/60) = 49 * (60 – 8,5)/60 =
= 49 * 51,5/60 = (42 + 3,5/60) cubiti^2.

L'area del cerchio secondo la *formula degli astronomi* è:

A_{CERCHIO} = diametro^2 – differenza = 14^2 – (42 + 3,5/60) = 196 – (42 + 3,5/60) =
= (153 + 56,5) = (154 – 3,5/60) cubiti^2.

La via diretta per calcolare l'area del cerchio con la formula degli *astronomi* è la seguente:

A_{CERCHIO} = (3 + 8,5/60) * (diametro/2)^2 = (180 + 8,5)/60 * 7^2 =
= 188,5/60 * 49 = (153 + 56,5/60) = (154 – 3,5/60) cubiti^2.

Il risultato è identico.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Savasorda notò che per "π" gli *agrimensori* preferivano usare il valore approssimato proposto da Archimede (π ≈ 22/7) invece del valore più preciso utilizzato dagli astronomi.

Con entrambe le formule era facile calcolare l'area di un cerchio conoscendone soltanto la lunghezza del diametro e senza necessità di ricavare quella della circonferenza.

Nel paragrafo successivo, propose un problema *inverso*: conoscendo l'area del cerchio, calcolare la lunghezza del diametro, usando la formula di Archimede. L'area è 154 cubiti^2.

Occorre aggiungere all'area i suoi (3/11).

Quindi:

154 + (3/11 * 154) = 154 + 42 = 196.

La radice quadrata di 196 è la lunghezza del diametro:

√196 = 14 cubiti = lunghezza del diametro.

La riprova è data dal fatto che con la stessa formula è stata calcolata l'area della superficie compresa fra il quadrato e il cerchio che vi è inscritto:

differenza = $lato^2 - 11/14 * diametro^2 = diametro^2 - 11/14 * diametro^2 =$
$= 3/14 * diametro^2$.

Il diametro incognito

Un altro problema inverso è il seguente: è data la circonferenza (lunga 44 cubiti) e deve essere ricavata la lunghezza del diametro.

Il testo propone di dividere la circonferenza per il valore approssimato di π che è dato da
(3 + 1/7) = 22/7:
diametro = circonferenza/(3 + 1/7) = 44/(22/7) = 44 * 7/22 = 14 cubiti.

Un altro metodo suggerito nel trattato è il seguente:

* dividere per 2 la lunghezza della circonferenza: 44 : 2 = 22 ;
* prendere 7 unità per ciascuna lunghezza della *semicirconferenza* (22 cubiti): 7 * 2 = 14 cubiti che è la lunghezza del diametro

[Savasorda effettuò la *divisione intera* fra 22 e 3: 22\3 = 7. La divisione intera "\" ricerca solo la parte intera (7) e trascura il resto (1)].

A pagina 75, nella nota (1) del testo, sono contenuti due *errori*:

$$S = \frac{D^2 + 3\,{}^1/_7}{4} = D^2\,\frac{22}{28}\text{ ; i } D \text{ és igual a } S\,\frac{28}{22} = S\,\frac{14}{11}$$

$$\text{o } D^2 = S + S\,\frac{3}{11}\text{ ; i } D = \sqrt{S + S\,\frac{3}{11}}\,.$$

S è l'area del cerchio e D è il suo diametro.

La formula corretta da usare è:

$S = D^2 * (3 + 1/7)/4 = D^2 * 22/28 = D^2 * 11/14$ e
$D^2 = 14/11 * S = S + S * 3/11$.

La lunghezza di D è:

D = √(S + S + 3/11).

Dal cerchio alla circonferenza

L'esempio descritto è quello di un cerchio di cui è nota l'area (154 $cubiti^2$) e di cui si vuole conoscere la lunghezza della circonferenza.

All'area del cerchio aggiungere i suoi 3/11:
154 + 154 * 3/11 = 154 + 42 = 196.

Estrarre la radice quadrata di 196: diametro = √196 = 14 cubiti.

Per calcolare la circonferenza moltiplicare il diametro per la costante che approssima π secondo Archimede:
circonferenza = diametro * (3 + 1/7) = 14 * (22/7) = 44 cubiti.

<u>Diametro di un cerchio</u>

Il problema chiede la lunghezza del diametro sapendo che l'area è 154 cubiti^2. Savasorda si mosse dal richiamo della regola secondo la quale - in questo caso - moltiplicando per 11 il diametro (14 cubiti) si ricava l'area del cerchio:

$A_{CERCHIO}$ = 11 * diametro = 11 * 14 = 154 cubiti^2.

La soluzione è corretta solo con lunghezza del diametro uguale a 14 cubiti:

$A_{CERCHIO}$ = 11/14 * diametro^2 = 11/14 * 14^2 = 11 * 14 = 154 cubiti^2.

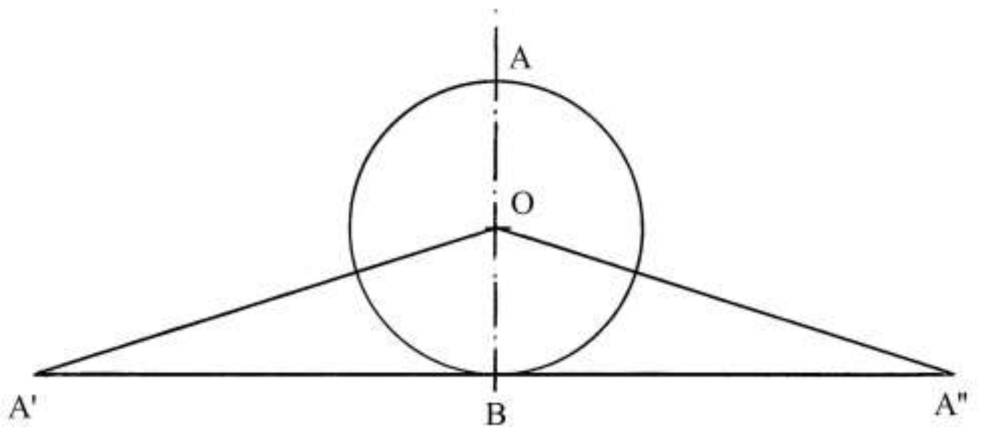
Nel testo compare sotto altra veste la formula dell'area del cerchio (assimilato a un triangolo con la base lunga quanto la circonferenza e altezza uguale a metà del diametro):

$A_{CERCHIO}$ = (circonferenza/2) * (diametro/2) = (circonferenza/4) * diametro.

Nella figura il triangolo isoscele A'OA'' ha la base A'B'A'' lunga quanto la circonferenza del cerchio di centro O e raggio OA = OB. La sua area è:

$A_{A'OA''}$ = A'A'' * OB/2 = circonferenza * raggio/2 = circonferenza * diametro/4.

L'area del triangolo isoscele A'OA'' è uguale a quella del cerchio di centro O e diametro AB.



Conoscendo la quarta parte della lunghezza della circonferenza, 11 cubiti, Savasorda risalì alla sua lunghezza:

circonferenza = 11/(1/4) = 11 * 4 = 44 cubiti.

Infine, da questo ultimo dato ricavò la lunghezza del diametro dividendo per (3 + 1/7):

diametro = circonferenza/(3 + 1/7) = 44/(22/7) = 44 * 7/22 = 14 cubiti.

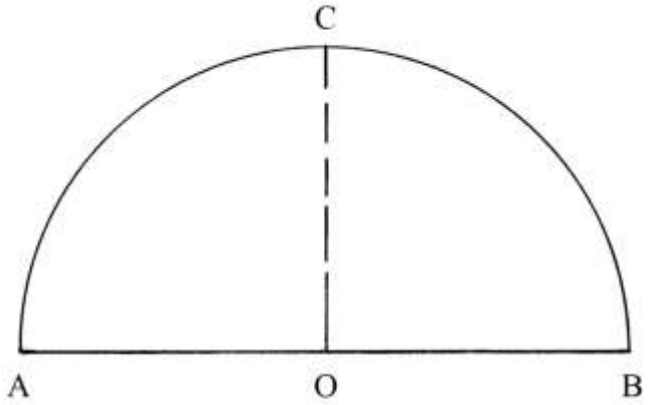
B)

<u>La prima classe: semicerchio</u>

Un *cerchio incompleto* è una figura piana che è delimitata da un arco di circonferenza e da una corda e, in termini moderni, è un *segmento circolare*.

Savasorda distinse *tre classi* di *cerchio incompleto*.

Nel caso della figura che segue il *cerchio incompleto* è un *semicerchio* delimitato dalla semicirconferenza ACB e dal diametro AB:



Dato che AB è lungo 8 cubiti e OC 4 cubiti (e cioè metà di AB), la figura è certamente un semicerchio.

Questa figura fa parte dei *segmenti circolari*, porzioni di cerchio delimitate da un arco e da una corda.

L'esempio presentato in questo paragrafo rappresenta la *prima classe* delle tre che Savasorda considera per i segmenti circolari.

AB è la *corda* del segmento circolare e OC è la *freccia* da Savasorda chiamata *saetta*: la freccia (OC nell'esempio) di un arco di circonferenza (ACB) è la distanza fra il punto medio dell'arco (C) e il punto medio della corda o secante (O) ed è pure l'*altezza* del segmento circolare.

Per calcolare l'area del semicerchio Savasorda propose di moltiplicare la metà della corda per la metà dell'arco.

La formula è chiaramente derivata da quella, già incontrata, usata da Savasorda per calcolare l'area di un cerchio assimilato a un triangolo di uguale superficie.

Occorre determinare la lunghezza della semicirconferenza:

$$ACB = corda/2 * (3 + 1/7) = 8/2 * 22/7 = 88/7 = (84/7 + 4/7) = (12 + 4/7) \text{ cubiti.}$$

L'area del semicerchio è:

$$A_{ACB} = AB/2 * (ACB)/2 = 8/2 * (12 + 4/7)/2 = 2 * (12 + 4/7) =$$
$$= (24 + 8/7) = (25 + 1/7) \text{ cubiti}^2.$$

\- APPROFONDIMENTO -

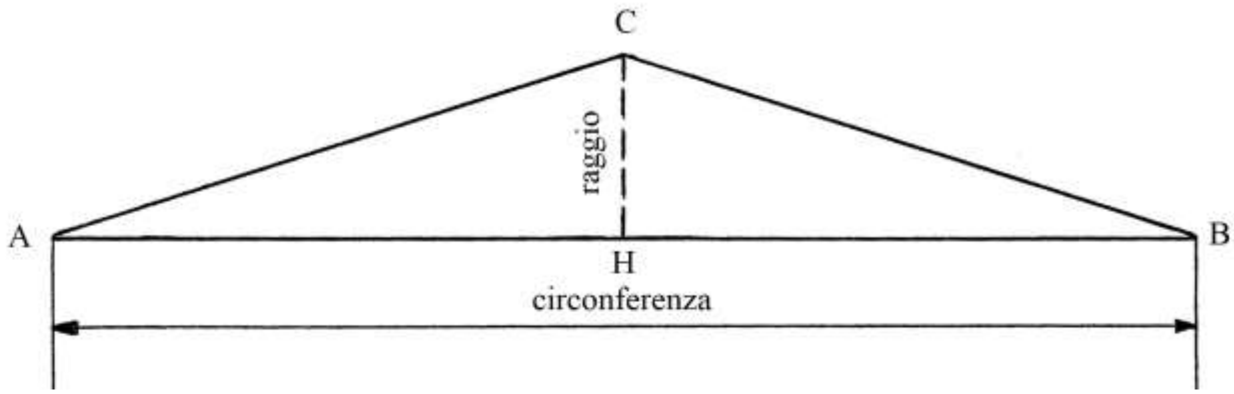
Il *moltiplicatore* 88/7

La frazione 88/7 equivale al *numero misto* (12 + 4/7).

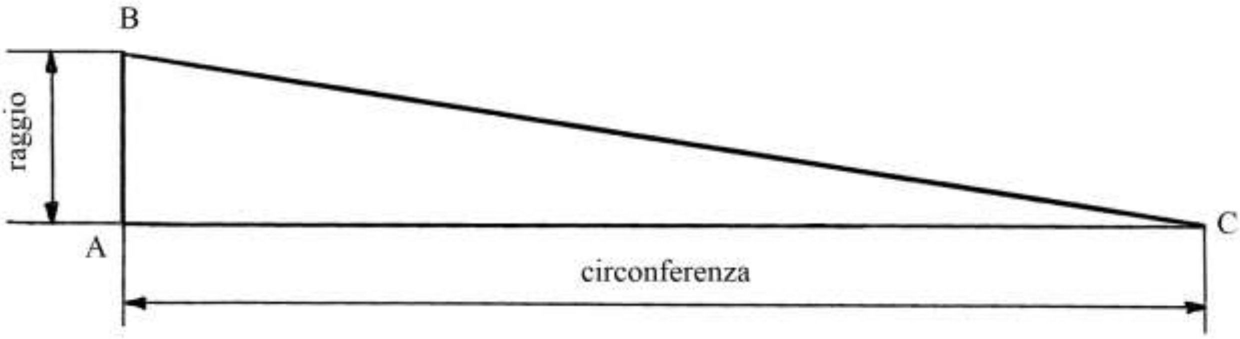
Questa espressione è il *moltiplicatore della superficie* e si ritrova – senza essere citato con questa espressione – in alcuni successivi trattati degli abacisti toscani del Medioevo e del Rinascimento (ad esempio in quelli di Paolo Gherardi e di Orbetano da Montepulciano).

Approfondiamo l'origine e il significato del *moltiplicatore*.

L'area di un cerchio è assimilabile a quella di un triangolo isoscele che ha la base AB lunga quanto la circonferenza e altezza CH lunga quanto il raggio:



oppure a quella di un triangolo rettangolo con cateti lunghi quanto la circonferenza e il raggio:



Nel primo caso (triangolo isoscele) l'area è data da:

$A_{ACB} = (AB * CH)/2 = (\text{circonferenza} * \text{raggio})/2$.

Ma:

circonferenza = diametro * 22/7 (2 * raggio) * 22/7 = 44/7 * raggio.

Inversamente:

raggio = circonferenza/(44/7) = circonferenza * 7/44.

Sostituendo il valore appena trovato del raggio nella formula dell'area del cerchio si ha:

$A_{CERCHIO} = (\text{circonferenza}) * (\text{circonferenza} * 7/44)/2 = \text{circonferenza}^2 * 7/88$.

Da questa formula si può ricavare la lunghezza della circonferenza:

$\text{circonferenza} = \sqrt{(A_{CERCHIO} * 88/7)}$.

La frazione 88/7 vale:

88/7 = (12 + 4/7) ed è il *moltiplicatore della superficie*: esso corrisponde al rapporto fra il quadrato della lunghezza della circonferenza e l'area del cerchio e cioè:

$\text{circonferenza}^2 = A_{CERCHIO} * 88/7$ e

$(\text{circonferenza}^2)/(A_{CERCHIO}) = 88/7$.

Un'altra via permette di giungere allo stesso risultato: l'area di un cerchio di raggio *r* è data da:

Area cerchio = $\pi * r^2$, mentre la circonferenza è lunga:

circonferenza = 2 * π * r.

Ne consegue che:

$circonferenza^2/A_{CERCHIO} = (4 * \pi^2 * raggio^2)/(\pi * raggio^2) = 4 * \pi$.

Sostituendo nell'ultima formula al valore di π quello approssimato di 22/7, risulta:

4 * 22/7 = 88/7 = (12 + 4/7).

In conclusione, la frazione 88/7 è il valore approssimato di 4*π.

- -

Un'altra formula per l'area di un semicerchio

Savasorda illustrò un altro metodo: elevare al quadrato la lunghezza della corda – il diametro AB – e sottrarne (1/7 + 1/14):

$AB^2 * (1 – 1/7 – 1/14) = 8^2 * (14 – 2 – 1)/14 = 64 * 11/14 = (50 + 2/7)$.

Calcolare la metà di questo ultimo dato:

$A_{SEMICERCHIO} = (50 + 2/7)/2 = (25 + 1/7)$ $cubiti^2$.

Lucio Giunio Moderato Columella (4 – 70) è stato uno scrittore romano che ha lasciato un importante trattato di agricoltura, il *De re rustica* ("L'arte dell'agricoltura").

Nel V libro della sua opera Columella ha fornito una serie di regole geometriche empiriche per misurare l'area di campi di forma varia e fra le altre una per calcolare l'area di un segmento circolare che è riassunta nella formula che segue:

$Area_{segmento\ circolare} = [(corda + freccia)/2] * 4 + 1/14 * (corda/2)^2$.

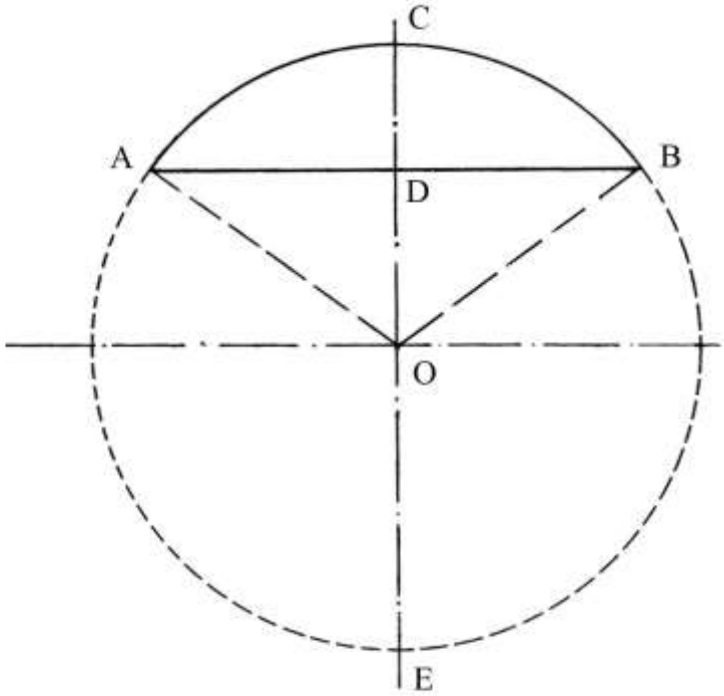
Applichiamo la formula di Columella a questo caso: la corda AB è lunga 8 cubiti e la freccia OC è 4 cubiti:

$Area_{segmento\ circolare} = [(8 + 4)/2] * 4 + 1/14 * (8/2)^2 = (12/2) * 4 + 1/14 * 16 =$
$= (24 + 16/14) = (24 + 8/7) = (25 + 1/7)$ $cubiti^2$.

La formula di Columella è corretta e fornisce lo stesso risultato calcolato da Savasorda.

La seconda classe dei segmenti circolari

Nella figura che segue è mostrato il segmento circolare ACB che è *minore* di un semicerchio:



Esso è delimitato dall’arco di circonferenza passante per i punti A, C e B e dalla corda AB.

Il segmento CD è la *freccia*, di lunghezza inferiore a quella del raggio dell’arco ACB e più corto di metà della corda:

$$CD < AD.$$

Infatti la corda AB è lunga 8 e la freccia CD 2 cubiti.

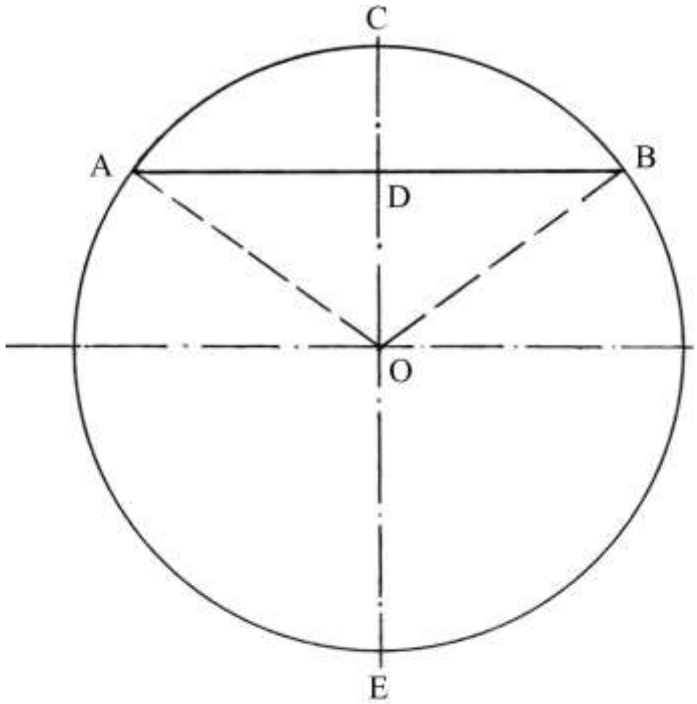
Non è possibile ricavare l’area del segmento circolare senza prima conoscere il diametro del cerchio di cui esso è una parte. A questo scopo, Savasorda propose la seguente procedura:

* calcolare metà della corda AB ed elevare al quadrato: $(AB/2)^2 = (8/2)^2 = 16$;
* dividere per la lunghezza della freccia: $16 : CD = 16 : 2 = 8$;
* sommare l’ultimo quoziente alla lunghezza della corda:

$8 + CD = 8 + 2 = 10$ cubiti, diametro del cerchio.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Una riprova della validità di questa procedura è fornita da Savasorda con la tracciatura dell’intera circonferenza di centro O la cui posizione è fissata sul prolungamento della freccia a distanza uguale a $10 : 2 = 5$ cubiti dal punto C.



Savasorda fece ricorso alla proposizione 35 del libro III degli *Elementi* di Euclide: i prodotti AD * DB e CD * DE sono uguali e cioè: AD * DB = CD * DE.

Da questa uguaglianza è possibile ricavare la lunghezza di DE:

DE = (AD * DB)/CD = (4 * 4)/2 = 8 cubiti.

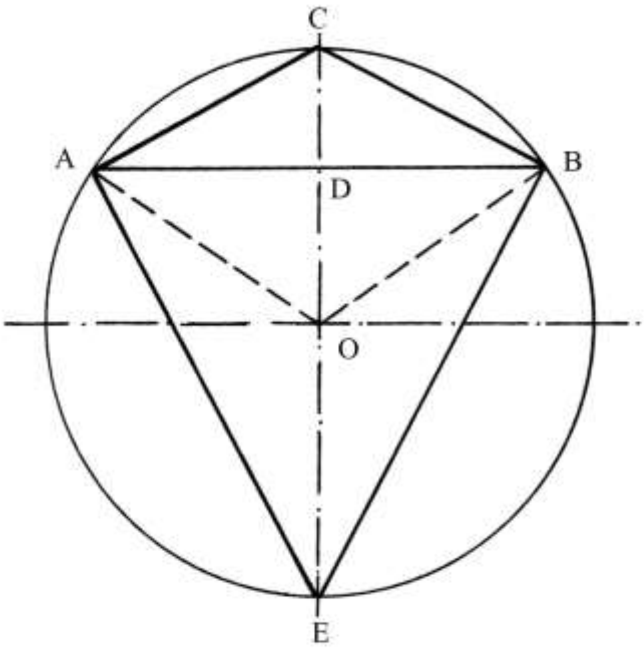
Il diametro CE è lungo: CE = CD + DE = 2 + 8 = 10 cubiti.

Savasorda applicò il *teorema delle corde*. Le corde AB e CE sono entrambe inscritte nello stesso cerchio e i loro punti estremi sono collocati sulla circonferenza: inoltre, esse si intersecano ad angolo retto nel punto D (che taglia AB in due segmenti di uguale lunghezza).

Per il teorema delle corde vale la seguente proporzione:

CD : AD = DB : DE   dalla quale consegue la formula vista in precedenza.

Il problema può essere risolto anche applicando il *2° teorema di Euclide* sui triangoli rettangoli inscritti in un semicerchio:



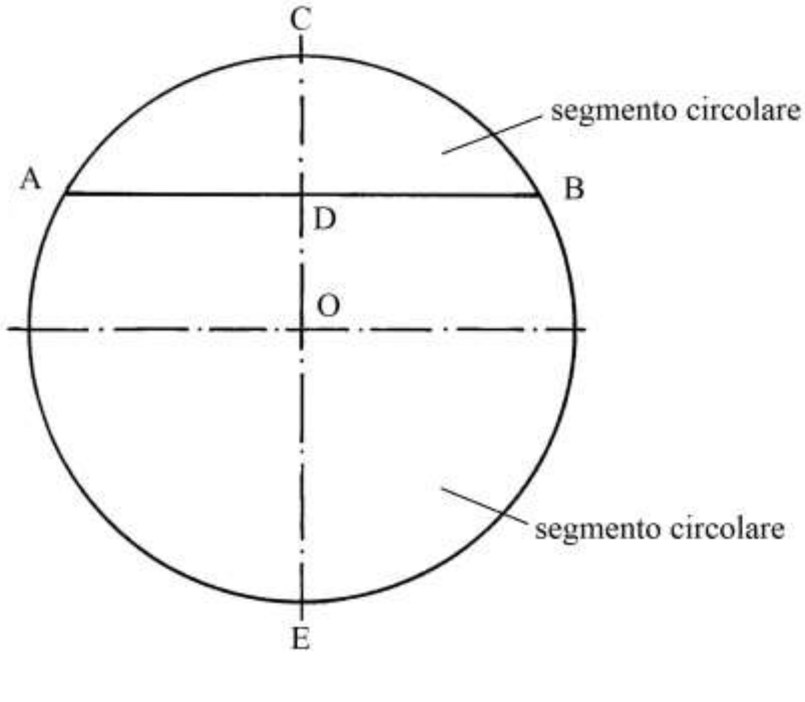
ACE e BCE sono due triangoli rettangoli inscritti nello stesso cerchio, simmetrici rispetto al diametro CE che è l'ipotenusa di entrambi, e di uguali dimensioni.

Per il 2° teorema di Euclide sui triangoli rettangoli, l'altezza AD è *medio proporzionale* fra le lunghezze delle proiezioni (CD e DE) dei due cateti (AC e AE) sull'ipotenusa (CE):

CD : AD = AD : DE dalla quale

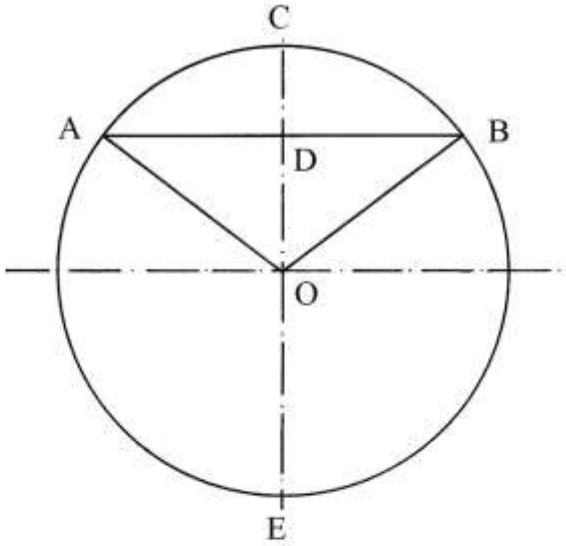
DE = AD * AD/CD = AD * DB/CD che è la formula ricavata dall'applicazione del *teorema delle corde*.

Nota: la corda AB divide il cerchio in *due* segmenti circolari:



%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Per calcolare l'area del segmento circolare Savasorda suggerì di tracciare i raggi colleganti gli estremi della corda AB con il centro O: sono OA e OB.



Il raggio del cerchio è lungo 5 cubiti, la corda AB è 8 e la freccia CD è 2 cubiti.

La procedura contiene i seguenti passi:

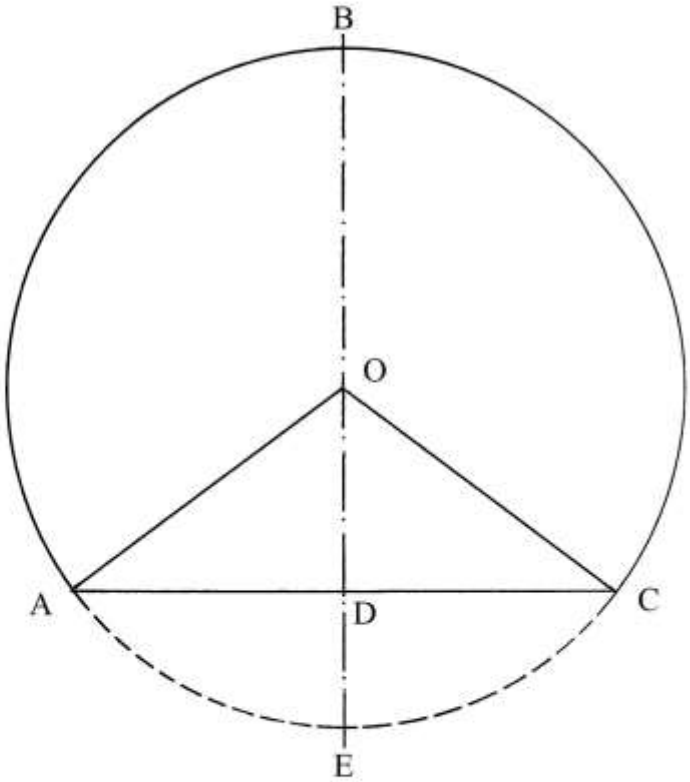
* moltiplicare la lunghezza del raggio OB per metà di quella dell'arco AB:
  OB * arco CB, area del settore circolare OACB;
* calcolare l'area del triangolo OAB;
* sottrarre questa ultima area da quella del settore circolare: il risultato è l'area del segmento circolare ACB.

L'area del triangolo OAB è:

$$A_{OAB} = (OD * AB)/2 = (OC – CD) * AB/2 = (5 – 2) * 8/2 = 3 * 4 = 12 \text{ cubiti.}$$

<u>La terza classe dei segmenti circolari</u>

Nella figura che segue è presentato un segmento circolare, ABCD, che ha area maggiore di quella di un semicerchio:

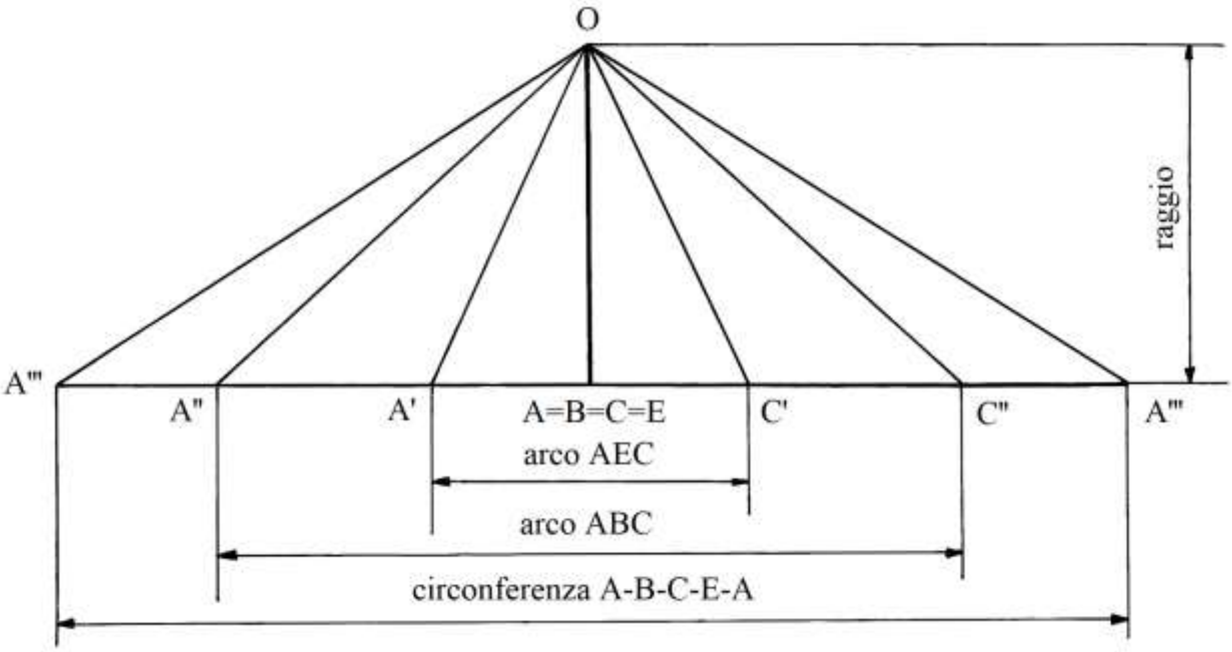


Il segmento circolare ABCD è delimitato dall'arco di circonferenza ABC e dalla corda AC.
DB è la freccia: essa è lunga 12 cubiti ed ha la stessa lunghezza della corda AC.
L'arco ABC fa parte della circonferenza di centro O e raggi OA, OB e OC.
Savasorda propose un semplice metodo per calcolare l'area del segmento ABCD dividendo la figura in due parti:

* il settore circolare ABCO;
* il triangolo isoscele AOC.

I passi della procedura di Savasorda sono i seguenti:

* calcolare il quadrato della metà della lunghezza della corda: $(12 : 2)^2 = 6^2 = 36$;
* dividere per la lunghezza della freccia: $36 : 12 = 3$;
* sommare l'ultimo quoziente alla freccia: $3 + 12 = 15$ cubiti, lunghezza del *diametro* BE;
* dividere la lunghezza del diametro per 2: $15 : 2 = 7{,}5$ cubiti;
* moltiplicare 7,5 per la metà della lunghezza dell'arco ABC: il risultato è l'area del settore circolare ABCO; [Savasorda assimila il settore ABCO a un triangolo che ha la base lunga quanto l'arco ABC e l'altezza uguale al raggio OB: nella figura che segue sono poste a confronto le lunghezze presenti nella precedente figura:



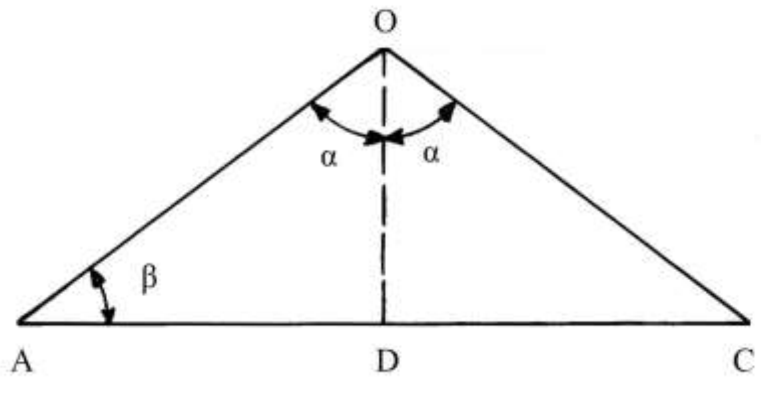
Il triangolo A'''OA''' rappresenta l'area dell'intero cerchio, quello A''OA'' è l'area del segmento circolare ABCD e il triangolo A'OC' corrisponde all'area del segmento circolare AOCE];

* calcolare l'area del triangolo AOC e sommarla al precedente dato: il risultato è l'area del segmento circolare ABCD.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Nel triangolo AOC si hanno le seguenti lunghezze:

* AC = 12 cubiti;
* ACD = DC = 6 cubiti;
* OD = 4,5 cubiti;
* OA = OC = 7,5 cubiti.



L'area di AOC è:

$A_{AOC} = (AC * OD)/2 = (12 * 4,5)/2 = 27$ cubiti^2.

AOD e ODC sono due triangoli rettangoli con uguali dimensioni. Consideriamo uno dei due, quello AOD: le lunghezze dei suoi lati formano una terna {4,5-6-7,5}, chiaramente derivata dalla primitiva {3-4-5}:

$1,5 * \{3\text{-}4\text{-}5\} = \{4,5\text{-}6\text{-}7,5\}$.

Il seno dell'angolo AOD = α è:

$\text{sen}\ \alpha = AD/AO = 6/7,5 = 0,8$.

Ad esso corrisponde un angolo

$\alpha \approx 53° \ 50'$.

Il coseno di α è:

$\cos \alpha = OD/AO = 4,5/7,5 = 0,6$.

La tangente di α è:

$\text{tg}\ \alpha = AD/OD = 6/4,5 = 1,(33)$.

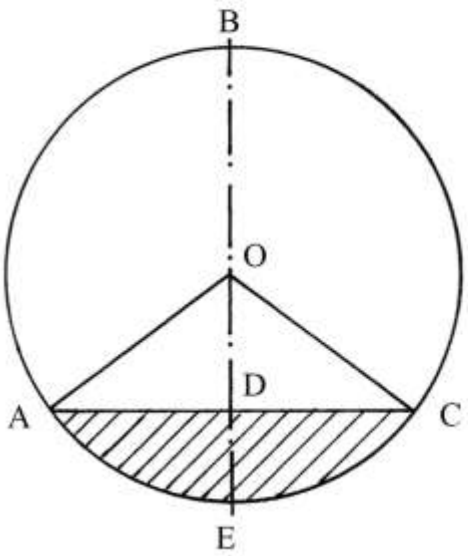
L'angolo β è ampio:

$\beta \approx 90° - 53° \ 50' \approx 36° \ 10'$.

- APPROFONDIMENTO -

Savasorda non calcolò l'area del segmento circolare descritto nel precedente paragrafo, ma si limitò a rimandare alle procedure impiegate nei casi già visti.

Inoltre, non suggerì una soluzione indiretta ma semplice: calcolare l'area del segmento circolare ADCE (tratteggiata nella figura che segue), rientrante fra i segmenti circolari di *seconda classe*:



L'area del segmento ABC è data dalla differenza fra quella del cerchio e quella di ADCE.

Per risolvere il problema, riprendiamo i dati numerici già acquisiti: la corda AC e la freccia DB hanno uguale lunghezza, 12 cubiti.

Con i calcoli di Savasorda è stata ricavata la lunghezza del diametro BE che è di 15 cubiti. Quindi, la freccia DE è lunga $DE = BE – BD = 15 – 12 = 3$ cubiti.

L'area del cerchio è:

$A_{\text{CERCHIO}} = 11/14 * \text{diametro}^2 = 11/14 * 15^2 = 11/14 * 225 = (176 + 11/14)\ \text{cubiti}^2$.

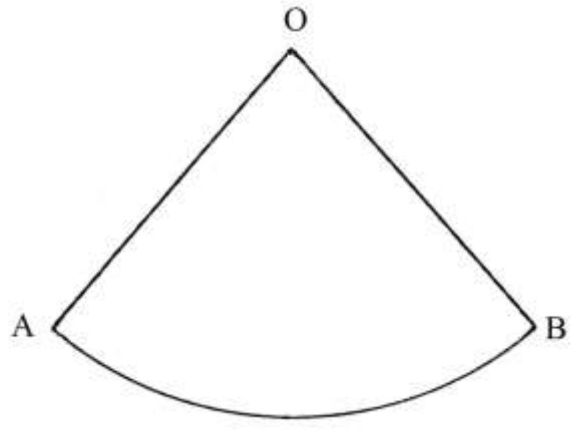
L'area del segmento circolare ABCD è data da:

$A_{\text{ABCD}} = A_{\text{CERCHIO}} – A_{\text{AEC}}$.

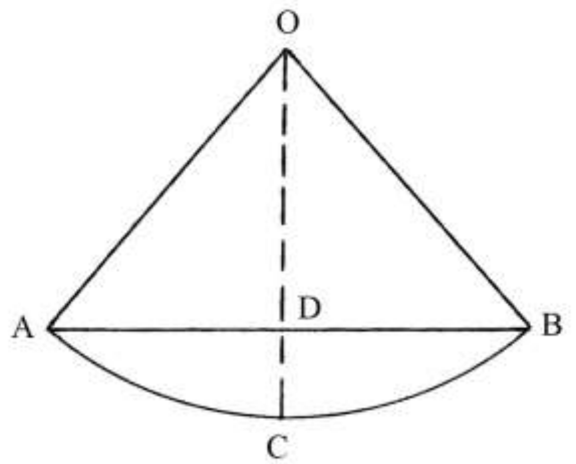
- -

Generalizzazione del metodo di Savasorda

La figura che segue mostra il settore circolare OAB:

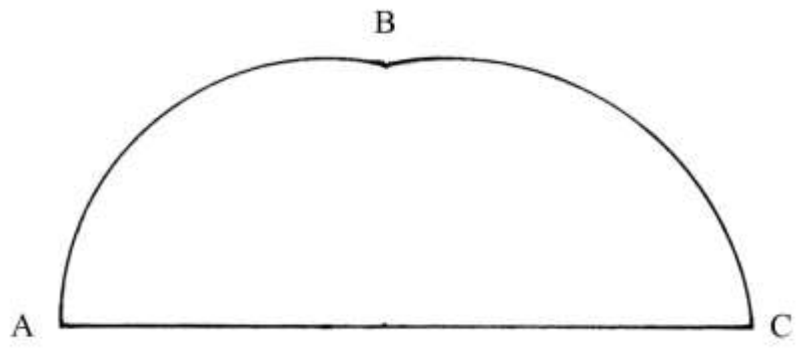


Savasorda spiega che la sua area è calcolabile dividendo la figura in due poligoni per mezzo della corda AB:



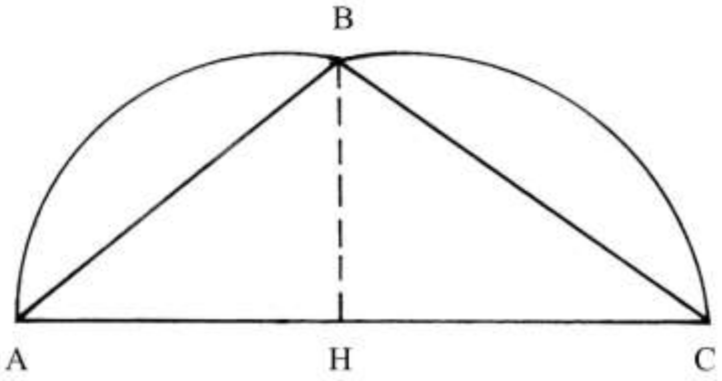
Due settori circolari uniti

Il terreno che deve essere misurato ha la forma mostrata nello schema che segue:

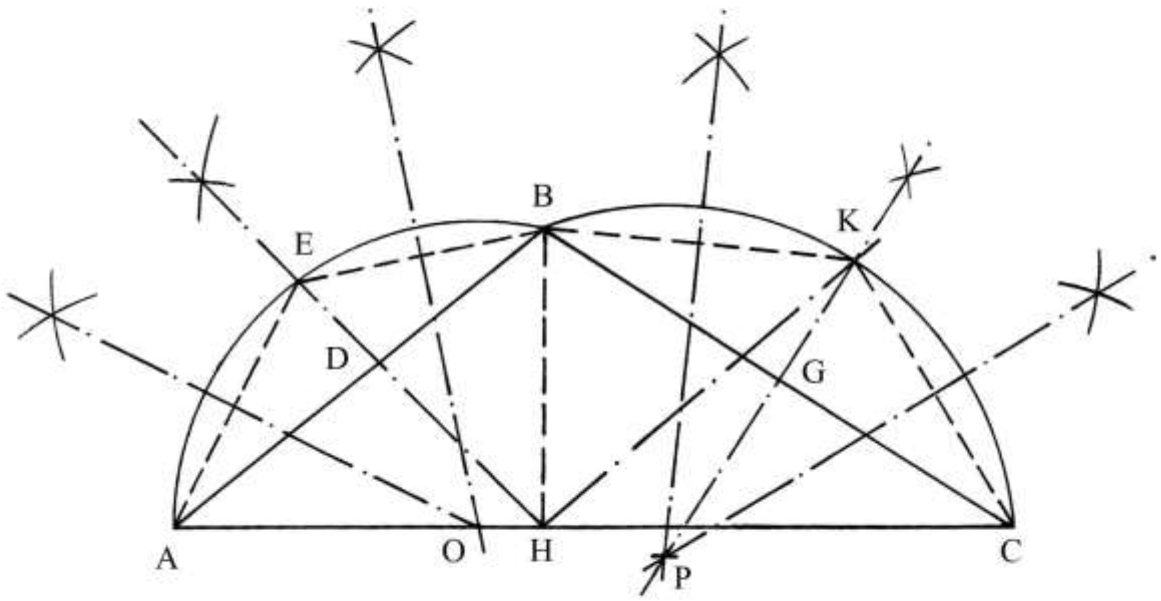


La curvilinea ABC è formata da due archi di circonferenza ed è terminata dal segmento AC.

Dal punto B è abbassata la perpendicolare BH e sono tracciate le corde BA e BC:



Nella figura che segue sono ricavate le posizioni dei due centri degli archi di circonferenza, O e P:

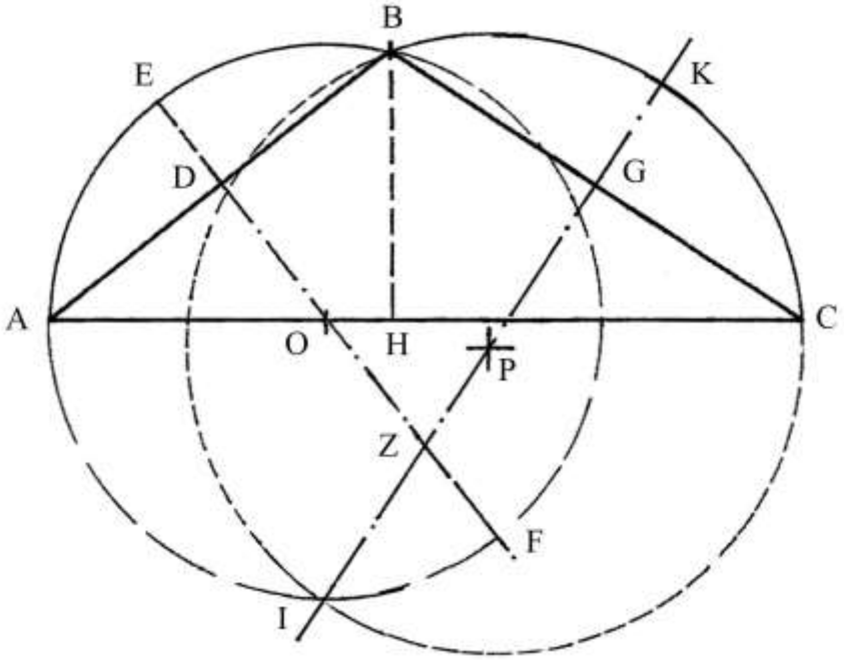


AB e BC sono due corde. HE e HK sono due bisettrici. E e K sono i punti medi rispettivamente dell'arco AB e dell'arco BC.

Gli assi delle corde AE e EB si incontrano nel punto O, centro dell'arco AEB.

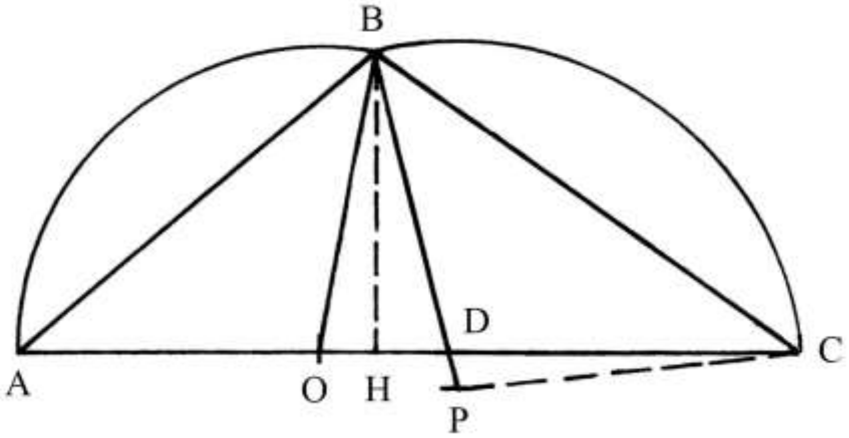
A loro volta, gli assi delle corde BK e KC si incrociano nel punto P, centro dell'arco BKC.

Lo schema che segue presenta le due circonferenze di centri O e P disegnate per intero.



Gli assi di simmetria: EF e KI si intersecano in Z.
Infine, le due circonferenze si tagliano in I.

Collegare O e P con B e P con C; D è l’intersezione fra il raggio PB e il segmento AC:



Il terreno è formato da *tre* distinte aree:

* ABO è un settore circolare;
* OBD è un triangolo scaleno con BH altezza relativa alla base OD;
* BPC è un altro settore circolare: da esso è tagliato il triangolo DPC.

AB divide ABO in due parti:

* il triangolo OAB;
* il segmento circolare A(E)B.

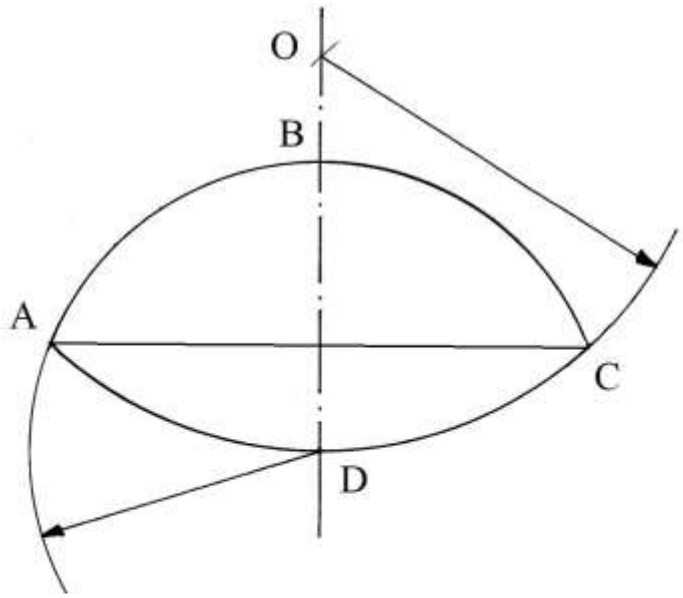
A sua volta, BC scompone BDC in due figure:

* il triangolo BDC;
* il segmento circolare B(K)C.

L’area del terreno è data dalla somma delle aree che lo compongono, tutte calcolabili singolarmente.

Terreno di forma curvilinea

Un terreno è definito da due archi di circonferenza: sono ABC e ADC.

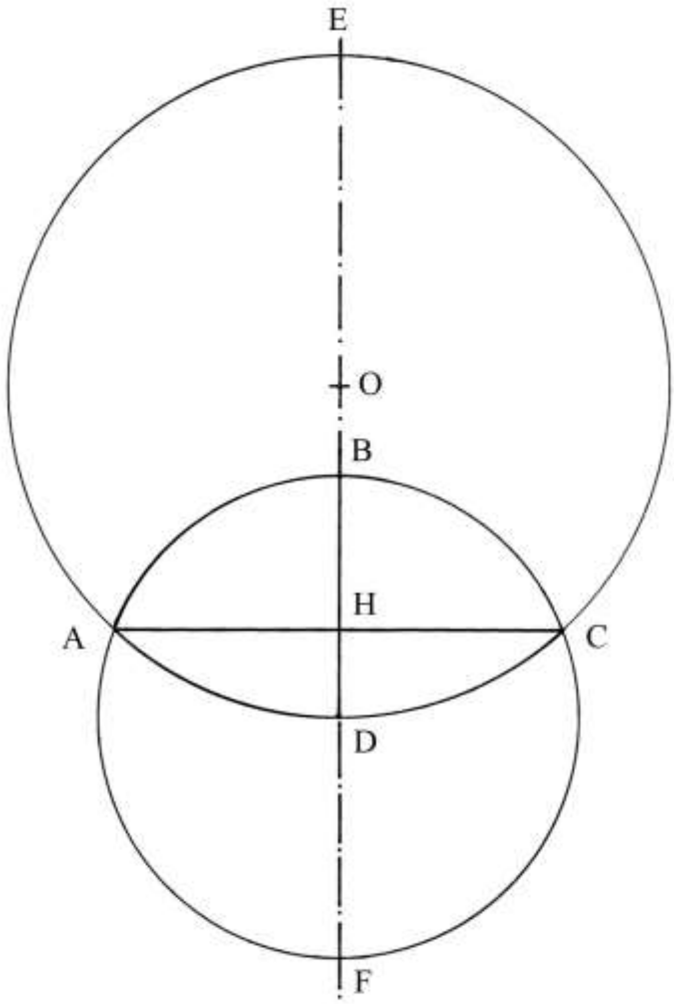


O e D sono i centri dei due archi. AC è una corda comune ai due segmenti circolari.

I due archi sono originati da due circonferenze: il centro D giace sulla circonferenza più grande.

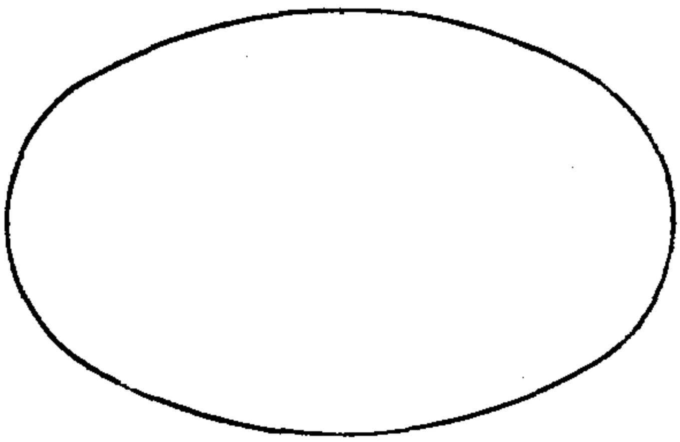
I due centri sono collocati su di una retta passante per i punti E e F.

L'area dell'intero terreno è data dalla somma delle aree dei due segmenti circolari ABCH e ADCH.

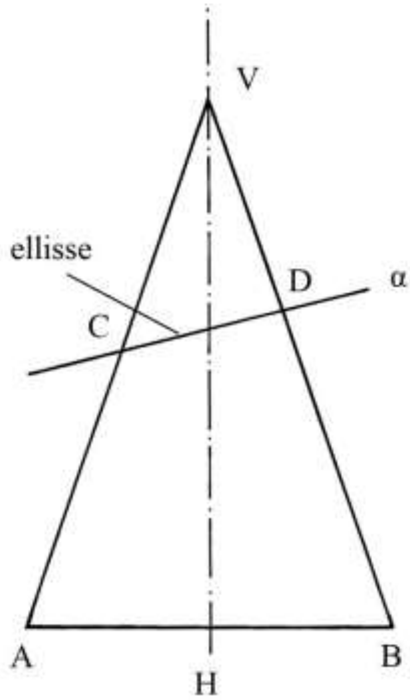


<u>Terreno di forma ovale</u>

Un campo ha la forma mostrata nella figura:

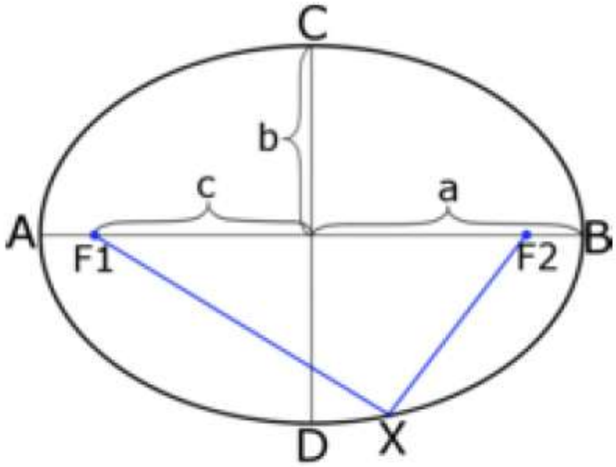


La forma è chiusa e la curva che la delimita non è né un cerchio né un'ellisse, ma un'*ovale*. Non è prodotta da una sezione di un cono, come è il caso dell'ellisse:



L’ellisse è generata dalla sezione di un cono retto con un piano, α, che non è perpendicolare all’asse di simmetria VH. CD è l’asse maggiore dell’ellisse.

La figura che segue, riprodotta da *it.wikipedia.org*, presenta un’ellisse:

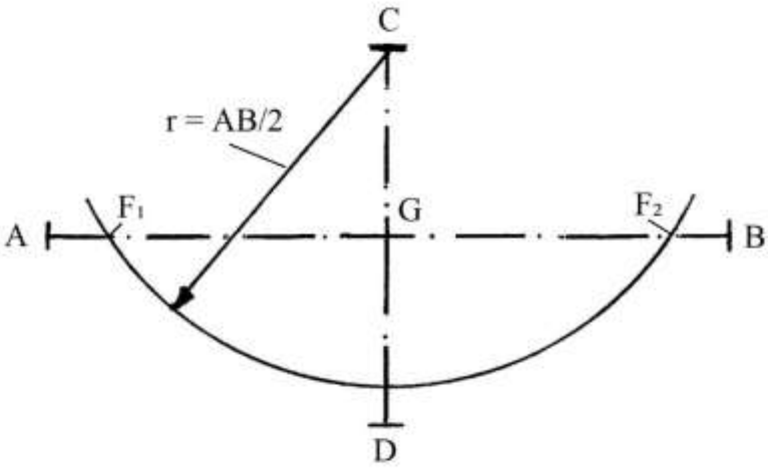


AB è l’asse maggiore e CD è l’asse minore. Sull’asse maggiore sono collocato due punti, F_1 e F_2, che sono chiamati *fuochi*.

La somma delle distanze di un punto della curva, ad esempio X, dai due fuochi è costante:

$XF_1 + XF_2 = AB$, ed è uguale alla lunghezza dell’asse maggiore AB.

Lo schema che segue descrive il posizionamento dei fuochi sull’asse maggiore:



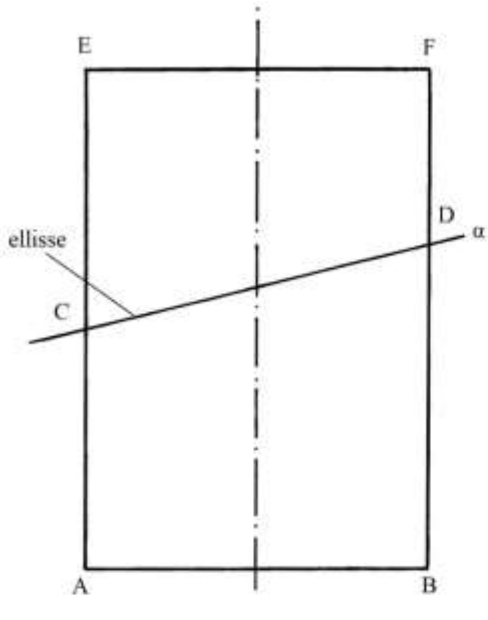
Sono tracciati i due assi AB e CD, fra loro perpendicolari: essi si dividono reciprocamente a metà.

Con apertura uguale a AB/2 = AG = GB, fare centro in C e disegnare un arco di circonferenza che taglia AB in due punti: sono F_1 e F_2.

L'ellisse non è disegnabile con archi di circonferenza raccordati: invece l'ovale è ottenuto con il raccordo di più archi di circonferenza: esistono diversi metodi approssimati per disegnare questa seconda curva chiusa.

L'ellisse e l'ovale sono curve assai vicine: lo studio degli anfiteatri costruiti dai Romani ha rivelato che essi hanno generalnente forma di ovali assai vicine ad ellissi.

Savasorda sceglie quella forma ovale e sostiene che essa non proviene dalla sezione di un cilindro:



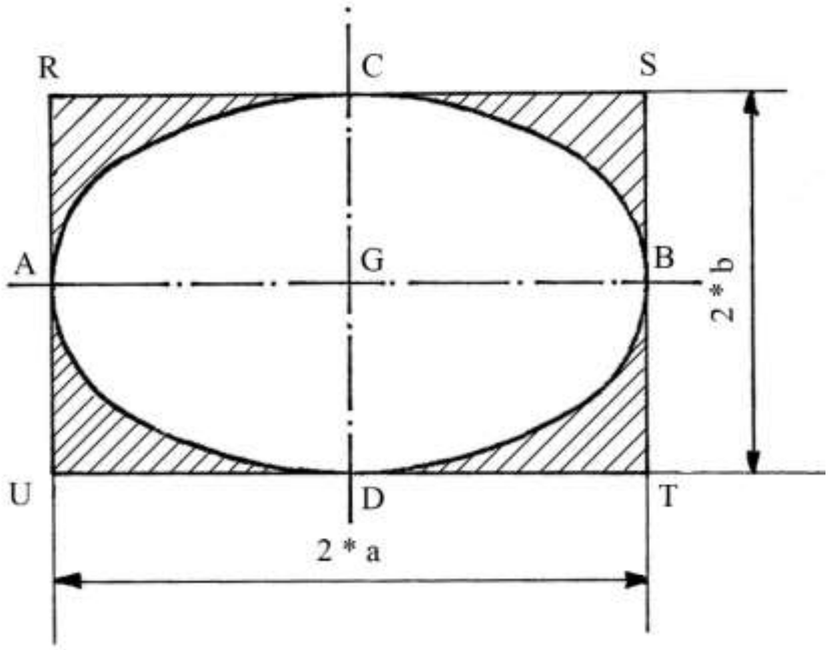
Nei suoi spostamenti fra la Catalogna e la Provenza Savasorda avrà avuto l'opportunità di osservare e studiare le forme delle rovine degli anfiteatri costruiti dai Romani.

L'area di un ellisse è data da:

$A_{ELLISSE} = \pi * (\text{asse maggiore}/2) * (\text{asse minore}/2) = \pi/4 * (\text{asse maggiore}) * (\text{asse minore})$.

Per analogia con l'area dell'ellisse, Savasorda calcola l'area dell'ovale con la procedura che segue: i due diametri sono anche gli unici due *assi di simmetria* della figura;

* tracciare i due diametri perpendicolari AB e CD che si incontrano nel punto G:



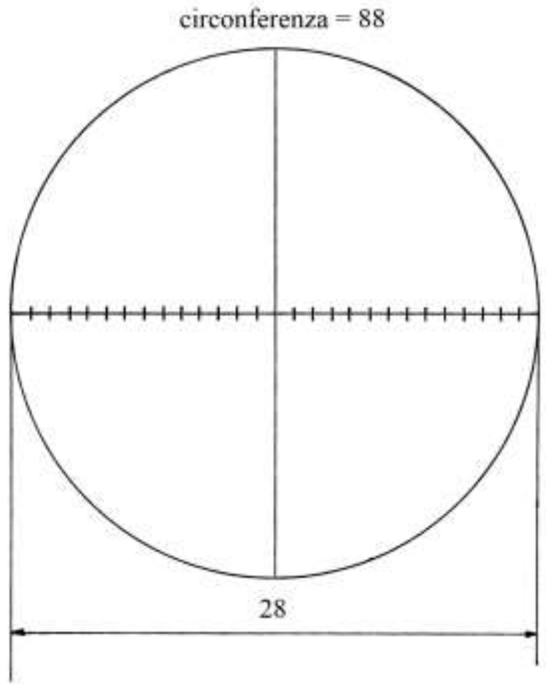
* l'ovale è inscritta nel rettangolo RSTU;
* misurare le lunghezze dei due assi: AB = 2*a e CD = 2*b;
* moltiplicare le lunghezze dei due assi AB * CD = 4 * a * b;
* sottrarre dal precedente prodotto 1/7 e 1/14:
  4 * a * b * (1 – 1/7 – 1/14) = 4 * a * b * 11/14 = 22/7 * a * b, area dell'ovale [Savasorda ha usato il rapporto approssimato, 11/14, fra l'area di un cerchio inscritto in un quadrato e l'area di questo ultimo].

<u>Lunghezze di corde e frecce nei cerchi</u>

I paragrafi da 113 a 123 del trattato di Savasorda sono dedicati alla soluzione di problemi che possono rientrare nell'ambito della *trigonometria*.

L'Autore fornisce anche delle tavole.

Un ipotetico cerchio ha il diametro diviso in 28 parti uguali e la circonferenza è lunga 88 parti uguali:



La circonferenza è lunga:

circonferenza = π * d, con *d* è indicato il diametro.

Usando per π il valore approssimato 22/7, si ha:

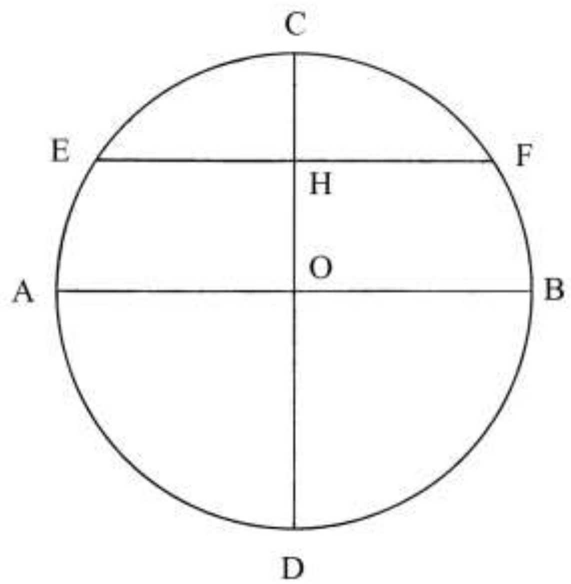
circonferenza = 22/7 * 28 = 88.

Fa di nuovo la sua comparsa il numero 88, già incontrato nelle precedenti pagine 90-92, in relazione al cosiddetto moltiplicatore 88/7.

Una tabella, qui non riprodotta, permette di calcolare la lunghezza di una corda conoscendo quelle dell'arco da essa sotteso e quella della circonferenza.

I metodi impiegati da Savasorda possono essere riassunti in alcune formule:

* il diametro CD del cerchio è *d*;
* la corda EF è *c*;
* la freccia CH è indicata con *f*;
* la lunghezza di un arco (ECF) è *a*.



La freccia *f* è ricavata dalla formula:

$$f = d/2 \pm \sqrt{[(d/2)^2 - (c/2)^2]}.$$

Il simbolo " ± " indica che sono possibili due soluzioni:

$HD = CD/2 + \sqrt{(CD/2)^2 - (EF/2)^2}]$

$CH = CD/2 - \sqrt{(CD/2)^2 - (EF/2)^2}].$

Sommando le due espressioni si ha:

$HD + CH = CD/2 + \sqrt{(CD/2)^2 - (EF/2)^2}] + CD/2 - \sqrt{(CD/2)^2 - (EF/2)^2}].$

$HD + CH = CD/2 + CD/2$

$CD = CD.$

Un'altra formula permette di ricavare la lunghezza della freccia *f* conoscendo la lunghezza dell'arco ECF = *a* e quella del diametro *d*:

$f = d/2 \pm \sqrt{[(d^2 - a^2)/2]}.$

Le due soluzioni possibili sono:

$HD = CD/2 + \sqrt{[CD^2 - ECF^2)/2]}$

$CH = CD/2 - \sqrt{[CD^2 - ECF^2)/2]}.$

Sommando le due espressioni si ha:

$HD + CH = CD/2 + \sqrt{[CD^2 - ECF^2)/2]} + CD/2 - \sqrt{[CD^2 - ECF^2)/2]}$

$HD + CH = CD/2 + CD/2$

$CD = CD.$

Infine, conoscendo le lunghezze della freccia *f* e del diametro *d* possiamo ricavare quella della corda *c*:

$c = 2 * \sqrt{[f * (d - f)]}.$

Questa formula è un'applicazione del *teorema delle corde*:

$EH : CH = HD : HF$

Ma $EH = HF = c/2$ e $HD = CD - CH = d - f$. Quindi:

$c/2 : f = (d - f) : c/2$

$c^2/4 = f * (d - f)$

$c^2 = 4 * f * (d - f)$

$c = \sqrt{[4 * f * (d - f)]}$

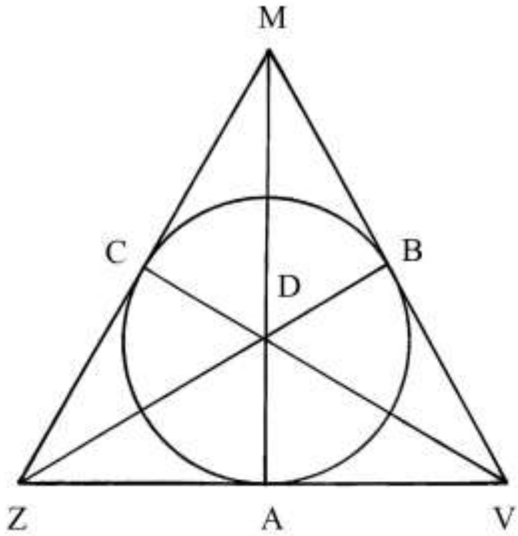
$c = 2 * \sqrt{[f * (d - f)]}$, che è la formula implicita di Savasorda.

PARTE QUINTA

Misura delle figure con più di quattro lati

Savasorda fornisce una regola con valore generale: per qualsiasi poligono nel quale si può inscrivere un cerchio tangente nei punti medi dei suoi lati è facile calcolare l'area moltiplicando il raggio del cerchio per metà del perimetro.

Il caso più semplice è quello del triangolo equilatero MVZ:



Dai tre vertici sono disegnate le perpendicolari ai lati opposti: sono MA, ZB e VC. Esse si incontrano in D, centro del cerchio inscritto di raggio DA = DB = DC.

Il cerchio è tangente al triangolo nei punti medi dei tre lati: A, B e C.

ADCZ è un trapezio che, ad opera del segmento DZ, è diviso in due triangoli rettangoli che hanno uguali dimensioni: ZDA e ZCD.

L'area di ZDA è:

$A_{ZDA} = ZA * DA/2.$

L'area di ADCZ è il doppio di quella di ZDA:

$A_{ADCZ} = 2 * A_{ZDA} = ZA * DA.$

Gli altri due trapezi ADBV e DBMC hanno aree uguali a quella di ADCZ.

La somma delle aree dei tre trapezi è uguale a quella dell'intero triangolo:

$A_{MVZ} = 3 * A_{ADCZ} = 3 * ZA * DA.$

L'espressione "3 * ZA" è uguale al semiperimetro del triangolo equilatero.

- APPROFONDIMENTO -

In un triangolo equilatero MA, ZB e VC sono:

* bisettrici dei tre angoli interni: D è l'*incentro* ed è il centro del cerchio inscritto, con raggio DA;
* altezze e il punto D è l'*ortocentro*;
* mediane che congiungono un vertice al punto medio del lato opposto: D è il *baricentro* della figura;
* infine, D è il *circocentro* perché è il centro del cerchio circoscritto al triangolo (che ha raggio DM = DV = DZ).

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Il punto D divide MA, ZB e VC in due parti di diversa lunghezza.

Consideriamo MA: per il teorema di Pitagora, l'altezza MA è così determinata:

$MA^2 = MZ^2 – ZA^2.$

MA = ZV/2 = MZ/2, quindi si ha:

$MA^2 = MZ^2 – (MZ/2)^2 = MZ^2 – MZ^2/4 = ¾ * MZ^2$ e

$MA = MZ * (\sqrt{3})/2 \approx MZ * 0,866.$

Il punto D divide MA come segue:

$DA = 1/3 * MA \approx 1/3 * MZ * 0,866 \approx 0,289 * MZ;$

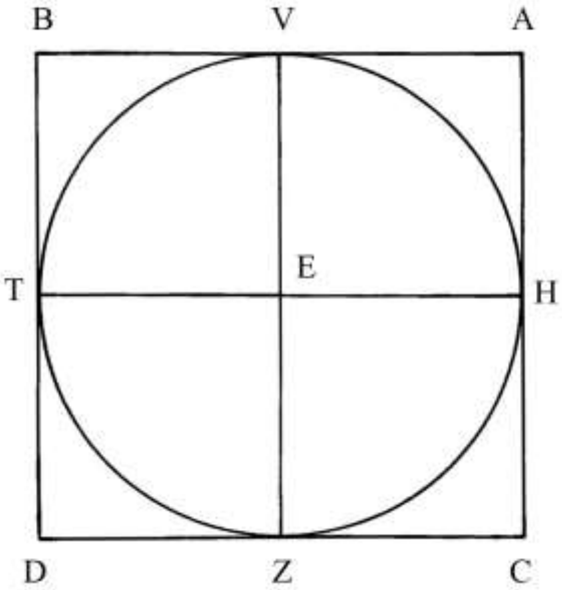
$DM = 2/3 * MA \approx 2/3 * MZ * 0,866 \approx 0,577 * MZ.$

Il rapporto DA/MZ vale 0,289 ed è l'*apotema* del triangolo equilatero: è un *numero fisso* che indica il rapporto costante esistente fra la lunghezza del raggio DA e quella dei lati del triangolo equilatero.

- -

Quadrato

Nel quadrato ABCD sono disegnate le due mediane TH e VZ che si incontrano nel baricentro E.



Fare centro in E e con raggio EH disegnare una circonferenza che risulta tangente al quadrato nei punti medi dei suoi lati.

Le mediane dividono ABCD in quattro quadrati che hanno uguali dimensioni, sia lineari che superficiali. L'area di uno dei quattro quadrati è:

$A_{AHEV} = AH * EH = AC/2 * EH$.

L'area dell'intero quadrato è:

$A_{ABCD} = 4 * A_{AHEV} = (4 * AC/2) * EH$.

L'espressione "4 * AC" è il perimetro del quadrato e EH è il raggio del cerchio inscritto che ha lunghezza uguale a metà di quella di un lato:

$EH = TH/2 = AB/2$.

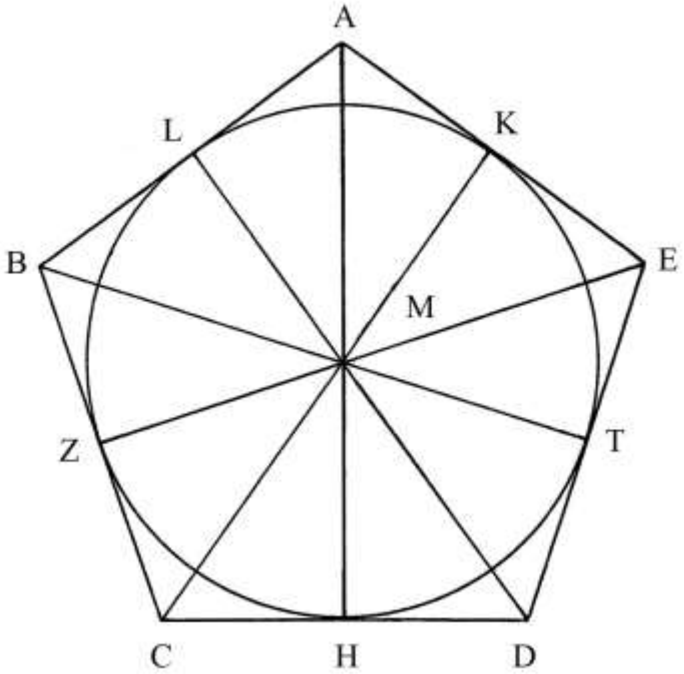
Quindi, l'area del quadrato ABCD è:

$A_{ABCD} = (4 * AC)/2 * (AB/2) = (4 * AC)/2 * (AC/2) = 4 * AC^2/4 = AC^2$.

La soluzione di Savasorda è corretta perché l'area di un quadrato è uguale al quadrato della lunghezza di un suo lato.

Area di un pentagono

ABCDE è un pentagono regolare.



Dai vertici sono tracciati cinque segmenti perpendicolarmente ai lati opposti: sono AH, BT, CK, DL e EZ. H, T, K, L e Z sono i punti medi dei lati. Essi si incontrano nel punto M, centro del cerchio inscritto di raggio MH.

I cinque segmenti dividono il pentagono regolare in cinque triangoli isosceli di uguali dimensioni: ABM, BCM, CDM, DEM e EAM.

L'area del triangolo ABM è:

$$A_{ABM} = ML * AB/2.$$

L'area dell'intero pentagono è uguale a *cinque* volte quella di ABM:

$$A_{ABCDE} = 5 * A_{ABM} = 5 * (ML * AL) = ML * (5 * AL) = ML * (5 * AB/2).$$

Il prodotto "5 * AB" è il perimetro e "5 * AB/2" è il semiperimetro.

Area di poligoni

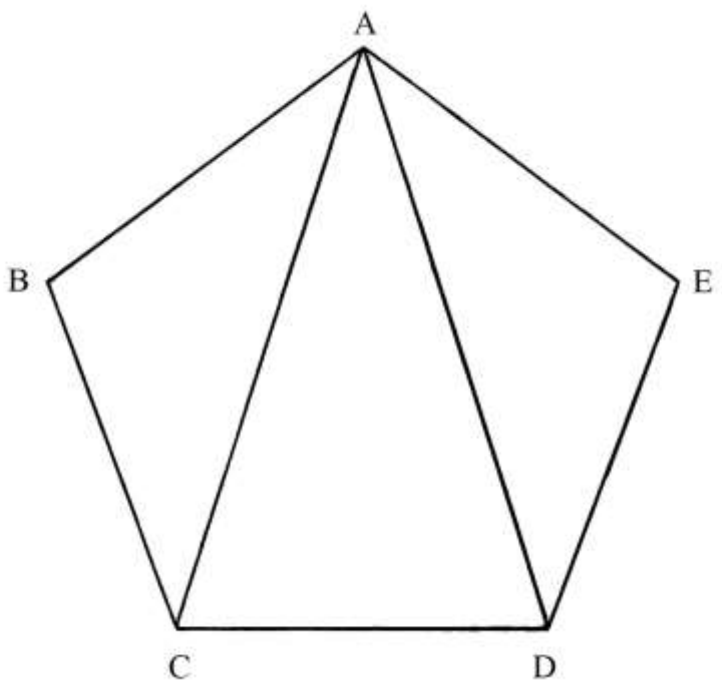
In alcuni poligoni non è sempre possibile inscrivere un cerchio: in particolare ciò accade quasi sempre nei poligoni *non regolari*.

Savasorda suggerisce di scomporre il poligono in un numero *m* di triangoli che è dato dal numero dei lati *n* meno *due*:

$$m = n – 2.$$

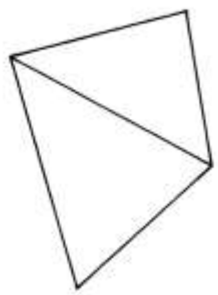
Nel caso del pentagono il risultato è:

$$m = 5 – 2 = 3.$$

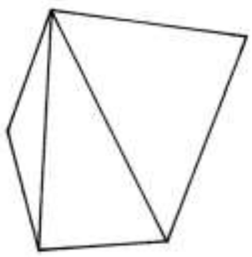


Savasorda applicò una forma di *triangolazione*: misurando le lunghezze dei lati di un triangolo è facile ricavare la sua area con l'applicazione della formula di Erone.

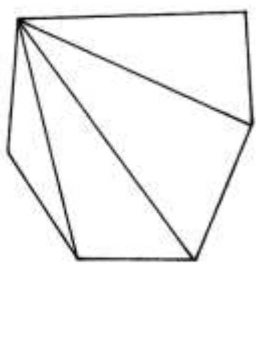
Poligoni quali un quadrilatero, un pentagono e un esagono non regolari sono scomponibili in triangoli:



quadrilatero - 2 triangoli



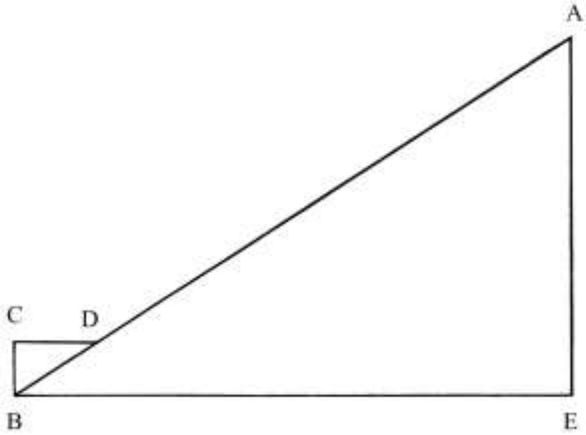
pentagono non regolare - 3 triangoli



esagono non regolare - 4 triangoli

Misura di un terreno in pendenza

Un terreno è posizionato sul fianco di una montagna.



La lunghezza di AB è di 20 cubiti.

Savasorda indica in 15 cubiti la larghezza del terreno che nello schema non è visibile perché esso è una sezione o vista frontale.

BE è la proiezione sul piano orizzontale della lunghezza di BA.

Una canna è posta in B ed è verticale: è BC. Dal punto C è collocata una seconda canna, CD, che è orizzontale. BCD è un triangolo rettangolo. Le lunghezze sono:

* CD = 2,5 cubiti;
* BD = 3 cubiti.

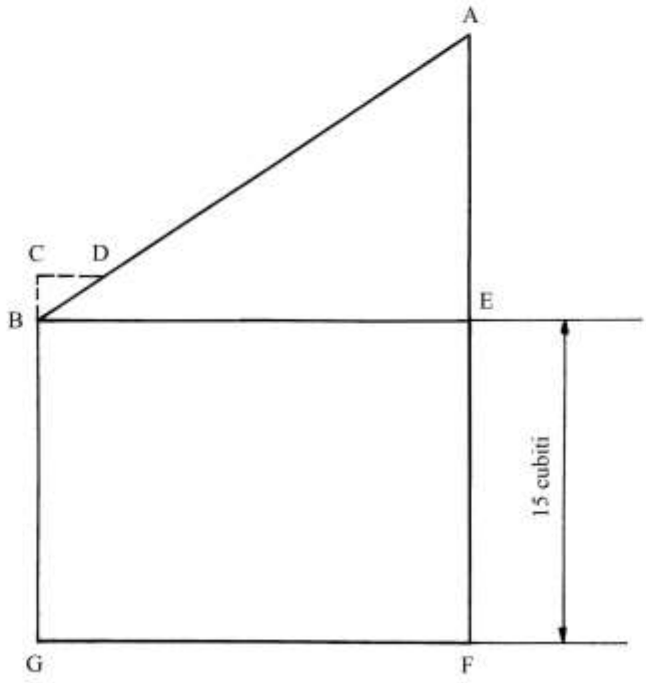
I triangoli BCD e ABE sono *simili*. Vale la proporzione:

AB : BD = BE : CD, da cui:

BE = (AB * CD)/BD = (20 * 2,5)/3 = 50/3 = (16 + 2/3) cubiti o (17 – 1/3) cubiti come scrive Savasorda.

L'Autore conclude calcolando l'area di BEFG, di cui però non mostra il risultato:

A_{BEFG} = BE * EF = (16 + 2/3) * 15 = 250 cubiti^2.

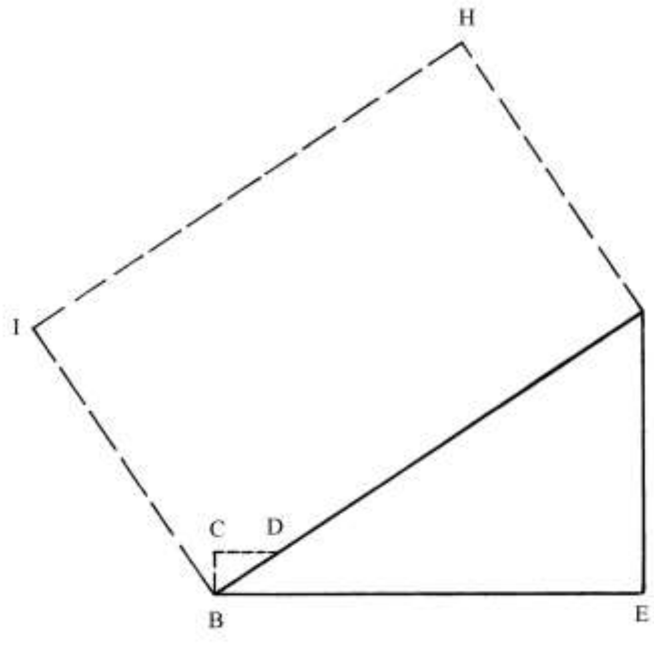


- APPROFONDIMENTO -

Il rettangolo BEFG rappresenta la proiezione su di un piano orizzontale del terreno il cui profilo è rappresentato dall'ipotenusa BA.

La soluzione accennata da Savasorda presenta delle oscurità.

Il terreno è in pendenza e la sua area è rappresentata dal rettangolo BAHI:



Questo rettangolo è il ribaltamento del terreno effettuato intorno a BA.

BAHI è la vera rappresentazione del terreno.

BA è lungo 20 cubiti e AH è 15 cubiti.

L'area di BAHI è maggiore di quella di BEFG:

$A_{BAHI} = BA * AH = 20 * 15 = 300$ cubiti^2.

- -

Savasorda conclude con il calcolo della lunghezza dell'altezza AE:

$BC : AE = BD : BA$ da cui

$AE = (BC * BA)/BD$.

La lunghezza di BC è data da:

$BC^2 = BD^2 – CD^2 = 3^2 – 2,5^2 = 9 – 6.25 = 2,75$ e

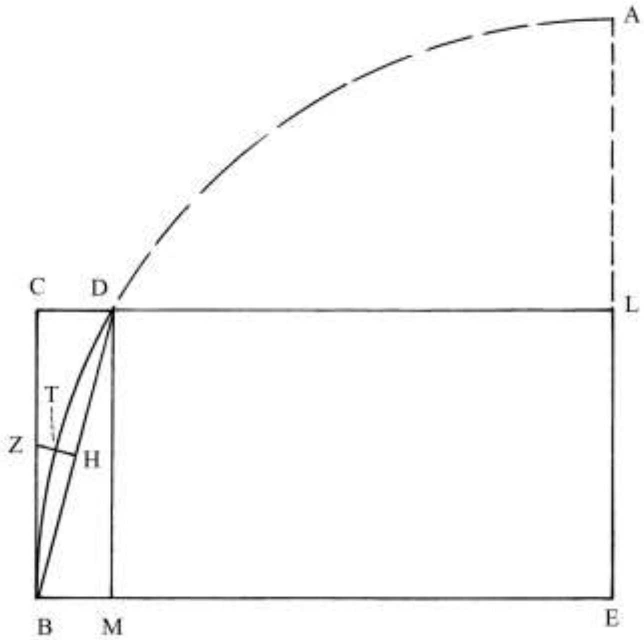
$BC = \sqrt{2,75}$ cubiti.

Sostituendo questo valore nella proporzione si ha:

$AE = (\sqrt{2,75}) * 20/3 = 11 + 1/18$ cubiti.

Terreno inclinato e curvo

Un terreno è posizionato su una collina e ha il profilo a forma di arco di circonferenza: è l'arco BD.



Tracciare la corda BD: essa è la diagonale del rettangolo BCDM e lo divide in due triangoli rettangoli che hanno uguali dimensioni.

La lunghezza di BD è:

$BD^2 = BC^2 + CD^2$ e

$BD = \sqrt{(BC^2 + CD^2)}$.

Fissare il punto medio di BD: è H.

Disegnare la freccia uscente da H: è HT. Prolungarla fino a incontrare BC in Z.

HT divide la corda BHD e l'arco BTD in due parti uguali:

* BH = HD;
* BT = TD.

Il triangolo HZB è rettangolo ed è simile al triangolo rettangolo DCB:

$DC : CB = ZH : HB$, da cui:

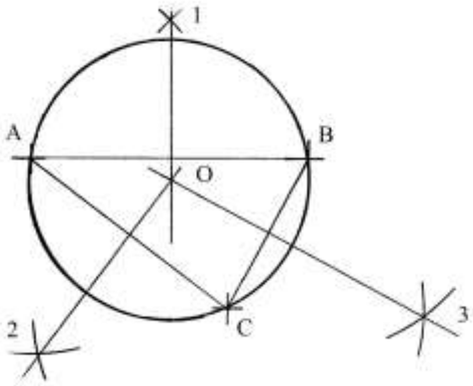
$ZH = (DC * HB)/DC$.

Conoscendo le lunghezze della corda DB e della freccia TH, l'Autore ritiene di ricavare il diametro della circonferenza di cui fa parte l'arco BTD.

Savasorda non fornisce alcun dato.

- APPROFONDIMENTO -

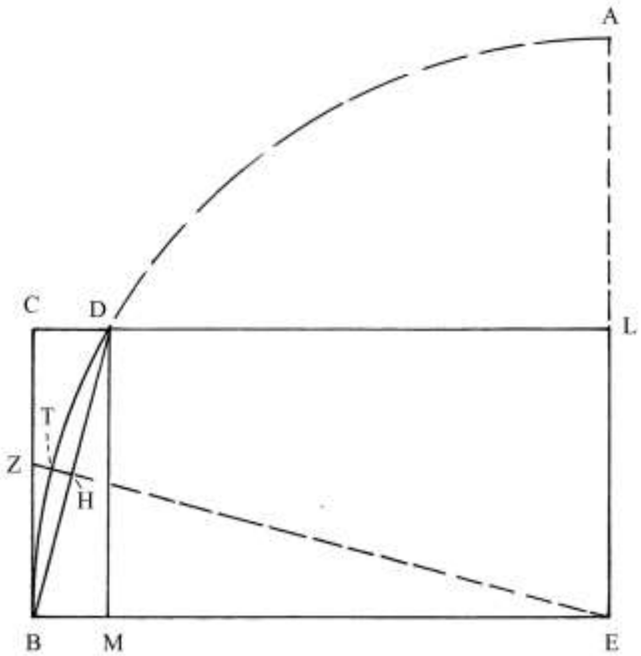
Conoscendo tre punti non allineati è possibile tracciare una circonferenza che passi per tutti e tre:



A, B e C sono i tre punti, collegati da tre segmenti: AB, AC e BC.

Tracciare gli assi dei tre segmenti: la costruzione è semplificata. Gli assi passano per i punti 1, 2 e 3 e si incontrano in O, centro della circonferenza di raggio OA = OB = OC.

Nel caso del problema studiato da Savasorda, la precedente costruzione può essere applicata ai punti B, T e D: il punto E viene a trovarsi sul prolungamento di BM e all'intersezione con il segmento passante per Z, T e H:



Dal punto E è elevata la perpendicolare a BE.

Il punto A è fissato da un arco di circonferenza DA tracciato facendo centro in E con raggio EB = ET = ED.

Secondo Savasorda BME è la misura del terreno: sia permesso a chi scrive di avanza qualche perplessità su questa affermazione.

- -

CAPITOLO III

Il Capitolo III del trattato geometrico di Savasorda è riservato alla divisione di alcune categorie di figure piane.

Divisione delle figure piane

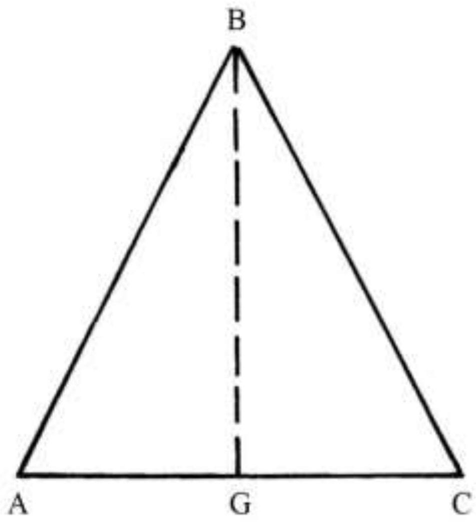
Il capitolo affronta nell'ordine la divisione dei seguenti tipi di figure piane:

* triangolari;
* quadrangolari;
* altre forme.

DIVISIONE DEI TRIANGOLI

Divisione di un terreno a forma di triangolo

Un terreno triangolare deve essere diviso in *due* parti di uguale superficie fra due soci o due fratelli, lasciando il vertice B in comune:

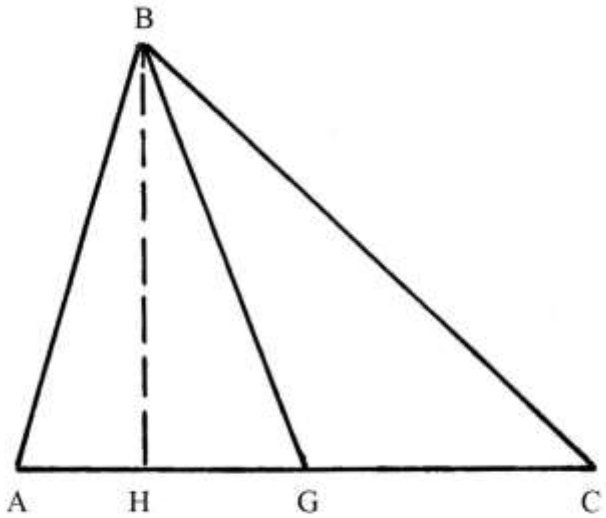


È sufficiente dividere in due parti uguali la base AC e tracciare la *mediana* BG: nell'esempio della figura, ABC è *isoscele* e BG è sia una mediana che l'*altezza* relativa alla base AC.

I triangoli ABG e GBC hanno uguale superficie.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

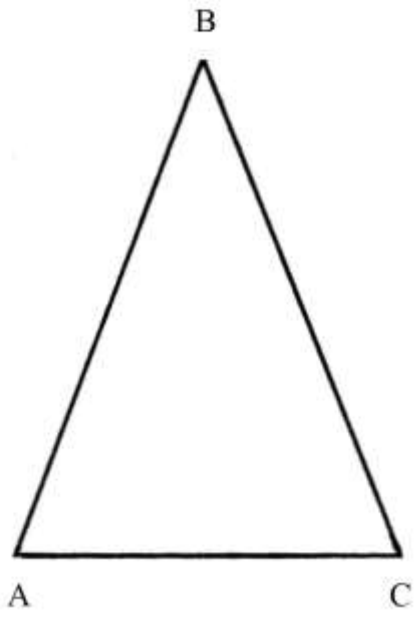
La regola vale per qualsiasi tipo di triangolo, anche *scaleno*:



Il punto G divide la base AC in due parti uguali.
I triangoli ABG e GBC hanno la stessa altezza, BH, e uguale superficie.

<u>Divisione di un triangolo con un segmento parallelo a un lato</u>

Il terreno da dividere in parti uguali fra due soci o eredi ha la forma descritta nella figura che segue. Un socio è interessato alla regione presso il vertice B e l'altro a quella vicina alla base AC:



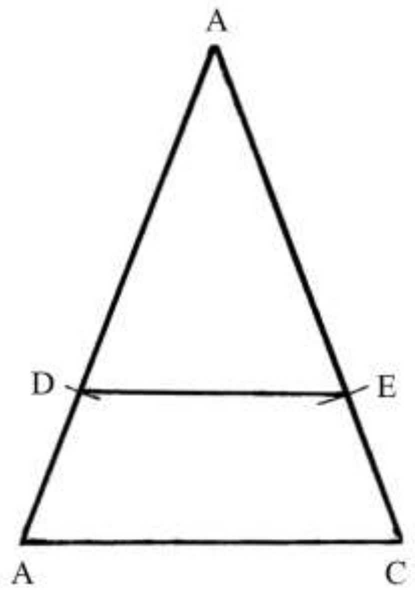
In questo caso il triangolo è *isoscele*.

Il triangolo deve essere diviso in due parti di uguale superficie con un segmento parallelo a AC che è l'unica soluzione in grado di garantire le contrapposte esigenze dei due soci.

Il metodo proposto da Savasorda è il seguente fissare il punto D in modo che

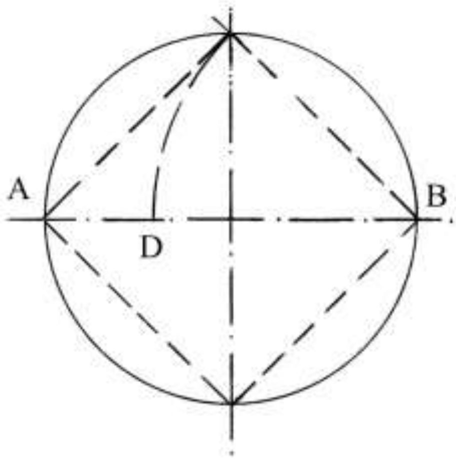
$DB^2 = AB^2/2$ da cui:

$DB = AB/\sqrt{2}= AB * (\sqrt{2})/2$.



Savasorda non fornì alcuna ulteriore spiegazione riguardo la costruzione per via geometrica della lunghezza di DB: esso è il lato di un quadrato che ha la diagonale lunga AB.

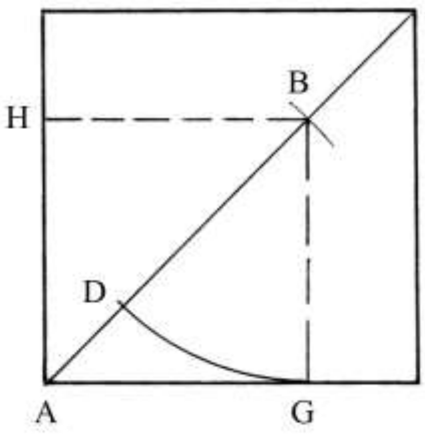
Possiamo ricavare la lunghezza del segmento DB con almeno due costruzioni, la *prima* delle quali è presentata nella figura che segue:



Disegnare una circonferenza con diametro orizzontale lungo quanto AB e inscrivervi un quadrato. Facendo centro nel punto B con raggio uguale al lato del quadrato è tracciato un arco che taglia AB nel punto D: la lunghezza dei lati del quadrato inscritto è quanto DB.

Riportando la lunghezza di BD sul triangolo viene fissato il punto D sul lato AB.

La lunghezza di DB può essere ricavata con una *seconda* costruzione:



Disegnare un quadrato con lati lunghi a piacere e tracciare la diagonale a partire dal vertice A: su di essa riportare la lunghezza AB e costruire il quadrato AGBH. Fare centro in B con raggio BG e disegnare un arco da G fino a incontrare la diagonale nel punto D.

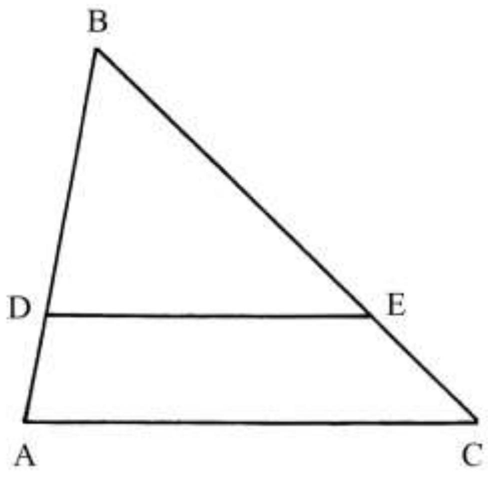
Dato che il triangolo ABC è isoscele, la lunghezza di BE è uguale a quella di BD.

Il segmento DE è parallelo al lato AC: l'area del triangolo ADE è uguale a quella del trapezio ADEC.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Savasorda passò a un esempio numerico; i dati forniti mostravano un triangolo scaleno di cui fornì solo le lunghezze dei due lati obliqui: AB = 7 e BC = 10 cubiti. Tralasciò la lunghezza della base AC.

Il triangolo è *scaleno* e esistono infiniti triangoli con i due lati obliqui lunghi 7 e 10: per semplificare l'esposizione, il lato AC è stato disegnato con lunghezza proporzionale a 8,5.



Savasorda aveva approssimato la radice quadrata di 2 con l'espressione:

$\sqrt{2} \approx 1 + 2/5 + 1/70.$

La lunghezza di DB è data da:

$DB = AB * (\sqrt{2})/2 = 7/2 * (1 + 2/5 + 1/7) = 3,5 + 7/5 + 1/20 = 3,5 + 1,4 + 0,05 =$
$= 4,95 = (5 – 1/20)$ cubiti.

A sua volta, la lunghezza di AD è:

$$AD = AB – DB = 7 – (5 – 1/20) = (2 + 1/20) \text{ cubiti.}$$

La lunghezza di BE è data da:

$$BE = BC/\sqrt{2} = BC * \sqrt{(2)}/2 = 10/2 * (1 + 2/5 + 1/70) = (5 + 2 + 1/14) = (7 + 1/14) \text{ cubiti.}$$

Infine, la lunghezza di EC è:

$$EC = BC – BE = 10 – (7 + 1/14) = (3 – 1/14) \text{ cubiti.}$$

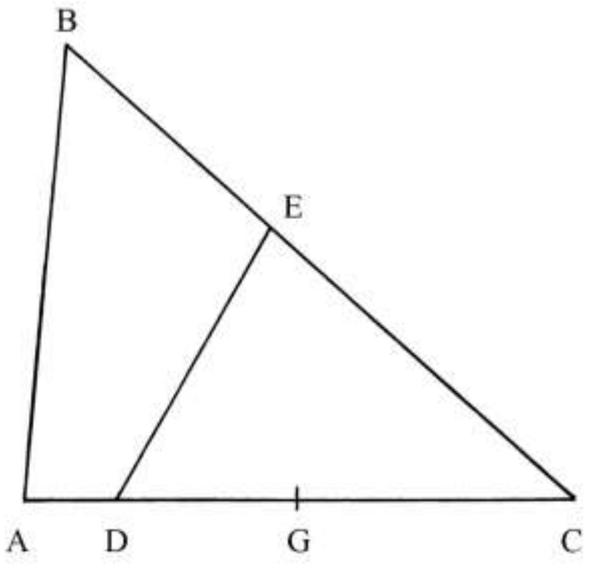
Il segmento DE è parallelo alla base AC perché i segmenti BD e BE sono scorciati nella stessa proporzione rispetto ai lati ai quali appartengono:

$$DB : AB = EB : CD = (\sqrt{2})/2 : 1 = \sqrt{2} : 2.$$

I triangoli ABC e DBE sono *simili*. Il triangolo DBE ha la stessa superficie del trapezio ADEC.

Triangolo diviso con un segmento passante per un punto

Il triangolo ABC deve essere diviso in due parti di uguale superficie con un segmento che ha origine in un punto di un lato, D posizionato su AC:



Le dimensioni del triangolo, scaleno, sono: AB = 10, BC = 15 e AC = 12 cubiti.
Il tratto AD misura 2 cubiti.

Nota: la figura 91 a pagina 98 del testo di Savasorda è disegnata del tutto fuori scala, come si può vedere dalla sua riproduzione:

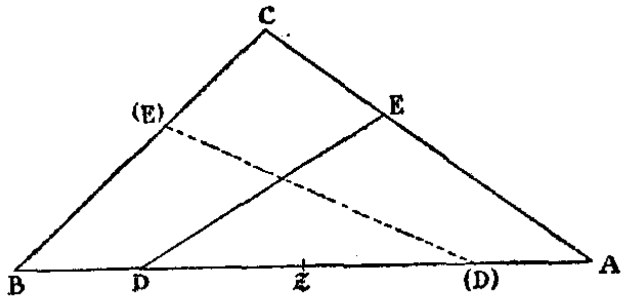


Fig. 91

Secondo il testo, le lunghezze dei tre lati sarebbero BC = 10, CA = 15 e BA = 12. Infine BD sarebbe lungo 2 cubiti.

Torniamo al nostro triangolo ABC: G è il punto medio della base AC. Il segmento DG misura:

DG = AC/2 – AD = 12/2 – 2 = 4 cubiti.

Savasorda calcolò il rapporto fra DG e DC:

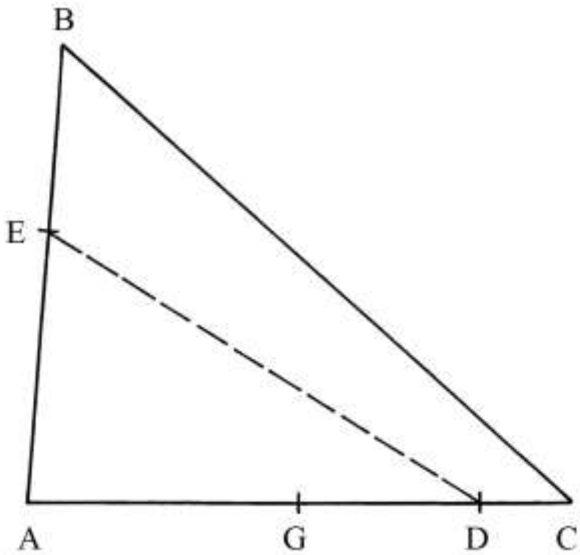
DG : DC = DG : (AC – AD) = 4 : (12 – 2) = 4 : 10 = 2 : 5.

Ecco i passaggi della procedura impiegata da Savasorda:

* determinare i 2/5 della lunghezza del lato BC: 2/5 * BC = 2/5 * 15 = 6 cubiti;
* a partire dal vertice B fissare la lunghezza BE = 6 cubiti;
* tracciare il segmento DE: il quadrilatero ABED e il triangolo DEC hanno uguale superficie pari a metà di quella di ABC.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Savasorda propose una variante di questa costruzione, stabilendo il punto D a distanza di 2 cubiti da C:



Ecco i passi della procedura applicata:

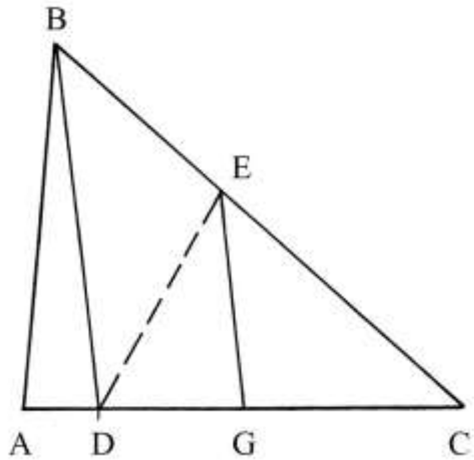
* calcolare i 2/5 della lunghezza di AB: 2/5 * AB = 2/5 * 10 = 4 cubiti;

* fissare il punto E a distanza 4 cubiti dal vertice B.

Il segmento ED divide ABC in due parti di uguale superficie: il triangolo AED e il quadrilatero EBCD.

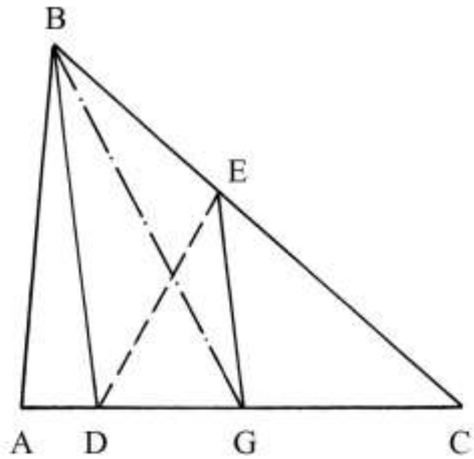
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Per verificare la correttezza del suo metodo, Savasorda utilizzò un'altra costruzione:

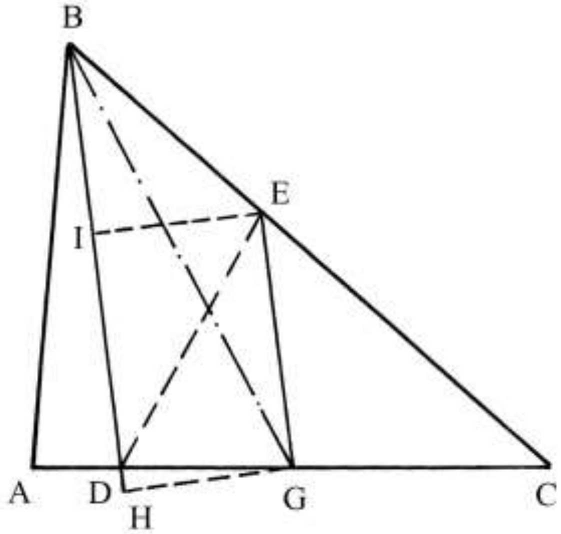


Tracciare la corda DB e, parallelamente ad essa, dal punto medio G condurre un segmento fino a incontrare il lato BC in un punto, che è lo stesso E ricavato con una precedente costruzione.

Savasorda fece un ulteriore passo e tracciò la corda BG:



I triangoli BDG e BDE sono di uguale superficie perché hanno in comune un lato (BD) e uguali altezze relative allo stesso BD, come spiega la figura che segue:



EI è l’altezza del triangolo BDE e GH lo è del triangolo BDG: esse sono fra loro parallele e hanno uguale lunghezza.

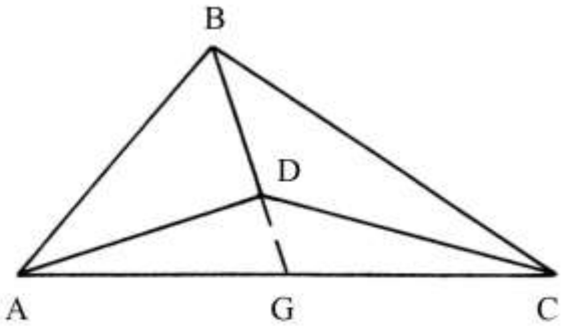
Uno dei due triangoli uguali (ad esempio BDG) viene aggiunto al triangolo ABD: il triangolo risultante, ABG, ha la stessa superficie del trapezio BADE.

Ma il triangolo ABG è la metà di quello ABC: la base del primo (AG) è la metà di quella del secondo (AC) ed hanno uguale altezza. Ne consegue che il trapezio ABED ha la stessa area di ABG.

<u>Triangolo da dividere in tre parti uguali</u>

Il triangolo ABC deve essere diviso in tre parti uguali, con una condizione: ciascun comproprietario chiede un lato del triangolo.

Dividere il lato AC in due parti uguali: G è il suo punto medio.



Tracciare la *mediana* BG e fissarvi il punto D a distanza

DG = 1/3 * BG.

La mediana BG divide ABC in due triangoli di uguale superficie: ABG e GBC.

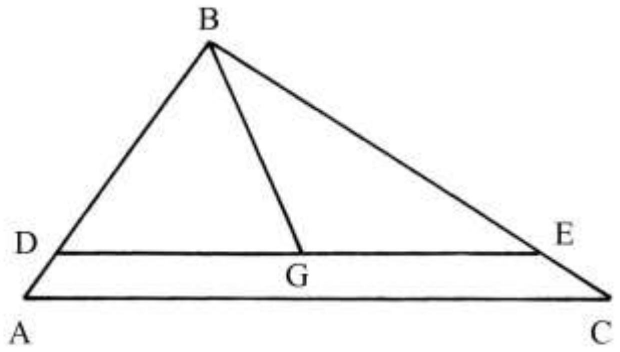
Collegare il punto D con i vertici A e C: i triangoli ABD, BCD e ADC hanno uguale superficie.

Tutti e tre i comproprietari hanno ottenuto una superficie che è delimitata da un intero lato del triangolo.

Nella realtà, nel punto D potrebbe essere collocato un pozzo per attingere acqua al quale devono poter accedere i tre proprietari.

Triangolo da dividere con un segmento parallelo a un lato

ABC è il consueto triangolo da dividere in tre parti uguali. Un proprietario desidera una parte confinante con il lato AC e gli altri due chiedono di spartirsi la superficie rimanente con una linea uscente dal vertice opposto, B:



Occorre determinare la lunghezza di AD e di EC e fissare il punto medio del segmento DE.

Il triangolo DBE è *simile* a quello ABC e ha area uguale a 2/3:

$A_{DBE} = 2/3 * A_{ABC}$ e viceversa

$A_{ABC} = 3/2 * A_{DBE}$.

Essendo i due triangoli fra loro simili, il rapporto 2/3 vale anche fra i quadrati delle lunghezze dei loro corrispondenti lati: l'area di un triangolo è il semiprodotto di due lunghezze (lato e altezza relativa):

Risulta così:

$A_{DBE} : A_{ABC} = DB^2 : AB^2 = BE^2 : BC^2 = DE^2 : AC^2 = 2 : 3$.

Risolvendo si ottiene:

$DB : AB = BE : BC = DE : AC = \sqrt{2} : \sqrt{3}$.

Ne consegue:

$DB = AB * \sqrt{(2/3)}$.

Nel testo in catalano, a pagina 100, la figura 94 descrive il problema oggetto di questo paragrafo:

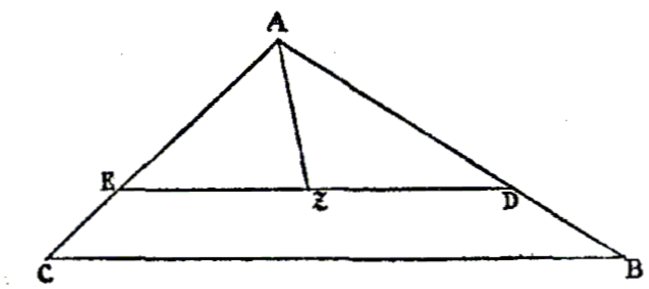


Fig. 94

Il testo contiene un errore riconoscibile con un semplice confronto con la figura originale: esso indica in 6 cubiti la lunghezza di AB (che visibilmente è più lungo) e in 9 cubiti quella del lato obliquo più corto, AC; inoltre non fornisce la lunghezza del lato orizzontale BC.

Nella figura inserita all'inizio di questo paragrafo le lunghezze sono le seguenti: AB = 6 , BC = 9 e AC = 11. *Le lettere usate nelle due figure sono differenti*.

È ipotizzabile un errore di Savasorda, del copista o dei traduttori?

La procedura seguita da Savasorda si propone di dividere il lato AB in due parti (AD e DB) in modo che il quadrato di AB valga 1,5 volte il quadrato della parte maggiore, DB.

Ecco i passi della procedura:

* calcolare i 5/6 di 60: $5/6 * 60 = 50$;
* calcolare la differenza fra 60 e il risultato precedente: $60 - 50 = 10$;
* calcolare la *decima* parte dell'ultima differenza: $1/10 * 10 = 1$;
* detrarre questo quoziente dal primo risultato parziale: $50 - 1 = 49$;
* calcolare il quadrato della frazione 49/60: $(49/60)^2 = 2401/3600$;
* sottrarre 1/3600 dalla precedente frazione: $2401/3600 - 1/3600 = 2400/3600 = 2/3$.

L'ultimo risultato, la frazione 2/3, riporta al rapporto fra i quadrati di DB e AB.

Il quadrato della lunghezza del lato AB è: $AB^2 = 6^2 = 36$. Questo valore è 1,5 volte quello del quadrato di DB:

$$DB^2 = AB^2/1,5 = (2 * AB^2)/3 = (2 * 6^2)/3 = 24.$$

La radice quadrata di 24 è:

$$\sqrt{24} \approx 4,8989 \approx 4,9 = (5 - 1/10) = DB.$$

In modo simile viene ricavata la lunghezza di BE; il quadrato di AC è: $AC^2 = 9^2 = 81$.

Dividere questo quadrato per 1,5:

$$BE^2 = AC^2/1,5 = (2 * AC^2)/3 = (2 * 9^2)/3 = 54.$$

.

La radice quadrata di 54 è:

$$\sqrt{54} \approx 7,348 \approx 7 + 3/10 + 1/20 = BE.$$

Disegnare DE, segmento parallelo alla base AC. Stabilire il punto medio G e collegarlo al vertice B.

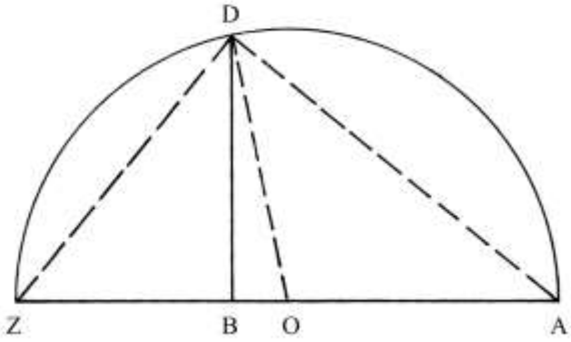
Il triangolo ABC è ora diviso in *tre* parti di uguale superficie: il trapezio ADEC e i triangoli DBG e GBE.

Savasorda non fornì alcuna spiegazione sulla sua procedura che peraltro fornisce un risultato corretto.

Savasorda aveva a disposizione delle tabelle con i quadrati e le radici quadrate dei primi numeri? Probabilmente sì.

- APPROFONDIMENTO -

Per calcolare con la massima precisione il valore di $\sqrt{(2/3)}$ occorre ricorrere a un metodo geometrico che elimina i calcoli relativi all'estrazione della radice quadrata.



Tracciare una linea orizzontale e riportarvi la lunghezza del lato AB. Calcolare i 2/3 della lunghezza di AB e riportarla da B in Z.

Determinare il punto medio del segmento ZA: è O. Fare centro in O e con raggio OZ = OA disegnare una semicirconferenza da Z a A.

Dal punto B innalzare la perpendicolare a ZA fino a incontrare la semicirconferenza in un punto, D.

Costruire il triangolo rettangolo ZDA.

Per il *secondo teorema di Euclide* sui triangoli rettangoli inscritti in un semicerchio, l'altezza BD ha lunghezza che è medio proporzionale fra quelle delle proiezioni dei cateti ZD e DA sull'ipotenusa ZA:

$ZB : DB = DB : BA;$ ma
$ZB = 2/3 * BA$ per cui
$2/3 * BA : DB = DB : BA$
$DB^2 = 2/3 * BA^2$ e
$DB = BA * \sqrt{(2/3)}$.

L'altezza DB è la lunghezza cercata da riportare sulla figura del triangolo ABC.

Dal punto D condurre il segmento DE parallelo a AC e dividere lo stesso DE in due parti uguali.

I triangoli DBG e GBE e il trapezio ADEC hanno uguale superficie.

Savasorda non applicò questa soluzione geometrica.

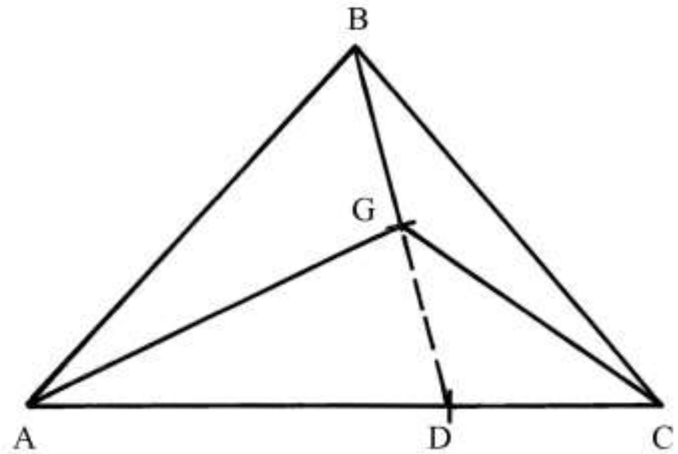
- -

Triangolo da dividere in tre parti differenti

Savasorda presentò il problema della divisione di una superficie triangolare in tre parti differenti: ½ al primo proprietario, 1/3 al secondo e la parte rimanente, 1/6, al terzo. La divisione è esatta perché

$½ + 1/3 + 1/6 = (3 + 2 + 1)/6 = 6/6 = 1.$

ABC è il triangolo:



Il punto D divide il lato AC in due parti:

$AD : 2 = DC : 1$ e quindi

$DC = 1/3 * AC$.

Tracciare il segmento BD e dividerlo a metà con il punto G.

Collegare G con i vertici A e C.

Il triangolo ABC è diviso in tre parti:

* il triangolo ADB ha area uguale a metà;
* il triangolo ABG ha area pari a un terzo;
* il triangolo GBC ha area uguale a un sesto.

La dimostrazione è la seguente: il triangolo ABD ha superficie uguale a 2/3 di quella di ABC e quello DBC ha superficie pari a 1/3 di quella di ABC.

I triangoli ABG e AGD hanno superficie che è metà di quella di ABD e cioè

$½ * 2/3 * A_{ABC} = 1/3 * A_{ABC}$.

A loro volta, i triangoli GBC e DGC sono di uguale area che è metà di quella di DBC e cioè

$½ * 1/3 * A_{ABC} = 1/6 * A_{ABC}$.

I triangoli AGD e DGC sono uniti per formare il triangolo AGC:

$A_{AGC} = A_{AGD} + A_{DGC} = 1/3 * A_{ABC} + 1/6 * A_{ABC} = (2 + 1)/6 * A_{ABC} = ½ * A_{ABC}$.

DIVISIONE DEI QUADRILATERI IN DUE PARTI

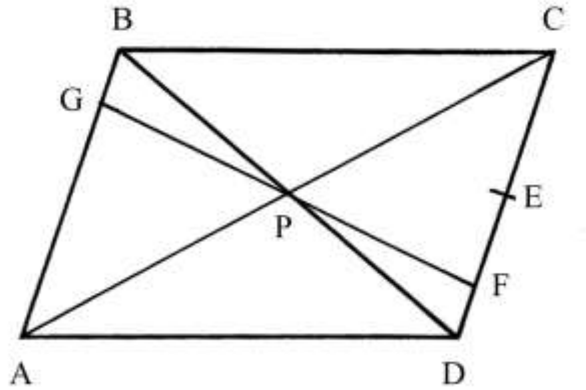
Savasorda distinse tre classi di quadrilateri:

* quadrilateri con diagonali che si tagliano in parti uguali;
* quadrilateri con una diagonale che taglia l’altra in due parti uguali e non viceversa;
* quadrilateri nei quali le diagonali si dividono in parti diseguali.

Gli esempi presentati descrivono la divisione dei quadrilateri delle tre classi in 2, 3 o 4 parti.

Divisione in due parti uguali di un parallelogramma

Il parallelogramma ABCD ha due diagonali, AC e BD, che si intersecano nel punto P dividendosi reciprocamente in due parti di uguali lunghezze: AP = PC e BP = PD.



Il punto E è il medio del lato CD. Da E misurare la lunghezza EF = 2 cubiti.

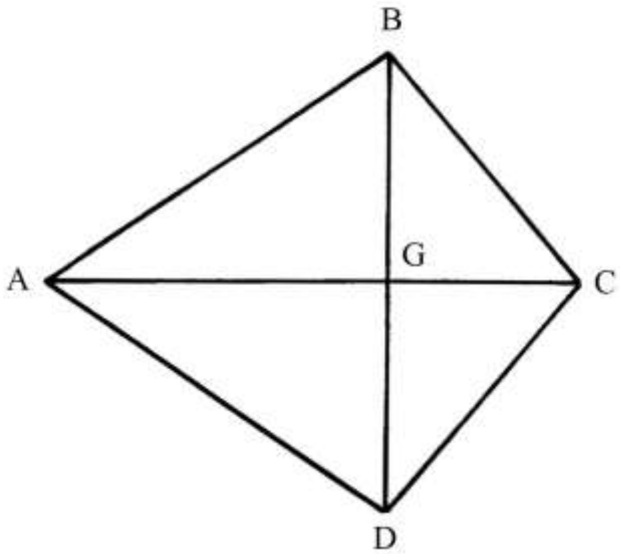
Il parallelogramma deve essere diviso in due parti di uguale superficie con un segmento uscente da F e passante per il punto P fino a incontrare il lato AB nel punto G.

I segmenti BG e FD hanno uguale lunghezza.

FG divide il parallelogramma ABCD in due quadrilateri di uguale area: AGFD e GBCF.

Divisione in due parti uguali di un aquilone

Il quadrilatero contenuto nella figura che segue è oggi conosciuto come *aquilone* o *deltoide*.



Le coppie di lati *consecutivi* (BC e CD) e (AB e AD), hanno lunghezze uguali.

Il quadrilatero possiede una diagonale maggiore, AC, che è il suo *asse di simmetria*, e una diagonale minore, BD, che è divisa in due segmenti di uguale lunghezza: BG = GD.

La diagonale maggiore è divisa in due segmenti, AG e GC, di differente lunghezza.

Le due diagonali si incontrano ad angolo retto nel punto G.

La diagonale maggiore AC divide il quadrilatero in due triangoli di uguale area: ABC e ADC. Inoltre, con l'ausilio della diagonale minore BD, essa divide i due triangoli ABD e BCD in due triangoli rettangoli ciascuno (rispettivamente ABG – AGD e BGC – GDC).

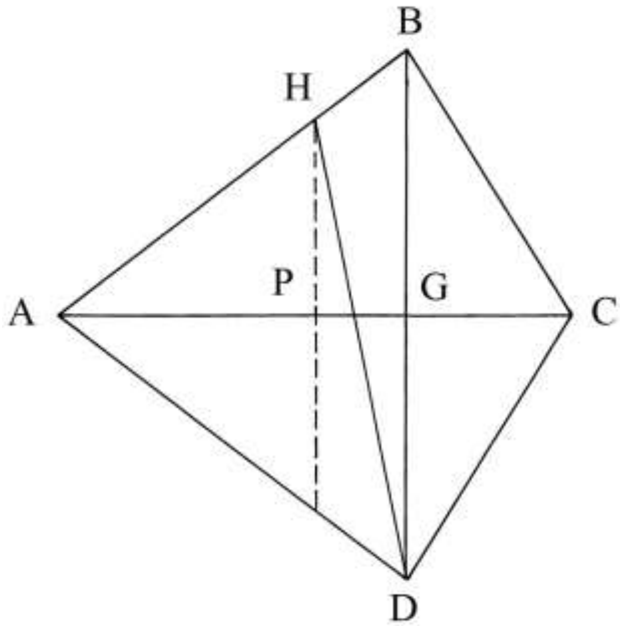
Il quadrilatero ABCD deve essere diviso in due parti di uguale superficie.

Nell'esempio di Savasorda, i lati BC e CD sono lunghi 10,6 cubiti (10 + 3/5 secondo la notazione dell'Autore) e i lati AB e AD sono lunghi 15 cubiti.

La diagonale maggiore AC è lunga 17,6 cubiti (17 + 3/5) e il segmento AG è 12 cubiti; ne consegue che il segmento GC è lungo: GC = AC – AG = 17.6 – 12 = 5,6 cubiti.

Con tutti questi dati, il quadrilatero ABCD è costruibile.

Dividere la diagonale maggiore in due parti uguali: P è il punto medio.



Per il punto P tracciare la parallela alla diagonale minore BD: la corda fissa i punti P e H.

La lunghezza di AP è:

AP = PC = AC/2 = 17,6/2 = 8,8 cubiti.

Il segmento PG è lungo:

PG = PC – GC = 8,8 – 5,6 = 3,2 cubiti.

Sul lato AB è fissato il punto H che dista da B il risultato della proporzione che segue:

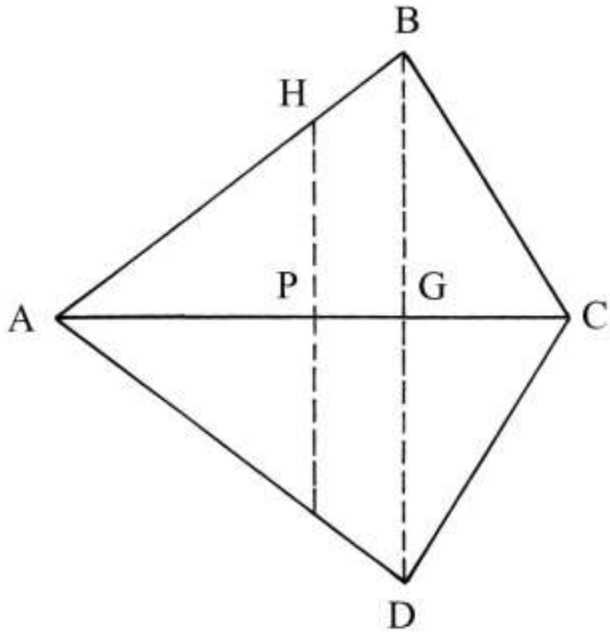
HB : AB = PG : AG da cui

HB = (AB * PG)/AG = (15 * 3,2)/12 = 4 cubiti.

Tracciare la corda HD: essa divide il quadrilatero ABCD in due poligoni di uguale superficie: il triangolo AHD e il quadrilatero HBCD.

- APPROFONDIMENTO -

Il punto H della precedente figura può essere fissato ricorrendo al *teorema di Talete*; dal punto P condurre la parallela alla diagonale BD: essa taglia il lato AB nel punto H.



Per i punti B, G e D passa una retta: per il punto P tracciare una retta parallela a quella BGD. Questa seconda retta interseca AB in un punto che è H.

Applicando il teorema di Talete si ha la seguente proporzione:

HB : PG = AB : AG.

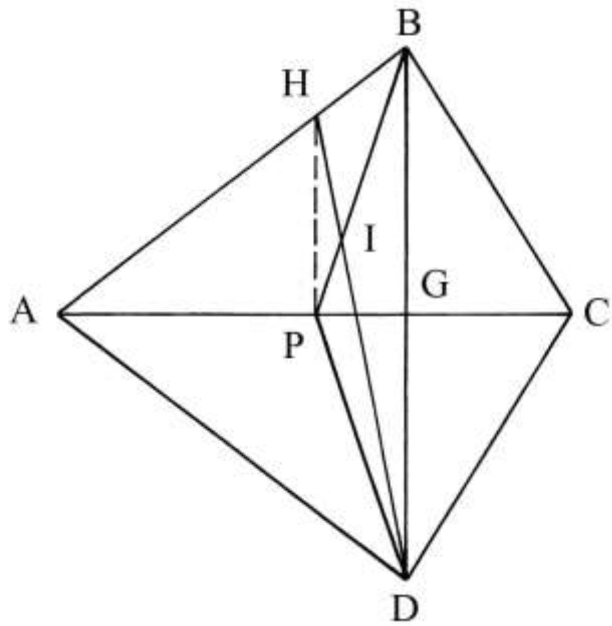
Invertendo i *medi* della precedente proporzione si ritrova la proporzione incontrata in precedenza:

HB : AB = PG : AG.

Pur senza citarlo espressamente, Savasorda applicò il teorema di Talete.

- -

La dimostrazione proposta da Savasorda richiede il collegamento di P con i vertici B e D. PB e HD si incontrano nel punto I:



I triangoli PBC e PDC hanno uguale area: il quadrilatero PBCD ha superficie uguale a metà di quella di ABCD e quindi uguale all'area del quadrilatero HBCD.

Consideriamo i triangoli DPH e BPH: essi hanno in comune il lato PH e l'altezza PI che è relativa allo stesso lato: essi hanno uguale area.

Anche i triangoli BIH e DPI hanno uguale area.

Sommando BIH oppure DPI a BCDI, il risultato è identico: BPDC ha la stessa area di HBCD.

L'area del quadrilatero ABCD è data da:

$A_{ABCD} = A_{ABC} + A_{ADC} = AC * BG/2 + AC * GD/2 = AC * (BG/2 + GD/2)$.

Ma BG = GD = BD/2 per cui si ha:

$A_{ABCD} = AC * (BG/2 + BG/2) = AC * BG = AC * BD/2$.

L'area del triangolo PBC è:

$A_{PBC} = PC * BG/2 = (AC/2) * (BD/2)/2 = AC * BD/8$.

Il triangolo PCD ha le stesse dimensioni di quello PBC e quindi possiede uguale area. L'area di ciascuno di questi due triangoli è uguale a *un quarto* di quella di ABCD.

L'area di BCDP è:

$A_{BCDP} = A_{PBC} + A_{PCD} = 2 * (AC * BD/8) = AC * BD/4$.

BCDP ha area uguale a metà di quella di ABCD.

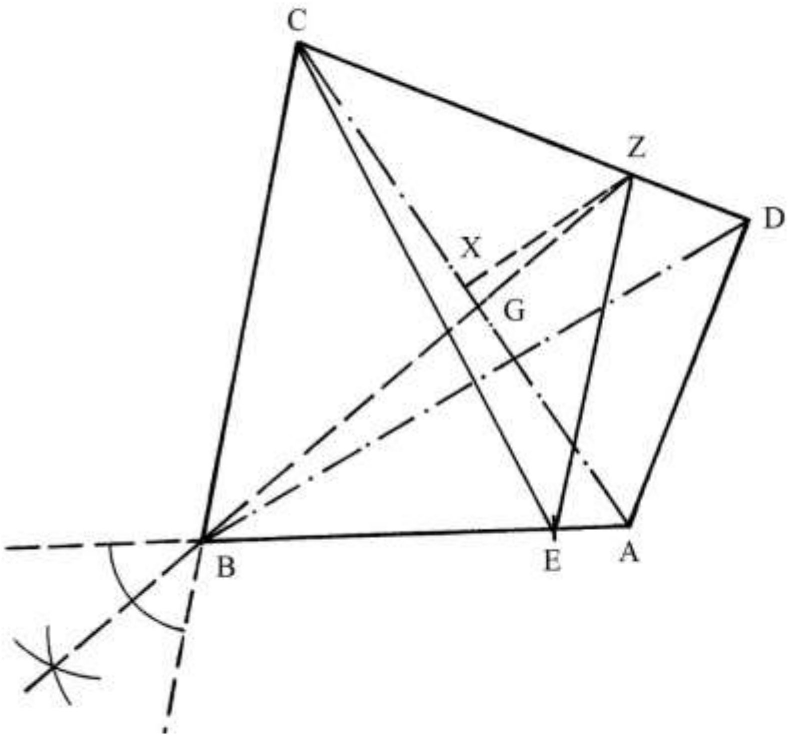
Ne consegue che il quadrilatero ABPD ha area:

$A_{ABPD} = A_{ABCD} – A_{BCDP} = AC * BD/2 – AC * BD/4 = AC * BD/4$.

Il quadrilatero ABPPD ha area uguale a metà di quella di ABCD e uguale a quella di BCDP.

Divisione in 2 parti uguali di un quadrilatero

ABCD è un quadrilatero che deve essere diviso in due parti uguali:



Le due diagonali AC e BD si incontrano nel punto G, ma non si tagliano reciprocamente a metà.

Il poligono è un esempio di quadrilateri della *classe terza*.

BZ è la bisettrice dell'angolo CBA; essa divide ABCD in due poligoni:

* il triangolo BCZ;
* il quadrilatero ABDZ.

Dal punto Z tracciare la corda ZE, parallela al lato BC.

Collegare E con C. CE divide ABCD in due poligoni che hanno aree uguali a metà di quella dello stesso quadrilatero iniziale:

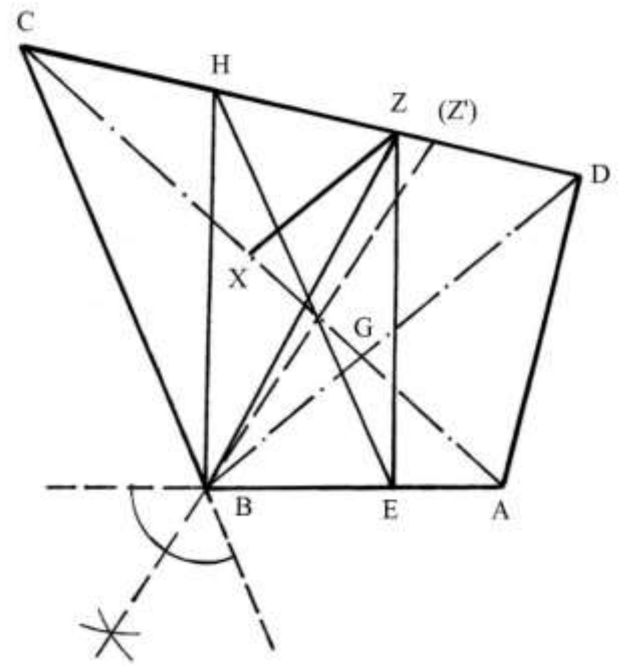
* il triangolo CEB;
* il quadrilatero CDAE.

Il triangolo BCZ ha area uguale a quella di CEB.

Nel testo non è fornita alcuna informazione su ZX, perpendicolare alla diagonale AC.

<u>Quadrilatero diviso in 2 parti uguali</u>

Nel quadrilatero ABCD non si verifica la condizione posta da Savasorda riguardo al caso precedente: infatti la corda EZ non è parallela al lato BC.



Nel testo non è fornita alcuna informazione sulla posizione dei punti E e Z.

La retta passante per B e per (Z') è la bisettrice dell'angolo CBA: il punto (Z') non coincide con Z.

Le diagonali del poligono si incontrano nel punto G.

Dal punto B è tracciato BH, che è parallelo a EZ.

Collegare H con E.

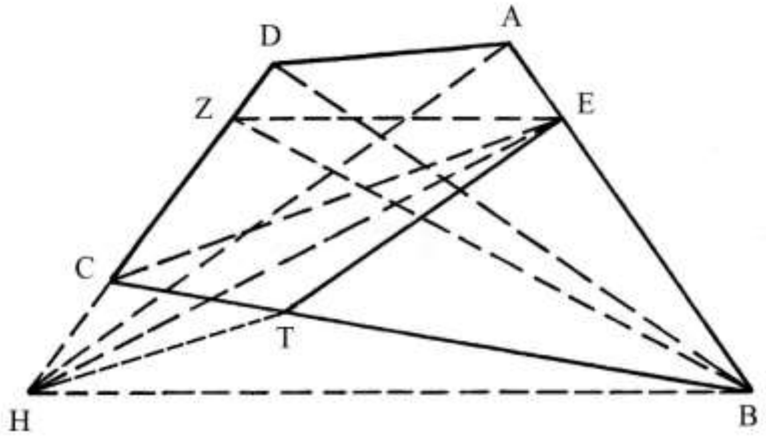
La corda HE divide ABCD in due quadrilateri che hanno aree uguali:

* AEHD;
* EBCH.

Il testo non informa sulla funzione del segmento ZX.

Divisione di un quadrilatero in 2 parti uguali

ABCD è il quadrilatero da dividere in due parti uguali con un segmento che deve uscire dal punto E.



Tracciare la diagonale BD e la bisettrice dell'angolo DCB: questa ultima incontra il lato AB nel punto E.

Non è fornita alcuna informazione sulla posizione del punto Z.

La corda EZ non è parallela ad alcuno dei lati di ABCD..

Dal punto B condurre verso sinistra una linea parallela a EZ e prolungare verso il basso il lato CD: viene fissato il punto H. Collegare A e E con H.

Dal punto H disegnare una parallela a CE fino a tagliare il lato CD in un nuovo punto, T.

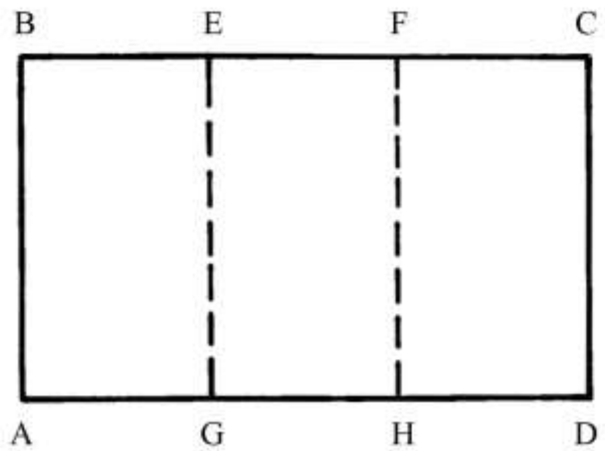
TE divide ABCD in due poligoni con aree uguali:

* il triangolo TEB;
* il pentagono non regolare CDAET.

DIVISIONE DI QUADRILATERI IN TRE PARTI

Divisione di un rettangolo in tre parti uguali

ABCD è un rettangolo che deve essere diviso in tre parti di uguale superficie:



Savasorda divise per via aritmetica in tre parti uguali il lato BC fissando i punti E e F. Da questi sono abbassati due segmenti paralleli ai lati verticali AB e CD: le corde EG e FH dividono il rettangolo in tre parti uguali.

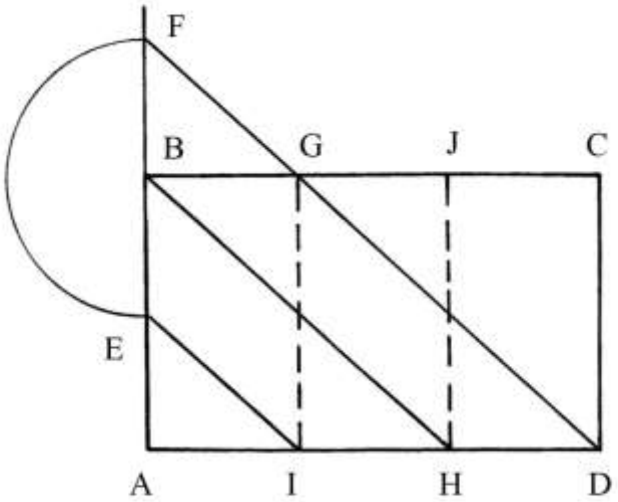
Savasorda si limitò a questa semplice soluzione, certamente adatta alla divisione di un lungo terreno.

- APPROFONDIMENTO -

Savasorda sarà stato a conoscenza di altri metodi geometrici più precisi di quello aritmetico da lui impiegato nel caso del rettangolo della figura precedente.

Ecco due metodi.

ABCD è un rettangolo e il suo lato orizzontale AD deve essere diviso in 3 parti uguali:



Determinare il punto medio di AB: è E. Prolungare questo lato verso l’alto.

Riportare da B in F la lunghezza di BE.

Collegare il punto F con D.

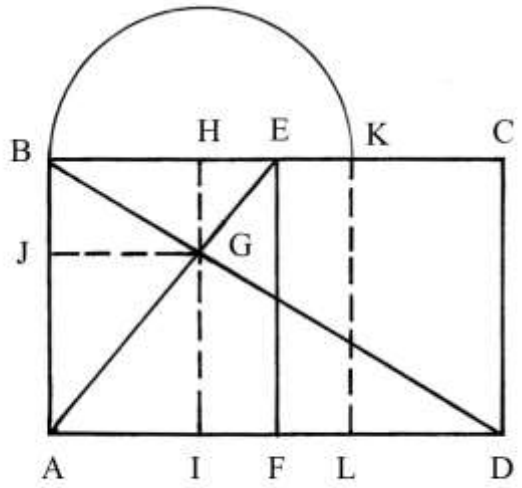
Dai punti B e E tracciare due linee parallele a FD fino a intersecare il lato AD in due punti, I e H.

Il lato AD è diviso in tre parti uguali: AI = IH = HD.

Dai punti I e H innalzare le perpendicolari ai lati AD e BC. Il rettangolo è diviso in tre parti uguali.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

ABCD è il solito rettangolo da dividere:



La corda EF è la *mediana* verticale del rettangolo e lo divide in due rettangoli di uguale superficie.

Disegnare la diagonale BD e la corda AE che è una diagonale del rettangolo ABEF.

Le due diagonali si intersecano nel punto G.

Proiettare perpendicolarmente la posizione del punto G sui lati AB e BC.

Il segmento AI è lungo 1/3 del lato AD.

Pure il segmento BJ è lungo 1/3 del lato AB.

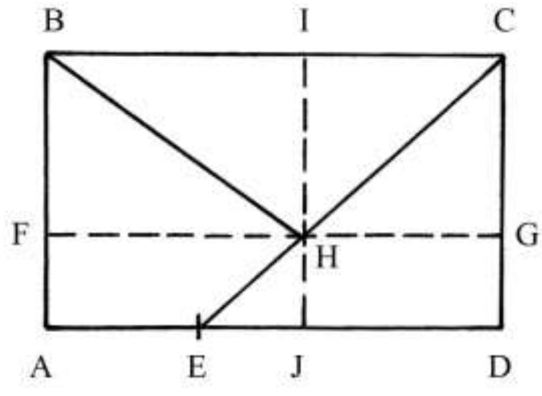
Riportare la lunghezza di HB in HK e completare tracciando la corda KL.

Il rettangolo ABCD è diviso in tre rettangoli di superficie uguale a 1/3 della sua.

- -

Divisione di un rettangolo in 3 parti da un vertice

ABCD è un rettangolo che deve essere diviso in tre parti uguali con una corda uscente dal vertice C:



Fissare il punto E a distanza 1/3 * AD da A.

Collegare C con E.

Stabilire i punti F e G a distanza di 1/3 di AB, rispettivamente da A e da D.

Tracciare la corda FG: essa taglia CE in un punto, H.

Il punto H divide EC in due parti: EH : 1 = HC : 2.

Per il punto H disegnare una corda, IJ, parallela ai lati AB e CD.

Tracciare BH.

Savasorda non approfondì la spiegazione: evidentemente, il suo scopo era quello di fornire soluzione corrette ma senza mostrare dimostrazioni: il fine era quello di offrire un manuale di geometria pratica.

Qui di seguito viene esposta una spiegazione della procedura di Savasorda.

I lati del rettangolo sono con AB = a e AD = b.

L'area di ABCD è data da:

$A_{ABCD} = a * b$.

L'area del triangolo rettangolo ECD è:

$A_{ECD} = (ED * CD)/2 = ((2/3 * a) * b/2 = 1/3 * a * b = 1/3 * A_{ABCD}$.

Per differenza, l'area del trapezio ABCE è uguale a 2/3 di quella di ABCD.

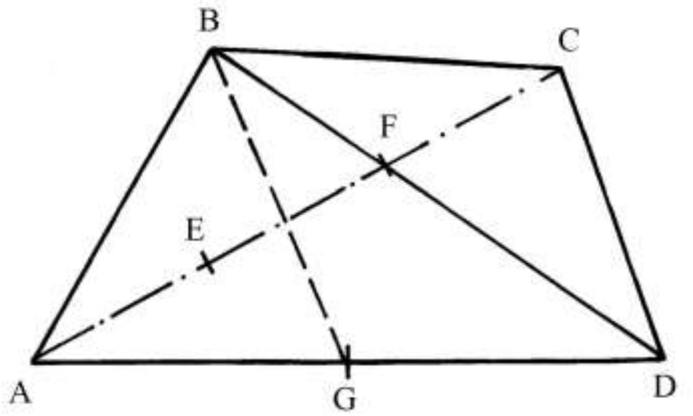
L'area del triangolo BCH è:

$A_{BCH} = (BC * IH)/2 = b * (2/3 * a)/2 = 1/3 * a * b$.

Di nuovo per differenza, l'area del trapezio ABHE è uguale a 1/3 di quella di ABCD.

Divisione di un quadrilatero in 3 parti uguali

Savasorda affrontò il caso di un quadrilatero che non è un parallelogramma:



Tracciare le diagonali AC e BD: esse si incontrano nel punto F.

Nel caso specifico, che è del tutto eccezionale, il segmento EC è lungo esattamente 1/3 della diagonale AC:

AE = EF = FC = 1/3 * AC.

Il triangolo BCD ha area uguale a 1/3 di quella di ABCD.

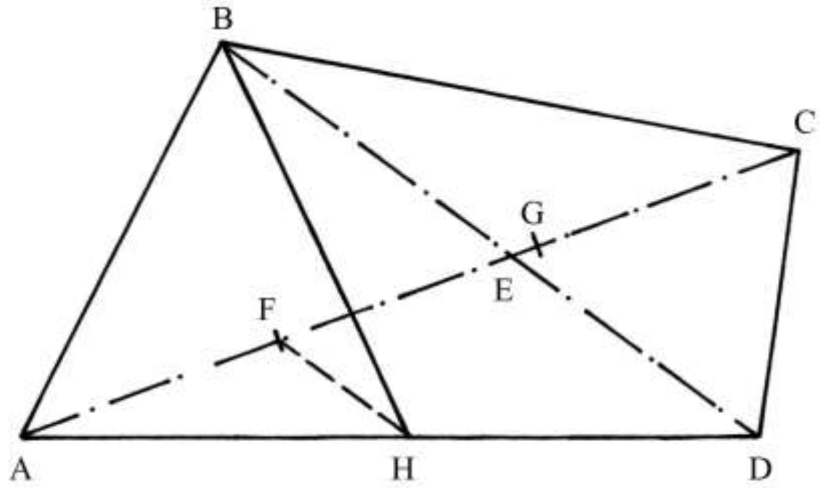
Il triangolo residuale ABD ha area uguale a 2/3 di quella di ABCD.

Determinare il punto medio del lato AD: è G.

La mediana BG divide ABD in due parti con aree uguali a 1/3 di quella di ABCD: sono i triangoli ABG e GBD.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Il caso successivo è più generale: il segmento EC non è lungo esattamente 1/3 della diagonale AC:



Dividere la diagonale AC in tre parti uguali:

AF = FG = GC = 1/3 * AC.

Dal punto F condurre una parallela a BD fino a incontrare in H il lato AD.

Collegare i punti B e H.

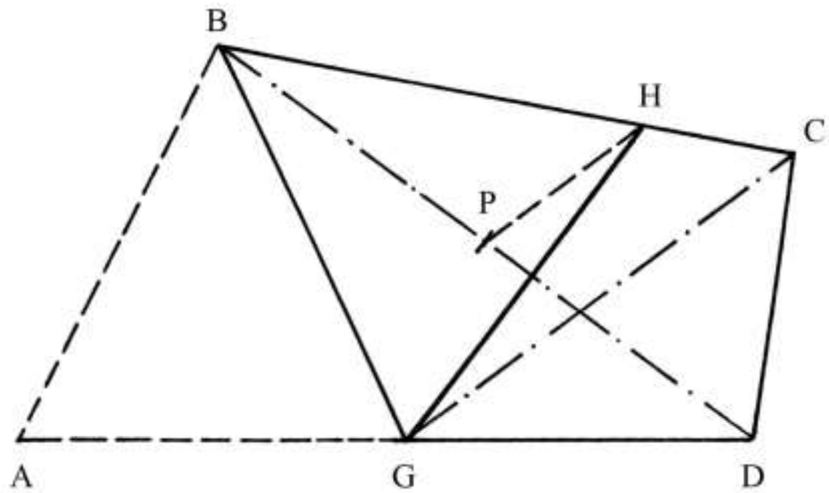
Il triangolo ABH ha superficie uguale a 1/3 di quella di ABCD e il quadrilatero HBCD ha area uguale a 2/3 di ABCD.

Per completare il compito deve essere diviso in *due* parti uguali il quadrilatero BCDG.

- APPROFONDIMENTO -

Savasorda si limitò a evidenziare la necessità di dividere in due parti uguali il quadrilatero BCDG ma non propose alcun metodo aritmetico o geometrico per raggiungere lo scopo.

La figura che segue descrive una soluzione non dovuta a Savasorda:



Disegnare le diagonali BD e GC.

Fissare il punto medio della diagonale maggiore BD: è P.

Dal punto P tracciare la parallela alla diagonale minore GC fino a incontrare il lato BC in un punto, H.

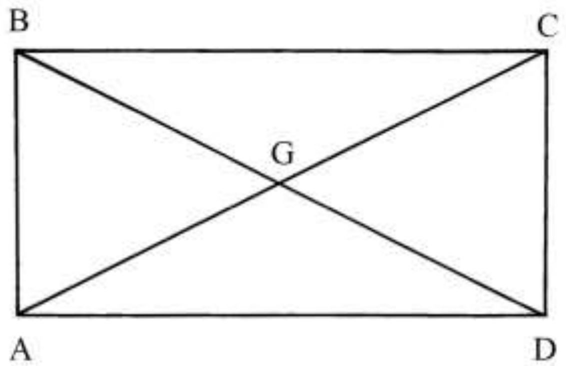
La corda GH divide BCDG in due figure di uguale superficie: il triangolo BGH e il quadrilatero GHCD.

- -

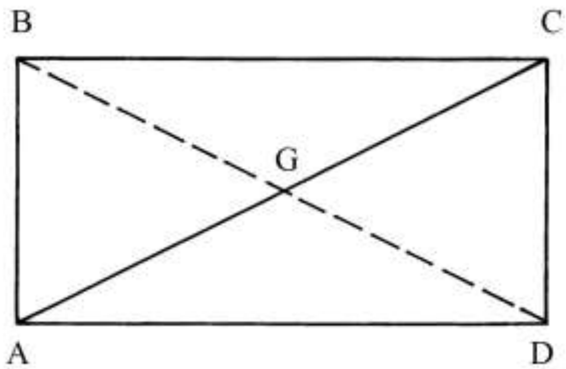
DIVISIONE DI QUADRILATERI IN QUATTRO PARTI

Divisione di un rettangolo in 4 parti uguali

Il rettangolo ABCD è diviso in *quattro* parti dalle diagonali AC e BD che si incrociano nel punto G dividendosi in due parti uguali, ma senza formare angoli retti (come accade nel quadrato e nel rombo).



Consideriamo il rettangolo diviso con una sola diagonale, ad esempio quella AC:



I triangoli rettangoli ABC e ACD hanno uguale area che è metà di quella del rettangolo ABCD.

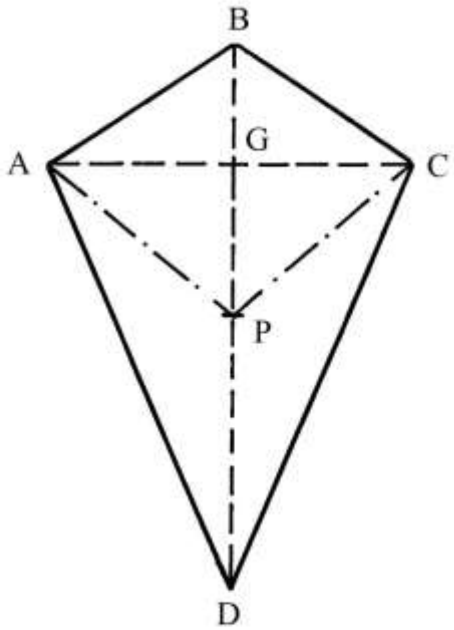
Il segmento BG è una *mediana* del triangolo ABC e quello GD è una *mediana* di ACD: le due mediane hanno uguale lunghezza e formano la diagonale BD.

La mediana BG divide ABC in due triangoli di area uguale e pari a un quarto di quella di ABCD: lo stesso accade alla mediana GD nel triangolo ACD.

Il rettangolo ABCD è diviso in quattro triangoli di uguale superficie.

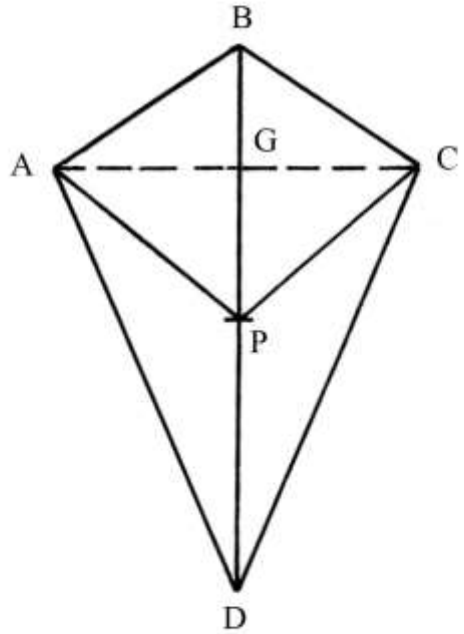
Divisione in 4 parti uguali di un aquilone

Nella figura che segue è disegnato un *aquilone* o *deltoide* ABCD:



La diagonale maggiore BD taglia in due parti uguali la diagonale minore AC ma non viceversa.

BD divide in due triangoli di uguale area l'aquilone: sono ABD e CBD.



Infatti le loro aree sono:

$A_{ABD} = AG * BD/2$ e

$A_{CBD} = GC * BD/2$.

Ricordiamo che AG = GC = AC/2.

Determinare il punto medio di BD: è P.

AP e CP sono due mediane: la prima è una delle tre mediane del triangolo ABD e la seconda – CP – lo è nel triangolo CBD.

Le due mediane dividono ABD e CBD in due triangoli di uguali dimensioni.

Il triangolo ABP ha area data da:

$A_{ABP} = AG * BP/2$ e quello APD ha area:

A_{APD} = AG * PD/2.

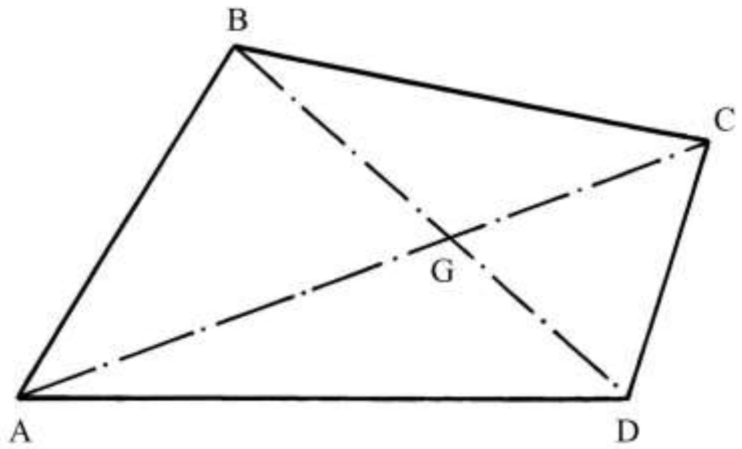
Le due aree sono uguali perché BP = PD; inoltre AG è un'altezza del triangolo APD rispetto al lato PD: essa giace all'esterno del poligono, sul prolungamento del lato PD.

Analoghe considerazioni valgono per il triangolo CBD e per i due triangoli in esso contenuti: CBP e CPD.

Ciascuno dei quattro triangoli ha superficie uguale a *un quarto* di quella di ABCD.

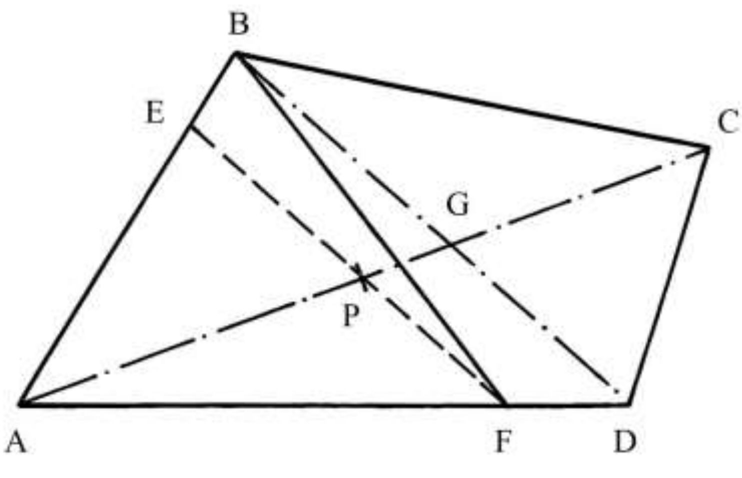
Divisione di un quadrilatero in 4 parti uguali

ABCD è un quadrilatero le cui diagonali AC e BD si incontrano nel punto G senza che esse si dividano reciprocamente in parti uguali.



Con il metodo descritto nel precedente APPROFONDIMENTO, non dovuto a Savasorda, il quadrilatero ABCD deve essere diviso in due parti uguali.

Fissare il punto medio della diagonale maggiore AC: è P.

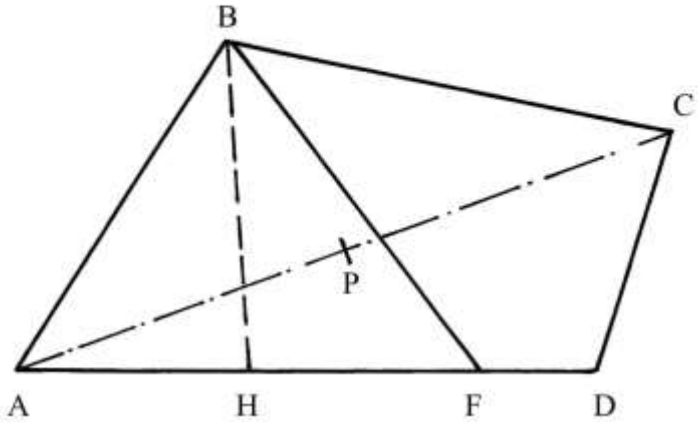


Parallelamente alla diagonale BD, tracciare una corda passante per P: è EF.

Collegare B con F: la corda BF divide ABCD in due poligoni che hanno aree uguali a metà di quella del quadrilatero originario:

* il triangolo ABF;
* il quadrilatero BCDF.

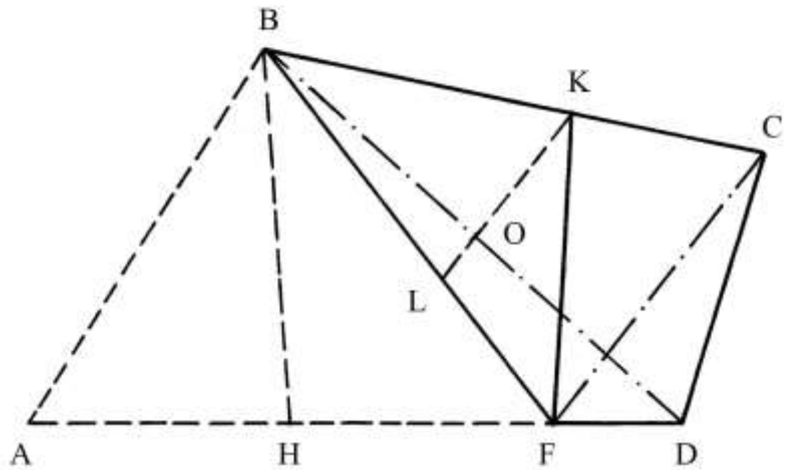
Per dividere ulteriormente il triangolo ABF è sufficiente disegnare la mediana BH:



I triangoli ABH e BHF hanno uguale superficie che è uguale a un quarto di quella di ABCD.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Con il metodo già applicato, possiamo dividere in due parti uguali il quadrilatero BCDF.



Disegnare le diagonali del quadrilatero: sono BD e FC.

O è il punto medio della diagonale maggiore BD.

Per il punto O tracciare una corda parallela alla diagonale minore FC: è KL.

Collegare K con F. Il segmento KF divide il quadrilatero in due poligoni di area uguale:

* il triangolo BKF;
* il quadrilatero KCDF.

Con questa ulteriore costruzione, il quadrilatero originario ABCD è diviso in *quattro* poligoni con aree uguali a un quarto di quella del poligono originario:

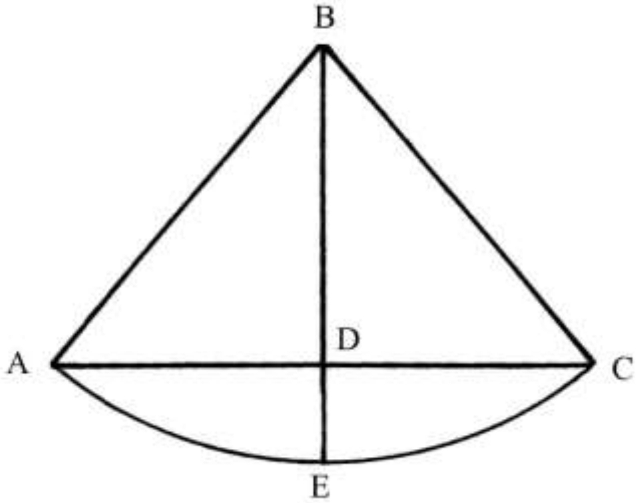
* il triangolo ABH;
* il triangolo BHF;
* il triangolo BKF;
* il quadrilatero KCDF.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Savasorda suggerì di applicare il metodo della scomposizione in triangoli e quadrilateri ai poligoni non regolari con 4, 5, 6 e più lati.

DIVISIONE DI FIGURE CURVILINEE

ABC è una figura piana che è delimitata da due segmenti, AB e BC, e da un arco di circonferenza, AC: è un *settore circolare*.



ABCE deve essere divisa in due parti uguali.

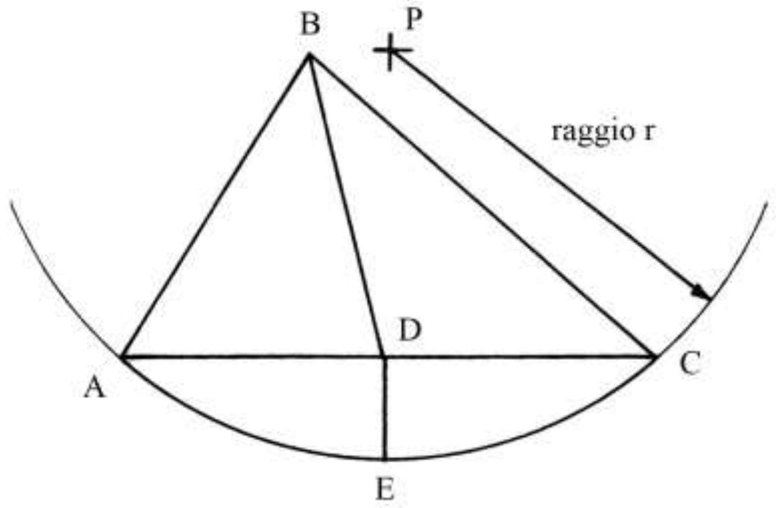
Tracciare la corda AC e fissare il suo punto medio, D.

Per i punti B e D disegnare una linea che taglia l’arco nel punto E: il segmento BE divide la figura in due parti uguali.

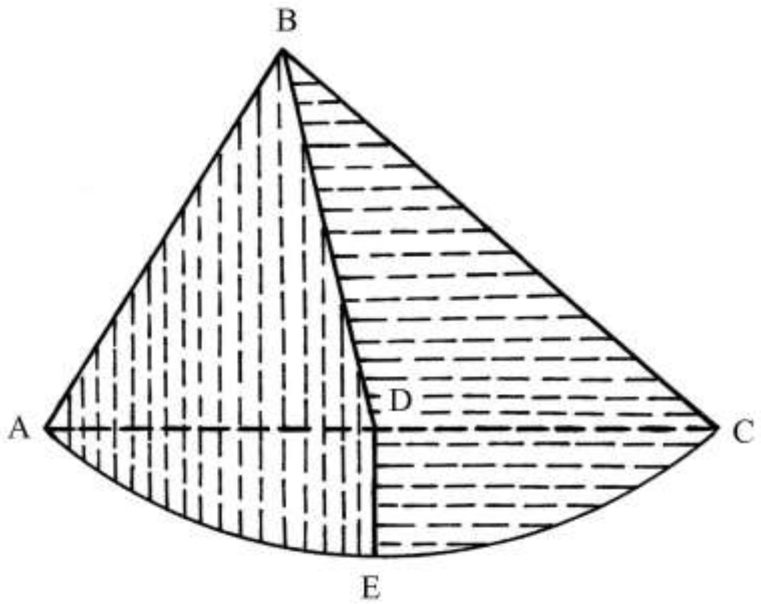
Il caso è di facile soluzione perché ABCE è un *settore circolare* di raggio AB = BC = BE.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Nel caso della figura formata dal triangolo scaleno ABC e dal segmento circolare che ha per centro il punto P, esterno alla figura stessa, le cose sono appena più complicate:

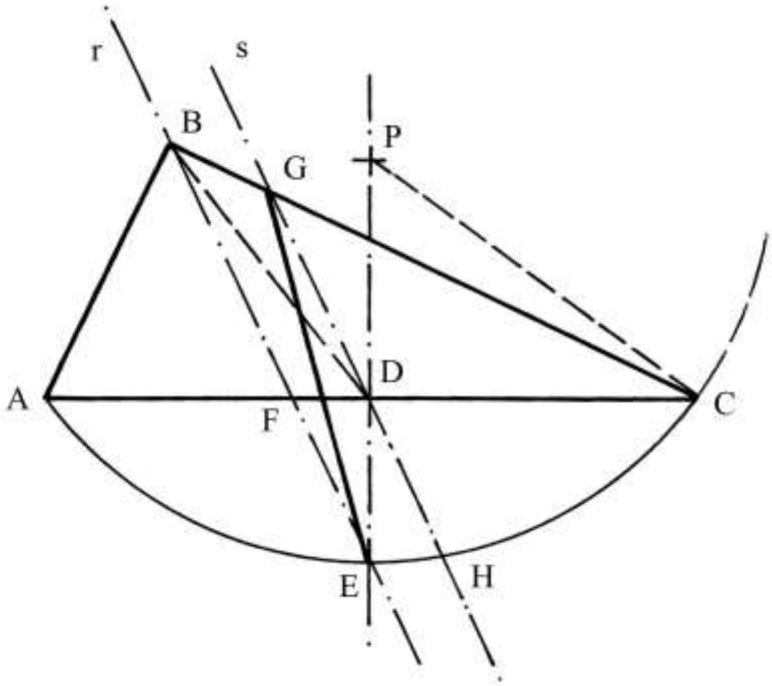


Determinare il punto medio della corda AC: è D.
Tracciare il segmento BD: esso è una *mediana* del triangolo ABC.
Dal punto D abbassare la perpendicolare a AC fino a incontrare l'arco nel punto E.
Le figure ABDE e EDBC hanno uguale superficie:



%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Savasorda propose un secondo metodo per dividere in due parti uguali una figura piana con una forma complessa e simile ai due ultimi schemi:



ABC è un triangolo generico, scaleno. D è il punto medio di AC e BD è una mediana.

Per il punto D tracciare una perpendicolare: su di essa giace il punto P, centro dell'arco di circonferenza AEC: PC è il suo raggio:

PC = PE = PA.

AEC è un segmento circolare che è delimitato dalla corda ADC e dall'arco AEC: DE è la sua freccia.

Nel triangolo ABC la mediana divide il poligono in due triangoli di aree uguali: ABD e BCD.

Il problema chiede di dividere in due parti uguali la figura creata dall'unione del triangolo ABC e del segmento circolare AEC.

La soluzione presentata da Savasorda richiede che la divisione sia effettuata con una retta e non con una spezzata, come è stato il caso della *spezzata* BDE dell'esempio precedente. Anche in questo caso la spezzata sarebbe BDE.

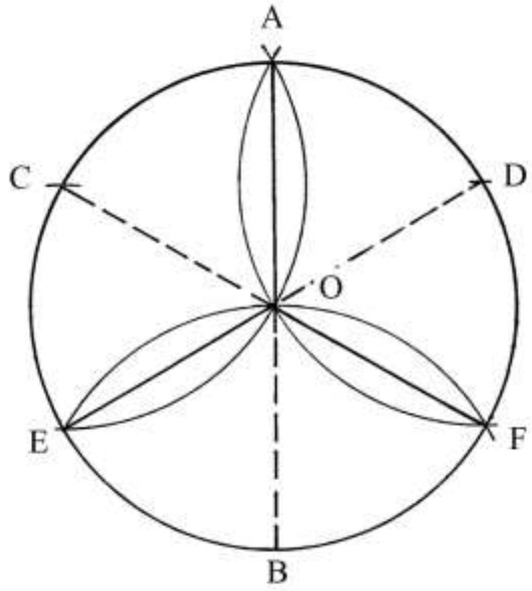
Per i punti B e E tracciare la retta *r* e parallela ad essa la retta *s* passante per G: questa ultima incontra il lato BC in G.

Collegare G con E: il segmento GE divide la complessa figura in due parti uguali:

* ABGE;
* GCE.

<u>Divisione di un cerchio in più parti</u>

Nella figura che segue, il cerchio di centro O ha raggio OA:



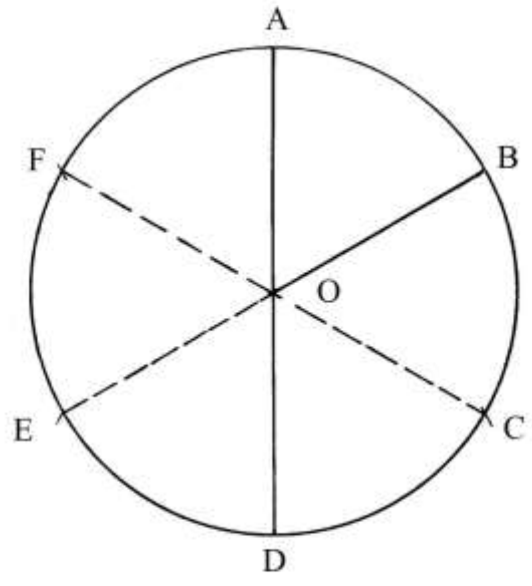
Dividere la circonferenza in *sei* parti uguali. Tracciare i raggi OA, OE e OF.

Il cerchio è sezionato in *tre* parti uguali, tre settori circolari di uguali dimensioni: AOE, AOF e EOF.

Ciascuno di essi ha superficie uguale a 1/3 di quella del cerchio.

Quest'ultimo è divisibile in *sei* settori circolari di uguale area: AOD, DOF, FOB, BOE, EOC e COA.

Il cerchio può essere diviso in parti di differente superficie:



Il settore circolare AOB ha area uguale a 1/6 di quella del cerchio, il settore BOD ha area uguale a 2/6 = 1/3 e il settore DEFA è ampio 3/6 = ½ del cerchio.

CAPITOLO IV

DESCRIZIONE DEI METODI DI MISURA DEI CORPI

Il capitolo è di fatto diviso in due parti:

* la prima è dedicata alla misura delle cose, intendendo con questa espressione i corpi solidi;
* la seconda è riservata alla descrizione dei metodi di misura dei corpi.

PRIMA PARTE

I solidi considerati sono ripartiti in *classi*.

Prima classe

I solidi considerati sono quelli che hanno le basi inferiore e superiore uguali e parallele. Le altre facce sono perpendicolari alle basi.

Un segmento di retta perpendicolare alle basi è l'altezza del solido.

Questi solidi possono essere classificati secondo tre forme:

a) Solidi e che hanno basi e facce laterali di forma quadrangolare: è il caso del cubo e del parallelepipedo.
b) Solidi con basi a forma di triangolo, pentagono o altri poligoni, fra loro sempre parallele: le superfici laterali hanno forme quadrangoli.
c) Solidi con basi di forma circolare: l'altezza di questo gruppo di solidi è sempre un segmento di retta.

Seconda classe

Rientrano in questa classe sia i solidi che terminano a punta che quelli che sono troncati.

Fra i primi figurano le varie forme di piramidi con base costituita da un poligono e il cono con la base circolare.

Se il solido non termina a punta perché è stato tagliato con un piano parallelo alla base si hanno sia i tronchi di piramide che i tronchi di cono.

Terza classe

I solidi riuniti in questa classe sono circolari sfere (e loro sezioni) e ellissoidi.

PRIMA CLASSE

A

Il cubo

Nel cubo tutte le dimensioni sono uguali: lo sono le lunghezze dei 12 spigoli e le aree delle 6 facce quadrate.

Un cubo con spigoli lunghi 10 cubiti ha le facce con area A uguale a

$A = 10 * 10 = 100$ cubiti^2 e volume V che è:

$V = A * 10 = 10^3 = 1000$ cubiti^3.

Il paragrafo *156 a* a p. 115 della traduzione catalana, contiene alcuni cenni alle unità di misura. Qui se ne tenta un'interpretazione ovviamente approssimativa: quelle unità erano usate in Catalogna intorno all'anno 1100.

Il cubo che ha spigoli lunghi 10 cubiti e volume 1000 cubiti^3 poteva contenere 8 *arroves* (o *rotoli*?) di acqua.

Un'*arrova* equivaleva a *30 libbre* ciascuna composta da *12 once*.

Invece, gli Ebrei Sefarditi sembra usassero un altro valore per le *arroves*: un cubo con spigoli lunghi (1 + ½) e volume uguale a (3 + 3/8) era l'unità chiamata *Efà*. Essa equivaleva a 27 *arroves*. Il cubito usati dagli stessi Sefarditi valeva 2 cubiti.

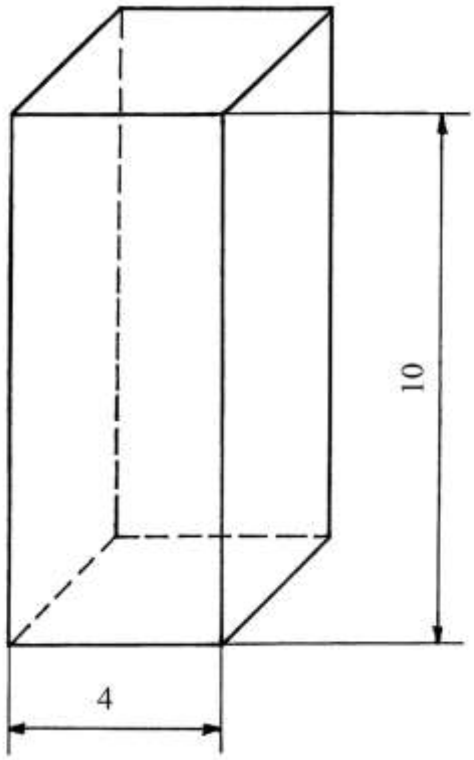
Vi è una chiara incongruenza fra la quantità di *arroves* corrispondenti al volume del cubo con spigoli lunghi 10 cubiti e le *arroves* usate dai Sefarditi, unità che risulterebbero multiple 8 volte delle prime.

B

Prisma a base quadrata

Come accade a quasi tutti i solidi considerati nella PRIMA PARTE del CAPITOLO QUARTO, i testi non sono accompagnati da figure.

Un prisma ha basi quadrati con spigoli lunghi 4. L'altezza è 10: Savasorda non indica alcuna unità di misura.



L'area di base A è:

$4^2 = 16.$

Il volume V è:

$V = A * 10 = 16 * 10 = 160.$

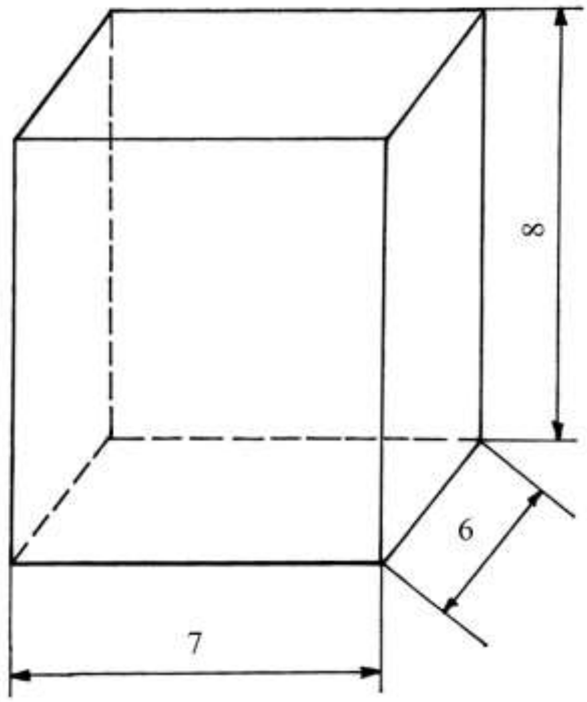
C

Parallelepipedo

Un parallelepipedo ha le basi rettangolari lunghe 7 e larghe 6 e l'altezza del solido è 8.

Il suo volume è dato dal prodotto di queste tre dimensioni:

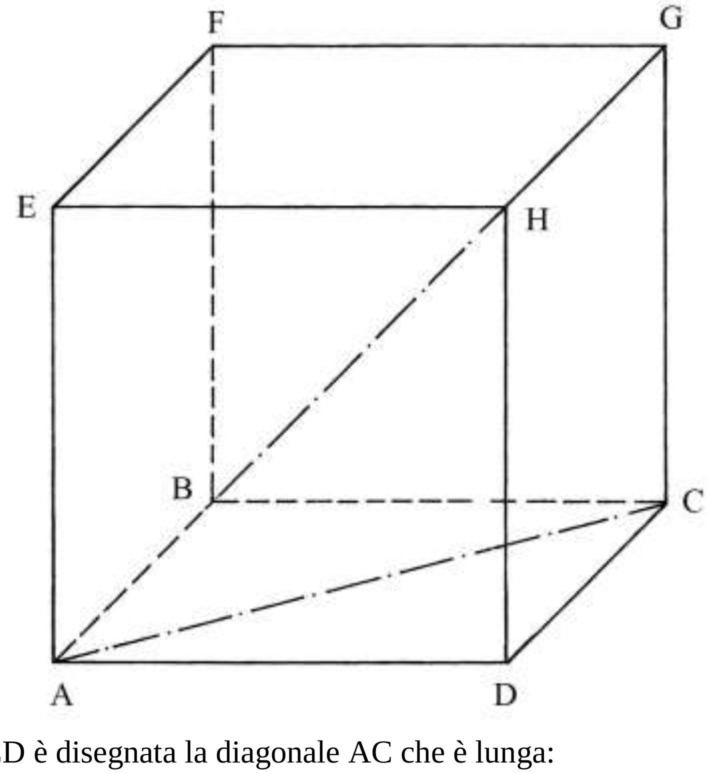
$V = 7 * 6 * 8 = 336.$



<u>Lunghezze delle diagonali dei solidi</u>

La figura che segue rappresenta un cubo disegnato in *assonometria cavaliera*, come è accaduto ai due precedenti solido, il prisma a base quadrata e il parallelepipedo.

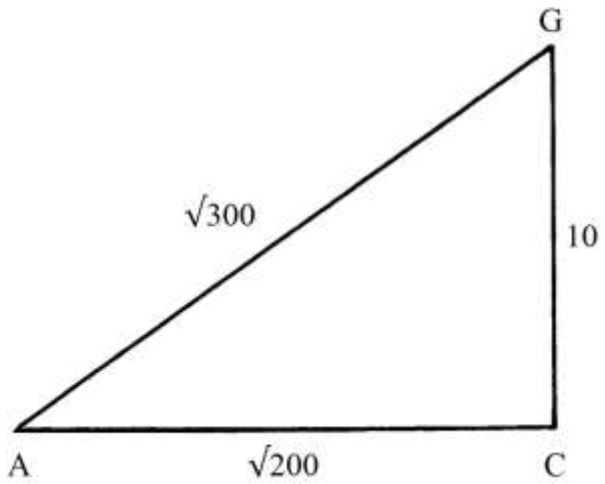
Il cubo ha le stesse dimensioni di quello sopra descritto da Savasorda: i suoi spigoli sono lunghi 10.



Nella base ABCD è disegnata la diagonale AC che è lunga:

$AC^2 = AD^2 + DC^2 = 10^2 + 10^2 = 200$ e
$AC = \sqrt{200}$.

AG è una diagonale del cubo:

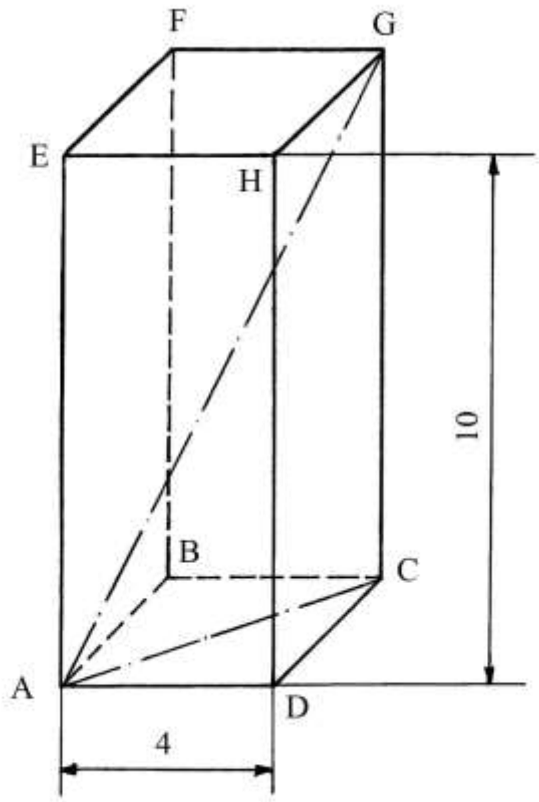


Essa è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo che ha cateti lunghi AC e CG.
AG è lunga:

$AG^2 = AC^2 + CG^2 = (\sqrt{200})^2 + 10^2 = 200 + 100 = 300$ e
$AG = \sqrt{300}$.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Nel caso del precedente prisma a base quadrata le due diagonali, AC e AG, hanno le seguenti lunghezze:

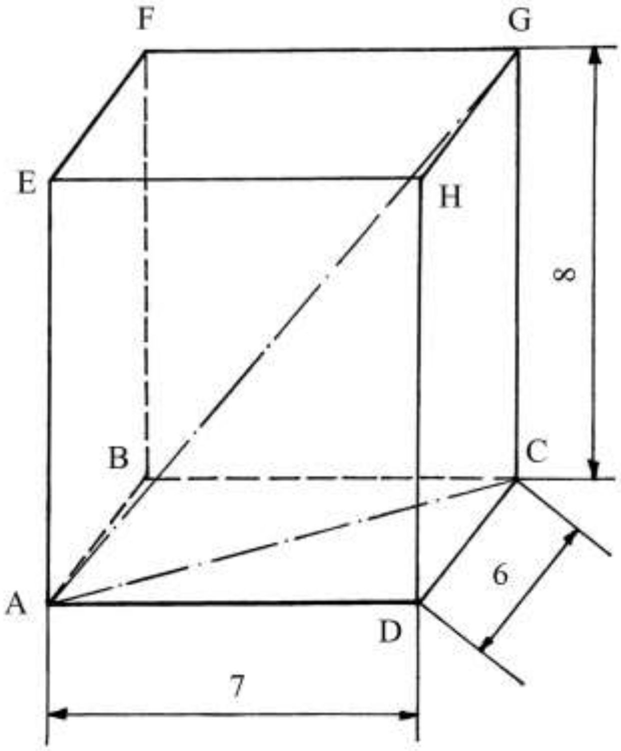


$AC^2 = AD^2 + DC^2 = 4^2 + 4^2 = 16 + 16 = 32$ e
$AC = \sqrt{32}$.

La diagonale AG è lunga:
$AG^2 = AC^2 + CG^2 = (\sqrt{32})^2 + 10^2 = 32 + 100 = 132$ e
$AG = \sqrt{132}$.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Nel parallelepipedo la diagonale AC è lunga:

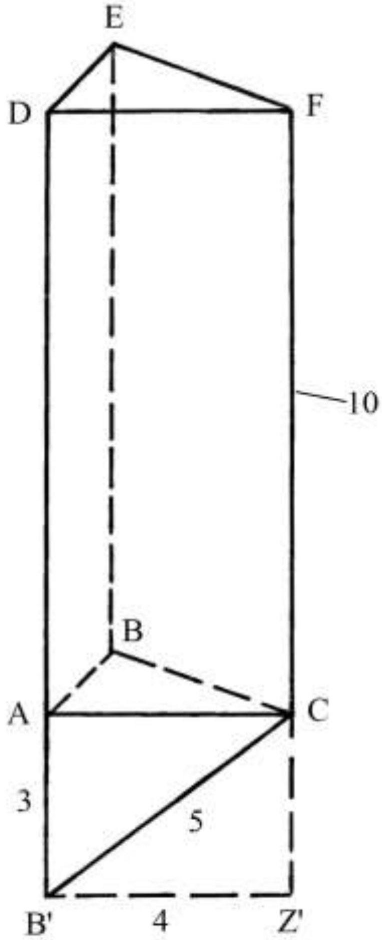


$AC^2 = AD^2 + DC^2 = 7^2 + 6^2 = 49 + 36 = 85$ e
$AC = \sqrt{85}$.

La diagonale del parallelepipedo, AG, è lunga:
$AG^2 = AC^2 + CG^2 = (\sqrt{85})^2 + 8^2 = 85 + 64 = 149$ e
$AG = \sqrt{149}$.

D
Prismi

Un prisma ha le basi formate da triangoli scaleni che hanno lati lunghi 3, 4 e 5 cubiti. La sua altezza *h* è di 10 cubiti.



Chiaramente, le due basi sono triangoli rettangoli: le lunghezze dei loro lati formano la terna primitiva 3-4-5.

L’area di una base è:

$A_{ABC} = AB * AC/2 = 3 * 4/2 = 6$ cubiti^2.

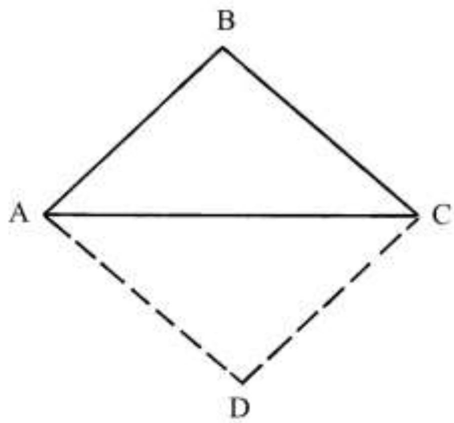
Il volume V del prisma è:

$V = A_{ABC} * h = 6 * 10 = 60$ cubiti^3.

Lo schema qui sopra mostra il prisma triangolare disegnato in assonometria cavaliera. ACB’ è il triangolo rettangolo ABC in vere dimensioni.

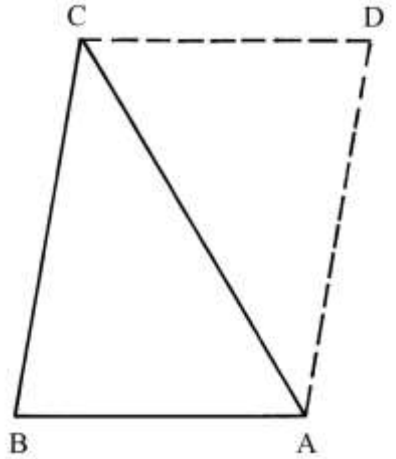
B’C è anche una diagonale del rettangolo ACZ’B’.

Altri esempi di triangoli utilizzati quali basi di prismi retti sono quello ottusangolo e quello acutangolo:



Il quadrilatero ABCD è sezionato lungo la diagonale AC: il triangolo ABC è la base di un prisma e possiede un angolo ottuso nel vertice B.

Anche il quadrilatero ABCD, nella figura qui sotto, è diviso in due triangoli ad opera della diagonale AC.



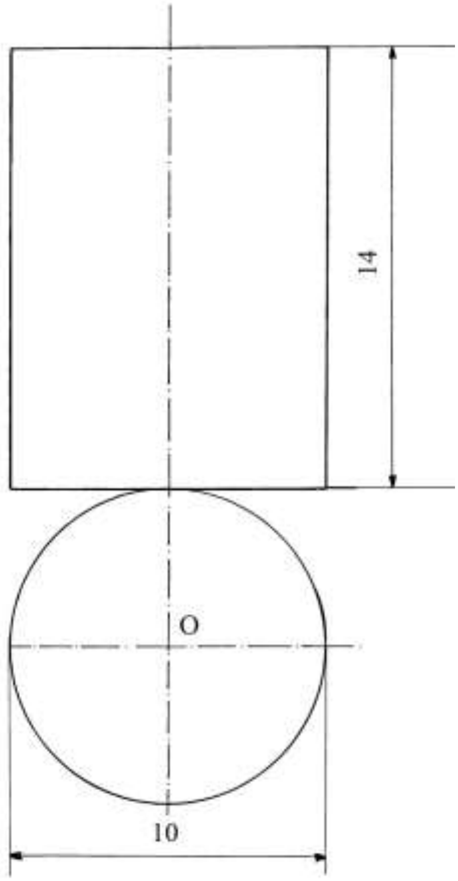
Il triangolo ABC possiede soltanto angoli acuti.

E

Solidi circolari

Il cilindro è definito da Savasorda con l'espressione *prisma circolare*.

Un cilindro retto ha basi formate da due cerchi con diametro d uguale a 10 cubiti. Il solido è alto $h = 14$ cubiti.



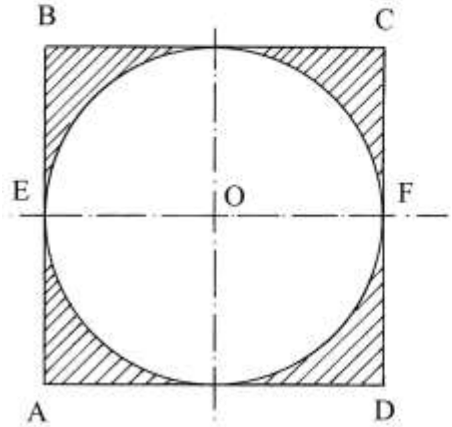
Il volume del solido è calcolato con una procedura che contiene i seguenti passi:

* moltiplicare la lunghezza del diametro del cerchio per sé stessa: 10 * 10 = 100;
* moltiplicare per l'altezza: 100 * 14 = 1400;
* calcolare (1/7 + 1/14) : 1400 * (1/7 + 1/14) = 1400 * 3/14 = 300;
* sottrarre da 1400: 1400 – 300 = 1100 cubiti^3, volume del cilindro.

- APPROFONDIMENTO -

L'uso della costante (1/7 + 1/14) da parte di Savasorda richiede una spiegazione.
(1/7 + 1/14) può essere scritta anche come:

(1/7 + 1/14) = (2/14 + 1/14) = 3/14.



L'area di un cerchio inscritto in quadrato che ha lati lunghi quanto il diametro *d* è:

$A_{ABCD} = AD^2 = EF^2 = d^2 = 10^2 = 100$ cubiti^2.

L'area del cerchio di centro O e diametro EF = *d* è:

$$A_{CERCHIO} = \pi * r^2 \approx 22/7 * (d/2)^2 = 22/7 * d^2/4 = 22/28 * d^2 = 11/14 * d^2 =$$
$$= 11/14 * 10^2 = 1100/14.$$

La differenza fra le due aree, Δ, è:

$$\Delta = A_{ABCD} - A_{CERCHIO} = d^2 - 11/14 * d^2 = d^2 * (1 - 11/14) = d^2 * (14 - 11)/14 =$$
$$= d^2 * 3/14 = d^2 * (1/7 - 1/14).$$

La somma delle quattro aree tratteggiate nella figura qui sopra ha superficie uguale a 3/14 di quella del quadrato.

Il volume dell'ipotetico prisma costruito sul quadrato ABCD è:

$$V_{PRISMA} = A_{ABCD} * h = 100 * 14 = 1400 \text{ cubiti}^3.$$

Il volume del cilindro inscritto nell'ipotetico prisma è:

$$V_{CILINDRO} = A_{CERCHIO} * h = (1100/14) * 14 = 1100 \text{ cubiti}^3.$$

La differenza ΔV fra i due volumi è:

$$\Delta V = V_{PRISMA} - V_{CILINDRO} = 1400 - 100 = 300.$$

Ma, come visto sopra nella procedura di Savasorda, 300 rappresenta (1/7 + 1/14) di 1400:

$$1400 * (1/7 + 1/14) = 1400 * 3/14 = 300.$$

Il rapporto fra il volume del cilindro e quello del prisma è uguale a quello fra l'area del quadrato e l'area del cerchio delle basi: 11/14.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

La soluzione più semplice per il calcolo del volume del cilindro sarebbe la seguente:

* calcolare l'area del cerchio di base:
  $A_{CERCHIO} = 11/14 * d^2 = 11/14 * 10^2 = 11/14 * 100 = 1100/14 \text{ cubiti}^2$;
* moltiplicare per l'altezza: $A_{CERCHIO} * h = (1100/14) * 14 = 1100 \text{ cubiti}^3$, volume del cilindro.

- -

Infine, Savasorda calcola l'area del cerchio:

$$A_{CERCHIO} = d^2 - d^2 * (1/7 + 1/14) = 100 - 100 * 3/14 = 100 - (21 + 3/7) =$$
$$= (78 + 4/7) \text{ cubiti}^2 \text{ [= 1100/14]}.$$

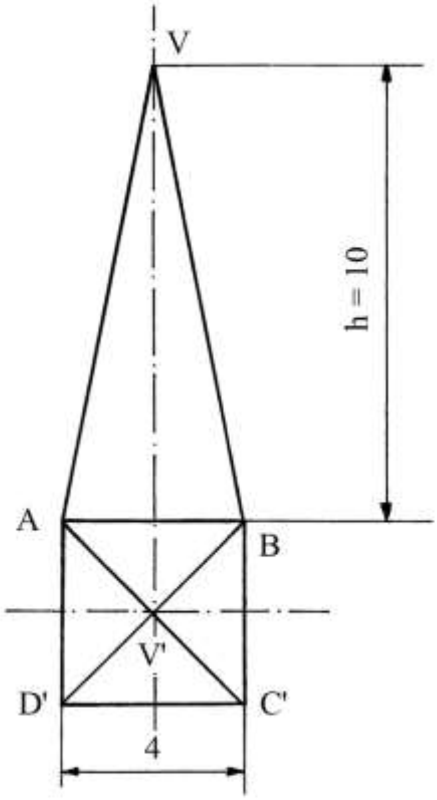
SECONDA CLASSE

Primo genere

Tutti i solidi compresi in questa Classe terminano nella parte superiore in *un punto*.

Il volume è sempre dato dal prodotto dell'area della base per un terzo dell'altezza *h*:

$$V = A_{BASE} * h/3.$$



Una piramide a base quadrata ha i lati della base lunghi 4 cubiti e l'altezza del solido è 10 cubiti.

L'area della base è:

$A_{BASE} = AB^2 = 4^2 = 16$ cubiti^2.

Il volume V è:

$V = A_{BASE} * h/3 = 16 * 10/3 = 16 * (3 + 1/3) = (53 + 1/3)$ cubiti^3.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

\

Se la base di un solido terminante a punta è un triangolo o un cerchio il suo volume è sempre dal prodotto dell'area della base per un terzo dell'altezza del solido.

L'altezza della piramide deve essere misurata dal vertice e giungere perpendicolarmente alla base.

Savasorda divide le piramidi (e i coni) in quattro *sezioni* ("seccions" in catalano):

1ª) piramidi con i lati della base di uguale lunghezza e coni: anche gli spigoli laterali hanno uguali lunghezze.
2ª) Piramidi con spigoli laterali di uguale lunghezza, con lati delle basi di diverse lunghezze.
3ª) Piramidi con lati delle basi di uguale lunghezza e spigoli laterali di differenti lunghezze.
4ª) Piramidi con lati delle basi e spigoli laterali di differenti lunghezze.

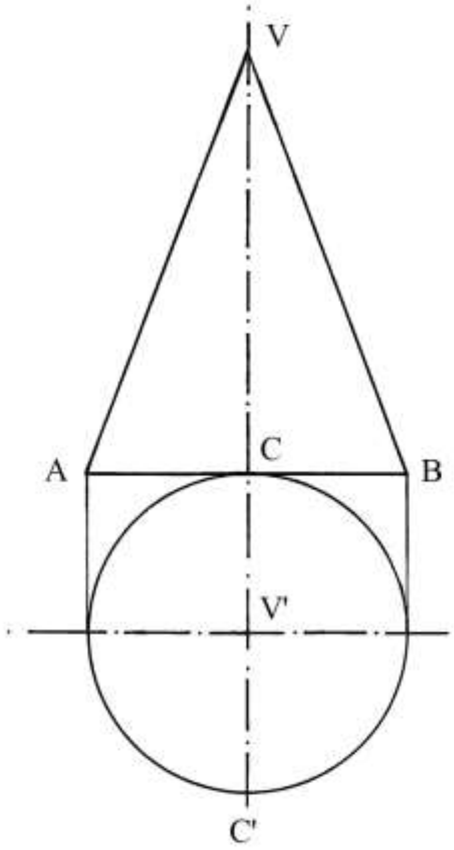
PRIMA SEZIONE

Un esempio dei solidi contenuti in questa Sezione è dato dalla piramide a base quadrata sopra descritta: i lati della sua base hanno lunghezze uguali e lo stesso accade alle lunghezze dei quattro spigoli laterali.

Anche il cono retto rientra in questa Sezione.

Il volume V di un cono retto è dato da:

$V = A_{BASE} * h/3$.



Se l’altezza *h* è sconosciuta ma è possibile misurare l’*apotema* VA e il diametro AB = *d* della base, l’altezza è data da:

$h = VA^2 – (d/2)^2$ e

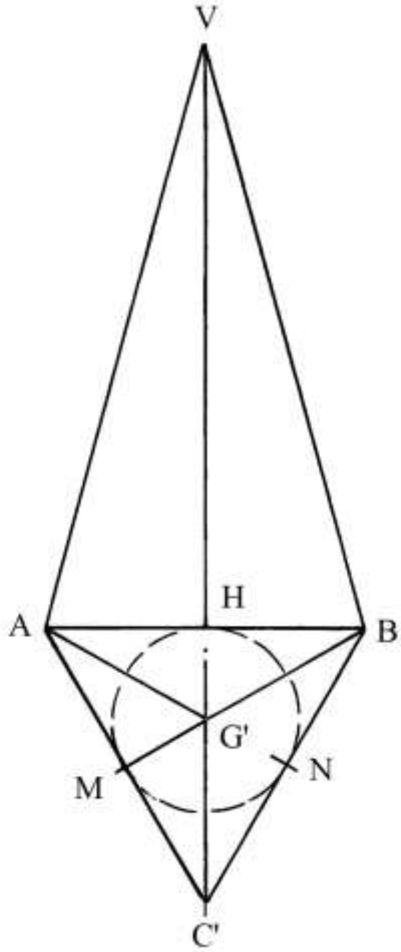
$h = \sqrt{[VA^2 – (d/2)^2]}$.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Una piramide ha per base un triangolo equilatero.

Essa ha tre facce laterali a forma di triangoli isosceli, tutti di uguali dimensioni: l’altezza di questi triangoli, come ad esempio VM, è chiamata *apotema*.

L’altezza del solido va dal vertice V fino all’incentro G’ della base triangolare.



Nello schema, G'H, G'M e G'N sono le proiezioni sul piano orizzontale delle altezze dei tre triangoli isosceli che formano le facce laterali e cioè i tre apotemi.

Il punto G' è l'incentro o centro del cerchio inscritto nel triangolo: esso è anche il piede della proiezione del vertice V sul piano orizzontale.

Il raggio del cerchio inscritto nella base, G'H, è lungo *un terzo* dell'altezza C'H.

Per ricavare l'altezza del solido Savasorda propone una procedura:

* calcolare l'area del triangolo di base, ABC: A_{ABC};
* calcolare il semiperimetro *p* del triangolo ABC: $p = 3 * AB/2$;
* dividere l'area del triangolo per il semiperimetro:
  $K = A_{ABC} /(3 * AB/2) = 2 * A_{ABC}/(3 * AB)$ [la costante "K" è qui introdotta per semplificare i calcoli];
* elevare al quadrato: K^2;
* calcolare il quadrato della lunghezza dell'apotema: VM^2;
* sottrarre da VM^2 il valore di K^2: $VM^2 – K^2$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{(VM^2 – K^2)} = VG'$, altezza della piramide.

- APPROFONDIMENTO -

La complessa procedura proposta da Savasorda può essere semplificata.

L'area di ABC è:

$$A_{ABC} = AB * (\sqrt{3} * AB/2)/2 = (\sqrt{3})/4 * AB^2.$$

Il semiperimetro *p* è:

$p = 3 * AB/2.$

La costante K vale:

$K = A_{ABC}/p = [(\sqrt{3})/4 * AB^2]/(3 * AB/2) = (\sqrt{3})/6 * AB.$

Ma "$(\sqrt{3})/6 * AB$" è *un terzo* della lunghezza dell'altezza C'H e di quelle BM e AN ed è il raggio del cerchio inscritto nel triangolo equilatero: K è la lunghezza di G'H e di G'M e di G'N.

Nella piramide sono note le lunghezze di VM e di G'M: VG'M è un triangolo rettangolo e la lunghezza di VG' è data da:

$(VG')^2 = VM^2 – G'M^2.$

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

La procedura usata da Savasorda merita un ulteriore approfondimento. L'Autore non indica il metodo da lui impiegato per calcolare l'area del triangolo equilatero.

La presenza del semiperimetro fa supporre l'applicazione della formula di Erone per calcolare l'area del triangolo. Verifichiamo: il perimetro *2*p* è:

$2*p = AB + BC' + C'A = 3 * AB$ e il semiperimetro *p* è:

$p = 3 * AB/2.$

L'area calcolata con la formula di Erone è:

$A_{ABC'} = \sqrt{[p * (p – AB) * (p' – BC') * (p – C'A)]} = \sqrt{[p * (p – AB)^3]} =$
$= \sqrt{[3 * AB/2 * (3 * AB/2 – AB)^3]} = \sqrt{[3 * AB/2 * (AB/2)^3]} =$
$= \sqrt{(3/2 * AB * 1/8 * AB^3)} = \sqrt{(3/16 * AB^4)} = (\sqrt{3})/4 * AB^2.$

Dividendo questa ultima espressione per il semiperimetro *p* si ha:

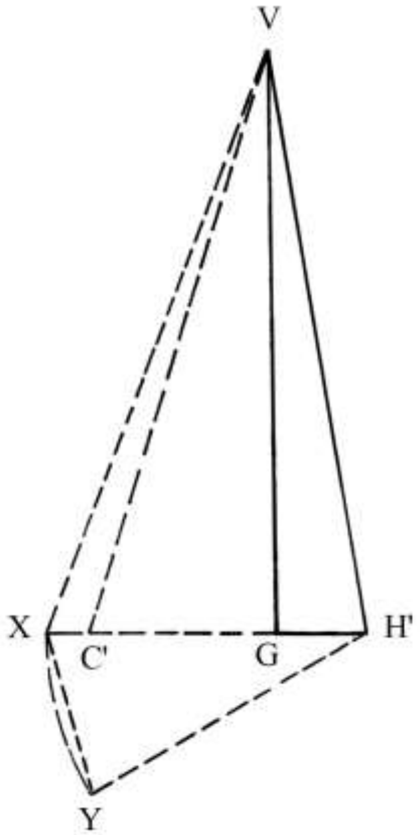
$[(\sqrt{3})/4 * AB^2]/(3 * AB/2) = (\sqrt{3}) * AB/6$, che è il valore della costante "K" e la lunghezza del raggio G'H.

Una spiegazione del "tortuoso" metodo usato da Savasorda può essere dato dal desiderio di ridurre al minimo le estrazioni di radici quadrate e in particolare di una delle più difficili: $\sqrt{3}$.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Lo schema che segue tenta di fornire le reali lunghezze dei segmenti e degli spigoli di questa piramide:

* XH'Y è un triangolo rettangolo che è metà del triangolo equilatero ABC';
* VG è l'altezza della piramide;
* VH' è la lunghezza dell'apotema VH;
* GH' è il raggio del cerchio inscritto nel triangolo equilatero che forma la base;
* VC' è la lunghezza in proiezioni ortogonali dello spigolo VC;
* VX è la *vera* lunghezza degli spigoli VA, VB e VC.



VGH’ è un triangolo rettangolo. Lo schema conferma una uguaglianza:

apotema^2 = altezza^2 + raggio^2 e cioè:

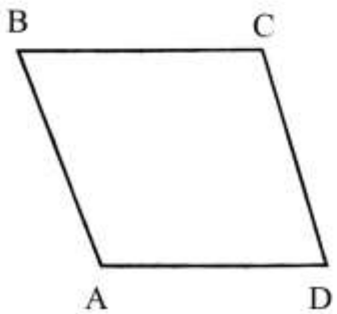
$(VH')^2 = VG^2 + (GH')^2$.

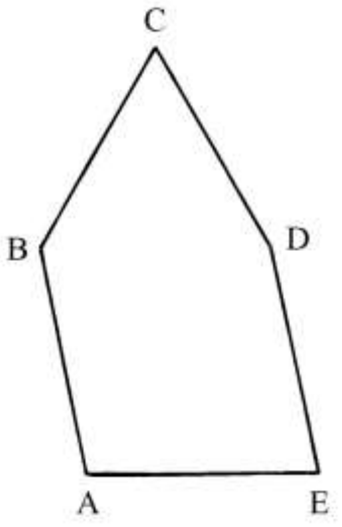
- -

Altre piramidi

Nei casi di piramidi a base quadrata, di pentagono regolare o altro poligono regolare la procedura per ricavare l’altezza del solido ricalca quella utilizzata per la piramide a base triangolare.

Se la base di una piramide è un poligono equilatero ma non equiangolo, non può essere usato il metodo descritto in precedenza: il quadrilatero e il pentagono equilateri mostrati nelle figure che seguono sono equilateri ma non equiangoli:

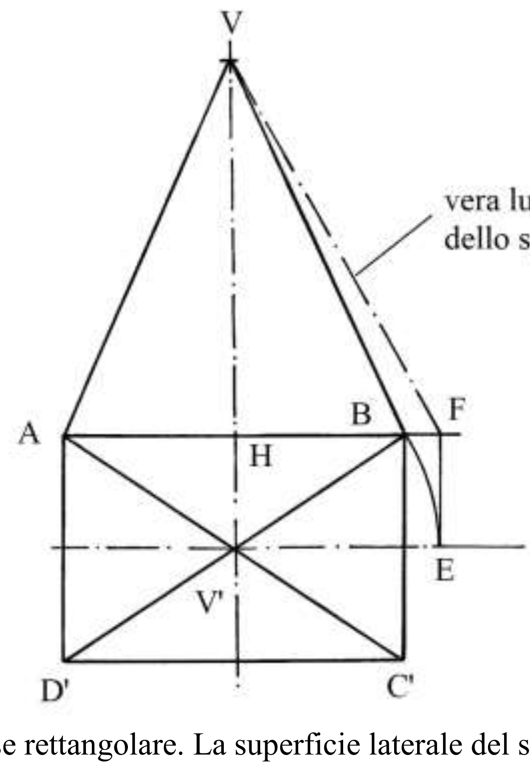




SECONDA SEZIONE

Sono considerati i solidi che hanno gli spigoli che collegano gli estremi della base al vertice di uguale lunghezza, mentre i lati della base non sono uguali.

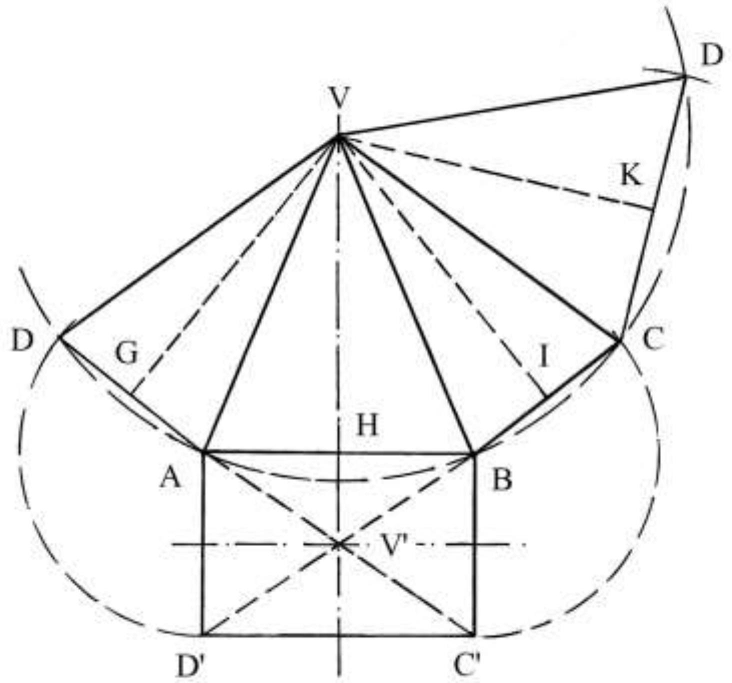
L'esempio più semplice è quello di una piramide retta che ha per base un rettangolo:



ABC'D' è la base rettangolare. La superficie laterale del solido è formata da quattro triangoli isosceli: i triangoli opposti hanno uguali dimensioni.

L'arco BE, disegnato facendo centro in V' con raggio V'B, fissa il punto E: da questo è elevata la perpendicolare EF al prolungamento di AB. VF è la *vera lunghezza* degli spigoli VB, VA, VC e VD.

Lo schema che segue presenta lo sviluppo di questa piramide:



VG e VI sono gli apotemi dei triangoli che hanno basi lunghe AD e hanno uguale lunghezza.

VH e VK sono gli apotemi dei due triangoli che hanno basi lunghe quanto AB = CD: essi hanno uguale lunghezza: VH = VK.

Gli apotemi VG e VI sono più lunghi di quelli VH e VK.

Savasorda calcola l'altezza *h* della piramide misurando uno spigolo $s = VF$ e ricavando la lunghezza della semidiagonale della base, $d/2 = AC'/2$; la procedura è la seguente:

* $(AC')^2 = AB^2 + (AD')^2 = d^2$;
* $d = \sqrt{[AB^2 + (AD')^2]}$;
* $h^2 = s^2 - (d/2)^2 = VB^2 - (d/2)^2$;
* $h = \sqrt{[VB^2 - (d/2)^2]}$.

SECONDO GENERE

Sono qui studiati un gruppo di solidi: le piramidi troncate.

Un tronco di piramide ha basi quadrate: la base inferiore ha lati lunghi 6 cubiti e quella superiore ha lati lunghi 4 cubiti:

AB = 6 cubiti e CD = 4 cubiti

L'altezza del solido EZ è 10 cubiti.

Gli spigoli BD e AC sono prolungati verso l'alto fino a incontrarsi nel punto T: questo è il vertice della piramide dalla quale è stata tagliata la parte alta TE: il piano di taglio, passante per D, E e C, è parallelo alla base.

Da C è abbassata la perpendicolare CL alla base definita dai punti B, Z e A: AL è lungo:

$AL = (AB – DC)/2 = (6 – 4)/2 = 1$ cubito.

I triangoli TEC e CLE sono simili per cui vale la proporzione:

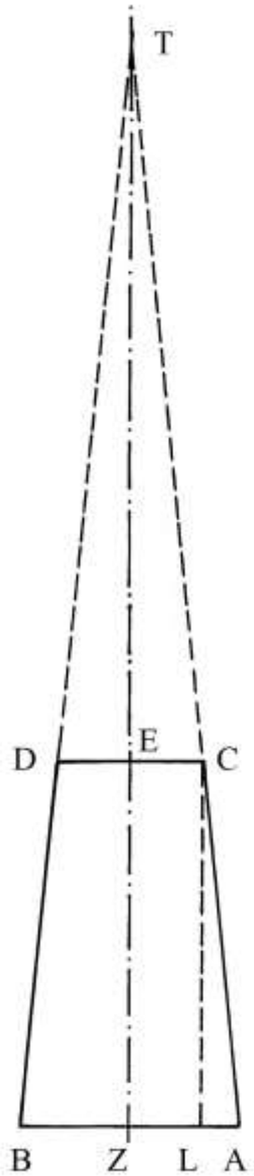
CL : TE = LA : EC, da cui:

$TE = (CL * EC)/LA = (10 * 2)/1 = 20$ cubiti.

La soluzione offerta da Savasorda fornisce lo stesso risultato, ma è un po' confusa.

L'altezza totale della piramide originaria è:

$TZ = TE + EZ = 20 + 10 = 30$ cubiti.



Per calcolare il volume del tronco di Piramide, Savasorda procede come segue:

* calcolare il volume dell'intera piramide:

$$V_{TAB} = A_{AZB} * TZ/3 = 6^2 * 30/3 = 36 * 10 = 360 \text{ cubiti}^3;$$

* calcolare il volume della piramide tagliata:

$$V_{TDC} = A_{DEC} * TE/3 = 4^2 * 20/3 = 16 * 20/3 = 320/3 = (106 + 2/3) \text{ cubiti}^3;$$

* sottrarre il volume della piramide tagliata da quello dell'intera piramide:

$V_{TAB} – V_{DEC} = 360 – (106 + 2/3) = (253 + 1/3)$ cubiti^3, volume del tronco di piramide.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Per chiarire i metodi usati per calcolare il volume del tronco di piramide con basi quadrate usiamo alcuni simboli:

* *a* è la lunghezza dei lati della base inferiore;
* *b* è la lunghezza dei lati della base superiore;
* *h* è l'altezza del tronco di piramide;
* A_{AZB} è l'area della base inferiore: $A_{AZB} = a^2$;
* A_{DEC} è l'area della base superiore: $A_{DEC} = b^2$.

Savasorda descrive una seconda soluzione:

* calcolare il quadrato della lunghezza di un lato della base inferiore:
  $AB^2 = a^2 = 6^2 = 36$;
* calcolare il quadrato della lunghezza di un lato della base superiore:
  $CD^2 = b^2 = 4^2 = 16$;
* moltiplicare la lunghezza del lato della base inferiore per quello della base superiore:
  $AB * CD = a * b = 6 * 4 = 24$;
* sommare i tre numeri: $36 + 16 + 24 = 76$;
* moltiplicare per l'altezza: $76 * 10 = 760$;
* dividere per 3: $760/3 = (253 + 1/3)$ cubiti[3], volume del tronco di piramide.

La procedura è riassunta nella formula che segue:

$$V = (a^2 + b^2 + a*b) * h/3.$$

- APPROFONDIMENTO -

Oggi è impiegata una formula che permette di calcolare il volume di un tronco di piramide a basi quadrate:

$$V = [A_{AZB} + A_{ADEC} + \sqrt{(a^2 * b^2)}] * h/3.$$

Nel caso concreto si ha:

$$V\ [a^2 + b^2 + \sqrt{(a^2 * b^2)}] * h/3 = (a^2 + b^2 + a*b) * h/3.$$

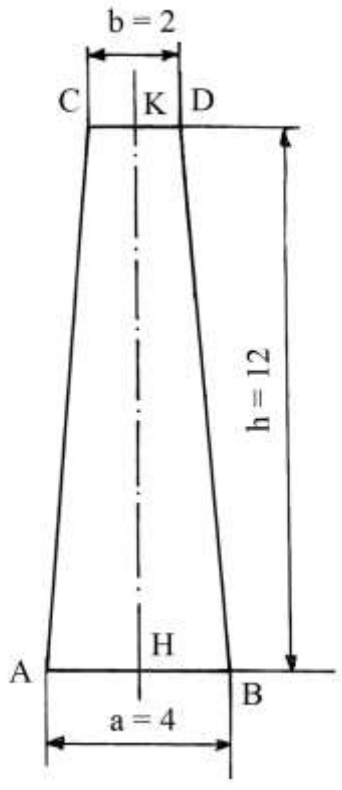
La formula è identica a quella sottostante alla procedura impiegata da Savasorda.

- -

<u>Volume di un tronco di cono</u>

Un tronco di cono ha la base maggiore formata da un cerchio di diametro 4 cubiti e la base minore che è un cerchio con diametro 2 cubiti.

L'altezza del solido è 12 cubiti.



Savasorda ricava il volume del tronco di cono con una procedura pressoché uguale a quella impiegata per il volume del tronco di piramide a base quadrata:

* calcolare il quadrato del diametro della base maggiore: $a^2 = 4^2 = 16$;
* calcolare il quadrato del diametro della base minore: $b^2 = 2^2 = 4$;
* moltiplicare le lunghezze dei due diametri: a * b = 4 * 2 = 8;
* sommare i tre numeri: 16 + 4 + 8 = 28;
* sottrarre (1/7 + 1/14): 28 – 28 * (1/7 + 1/14) = 28 – 28 * (3/14) = = 28 – 6 = 22;
* moltiplicare per un terzo dell'altezza: 22 * h/3 = 22 * 12/3 = 22 * 4 = 88 cubiti^3, volume V del tronco di cono.

La procedura è sintetizzata nella formula:

$$V = (a^2 + b^2 + a * b) * (1 – 1/7 – 1/14).$$

- APPROFONDIMENTO -

L'espressione (1 – 1/7 – 1/14) equivale a:

$$1 – (2 + 1)/14 = 1 – 3/14 = 11/14.$$

La frazione 11/14 è legata al valore approssimato di π: $\pi \approx 22/7$.

Attualmente per calcolare il volume di un tronco di cono è usata una formula:

$$V = 1/3 * h * \pi * (R^2 + r^2 + R * r).$$

R è il raggio della base maggiore: R = a/2 e *r* quello della base minore: r = b/2.

Sostituendo a π il valore approssimato di 22/7 si ha:

$$V = 1/3 * h * 22/7 * [(a/2)^2 + (b/2)^2] = 1/3 * h * 22/7 * (a^2/4 + b^2/4 + a * b/4) =$$
$$= 1/3 * h * 22/7 * (a^2 + b^2 + a * b)/4 = 1/3 * h * 22/(7 * 4) * (a^2 + b^2 + a * b) =$$
$$= 1/3 * h * 11/14 * (a^2 + b^2 + a * b).$$

La formula sottostante alla procedura di Savasorda equivale alla formula odierna.

- -

Volume di un doppio cono

Un solido è formato da due tronchi di cono retti, di uguali dimensioni e uniti lungo la comune base maggiore.

Le due basi minori hanno diametro di 2 cubiti e la base maggiore comune ha diametro uguale a 4 cubiti.

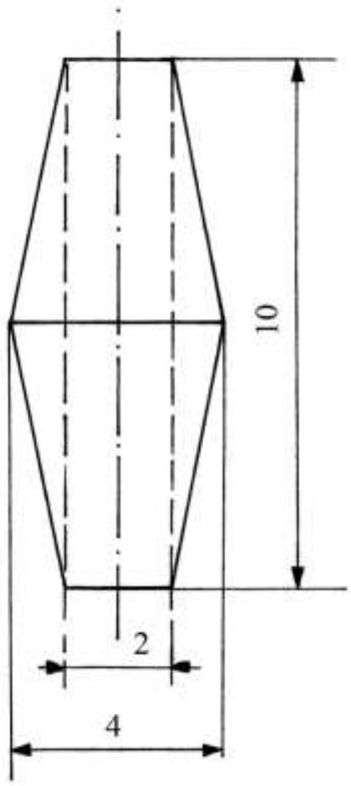
I due tronchi di cono hanno uguale altezza: 5 cubiti. L'altezza totale del solido è di 10 cubiti.

Il volume W di ciascuno dei due tronchi di cono è calcolabile con il metodo descritto nella soluzione del precedente problema:

$$W = 1/3 * h * 22/7 * [(4/2)^2 + (2/2)^2 + (4/2 * 2/2)] =$$
$$= 1/3 * 5 * 22/7 * (2^2 + 1^2 + 2) = 1/3 * 22/7 * 5 * (4 + 1 + 2) =$$
$$= 1/3 * 5 * 22/7 * 7 = 1/3 * 110 = (36 + 2/3) \text{ cubiti}^3.$$

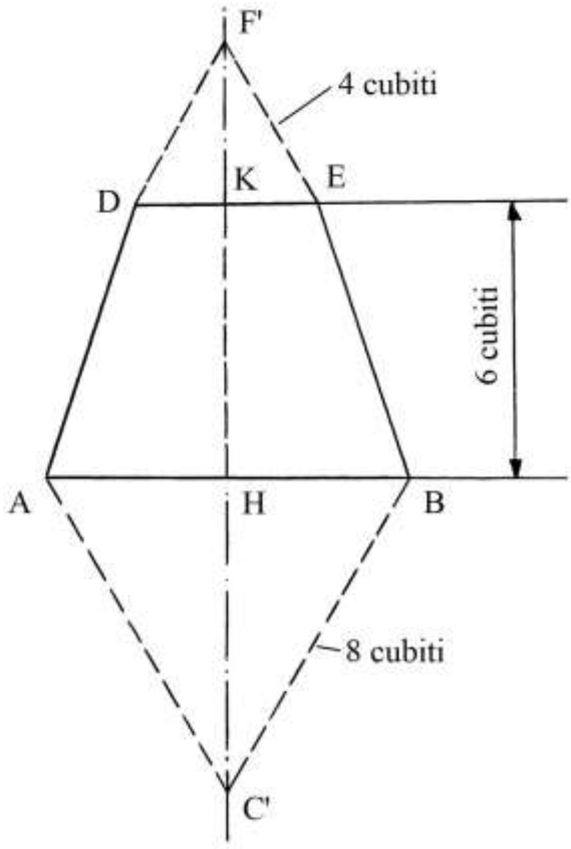
Il volume V del solido completo è il doppio di W:

$$V = 2 * W = 2 * (36 + 2/3) = (73 + 1/3) \text{ cubiti}^3.$$



<u>Tronco di piramide con basi triangolari</u>

Un tronco di piramide ha entrambe le basi a forma di triangolo equilatero.



La base maggiore ha lati lunghi 8 cubiti e la base minore ha lati di 4 cubiti.
L'altezza del solido è 6 cubiti.
ABC' è il triangolo equilatero della base inferiore e DEF' è quello della base superiore.
L'area della base inferiore è stabilita da Savasorda in (28 – 2/7) cubiti^2.
Calcoliamo questa area:

$A_{ABC'} = AB * HC'/2 = 8 * [8 * (\sqrt{3})/2]/2 = 8 * (4 * \sqrt{3})/2 = 16 * \sqrt{3} =$
$= (27 + 2/3)$ cubiti^2 [valore quasi uguale a quello calcolato da Savasorda: $(28 – 2/7) = (27 + 5/7)$].

La radice quadrata dell'area di ABC' è:

$\sqrt{(A_{ABC'})} = \sqrt{(27 + 2/3)} \approx 5{,}26$ [per Savasorda (5 + 2/7)].

L'area del triangolo DEF' è:

$A_{DEF'} = DE * KF'/2 = 4 * [4 * (\sqrt{3})/2]/2 = 4 * \sqrt{3} \approx (7 – 1/14) =$
$= (6 + 13/14)$ cubiti^2 [Savasorda scrive (7 – 1/14) cubiti^2].

La radice quadrata dell'area di DEF' è:

$\sqrt{(A_{DEF'})} = \sqrt{(6 + 13/14)} \approx (2 + 4/7 + 1/14)$.

La procedura usata dall'Autore prevede i seguenti ulteriori passi:

* sommare le aree delle due basi: $A_{ABC'} * A_{DEF'} = (27 + 2/3) + (6 + 13/14) = = (34 + 9/14)$;
* moltiplicare le radici quadrate delle aree: $(5 + 2/7) * (2 + 4/7 + 1/14) \approx \approx (13 + 6/7)$;
* addizionare alla somma delle aree delle due basi: $(13 + 6/7) + (34 + 9/14) = = (48 + ½)$;
* moltiplicare per l'altezza del tronco di cono e dividere per 3:

  $(48 + ½) * 6 /3 = (48 + ½) * 2 = 97$ cubiti^3, volume V del tronco di piramide.

La procedura è riassunta nella formula che segue:

$V = [A_{ABC'} + A_{DEF'} + \sqrt{(A_{ABC'} * A_{DEF'})}] * h/3.$

La formula è già stata implicitamente usata da Savasorda per calcolare il volume di un tronco di piramide con basi quadrate: essa ha valore universale.

CLASSE TERZA
La sfera

Una sfera ha raggio *r* e diametro *d = 2 * r*.
La sua superficie A è:

$A = 4 * \pi * r^2 \approx 4 * 22/7 * r^2 = 88/7 * r^2.$

Conoscendo il diametro *d* la formula può essere scritta come segue:

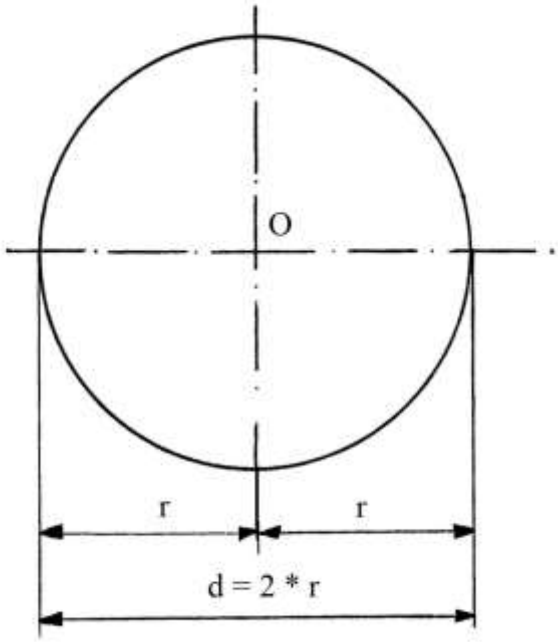
$A = 4 * \pi * (d/2)^2 = \pi * d^2 \approx 22/7 * d^2.$

Il volume V è dato da:

$V = 4/3 * \pi * r^3 \approx 4/3 * 22/7 * r^3 = 88/21 * r^3 = 88/21 * (d/2)^3 =$
$= 88/21 * d^3/8 = 11/21 * d^3.$

Savasorda calcola il volume V della sfera moltiplicando l'area A per (1/6 * d):

$(22/7 * d^2) * 1/6 * d = 22/42 * d^3 = 11/21 * d^3$, che è la corretta formula.

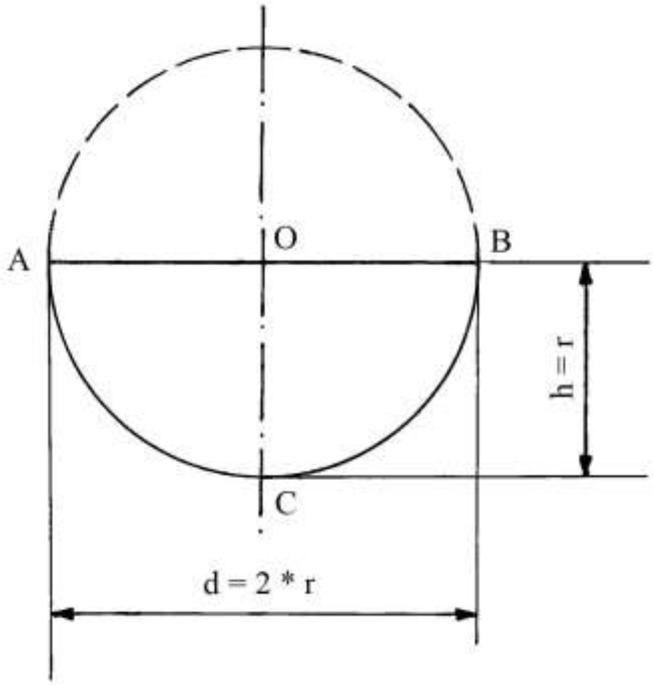


Una sfera ha diametro lungo 7 cubiti. L'Autore ottiene l'area e il volume:

- * calcolare il quadrato della lunghezza del diametro: $7 * 7 = 49$;
- * moltiplicare per $(3 + 1/7)$ [=22/7]: $49 * (3 + 1/7) = 154$ cubiti^2 = A, superficie della sfera;
- * moltiplicare la superficie A per $(1/6 * d)$: $154 * (1/6 * 7) =$ $= (179 + 2/3)$ cubiti^3 = V, volume della sfera [Savasorda indica il valore equivalente di $(180 – 1/3)$ cubiti^3].

<u>Semisfera</u>

Un serbatoio ha la forma data dalla metà di una sfera.



Il diametro AB è lungo 7 cubiti.
La profondità OC = *h* ha lunghezza uguale al raggio *r*: h = r = d/2 = 7/2 = 3,5 cubiti.
Queste dimensioni confermano che il recipiente è l'esatta metà di una sfera.

L'area A è data da:

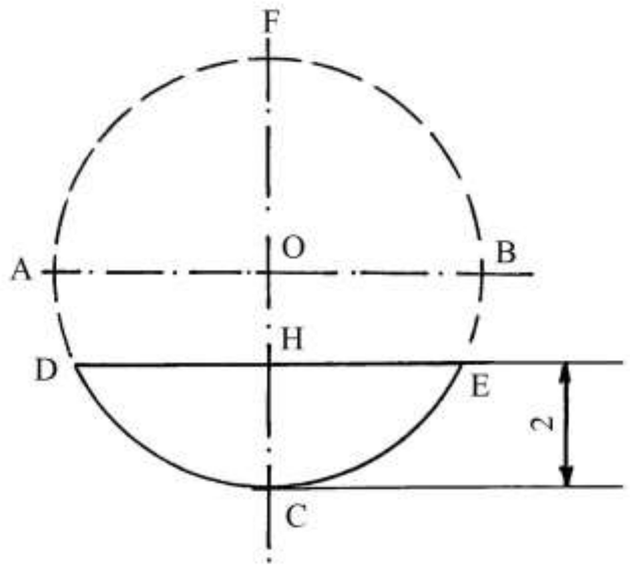
$A = \pi * h * d \approx 22/7 * 3,5 * 7 = 77$ cubiti^2.

Il volume V è calcolato da:

$V = A * d/6 = 77 * 7/6 = (89 + 5/6)$ cubiti^3 [Savasorda lo indica come (90 – 1/6) cubiti^3].

Solido più piccolo di una semisfera

Un solido è ritagliato con un piano da una sfera:



DHEC è un *segmento sferico a una base*.

Il diametro della sfera, AB = d, è lungo 7 cubiti come nei due casi precedenti della sfera e della semisfera.

Senza offrire alcun dettaglio, Savasorda indica in 40 cubiti^2 l'area del segmento sferico: la sua radice quadrata vale:

$\sqrt{40} \approx (6 + 1/3)$.

In seguito egli fa un cenno generico a un metodo utilizzato nel precedente Capitolo Secondo: forse si riferiva al *teorema delle corde*.

Nel cerchio di centro O si intersecano a angolo retto due corde: il diametro FC e la corda DE. Per il teorema delle corde vale la seguente proporzione:

FH : DH = HE : HC.

Ma DH = HE, quindi la proporzione diviene:

FH : DH = DH : HC   e

$DH^2 = FH * HC = (7 – 2) * 2 = 10$ e

$DH = \sqrt{10} \approx 3,16 \approx (3 + 1/6)$ cubiti.

Ne consegue:

$DE = 2 * DH = 2 * \sqrt{10}$ cubiti.

A questo punto, può darsi che Savasorda abbia applicato la formula usata per il calcolo della superficie della semisfera:

$A = h * DE * (3 + 1/7) = 2 * (2 * \sqrt{10}) * 22/7 \approx 39,75$ cubiti^2.

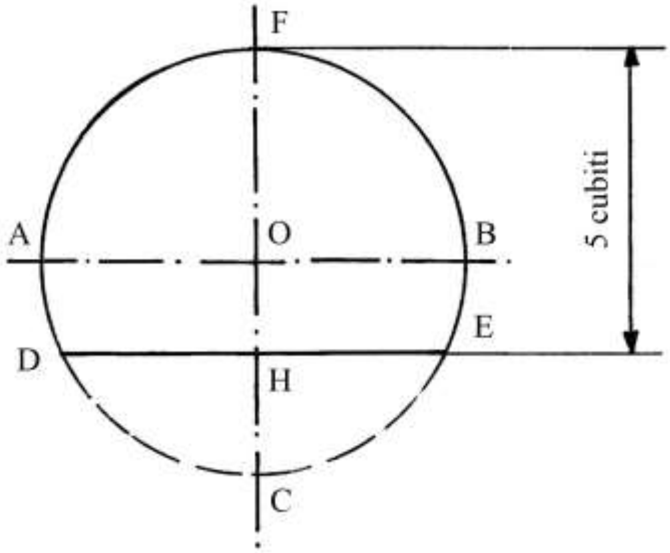
Il risultato fornito da Savasorda è praticamente uguale.

L'Autore prosegue nella descrizione della soluzione del problema e calcola in altro modo l'area del segmento sferico:

* moltiplicare il diametro della sfera originaria, 7 cubiti, per la profondità HC: 7 * 2 = 14;
* moltiplicare per (3 + 1/7): Savasorda non fornisce alcun risultato, ma afferma che esso è l'area del segmento sferico [14 * (3 + 1/7) = 44 cubiti^2, valore differente da quello indicato in precedenza, 40 cubiti^2];
* moltiplicare l'area per (1/6 * d = 7/6), con *d* diametro della sfera: [44] * 7/6 = (51 + 1/3) cubiti^3, volume del segmento sferico [Savasorda indica (21 + 1/3)].

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Un ultimo problema generato da una sfera di diametro *d* = 7 cubiti è quello di un segmento sferico che è più grande della metà della sfera.



Questo segmento sferico è il complemento di quello considerato nell'ultimo problema.
L'altezza del segmento FH = *h* è di 5 cubiti.
La superficie A è:

A = d * h * (3 + 1/7) = 7 * 5 * 22/7 = 110 cubiti^2.

Il volume V è:

V = A * d/6 = 110 * 7/6 = (128 + 1/3) cubiti^3.

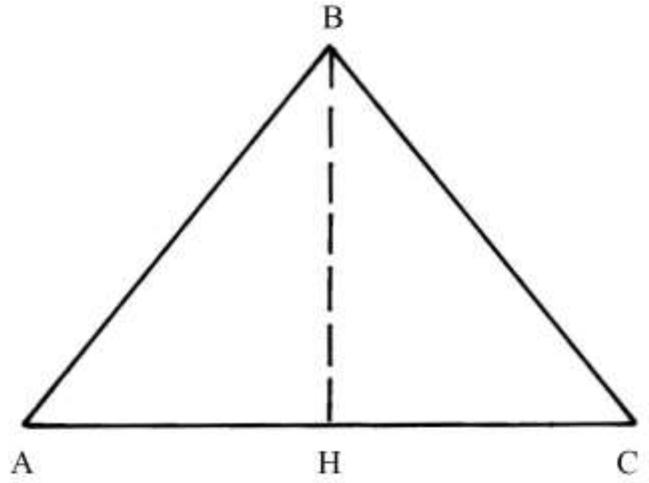
Savasorda dà un risultato errato: (188 + 1/3) cubiti^3.

METODI DI MISURA DEI CORPI

Savasorda propose una serie di metodi pratici per misurare dei terreni con gli strumenti.

Misura di un terreno triangolare

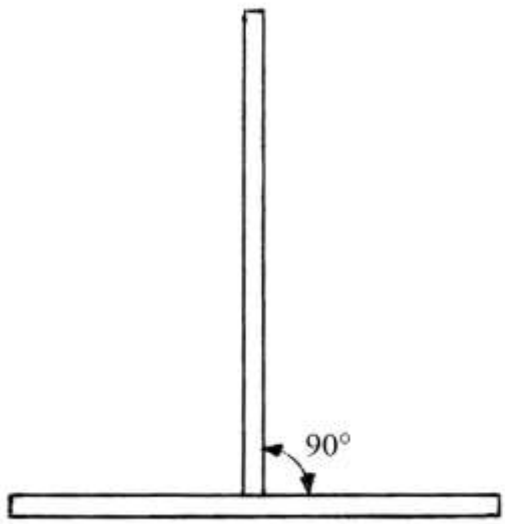
ABC è un terreno a forma di *triangolo isoscele* che deve essere misurato:



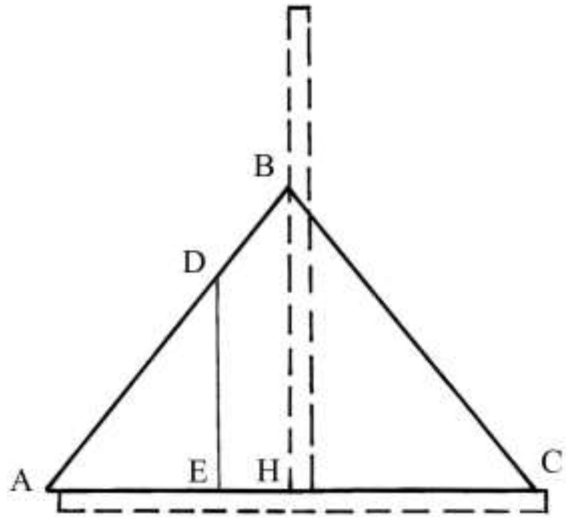
Savasorda propose l'uso di due strumenti: una coppia di *canne* e un *quadrato geometrico*; la misura era effettuata *con la vista*.

Una *canna* era molto probabilmente lunga fra i 2 e i 3 metri, con una maggiore frequenza di uso di quella più corta, perché più maneggevole e più robusta. In genere la sua lunghezza era scelta come un multiplo del *piede* o del *braccio*.

Le due canne venivano posizionate sul terreno ad angolo retto:



La canna orizzontale veniva fatta combaciare con il lato di base AC e quella verticale era disposta perpendicolarmente:



La canna verticale poteva fissare un qualsiasi segmento verticale, ad esempio DE, non passante per il vertice B.

Spostando l'asta verticale fino a farla coincidere con B, si rendeva possibile determinare l'altezza BH e misurarla.

Una volta acquisita la lunghezza di BH, l'area del triangolo era ricavata dal prodotto della lunghezza di BH per metà di quella della base AC.

Se le condizioni del terreno non consentivano la misura diretta di BH, ma soltanto quella di un segmento più corto, quale era DE, Savasorda suggerì l'uso della *similitudine* fra i triangoli rettangoli ADE e ABH:

AE : AH = DE : BH.

AE, AH e DE sono misurabili e quindi noti. Dalla proporzione è ricavata la lunghezza di BH:

BH = (AH * DE)/AE.

- APPROFONDIMENTO -

Il quadrato geometrico

Il secondo strumento probabilmente usato da Savasorda è, con ogni probabilità, simile a un *quadrato geometrico*.

Esso derivava dall'*astrolabio* del quale ingrandiva solo un quadrante. È probabilmente di origine araba e risalirebbe al X – XI secolo.

Al contrario dell'astrolabio che era usato anche per misurazioni astronomiche, il quadrante era destinato alle sole misurazioni terrestri.

Le dimensioni del lato del quadrato geometrico potevano arrivare fino alle *due braccia* e cioè 2 * 58,3626 cm = 116, 7252 cm (secondo la lunghezza del braccio fiorentino da panno, come vedremo nel caso dello strumento di Grazia de' Castellani). Qui è presa come esempio la lunghezza del braccio fiorentino, unità di misura ben conosciuta: non è nota la lunghezza dell'eventuale o degli eventuali braccio/bracci usati nei luoghi nei quali visse Savasorda.

Il quadrato geometrico, chiamato *instrumentum gnomonicum*, fu *probabilmente* introdotto nell'Europa medievale da Gerberto d'Aurillac (Papa Silvestro II, circa 950 – 1003), un appassionato cultore di matematica e di geometria.

Lo strumento fu descritto in diversi trattati di *geometria pratica* compilati nel Medioevo anche da autori italiani.

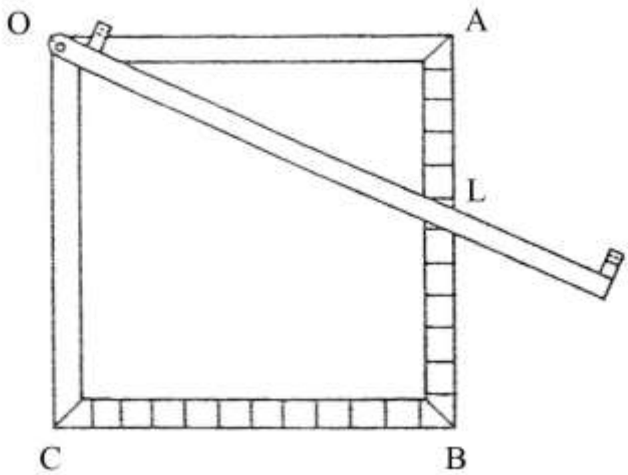
Il quadrato era usato per effettuare misure di lunghezza sia in orizzontale che in verticale. Esso applicava il principio della *similitudine dei triangoli rettangoli*.

Le pagine che seguono si propongono di spiegare la struttura e il funzionamento dello strumento utilizzando *testi cronologicamente successivi* a quello di Savasorda.

La struttura dello strumento era costruita su una lamina di metallo (ad esempio rame o bronzo) o su una tavoletta di legno.

Due lati consecutivi del quadrato venivano divisi in 12 parti uguali chiamate *punti*: a sua volta ciascun punto era diviso in 60 parti uguali chiamate *minuta puntorum*.

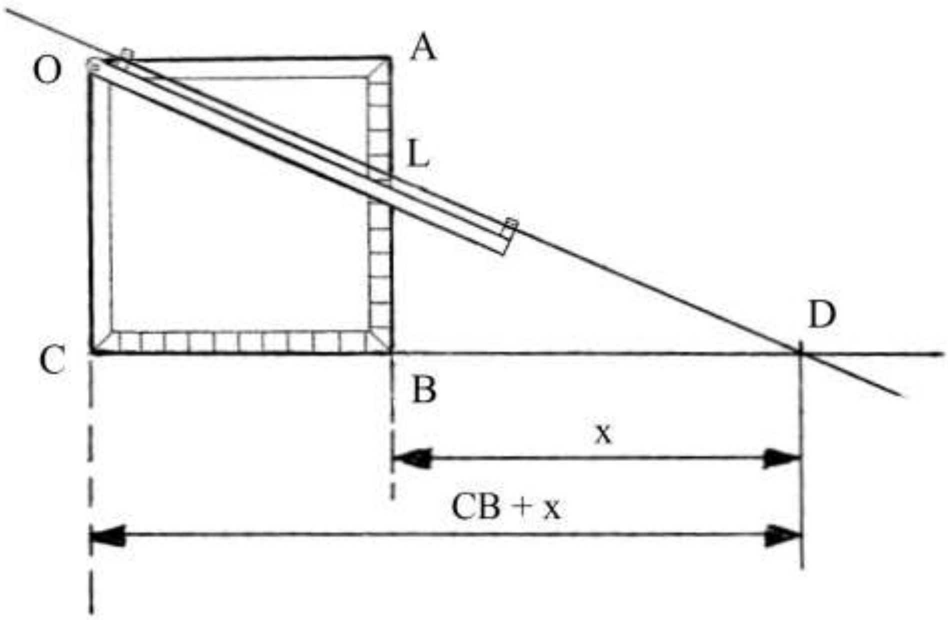
Ecco spiegata la sua costruzione. Su di un vertice del quadrato fissare un'asta lunga almeno quanto la diagonale e in grado di ruotare intorno allo stesso vertice, come spiega la figura che segue (da Annalisa Simi, citata in bibliografia):



Sugli estremi dell'asta mobile erano fissati due fori di traguardo.

Il modello ricalca uno strumento studiato da Domenico da Chivasso (attivo a Parigi intorno al 1350) e descritto nel suo trattato *Practica geometriae* risalente al 1346.

Per misurare la lunghezza sconosciuta del tratto CD occorreva posizionare il lato CB dello strumento sul terreno e tenere il quadrato verticale:



Osservando attraverso i due fori di traguardo in direzione di D, il raggio visuale tagliava il lato AB nel punto L.

Nella figura sono presenti due *triangoli rettangoli simili*: OCD e LBD.

Vale la seguente proporzione:

OC : LB = CD : BD.

Fissare BD = x. Dato che OC = CB, ne consegue: CD = CB + BD = OC + x.

Dalla precedente proporzione si ha

CD = (OC * BD)/LB = (OC * x)/LB.

Eguagliando le due espressioni di CD si ottiene:

(OC * x)/LB = OC + x.

Sviluppando la precedente espressione si ricava:

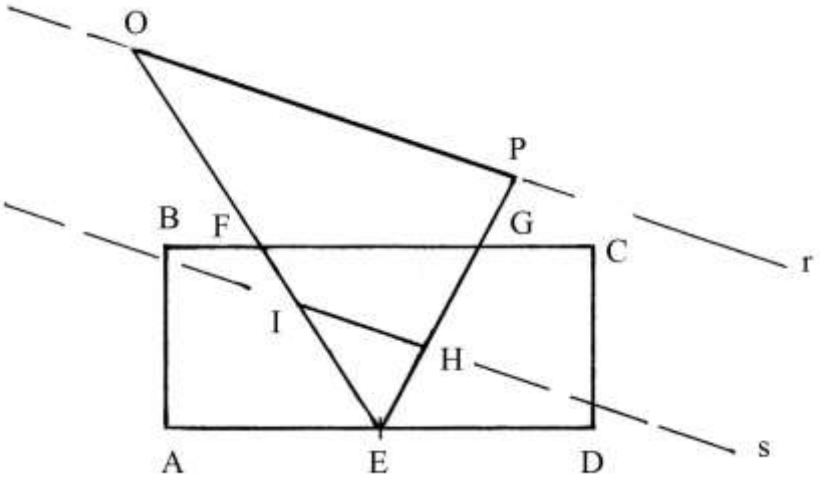
OC * x – LB * OC – LB * x =0 da cui
x * (OC – LB) = LB * OC e
x = (LB * OC)/(OC – LB).

Strumenti che applicavano il *teorema di Talete*

Domenico da Chivasso e Grazia de' Castellani (vedere successive ulteriori informazioni su questo secondo Autore) usarono anche strumenti geometrici basati sul teorema di Talete.

Domenico da Chivasso impiegò una tavola rettangolare di legno (della quale non fornì alcuna indicazione relativamente alle dimensioni) per effettuare numerose misurazioni *con la vista*.

La figura che segue mostra lo strumento e il terreno visti in pianta:



ABCD è la tavola e E è il punto medio del lato AD nel quale è posizionato l'occhio dell'osservatore o *misuratore*.

O e P sono due punti collocati oltre la tavola: deve essere misurata la lunghezza di OP.

Le distanze di questi due punti da E sono note.

L'osservatore traguarda i punti O e P e segna i punti F e G determinati dai raggi visuali sul lato BC.

Il procedimento di misura continua con una proporzione: sui raggi visuali EO e EP occorre fissare due punti, I e H, tali che le loro distanze da E siano nel rapporto

IE : OE = HE : PE.

Tracciare il segmento HI: avendo rispettato la precedente proporzione, il segmento HI è parallelo a OP.

I triangoli rettangoli EIH e EOP sono simili e i segmenti OP e IH fanno parte di due rette parallele, *r* e *s*.

Per il teorema di Talete vale la proporzione

OP : IH = EI : EO da cui

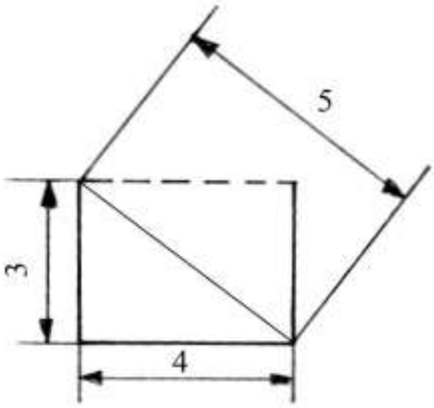
OP = (IH * EI)/EO.

Grazia de' Castellani

Grazia (*Gratia* o Graziano) de' Castellani è stato un monaco agostiniano fiorentino vissuto fra la metà del XIV secolo e il 1401.

Si interessò anche a problemi aritmetici e geometrici. Dei suoi lavori è rimasto ben poco benché ai suoi tempi fosse molto celebrato per le sue competenze matematiche.

È conosciuto un frammento di un trattato geometrico ("*De visu*") sulla misura di lunghezze. Progettò uno strumento, il cui schema è mostrato nella figura che segue:



dimensioni in braccia fiorentine

Esso era formato da due aste verticali lunghe 3 braccia unite inferiormente da un'asta orizzontale lunga 4 braccia: la diagonale era lunga 5 braccia e rivelava la presenza della più semplice terna pitagorica (3 – 4 – 5).

Come già visto in precedenza, il braccio fiorentino da panno era lungo 58,3626 cm: l'altezza delle aste verticali era di 3 * 58,3626 cm = 175,0878 e cioè 175 cm e quindi esse erano alte più o meno quanto l'occhio di un osservatore in piedi.

Molti trattati medievali d'abaco trattavano temi aritmetici e algebrici e spesso alla fine dedicavano alcune pagine alla soluzione di problemi di geometria piana e di geometria solida (fra i quali ultimi assumevano grande importanza le regole pratiche per la misurazione delle botti, del loro contenuto e degli *scemi*). Questo vale anche per il "*Tractato d'abbacho*" di Pier Maria Calandri (attivo a Firenze nel XV secolo). Alle carte 205 *verso* e 206 *recto* esso contiene due esempi di uso dello strumento di Grazia de' Castellani: per misurare una lunghezza orizzontale e per determinare un'altezza.

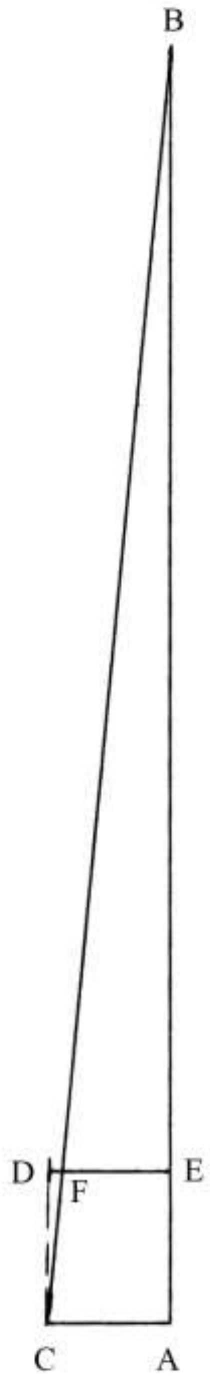
Nel primo caso si trattava di misurare la lunghezza di Piazza SS. Annunziata a Firenze, a partire dall'inizio di Via dei Servi (la strada di collegamento con Santa Maria del Fiore).

Il misuratore si poneva all’angolo di Via dei Servi guardando in distanza il punto B, allineandosi con un fossetto che percorreva la piazza da B alla stessa Via dei Servi e collocava a terra un’asta orizzontale lunga 4 braccia (la base dello strumento di Grazia de’ Castellani), CA; parallelamente a questa posizionava una seconda asta di uguale lunghezza (4 braccia e non più *3 braccia*, come nel caso dello strumento originale), ED, con il punto E allineato con A e con B: la distanza fra le aste parallele, AE, era di 10 braccia.

Le due aste parallele, CA e DE, erano le aste orizzontali di due strumenti di Grazia de’ Castellani.

Lo schema che segue ridisegna quello contenuto nella precedente figura: il diagramma è *fuori scala* (come lo è in quello del Calandri) perché altrimenti non sarebbe possibile contenerlo in una pagina dato che, come vedremo, il rapporto fra le lunghezze di AE e di AB è di 1 : 22.

Dal punto C veniva traguardato il punto B: la linea immaginaria CB tagliava la seconda asta in un punto, F, a distanza (3 + 9/11) di braccio da E.



Il tratto DF misurava:

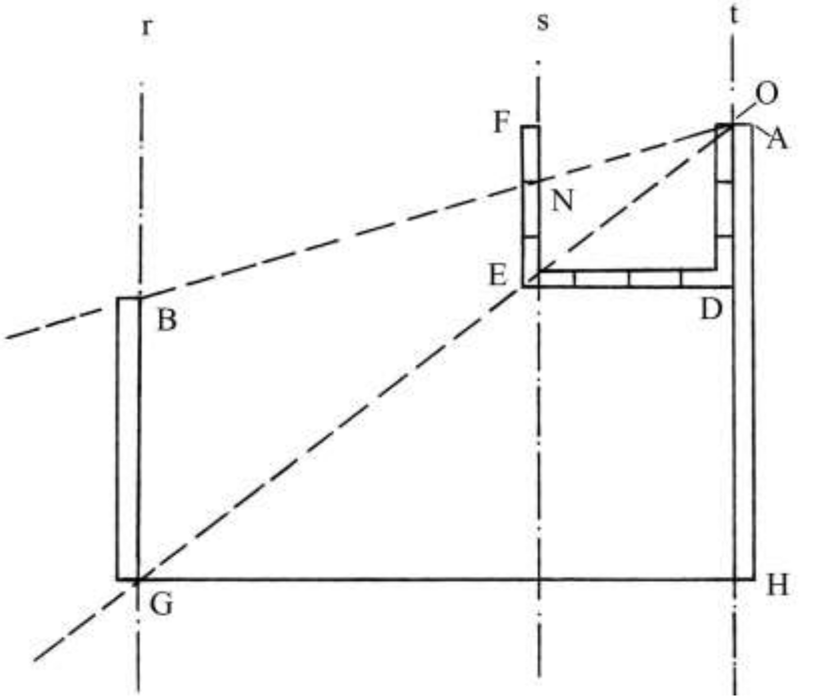
DF = ED – EF = 4 – (3 + 9/11) = 2/11 di braccio.

Nella figura sono contenuti due triangoli rettangoli simili: CDF e CBA.
Applicando il principio della similitudine ai due triangoli si ha:

DF : CA = CD : AB   da cui:

AB = (CA * CD)/DF = (4 * 10)/(2/11) = 40 * 11/2 = 220 braccia.

Lo strumento di Grazia de' Castellani serviva anche a misurare l'altezza di una montagna:



Lo strumento era posizionato su un'altura, indicata con A. Doveva essere misurata l'altezza dell'altura BG.

Nella figura sono disegnate tre rette verticali immaginarie, *r*, *s* e *t*, fra loro parallele.

Le aste verticali dello strumento sono allineate con le rette s e t.

Il punto O è la posizione dell'occhio dell'osservatore.

Traguardando con lo strumento, il vertice B è allineato con i punti O e N: il segmento NE è lungo 2 braccia.

Osservando il punto G con lo strumento risultano allineati i punto O, E e G.

Le semirette ONB e OEG intersecano le rette parallele *r* e *s*.

I segmenti EN e OD sono lunghi rispettivamente 2 e 3 braccia.

Applicando il teorema di Talete deriva la seguente proporzione:

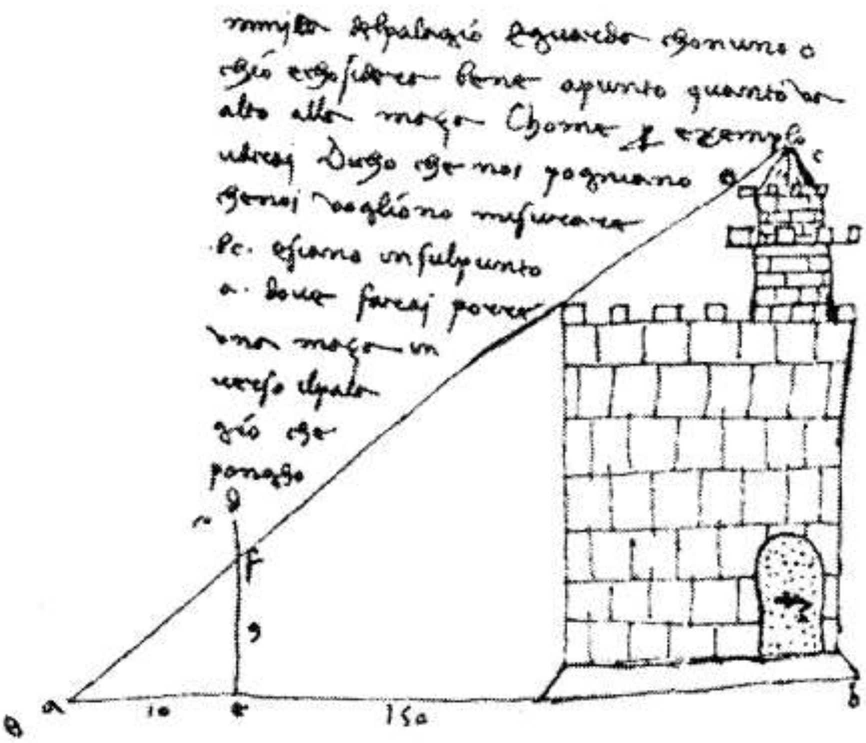
BG : NE = GH : ED

BG : 2 = GH : 4 da cui:

BG = 2 * GH/4 = GH/2.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

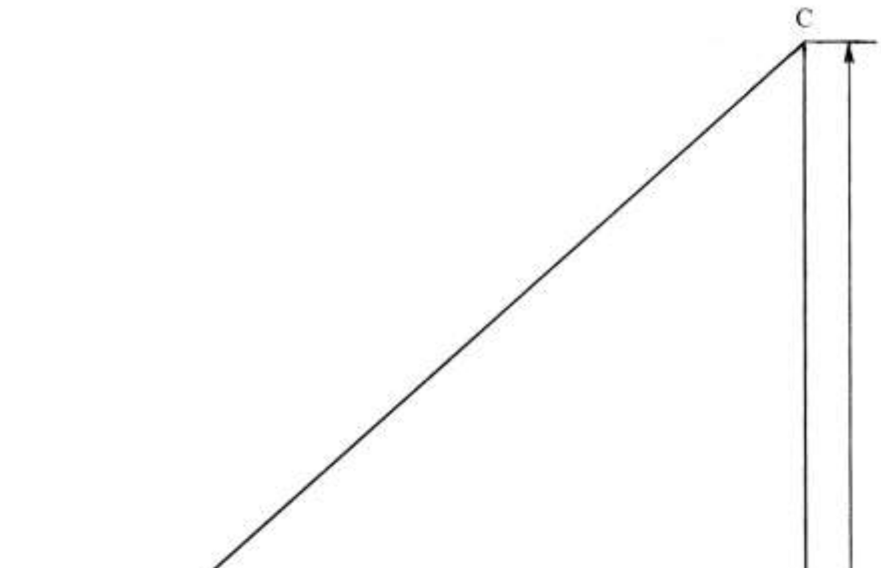
Il secondo esempio è la misura dell'altezza, BC nei due schemi che seguono, del Palazzo della Signoria di Firenze da Por Santa Maria:



La lunghezza di AB era nota, 150 braccia.

L’osservatore era posizionato nel punto A e lo strumento nel punto E a una distanza da A scelta a piacere, ad esempio 10 braccia.

Lo strumento era verticale e nei due disegni è indicato con il profilo DE:



Traguardando attraverso lo strumento, il raggio visuale AC tagliava lo strumento nel punto F, corrispondente ad un'altezza EF di 9 braccia.

I triangoli rettangoli AFE e ACB sono simili per cui vale la proporzione:

AE : AB = EF : BC

10 : 150 = 9 : BC.

Ne consegue che l'altezza incognita BC vale:

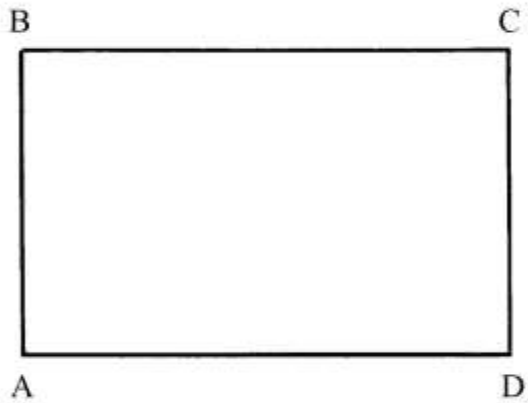
BC = (AB * EF)/AE = (150 * 9)/10 = 135 braccia.

- -

Misurazioni di quadrilateri

Torniamo al testo di Savasorda.

Se il terreno da misurare ha la forma di un quadrilatero come quello della figura che segue,



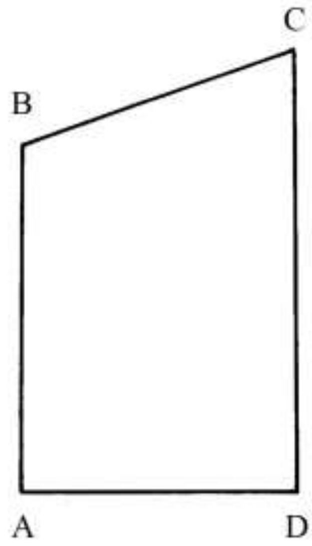
con la *tavola* devono essere verificati tutti gli angoli a partire da uno qualsiasi, ad esempio quello in A: se un lato della tavola è allineato al lato (AB o AD) del terreno significa che l'angolo è *retto*. Lo stesso accadrà verificando gli altri angoli in modo simile.

Nel caso che tutti gli angoli risultino retti, il quadrilatero ABCD è un rettangolo: è sufficiente misurare due lati formanti un angolo retto e moltiplicare le loro lunghezze per ricavare la sua area:

A_{ABCD} = AB * AD.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Se con la tavola viene accertato che il terreno ha la forma di un quadrilatero irregolare nel quale sono retti soltanto gli angoli nei vertici A e D, l'area è calcolata con una diversa formula:

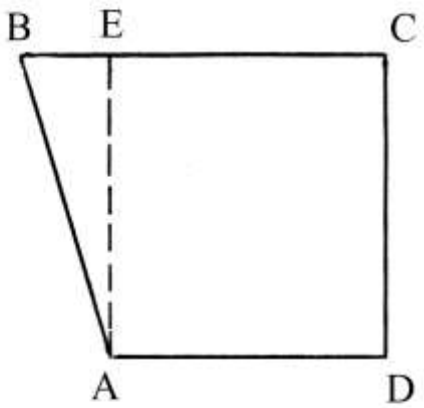


A_{ABCD} = AD * (AB + CD)/2 . La formula è corretta: il quadrilatero è un *trapezio rettangolo*.

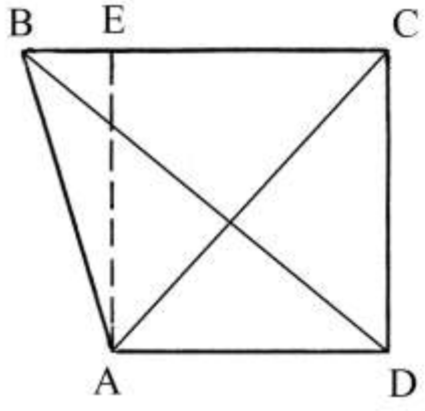
I lati AB e CD sono le due *basi* del trapezio.

La procedura impiegata da Savasorda esclude la necessità di misurare il lato obliquo BC.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%



Il terreno mostrato nella figura qui sopra (che è chiaramente un altro trapezio rettangolo) possiede due angoli retti nei vertici C e D, agli estremi delle due diagonali del quadrilatero:



Gli altri due angoli del poligono sono: *ottuso* in A e *acuto* in B.

Essendo retti gli angoli in C e in D, ne consegue che le basi BC e AD sono parallele.

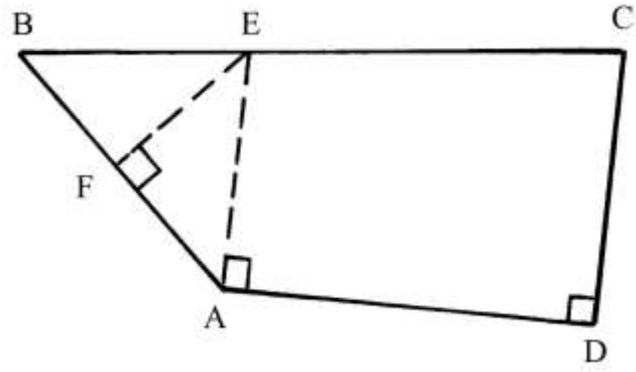
Il calcolo dell'area richiede l'uso della *tavola* per fissare la linea AE perpendicolare ai due lati paralleli. Il quadrilatero è così scomposto in due poligoni:

* il rettangolo AECD;
* il triangolo rettangolo ABE.

Per ricavare l'area di ABCD è sufficiente calcolare le aree dei due poligoni e sommarle.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Se il terreno ha la forma di un quadrilatero con *un solo* angolo retto (nel vertice D), il poligono certamente possiede almeno un angolo ottuso (nel vertice A):



Per calcolare la sua area, Savasorda propose di tracciare il segmento AE, perpendicolare al lato AD.

Il quadrilatero è suddiviso in due poligoni: AECD e ABE.

AECD è un trapezio rettangolo perché possiede due angoli retti: EAD e ADC. Inoltre le due basi, AE e DC sono parallele e AD è l'altezza. La sua area è data da:

$A_{AECD} = AD * (AE + DC)/2$ che è la corretta formula dell'area di un trapezio rettangolo.

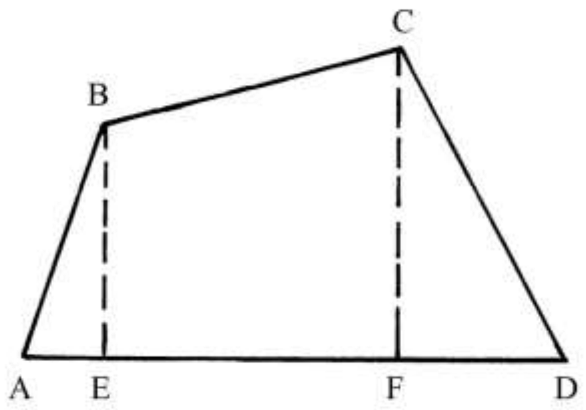
Savasorda poi propose di misurare un'altezza del triangolo ABE, ad esempio quella EF. L'area di questo poligono è:

$A_{ABE} = EF * AB/2$.

Sommando le aree dei due poligoni si ottiene quella del quadrilatero ABCD e il risultato è corretto in luogo di quello scorretto che si avrebbe avuto se al caso fosse stata applicata l'antica *formula degli agrimensori*.

<u>Area di un terreno di forma irregolare</u>

Un terreno ha la forma irregolare mostrata nella figura che segue:



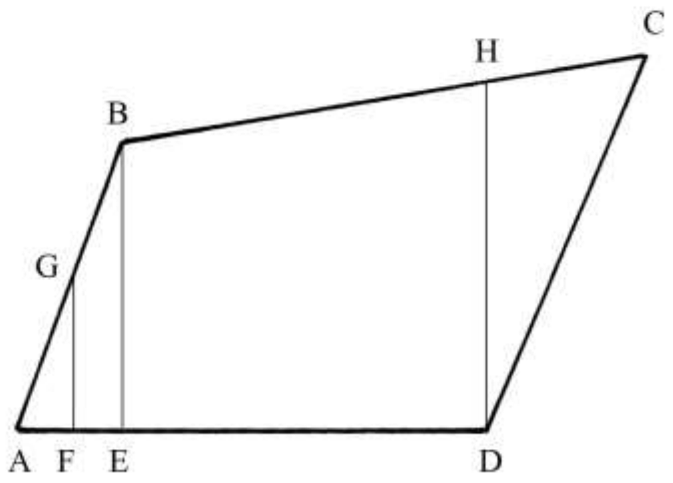
Il quadrilatero non possiede alcun angolo retto ma due angoli ottusi (in B e in C) e due angoli acuti (in A e in D).

Egli propose di abbassare dai vertici B e C due perpendicolari al lato AD per scomporre il quadrilatero in tre poligoni: il trapezio rettangolo EBCF e i triangoli rettangoli ABE e FCD.

La soluzione del problema del calcolo dell'area del trapezio rettangolo è stata descritta nella spiegazione di precedenti problemi.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

La figura che segue mostra un terreno, ABCD, di forma quadrangolare:



Per calcolare l'area, Savasorda mise in atto una più complessa procedura, perfettamente corretta. Eccola descritta.

Dal punto B deve essere abbassata la perpendicolare al lato AD (è BE) e da qusto lato deve essere innalzata una seconda perpendicolare fino a raggiungere il lato BC in un punto (H).

BE e HD sono due altezze fra loro parallele perché entrambe perpendicolari al lato AD.

Se, per qualche ragione, non è possibile misurare una delle due altezze (ad esempio quella BE), Savasorda propose un accorgimento.

Da un generico punto di AD, collocato a sinistra di E, elevare una perpendicolare a AD: è FG, anch'essa parallela a BE e a HD.

I triangoli AFG e AEB sono rettangoli e fra loro simili.

Misurando i segmenti AF, AE e FG si applica la proporzione

AF : AE = FG : EB dalla quale si ricava

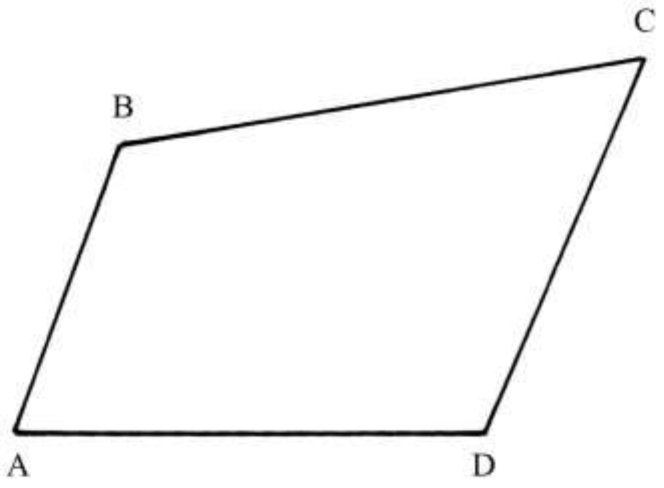
$EB = AE * FG/AF$.

ABCD è così suddiviso in tre poligoni: il triangolo rettangolo ABE, il triangolo scaleno DHC e il trapezio rettangolo EBHD, poligoni dei quali è facile calcolare l'area.

Savasorda concluse proponendo una regola: nel caso di poligoni con più di *quattro* lati, occorre dividere la figura irregolare in triangoli e quadrilateri per misurare poi le lunghezze dei loro lati e determinarne le singole aree, per poi sommarle per ricavare l'area dell'intera figura.

Savasorda criticò i metodi molto approssimati per calcolare l'area dei terreni, quadrilateri e no, probabilmente usati dagli agrimensori appartenenti alle Comunità ebraiche di Provenza.

Il *primo* metodo è ben noto perché si trattava dell'antichissima *formula degli agrimensori*:



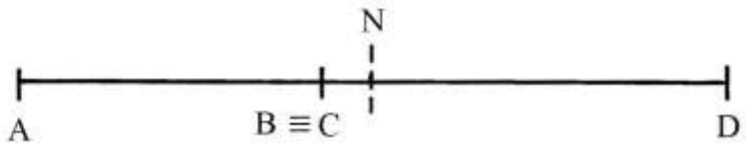
misurare le lunghezze dei quattro lati e moltiplicare le *semisomme* delle coppie di lati opposti:

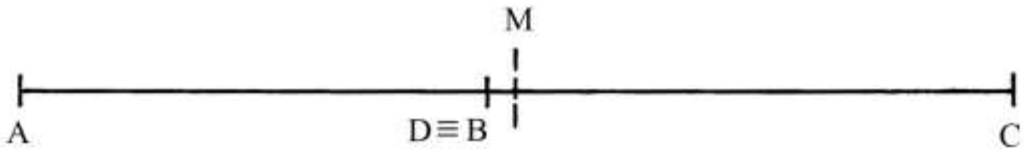
$$A_{ABCD} = (AD + BC)/2 * (AB + CD)/2 = (AD + BC) * (AB + CD)/4 .$$

\- APPROFONDIMENTO -

L'applicazione della formula degli agrimensori al quadrilatero ABCD porta a un risultato errato: con gli schemi che seguono ne potremo valutare le conseguenze.

Nella figura sono calcolate le lunghezze delle semisomme delle coppie di lati opposti:

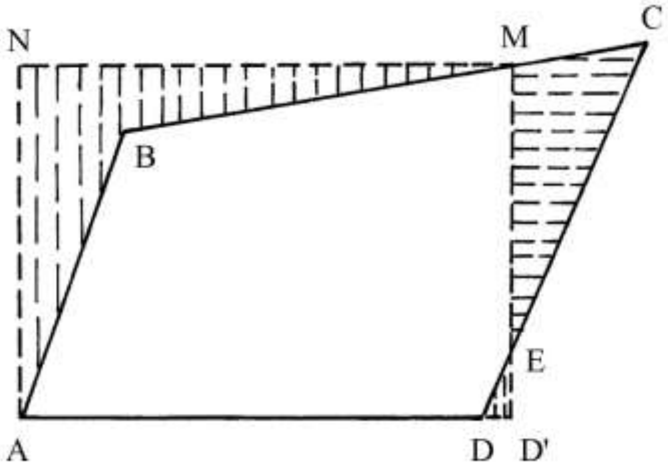




(AB + CD)/2 = AN   e   (AD + BC)/2 = AM .

I punti N e M sono i medi delle due somme delle coppie di segmenti opposti.

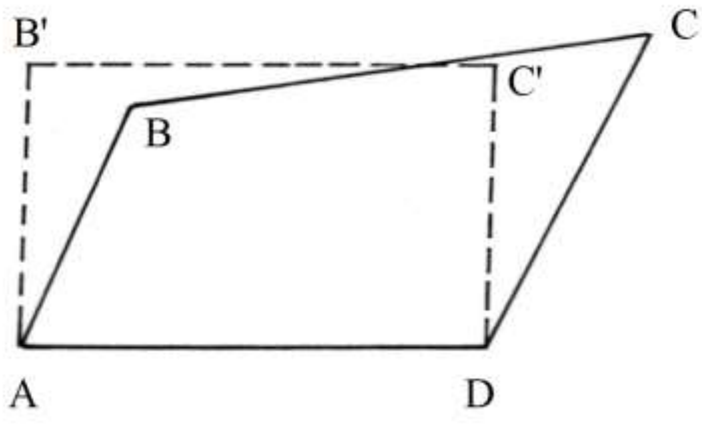
Abbiamo ora le lunghezze del rettangolo cosiddetto *equivalente* a ABCD; i suoi lati sono lunghi AN = ND e MC: questa ultima lunghezza va riportata dal vertice N della figura che segue fino a stabilire il punto M: NM = MC.



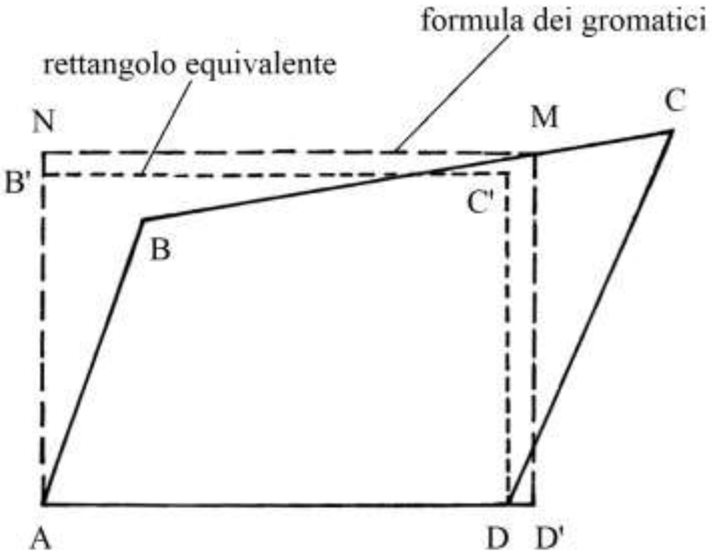
Il rettangolo ANMD’ è anche visivamente più ampio di ABCD: la somma delle aree del quadrilatero ANMB e del triangolo DED’ supera con certezza l’area del triangolo EMC; la somma delle aree tratteggiate verticalmente (aggiunte a ABCD) è più grande dell’area tratteggiata orizzontalmente, EMC, che è sottratta da ABCD.

Ciò dimostra che la formula degli agrimensori fornisce un risultato errato per eccesso.

Il quadrilatero ABCD ha una certa area che può essere calcolata scomponendolo in figure più semplici. Esiste un rettangolo (AB’C’D) che ha la base AD e la stessa area di ABCD:

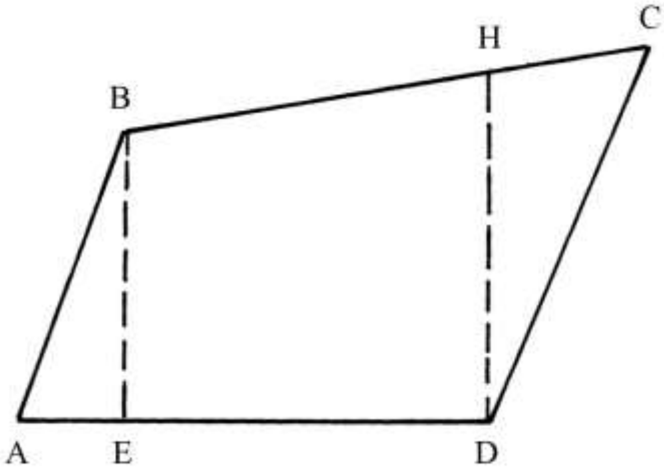


Mettondo a confronto gli ultimi due grafici risulta evidente l’errore in eccesso derivante dall’applicazione della *formula degli agrimensori*:



- -

Il *secondo* metodo proposto da Savasorda richiedeva la misura delle due altezze relative al lato AD (BE e HD):



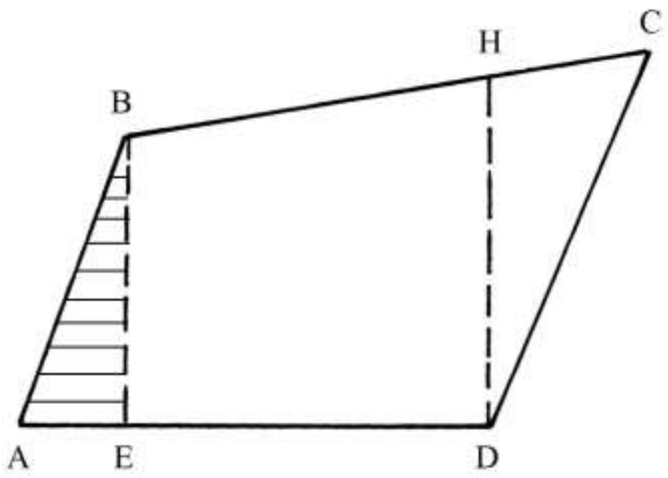
La semisomma delle due altezze veniva moltiplicata per la *lunghezza* di una *base*: potevano aversi due distinti casi:

a) Area $_{ABCD}$ = (BE + HD)/2 * AD oppure

b) Area $_{ABCD}$ = (BE + HD)/2 * BC.

Con tutta evidenza le due formule fornivano risultati assai difformi: il lato BC è più lungo di quello AD.

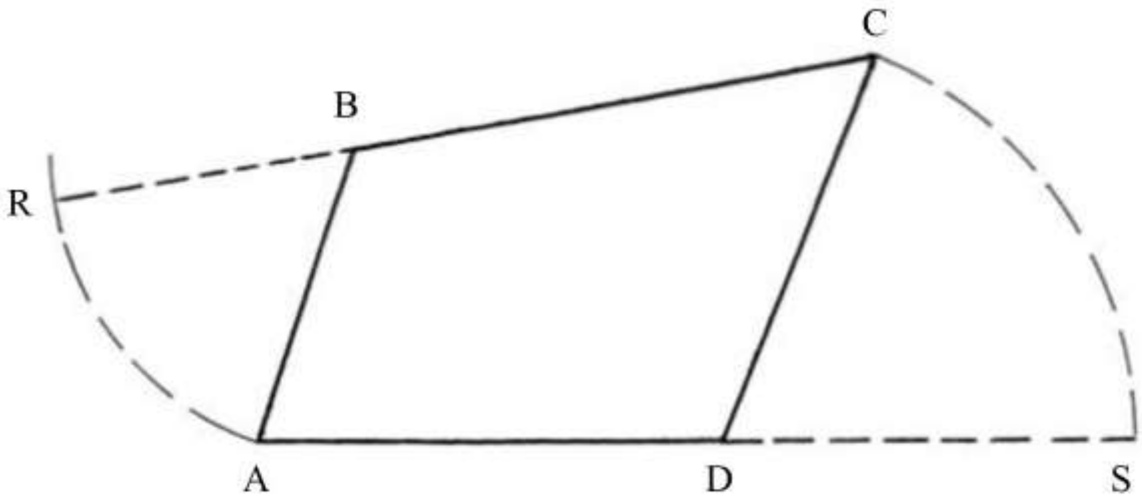
Una variante di questo secondo metodo sembra essere stata la seguente:



Veniva trascurata l’area occupata dal triangolo rettangolo ABE perché ritenuta abbastanza piccola e il quadrilatero si riduceva alla figura EBCD. L’area era calcolata, ancora più erroneamente, come

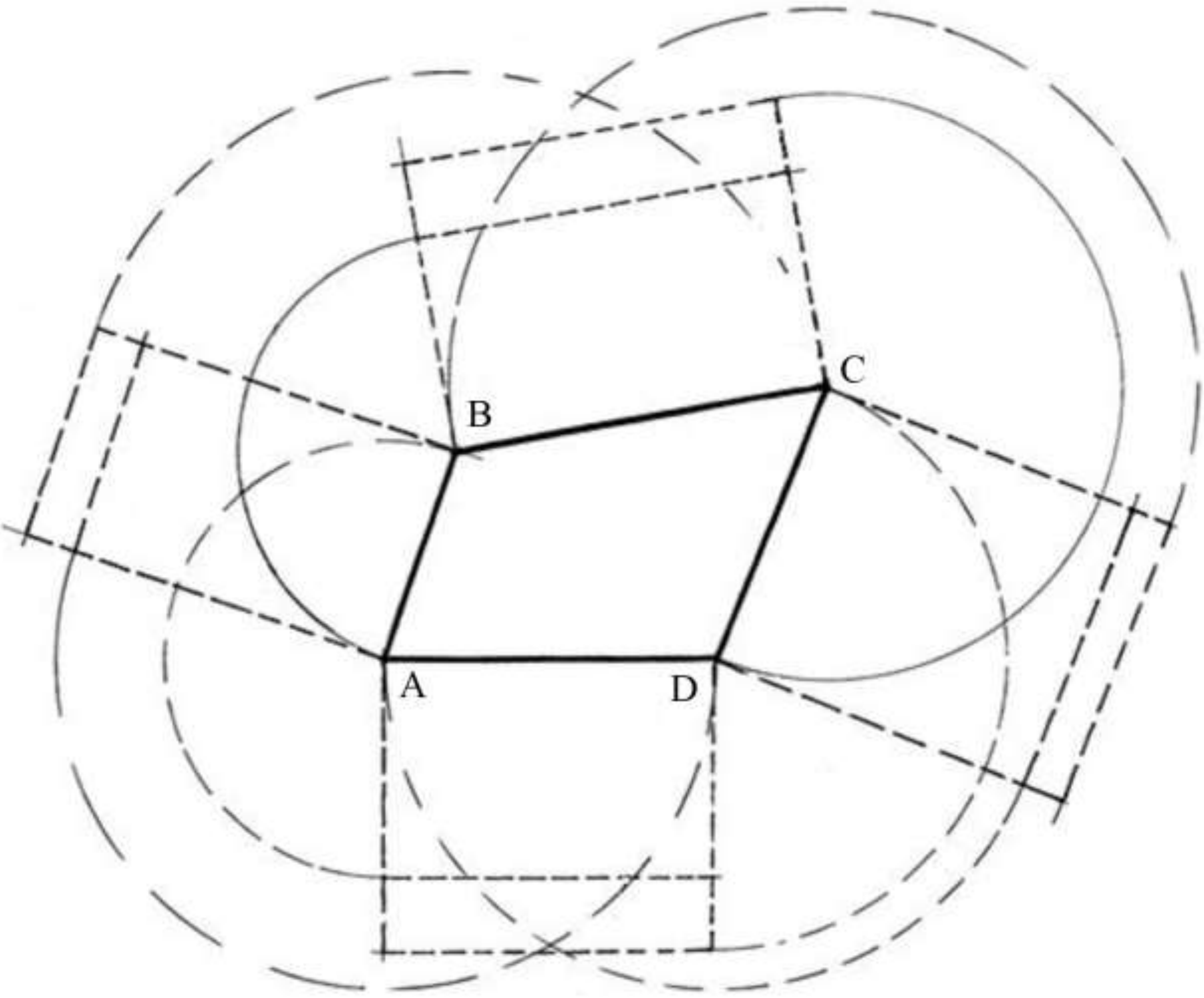
a) Area $_{EBCD}$ = (BE + HD)/2 * ED oppure
b) Area $_{EBCD}$ = (BE + HD)/2 * BC.

Un *terzo* metodo, anch’esso assai errato, consisteva nella misura delle lunghezze di due lati adiacenti qualsiasi che venivano moltiplicate per ricavarne l’area:



La costruzione qui sopra è così generata: ad esempio, prolungare verso sinistra il lato BC e verso destra quello AD: con il compasso *ribaltare* le lunghezze di due lati, AB e CD.

La figura che segue mostra gli *otto* possibili rettangoli che sono costruibili con questo metodo:



L’applicazione di questo metodo porta a risultati differenti e grandemente errati.

Bibliografia

1. Archibald Raymond Clare, “Euclid’s Book on Divisions of Figures”, Cambridge, University Press, 1915, pp. Vii+88.
2. “Baldelli Ignazio, “Di un volgarizzamento pisano della *Practica Geometrie*”, in “Studi in onore di Alfredo Schiaffini”, Roma, Edizioni dell’Ateneo, 1965, pp. 74-92.
3. Boffito Giuseppe, “Gli strumenti della scienza e la scienza degli strumenti”, ristampa dell’edizione originale presso Seeber, Firenze, 1929, Multigrafica Editrice, Roma, 1982, pp. XVI – 255, con 196 tavole fuori testo.
4. Boncompagni Baldassare, “Delle versioni fatte da Platone Tiburtino traduttore del secolo duedecimo”, Roma, 1851, Tipografia delle Belle Arti, pp. 42.
5. Busard H. L. L., “The Practica Geometriae of Dominicus de Clavasio”, in “Archive for History pf Exact Sciences”, volume 2, n. 6, 1965, pp. 520 – 575.
6. Calzolani Sergio, “Erone.pdf”, 2023, pp. 84, www.geometriapratica.it.
7. Camerota Filippo, “La prospettiva del Rinascimento. Arte, architettura, scienza”, Milano, Mondadori Electa, 2006, pp. 367.
8. “Nel segno di Masaccio. L’invenzione della prospettiva”, a cura di Filippo Camerota, Firenze, Giunti, 2001, pp. XL-311.
9. Curtze Maximilian, “Urkunden zur Geschichte der Matematik im Mittelalter und der Renaissance”, Lipsia, Teubner, 1902, pp. 1-183, edizione bilingue latina e tedesca.
10. Bar Hiia Abraam, “Llibre de Geometria” (*Hibbur hameixihà uehatixbȯret*), a cura di Miquel Guttmann, traduzione dall’ebraico in catalano a cura di Josep Maria Millàs i Vallicrosa, Barcellona, Editorial Alpha, 1931, pp. XXIX-153.
11. “La obra enciclopédica *Yesode ha-tebuna u-migdal ha-emuna* di R. Abraham Bar Hiyya Ha-Bargeoni”, edizione critica e traduzione in castigliano a cura di José Maria Millàs i Vallicrosa, Madrid-Barcellona, Casa Provincial de Caridad de Barcelona, 1952, pp. 143.
12. Feola Francesco, “Gli esordi della geometria in volgare”, Firenze, Accademia della Crusca, 2008, pp. 231.
13. Gandz Solomon (a cura e traduzione in inglese), “The Misnat ha Middot and The geometry oh Muhammad ibn Musa al-Khowarizmi”, Berlino, Springer, 1932, pp. 95.
14. Lévy Tony, “La civiltà islamica: antiche e nuove tradizioni in matematica. La matematica ebraica”, in “Storia della Scienza”, Roma, Treccani, 2002.
15. Pla I Carrera Josep, “Lectura metodològica i històrica de l’obra *Ḥibbur ha-měšiḥá wě-ha-tišboret* (*Tractat de geometria i mesurament*), d’Abraham Bar Ḥiyya (Savasorda)”, in “Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques”, vol. 35, núm. 2, 2020, pp. 111-153.
16. Simi Antonella, “Problemi caratteristici della geometria pratica nei secoli XIV-XVI”, in “Scienze matematiche e insegnamento in epoca medioevale”, Napoli, Edizioni Scientifiche Italiane, 2000, pp. 154 – 199.
17. Ulivi Elisabetta, “Su maestro Grazia dei Castellani, teologo e matematico del XIV secolo”, in “Bollettino di storia delle scienze matematiche”, vol. XXXV, Pisa, 2015, fasc. 1, pp. 111-144.
18. Victor Stephen K., “Practical geometry in the High Middle Ages. *Artis Cuiuslibet Consummatio* and the *Pratike de Geometrie*”, The American Philosophical Society, Filadelfia, 1979, pp. 638.
19. Strumento topografico di Grazia de’ Castellani, scheda a cura di Filippo Camerota http://redi.imss.fi.it/invenzioni/index.php/Strumento_topografico_di_Grazia_de%E2%80%99_Castellani

INDICE