sergio(punto)calzolani(at)outlook(punto)it

Parole chiave: area triangoli (equilatero, isoscele, scaleno e rettangolo), diametro circonferenza inscritta in un triangolo rettangolo, area del rombo, trapezio rettangolo, area di un quadrilatero, formula degli agrimensori, diagonale di un rettangolo, area dei poligoni, area del cerchio, quadrato e cerchio inscritti e circoscritti, squadre usate dai costruttori medievali.

L'OPERA DI SARRADE

Marie-Thérèse Sarrade (1903 – 1987) è stata una insegnante di disegno in un liceo di Parigi, una pittrice e una ricercatrice francese.

Fra i suoi scritti rientrano la collaborazione alla traduzione in francese del trattato di Luca Pacioli (*De Divina Proportione*) e un piccolo studio sulle conoscenze matematiche dei costruttori delle cattedrali medievali, citato in bibliografia.

Il volumetto consta di 62 pagine e sviluppa i seguenti argomenti: le conoscenze geometriche intorno all'anno Mille (Gerberto e poi Villard de Honnecourt), la trascrizione del più antico trattato francese di geometria (in realtà scritto in *lingua piccarda*, come il *Taccuino* di Villard de Honnecourt), i tracciati incisi sulla pietra e un'analisi della facciata di Notre-Dame di Parigi.

IL PIÙ ANTICO TRATTATO FRANCESE DI GEOMETRIA

Il testo è *anonimo* e risalirebbe a una data anteriore al 1276 (e cioè al regno di Filippo III, detto "Le Hardi", 1245 – 1285) e la sua stesura dovrebbe essere localizzata nella regione comprendente il nord della Francia e il Belgio, terre nelle quali era parlato il dialetto piccardo.

L'opera è conosciuta con il titolo "*Pratike de geometrie*".

All'inizio, il manoscritto prevedeva la divisione in tre parti: la prima destinata a calcolare le superfici, la seconda a misurare le altezze, le profondità e i volumi, la terza era prevista rivolta alla misura degli angoli e all'astronomia, argomenti che non furono affrontati e sostituiti dall'esame dei cambi e delle monete.

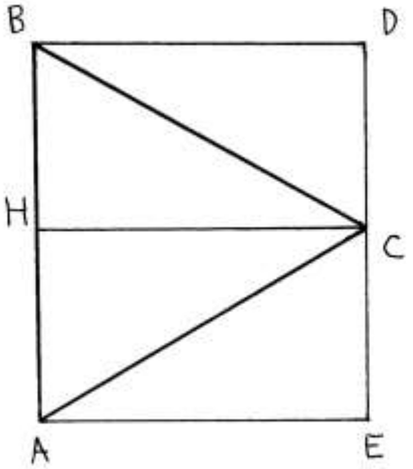
Nella prima parte sono proposte alcune formule corrette e approssimate per calcolare l'area di una superficie piana.

Alcuni dei metodi suggeriti sembrano ricavati dai testi geometrici attribuiti a Gerberto di Aurillac (Papa Silvestro II, circa 950 – 1003). L'Anonimo autore di questo manoscritto pare aver utilizzato altre fonti e fra di esse il trattato "*Artis cuiuslibet consummatio*", compilato in latino a Parigi nel 1193.

Nota: alcuni grafici nei paragrafi che seguono non erano presenti nel manoscritto, ma sono stati qui inseriti per facilitare la comprensione dei metodi geometrici.

Triangolo equilatero

Per calcolare l'area di un triangolo equilatero con lato lungo 7 *piedi*, il trattato propone la soluzione *approssimata* descritta nella figura che segue:



ABC è il triangolo equilatero che viene inscritto nel rettangolo ABDE. CH è l'altezza riferita al lato AB.

Con una certa approssimazione, l'altezza è calcolata pari a 6/7 la lunghezza del lato:

$CH \approx (6/7) * AB \approx (6/7) * 7 \approx 6$ piedi .

Usando la formula corretta, la lunghezza di CH è data da

$$CH = \sqrt{BC^2 - BH^2} = \sqrt{BC^2 - \left(\frac{BC}{2}\right)^2} = \sqrt{BC^2 - \frac{1}{4}BC^2} =$$

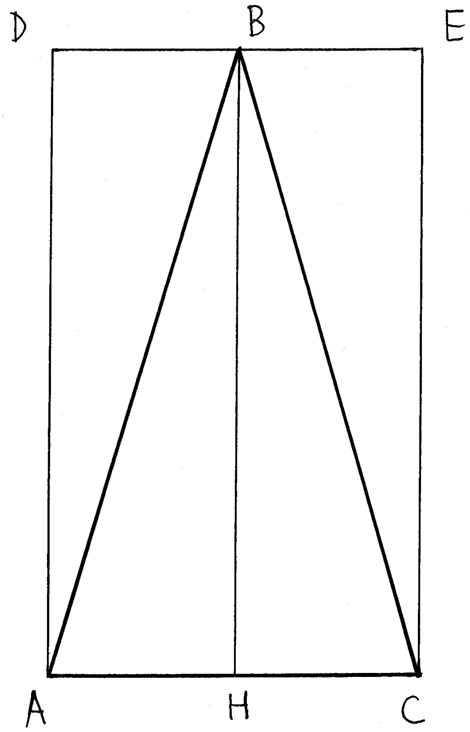
$$= \sqrt{\frac{3}{4}BC^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot BC = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 7 \cong 6{,}062 \text{ piedi}$$

Il valore approssimato di CH = 6, usato nel manoscritto, è leggermente inferiore a quello corretto (≈ 6,062).

L’area del triangolo equilatero ABC è esattamente la metà di quella del rettangolo ABDE.

<u>Area di un triangolo isoscele</u>

ABC è un triangolo isoscele con la base AC lunga 14 piedi e l’altezza BH lunga 24 piedi.
Il triangolo è inscritto nel rettangolo ADEC:

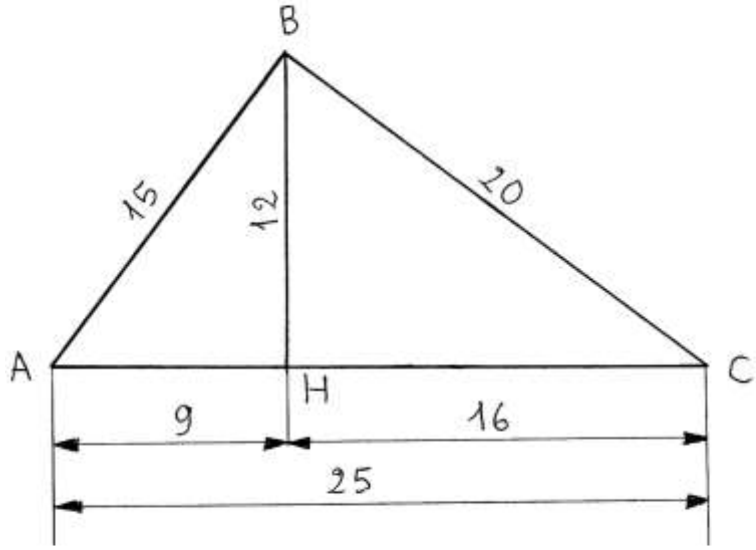


L’area del triangolo è calcolata in modo corretto:

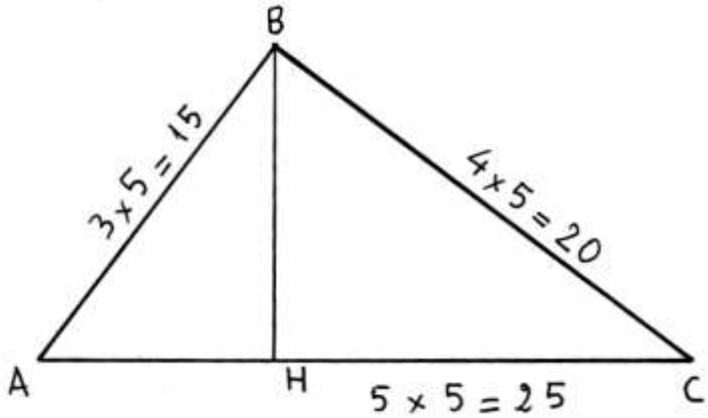
$$\text{Area}_{ABC} = \frac{\text{base}}{2} \cdot \text{altezza} = AH \cdot BH =$$
$$= \frac{14}{2} \cdot 24 = 168 \text{ piedi}^2$$

<u>Area di un triangolo scaleno</u>

ABC è un triangolo scaleno che ha lati lunghi 15, 20 e 25 piedi:



In realtà si tratta di un *triangolo rettangolo* con l'angolo retto in B, perché le lunghezze dei lati sono multiple delle corrispondenti lunghezze dei lati di un triangolo simile formato dalla terna pitagorica 3 – 4 – 5.



L'altezza BH è ottenuta con il metodo che segue. Calcolare il quadrato del lato più corto (il cateto AB) e dividere il risultato per la lunghezza del lato maggiore (l'ipotenusa AC); il quoziente è la lunghezza della proiezione AH del lato AB sull'ipotenusa AC:

$$(AB^2) / AC = AH$$

In cifre:

$$AH = (15^2)/25 = 225/25 = 9 \text{ piedi} .$$

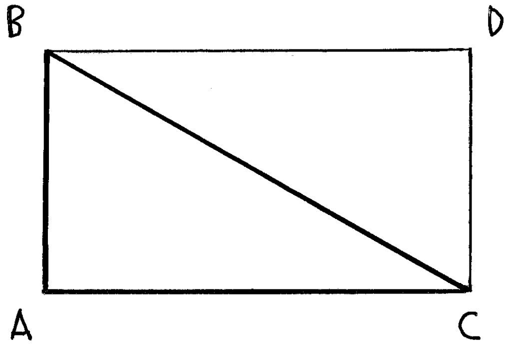
La proiezione di BC sull'ipotenusa AC è quindi lunga
HC = AC – AH = 25 – 9 = 16 piedi
Il passo successivo si propone di ricavare l'altezza CH.
Moltiplicare per stessa la lunghezza di AH e sottrarre il quadrato della lunghezza del lato più corto, AB: estrarre la radice quadrata di questa differenza; essa è la lunghezza di BH:

$$BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{15^2 - 9^2} = \sqrt{225-81} =$$
$$= \sqrt{144} = 12 \text{ piedi}$$

Risulta evidente che, per ricavare l'altezza BH, l'Anonimo autore del trattato abbia applicato il teorema di Pitagora ai due triangoli rettangoli ABH e BHC.

Area di un triangolo rettangolo

ABC è un triangolo rettangolo, inscritto nel rettangolo ABDC di cui è la metà:



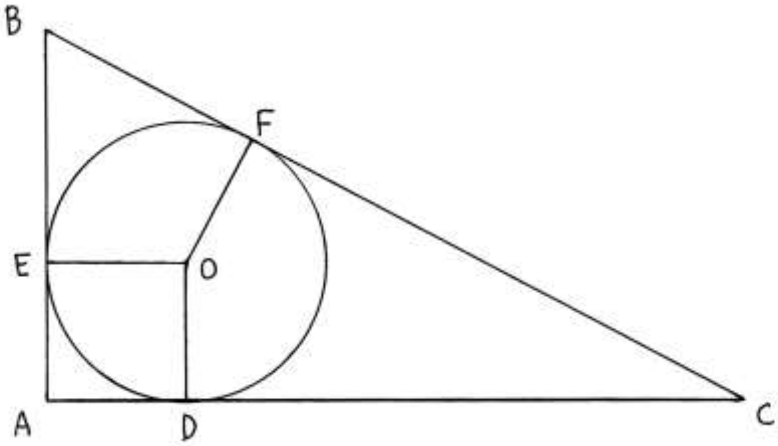
Il manoscritto suggerisce di calcolare l’area con la corretta formula

$$Area_{ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2}$$

Il triangolo rettangolo ha area uguale a metà di quella del rettangolo ABDC.

<u>Diametro della circonferenza inscritta in un triangolo rettangolo</u>

ABC è un triangolo rettangolo nel quale deve essere inscritta una circonferenza tangente a tutti i suoi lati.



La lunghezza del diametro è ricavata dalla seguente formula:

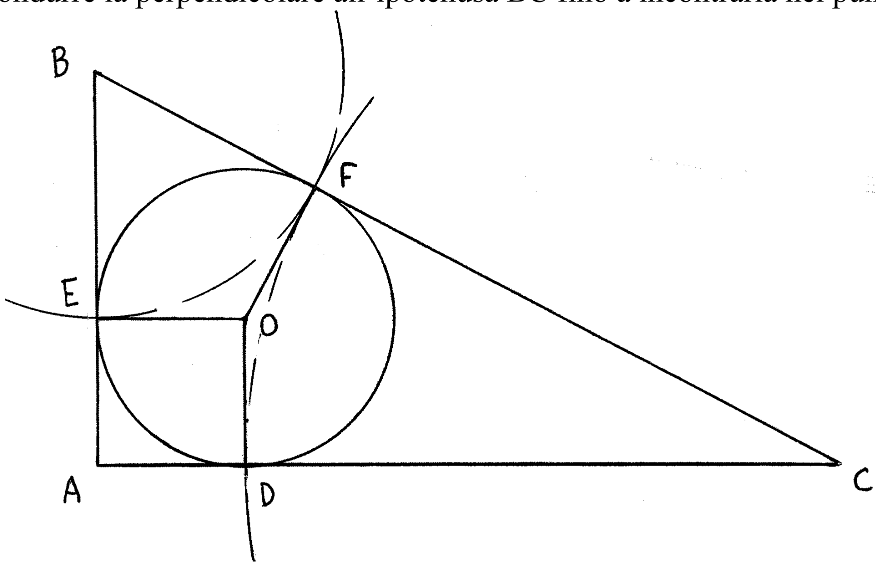
diametro = cateto 1 + cateto 2 – ipotenusa = AB + AC – BC

I segmenti AE e AD sono lunghi quanto il raggio della circonferenza inscritta e cioè

raggio = (AB * AC – BC)/2

Il punto O è determinato dall’intersezione dei segmenti DO e DE, rispettivamente perpendicolari a AC e a AB.

Dal punto O condurre la perpendicolare all’ipotenusa BC fino a incontrarla nel punto F.



Fare centro nel punto B con raggio BE e tracciare un arco da E fino a passare per il punto F.

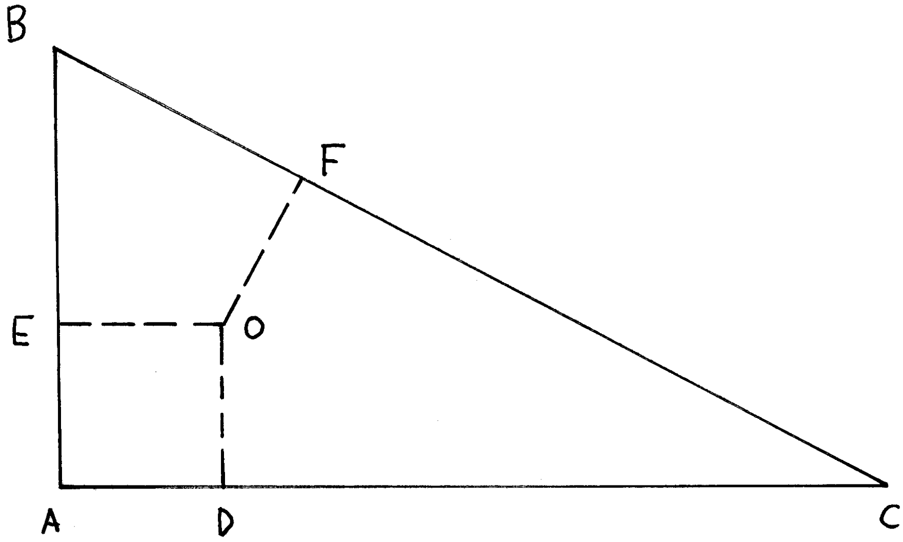
Ripetere la stessa operazione facendo centro nel punto C con raggio CD, fino a incontrare il punto F.

Il risultato è il seguente: i segmenti nei quali i tre lati del triangoli sono divisi dai punti D, E e F hanno uguale lunghezza e cioè:

AD = AE

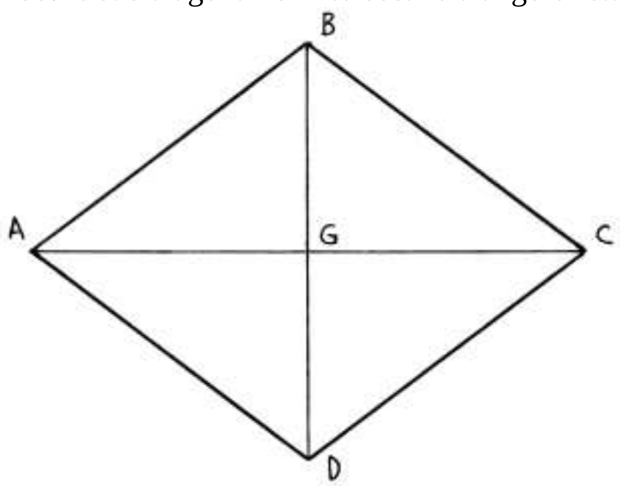
BE = BF
CD = CF
Ne consegue che il triangolo rettangolo ABC è scomposto in *tre* differenti quadrilateri:

- il quadrato AEOD;
- il quadrilatero EBFO che ha lati due a due uguali;
- il quadrilatero DOFC che ha anch’esso i lati due a due uguali.



<u>Area del rombo</u>

ABCD è un rombo: le sue diagonali si intersecano a angolo retto nel punto G.



Nel manoscritto, l’area è calcolata con la formula

$$\text{Area}_{ABCD} = \text{altezza} * \text{diagonale}$$

L’*altezza* è la metà della diagonale verticale (o diagonale minore) e cioè BG = GD.
Con il termine *diagonale* l’Anonimo autore intende la *diagonale maggiore AC*.
Sono note le lunghezze uguali dei quattro lati e quella della diagonale maggiore.
La lunghezza della diagonale minore è *incognita*: il testo propone una formula per calcolarne la lunghezza:

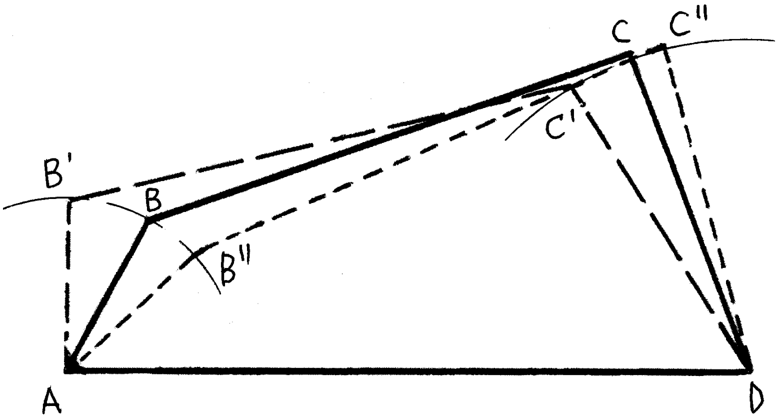
$$BG = \sqrt{AB^2 - AG^2}$$

È evidente come anche in questo caso l’Anonimo si sia servito del teorema di Pitagora applicandolo al triangolo rettangolo ABG.

Area di un *rombo non equilatero*

È ovvio che un *rombo non equilatero* non sia un rombo ma semplicemente un quadrilatero con i lati di differente lunghezza: è questa la terminologia usata nel manoscritto.

Nella figura che segue, ABCD è un quadrilatero i cui lati sono lunghi, stando al testo, AB = 2 ; BC = 6 ; CD = 4 ; AD = 8 piedi.



Il manoscritto suggerisce di calcolare l'area del quadrilatero con la moltiplicazione delle *semisomme* dei lati opposti:

$$\text{Area}_{ABCD} = \frac{AB+CD}{2} \cdot \frac{BC+AD}{2} = \frac{2+4}{2} \cdot \frac{6+8}{2} =$$
$$= 3 \cdot 7 = 21 \text{ piedi}^2$$

La formula era già contenuta in alcuni papiri egizi ed è nota come la *formula degli agrimensori*.

Nella figura sopra sono disegnati *tre* quadrilateri che hanno in comune il lato orizzontale AD e lati corrispondenti di uguale lunghezza:

AB = AB' = AB''

BC = B'C' = B''C''

CD = C'D = C''D

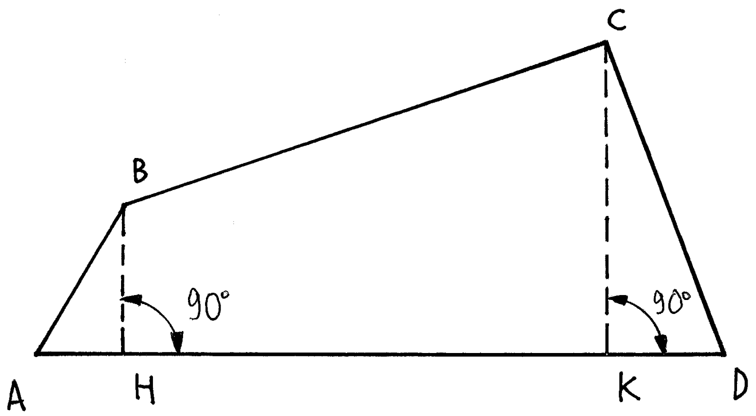
I due archi di circonferenza tracciati con centri in A e in D rispettivamente con raggi AB e DC confermano l'uguaglianza di quelle lunghezze.

I tre quadrilateri sono *isoperimetrici*.

I corrispondenti angoli interni dei tre quadrilateri hanno angoli di differente ampiezza.

Applicando la formula degli agrimensori ai tre quadrilateri si ottengono uguali risultati, ciò che è sbagliato.

L'area del poligono ABCD è correttamente calcolabile con precisione scomponendolo in tre figure:

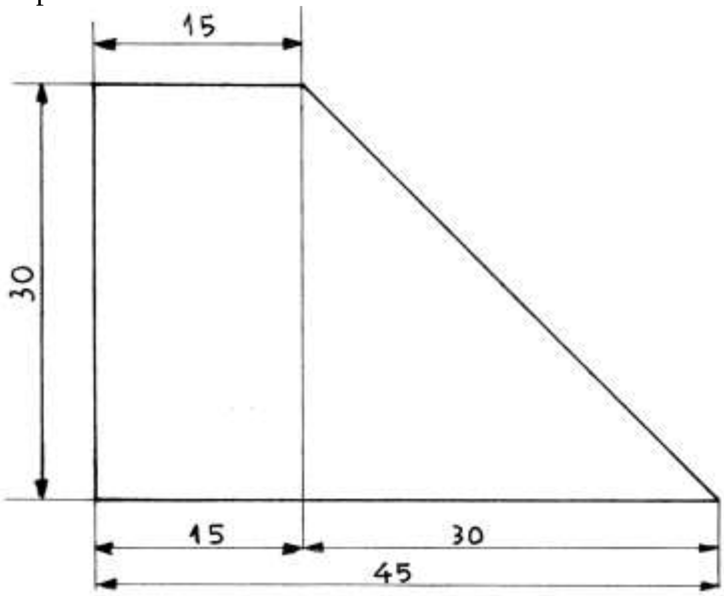


Conducendo due perpendicolari al lato AD a partire dai vertici B e C, il quadrilatero è scomposto in due triangoli rettangoli (ABH e CKD) e nel trapezio rettangolo BCKH.

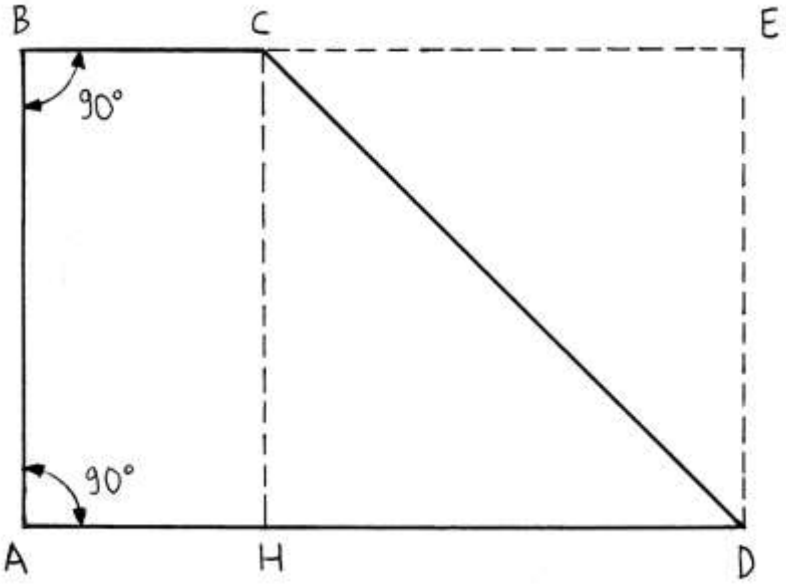
Area di un trapezio rettangolo

Nel manoscritto è spiegato un metodo per calcolare l'area di un trapezio rettangolo che è caratterizzato da dimensioni curiose.

Il lato obliquo è l'*ipotenusa* di un triangolo rettangolo isoscele e la *diagonale* di un quadrato con lato lungo 30 piedi.



La figura che segue mostra tratteggiati i lati mancanti del quadrato HCED:



La formula contenuta nel testo è

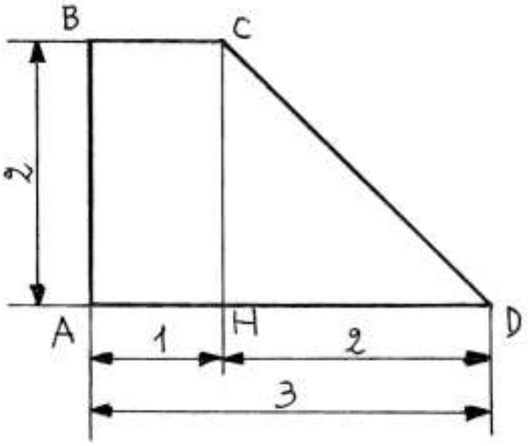
$$\text{Area trapezio} = \frac{\text{base} + \text{base inversa}}{2} \cdot \text{altezza} = \frac{AD + BC}{2} \cdot AB = \frac{15+45}{2} \cdot 30 = 900 \text{ piedi}^2$$

Per *base inversa* si intende la *base maggiore* AD.
L'area del quadrato HCED è
Area HCED = $HD^2 = 30^2 = 900$ piedi^2 .
ed è uguale a quella del trapezio ABCD.

L'area del rettangolo ABCH è data da
Area ABCH = AB * AH = 30 * 15 = 450 piedi^2 .
L'area del triangolo rettangolo CHD è
Area CHD = (CH * HD)/2 = (30 * 30)/2 = 450 piedi^2 .
L'area del rettangolo ABCH e quella del triangolo CHD sono uguali.

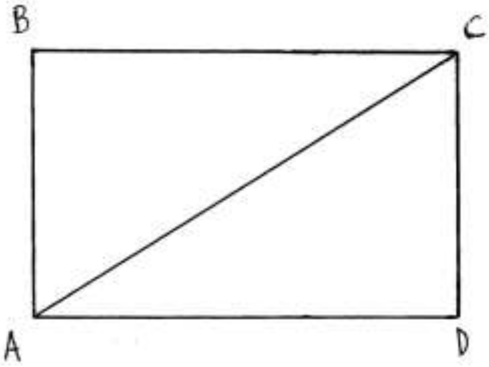
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Il rettangolo ABED ha lati con lunghezze in proporzione 3 : 2, rapporto assai usato nel Medioevo e nel Rinascimento:



Lunghezza della diagonale di un rettangolo

Nel manoscrittto, il lato più lungo di un rettangolo (che oggi conosciamo come la *lunghezza*) è chiamato *lato grande* e quello corto (la nostra *larghezza*) è detto *lato piccolo*.



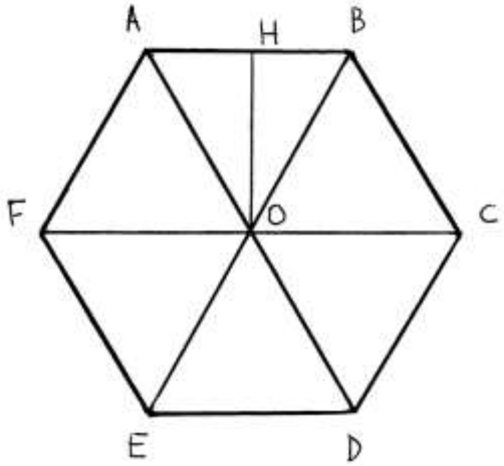
La formula usata è

$$\text{diagonale } AC = \sqrt{(\text{lato grande})^2 + (\text{lato piccolo})^2} = \sqrt{AD^2 + CD^2}$$

Le aree dei poligoni regolari

L'Anonimo autore del manoscritto non conosceva né l'*apotema* né i *numeri fissi* che oggi sono impiegati per calcolare l'area di un poligono regolare con numero di lati uguale o maggiore di *cinque*.

L'area di un poligono, ad esempio l'esagono regolare ABCDEF della figura che segue è scomposto in sei triangoli equilateri, tutti di uguali dimensioni e aree:



Viene prima calcolata l'area di un triangolo con la formula

L'area dell'esagono è poi ottenuta moltiplicando quella del triangolo ABO per *sei*, il numero dei lati del poligono regolare.

Circonferenza e cerchio

La lunghezza di una circonferenza è calcolata con la seguente formula *approssimata*:

$$\text{circonferenza} = \text{diametro} \cdot \left(3 + \frac{1}{7}\right) = \frac{22}{7} \cdot \text{diametro}$$

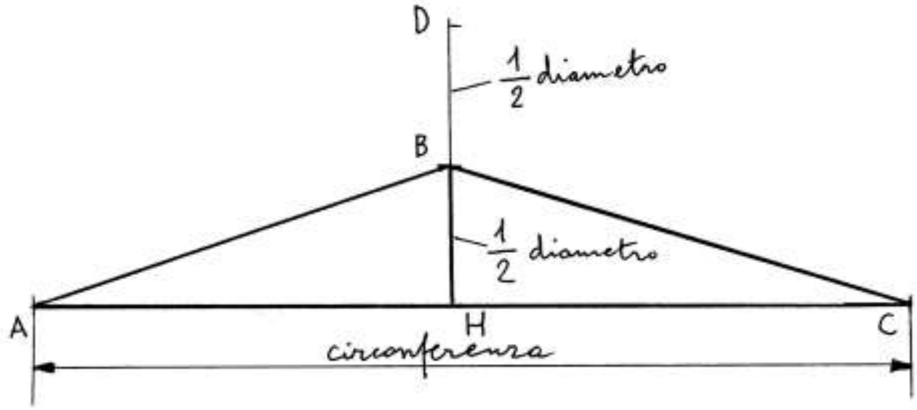
La formula è una approssimazione del valore di π e risale a Archimede.

Area del cerchio

Nel manoscritto, l'area del cerchio è calcolata moltiplicando metà della lunghezza del diametro per la metà della lunghezza della circonferenza:

$$\text{Area cerchio} = \frac{\text{diametro}}{2} \cdot \frac{\text{circonferenza}}{2} =$$
$$= \frac{\text{diametro}}{2} \cdot \frac{22}{7} \cdot \text{diametro} = \frac{11}{7} \cdot \text{diametro}^2$$

La formula ipotizza l'equivalenza dell'area di un cerchio e di quella di un triangolo che ha il lato maggio AC lungo quanto la circonferenza e l'altezza BH lunga quanto il raggio o metà del diametro:



Se il diametro è lungo 7 piedi, la circonferenza è lunga

$$\text{circonferenza} = \frac{22}{7} \cdot 7 = 22 \text{ piedi}$$

L'area del cerchio è

$$\text{Area cerchio} = \frac{7}{2} \cdot \frac{22}{2} = 38{,}5 \text{ piedi}^2$$

Viene poi proposto un secondo metodo:

$$\text{Area cerchio} = \text{diametro}^2 \cdot \frac{11}{14} = 7^2 \cdot \frac{11}{14} = 38{,}5 \text{ piedi}^2$$

Il risultato è identico con i due metodi.

Superficie laterale della sfera

Su questo argomento, il manoscritto dimostra la conoscenza del lavoro di Archimede riguardo alle formule relative alla sfera.

L'Anonimo autore chiama *lorneure* (invece di *l'orneure*) la superficie laterale di una sfera.
Seguendo Archimede il manoscritto calcola l'area della sfera con la seguente formula:
superficie sfera = (diametro massimo)^2 * (22/7) .

Nel caso che il diametro del cerchio massimo sia lungo 7 piedi, la superficie vale
superficie sfera = 7^2 * (22/7) = 154 piedi^2 .

La superficie della sfera è uguale a *quattro volte* quella del suo cerchio massimo:
superficie sfera = 4 * Area cerchio massimo = 4 * 38,5 = 154 piedi^2 .

Cerchio e quadrato

L'Anonimo propone un metodo per calcolare la lunghezza del lato del quadrato di area uguale a quella di un cerchio dato: essa è data dalla radice quadrata dell'area del cerchio.

Il problema è insolubile e tutte le soluzioni offerte sono semplicemente *approssimate*.

Il manoscritto fa l'esempio di un cerchio con il diametro di 7 piedi. Applicando la formula incontrata in precedenza, risulta che l'area del cerchio è 38,5 piedi^2 e il lato del quadrato equivalente è

$$\text{lato quadrato} = \sqrt{\text{area cerchio}} = \sqrt{38{,}5} \cong 6{,}20 \text{ piedi}$$

Il valore è leggermente *approssimato per difetto*.

L'operazione inversa consiste nel determinare il diametro di un cerchio di area uguale a quella di un quadrato noto, la cui area è

area quadrato = lato^2

Il diametro del cerchio è

$$\text{diametro} = \sqrt{\text{area quadrata} \cdot \frac{14}{11}} = \sqrt{\text{lato}^2 \cdot \frac{14}{11}} = \text{lato} \cdot \sqrt{\frac{14}{11}}$$

Nel caso del lato lungo

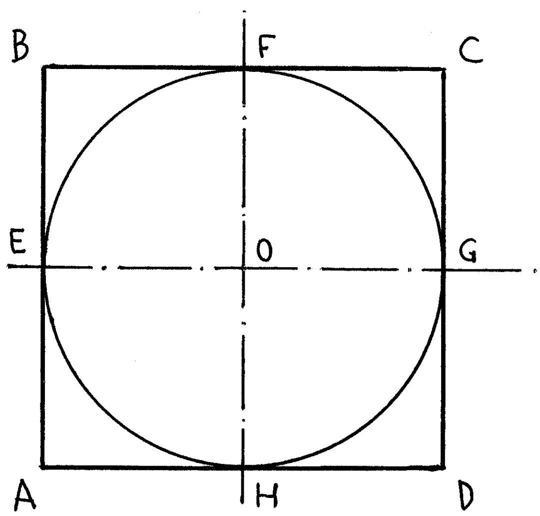
$$\text{lato} = 6 + \frac{1}{5} = \frac{31}{5} = 6{,}2 \text{ piedi}$$

il diametro vale

$$\text{diametro} = 6{,}2 \cdot \sqrt{\frac{14}{11}} \cong 6{,}9945 \longrightarrow 7 \text{ piedi}$$

Area differenza fra quadrato e cerchio inscritti

ABCD è un quadrato e al suo interno è inscritto un cerchio che gli è tangente nei punti E, F, G e H:



Nel manoscritto è descritto l'esempio di un quadrato con lato lungo 7 piedi e quindi lo è pure la lung^{h}ezza del diametro EG.

Usando le formule *approssimate* già incontrate in precedenza, l'Anonimo calcola l'area compresa fra il quadrato e il cerchio inscritto.

I dati sono i seguenti:

Area del quadrato = lato^2 = 7^2 = 49 piedi^2 .

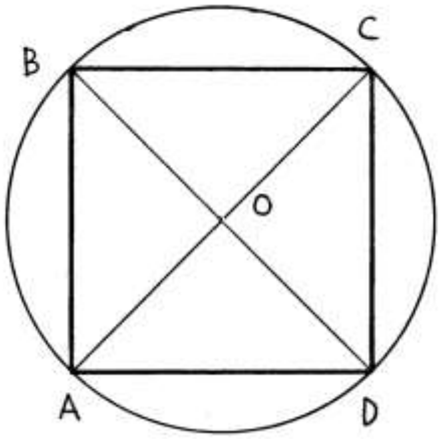
$$\text{Area del cerchio} = \frac{\text{diametro}}{2} \cdot \frac{\text{circonferenza}}{2} =$$

$$= \frac{7}{2} \cdot \frac{7 \cdot \frac{22}{7}}{2} = \frac{7}{2} \cdot 11 = 38{,}5 \text{ piedi}^2$$

La differenza approssimata fra le due aree è

differenza = area quadrato – area cerchio = 49 – 38,5 = 10,5 piedi^2.

Il manoscritto affronta poi il problema inverso, quello di calcolare l'area compresa fra un cerchio e un quadrato inscritto:



ABCD è il quadrato inscritto in un cerchio con diametro AC lungo 14 piedi e cioè il doppio della lunghezza del diametro del caso precedente.

L'area del cerchio è

$$\text{Area del cerchio} = \frac{\text{diametro}}{2} \cdot \frac{\text{circonferenza}}{2} =$$

$$= \frac{14}{2} \cdot \frac{14 \cdot \frac{22}{7}}{2} = 7 \cdot 22 = 154 \text{ piedi}^2$$

Il manoscritto contiene una formula per calcolare l'area della differenza:

area differenza = 4 * diametro = 4 * 14 = 56 piedi^2

L'area del quadrato ABCD è data da

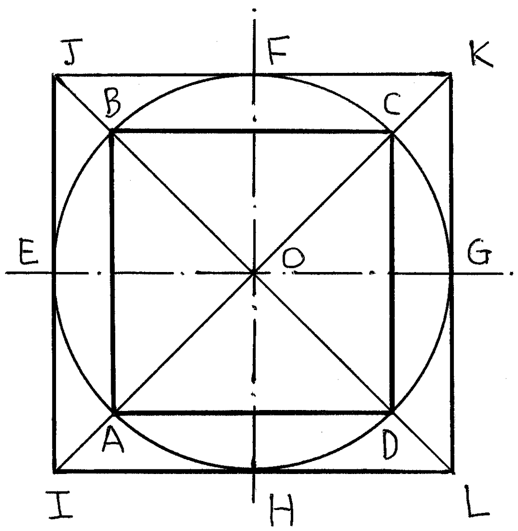
area ABCD = area cerchio – area differenza = 154 – 56 = 98 piedi^2

Calcolando l'area del quadrato in forma diretta e con una formula corretta si ha

$$\text{Area}_{ABCD} = \frac{\text{diagonale}^2}{2} = \frac{AC^2}{2} = \frac{14^2}{2} = 98 \text{ piedi}^2$$

Il risultato coincide con quello ricavato dall'Anonimo.

L'Anonimo estende le sue considerazioni al caso dei due quadrati concentrici, uno inscritto e l'altro circoscritto a un cerchio:



L’autore indica correttamente che l’area del quadrato esterno (IJKL) è doppia di quella del quadrato interno (ABCD).

La lunghezza del lato del quadrato esterno, IL, è fissata in 14 piedi e la stessa lunghezza ha il diametro EG: l’area di quel quadrato è $14^2 = 196$ piedi^2.

Il cerchio di diametro EG ha area 154 piedi^2 e quindi l’area della differenza fra quella di IJKL e quella dello stesso cerchio è uguale a

(196 – 154) = 42 piedi^2.

La differenza fra l’area del cerchio e quella del quadrato interno (ABCD) è

(154 – 98) = 56 piedi^2.

- APPROFONDIMENTO -

Usando formule corrette, le aree dei tre poligoni contenuti nella precedente figura risultano come segue:

Area quadrato IJKL = $14^2 = 196$ piedi^2 ;

Area cerchio = π * raggio$^2 \approx 3{,}14 * 7^2 \approx 153{,}86$ piedi^2.

$$\text{Area quadrato}_{ABCD} = \frac{AC \cdot BD}{2} = \frac{14 \cdot 14}{2} = 98 \text{ piedi}^2$$

La differenza fra l’area del quadrato esterno e quella del cerchio è

differenza $\approx 196 – 153{,}86 \approx 42{,}14$ piedi^2 (invece di 42 piedi^2).

La differenza fra l’area del cerchio e quella del quadrato interno (ABCD) è

differenza $\approx 153{,}86 – 98 \approx 55{,}86$ piedi^2 (invece di 56 piedi^2).

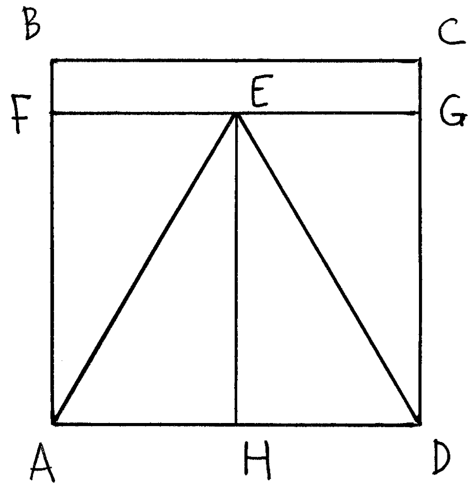
Le differenze fra i risultati corretti e quelli contenuti nel manoscritto sono minime: l’Anonimo ha arrotondato per eccesso all’intero più vicino.

- -

<u>Quadrato e triangolo equilatero</u>

Il manoscritto affronta un problema simile a quelli finora incontrati descrivendo esempi di figure piane tracciate all’interno di altre figure piane.

Nel grafico che segue, un quadrato (ABCD) ha il lato AD in comune con il triangolo equilatero AED ed è lungo 14 piedi:



L’area del quadrato ABCD è data da lato^2 = AD^2 = 14^2 = 196 piedi^2.

EH è l’altezza del triangolo equilatero. L’Anonimo calcola la lunghezza di EH usando la formula di Gerberto:

$$EH = \frac{6}{7} \cdot AD = \frac{6 \cdot 14}{7} = 12 \text{ piedi}$$

Con il teorema di Pitagora calcoliamo la corretta lunghezza dell’altezza EH:

$$EH = \sqrt{ED^2 - HD^2} = \sqrt{14 - \left(\frac{14}{2}\right)^2} = \sqrt{14^2 - 7^2} =$$
$$= \sqrt{196 - 49} = \sqrt{147} \cong 12{,}12 \text{ piedi}$$

Il valore *approssimato* dell’area del triangolo equilatero è dato da

Area AED = HE * HD = 14 * 6 = 84 piedi^2 .

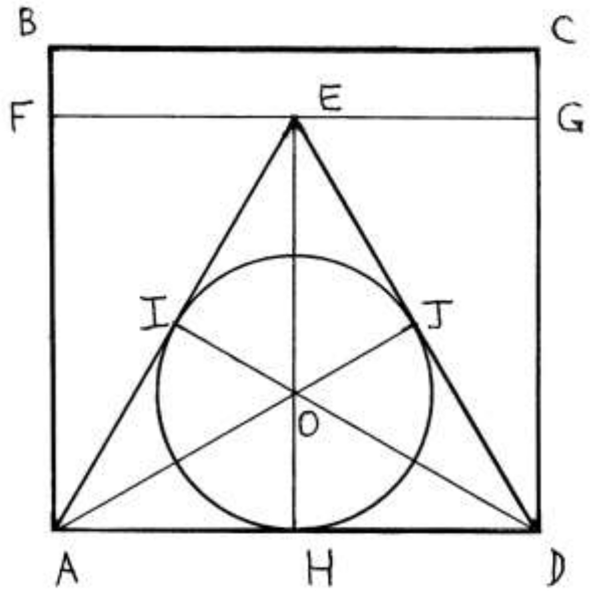
I due triangoli rettangoli AEH e EHD hanno uguale superficie pari a metà di quella di AED e cioè 42 piedi^2.

Infine, il rettangolo FBCG ha area

Area FBCG = BF * FG = (AB – AF) * FG = (14 – 12) * 14 = 28 piedi^2.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Nel triangolo equilatero della precedente figura è ora inscritto un cerchio:



Esso è tangente al triangolo nei punti H, I e J.

Il manoscritto indica l'area del cerchio in 50 piedi^2 più un quarto e un settimo di un quarto di piedi^2 e cioè

$$50 + \frac{1}{4} + \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{4} = 50 + \frac{7+1}{28} = 50 + \frac{8}{28} = \left(50 + \frac{2}{7}\right) \cong 50{,}2857 \text{ piedi}^2$$

Il manoscritto contiene una scomposizione della frazione 2/7 in una somma di frazioni:

$$\frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4 \cdot 7} = \left(\frac{7+1}{28} = \frac{8}{28} = \frac{2}{7}\right)$$

Il metodo corretto per calcolare l'area del cerchio inscritto è descritto qui di seguito.

Il centro O è l'incontro delle bisettrici, delle altezze e delle mediane del triangolo equilatero: in questo tipo di triangolo i tre segmenti coincidono. Essi si dividpno reciprocamente in parti proporzionali a 1 e a 2:

OJ : AO = 1 : 2

L'altezza di un triangolo equilatero (ad esempio AJ) è data da

$$\text{lato} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = AD \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Il raggio del cerchio inscritto, OJ, è lungo 1/3 dell'altezza:

$$OJ = \frac{1}{3} \cdot AJ = AD \cdot \frac{\sqrt{3}}{6}$$

L'area del cerchio è data da

$$\text{Area} = \pi \cdot r^2 \cong 3{,}14 \cdot \left(AD \cdot \frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2 \cong 3{,}14 \cdot AD^2 \cdot \frac{3}{36} \cong$$

$$\cong \frac{3{,}14 \cdot 14^2}{12} \cong 51{,}2866 \text{ piedi}^2$$

Nel manoscritto l'area (50,2857 piedi^2) è calcolata per *difetto* rispetto al valore reale: 51,2866 piedi^2.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Un passo successivo compiuto dall'Anonimo è il calcolo dell'area dello spazio compreso fra il triangolo equilatero e il cerchio.

Con i dati del manoscritto, la differenza è

differenza = Area triangolo equilatero – Area cerchio = 84 – (50 + 2/7) =

= 84 – 50 – 2/7 = 34 – 2/7 = 33 + 5/7 piedi^2 .

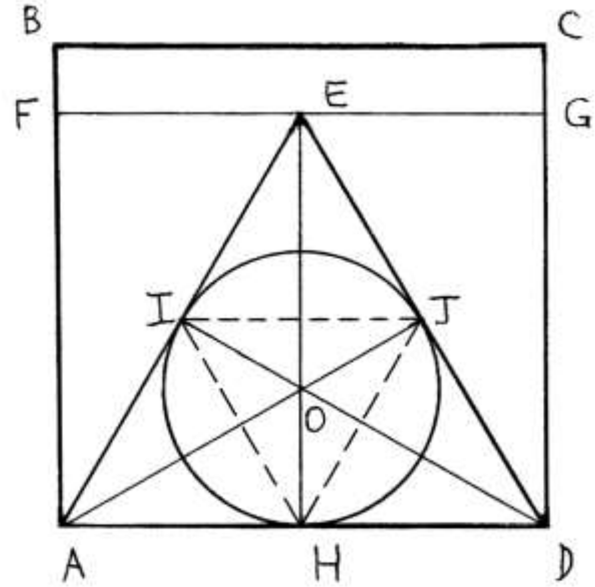
Ciascuna delle tre aree è ampia

(1/3) * differenza = 1/3 * (33 + 5/7) = 11 + 5/21 = 11 + 20/84 = 11 + (21/84 – 1/84) =

11 + ¼ - 1/84 piedi^2.

È da notare che questa ultima espressione in parte frazionaria è contenuta nel manoscritto.

Infine, all'interno del cerchio è inscrivibile un secondo triangolo equilatero, HIJ:



Il triangolo AED è ora diviso in quattro triangoli equilateri: AIH, HIJ, HJD e IEJ.

Confrontiamo i triangoli equilateri AED e IEJ; i rapporti fra le lunghezze dei lati sono i seguenti:

AE : IE = ED : EJ = 2 : 1

Questa proporzione vale anche per i lati orizzontali dei due triangoli:

AD : IJ = 2 : 1

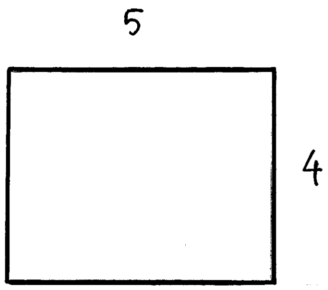
Ne consegue   AD : IJ = 14 : 7.

I quattro triangoli equilateri che compongono AED hanno lati lunghi *metà* di quelli dello stesso AED e cioè 7 piedi e superficie che che è uguale a ¼.

Divisione di un terreno

Un terreno ha forma rettangolare e misura 200 * 100 piedi.

Un *laterculo* è una superficie rettangolare che misura 5 * 4 piedi:



Il problema chiede di calcolare quanti *laterculi* coprono interamente il terreno.

Il manoscritto offre la soluzione. Dividere la lunghezza del terreno (200 piedi) per la lunghezza di un laterculo (5 piedi):

200 : 5 = 40

Dividere poi la larghezza del terreno (100 piedi) per la larghezza di un laterculo (4 piedi):

100 : 4 = 25

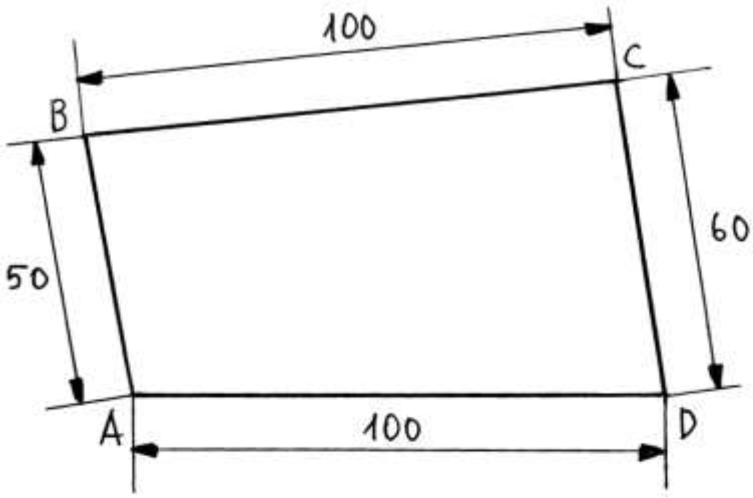
Moltiplicando questi due *quozienti* si ottiene il numero dei laterculi:

40 * 25 = 1000.

Nota: il termine *laterculo* è di origine latina e significava *mattonella*. In antico, era il nome di una lastra di pietra o di terracotta sulla quale veniva incisa o scritta un'informazione.

Divisione di un campo a forma di quadrilatero

Un campo ha la forma di un quadrilatero con le dimensioni indicate nella figura che segue ed espresse in *pertiche*:



All'epoca della stesura del manoscritto, una *pertica* era un'unità di lunghezza lineare ed equivaleva a 7,185 m.

Un multiplo della pertica era l'*arpent* che valeva 10 pertiche e quindi 71,85 m.

Un *arpent quadrato*, arpent^2, era un'unità di misura della superficie agraria e valeva:

1 arpent^2 = (10 pertiche)^2 = 100 pertiche^2 ≈ (71,85 m)^2 ≈ 5162,42 m^2.

L'Anonimo propose di calcolare per prima l'area del terreno con la consueta *formula degli agrimensori*:

$$Area_{ABCD} = \frac{AB + CD}{2} \cdot AD = \frac{50+60}{2} \cdot 100 = 5500 \text{ pertiche}^2$$

Forse la formula *implicitamente* usata era la seguente:

$$Area_{ABCD} = \frac{AB + CD}{2} \cdot \frac{AD + BC}{2} = \frac{50 + 60}{2} \cdot \frac{100 + 100}{2} = $$
$$= 55 \cdot 100 = 5500 \text{ pertiche}^2$$

Dividendo la superficie di ABCD per l'area di un *arpent* si ottiene il numero *teorico* di arpent contenuti:

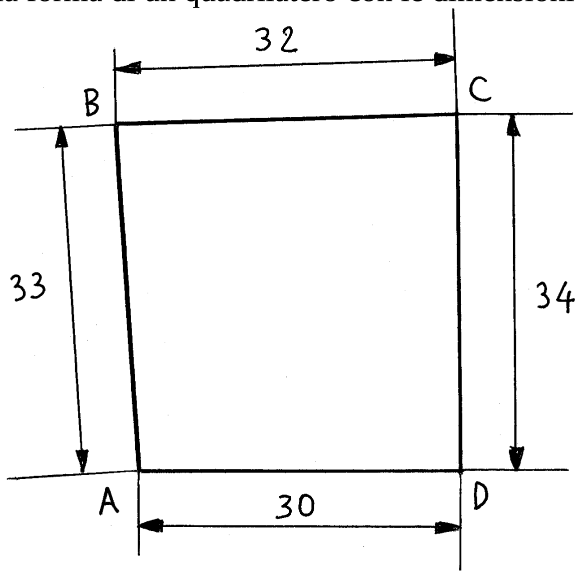
$$\text{numero arpent} = \frac{5500}{100} = 55 \text{ arpent}^2$$

Il risultato è puramente teorico perché il terreno non ha forma rettangolare o quadrata con dimensioni perfettamente multple di quelle di un singolo *arpent*.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Un problema successivo è del tutto simile a quello precedente.

Un campo ha la forma di un quadrilatero con le dimensioni sempre indicate in *pertiche*:



Nel manoscritto è calcolata l'area con la consueta formula degli agrimensori:

$$Area_{ABCD} = \frac{AB + CD}{2} \cdot \frac{AD + BC}{2} = \frac{33 + 34}{2} \cdot \frac{30 + 32}{2} =$$
$$= \frac{69}{2} \cdot \frac{62}{2} = 1069{,}5 \text{ pertiche}^2$$

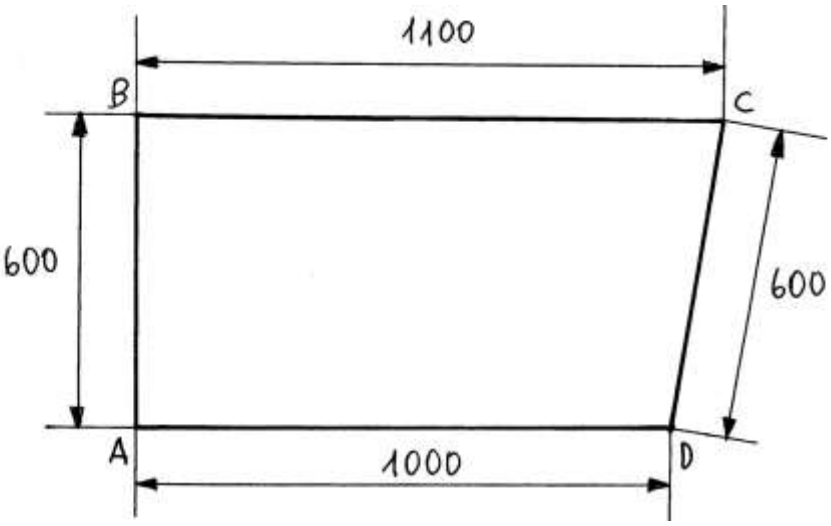
Il problema chiede quanti *arpent* possono essere contnuti e ciò si ottiene dividendo la superficie in pertiche^2 per l'area di un arpent^2 espressa in pertiche^2:

$(1069{,}5)/10 = 10{,}695$ arpent^2 .

Data la forma irregolare il numero effettivo degli arpent quadrati è *inferiore*.

Case costruibili su di una superficie

È disponibile un terreno di forma quadrangolare con le dimensioni espresse in *piedi,* come mostrato in figura:



Il problema posto chiedeva di calcolare il numero di case di dimensioni 40 * 30 piedi che potevano esservi costruite.

Il metodo risolutivo usato è descritto con i seguenti passi:

* sommare le lunghezze dei due lati maggiori e dividere per 2:

$$\text{somma 1} = \frac{AD+BC}{2} = \frac{1000+1100}{2} = 1050 \text{ piedi}$$

* Dividere *somma 1* per la lunghezza di una casa:

$$\text{quoziente 1} = \frac{1050}{40} = 26{,}25$$

* Sommare i due lati corti del quadrilatero e dividere per 2:

$$\text{somma 2} = \frac{AB+CD}{2} = \frac{600+600}{2} = 600 \text{ piedi}$$

* Dividere *somma 2* per la larghezza di una casa:

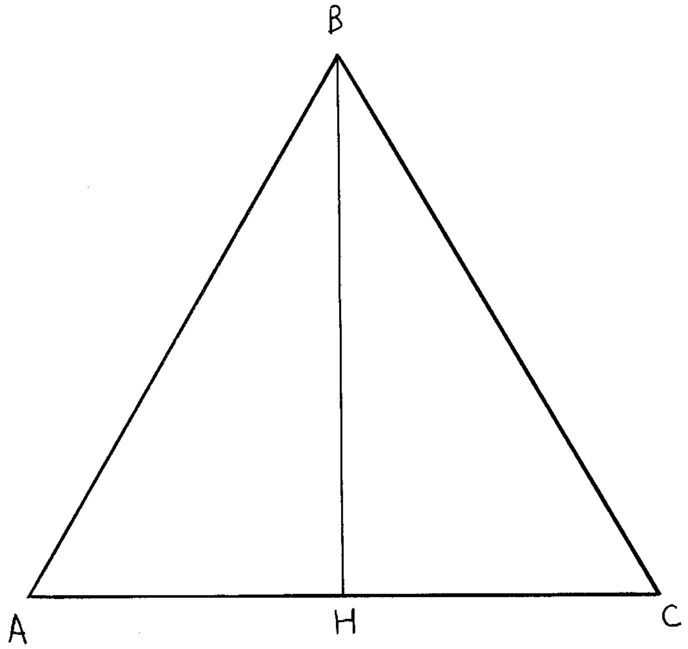
$$\text{quoziente 2} = \frac{600}{30} = 20$$

* Il numero delle case è ottenuto dal prodotto dei due *quozienti*:
  numero case = quoziente 1 * quoziente 2 = 26,25 * 20 = 525.

Chiaramente, il risultato è errato per *eccesso*.

Un terreno triangolare

Un terreno ha la forma di un triangolo equilatero con lati lunghi 70 piedi:



Il problema chiede di conoscere quanti *laterculi* possono esservi tracciati.

Il manoscritto fornisce solo i dati iniziali e il risultato finale.

È ragionevole ipotizzare il metodo applicato dall'Anonimo.

BH è l'altezza del triangolo equilatero la cui lunghezza approssimata (secondo la formula di Gerberto) è:

$$BH = \frac{6}{7} \cdot AC = \frac{6}{7} \cdot 70 = 60 \text{ piedi}$$

L'area approssimata del triangolo equilatero è

$$Area_{ABC} = BH \cdot \frac{AC}{2} = 60 \cdot \frac{70}{2} = 2100 \text{ piedi}^2$$

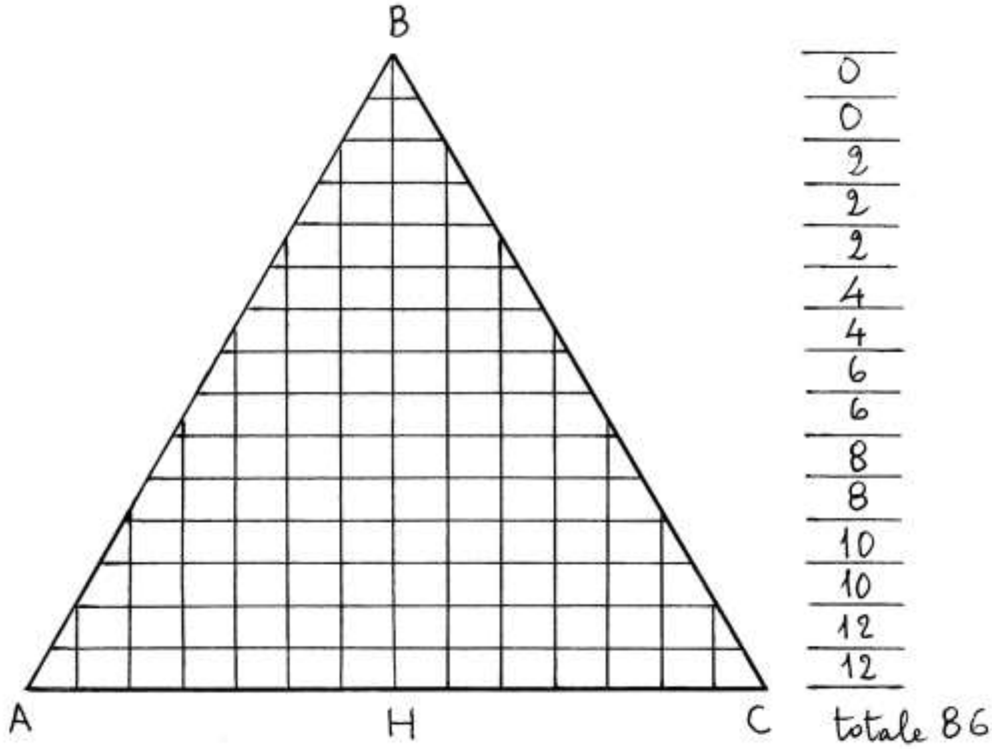
Un laterculo ha superficie di 5 * 4 = 20 piedi^2.

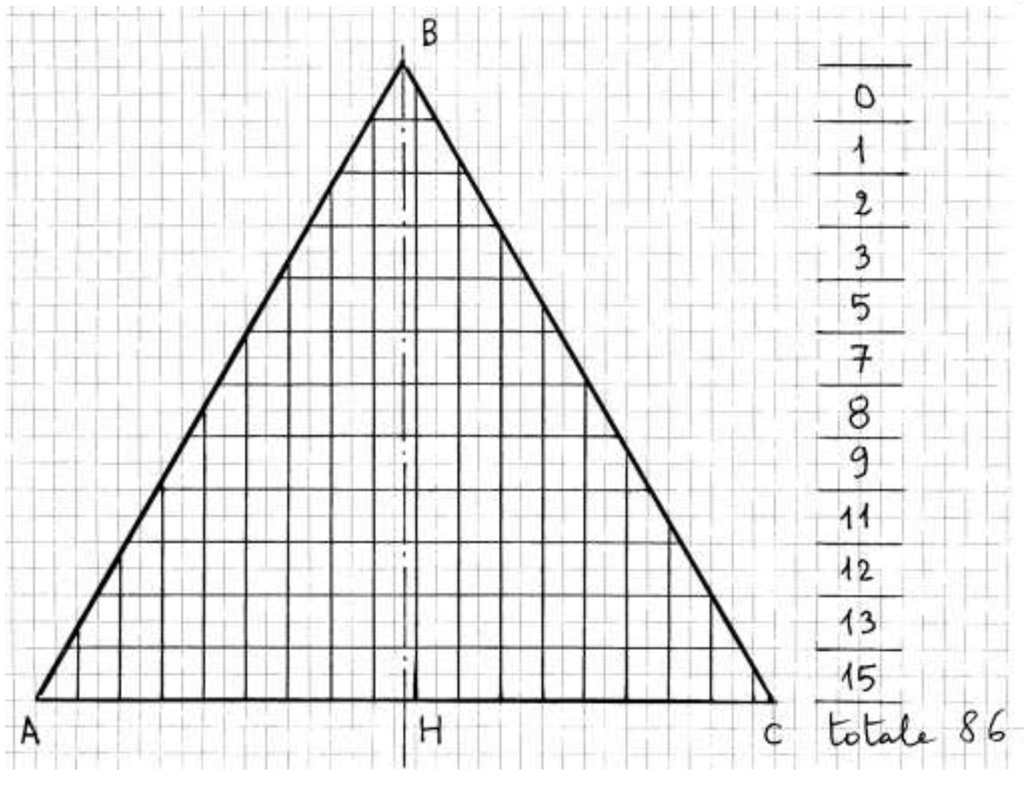
Il manoscritto calcola il numero di laterculi inscrittibili dividendo l'area del triangolo equilatero per l'area di un laterculo:

$$\text{numero laterculi} = \frac{Area_{ABC}}{Area\ 1\ laterculo} =$$
$$= \frac{2100}{20} = 105 \text{ laterculi}$$

La soluzione offerta dal manoscritto è puramente teorica e astratta perché non tiene conto dei ritagli non utilizzabili dovuti alla forma triangolare.

Nelle due figure che seguono il triangolo equilatero è suddiviso con laterculi disposti rispettivamente in senso orizzontale e in senso verticale:





Con entrambe le disposizioni, il numero dei laterculi si riduce a 86.
Lo spreco di superficie è pari a

Spreco = (105 – 86)/105 = 19/105 ≈ 18,09 % .

Evidentemente, il manoscritto è stato composto da un teorico con scarse conoscenze di geometria pratica.

Una città circolare

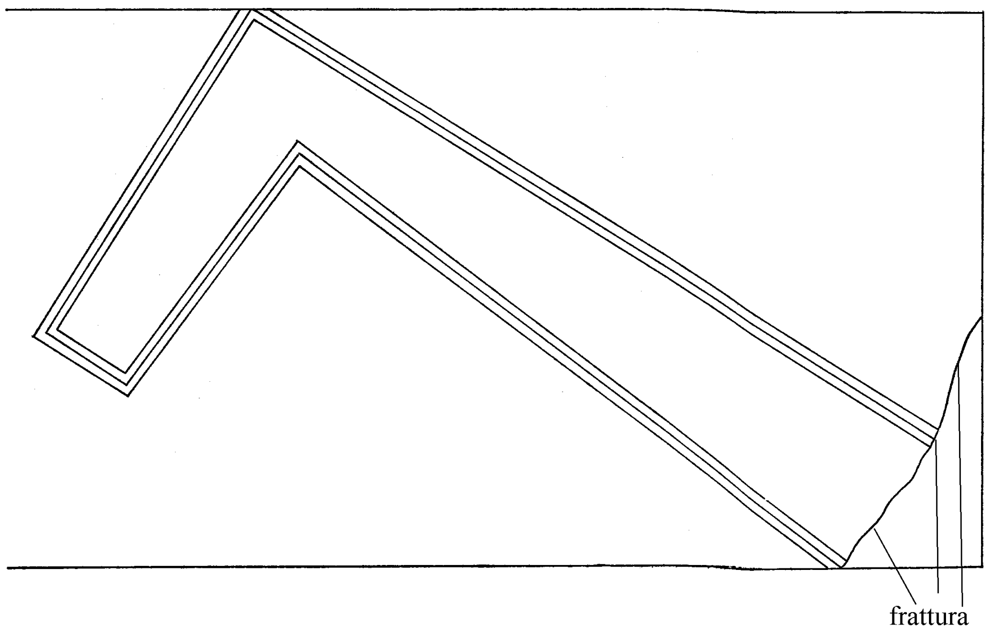
In un’area circolare devono essere costruite delle case di forma rettangolare di dimensioni 30 * 20 piedi e area di 600 piedi^2.

Il metodo suggerito è quello di calcolare l’area del cerchio a partire dal dato noto della lunghezza di metà del diametro (e cioè il raggio) e dividerla per l’area di una casa.

La soluzione non tiene conto dell’impossibilità di coprire interamente una superficie circolare con dei rettangoli.

La ricostruzione di una squadra

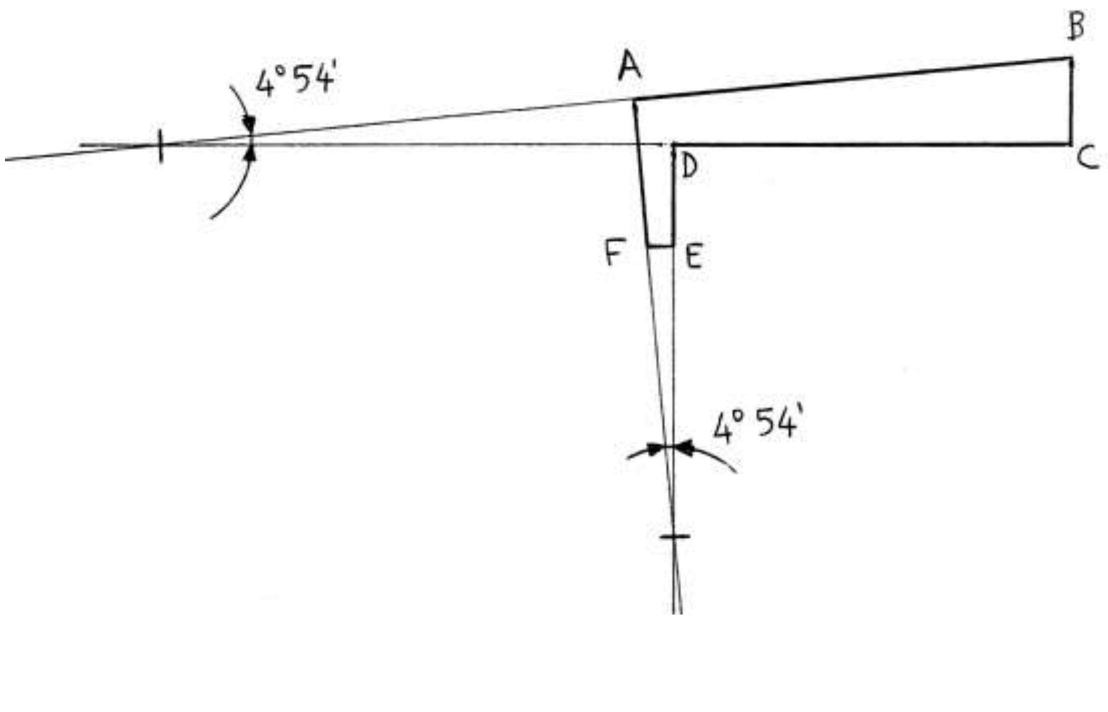
La figura che segue presenta la ricostruzione operata dalla Sarrade di una squadra tracciata su di una lastra tombale del XII secolo da Ligne-des-Bois in Charente:



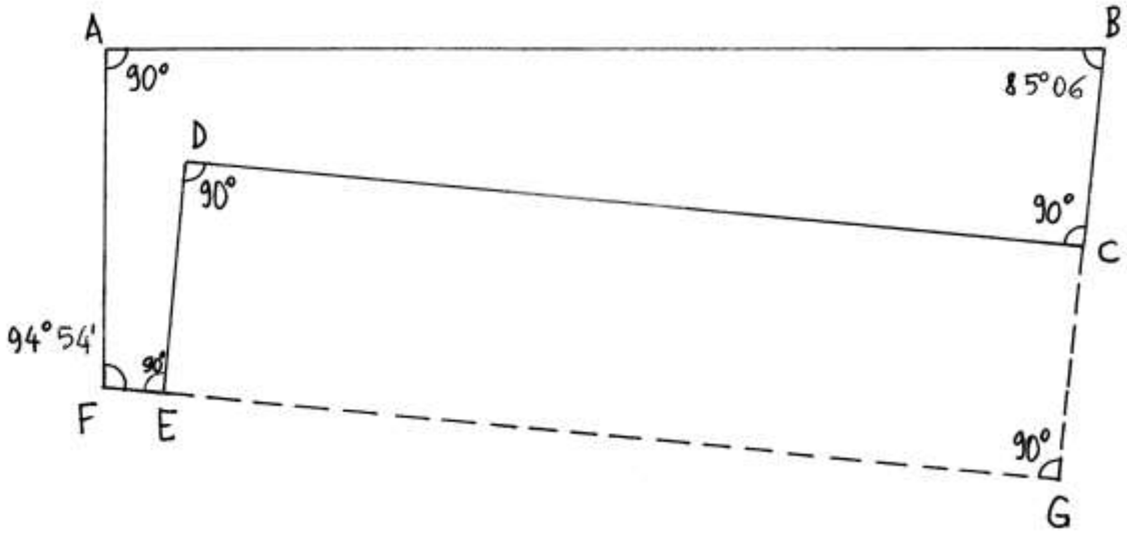
La lastra è fratturata.

Secondo la Sarrade, una squadra simile serviva a determinare la *radice quadrata di 2*.

La squadra ha i bordi dei bracci convergenti che formano un angolo di 4° 54’ (e cioè circa 5°):



La squadra ha gli angoli interni indicati nella figura che segue:

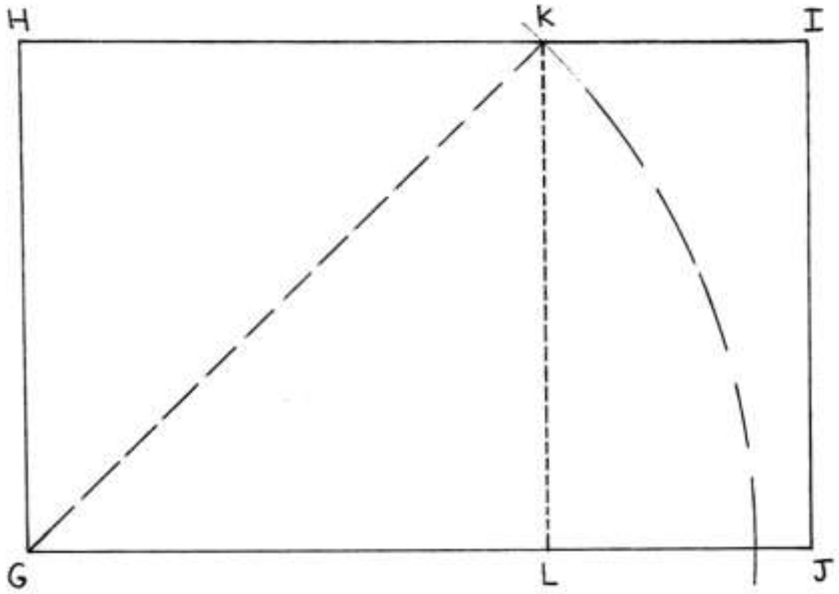


La squadra presenta angoli retti fra i bordi esterni (in A) e fra quelli interni (in D).
Il quadrilatero immaginario DCGE è un *rettangolo*.

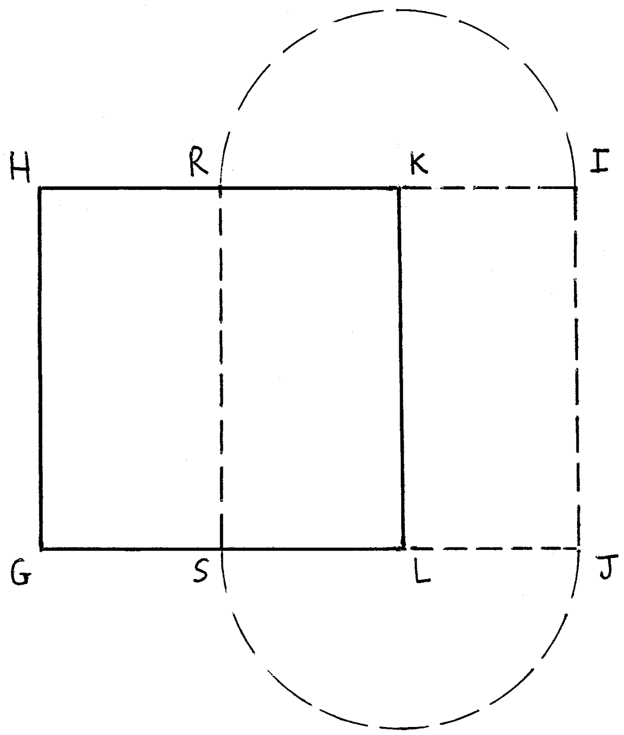
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

GHIJ è un rettangolo con le lunghezze dei lati in proporzione 3 : 2 :

GJ : GH = 3 : 2



I punti I e J sono fissati con la semplice costruzione che è mostrata nella figura che segue:



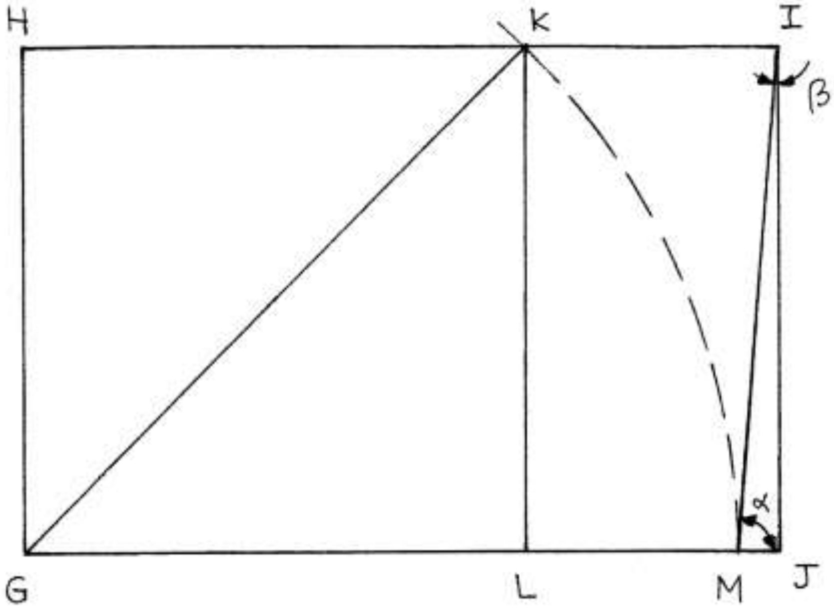
Prolungare verso destra i lati HK e GL.

Fissare i punti medi dei lati orizzontali HK e GL: sono R e S.

Fare centro nei punti K e L e con raggio KR = LS tracciare due semicirconferenze che determinano i punti I e J.

Dato che GL = GH, il segmento KL divide la figura in un quadrato (GHKL) e in un rettangolo (LKIJ).

GK è una diagonale del quadrato GHKL. Fare centro nel punto G e con raggio GK tracciare un arco da K fino a fissare il punto M:



I segmenti GK e GM hanno la stessa lunghezza pari a

$$GK = GM = GH * \sqrt{2} .$$

Il segmento MJ è lungo

$$MJ = GJ – GM = (3/2) * GH – (\sqrt{2}) * GH = GH * (3/2 – \sqrt{2}) \approx 0{,}08578643 * GH .$$

MIJ è un triangolo rettangolo con due angoli *complementari*: α e β. La tangente di α è data da

$$tg\,\alpha = \frac{IJ}{MJ} = \frac{GH}{GH\cdot\left(\frac{3}{2}-\sqrt{2}\right)} = \frac{1}{\frac{3}{2}-\sqrt{2}} \cong$$

$$\cong \frac{1}{0{,}08578643} \cong 11{,}65685529$$

Da questo valore risulta $\alpha \approx 85° \; 6'$.

A sua volta, la Sarrade ha calcolato l'ampiezza dell'angolo $\beta \approx 4° \; 54'$ e quella dell'angolo complementare $\alpha \approx 90° - \beta \approx 90° - 4° \; 54' \approx 85° \; 6'$.

I due risultati coincidono.

Le ampiezze dei due angoli possono essere approssimate a $\alpha \approx 85°$ e $\beta \approx 5°$.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Bibliografia

1. Chiovelli Renzo, "Tecniche costruttive murarie medievali. La Tuscia", Roma "L'Erma" di Bretschneider, 2007, pp. 496.
2. Henry Charles, "Sur les deux plus anciens traités français d'Algorisme et de Géométrie", in "Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche", vol. XV, Roma, 1882, pp. 49-70.
3. Sarrade Marie-Thérèse, "Sur les connaissances mathématiques des bâtisseurs de cathédrales", Parigi, "Librairie du Compagnonnage", 1986, pp. 62.
4. Victor Stephen K., "Practical geometry in the high middle ages", Filadelfia, The American Philosophical Society, 1979, pp. xii-638.
5. Wu Nancy, "Hugues Libergier and his Instruments", Nexus Network Journal, volume II, 2000, pp. 93 – 102.