© Sergio Calzolani, Firenze, 2021

sergio(punto)calzolani(at)outlook(punto)it

Il materiale contenuto in questo documento può essere riprodotto, in tutto o in parte, a scopi *non commerciali*, purché siano citati l'Autore e la fonte

Parole chiave: rettificazione della circonferenza; quadratura del cerchio; rettificazioni secondo gli astronomi Cinesi, Bachot, Hobbes, Kochański, Caluso, Cremona, Nehls, Lambert, Terquem, Specht, Italo Ghersi, Cusano; quadratura del cerchio secondo Cusano, gli Egizi, Archimede, Boezio, Francone, Oronce Finé, Sonnet, Willich, Perigal, Postula, Ramanujan, Ghersi e Martin Gardner

Note:

1. Per semplificare e ridurre le dimensioni di questo file, le frazioni sono spesso scritte usando il simbolo frazionario obliquo, la *barra* "/" , invece del più corretto segno orizzontale, _____.
2. Nelle formule contenute nel testo sono usati indifferentemente i simboli $\cong$ e $\approx$ per indicare valori approssimativamente uguali.

Rettificazione della circonferenza e quadratura del cerchio

La rettificazione della circonferenza e la quadratura del cerchio sono entrambe *impossibili*: esistono però metodi approssimati che forniscono risultati accettabili per le attività produttive.

La *rettificazione* consiste nella tracciatura di un segmento che abbia la stessa lunghezza di una circonferenza data.

La *quadratura* consiste nella costruzione di un quadrato di area uguale a quella di un cerchio dato.

I metodi approssimati proposti nel corso dei secoli sono numerosi: in questo articolo be sono presentati alcuni fra i più significativi.

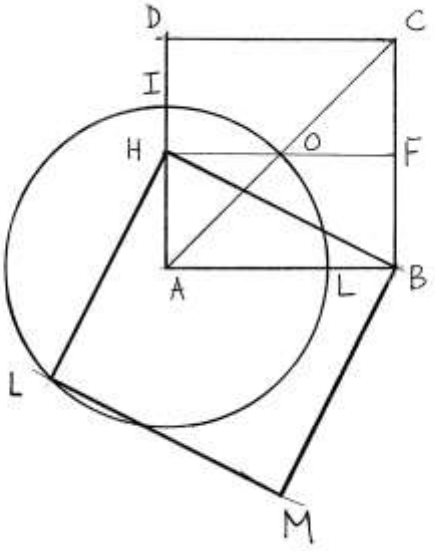
RETTIFICAZIONE

La rettificazione della circonferenza

I pratici hanno escogitato semplici metodi geometrici in grado di disegnare segmenti di lunghezza *quasi* uguale a quella di un arco o di un'intera circonferenza e hanno ottenuto questo risultato con l'impiego di due strumenti tradizionali: riga (o squadra) e compasso.

Certi metodi hanno lo scopo di *rettificare* una circonferenza. Di seguito è spiegato uno di essi.

Disegnare il quadrato ABCD e la sua diagonale AC:



Fissare i punti medi F e H e tracciare la mediana FH che interseca la diagonale AC nel punto O.

Facendo centro in A con raggio AO, disegnare una circonferenza che taglia il quadrato nei punti I e L.

Tracciare la corda HB.

Il raggio r = AO è lungo metà della diagonale del quadrato e quindi è

$$r = \text{lato} * (\sqrt{2})/2$$

La circonferenza di raggio AO (= r) è lunga $2*\pi*r$.

L'arco IL è lungo un quarto di circonferenza e quindi vale

$$2 * \pi * r /4$$

Sostituendo a r il suo valore si ottiene

$$2 * \pi * r /4 = 2 * \pi * \text{lato} * \sqrt{2}/(4 *2) = \pi * \text{lato} *\sqrt{2}/4 \cong 1{,}1107 * \text{lato}\,.$$

La lunghezza della corda HB si calcola con il teorema di Pitagora. Essa è l'ipotenusa del triangolo rettangolo HAB:

$HB = \sqrt{(AH^2 + AB^2)} = \sqrt{[(\text{lato}/2)^2 + \text{lato}^2]} = \sqrt{(5/4 * \text{lato}^2)} = \text{lato} * \sqrt{(5)}/2 \cong 1{,}1118 * \text{lato}\,.$

La differenza fra la lunghezza dell'arco IL e quella della corda HB è soltanto dell'1,6%.

Costruire il quadrato con lato HB.

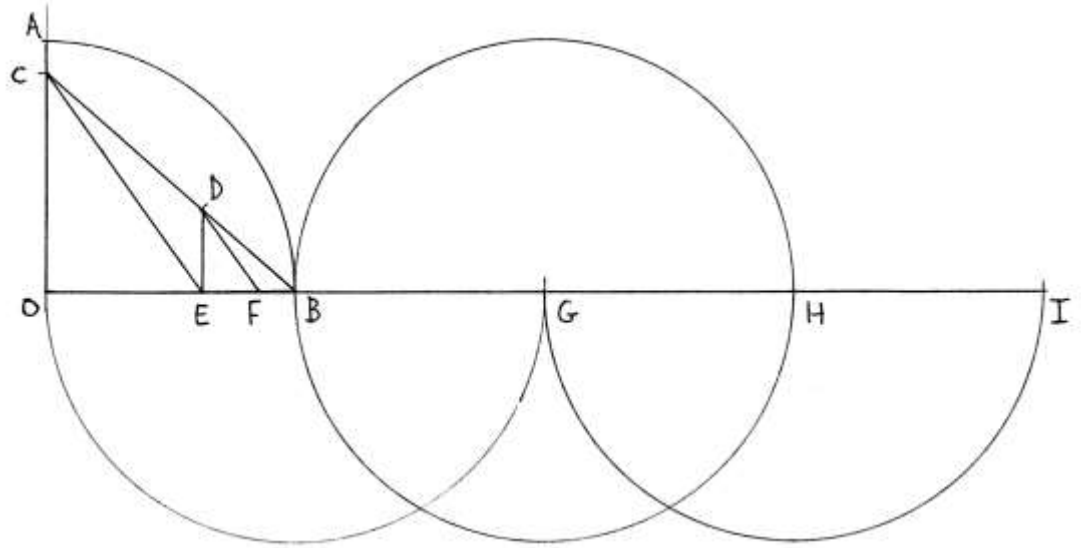
Il quadrato LHBM ha un perimetro di lunghezza (4*1,1118 lato), poco più grande dell'intera circonferenza con centro in O e raggio AO (4*1,1107 lato).

Rettificazione della circonferenza – metodo degli astronomi Cinesi

L'astronomo cinese Tsu Ch'ung-Chih stabilì nel V secolo un valore approssimato di π uguale a:

$$355/113 \approx 3{,}1415929\ldots$$

La costruzione che segue descrive il metodo grafico impiegato dall'astronomo cinese:



Tracciare una semiretta orizzontale a partire dal punto O. Elevare una perpendicolare ad essa sempre nel punto O.

Fare centro nel punto O con raggio OA, uguale a quello della circonferenza da rettificare e disegnare un quarto di circonferenza da A a B.

Determinare la lunghezza di

$OA/8$ e riportarla da A in C.

Collegare i punti C e B: Su questo segmento fissare il punto D a distanza

$BD = OB/2$.

Dal punto D abbassare la perpendicolare alla semiretta che viene incontrata nel punto E. Collegare i punti C e E.

Dal punto D condurre un segmento parallelo a CE, fino a intersecare la semiretta nel punto F.

Il segmento FB è lungo $FB = (16/113) * OB$.

Fare centro in B e, con raggio BO, tracciare una semicirconferenza che fissa il punto G. Sempre con lo stesso raggio, fare centro in questo ultimo punto e disegnare una circonferenza intera che taglia la semiretta in un nuovo punto, H.

Infine, fare centro in H e tracciare una semicirconferenza da G fino a I.

Il segmento BI è lungo BI = 3*OA e quello FI è lungo:

$$FI = FD + BI = (16/113) * OB\ 3 * OB = OB * (16 + 3 * 113)/113 = OB * 355/113\ .$$

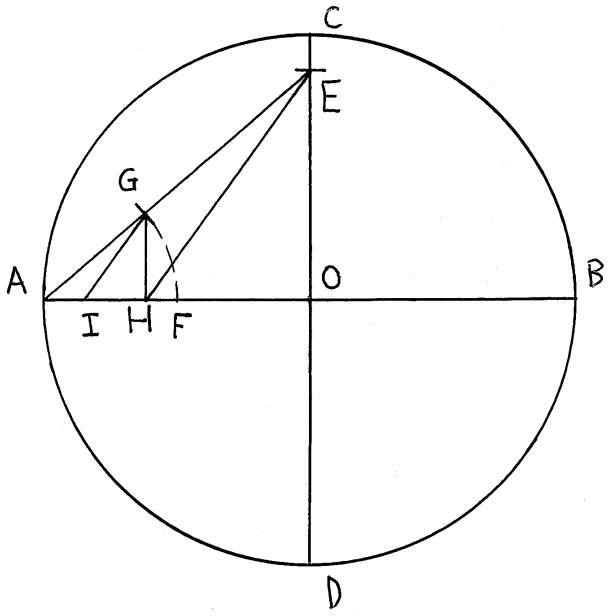
Il segmento FB è la lunghezza *approssimata* della circonferenza di raggio OB = OA.

La costruzione è stata riproposta dal matematico olandese Jakob De Gelder (1765 – 1848): si veda il successivo paragrafo.

Il metodo di De Gelder

Jakob De Gelder riscoprì il rapporto 355/113.

Disegnare una circonferenza con centro in O: AB e CD sono due diametri fra loro perpendicolari.



Sul raggio OC fissare il punto E a distanza OE = 7/8 * OC.

Tracciare il segmento AE.

Determinare il punto medio del raggio OA: è F.

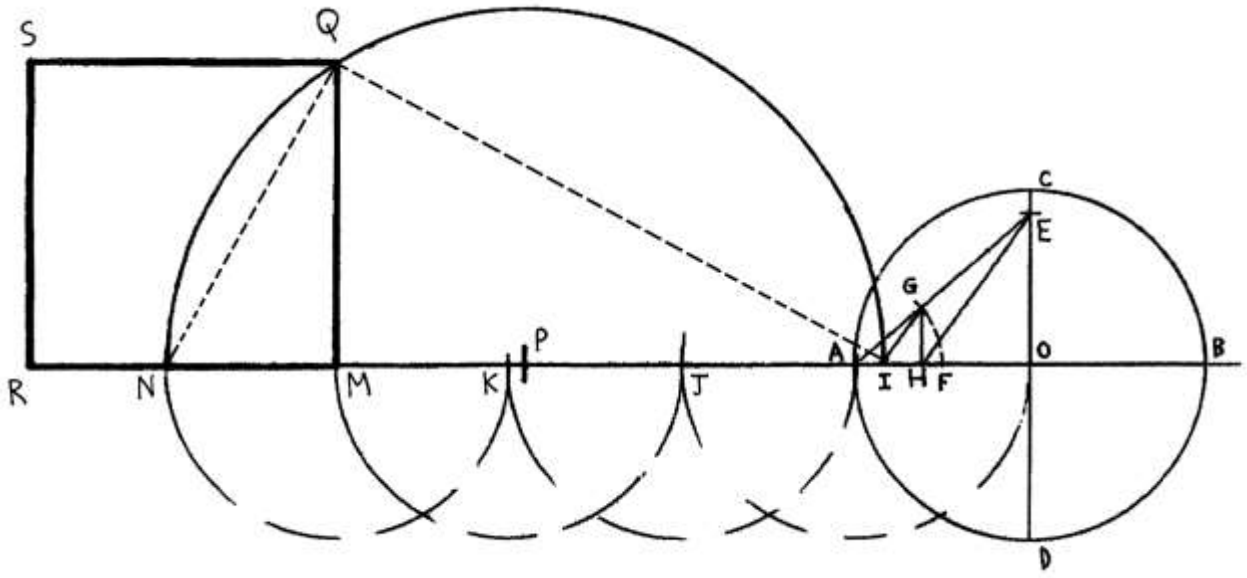
Fare centro in A e con raggio AF disegnare un arco da F fino a tagliare il segmento AE in un punto, G.

Da G abbassare la perpendicolare GH al diametro AB.

Collegare i punti E e H.

Dal punto G tracciare un segmento parallelo a EH: è GI.

Prolungare verso sinistra il diametro AB e riportare e a partire da A riportare per *quattro* volte la lunghezza del raggio OA. Sono definiti i punti J, K, M e N.



Determinare il punto medio di NI: è P.

Fare centro in P e con raggio PN = PI disegnare una semicirconferenza. Dal punto M elevare la perpendicolare a NB fino a intersecare la semicirconferenza in un punto, Q.

NQI è un triangolo rettangolo inscritto nel semicerchio.

Costruire il quadrato MRSQ con lati lunghi MQ: la sua area è *quasi* uguale a quella del cerchio di centro O e raggio OA.

Vediamo alcuni passaggi della dimostrazione.

Il segmento AI è lungo 16/113 del raggio OA: non è presentata alcuna dimostrazione.

Se il raggio OA è lungo *convenzionalmente* 1, NI è lungo:

NI = 4 * OA + 16/113 * OA = (4 + 16/113) .

NM e MI sono le proiezioni dei cateti NQ e QI sull'ipotenusa NI. Per il 2° teorema di Euclide sui triangoli rettangoli, vale la proporzione NM : QM = QM : MI da cui

QM = √(NM * MI) .

Ma MI = MA + AI = 3 * OA + 16/113 * OA = (3 + 16/113) * OA =

= (3 + 16/113) * 1 = (339 + 16)/113 = 355/113 ≅ 3,14159 ≅ π .

Sostituendo questo valore nella formula di QM si ha:

QM = √(1 * 355/113) ≅ √(1 * 3,14159) ≅ √π .

L'area del quadrato MRSQ è:

$\text{Area}_{MRSQ} = (\sqrt{\pi})^2 = \pi$.

L'area del cerchio è: $\pi * r^2 = \pi + 1^2 = \pi$.

- APPROFONDIMENTO -

Costruzione della frazione 355/113

La frazione 355/113 usata dagli astronomi Cinesi per approssimare il valore di π è facilmente costruibile per via geometrica.

Tracciare una retta orizzontale, r.

Fissare un punto, A: da questo punto disegnare una semiretta inclinata.

A partire da A determinare la posizione del punto B, a distanza *convenzionale* uguale a 1.

Sulla semiretta misurare in successione due segmenti, nella stessa scala usata per AB:

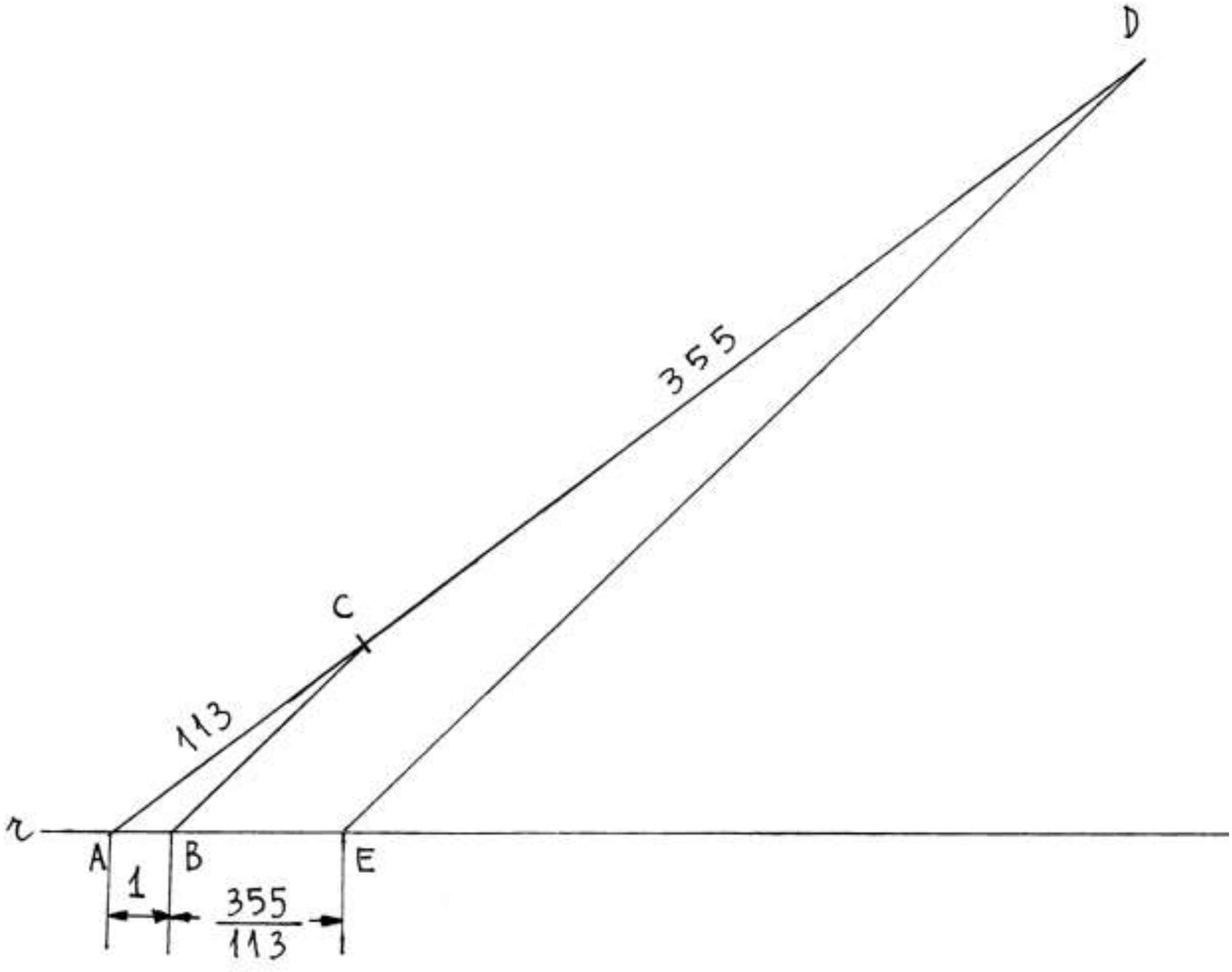
* AC = 113 ;

*	CD = 355.

Collegare i punti C e B.

A partire dal punto D tracciare una linea parallela a CB, fino a incontrare la retta orizzontale in un punto, E.

Il segmento BE corrisponde alla lunghezza della frazione 355/113.



- -

Valori approssimati di π

Nel corso dei secoli sono stati usati vari valori approssimati di π:

- il rapporto 22/7 = 3,142857143;
- $\sqrt{10} \approx 3{,}162277\ldots$;
- $\sqrt[3]{31} = 3{,}1413\ldots$

Il valore più corretto per questo numero *trascendente* è: 3,141592654… Questa costante è trascendente perché non è la soluzione di alcuna equazione algebrica che contenga coefficienti razionali.

Rettificazione della circonferenza – metodo di Bachot

Ambroise Bachot (morto dopo il 1600), ingegnere militare francese, pubblicò nel 1598 "*Le Gouvernail*", un trattato dedicato alle fortificazioni e alle macchine da guerra.

Fra gli argomenti geometrici che affrontò vi è la rettificazione della circonferenza, come mostra la figura che segue.

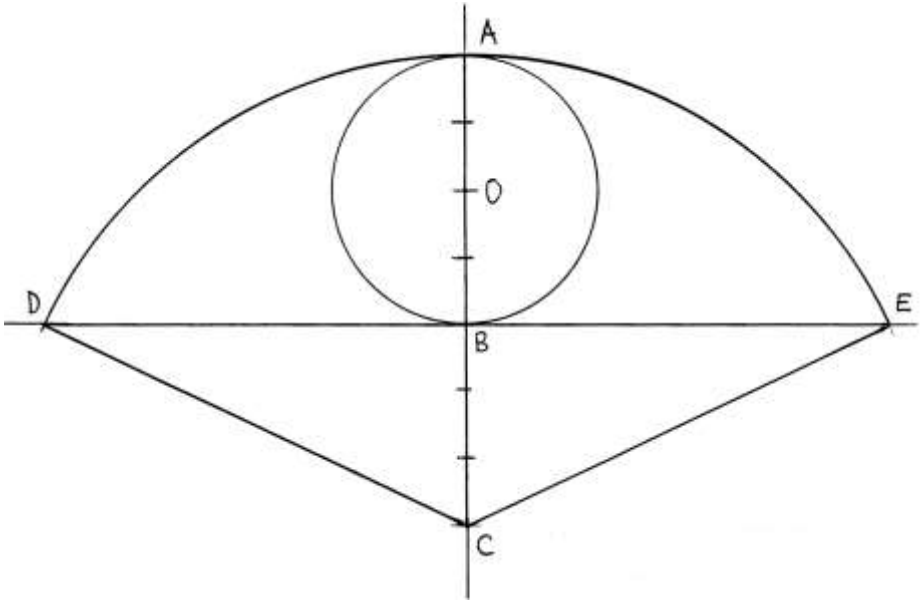
Tracciare una retta verticale e fissare il punto A. Da questo ultimo misurare in successione verso il basso AB = 4 e BC = 3.

Il punto O è il medio di AB.

Fare centro nel punto O e con raggio OA = OB disegnare una circonferenza.

Per il punto B condurre una retta perpendicolare a quella passante per A, O, B e C e tangente alla circonferenza nel punto B.

Fare centro nel punto C e con raggio CA tracciare un arco che taglia la retta orizzontale nei punti D e E.



CD, CA e CE sono tre raggi dello stesso arco di circonferenza.

Il segmento DB è il cateto maggiore del triangolo rettangolo DBC ed è lungo:

$DB = \sqrt{(DC^2 - BC^2)} = \sqrt{(7^2 - 3^2)} = \sqrt{(49 - 9)} = \sqrt{40} = 2 * \sqrt{10}$.

La corda DE è lunga

$$DE = DB + BE = 2 * DB = 4 * \sqrt{10} .$$

Bachot sostenne l'uguaglianza della lunghezza della circonferenza di centro O e raggio 2 e di quella della corda DE.

La circonferenza è lunga: circonferenza = $2 * \pi * r = 2 * \pi * 2 = 4 * \pi$.

Egli attribuì a π il valore $\sqrt{10} \approx 3{,}162277$ che è arrotondato per eccesso rispetto al valore accettato di 3,1416.

Rettificazione della circonferenza – metodi di Hobbes

Thomas Hobbes (1588 – 1679) è stato un filosofo inglese: si occupò anche di *geometria*.

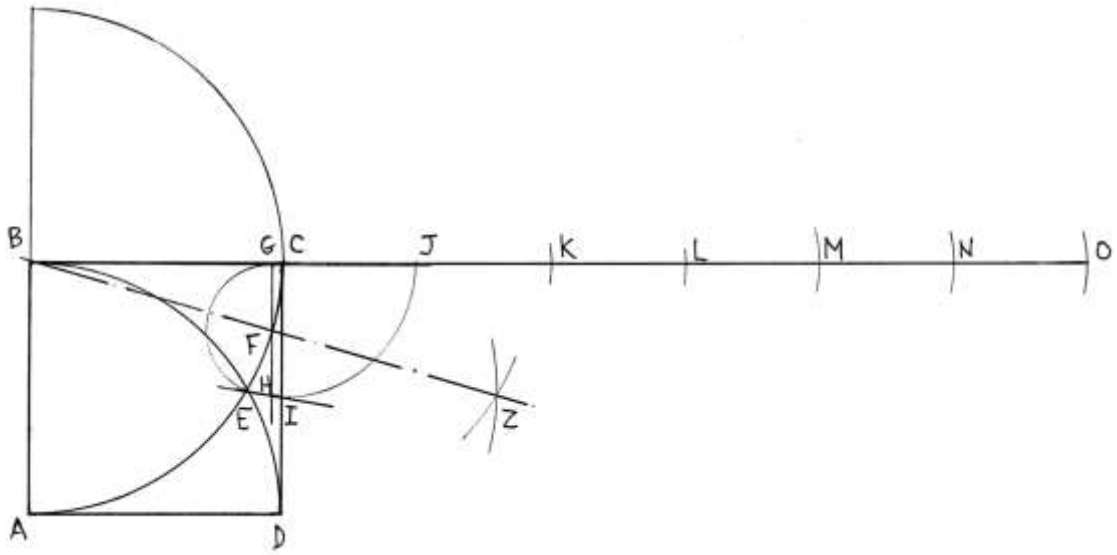
Hobbes studiò almeno una *dozzina* di metodi per la rettificazione della circonferenza o per la quadratura del cerchio. Alcuni risultarono solo fantasiosi.

Qui sono presentati due metodi per la rettificazione.

Costruire il quadrato ABCD con lato AB lungo quanto il raggio della circonferenza da rettificare.

Prolungare verso destra il lato BC e verso l'alto il lato AB.

Fare centro nei punti A e B e, con raggio AB, disegnare rispettivamente un quarto e metà circonferenza:



I due archi si intersecano in un punto, E, all'interno del quadrato.

Fare centro nei punti C e E e tracciare due archi che si incrociano nel punto Z: l'asse BZ è la bisettrice dell'angolo CBE: essa taglia l'arco CE in un punto, F.

Per il punto G disegnare una linea parallela al lato CD: essa incontra il lato BC in un punto, G.

Fare centro nel punto F e, con raggio FG, tracciare una semicirconferenza da G fino a intersecare la linea passante per G e per F in un punto, H.

Disegnare un segmento passante per E e per H fino a tagliare il lato CD in un nuovo punto, I: il segmento CI è lungo, *approssimativamente*, 1/6 della circonferenza di raggio AB.

Dal punto C riportare *sei* volte la lunghezza di CI.

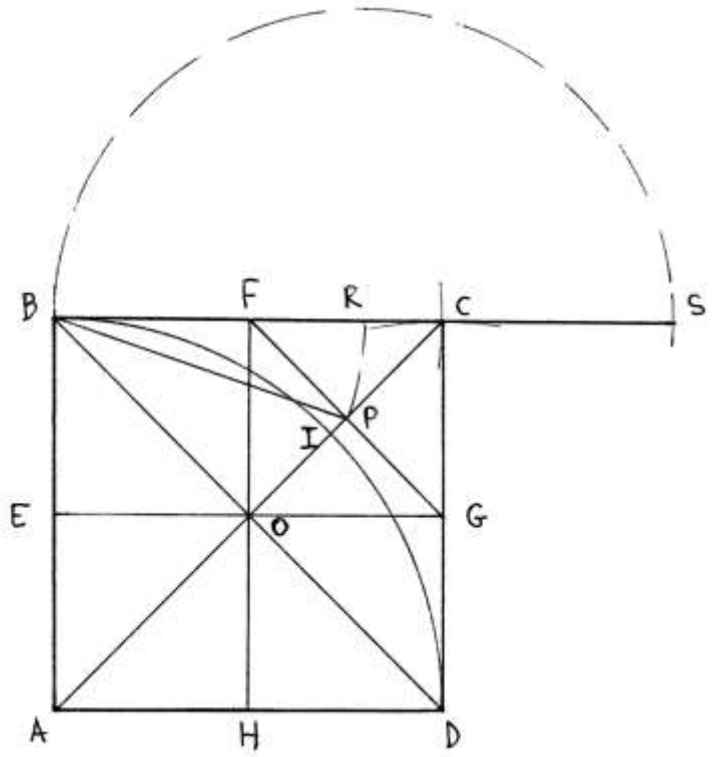
Il segmento CO è, con buona approssimazione, lungo quanto la circonferenza di raggio AB.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Tracciare il quadrato ABCD con lato lungo quanto il raggio della circonferenza da rettificare.

Determinare i punti medi dei lati (E, F, G e H).

Facendo centro in A, disegnare un arco di raggio AD: esso è lungo ¼ della circonferenza cercata.



Tracciare le diagonali AC e BD, le mediane EG e FH e la corda FG: sono determinati i punti O e P.

Il punto P divide in due parti uguali OC e FG. Collegare i punti B e P.

La diagonale AC taglia il quarto di circonferenza nel punto I: quest'ultimo divide l'arco BD in due archi di uguale lunghezza:

$$\overset{\frown}{BI} = \overset{\frown}{ID} = \frac{1}{2} * \overset{\frown}{BD}$$

Dato che l'arco BD è

$$\overset{\frown}{BD} = \frac{1}{4} * \text{circonferenza}$$

l'arco BI è lungo:

$$\overset{\frown}{BI} = \frac{1}{8} * \text{circonferenza}$$

Gli angoli sottesi dai tre archi sono

$$\widehat{BAD} = 90°$$
$$\widehat{BAI} = \widehat{IAD} = \frac{1}{2}\widehat{BAD} = 45°$$

Il segmento BP è, con buona *approssimazione*, lungo quanto l'arco BI.

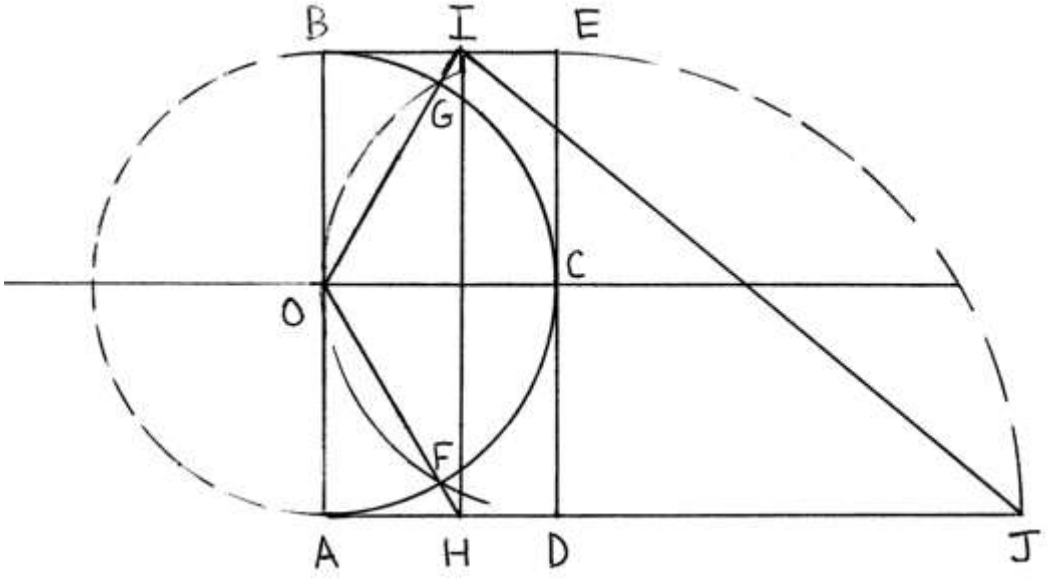
Prolungare il lato BC verso destra.

Fare centro nel punto B e, con raggio BP, tracciare un arco da P fino al lato BC: è fissato il punto R. Con la stessa apertura fare centro in R e disegnare un arco da B fino a stabilire il punto S. Con un'accettabile approssimazione vale la seguente relazione:

$$\overline{BS} \cong \overset{\frown}{BD}$$

Rettificazione della circonferenza – metodo di Kochański

La costruzione che segue è dovuta al gesuita polacco Adam Adamandy Kochański (o Kochansky, 1631 - 1700) che la pubblicò nel 1685.



Disegnare una circonferenza con centro in O e il diametro verticale AB. Condurre le tangenti alla circonferenza nei punti A e B e tracciare il diametro orizzontale che fissa il punto C.

Per il punto C, disegnare la tangente alla circonferenza (parallela al diametro verticale AB) che interseca le rette passanti per A e per B in due punti, D e E.

Fare centro nel punto C e con raggio CO tracciare un arco che passa per il centro O e incontra la circonferenza in F e G.

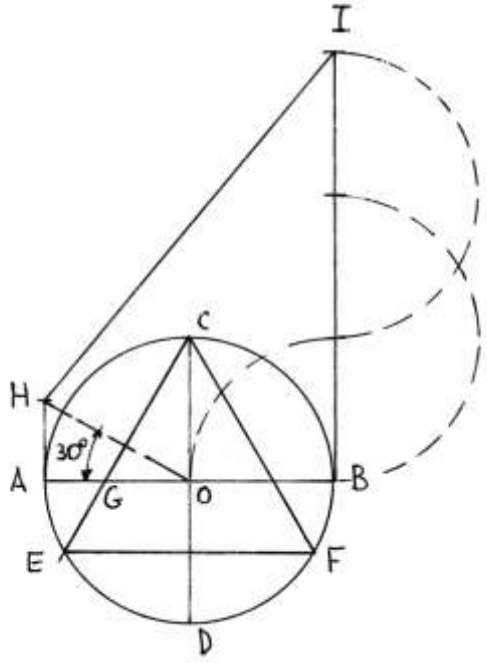
Disegnare i raggi passanti per i due ultimi punti e prolungarli fino a tagliare le tangenti orizzontali nei punti H e I. Tracciare il segmento HI.

Fare centro nel punto D e, con raggio DE, disegnare un arco di circonferenza da E fino a intersecare la tangente passante per A in un nuovo punto, J.

Collegare I e J: il segmento IJ è la lunghezza *approssimata* della semicirconferenza BCA.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Le due costruzioni che seguono sono varianti di quella originale di Kochański.



Disegnare una circonferenza di centro O e i suoi due diametri perpendicolari AB e CD.

Costruire il triangolo equilatero ECF inscritto nella circonferenza: sul diametro AB è intersecato il punto G:

Dai punti A e B elevare le tangenti alla circonferenza nei due punti,

Misurare con il compasso la lunghezza di EG e riportarla dal punto A fino a determinare il punto H: EG è lungo $1/3$ del lato EC del triangolo equilatero e, di conseguenza, l'angolo HOA è ampio 30°: $AH = EG = 1/3 * EC$.

Sulla tangente passante per il punto B, riportare da B verso l'alto *tre* volte la lunghezza del raggio OB fino a stabilire il punto I:

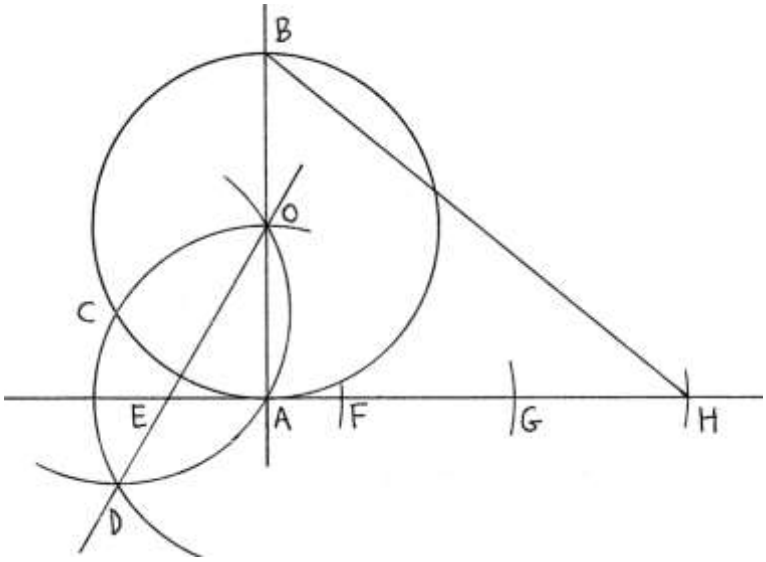
$$BI = 3 * OB .$$

Il segmento HI è la lunghezza *approssimata* della semicirconferenza di raggio OA e cioè vale la relazione:

$$BI : OB \approx \pi : 1.$$

%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Una leggera variante della precedente costruzione di Kochański è descritta nella figura che segue:



Disegnare una circonferenza con centro in O e il diametro verticale AB. Condurre la retta tangente nel punto A.

Con la stessa apertura di compasso, fare centro in A e tracciare un arco, a partire da O, che taglia la circonferenza in C.

Fare centro in questo ultimo punto e disegnare un arco da O, passando per A, fino a intersecare il precedente arco nel punto D.

La retta passante per D e O incontra la retta orizzontale in un punto, E.

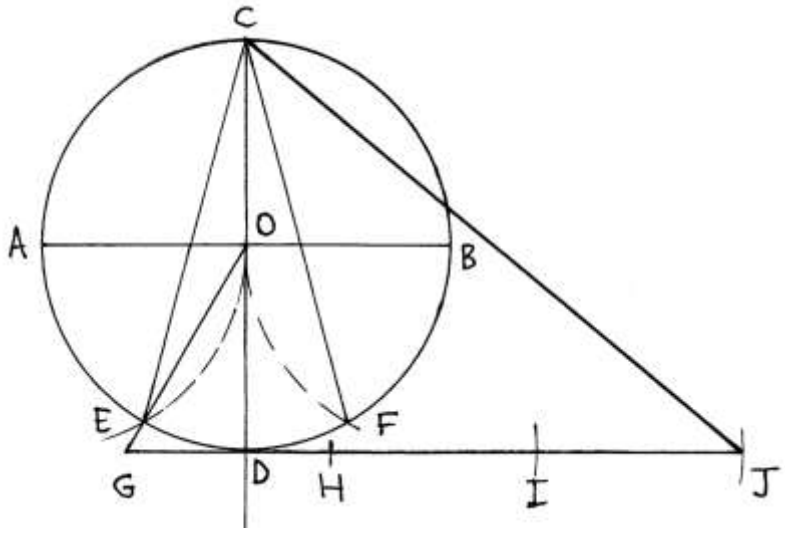
Dal punto E riportare *tre* volte il raggio OA: sono così fissati in successione i punti F, G e H.

Collegare i punti B e H: il segmento BH è, con buona approssimazione, lungo quanto le semicirconferenze ACB e BA.

Le costruzioni di Caluso

Il matematico Tommaso Valperga Caluso (1737 – 1815) pubblicò un saggio – "*Della impossibilità della quadratura del cerchio*" – (nel tomo IX delle "Memorie di matematica e di fisica della Società Italiana delle Scienze", Modena, 1802) per affrontare l'argomento.

Per la *rettificazione approssimata della circonferenza* Caluso riutilizzò il metodo proposto da Kochański:



AB e CD sono i diametri perpendicolari della circonferenza di centro O.

Tracciare la tangente alla circonferenza passante per il punto D.

Fare centro nei punti A e B con raggio OA e disegnare due archi che intersecano la circonferenza nei punti E e F.

Tracciare le corde CE e CF e il raggio passante per il punto E che, prolungato, fissa il punto G.

Gli angoli EOD e DOF hanno uguale ampiezza, pari a 30°.

Dal punto G riportare *tre* volte la lunghezza del raggio OA. Il segmento GJ è lungo

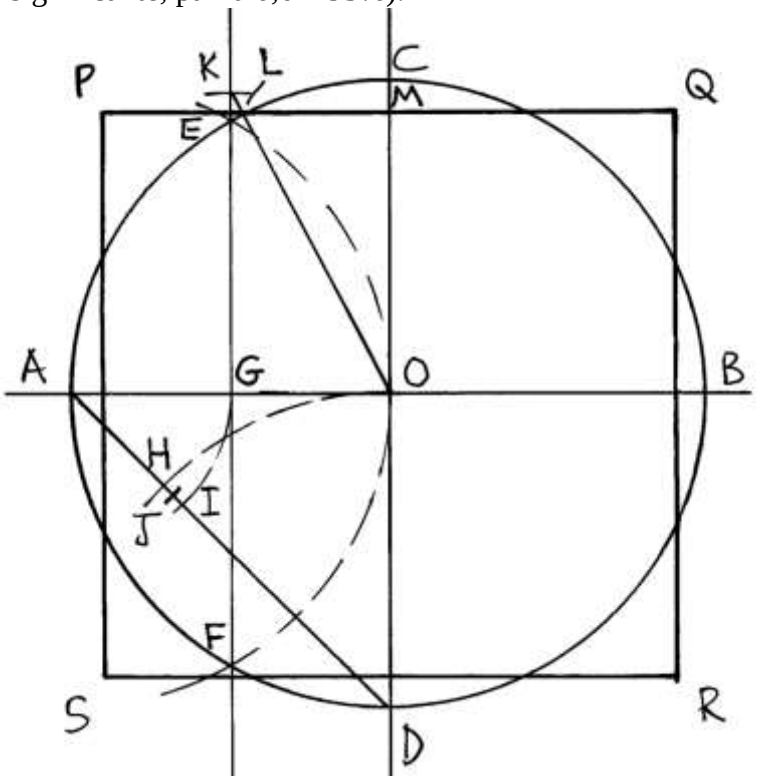
$GJ = 3 * OA$

Collegare i punti C e J. Il segmento CJ è lungo:

$CJ \approx \pi * OA$ è cioè, con accettabile approssimazione, lungo quanto la semicirconferenza ADB.

%%%%%%%%%%%%%%%%

Caluso propose una costruzione per trasformare un cerchio in un quadrato equivalente, con una notevole approssimazione (l'errore lineare riferito alla differenza fra circonferenza e perimetro del quadrato è insignificante, pari a 0,01293%).



AB e CD sono due diametri fra loro perpendicolari del cerchio di centro O.

Tracciare la corda AD. Fare centro nel punto A e con raggio AO disegnare un arco che taglia la circonferenza nei punti E e F. La corda EF interseca AB nel punto G.

Fare centro nel punto D e con raggio DO tracciare un arco da O fino a tagliare AD nel punto H.

Con centro in A e raggio AG disegnare un arco da G fino a incrociare AD nel punto I: Determinare il punto medio di HI: è J.

Con il compasso misurare la lunghezza di DJ e con centro in G riportarla fino a fissare il punto K.

Collegare i punti K e O: il segmento KO incontra la circonferenza nel punto L.

Per il punto L condurre la parallela a AB: essa taglia il diametro CD nel punto M.

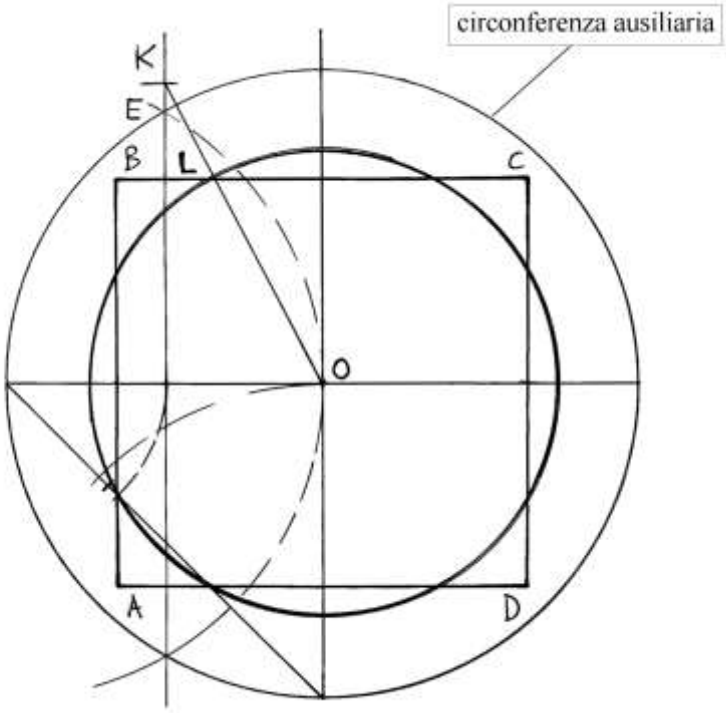
Il segmento OM è la lunghezza della *metà* del lato del quadrato cercato.

PQRS è il quadrato che ha superficie *quasi* uguale a quella del cerchio di raggio OA.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Caluso propose pure una *costruzione inversa* della precedente, allo scopo di ricavare un cerchio di superficie con buona approssimazione uguale a quella di un quadrato dato.

ABCD è il quadrato e O è il suo centro per il quale passano le due mediane fra loro perpendicolari.



Con apertura di compasso a piacere disegnare una *circonferenza ausiliaria* con centro in O e ripetere la costruzione appena vista per la quadratura: da essa sono qui indicati i soli punti E, K e L.

Il punto Lè nell'intersezione fra KO e il lato BC.

Il segmento OL è il raggio della circonferenza del cerchio cercato che ha area quasi uguale a quella del quadrato ABCD.

Le costruzioni di Cremona

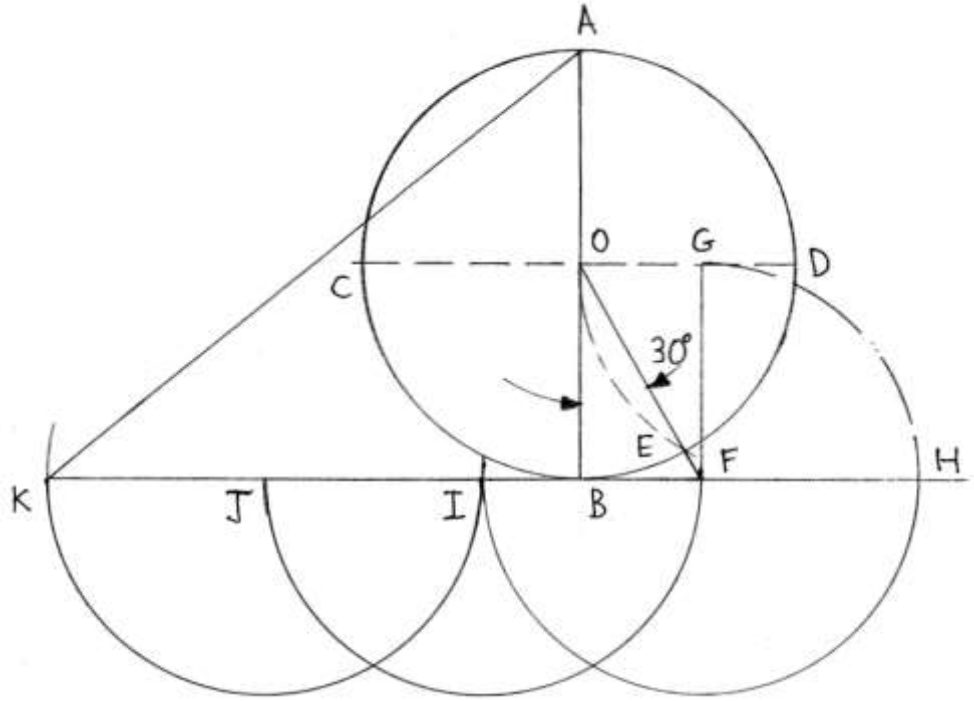
Il matematico italiano Luigi Cremona (1830 – 1903) utilizzò il metodo di Kochański modificandolo leggermente come spiega la figura che segue.

Disegnare una circonferenza di centro O e i suoi due diametri perpendicolari AB e CD.

Per il punto B tracciare la tangente alla circonferenza: essa è perpendicolare al diametro AB.

Con la stessa apertura di compasso (OA), fare centro in D e disegnare un arco da O fino a incontrare la circonferenza nel punto E e la retta tangente nel punto F.

L'angolo BOE è ampio 30°.



Dal punto F condurre la perpendicolare al diametro CD che interseca nel punto G.

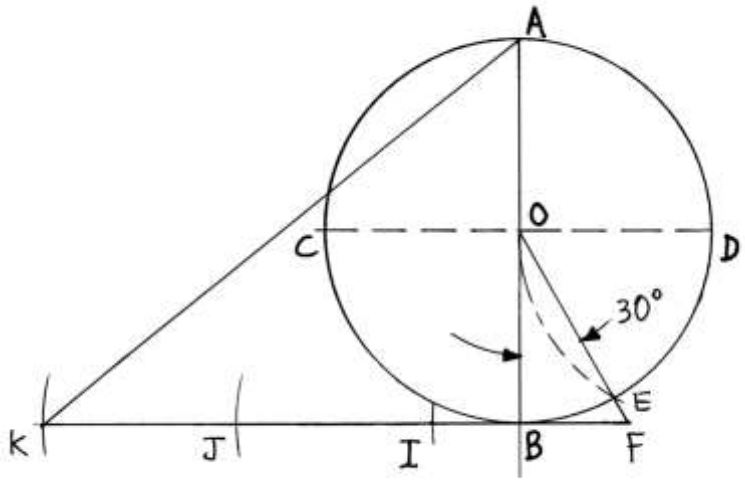
Fare centro nel punto F e, con raggio FG (uguale a OB e a OA), tracciare un arco da G fino a stabilire i punti H e I sulla retta tangente.

Con la stessa apertura fare centro in I e poi in J fino a fissare il punto K.

Il segmento KA è con buona approssimazione lungo quanto la semicirconferenza di raggio OA:

$$KA \approx \pi * OA$$

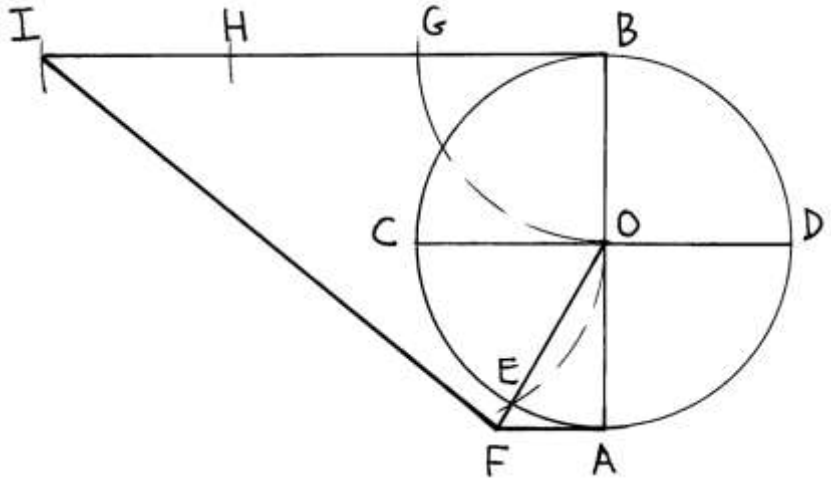
La figura che segue presenta la costruzione di Cremona senza i passaggi intermedi:



Le costruzioni di Nehls

Il matematico tedesco Christian Nehls (1841 – 1897) pubblicò nel 1882 un saggio contenente, fra l'altro, due varianti del metodo di Kochański.

La prima è descritta nella figura che segue:



AB e CD sono i diametri della circonferenza di centro O.

Tracciare le tangenti nei punti A e B: esse sono perpendicolari a AB e fra loro parallele.

Fare centro in C e con raggio CO disegnare un arco da O fino a fissare il punto E. Il raggio passante per O e per E, prolungato, taglia la tangente inferiore nel punto F.

Dal punto B riportare in successione sulla tangente superiore *tre* volte la lunghezza del raggio OB. Sono stabiliti i punti G, H e I.

$$BG = GH = HI = OB = OA \quad \text{e} \quad BI = 3 * OA$$

Il segmento FI è lungo *quasi* quanto la semicirconferenza: $FI \approx \pi * OA$.

%%%%%%%%%%%%%%%%%

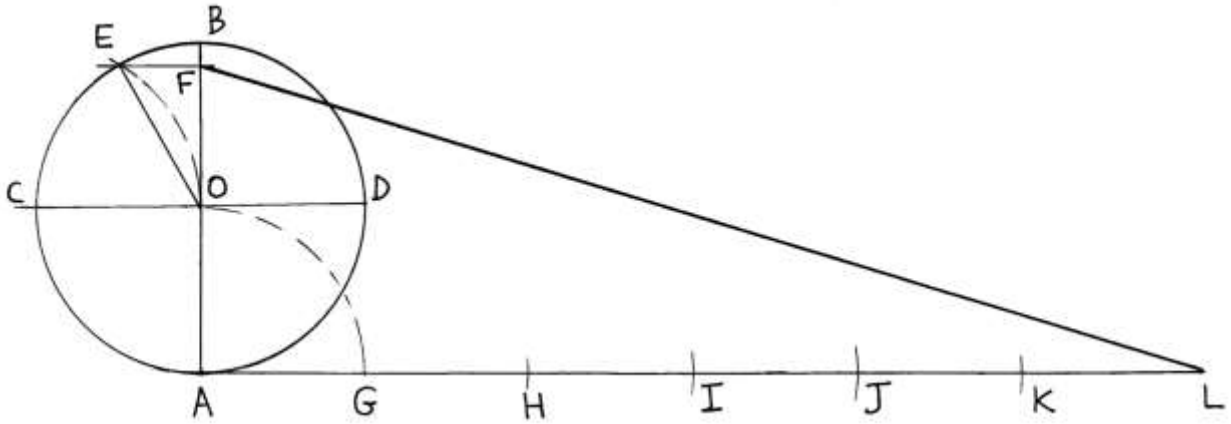
Una seconda variante proposta da Nehls è spiegata nella figura che segue.

AB e CD sono due diametri perpendicolari della circonferenza di centro O.

Tracciare la tangente nel punto A.

Fare centro nel punto C e con raggio CO disegnare un arco che incontra la circonferenza nel punto E: l'angolo EOB è ampio 30°.

Dal punto E condurre la perpendicolare a AB: è stabilito il punto F



Fare centro in A e, con raggio AO, tracciare un arco da O fino a intersecare la tangente nel punto G.

A partire dal punto G, riportare *cinque* volte la lunghezza di AG fino a terminare il punto L:

$$AL = 6 * AG = 6 * OA .$$

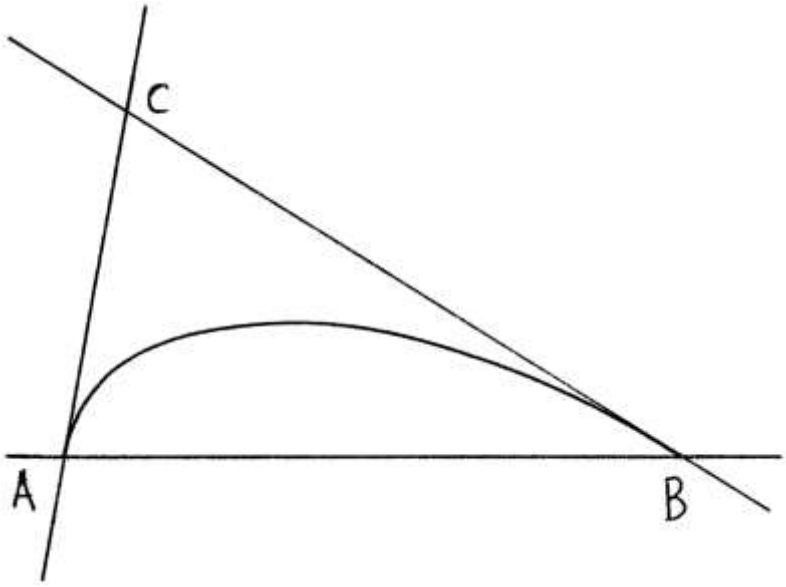
Collegare i punti F e L; il segmento FL è lungo

$FL \approx 2 * \pi * OA$ e cioè è una buona approssimazione della lunghezza dell'intera circonferenza.

Rettificazione di Lambert

Lo svizzero tedesco Johann Heinrich Lambert (1728 – 1777) studiò numerosi argomenti di geometria, matematica e prospettiva.

Egli propose un metodo per la rettificazione *approssimata* di una curva.

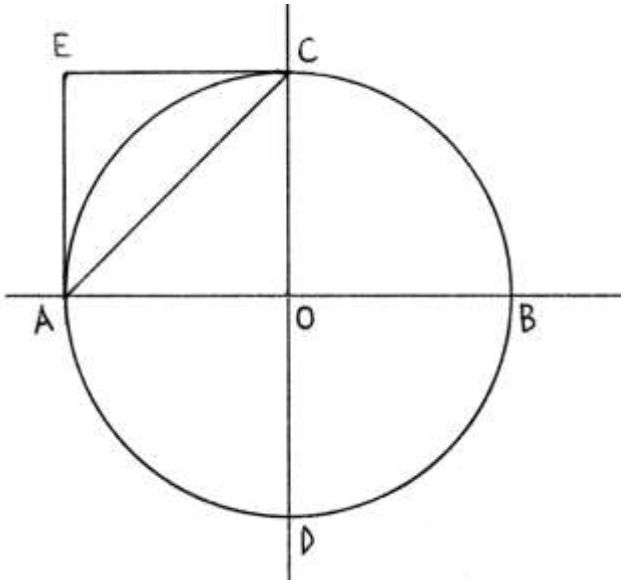


AB è una generica curva: non è un arco di circonferenza. AB è una *corda* Per i punti A e B condurre le tangenti che si incontrano in un punto, C.

Lambert stabilì una formula per determinare la lunghezza approssimata dell'arco AB, semplicemente misurando i lati del triangolo ACB:

$$\overset{\frown}{AB} \cong \frac{2}{3} AB + \frac{1}{3}\left(\overline{AC} + \overline{BC}\right)$$

La figura che segue descrive l'applicazione della formula di Lambert al caso di una curva, AC, formata da un *quarto di circonferenza* e quindi una curva regolare:



Il poligono AECO è un quadrato con lato lungo quanto il raggio OA e AC è la sua diagonale. I segmenti AE e CE sono tangenti alla circonferenza rispettivamente nei punti A e C. L'arco AC è racchiuso all'interno del triangolo rettangolo isoscele AEC. La lunghezza dell'arco AC è:

$AC \approx 2/3 * AC + 1/3 * (AE + EC)$

$AC = r * \sqrt{2}$

$AE = EC = r$

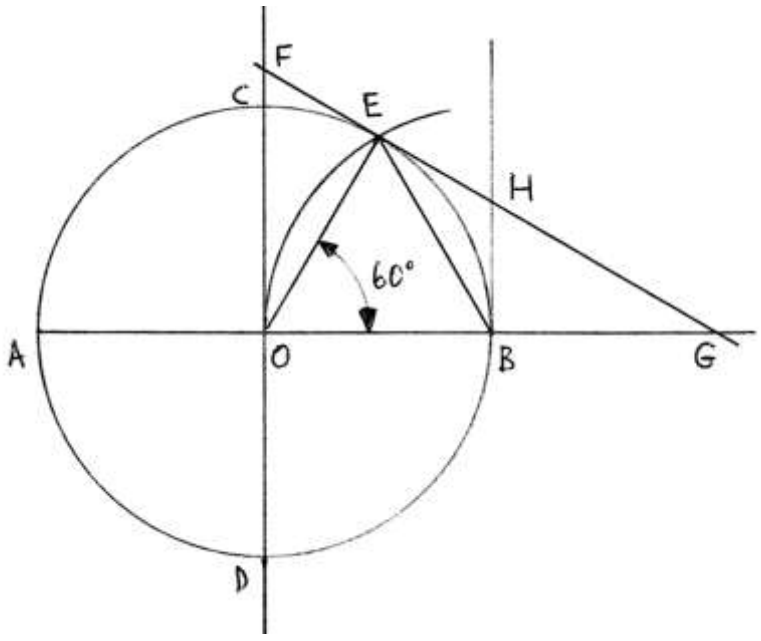
$AC \approx 2/3 * r * \sqrt{2} + 1/3 * (r + r) \approx (2 * \sqrt{2} + 2)/3 * r \approx 1{,}609475 * r$.

È ora possibile calcolare la lunghezza dell'intera circonferenza moltiplicando per quattro l'ultimo risultato:

$\text{circonferenza} = 2 * \pi * r \approx 4 * AC \approx 6{,}4379 * r \rightarrow 6{,}28 * r$.

Applicando la formula di Lambert si ottiene una lunghezza della circonferenza approssimata per *eccesso*

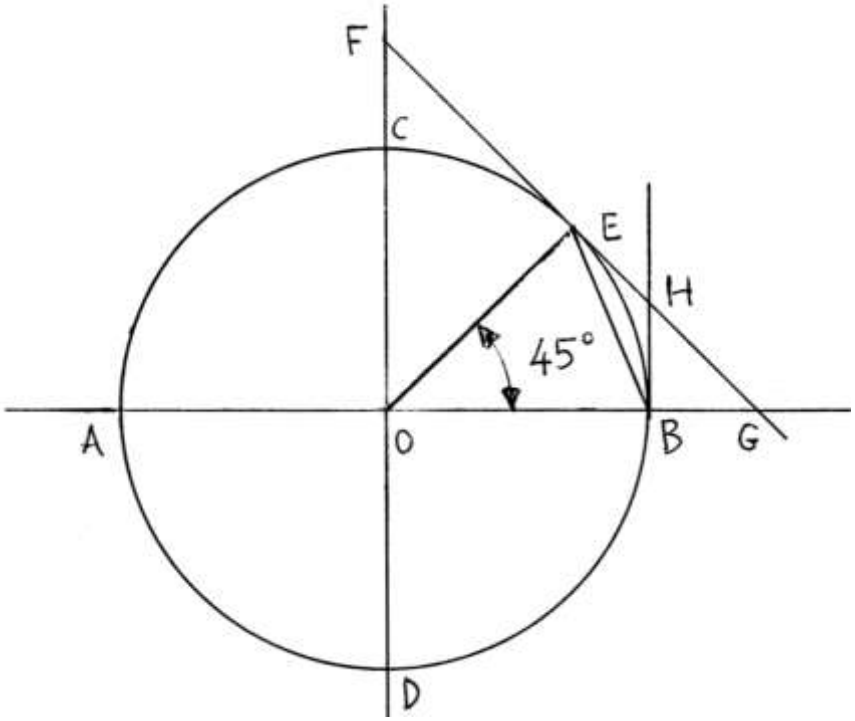
$\text{errore} \approx (6{,}4379 - 6{,}28)/6{,}28 \approx 0{,}0251 \approx 2{,}51\%$.



Nel caso dell'arco che sottende un angolo di 60° l'applicazione della regola di Lambert fornisce un risultato approssimato *per eccesso*: la circonferenza risulta lunga $6{,}3094 * r$ invece di $6{,}28 * r$ con un errore pari a

$$\text{errore} \approx (6{,}3094 - 6{,}28)/6{,}28 \approx 0{,}0294 \approx 2{,}94\% \ .$$

Nel caso dell'arco di circonferenza che sottende un angolo di 45°, si manifesta un fenomeno di tipo opposto e cioè un'approssimazione *per difetto*:



La circonferenza risulta lunga 6,1333*r invece di 6,28*r con un errore

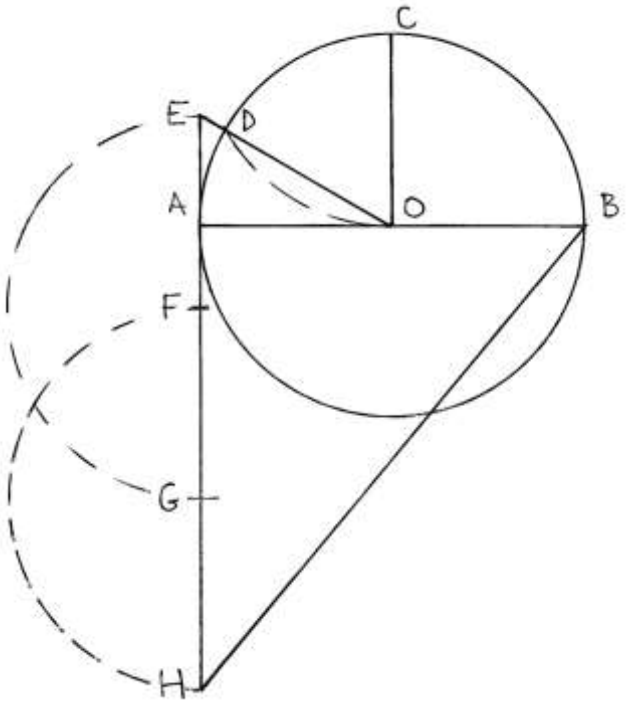
$$\text{errore} \approx (6{,}1333 - 6{,}28)/6{,}28 \approx -0{,}0233 \approx -2{,}33\% \ .$$

Si può supporre che la formula di Lambert fornisca risultati quasi esatti per archi di circonferenza che sottendono angoli di differente ampiezza, compresi fra 45° e 60°.

Rettificazione della circonferenza – metodo di Terquem

La costruzione che segue si deve al matematico francese Olry Terquem (1782 – 1862) ed è una variante di quella di Kochański.

Disegnare la circonferenza di centro O e il diametro orizzontale AB. Dal punto O tracciare il raggio OC perpendicolare a AB.



Per il punto A condurre la tangente alla circonferenza.

Fare centro in C e, con raggio CO, disegnare un arco che taglia la circonferenza nel punto D: per questo punto tracciare il raggio OD e prolungarlo fino a incontrare la tangente nel punto E.

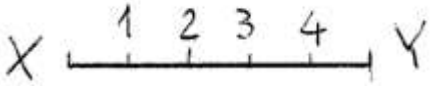
Sulla stessa tangente, riportare con il compasso la lunghezza del raggio OA per *tre* volte, verso il basso, a partire da E: il segmento EH è lungo 3*OA.

Collegare i punti B e H: il segmento BH è lungo *approssimativamente* quanto metà della circonferenza di centro O.

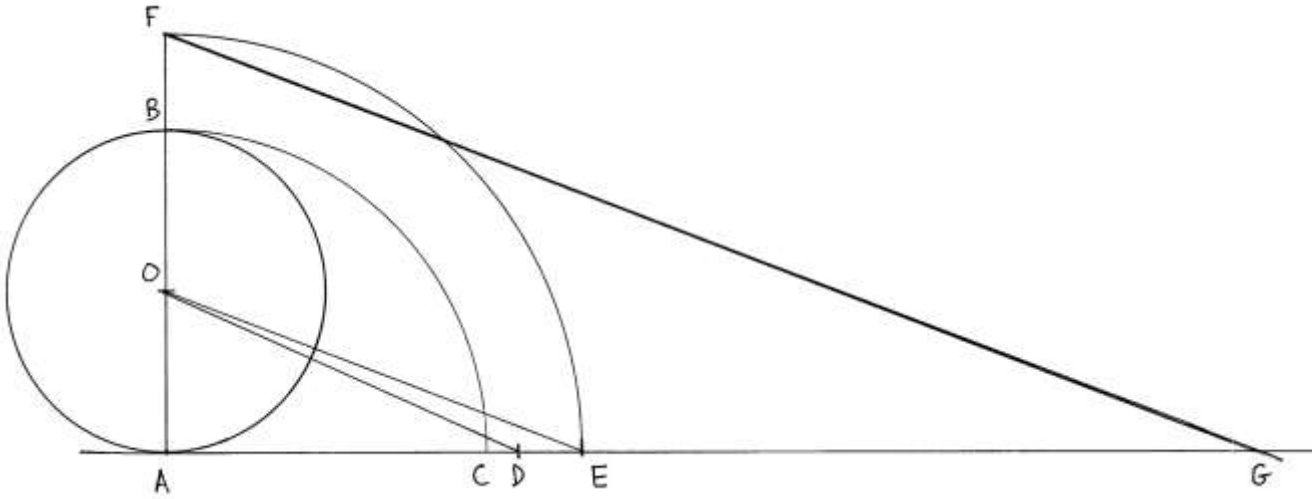
La costruzione di Specht

Con questa costruzione del matematico tedesco C. Specht (pubblicata nel 1828) si ottiene una rettificazione della circonferenza quasi esatta: l'errore è appena superiore a 0,000 000 7 volte la lunghezza del diametro e cioè il segmento equivalente alla lunghezza della circonferenza è approssimato per difetto a 3,14 volte quel valore.

Disegnare un segmento XY di lunghezza uguale al raggio della circonferenza da rettificare e dividerlo in 5 parti uguali. Contrassegnare i punti intermedi con i numeri 1, 2, 3 e 4:



Disegnare una circonferenza con centro in O e raggio XY. Tracciare il diametro verticale e prolungarlo verso l'alto; segnare i punti A e B:



Disegnare la tangente nel punto A: essa risulta perpendicolare al diametro AB.

Con centro in A e raggio AB, tracciare un arco da B fino a tagliare in C la tangente.

A partire da C riportare la lunghezza X-1: si ottiene il punto D.

Da D riportare la lunghezza del segmento X-2: viene fissato il punto E.

Tracciare i segmenti OD e OE.

Con il compasso misurare OD e con questa apertura, fare centro in A per determinare il punto F.

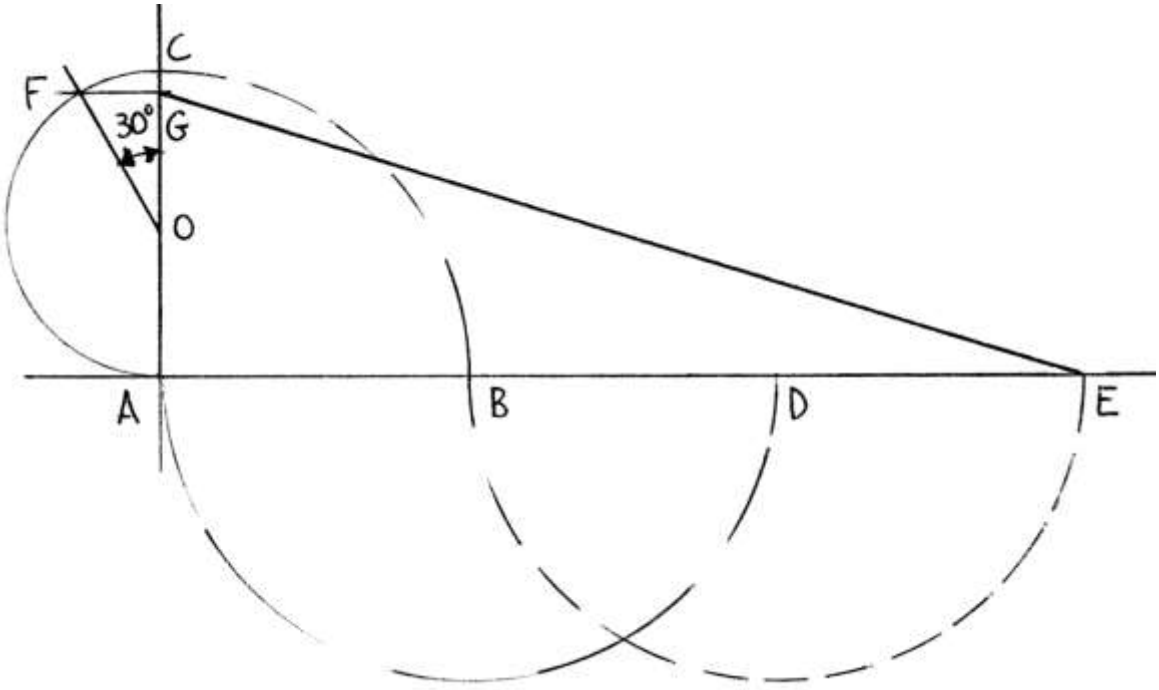
Dal punto F disegnare una parallela al segmento OE fino a tagliare nel punto G la tangente.

Il segmento AG equivale alla lunghezza della circonferenza di centro O e raggio OA.

Lunghezza approssimata della circonferenza

La costruzione che è descritta di seguito è una variante della precedente.

AB è il diametro di una circonferenza della quale deve essere determinata la lunghezza per via grafica:



Tracciare la perpendicolare al segmento AB, nel punto A. Con centro in A e raggio AB disegnare un arco da B fino a intersecare la perpendicolare in un punto, C.

Prolungare verso destra il segmento AB e, a partire da B, riportare due volte la lunghezza di AB; risultano così:

AB = BD = DE e AE = 3*AB.

Determinare il punto medio di AC: è O. Fare centro in O e, con raggio OA = OC, tracciare una semicirconferenza.

Disegnare un raggio da O fino a tagliare la semicirconferenza in un punto, F, in modo da formare l'angolo FOC ampio 30°.

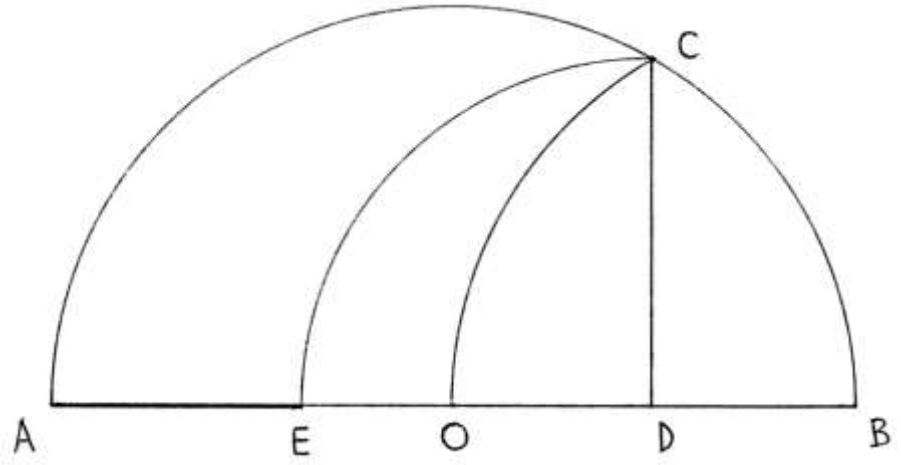
Dal punto F tracciare la perpendicolare al segmento AC: è il segmento FG.

Disegnare il segmento GE: esso è la lunghezza *approssimata* della circonferenza il cui diametro è AB.

Diametro approssimato di una circonferenza

La costruzione che segue è l'inverso della precedente.

AB è la lunghezza di una circonferenza della quale non si conosce il diametro, da determinare per via grafica.



O è il punto medio di AB.

Tracciare una semicirconferenza con centro in O e raggio OA = OB. Con la stessa apertura fare centro nel punto B e disegnare un arco da O fino a incontrare la semicirconferenza in un punto, C.

Dal punto C abbassare la perpendicolare ad AB: viene fissato il punto D.

Fare centro nel punto D e, con raggio DC, tracciare un arco da C fino a tagliare AB in un nuovo punto, E.

Il segmento AE è la lunghezza *approssimata* del diametro della circonferenza lunga AB.

- APPROFONDIMENTO -

Chi era Italo Ghersi

Italo (Antonio Clelio Italo) Ghersi (Genova 1862 - Chiavari 1925), *ingegnere,* è stato un prolifico autore di manuali tecnici per il benemerito editore milanese Ulrico Hoepli.
La voce dedicata a Italo Ghersi su Wikipedia fornisce dettagliate informazioni sulla sua avvenurosa vita e sui suoi guai giudiziari.

Uno dei testi più famosi è la "*Matematica dilettevole e curiosa*", pubblicato per la prima volta nel 1913: la *quinta* edizione è stata ristampata nel 2004, sempre a cura dell'editore Hoepli, e consta di VIII-776 pagine con 660 figure originali.

Il titolo può trarre in inganno: il testo è una vera piccola enciclopedia matematica che affronta moltissimi problemi aritmetici, geometrici (prevalentemente di geometria piana), tracciamento di curve, sistemi articolati, probabilità, giochi. Ghersi descrive numerose costruzioni geometriche *approssimate* di poligoni regolari inscritti.

L'unico difetto che si può imputare al libro è di natura *tipografica*: ha dimensioni di 11,9x16,8 cm e i caratteri usati hanno un *corpo* assai piccolo. Sarebbe auspicabile che l'editore Hoepli lo ristampasse in formato più grande.

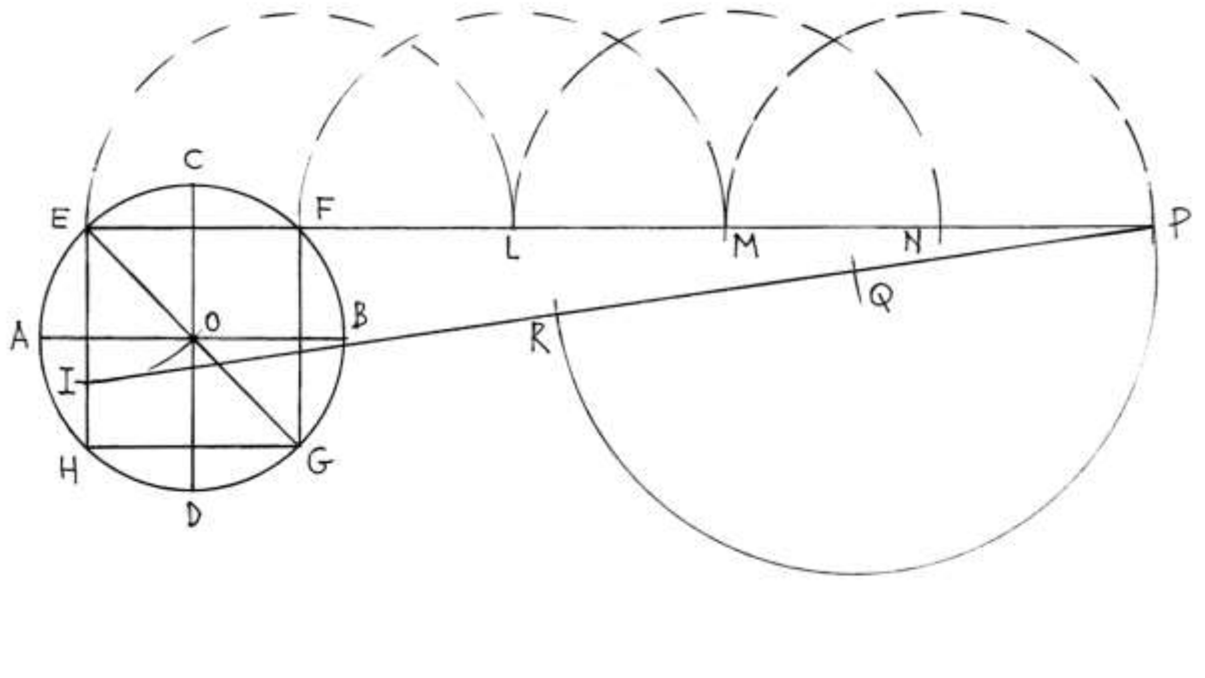
Il fisico Tullio Regge e il matematico Enrico Bombieri in differenti interviste hanno rivelato che la passione per la matematica era stata loro inculcata dalla lettura in giovanissima età della "*Matematica dilettevole e curiosa*" di Italo Ghersi.

Un altro importante volume di Ghersi è citato dall'Ossola nell'elenco dei libri che nell'Ottocento e nel Novecento hanno fatto gli Italiani: si tratta del "*Ricettario industriale*".

- -

Rettificazione della circonferenza – metodi di Italo Ghersi

Disegnare una circonferenza con centro in O e raggio r e i due diametri AB e CD fra loro perpendicolari:



Costruire il quadrato inscritto EFGH: i suoi lati sono paralleli o perpendicolari ai due diametri.

La diagonale del quadrato, ad esempio EG, è lunga $2*r$, perché è anche un diametro del cerchio circoscritto.

Fare centro nel punto E e, con raggio EO (= r) tracciare un arco da O fino a incontrare EH in un punto, I.

In un quadrato con lato lungo l, la diagonale d è lunga

$$d = l * \sqrt{2} . \qquad \text{da cui deriva} \quad l = d/\sqrt{2} = d * (\sqrt{2})/2 .$$

Nel quadrato EFGH, il lato EF è lungo

$$EF = d * (\sqrt{2})/2 = 2 * r * (\sqrt{2})/2 = r * \sqrt{2} .$$

Prolungare verso destra il lato EF e riportarvi per *quattro* volte la lunghezza dello stesso, fino a determinare il punto P.

Collegare i punti I e P.

Con il compasso misurare il diametro AB: riportare questa lunghezza su PI, a partire da P per *due* volte. È così stabilito il punto R.

Il segmento RI è *approssimativamente* lungo la metà della circonferenza di centro O e raggio OA.

EPI è un triangolo rettangolo retto in E. Il segmento EP è lungo

$$EP = 5 * EF = 5 * r * \sqrt{2} .$$

Il cateto EI è lungo r. L'ipotenusa IP è lunga

$$IP^2 = EP^2 + EI^2 = (5 * r * \sqrt{2})^2 + r^2 = 50 * r^2 + r^2 = 51 * r^2 .$$

Ne consegue: $IP = r * \sqrt{51}$.

Il segmento RI è lungo

$$RI = IP - PR = IP - 2 * AB = r * \sqrt{51} - 4 * r = r * (\sqrt{51} - 4)$$

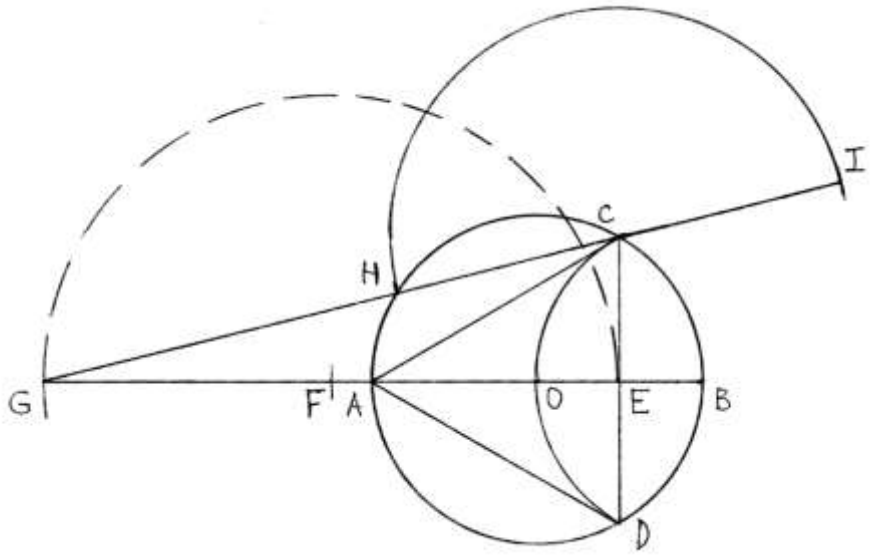
L'espressione racchiusa fra parentesi vale

$(\sqrt{51} - 4) \approx 3{,}1414 \ldots .$ e cioè una buona approssimazione del valore di π.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Disegnare una circonferenza con centro in O e il diametro orizzontale AB da prolungare verso sinistra.

Costruire il triangolo equilatero ACD:



Con il compasso misurare la lunghezza di un lato del triangolo equilatero, ad esempio CD, e riportarla *due* volte da E fino a determinare i punti F e G sul prolungamento del diametro.

Collegare i punti G e C: il segmento GC interseca la circonferenza in un punto, H.

Fare centro in C e con raggio CH tracciare una semicirconferenza che taglia nel punto I il prolungamento di GC.

HI è, con buona *approssimazione*, lungo quanto la semicirconferenza AHCB.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%

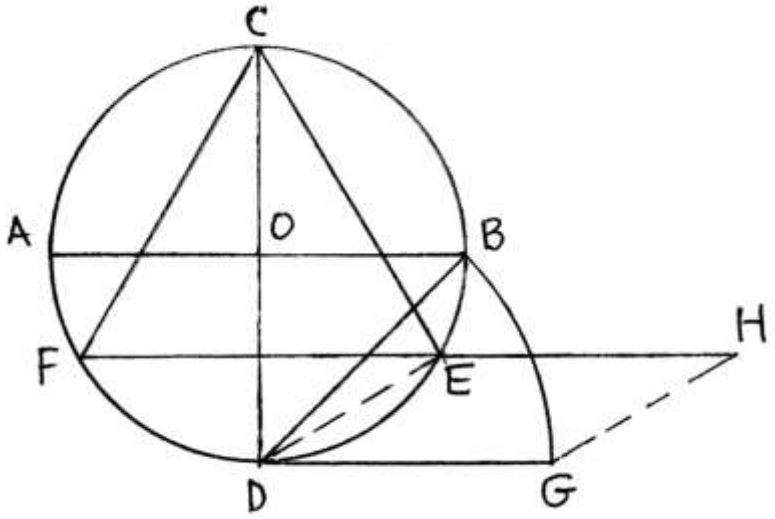
La somma delle due seguenti radici quadrate fornisce una buona approssimazione del valore di π:

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} \approx \pi$$

$$1{,}4142 \ldots + 1{,}732 \ldots \approx 3{,}1462 \ldots .$$

Il risultato è approssimato per *eccesso* perché il valore corretto di π è $3{,}14159\ldots$

Disegnare una circonferenza con centro in O (e raggio **r**) e i due diametri fra loro perpendicolari AB e CD:



Costruire il triangolo equilatero CEF e prolungare verso destra il lato FE.

Tracciare la corda DB: essa è la diagonale di un quadrato con lato lungo quanto il raggio **r**:

$$DB = r * \sqrt{2} .$$

Disegnare la tangente alla circonferenza nel punto D e su di essa ribaltare la corda DB fino a stabilire il punto G, a distanza DG = DB.

A partire dal punto E, riportare la lunghezza di DG sul prolungamento di FE, fino a stabilire il punto H.

Il segmento FH è lungo FH = FE + EH.

Il segmento FE è il lato del triangolo equilatero inscritto ed è lungo

$$FE = r * \sqrt{3} .$$

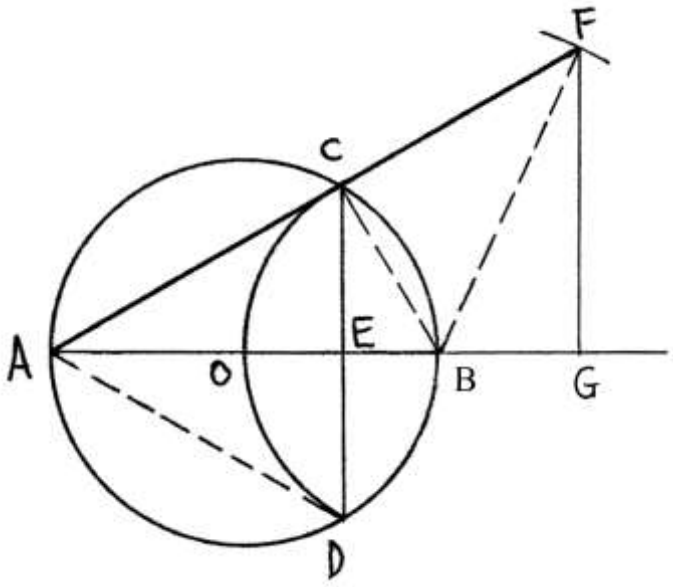
Di conseguenza

$$FH = r * \sqrt{3} + r * \sqrt{2} = r * (\sqrt{3} + \sqrt{2}) \approx r * 3{,}1462\ldots .$$

Il segmento FH è la lunghezza approssimata per *eccesso* della semicirconferenza AFDEB (oppure ACB).

%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Italo Ghersi ha suggerito una costruzione simile e più rapida, come spiega la figura che segue:



Disegnare una circonferenza con centro in O (e raggio **r**) e il diametro orizzontale AB.

Costruire il triangolo equilatero ACD.

Prolungare verso l'esterno il lato AC.

Con il compasso, misurare la lunghezza del lato AC, fare centro nel punto B e tracciare un arco che taglia il prolungamento di AC in un punto, F.

Il segmento AF è lungo

$$AF = AC + CF = r * \sqrt{3} + r * \sqrt{2} \approx 3{,}1462\ldots .$$ e cioè è la lunghezza *approssimata* della semicirconferenza ACB.

La dimostrazione è abbastanza semplice: AC e CB sono i cateti del triangolo rettangolo ACB e AC è pure un lato del triangolo equilatero ACD ed è lungo $r * \sqrt{3}$.

CB è *perpendicolare* al segmento AF e lo è anche riguardo al segmento AF.

Anche il triangolo BCF è rettangolo: il cateto CB è lungo r e l'ipotenusa BF è lunga $r * \sqrt{3}$.

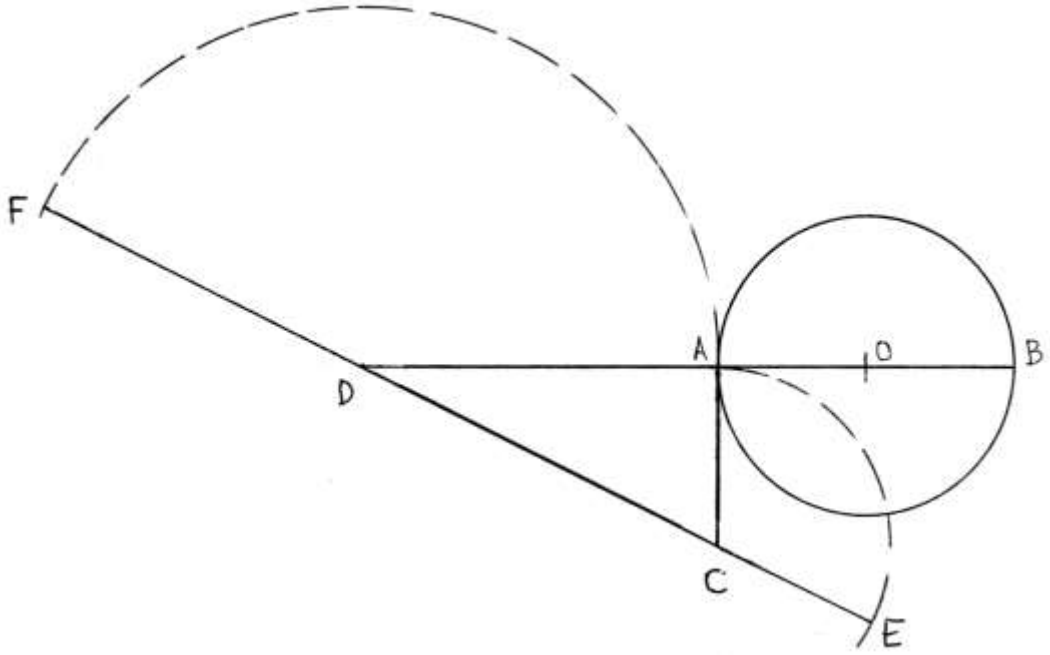
Il cateto CF è di lunghezza incognita ed essa è data da:

$$CF = \sqrt{BF^2 - CB^2} = \sqrt{3 \cdot r^2 - r^2} = r \cdot \sqrt{2}$$

%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Disegnare una circonferenza di centro O e il diametro orizzontale AB, da prolungare verso sinistra.

Tracciare la tangente alla circonferenza nel punto A:



Costruire il triangolo rettangolo ACD con cateti lunghi:

$AC = 3/5 * AB = 3/5 * 2 * r = 6/5 * r$ e

$AD = 6/5 * AB = 6/5 * 2 * r = 12/5 * r$.

L'ipotenusa CD è lunga:

$CD^2 = AC^2 + AD^2 = (6/5 * r)^2 + (12/5 * r)^2 =$

$(36 * r^2 + 144 * r^2)/25 = 180 * r^2 = 36/5 * r^2$.

$CD = 6 * r / \sqrt{5} = 6 * / \sqrt{5} * r/5 \approx 2{,}6832\ldots$.

Prolungare verso destra e verso sinistra l'ipotenusa CD.

Facendo centro nei punti C e D riportare le lunghezze dei due cateti AC e AD sui prolungamenti di CD: sono così fissati i punti E e F.

Il segmento EF è lungo quanto il *perimetro* di ACD e vale: $EF = EC + CD + DF = AC + CD + AD = 6/5 * r + 12/5 * r + 6 * \sqrt{5} * r/5 =$

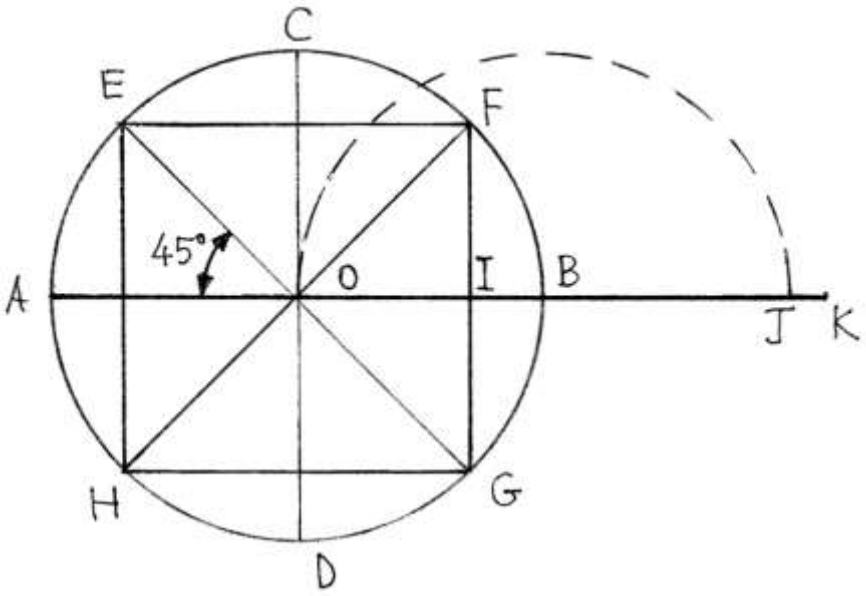
$= r * (6 + 12 + 6 * \sqrt{5})/5 \approx r * 6{,}2832$.

Il perimetro di ACD è con buona *approssimazione* lungo quanto la circonferenza di diametro AB.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Disegnare una circonferenza con centro in O e i due diametri AB e CD fra loro perpendicolari. Prolungare AB verso destra.

Costruire il quadrato inscritto EFGH e tracciare le sue diagonali EG e HF:



Considerare il triangolo rettangolo isoscele OIF: l'ipotenusa OF è lunga quanto il raggio r della circonferenza e i due cateti OI e IF hanno lunghezza

$OF^2 = 2 * OI^2$ da cui $r^2 = 2 * OI^2$.

Il lato FG è lungo:

$FG = 2 * OI = 2 * \sqrt{2}/2 * r = \sqrt{2} * r$

Ma OI è lungo la *metà* del lato del quadrato inscritto:

$OI = r/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2 * r$

Fare centro in B e, con raggio BO = r, tracciare un arco da O fino a fissare il punto J.

Determinare la lunghezza di 1/10 del lato del quadrato inscritto e riportarla dal punto J fino a determinare il punto K.

Il segmento JK è lungo

$JK = 1/10 * FG = \sqrt{2} * r/10$

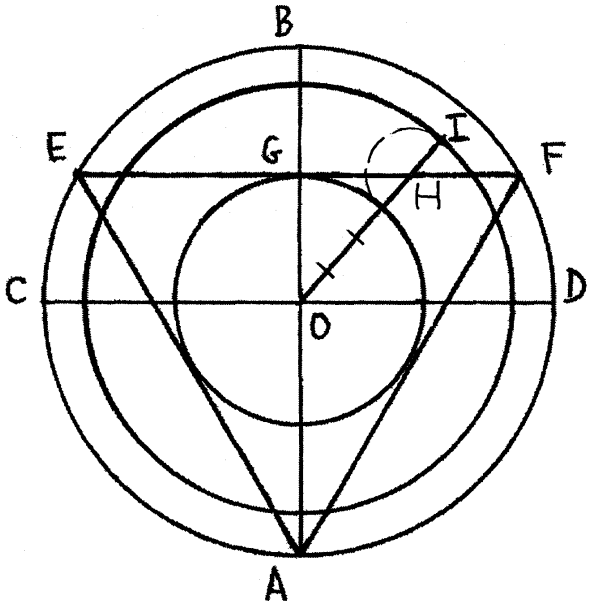
Il segmento AK è lungo:

$AK = AO + OB + BJ + JK = r + r + r + \sqrt{2} * r/10 \approx 3{,}1414 * r$.

Il segmento AK è la lunghezza *approssimata* della semicirconferenza AECFB (oppure AHHDGB).

Triangolo equilatero e circonferenza isoperimetrici

AEF è un triangolo equilatero inscritto nel cerchio di centro O e raggio OA.



AB e CD sono i diametri perpendicolari.

AB interseca il lato EF nel punto G.

Con centro in O e raggio OG disegnare una circonferenza tangente al triangolo equilatero.

Determinare il punto medio di GF: è H.

Tracciare il segmento OH e prolungarlo verso l'esterno. Determinare la lunghezza di ¼ di OH e riportarla da H fino a stabilire il punto I:

$$OI = OH + HI = OH + \frac{1}{4} * OH = 5/4 * OH$$

OI è il raggio della circonferenza di centro O che ha lunghezza *approssimativamente* uguale al perimetro di AEF:

$$AE + EF + FA \cong 6{,}28 * OI\ .$$

NICCOLÒ CUSANO

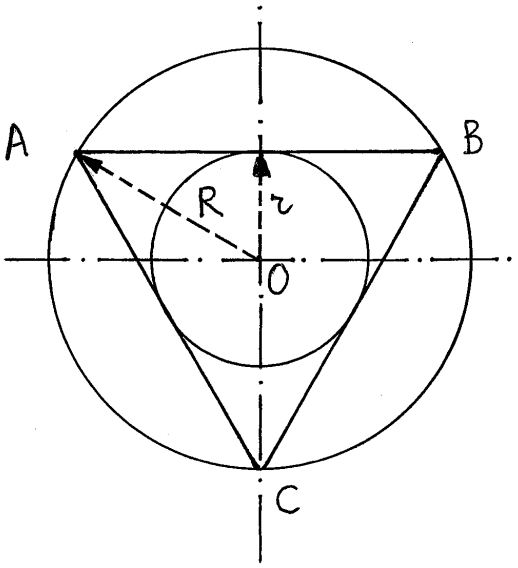
Niccolò (o Nicola) Cusano (1401-1464) è stato un cardinale, teologo, giurista, matematico e astronomo di origini tedesche.

Fra gli argomenti matematici che, con l'aiuto dell'amico matematico e astronomo fiorentino Paolo dal Pozzo Toscanelli (1397-1482), affrontò sono quelli della rettificazione della circonferenza e della quadratura del cerchio. Le sue soluzioni geometriche sono *approssimate*.

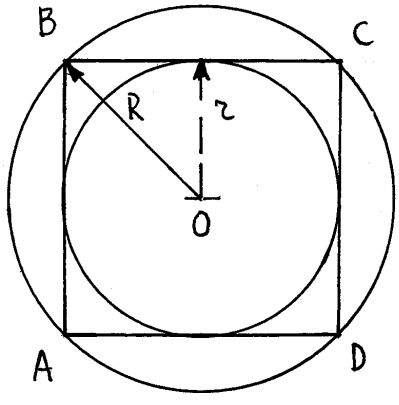
I poligoni isoperimetrici

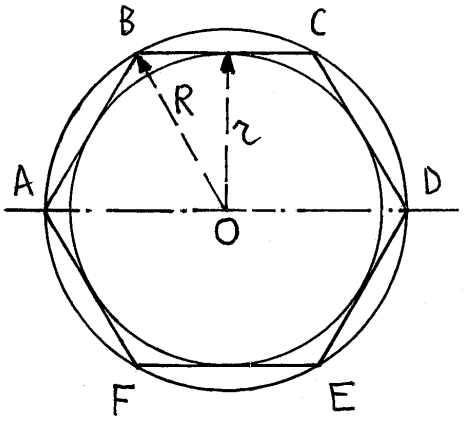
Fra i metodi usati da Cusano per giungere alla rettificazione della circonferenza vi è quello dei poligoni isoperimetrici.

Il triangolo equilatero ABC è inscritto in un cerchio di raggio *R* e al suo interno è un secondo cerchio di raggio *r*.



Il quadrato e l'esagono della figura che segue hanno perimetri lunghi quanto quello del precedente triangolo equilatero:





Le dimensioni dei lati dei due poligoni sono ridotte rispetto a quelle dei lati del triangolo equilatero.

L'area del triangolo equilatero è:

$$\text{Area}_{\text{TRIANGOLO}} = \text{lato} * \text{lato} * (\sqrt{3})/4 = (\text{perimetro}/3)^2 * (\sqrt{3})/4 =$$

$= (\sqrt{3}) * \text{perimetro}^2/36 \cong 0{,}048 * \text{perimetro}^2$.

Il lato del quadrato è lungo: $\text{lato} = \text{perimetro}/4$ e la sua area è:

$\text{Area}_{\text{QUADRATO}} = (\text{perimetro}/4)^2 = \text{perimetro}^2/16 = 0{,}0625 * \text{perimetro}^2$.

L'area dell'esagono è data da:

$\text{Area}_{\text{ESAGONO}} = 6 * \text{lato} * \text{apotema}/2$.

Ma il lato è lungo:

$\text{lato} = \text{perimetro}/6$ e l'apotema è data da

$\text{apotema} = \text{lato} * (\sqrt{3})/2 = \text{perimetro} * (\sqrt{3})/12$.

La formula dell'area dell'esagono diviene:

$\text{Area}_{\text{ESAGONO}} = 6 * \text{perimetro}^2 * (\sqrt{3})/(12 * 12) \cong 0{,}072 * \text{perimetro}^2$.

Aumentando il numero dei lati, in costanza della lunghezza del perimetro, aumenta l'area del poligono.

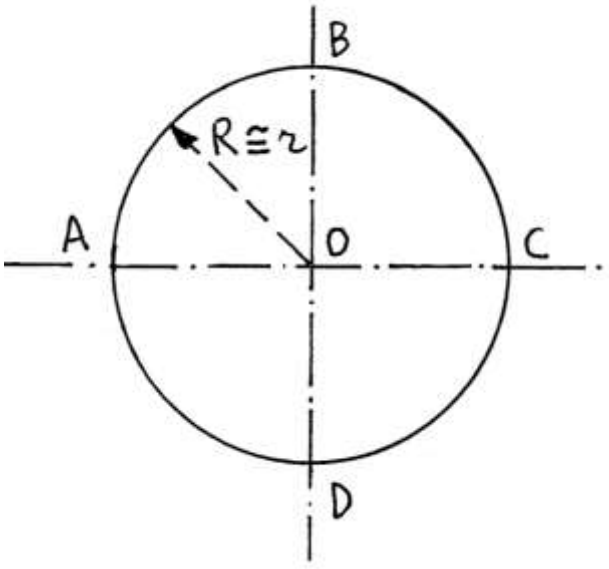
Nello stesso tempo, diminuisce la differenza fra le lunghezze del raggio del cerchio circoscritto, *R*, e quella del raggio del cerchio inscritto, *r*.

Aumentando il numero dei lati del poligono, le due circonferenze tendono a sovrapporsi al poligono e i due raggi divengono pressoché di uguale lunghezza:

$R \approx r$.

In questo caso limite, la circonferenza è lunga quanto il *perimetro* e i due raggi sono lunghi:

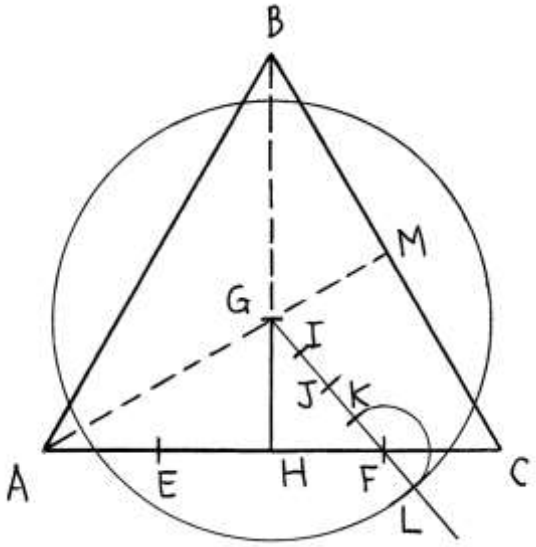
$R \approx r \approx \text{perimetro}/(2 * \pi)$.



Cerchio isoperimetrico rispetto a un triangolo equilatero

ABC è un triangolo equilatero e G è il suo ortocentro, baricentro, incentro e circocentro.

BH è nello stesso tempo bisettrice, mediana, altezza e asse del segmento AC:



Dividere in *quattro* parti uguali il lato AC.

Dal punto G tracciare una linea passante per F e prolungarla verso l'esterno.

Dividere in *quattro* parti uguali il segmento GF: sono fissati i punti I, J e K.

Fare centro nel punto F e con raggio FK disegnare una semicirconferenza che stabilisce il punto L.

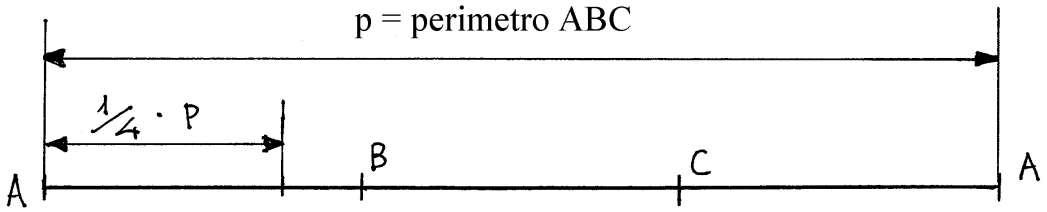
GL è il raggio della circonferenza che è quasi lunga quanto il perimetro di ABC.

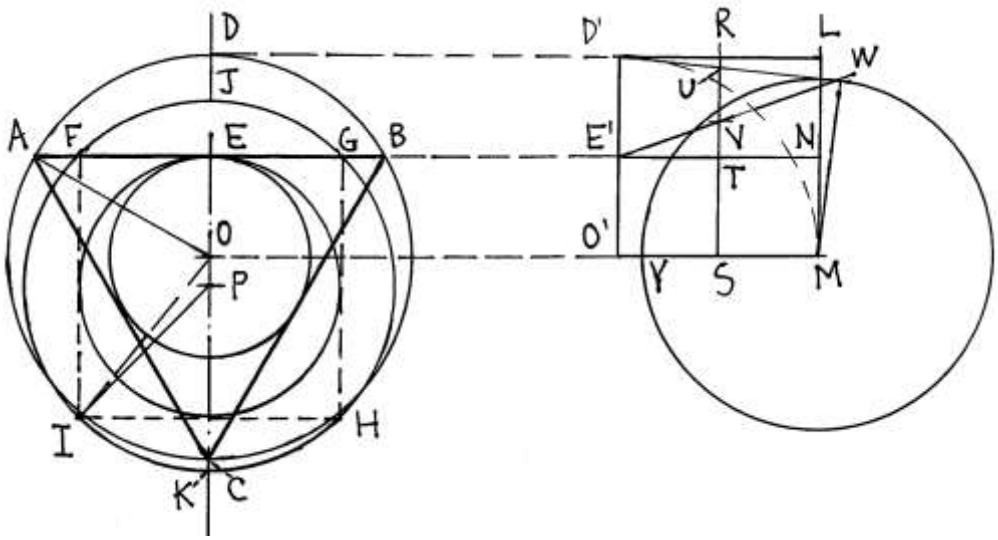
Triangolo equilatero e circonferenza isoperimetrici

La costruzione che segue è assai più complessa della precedente.

ABC è il perimetro di un triangolo equilatero.

Tracciare le due circonferenze, inscritta e circoscritta rispetto al triangolo equilatero, facendo centro nel punto O. I due raggi sono OA e OE.





A cavallo del punto E, sul lato AB riportare la lunghezza di ¼ del perimetro p:

$FG = \frac{1}{4} * p$; sono fissati i punti E e F.

Costruire il quadrato FGHI.

Determinare il centro del quadrato FGHI: è P.

Fare centro in P e con raggi PE e PI disegnare le circonferenze inscritta e circoscritta al quadrato FGHI.

Tracciare verso destra tre linee orizzontali uscenti dai punti D, E e O.

Fissare a distanza a piacere il punto O' e poi i punti E' e D' su di una linea perpendicolare alle tre orizzontali.

Costruire il quadrato O'D'LM e disegnare le mediane E'N e RS: esse si incontrano nel punto T.

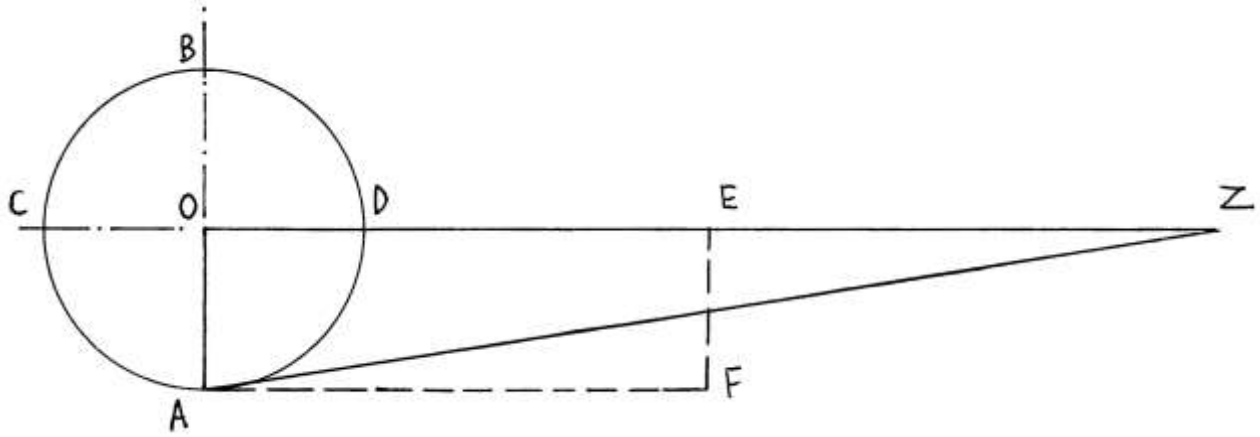
Misurare il raggio della circonferenza circoscritta PI e riportarlo da S in U.

Sempre con il compasso, misurare il raggio della circonferenza inscritta, PE, e riportarlo da S in V.

Tracciare due semirette passanti per D' e U e per E' e V: esse si intersecano nel punto W. Il segmento MW è il raggio della circonferenza che ha *quasi* lo stesso perimetro di ABC.

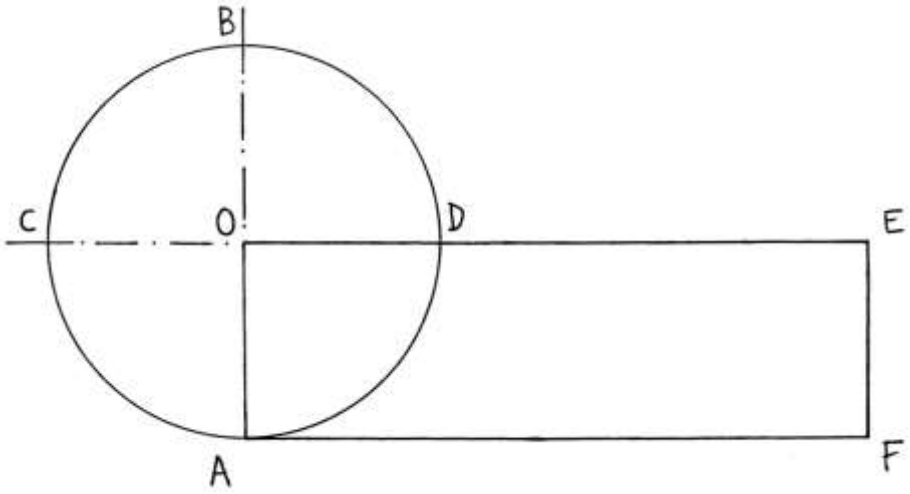
La quadratura di un cerchio

Secondo Archimede (287-212 a.C.) l'area di un cerchio è equivalente a quella di un triangolo rettangolo che ha un cateto (OA) lungo quanto il raggio e l'altro cateto (OZ) lungo quanto la circonferenza.



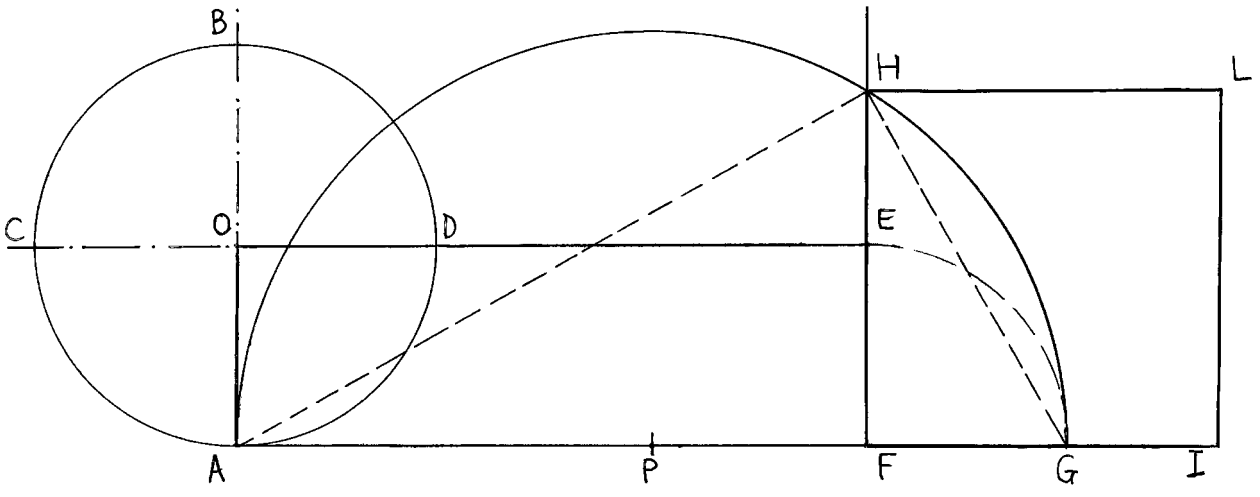
Il triangolo rettangolo AOZ ha la stessa area del rettangolo AOEF: i lati OE e Af sono lunghi la metà del cateto OZ.

Consideriamo la costruzione parziale mostrata nella figura che segue:



Il rettangolo AOEF ha *quasi* la stessa area del cerchio.

Prolungare la linea AF verso destra. Fare centro nel punto F e con raggio FE (uguale al raggio del cerchio di centro O) tracciare un arco da E fino a stabilire il punto G:



Dal punto F elevare la perpendicolare a AG.

Fissare il punto medio di AG: è P.

Fare centro in P e con raggio PA = PG disegnare una semicirconferenza da A fino a G. Essa interseca la perpendicolare innalzata da F in un nuovo punto, H.

Tracciare le corde AH e HG: esse sono i cateti del triangolo rettangolo AHG.

Per il 2° teorema di Euclide sui triangoli rettangoli inscritti in un semicerchio, l'altezza HF è medio proporzionale fra le lunghezze delle proiezioni dei cateti sull'ipotenusa AG:

$$AF : HF = HF : FG \qquad \text{da cui} \qquad HF^2 = AF * FG .$$

Il prodotto AF * FG equivale a quello AE * EF che è l'area del rettangolo AOEF, a sua volta equivalente, con buona approssimazione, all'area del cerchio.

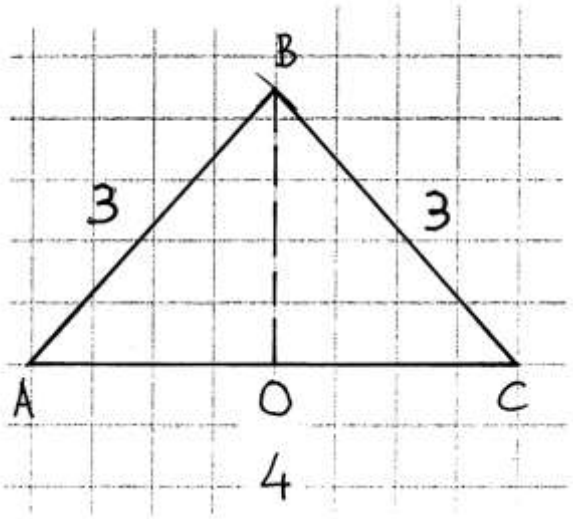
Costruire il quadrato FHLI: esso ha area uguale a quella del rettangolo AOEF e quindi a quella del cerchio di centro O e raggio OA.

QUADRATURA

Metodi usati dagli Egizi per la quadratura

I geometri Egizi conoscevano alcuni metodi per calcolare la lunghezza di una circonferenza e l'area del cerchio a partire da triangoli isosceli o rettangoli, con lati lunghi dei numeri interi.

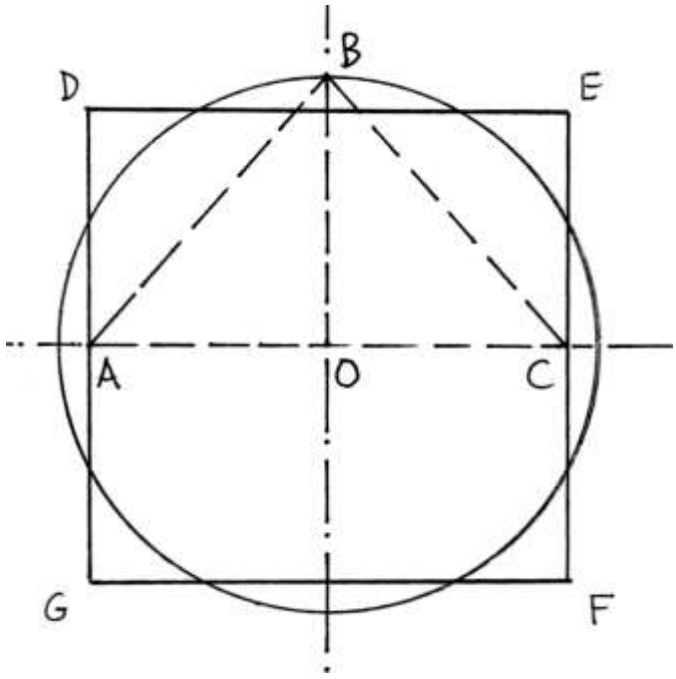
ABC è un triangolo isoscele con il lato di base, AC, lungo 4 e i due lati obliqui (AB e BC) lunghi 3:



Il segmento BO è l'altezza del triangolo isoscele ed è lunga:

$$BO = \sqrt{AB^2 - OA^2} = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$$

Il triangolo ABC veniva usato per una successiva costruzione che è riprodotta nella figura che segue:



Disegnare una circonferenza con centro in O e raggio OB (= √5) e costruire il quadrato DEFG di lato AC.

L'area del quadrato DEFG è 4*4 = 16 unità.

Il perimetro del quadrato è 4*4 = 16 unità.
L'area del cerchio di centro O è

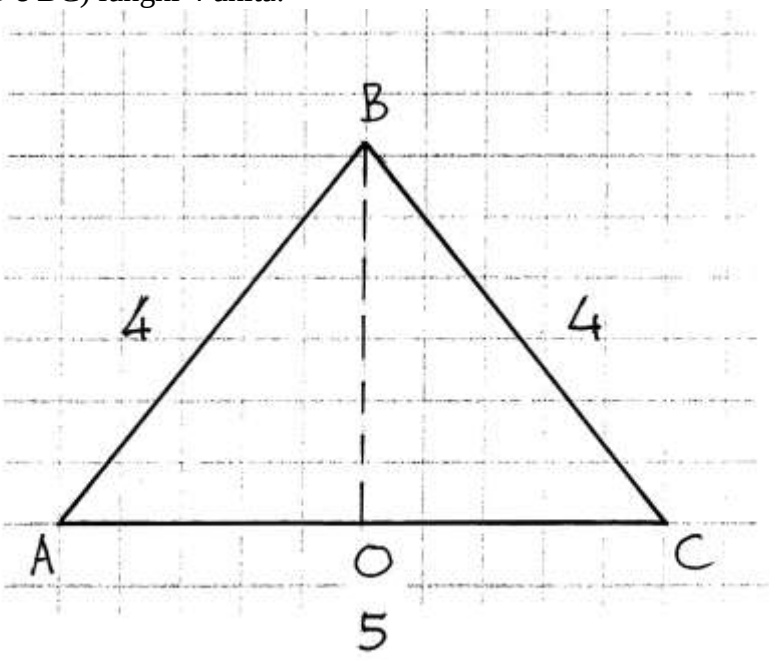
$$S = \pi * r^2 \cong 3{,}14 * (\sqrt{5})^2 \cong 3{,}14 * 5 \cong 15{,}7$$

La lunghezza della circonferenza è

$$\text{circonferenza} = 2 * \pi * r \cong 2 * 3{,}14 * \sqrt{5} \cong 14{,}04$$

L'area del quadrato (16) e quella del cerchio (15,7) sono *quasi* uguali: gli Egizi usavano questa costruzione per ricavare un'approssimata quadratura del cerchio.

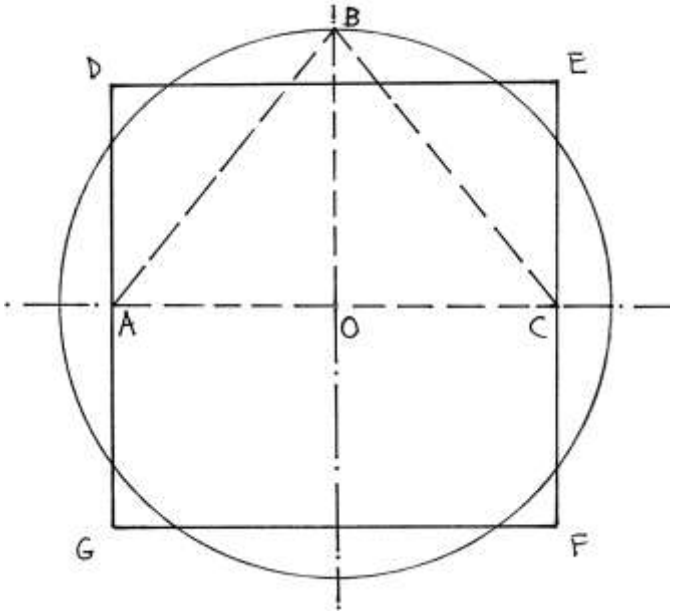
La figura seguente rappresenta un triangolo isoscele con il lato orizzontale (AC) lungo 5 e i due lati obliqui (AB e BC) lunghi 4 unità:



L'altezza BO è lunga

$$BO = \sqrt{(AB^2 - AO^2)} = \sqrt{(16 - 2{,}5^2)} = \sqrt{9{,}75} \cong 3{,}12 .$$

Disegnare una circonferenza con centro in O e raggio OB. Costruire un quadrato DEFG di lato uguale a AC e quindi lungo 5:



L’area del quadrato DEFG è 5*5 = 25 unità e il suo perimetro misura 5*4 = 20 unità lineari.
L’area del cerchio è

$$S = \pi * r^2 \cong 3{,}14 * 9{,}75 \cong 30{,}61 .$$

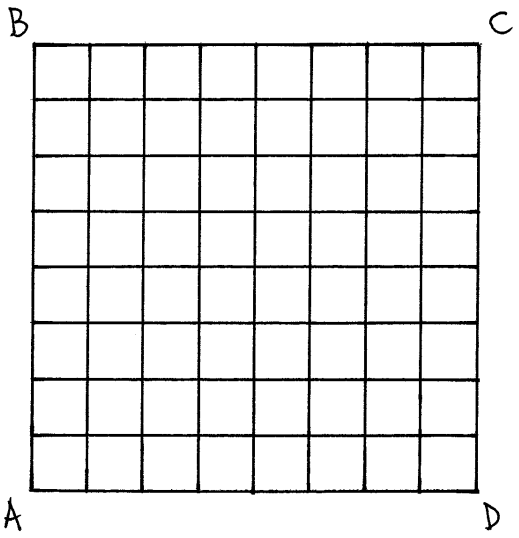
e la lunghezza della circonferenza misura

$$\text{circonferenza} = 2 * \pi * r \cong 2 * 3{,}14 * \sqrt{9{,}75} \cong 20 .$$

La costruzione era usata dagli Egizi per determinare una circonferenza con la stessa lunghezza del perimetro del quadrato DEFG.

<u>Un altro metodo per disegnare una circonferenza di lunghezza quasi uguale al perimetro di un quadrato dato</u>

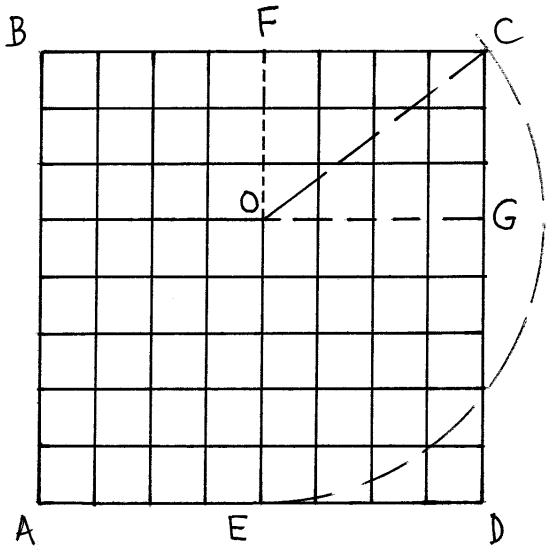
ABCD è una struttura quadrata formata da 64 quadrati di uguali dimensioni, disposti su 8 file orizzontali e 8 colonne verticali. La struttura è identica a quella di una comune scacchiera:



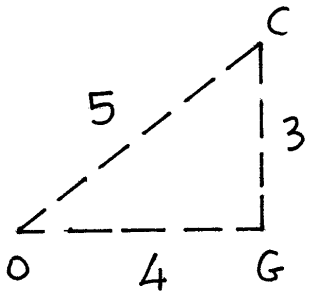
Nella figura che segue, il punto O è collocato in una posizione facilmente determinabile. Il punto F è il medio del lato BC. La lunghezza del segmento OF è di 3 unità.

Fare centro nel punto O e, con raggio OC, tracciare un arco di circonferenza passante per i punti C e E.

Dal punto O passa un segmento che taglia in G il lato CD: il segmento OG è lungo 4 unità.

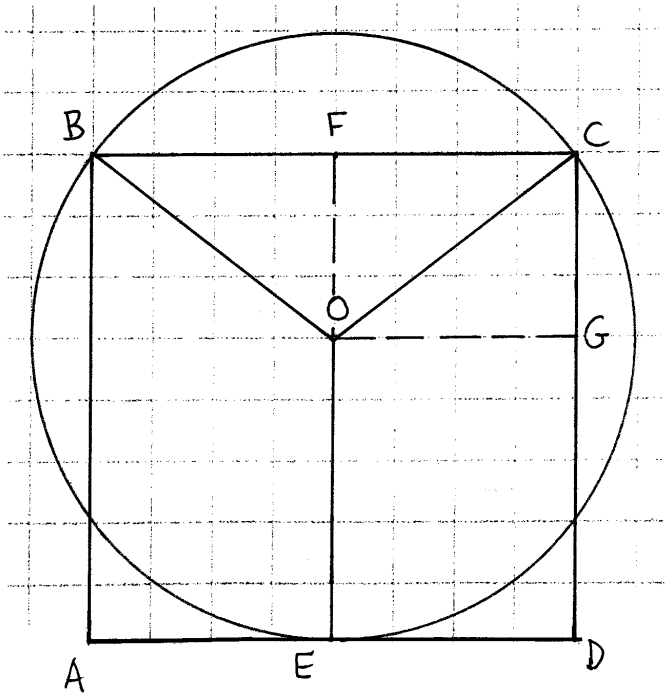


Il triangolo OCG è *rettangolo* e le lunghezze dei suoi lati formano una terna 3-4-5:



L'ipotenusa OC è infatti lunga 5 unità.

La figura che segue descrive una costruzione basata sulle precedenti. Riprodurre il rettangolo OFCG e tracciare la diagonale OC. Fare centro in O e, con raggio OC, disegnare una circonferenza. A partire dal punto C, costruire il quadrato CDAB che ha le stesse dimensioni della precedente scacchiera:



Il lato BC è lungo il doppio del segmento FC e quindi 4*2 = 8 unità
Il segmento OC è il raggio della circonferenza ed è lungo 5 unità.
Il quadrato possiede le seguenti proprietà:

$$\text{Area}_{ABCD} = 8 * 8 = 64$$
$$\text{perimetro}_{ABCD} = 4 * 8 = 32 .$$

Il cerchio e la relativa circonferenza misurano

$$\text{Area}_{CERCHIO} = \pi * r^2 \cong 3{,}14 * 25 \cong 78{,}5$$
$$\text{circonferenza} = 2 * \pi * r \cong 2 * 3{,}14 * 5 \cong 31{,}4 .$$

Il perimetro del quadrato e la circonferenza hanno lunghezze *quasi* uguali: rispettivamente 32 unità e 31,4 unità.

Quadratura del cerchio secondo Archimede

Archimede (287 – 212 a.C.) affermò che il cerchio era equivalente, con buona approssimazione, a $11/14$ di un quadrato con lato lungo quanto il diametro dello stesso cerchio.

Per Archimede il valore di π era compreso fra due frazioni:

$$3 + 10/71 < \pi < 3 + 10/70 .$$

Semplificando si ha:

$$223/71 < \pi < 22/7 .$$

Scegliendo il secondo valore che è arrotondato *per eccesso*

$$\pi \cong 3 + 1/7 \cong 22/7 ,$$

la circonferenza era lunga

$$\text{circonferenza} = \pi * \text{diametro} \cong 22/7 * \text{diametro} .$$

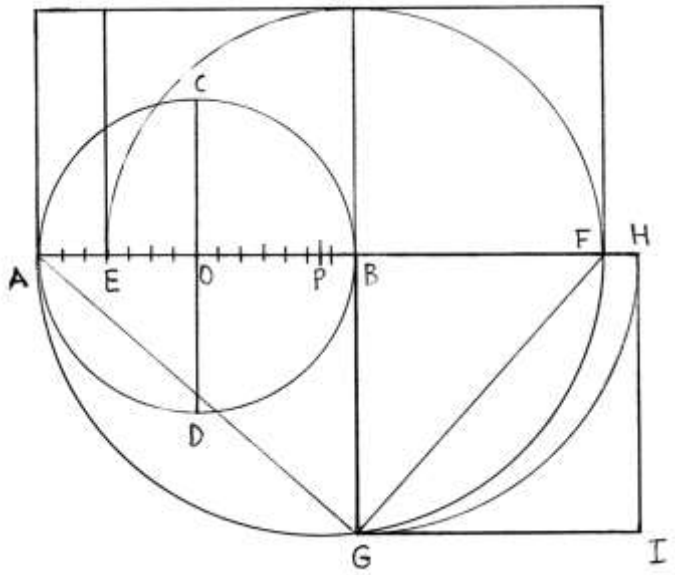
L’area del cerchio era

$$\text{Area}_{\text{cerchio}} = \pi * r^2 = \pi * (\text{diametro}/2)^2 \cong 22/7 * \text{diametro}^2/4 \cong$$
$$\cong 11/14 * \text{diametro}^2$$

Il poligono che ha superficie *quasi* uguale a quella del cerchio è un rettangolo con lati lunghi in proporzione a $\sqrt{11}$ e a $\sqrt{14}$. Esso può essere trasformato in un quadrato equivalente con lato lungo

In proporzione a $\sqrt{(11/14)}$.

La costruzione che segue è basata sull’affermazione di Archimede.



Disegnare una circonferenza di raggio r, con centro in O, il diametro orizzontale AB (prolungandolo verso destra) e quello verticale CD.

Dividere AB in 14 parti uguali e fissare il punto E:

$$AE = 3/14 * AB \qquad \text{e} \qquad EB = 11/14 * AB .$$

Condurre le tangenti alla circonferenza nei punti A e B.

Fare centro in B e con raggio BE tracciare una semicirconferenza da E fino a stabilire il punto F.

Il segmento AF è lungo:

$$AF = AB + BF = AB + BE = 2 * r + (11/14) * 2 * r =$$
$$= (28 + 22)/14 * r = 50/14 * r = 25/7 * r .$$

Determinare il punto medio di EF: è P.

Con centro nel punto P disegnare una semicirconferenza da A a F, con raggio PA = PF.

Il triangolo AGF è rettangolo. Per il 2° teorema di Euclide, l’altezza BG è *medio proporzionale* fra AB e BF:

$$AB : BG = BG : BF$$
$$2 * r : BG = BG : 11/14 * 2 * r$$
$$BG^2 = 44/14 * r^2 = 4 * 11/14 * r^2$$
$$BG = 2 * r * \sqrt{(11/14)} \cong 1{,}7728 * r \cong \sqrt{\pi} * r .$$

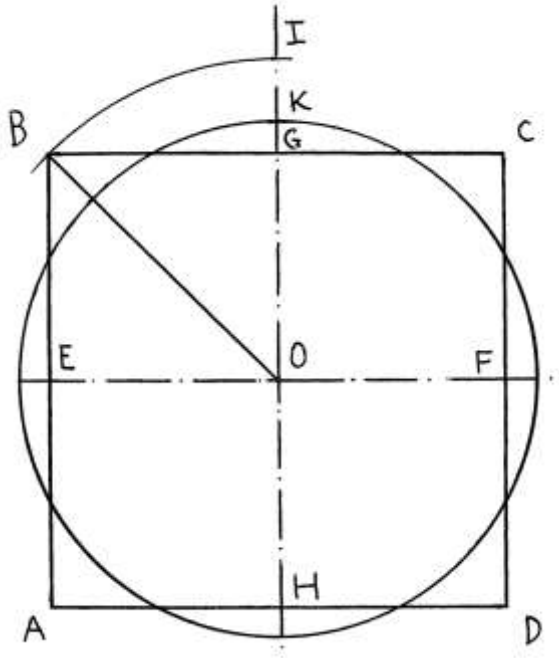
BG è la lunghezza del lato del quadrato BHIG che ha superficie *approssimativamente* uguale a quella del cerchio di diametro AB.

La conversione da quadrato a cerchio secondo gli Indiani

Il metodo che segue è attribuito al matematico indiano Bodhayana, vissuto intorno all'800 a.C.

ABCD è il quadrato originario: EF e GH sono le sue mediane che si intersecano nel punto O.

Tracciare la semidiagonale OB.



Fare centro nel punto O e con raggio OB disegnare un arco da B fino a incontrare il prolungamento di GH in un punto, I.

Fissare il punto K a distanza GK uguale a: GK = 1/3 * GI .

Fare centro in O e con raggio OK tracciare una circonferenza: il cerchio che essa delimita ha area *quasi* uguale a quella del quadrato ABCD.

Nelle formule che seguono la lunghezza dei lati del quadrato è indicata con il simbolo ℓ.

Il raggio OK è lungo:

$$OK = OG + KG = \ell/2 + KG = \ell/2 + IG/3 .$$

Ma IG è dato da:

$$IG = OB - OG = (\sqrt{2})/2 * \ell - \ell/2 = \ell/2 * (\sqrt{2} - 1) .$$

Il segmento GK è lungo 1/3 di quello IG e quindi:

$$GK = 1/3 * \ell/2 * (\sqrt{2} - 1) = \ell/6 * (\sqrt{2} - 1) .$$

Il raggio OK è lungo:

$$OK = \frac{1}{2} + \frac{\ell}{6}\left(\sqrt{2} - 1\right) = \frac{3\cdot\ell + \sqrt{2}\cdot\ell - \ell}{6} = \frac{2\cdot\ell + \sqrt{2}\cdot\ell}{6} =$$

$$= \ell\cdot\left(\frac{2+\sqrt{2}}{6}\right) \cong \ell \cdot 0{,}569$$

Il cerchio ha area:

$$\text{Area}_{\text{CERCHIO}} = \pi * r^2 \cong \pi * \ell^2 * 0{,}569^2 .$$

Eguagliando le espressioni che esprimono le aree del quadrato e del cerchio si ha:

$$\text{Area}_{\text{QUADRATO}} \cong \text{Area}_{\text{CERCHIO}}$$

$$\ell^2 \cong \pi * \ell^2 * 0{,}569^2 .$$

Il valore di π è

$$\pi \cong \frac{1}{0{,}569^2} \cong \frac{1}{0{,}323761} \cong 3{,}0887 .$$

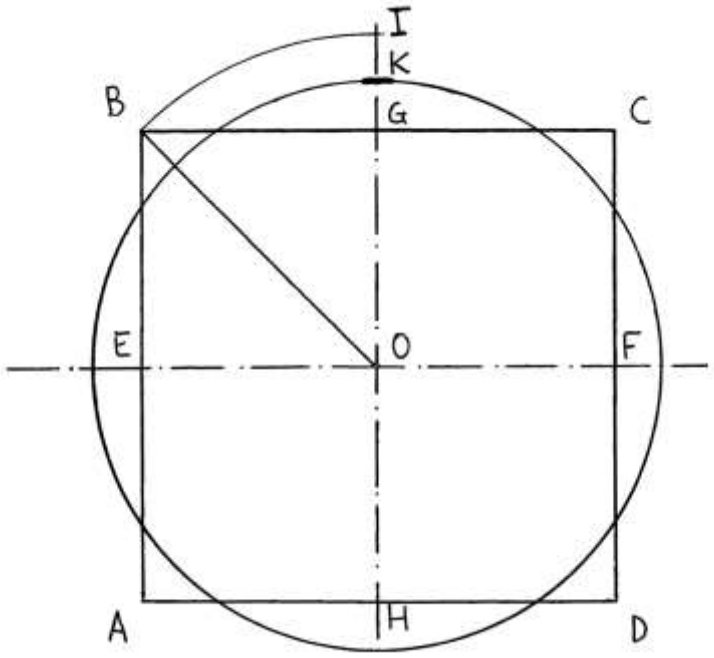
Il risultato è errato per *difetto*.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Il secondo metodo fornisce una soluzione approssimata. Anche questo è dovuto agli Indiani e risale a un periodo compreso fra il 700 e il 1.000 d.C.

Il metodo è una leggera variante del precedente.

ABCD è il quadrato che deve essere convertito in un cerchio di uguale superficie.



Costruire le mediane EF e GH.

Disegnare il segmento OB. Con centro in O e raggio OB tracciare un arco da B fino a intersecare il prolungamento di GH in un punto, I.

Determinare il punto medio di GI: è K.

Fare centro nel punto O e con raggio OK disegnare una circonferenza: il cerchio da essa racchiuso ha area *quasi uguale* a quella del quadrato ABCD.

La lunghezza del lato del quadrato è ℓ. Il raggio OB è r ; esso è lungo:

$$r = \sqrt{OE^2 + OG^2} = \sqrt{\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{4} \cdot \ell^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \ell .$$

Il segmento GI è lungo:

$$GI = OI - OG = r - \ell/2 = (\sqrt{2})/2 * \ell - \ell/2 = \ell/2 * (\sqrt{2} - 1) .$$

Il punto K è medio fra G e I. GK e KI sono lunghi

$$GK = KI = GI/2 = ½ * [\ell/2 * (\sqrt{2} - 1)] = \ell/4 * (\sqrt{2} - 1) .$$

OK è il raggio del cerchio; esso è lungo:

$$OK = OG + GK = \ell/2 + \ell/4 * (\sqrt{2} - 1) = \ell/2 + \ell * (\sqrt{2})/4 - \ell/4 =$$
$$= \ell/4 * (\sqrt{2} + 1) \cong 0{,}60355 * \ell .$$

L'area del quadrato è: $\text{Area}_{\text{QUADRATO}} = \ell^2$.

Il cerchio equivalente ha area

$$\text{Area}_{\text{CERCHIO}} = \pi * r^2 \cong \pi * \ell^2 * 0{,}60355^2 .$$

Essendo in teoria le due aree equivalenti, si ha:

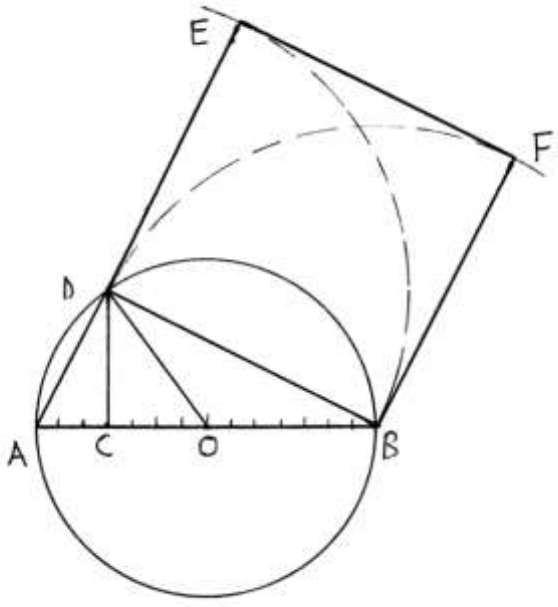
$\ell^2 \cong \pi * \ell^2 * 0{,}60355^2$ da cui è possibile ricavare il valore di π.

$$\pi = \frac{1}{0{,}60355^2} \cong \frac{1}{0{,}36427} \cong 2{,}745 \text{ !!!}$$

Il risultato è chiaramente assai più errato per difetto rispetto alla soluzione ricavata con il precedente metodo.

La quadratura del cerchio secondo Boezio

A Severino Boezio (475 – 525) sono attribuiti alcuni studi geometrici: fra di essi è la costruzione di seguito descritta.



Essa deriva dal metodo proposto da Archimede.

Disegnare una circonferenza con centro in O e il suo diametro orizzontale AB.

Dividere AB in 14 parti uguali e fissare il punto C a distanza uguale a:

$$AC = 3/14 * AB \qquad \text{e} \qquad CB = 11/14 * AB$$

$$AB = 2 * r$$

$$AC = 3/14 * 2 * r = 3/7 * r$$
$$CB = 11/14 * 2 * r = 11/7 * r\ .$$

Dal punto C elevare la perpendicolare al diametro fino a incontrare la circonferenza nel punto D.

ADB è un triangolo rettangolo.

Per il 1° teorema di Euclide, un cateto (ad esempio DB) è medio proporzionale fra l'ipotenusa (AB) e la sua proiezione (CB) su quest'ultima. Di conseguenza valgono le seguenti relazioni:

$$CB : DB = DB : AB$$
$$11/7 * r : DB = DB : 2 * r$$
$$DB^2 = 11/7 * r * 2 * r = 22/7 * r^2$$
$$DB = r * \sqrt{(22/7)} \cong 1{,}7728 * r\ .$$

La frazione $22/7$ assunta per il valore *approssimato* di π rimanda agli studi di Archimede.

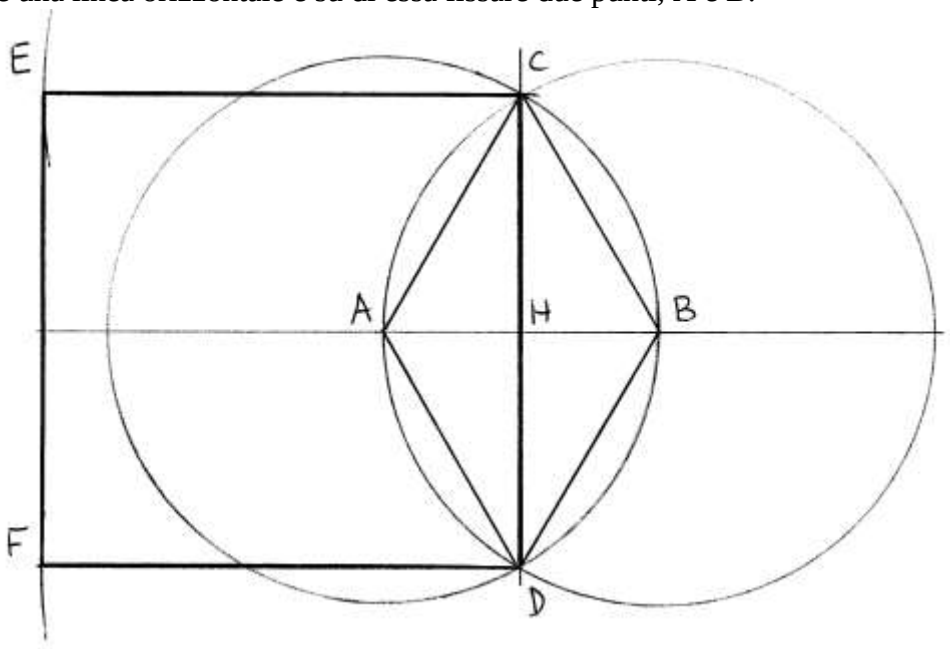
<u>Una quadratura approssimata del cerchio</u>

Fin dall'antichità fu dimostrata l'*impossibilità* di realizzare la quadratura del cerchio per via geometrica: non fu mai costruito un quadrato avente la stessa esatta area di un cerchio e viceversa.

I pratici hanno sempre avuto la necessità di usare *metodi approssimati* per disegnare superfici di uguale estensione, ad esempio a partire da un cerchio.

Un metodo abbastanza approssimato è descritto di seguito.

Disegnare una linea orizzontale e su di essa fissare due punti, A e B:



Con raggio AB fare centro in A e in B e disegnare due circonferenze: esse si intersecano nei punti C e D.

Tracciare l'asse passante per i punti C e D che determina il punto medio H.

Tracciare le corde AC, AD, BC e BD: sono così costruiti due triangoli equilateri (ABC e ABD).

Il segmento CH – che è lungo la metà di CD – è l'altezza del triangolo equilatero ABC.

Chiamiamo la lunghezza di AB *raggio*; per il teorema di Pitagora applicato al triangolo rettangolo CHB, l'altezza CH è uguale a

$$\sqrt{(3)}/2 * AB = \sqrt{(3)}/2 * \text{raggio} .$$

Il segmento CD è lungo quanto il doppio di CH:

$$CA = 2 * \sqrt{(3)}/2 * \text{raggio} = \sqrt{3} * \text{raggio} .$$

Costruire ora il quadrato con lato CD: la figura è ECDF.

L'area di uno dei cerchi (quello di centro A oppure B) è uguale a:

$$\pi * AB^2 \cong 3{,}14 * \text{raggio}^2 .$$

L'area del quadrato ECDF è:

$$\text{lato}^2 = (\sqrt{3} * \text{raggio})^2 = 3 * \text{raggio}^2 .$$

L'area del cerchio è proporzionale a 3,14 e quella del quadrato a 3: la differenza è:

$$(3{,}14 - 3)/3{,}14 \cong 0{,}0446 \cong 4{,}46\% .$$

Con opportune operazioni è possibile aumentare la lunghezza del lato del quadrato per arrivare a una più precisa approssimazione delle due aree.

È sufficiente disegnare un quadrato lungo

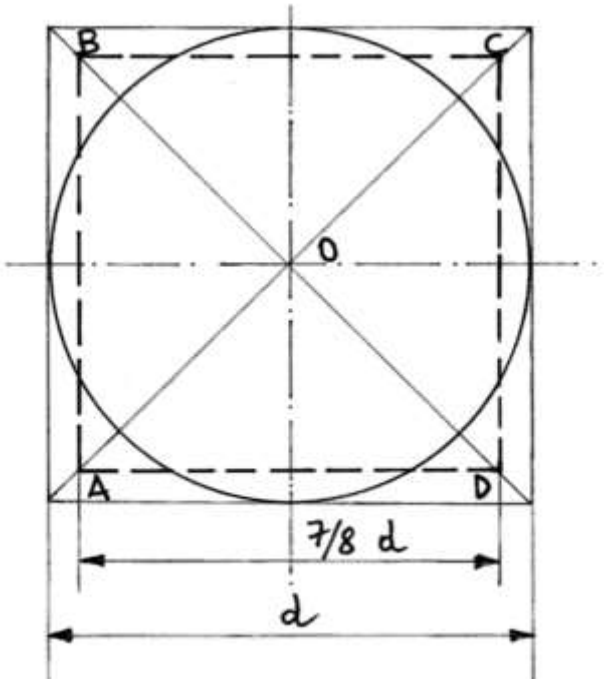
$\sqrt{(3{,}14)} \cong 1{,}77$ volte il raggio e non soltanto $\sqrt{(3)} \cong 1{,}73$ volte il raggio.

La quadratura del cerchio secondo Francone

Francone da Liegi (circa 1015 – 1083) era un ecclesiastico e un matematico. Ha lasciato un trattato in latino sulla *quadratura del cerchio*, scritto intorno al 1050.

Francone propose *tre* diverse soluzioni del problema: le prime due erano errate e la terza approssimata ma incompleta (perché mancante di una sufficiente descrizione).

La prima soluzione assegnava al lato del quadrato equivalente la lunghezza di 7/8 di quella del diametro:



L’area del cerchio di diametro d è:

$$\text{Area}_{\text{CERCHIO}} \cong 3{,}14 * d^2/4 \cong 0{,}785 * d^2 .$$

L’area del quadrato ABCD è:

$$\text{Area}_{\text{QUADRATO}} = (7/8)^2 * d^2 = 49/64 * d^2 = 0{,}765625 * d^2 .$$

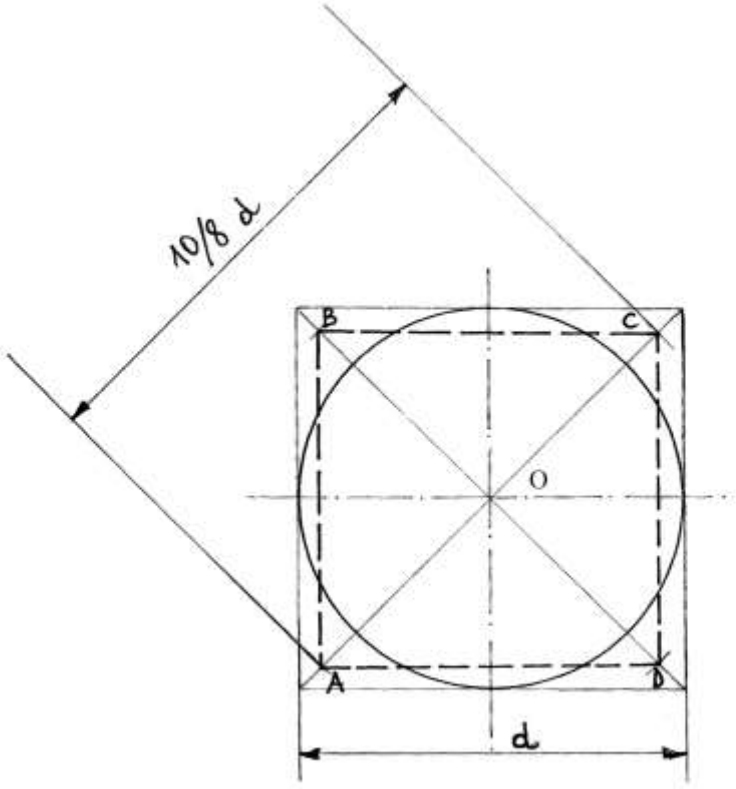
Con questa ultima formula, Francone fissò per π un valore approssimato per difetto:

$$\pi = 0{,}765625 * 4 = 3{,}0625 .$$

È indispensabile ricordare il valore corretto di π:

$$\pi \approx 3{,}14159265\ldots$$

La seconda costruzione fissa la lunghezza della *diagonale* del quadrato uguale a 10/8 di quella del diametro d:



La lunghezza della diagonale AC è: $AC = 10/8 * d .$

L’area del cerchio è uguale a quella della precedente soluzione:

$$\text{Area}_{\text{CERCHIO}} \cong 0{,}785 * d^2 .$$

L’area del quadrato ABCD è data da:

$$\text{Area}_{\text{QUADRATO ABCD}} = (10/8)^2 * d^2/2 = 100/128 * d^2 = 0{,}78125 * d^2 .$$

Il valore di π usato in questo caso da Francone è anch’esso approssimato per *difetto*:

$$\pi = 4 * 0{,}78125 = 3{,}125 = 3 + 1/8 .$$

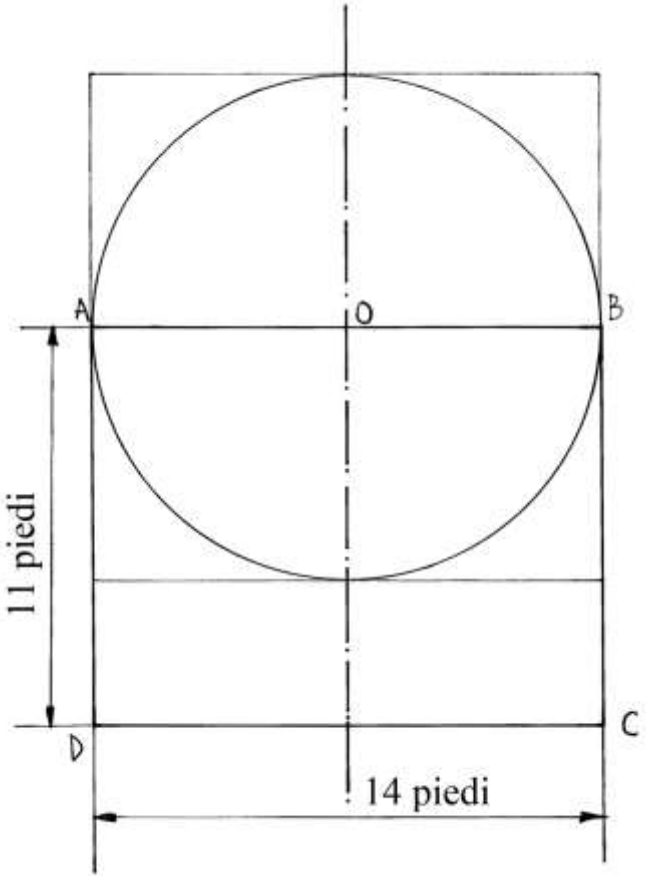
Nella terza soluzione, Francone utilizzò il valore approssimato di π determinato da Archimede e poi usato anche dai Gromatici romani:

$$\text{Area}_{\text{CERCHIO}} = \pi * d^2/4 \cong 22/7 * d^2/4 \cong 11/4 * d^2 .$$

Il valore di π ricavato da questa ultima formula è approssimato per *eccesso*:

$$\pi \cong 11/14 * 4 \cong 3{,}142857\ldots .$$

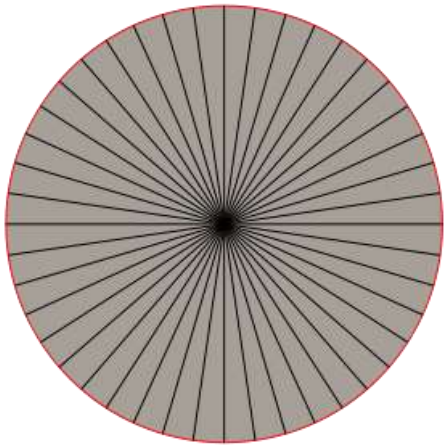
Francone misurava in *piedi*; la superficie di un cerchio di diametro d = 14 piedi era, a suo avviso, pressoché uguale a quella di un rettangolo di dimensioni 11*14 piedi e cioè 154 piedi^2.



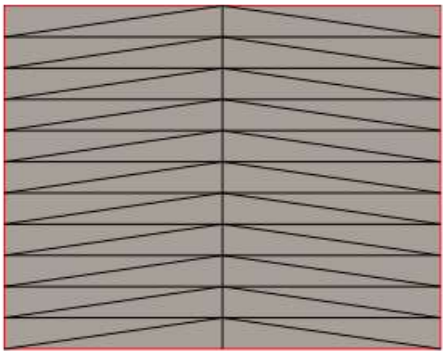
Nella figura qui sopra il cerchio di centro O e diametro d = 14 piedi avrebbe la stessa superficie del rettangolo ABCD di lati 11 e 14 piedi. In realtà l'impiego dell'ultima formula portò Francone a calcolare l'area del cerchio (154 piedi^2) in leggero *eccesso* rispetto alla misura effettiva:

$$\text{Area}_{\text{CERCHIO}} = \pi * d^2/4 \cong 3{,}14159265 * 14^2/4 \cong 153{,}938 \text{ piedi}^2.$$

Per ottenere questa soluzione, Francone adottò una procedura assai bizzarra: propose di dividere un cerchio disegnato su pergamena in 44 settori uguali che venivano poi incollati a formare una specie di rettangolo di dimensioni 11*14 piedi, come spiega la figura che segue (800px-Quadratur_Franco_svg.png, reperito su Wikipedia):



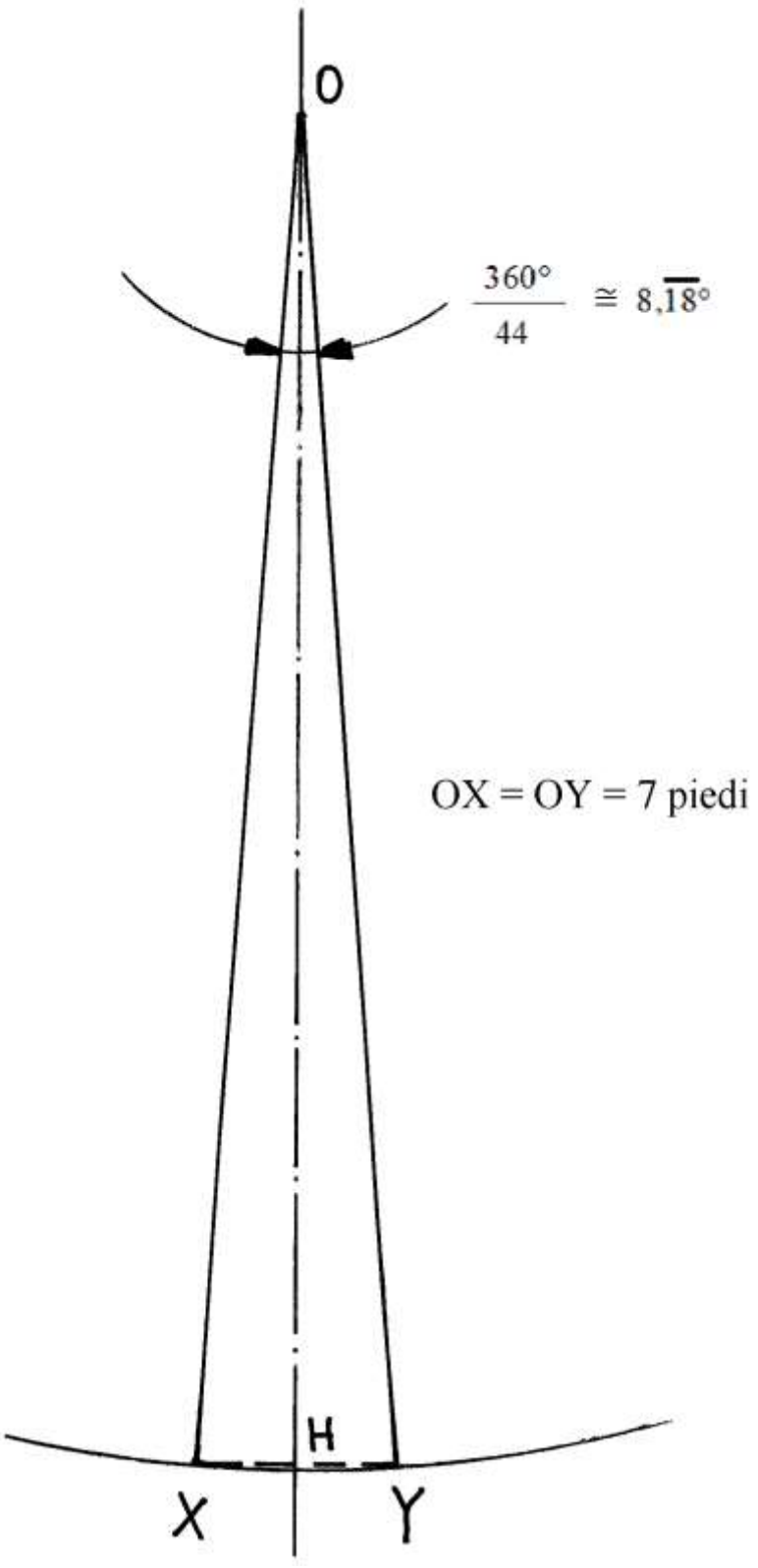
d = 14



b = 11

a = 14

Un singolo settore del cerchio ha le dimensioni *ingrandite* mostrate nella figura che segue:


O
$\frac{360°}{44} \cong 8,\overline{18}°$
OX = OY = 7 piedi
H
X
Y

- APPROFONDIMENTO -

Come già visto in un precedente paragrafo, Archimede ricavò per π dei valori compresi in un intervallo come spiega la seguente relazione:

$$3 + 10/71 < \pi < 3 + 10/70$$

La prima espressione vale:

$$3 + 10/71 \cong 3{,}1408.$$

La seconda parte della relazione è:

$$3 + 10/70 = 3 + 1/7 = (21 + 1)/7 = 22/7 \cong 3{,}14285\ .$$

Questo ultimo valore approssimato per *eccesso* (22/7) è quello usato da Francone.

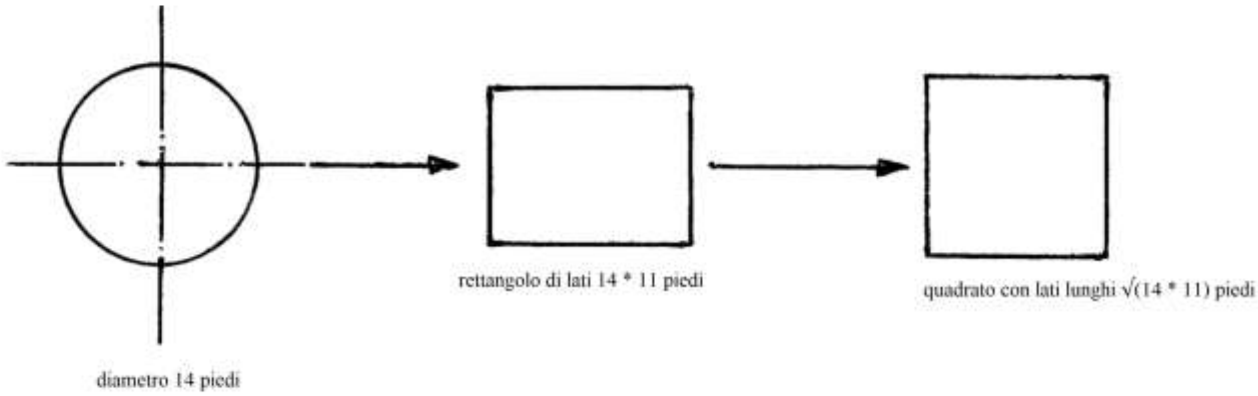
- -

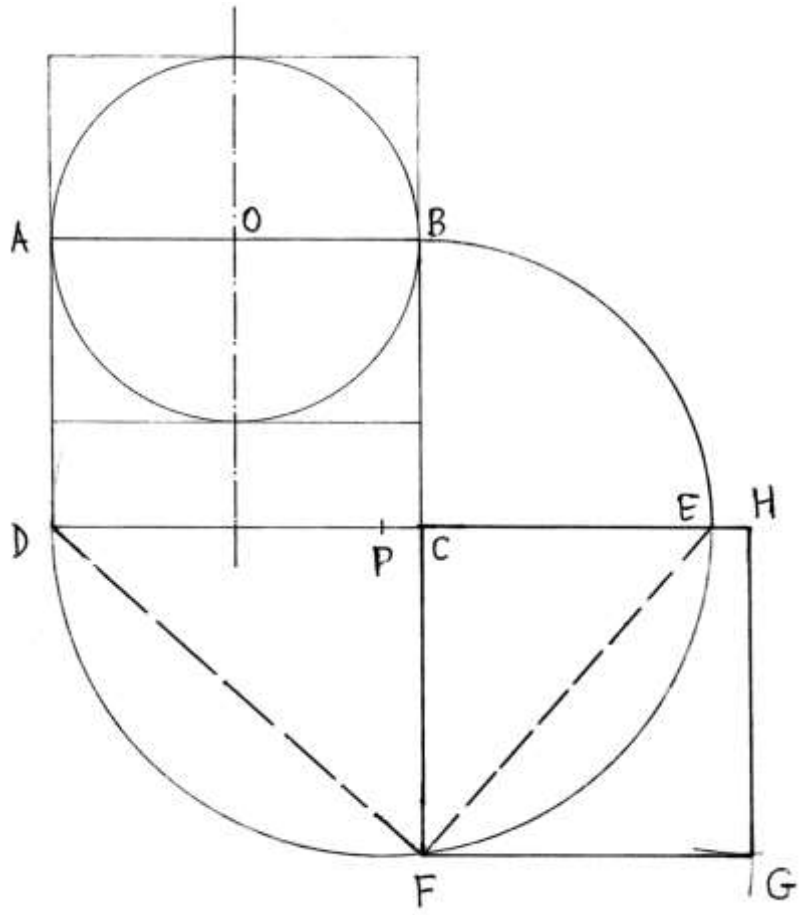
<u>La quadratura del rettangolo di Francone</u>

Francone si fermò alla *quadratura* che convertiva il cerchio in un rettangolo di superficie approssimativamente uguale.

Egli non fornì alcuna costruzione per trasformare il cerchio di origine in un quadrato equivalente.

Accettando la buona approssimazione dell'equivalenza fra le superfici di un cerchio di diametro 14 piedi e di un rettangolo di dimensioni 11*14 piedi, possiamo ora trasformare il rettangolo ABCD in un quadrato di uguale superficie completando la quadratura iniziata da Francone:





Prolungare verso destra il lato DC e verso il basso il lato BC.

Fare centro nel punto C e tracciare un arco con raggio CB, fino a fissare il punto E.

Determinare il punto medio di DE: è P.

Fare centro nel punto P e, con raggio PD = PE, tracciare una semicirconferenza da D a E. Essa taglia il prolungamento di BC in un punto, F.

Per il 2° teorema di Euclide applicato al triangolo rettangolo DFE, l'altezza CF è *medio proporzionale* fra le proiezioni dei cateti DF e FE sull'ipotenusa DE:

$$DC : CF = CF : CE$$

$$CF^2 = DC * CE$$

$$CF = \sqrt{(DC * CE)}$$

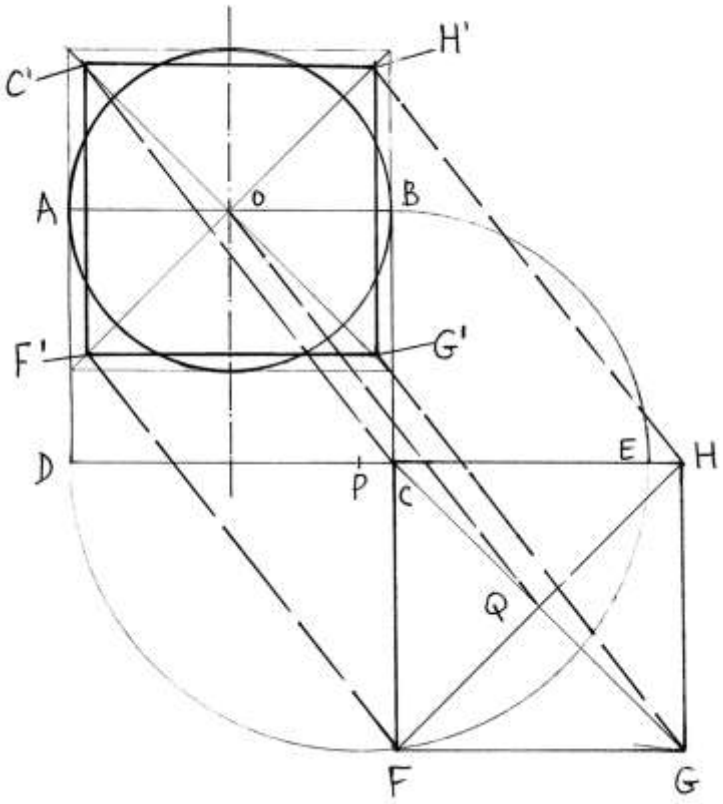
Nelle precedenti formule, DC e CE corrispondono ai lati del rettangolo ABCD:

DC = AB e CE = CB.

Sul segmento CF costruire il quadrato CFGH che ha la stessa superficie del rettangolo ABCD e ha area approssimativamente uguale a quella del cerchio di centro O e diametro AB.

Occorre ora *spostare* il quadrato CFGH nel cerchio in modo da rendere entrambe le figure concentriche.

Tracciare le diagonali del quadrato circoscritto al cerchio e le diagonali del quadrato CFGH: queste ultime si incrociano nel punto Q:



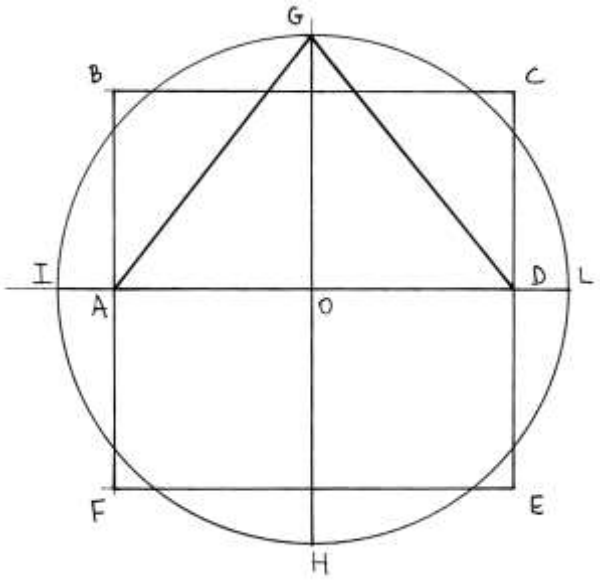
Disegnare il segmento QO e, parallelamente ad esso, tracciare segmenti dai vertici del quadrato CFGH fino a intersecare le diagonali del quadrato circoscritto. I segmenti QO, CC', FF', GG' e HH' hanno la stessa lunghezza.

Il quadrato C'F'G'H' ha le stesse dimensioni di quello CFGH ed è equivalente, con buona approssimazione, al cerchio di centro O e diametro AB.

Cerchio equivalente a un quadrato

La costruzione che segue è l'inverso di quella di Francone e provvede a convertire un quadrato in un cerchio, senza richiedere il passaggio intermedio della tracciatura di un rettangolo.

Costruire un quadrato con lato di lunghezza *proporzionale a 11*: è BCEF.



Tracciare la mediana AD e la perpendicolare passante per il punto medio O.
Dal punto O misurare sulla verticale una lunghezza *proporzionale a 7*: viene fissato il punto G.

Fare centro in O e, con raggio OG, disegnare una circonferenza.

L'arco di lunghezza uguale a 1/4 della circonferenza appena tracciata, ad esempio $\overset{\frown}{GL}$, è con buona *approssimazione*, lungo proporzionalmente a 11 e cioè:

$$\overline{AD} \cong \overset{\frown}{GL}$$

.

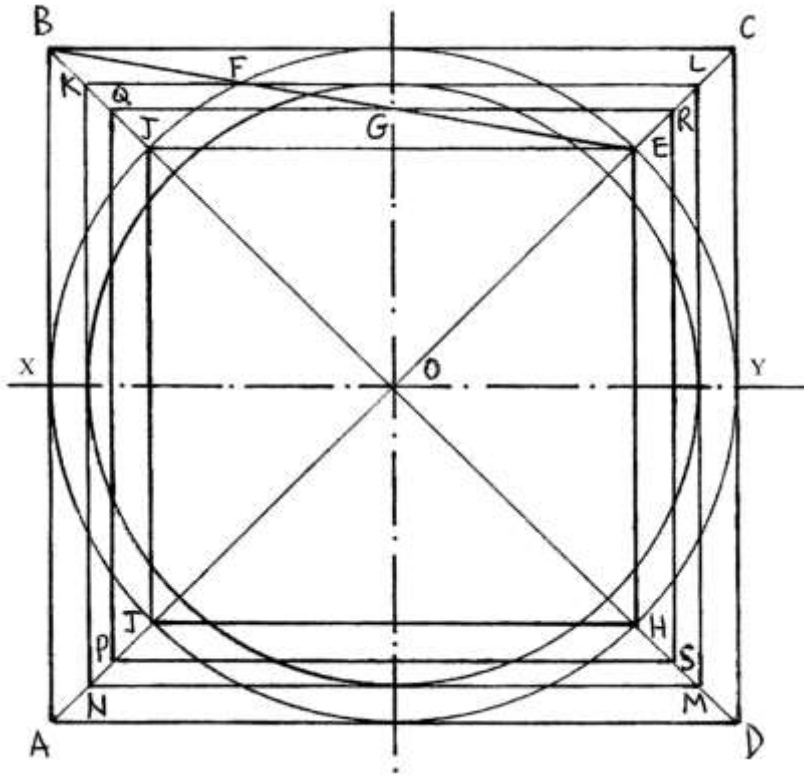
<u>La quadratura del cerchio secondo Oronce Finé</u>

Il trattato di matematica del francese Oronce Finé (1494 – 1555) fu tradotto in italiano da Cosimo Bartoli che lo pubblicò a Venezia nel 1587.

Nel libro "Della Geometria", foglio 70 *verso* dell'edizione italiana, è descritta una costruzione per ottenere la quadratura *approssimata* del cerchio.

Le figure che segue derivano da quella costruzione.

ABCD è un quadrato circoscritto a una circonferenza di centro O e di diametro XY: vale la relazione: AB = XY.



Tracciare il diametro verticale, perpendicolare a quello XY e le diagonali del quadrato, AC e BD.

La circonferenza interseca la diagonale AC in un punto, E: costruire il quadrato EHIJ.

Disegnare il segmento BE: esso taglia la circonferenza nel punto F e il diametro verticale nel punto G.

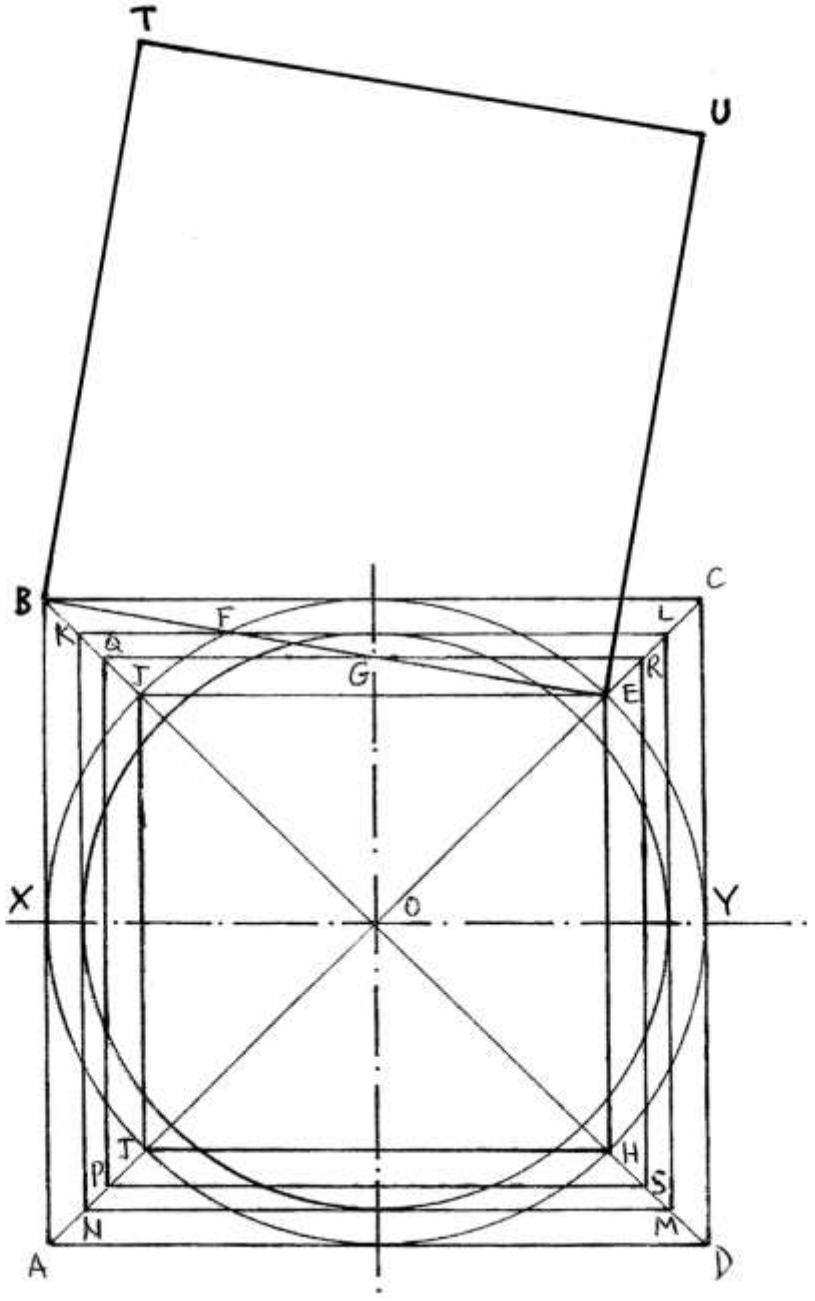
Per il punto F condurre il segmento KL passante per il punto F, che è terminato dalle sue intersezioni (K e L) con le diagonali del quadrato ABCD.

Costruire il quadrato KLMN.

Facendo centro in O, disegnare la circonferenza inscritta nel quadrato KLMN, concentrico ad ABCD.

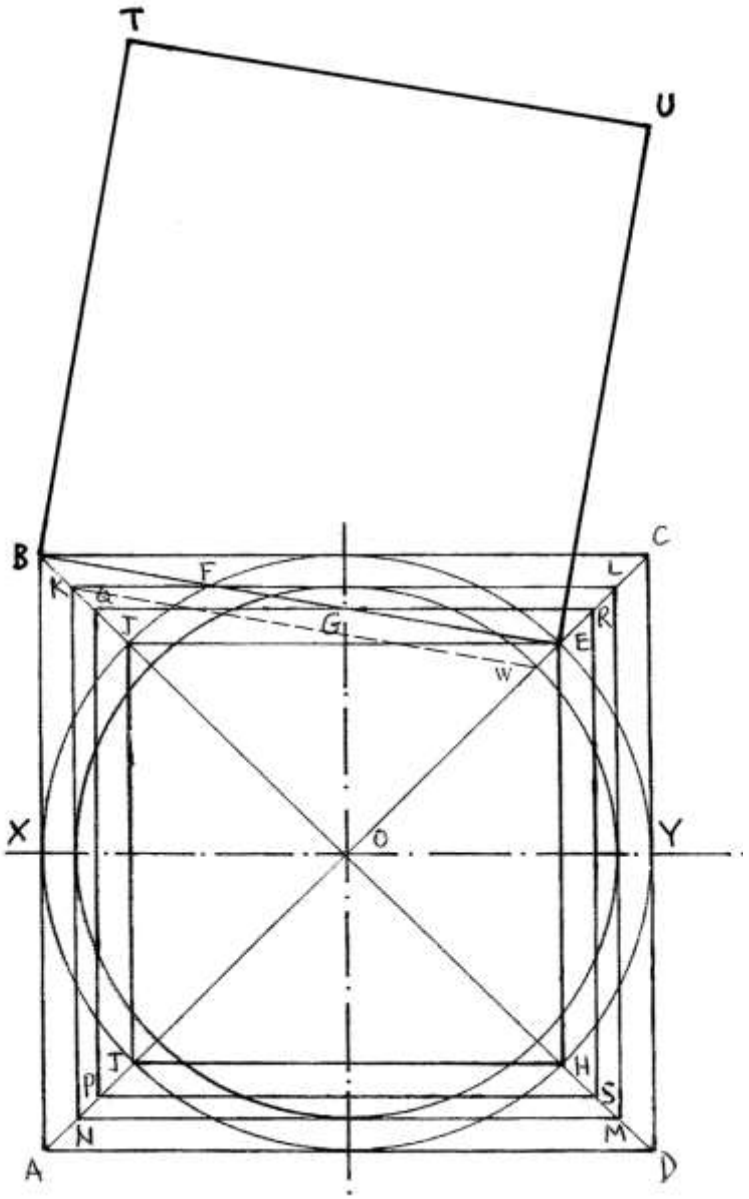
Per il punto G tracciare il segmento QR e il quadrato QRSP.

Sul segmento BE costruire il quadrato BTUE: esso ha, con buona *approssimazione*, la stessa area del cerchio di centro O e diametro XY:



La circonferenza interna interseca la diagonale AC in un punto, W.

Il segmento KW, tratteggiato nella figura che segue, è il lato del quadrato di superficie *approssimativamente* uguale a quella del cerchio di raggio OW:

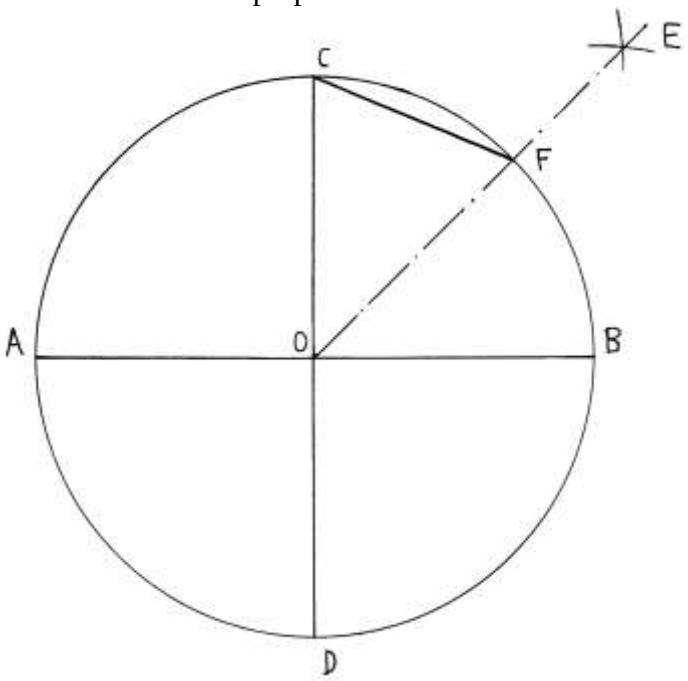

T
U
B
C
F
L
K
G
J
G
R
E
W
X
O
Y
J
H
P
S
N
M
A
D

- APPROFONDIMENTO -

La quadratura del cerchio secondo Oronce Finé

Il ricercatore francese Jean-Paul Truc (vedere bibliografia) ha attribuito a Oronce Finé la costruzione che è descritta in questo paragrafo. Essa utilizza la *sezione aurea*.

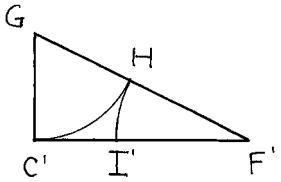
AB e CD sono due diametri fra loro perpendicolari e O è il centro del cerchio da quadrare:



Costruire la bisettrice dell'angolo COB: è la semiretta OE che intercetta la circonferenza nel punto F.

La corda CF (che è un lato dell'ottagono regolare inscritto) deve essere divisa secondo la *sezione aurea*.

Tracciare il segmento C'F' di lunghezza *uguale* a quella di CF:



Dal punto C' elevare la perpendicolare a C'F' e fissare la lunghezza di C'G uguale a ½ di quella di C'F'. Il triangolo GC'F' è rettangolo.

Fare centro in G e con raggio GC' disegnare un arco da C' fino a incontrare l'ipotenusa GF' nel punto H.

Con centro in F' e raggio F'H tracciare un arco da H fino a tagliare C'F' nel punto I'.

Il segmento C'F' è ora diviso secondo la sezione aurea. I'F' è *medio proporzionale* fra il segmento C'I' e il cateto C'F':

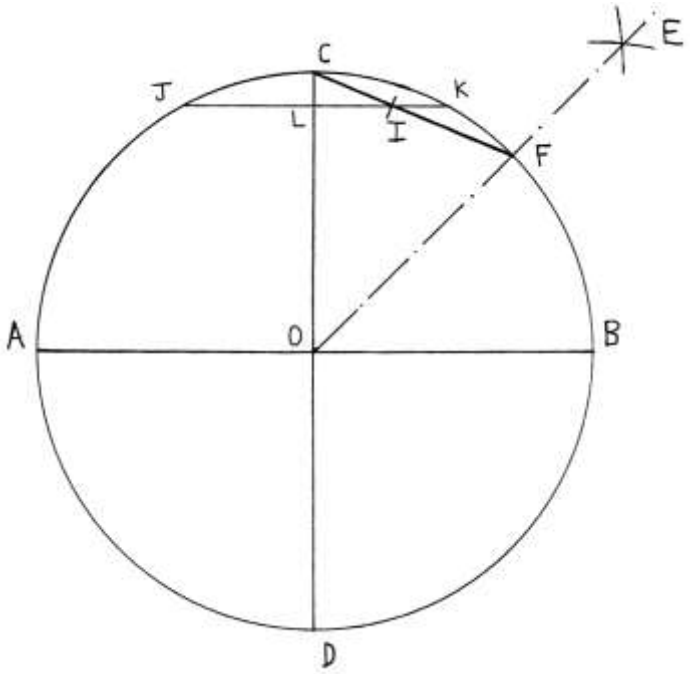
C'I' : I'F' = I'F' : C'F' da cui

$(I'F')^2 = C'I' * C'F'$.

Il rapporto fra le lunghezze delle due parti che formano il cateto C'F' è:

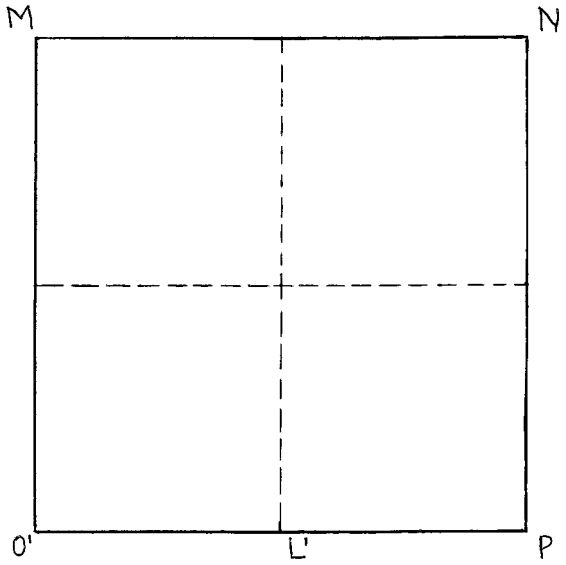
$$I'F'/C'I' = \Phi \approx 1{,}618\ldots$$

Con il compasso misurare la lunghezza di F'I' e riportarla sulla corda FC a partire da F: viene fissato il punto I.



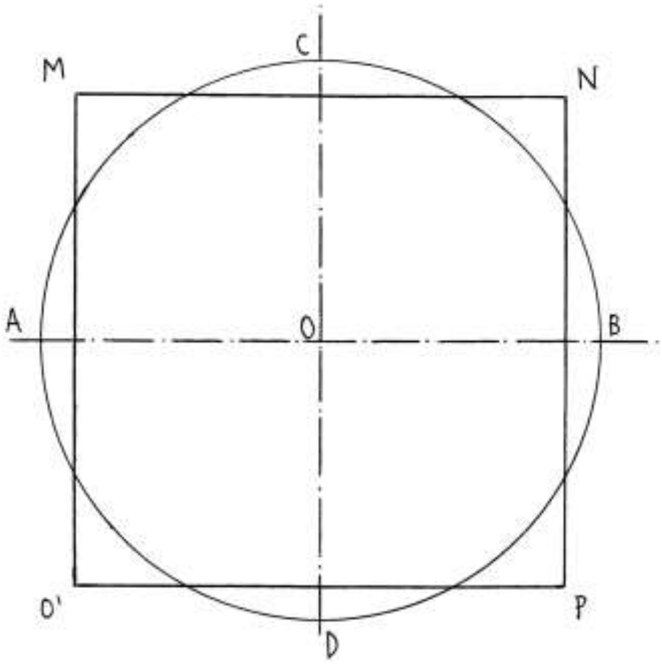
Per il punto I disegnare una corda, JK, parallela al diametro AB: essa incontra CD in un punto, L.

Il segmento OL è lungo *approssimativamente* quanto la metà del lato del quadrato equivalente al cerchio:



O'MNP è il quadrato cercato.

La figura che segue sovrappone il cerchio originario e il quadrato O'MNP:



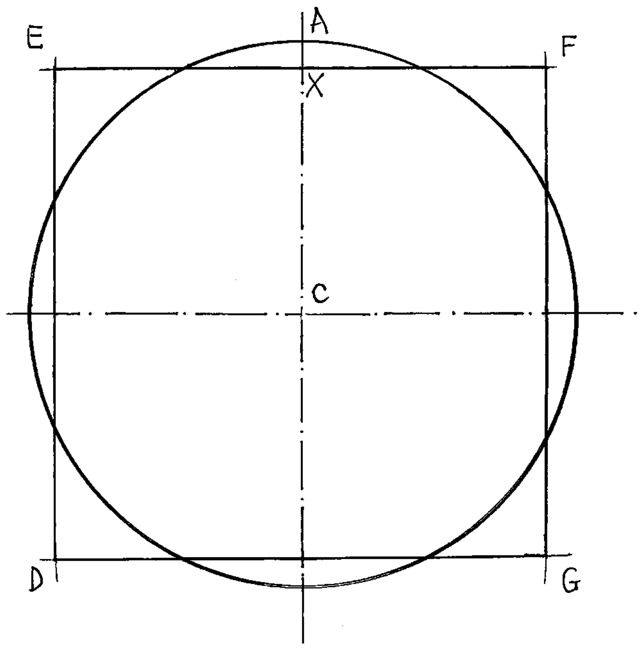
- -

<u>La quadratura di Van Eyck</u>

Il matematico olandese Simon Van Eyck (conosciuto anche come Duchesne o Duchêne) aveva già proposto un metodo per la quadratura del cerchio nel 1583.

Egli ritenne che la frazione 39/22 ≅ 1,7727 fosse una buona approssimazione del valore di $\sqrt{\pi} \cong 1,7724$.

Il cerchio ha raggio CA:



CX è un segmento uguale alla lunghezza di metà del lato del quadrato da costruire con l’aiuto del grafico della figura che segue.

Tracciare due semirette a partire da uno stesso vertice, A: una è orizzontale e l'altra è obliqua.

A partire da A riportare sulla semiretta orizzontale la lunghezza del raggio del cerchio, AC = CA.

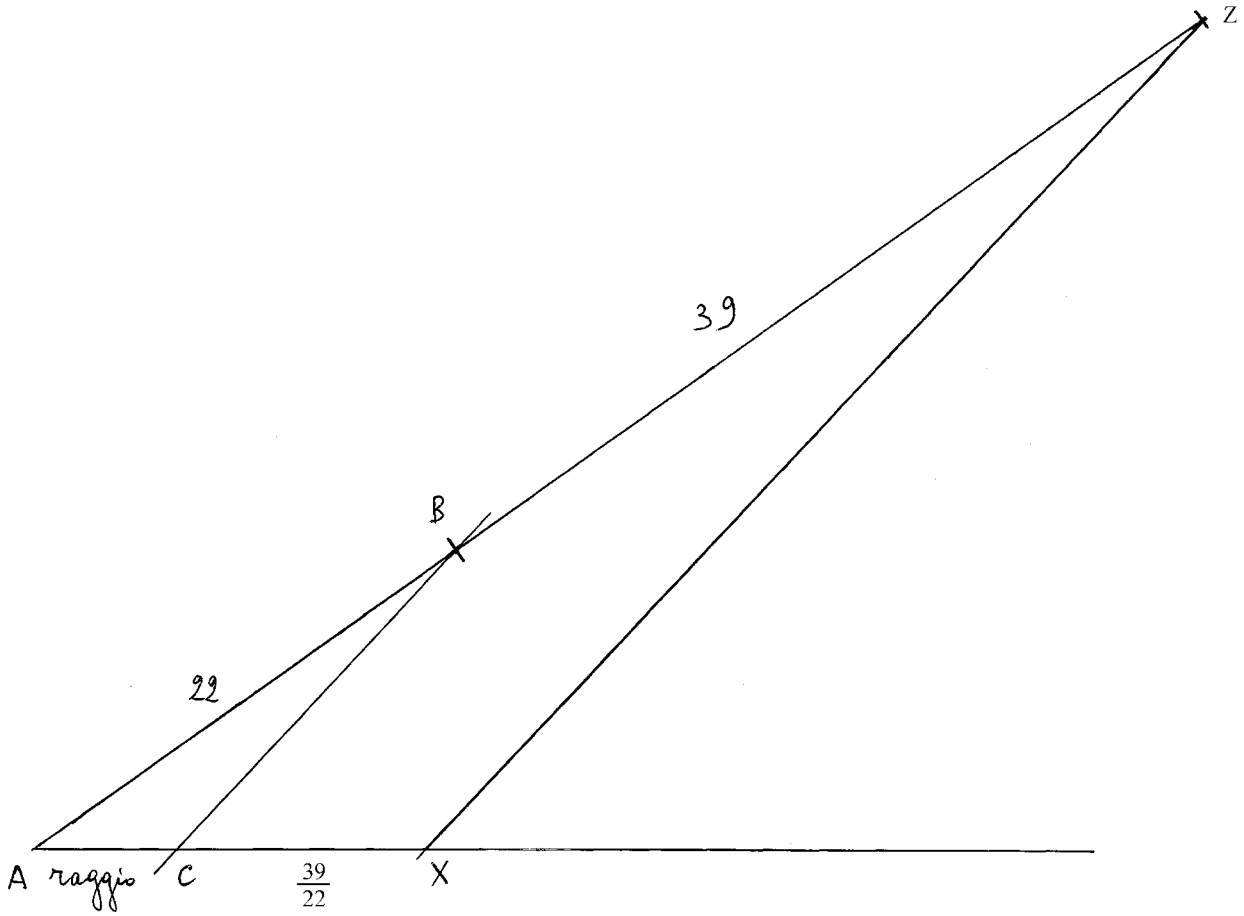
Sempre da A, sulla semiretta obliqua riportare in successione le lunghezze di 22 e di 39: sono fissati i punti B e Z.

Nota: per ragioni di spazio, il grafico non è in scala.

Collegare i punti B e C. A partire da Z disegnare una linea parallela a BC fino a incontrare la semiretta orizzontale in un punto, X. Il segmento CX è dato da:

CX = AC * 39/22 .

Riportare la lunghezza di CX sul grafico con il cerchio, a partire dal punto C lungo il raggio CA.



DEFG è il quadrato che *approssimativamente* ha la stessa area del cerchio.

Quadratura del cerchio – metodi di Sonnet

Le due costruzioni che seguono sono attribuite al geometra francese Hippolyte Sonnet, vissuto nel XIX secolo.

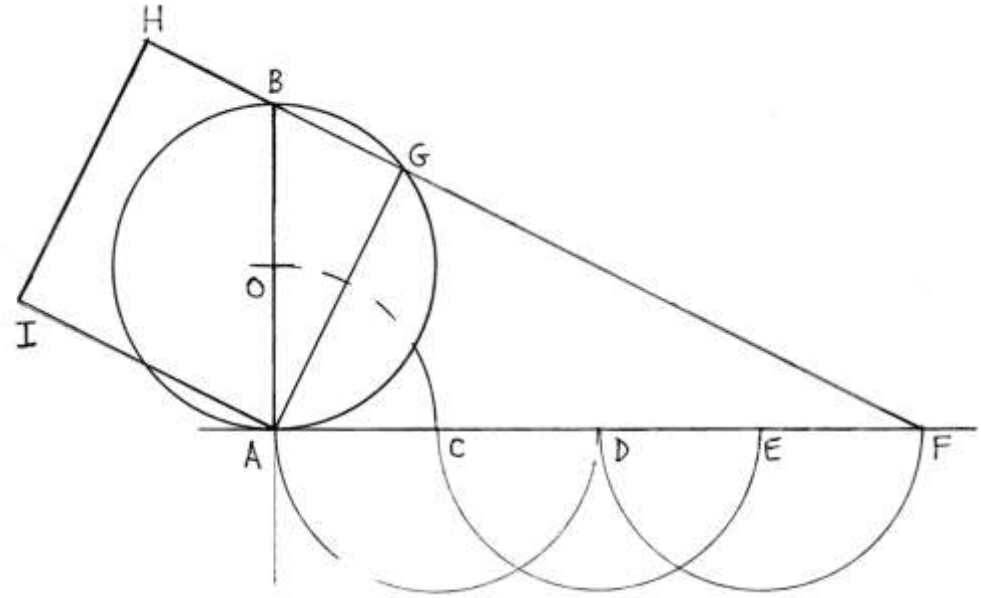
Un cerchio di raggio $r = 1$ ha superficie uguale a $\pi * r^2 = \pi * 1^2 = \pi$.

Il quadrato di superficie equivalente ha lato lungo: $\text{lato} = \sqrt{\pi}$.

La radice quadrata di π è:

$$\sqrt{\pi} \cong \sqrt{(3{,}141592654)} \cong 1{,}772453851\ldots .$$

Disegnare una circonferenza con centro in O e raggio r e il diametro verticale AB.



Tracciare la retta tangente alla circonferenza nel punto A. A partire da A riportare *quattro* volte la lunghezza del raggio r, fino a stabilire il punto F.

Collegare i punti B e F: il segmento BF taglia la circonferenza nel punto G.

La corda AG è il lato del quadrato AGHI che ha superficie *approssimativamente* uguale a quella del cerchio con centro in O.

Il segmento BF è l'ipotenusa del triangolo rettangolo ABF e la sua lunghezza è così calcolata:

$$AB = 2 * r \qquad e \qquad AF = 4 * r$$

$$BF^2 = AB^2 + AF^2 = (2 * r)^2 + (4 * r)^2 = 4 * r^2 + 16 * r^2 = 20 * r^2 .$$

Ne consegue che $BF = r * \sqrt{20} = 2 * r * \sqrt{5}$.

I triangoli ABF e ABG sono rettangoli e simili fra loro e ciò permette di determinare la lunghezza del lato $AG = x$:

$$AB : BF = AG : AF, \text{ ma } AG = x \quad \text{per cui}$$

$$2 * r : 2 * r * \sqrt{5} = x : 4 * r$$

$$x = (2 * r * 4 * r)/(2 * r * \sqrt{5}) = 4 * r/\sqrt{5}/5 \cong 1{,}788854382 * r .$$

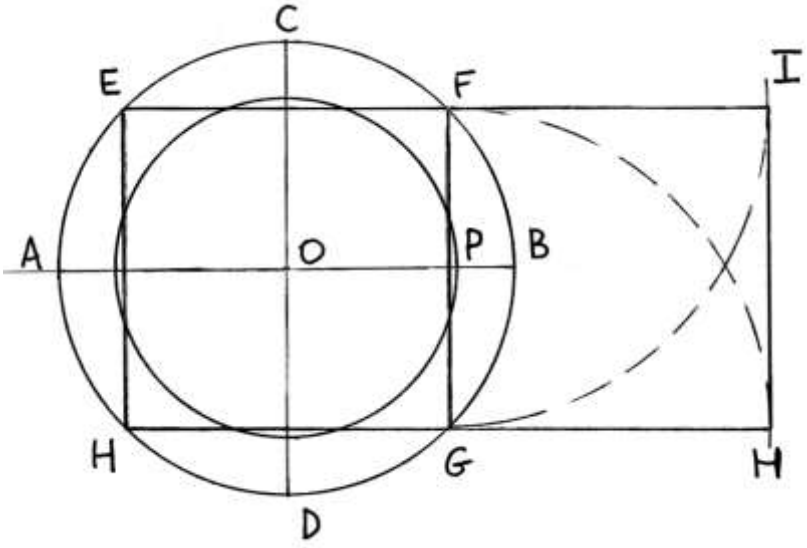
La parte numerica dell'ultima relazione è l'approssimazione per *eccesso* di $\sqrt{\pi}$.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Disegnare due circonferenze concentriche con raggi OP = r e OA = R con

$$R = 5/4 * r .$$

Tracciare i due diametri perpendicolari AB e CD:



Costruire il quadrato inscritto nella circonferenza esterna: è EFGH. Esso ha i lati paralleli o perpendicolari ai diametri AB e CD.

Il lato del quadrato è lungo

$$FG = \sqrt{2} * OF = \sqrt{2} * 5/4 * OP .$$

La costante contenuta nell'ultima espressione vale:

$\sqrt{2} * 5/4 \cong 1{,}7677669\ldots$ e questo risultato si avvicina a quello di $\sqrt{\pi}$.

Il quadrato FGHI ha *approssimativamente* la stessa superficie del cerchio di raggio OP.

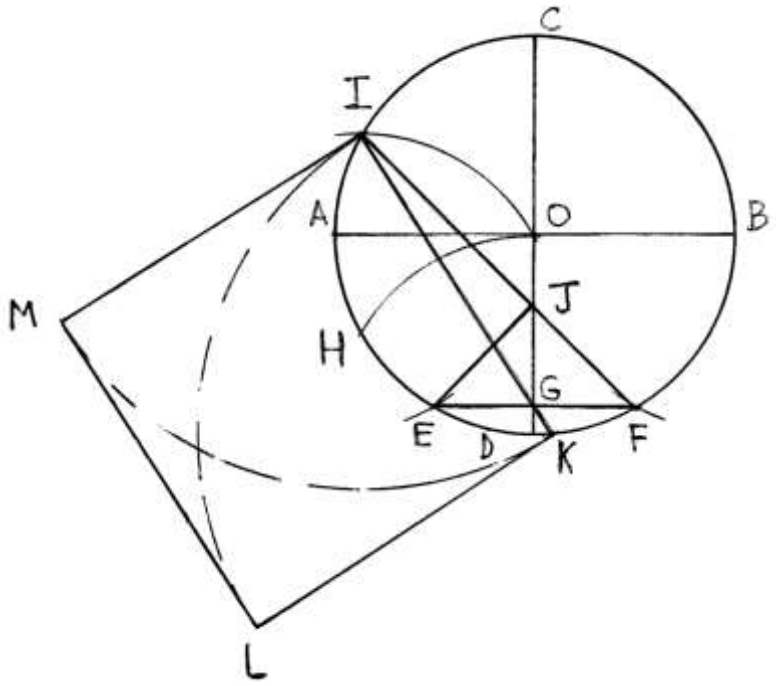
Quadratura secondo Willich

La costruzione che segue fu esposta da C. M. Willich nel 1855.

Disegnare una circonferenza con centro in O e i suoi due diametri perpendicolari AB e CD. Con la stessa apertura usata per la circonferenza fare centro in A e in B e fissare i punti E e F.

La corda EF è il lato dell'esagono regolare inscritto e ha la stessa lunghezza del raggio.

Il punto G è medio della corda EF.



Con la solita apertura, fare centro in E e stabilire il punto H; poi fare centro in H e tracciare un arco che taglia la circonferenza nel punto I. Disegnare la corda IF che incrocia il diametro verticale nel punto J.

Tracciare una corda per i punti I e G, fino a intersecare la circonferenza in un punto, K.

La corda IK è il lato del quadrato IKLM che ha area *approssimativamente* uguale a quella del cerchio.

La corda IK è lunga $IK = 1{,}77198 * r$.

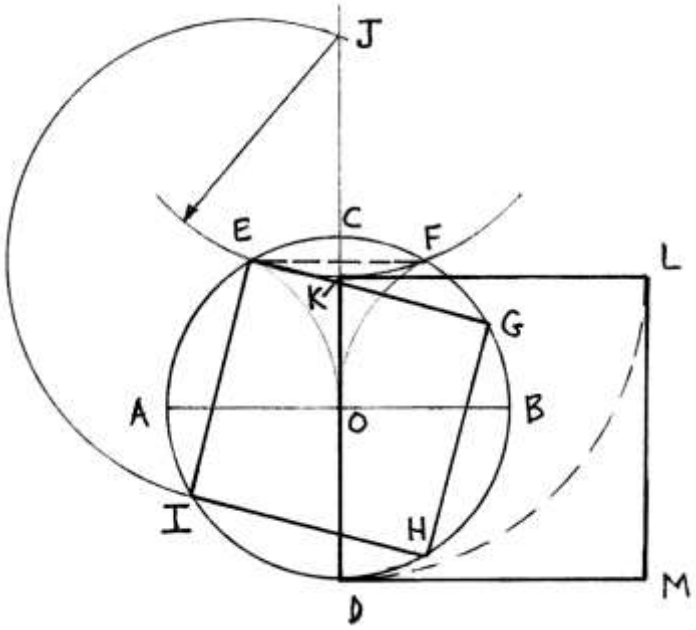
Con $r = 1$, l'area del quadrato è: $1{,}77198^2 \cong 3{,}139913$.

Il risultato si avvicina al valore approssimato di $\pi = 3{,}1415\ldots$

<u>Quadratura secondo Perigal</u>

Henry Perigal (1801 – 1898) era un agente di cambio inglese e un matematico.

Disegnare una circonferenza di centro O e i due diametri perpendicolari AB e CD:



Con la stessa apertura fare centro nei punti A e B e fissare i punti E e F: la corda EF è il lato dell'esagono regolare inscritto.

A partire dal vertice E costruire il quadrato inscritto EGHI.

Fare centro in E e con raggio EI tracciare un arco da I fino a tagliare il prolungamento di CD in un punto, J.

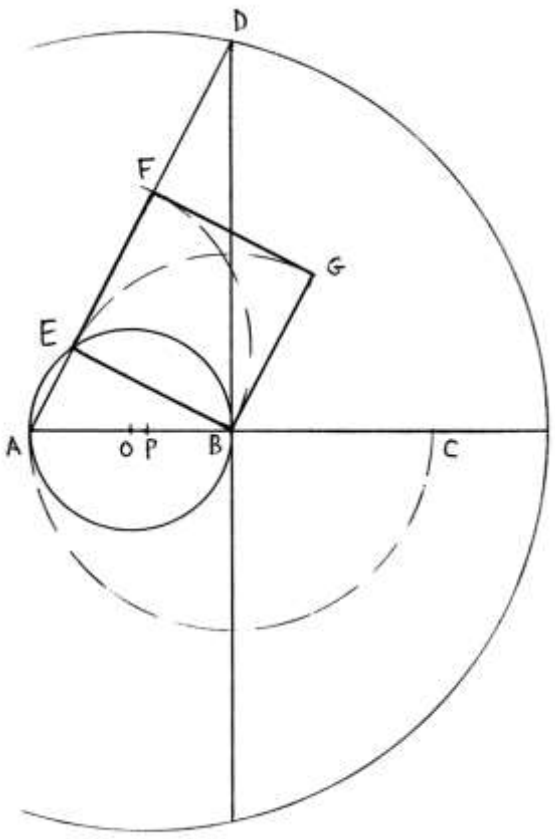
Fare centro in J con raggio JE e disegnare un arco passante per i punti E e F: esso interseca il diametro CD in un punto, K.

Il segmento DK è il lato del quadrato DKLM, che ha *approssimativamente* la stessa superficie del cerchio.

Quadratura secondo Postula

Il metodo è stato descritto da Italo Ghersi e si deve a H. Postula che lo pubblicò su di una rivista matematica nel 1895.

AB è il diametro orizzontale di una circonferenza di centro O. Determinare la lunghezza di 1/6 del raggio OB e riportare questa misura da O fino a fissare il punto P: $OP = 1/6 * OB$.



Condurre la tangente alla circonferenza nel punto B.

Prolungare verso destra il diametro AB.

Fare centro nel punto B e, con raggio BA, tracciare una semicirconferenza fino a stabilire il punto C.

Con il compasso, misurare la lunghezza di AC e fare centro nel punto P: disegnare un arco che taglia la tangente nel punto D.

Collegare i punti A e D: il segmento interseca la circonferenza in un punto, E.

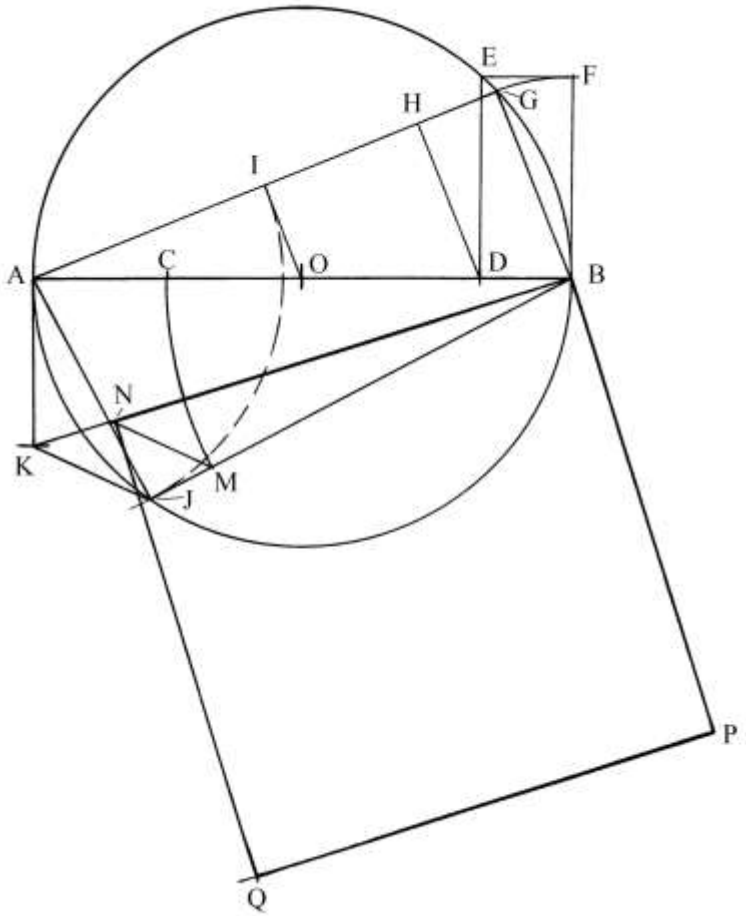
Il triangolo AEB è rettangolo.

Il cateto EB è il lato del quadrato EFGB che ha la stessa superficie *approssimata* del cerchio di diametro AB.

La quadratura del cerchio secondo Ramanujan

Srinivasa Ramanujan (1887 – 1920) è stato un importante matematico indiano. Fra i suoi lavori ci è la proposta di una costruzione geometrica per ricavare la quadratura di un cerchio. Il metodo fornisce una soluzione approssimata *quasi esatta*.

AB è un diametro del cerchio di centro O:



Fissare il punto medio del raggio OA: è C. Dividere il raggio OB in due parti le cui lunghezze sono in rapporto 2:1: OD = 2*DB.

Dai punti A e B tracciare le tangenti alla circonferenza, come in figura: esse sono perpendicolari al diametro AB.

Dal punto D innalzare la perpendicolare a AB fino a incontrare la circonferenza nel punto E: disegnare EF parallelo a AB.

Fare centro in B e con raggio BF tracciare l'arco FG.

Disegnare le corde BG e AG.

Dai punti D e O condurre le perpendicolari a AG: sono DH e OI.

Da B tracciare la parallela a AG: è la corda BJ.

Con il compasso misurare HI e riportare questa lunghezza facendo centro in A per fissare il punto K. Collegare K con J.

Fare centro in B e con raggio BC disegnare un arco da C fino a tagliare BJ nel punto M. Da questo ultimo tracciare la parallela a JK fino a incrociare KB nel punto N.

NB è il primo lato del quadrato NBPQ che area pressoché uguale a quella del cerchio.

%%%%%%%%%%%%%%

Ramanujan ha dimostrato la validità della sua soluzione con una serie di considerazioni aritmetiche. Eccone di seguito la descrizione.

AB è il diametro, indicato con *d*.

Valgono le seguenti relazioni:

$BG^2 = (5/36) * d^2$ e $AG^2 = (31/36) * d^2$.

Dall'uguaglianza delle lunghezze dei segmenti AK = HI e AJ = AI consegue:

$AJ^2 = (31/144) * d^2$ e $AK^2 = (31/324) * d^2$.

Il triangoli ABJ è rettangolo perché inscritto in un semicerchio e la sua ipotenusa, AB, è un diametro. Il cateto BJ è lungo:

$BJ^2 = AB^2 - AJ^2 = d^2 - (31/144) * d^2 = (113/144) * d^2$.

Anche ABK è un triangolo rettangolo e la sua ipotenusa BK è:

$BK^2 = AB^2 + AK^2 = d^2 + (31/324) * d^2 = (355/324) * d^2$.

Vale la proporzione:

BJ : BK = BM : BN che può essere scritta anche come: BJ/BK = BM/BN .

In questa proporzione BN è l'unica *incognita*.

La prima frazione vale:

$BJ/BK = \sqrt{[(113/144) * d^2]}/[\sqrt{[355/324) * d^2]} = (3/2) * \sqrt{(113/355)}$.

Dalla proporzione precedente ricaviamo BN:

$BN = (BK * BM)/BJ = (BK/BJ) * BM = 1/(BJ/BK) * BM =$

$= 1/[(3/2) * \sqrt{(113/355)}] * ¾ * d = d/2 * \sqrt{(355/113)}$.

L'espressione $\sqrt{(355/113)}$ è:

$\sqrt{(355/113)} \approx \sqrt{(3,14159292)} \approx \sqrt{\pi}$.

L'area del cerchio è:

$Area_{CERCHIO} = \pi * (d/2)^2$.

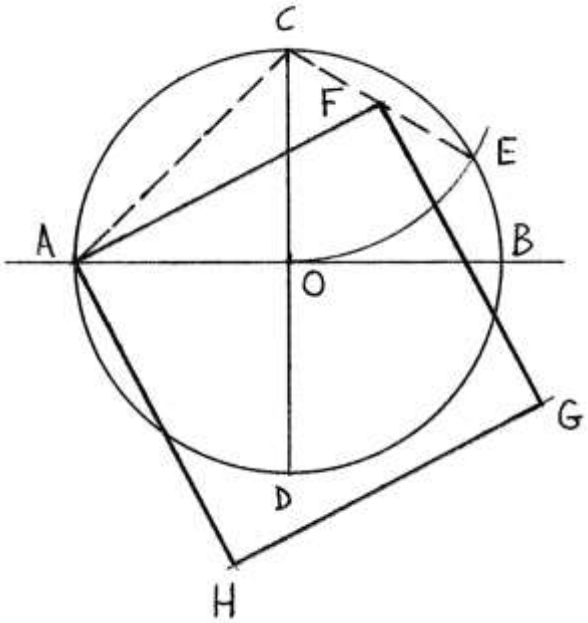
L'area del quadrato NBPQ è:

$Area_{NBPQ} = [d/2 * \sqrt{(355/113)}]^2 \approx d^2/4 * 355/113$, valore che è quasi uguale a quello dell'area del cerchio.

Quadratura – metodi di Ghersi

Di seguito sono spiegati due metodi per la quadratura del cerchio, descritti da Italo Ghersi nel suo libro citato in bibliografia.

Disegnare una circonferenza con centro in O e i suoi due diametri AB e CD:



Tracciare la corda AC: essa è un lato del quadrato inscritto ACBD, non costruito.

Fare centro in C e, con raggio CO, disegnare un arco da O fino a tagliare la circonferenza nel punto E: tracciare la corda CE (che è il lato dell'esagono regola inscritto).

Determinare il punto medio di CE: è F.

Il segmento AF è il lato del quadrato AFGH che ha *approssimativamente* la stessa superficie del cerchio di centro O.

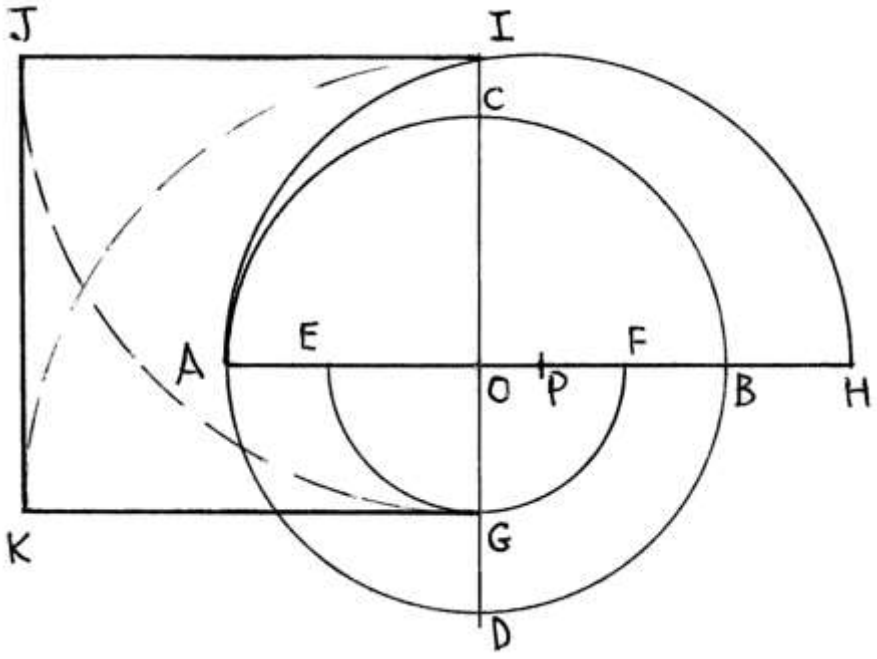
Il lato AF è lungo: $AF \cong 1{,}77188 * OA$.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

La costruzione che segue è stata descritta per la prima volta nel 1913 nel testo di Ernest William Hobson (1856 – 1933) citato nella bibliografia: Ghersi non indica la sua fonte.

Tracciare la circonferenza con centro in O (e raggio r) e i diametri AB e CD, fra loro perpendicolari.

Determinare la lunghezza di $3/5 * r$ e con questa apertura di compasso fare centro in O e disegnare una semicirconferenza da e a F: essa interseca il diametro verticale in un punto, G.



Stabilire la lunghezza di $3/2 * r$ e riportarla sul diametro AB, a partire da O fino a fissare il punto H.

Determinare il punto medio del segmento AH: è P.

Fare centro in P e con raggio PA disegnare una semicirconferenza da A fino a H: essa taglia il diametro verticale in un punto, I.

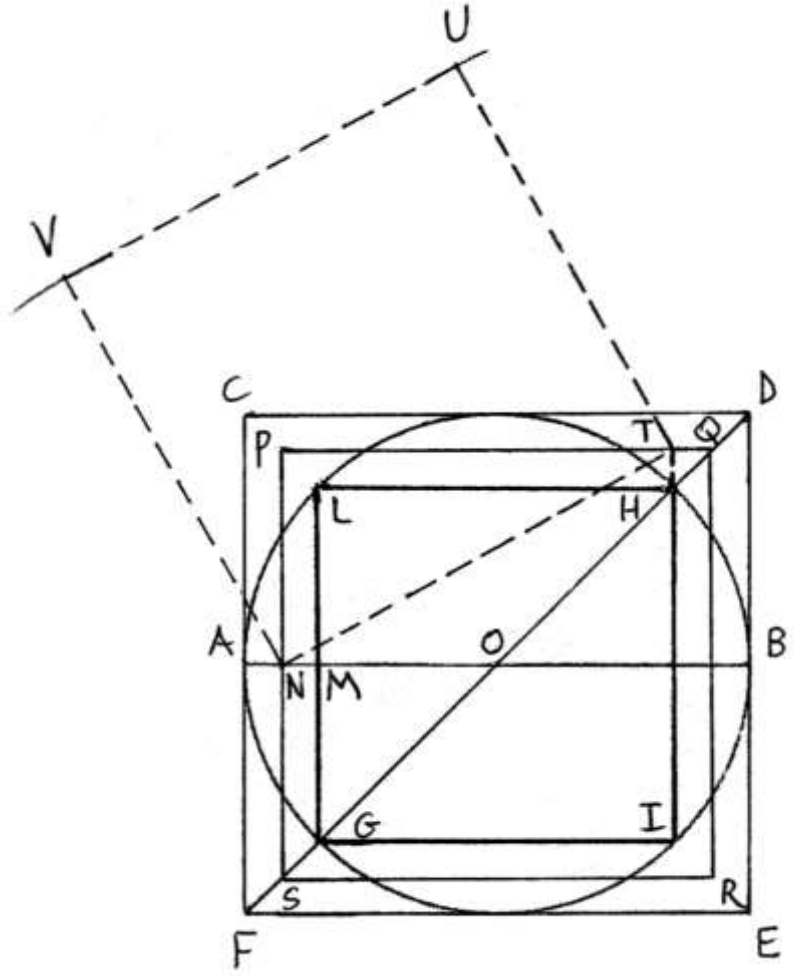
Il segmento GI è il lato del quadrato GIJK che ha con buona *approssimazione* la stessa superficie del cerchio di centro O e raggio $OA = r$.

Il lato GI è lungo: $GI \cong 1{,}77246 * r$.

Metodo di Martin Gardner

L'americano Martin Gardner (1914 – 2010) è stato il più famoso divulgatore della matematica dei tempi moderni.

A lui si deve la costruzione *approssimata* della quadratura del cerchio descritta nella figura che segue:



La costruzione fornisce un risultato accettabile per gli usi tecnici.

AB è il diametro di una circonferenza di centro O. Disegnare il quadrato CDEF con lato lungo quanto AB e tangente alla circonferenza.

Tracciare la diagonale FD: essa interseca la circonferenza nei punti G e H.

Disegnare il quadrato GLHI: il lato LG taglia il diametro AB in un punto, M.

Determinare il punto medio di AM: è N.

Tracciare il quadrato PQRS.

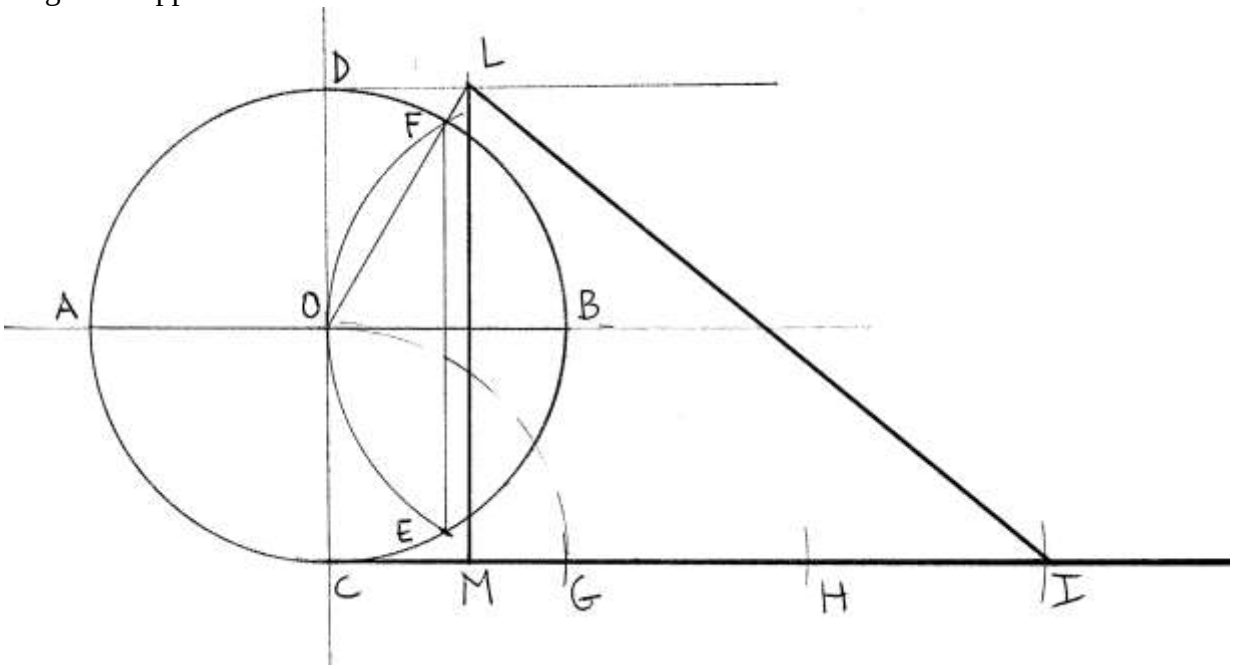
Prolungare verso l'alto il lato IH fino a fissare il punto T.

NT è il lato di un quadrato (NTUV) che ha superficie pressoché uguale a quella del cerchio di diametro AB.

Martin Gardner avrebbe tratto la costruzione da un'opera del catalano Raimondo Lullo (1235 – 1316).

Rettificazione e quadratura

La costruzione serve a determinare, con errore trascurabile accettabile da parte dei tecnici, la lunghezza approssimata della circonferenza:



Tracciare una circonferenza con centro nel punto O e i due diametri AB e CD, fra loro perpendicolari.

Disegnare due tangenti alla circonferenza nei punti C e D.

Con la stessa apertura (OA) fare centro in B: tracciare un arco che determina i punti E e F e la corda EF.

Con apertura CO fare centro in C e disegnare un arco da O fino a tagliare la tangente passante per C in un nuovo punto, G.

Con la stessa apertura fare centro in G e determinare il punto H; ripetere la stessa operazione con centro in H per fissare il punto I.

Tracciare il raggio OF e prolungarlo fino a intersecare la tangente passante per D in un punto: è L.

Dal punto L condurre un segmento parallelo al diametro DC, fino a incrociare la tangente passante per C in un nuovo punto: è M.

Disegnare l'ipotenusa LI del triangolo rettangolo MLI.

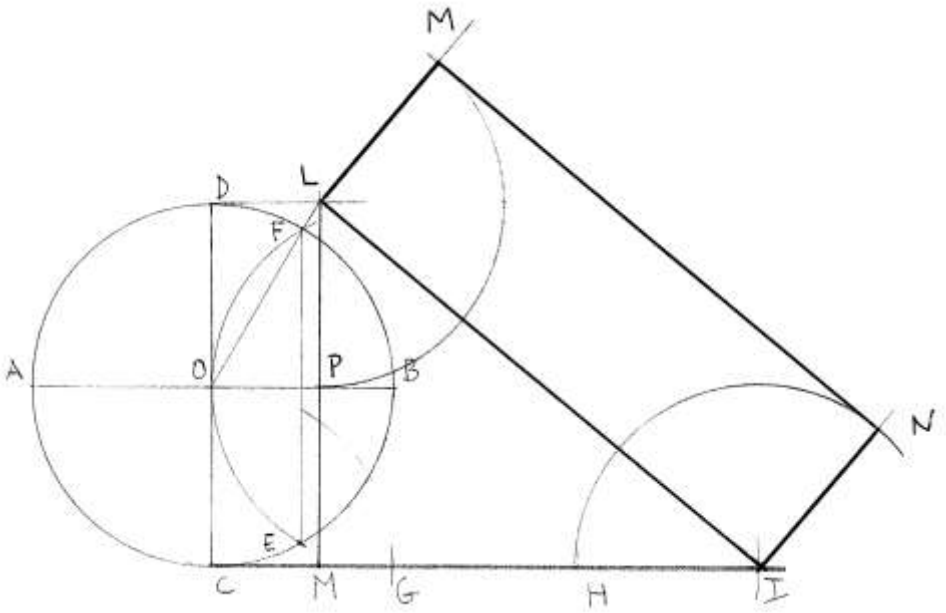
L'ipotenusa LI ha, con buona approssimazione, la lunghezza della semicirconferenza DBC.

La circonferenza è lunga $2 * \pi * r$ e l'area del cerchio è $\pi * r^2$. Perciò $LI = \pi * r$.

Perciò LI = π r.

Costruendo sul segmento LI un rettangolo che abbia altezza uguale a r (= OA) si ricava un quadrilatero che ha area uguale a quella del cerchio di raggio r (= OA).

Dai punti I e L tracciare due linee perpendicolari a LI:

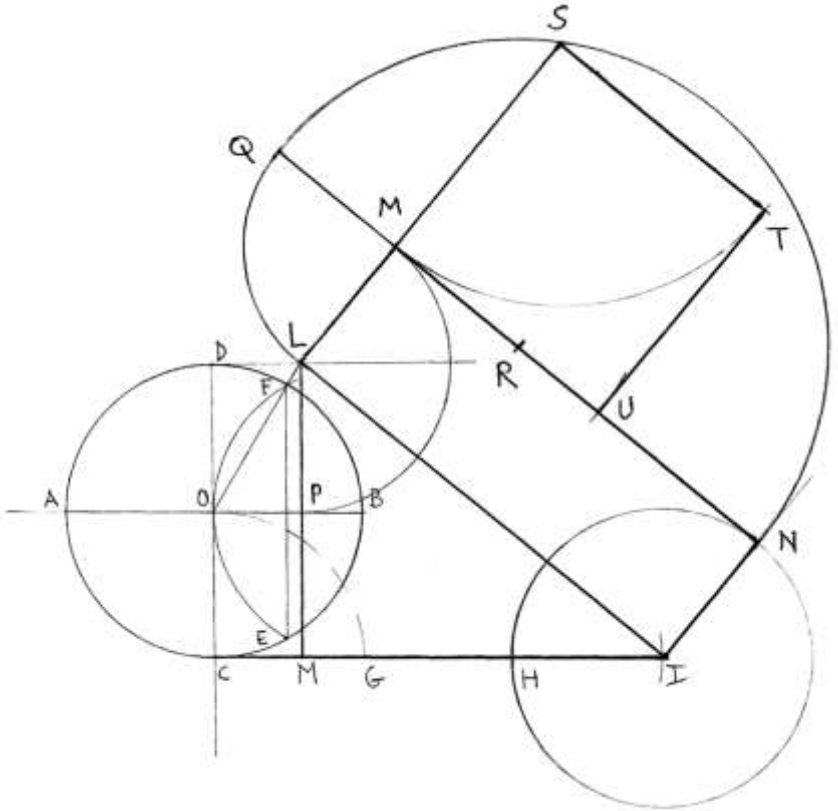


Fare centro in L e con raggio LP (= OA) disegnare un arco da P fino a determinare il punto M.

Fare centro in I e, con la stessa apertura, tracciare l'arco da H fino a fissare il punto N.

Il rettangolo LMNI ha, con approssimazione accettabile, la stessa superficie del cerchio di centro O e raggio OA.

Infine, il rettangolo LMNI può facilmente essere trasformato in un quadrato di uguale superficie, applicando il solito 2° teorema di Euclide:



Il diametro QN ha lunghezza uguale alla somma delle lunghezze dei lati del rettangolo:

QN = QM + MN = ML + MN.

Nella semicirconferenza di centro R, il segmento MS è medio proporzionale fra QM e MN:

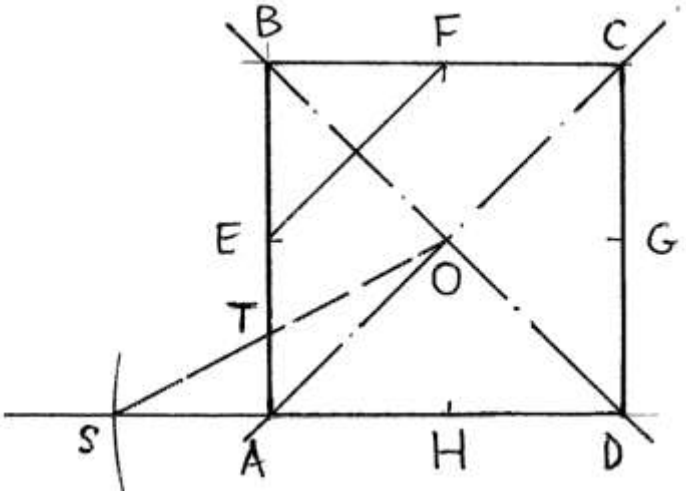
QM : MS = MS : MN.

Il segmento MS è il lato del quadrato MSTU di superficie uguale a quella del rettangolo LMNI e *approssimativamente* uguale a quella del cerchio di centro O e raggio OA.

Cerchio equivalente a un quadrato – costruzione di Ghersi

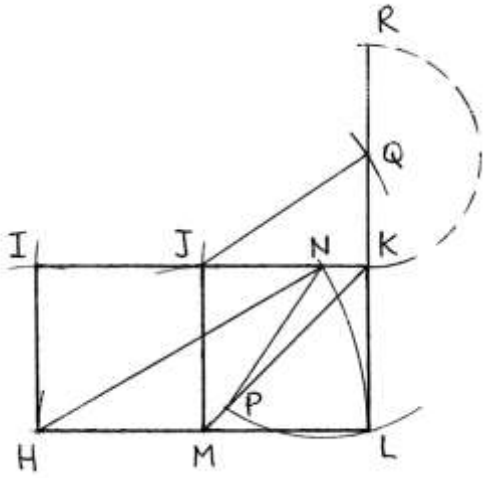
Italo Ghersi propose la costruzione inversa alla quadratura per il passaggio da un cerchio a un quadrato equivalente.

ABCD è il quadrato e E, F, G e H sono i punti medi dei suoi lati:



Tracciare le due diagonali (AC e BD) e la corda EF. O è il centro del quadrato.

Costruire un rettangolo con lati lunghi EF e 2*EF: è HIKL e J e M sono i punti medi dei due lati orizzontali.



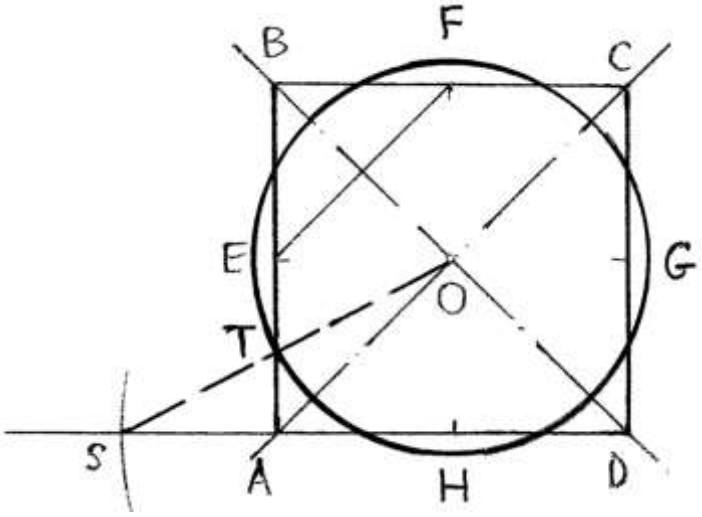
Fare centro in H e con raggio HL disegnare un arco da L fino a tagliare IK in un punto, N. Tracciare la corda MK.

Con raggio NL, fare centro nel punto N e disegnare un arco da L fino a intersecare MK in un punto, P.

Con raggio KP, fare centro in J e tracciare un arco che taglia il prolungamento di LK in un punto, Q.

Da Q riportare la in R la lunghezza di QK.

Con il compasso misurare la lunghezza di KR e fare centro in H: il segmento HS è lungo quanto KR.

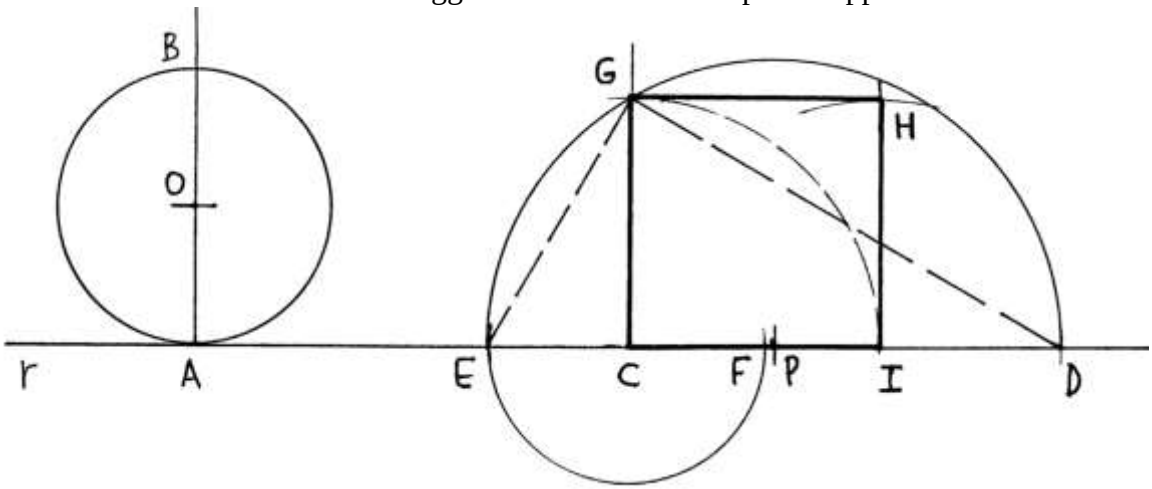


Collegare i punti O e S: il segmento OS incrocia il lato AB in un punto, T.

Il segmento OT è il raggio *approssimato* del cerchio di centro O e di superficie equivalente al quadrato ABCD.

<u>Un metodo antico di quadratura di un cerchio</u>

Un cerchio di centro O e raggio OA rotola su di un piano rappresentato dalla retta r.



Il segmento AD è la lunghezza della circonferenza e C è il suo punto medio:

$$AD = 2 * \pi * OA \quad \text{e} \quad AC = \pi * OA$$

L'area del cerchio di centro O e raggio OA e diametro $AB = 2 * \text{raggio} = d$ è:

$$\text{Area}_{\text{CERCHIO}} = \pi * r^2 = \pi * (d/2)^2 = \pi * d/2 * d/2 .$$

Ma $\pi * d = \text{circonferenza}$ e $d/2 = \text{raggio}$.

Ne deriva che

$$\text{Area}_{\text{CERCHIO}} = (\text{circonferenza}/2) * \text{raggio} .$$

L’area del quadrato cercato è uguale a quella del cerchio:

$$\text{Area}_{\text{CERCHIO}} = \text{Area}_{\text{QUADRATO}} .$$

$$\text{lato quadrato} = \sqrt{(\text{Area}_{\text{CERCHIO}})} = \sqrt{(\text{circonferenza} * \text{raggio})/2}$$

Occorre determinare il *medio proporzionale* fra le due espressioni racchiuse sotto l’ultima radice quadrata: il suo valore sarà la lunghezza del lato del quadrato equivalente.

Sul disegno elevare la perpendicolare alla retta r nel punto C.

Con il compasso misurare la lunghezza di OA e con essa fare centro nel punto C e tracciare una semicirconferenza che fissa i punti E e F.

Il segmento ED è formato dalla somma di:

$$CD = \text{circonferenza}/2 \quad \text{e} \quad EC = \text{raggio} .$$

Determinare il punto medio di ED: è P. Fare centro nel punto P e con raggio PE = PD disegnare una semicirconferenza da E a D: essa interseca la perpendicolare innalzata da C in un punto, G.

EGD è un triangolo rettangolo.

Per il 2° teorema di Euclide il segmento GC è *medio proporzionale* fra le lunghezze di EC e CD ed è il lato del quadrato cercato:

$$CD : CG = CG : EC \quad \text{da cui} \quad CG^2 = CD * EC =$$
$$= (\text{circonferenza}/2) * \text{raggio} .$$

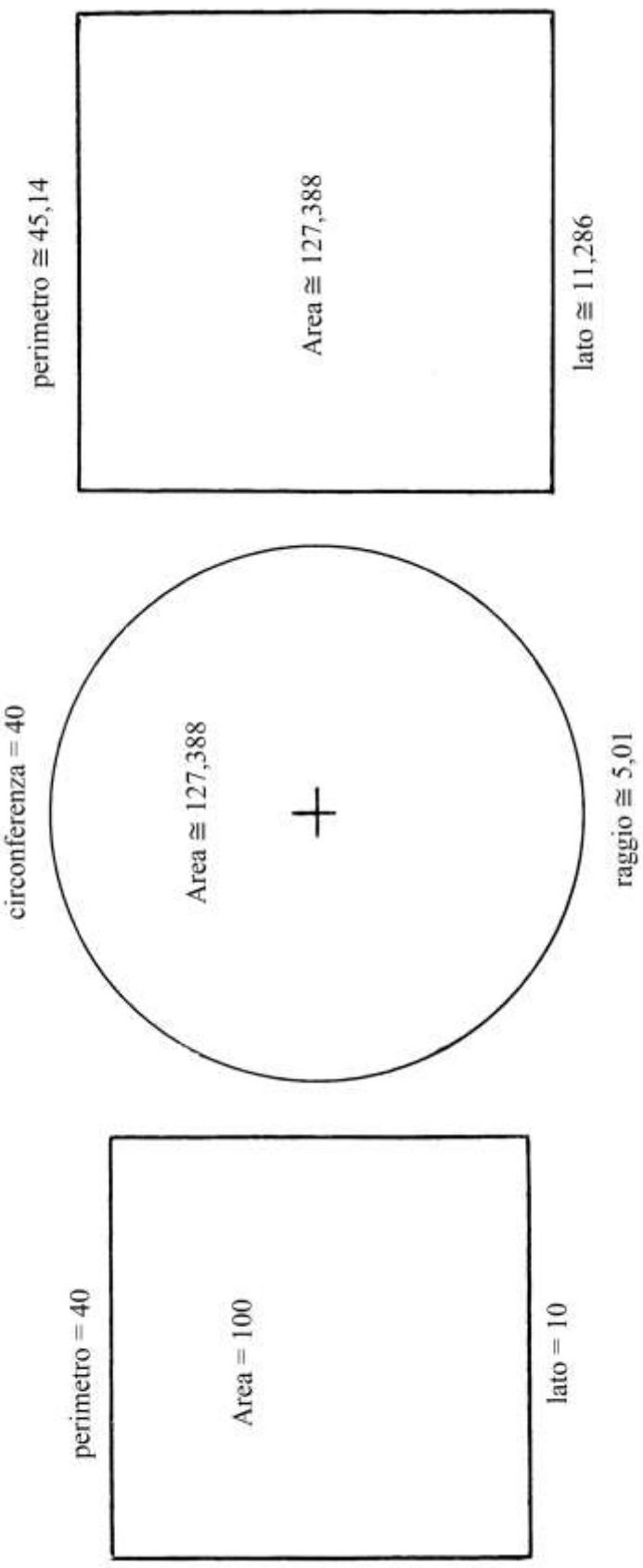
Il segmento CG è lungo

$$CG = \sqrt{[(\text{circonferenza}/2) * \text{raggio}]} .$$

CGHI è il quadrato che ha superficie *quasi* uguale a quella del cerchio di raggio OA.

- APPENDICE -

Un quadrato e un cerchio sono *isoperimetrici*, e cioè hanno lo stesso perimetro: 40 unità per il quadrato 40 unità la lunghezza della circonferenza:



Il lato del quadrato a sinistra nella figura è lungo 10 unità e la sua area è 100 unità^2.
Il cerchio ha raggio uguale a:

raggio ≅ circonferenza/(2 * π) ≅ 40/6,28 ≅ 6,37 unità.

L'area del cerchio è data da:

Area cerchio ≅ π * r^2 ≅ π * [circonferenza/(2 * π)^2 ≅

≅ 127,388 unità^2 .

L'area del quadrato a destra è uguale a quella del cerchio e il suo lato è lungo:

lato ≅ √(127,388) ≅ 11,28 unità.

L'esempio numerico appena descritto fornisce una conclusione: la rettificazione della circonferenza e la quadratura del cerchio non possono essere confuse.

Il quadrato e la circonferenza isoperimetrici delimitano aree differenti.

Il quadrato di destra ha la stessa superficie del cerchio al centro della figura, ma i loro perimetri sono di differente lunghezza.

A parità di superficie il cerchio ha il perimetro più corto fra tutti i poligoni.

- -

Bibliografia

1. Ball Rouse W. "Récréations mathématiques et problèmes des temps anciens et modernes", trad. francese dall'inglese, II parte, Parigi, Librairie Scientifique A. Hermann, 1908, pp. 363.
2. Cartocci Alice, "La matematica degli Egizi", Firenze, Firenze University Press, 2007, pp. 142.
3. Colzani Leonardo, "La quadratura del cerchio e dell'iperbole", 2012, pp. 267, reperito all'indirizzo Internet www.matapp.unimib.it/~leonardo/314/314.pdf .
4. Cusano Niccolò, "Opere filosofiche, teologiche e matematiche", a cura di Enrico Peroli, testo latino a fronte, Milano-Firenze, Bompiani-Giunti, 2017, pp. LXI-3070.
5. De Rosa Agostino, "La Geometria dell'Immagine". Storia dei metodi di rappresentazione. Dall'Antichità al Medio Evo, Torino, UTET, 2000, pp. XII-230.
6. Fineo Oronzio (Oronce Fine), "Opere di Oronzio Fineo del Delfinato", tradotte da Cosimo Bartoli, Venezia, Francesco Franceschi Senese, 1587, pp. 817.
7. Frajese Attilio, "Opere di Archimede", Torino, UTET, 1974, pp. 638.
8. Ghersi Italo, "Matematica dilettevole e curiosa", Milano, Hoepli, 5.a ed., 1988, pp. VIII-778.
9. Gillings Richard J., "Mathematics in the time of the Pharaos", New York, Dover Publications, 1981, pp. xi-288.
10. Hobson Ernest William, "Squaring the circle". A history of the problem, Londra, Cambridge University Press, 1913, pp. XIII-57.
11. Hobson E. W. – Hudson H. P. – Singh A. N. – Kempe A. B., "Squaring the circle and other monographs", USA, Chelsea Publishing Company, 1953, pp. 400.
12. Italo Ghersi, voce su Wikipedia: https://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Italo_Ghersi&oldid=88332941 .
13. Kasi Rao Jagathapu, "Squaring a circle and vice versa – Made simple", pp. 11, http://www.intmath.com/blog/squaring-circle-kasi-rao-jagathapu.pdf .
14. Ossola Carlo, "I libri che hanno fatto gli Italiani", pp. 5, htpp://presidenti.quirinale.it/napolitano/qrnw/statico/eventi/2011-02lett/Ossola.pdf .
15. Truc Jean-Paul, "Un problème classique revisité: La Quadrature du YIN-YANG", https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01349225v1/document .