sergio(punto)calzolani(at)outlook(punto)it

Parole chiave: pendenza presso popoli antichi, gnomone, cotangente, Talete, altezza piramide, unità misura Egizi, cubito, dito, palmo, papiro Rhind, unità misura Sumeri, tavoletta Plimpton 322, formula degli agrimensori, triangolazione, strumenti misura Sumeri e Babilonesi, costruzione di poligoni, funzioni trigonometriche

La prototrigonometria

In origine il significato di *trigonometria* era "misura del triangolo".

Le conoscenze trigonometriche degli Etruschi e dei Romani erano molto limitate: le centuriazioni erano effettuate con il metodo *per ipotenusa* sfruttando il concetto di tangente di un angolo, senza però avere chiara conoscenza della funzione trigonometrica *tangente* (abbreviata con la sigla *tg*).

Le antiche conoscenze in materia di trigonometria possono essere indicate con il termine *prototrigonometria*.

Altre precedenti grandi civiltà, come quella degli Egizi e quella Sumero-Babilonese, usarono un altro metodo: impiegarono la *cotangente* (simbolo *ctg*) per determinare la pendenza in senso verticale.

Civiltà	Tipo pendenza	Funzione trigonometrica corrispondente	Nome
Egizi	verticale	cotangente (*ctg*)	seked
Sumero Babilonesi	verticale	cotangente (*ctg*)	kush (cubito) e nindan (o ninda o gar)
Etruschi e Romani	orizzontale	tangente (*tg*)	per ipotenusa

Nota - In questo capitolo saranno usate le seguenti lunghezze dei cubiti:
- Cubito reale egizio: 52,5 cm [dimensioni reali pari a 52,4 ± 0,5 cm e cioè 51,9 ↔ 52,9 cm].
- Cubito sumerico: 49,5 cm.

I Babilonesi posero altre fondamenta della trigonometria: essi introdussero la divisione dell'angolo giro in 360 parti uguali (a somiglianza del loro calendario che comprendeva 360 giorni l'anno).

Essi usavano un sistema di numerazione additivo in base 60 e, quindi, divisero ciascuna delle 360 partizioni dell'angolo giro – un *grado* – in 60 parti uguali: nacquero i *minuti primi*. Un minuto primo venne a sua volta diviso in 60 *minuti secondi*.

Questa innovazione è seguita ancora ai nostri giorni nella misura degli angoli e in quella del tempo (come dimostrano i nostri orologi).

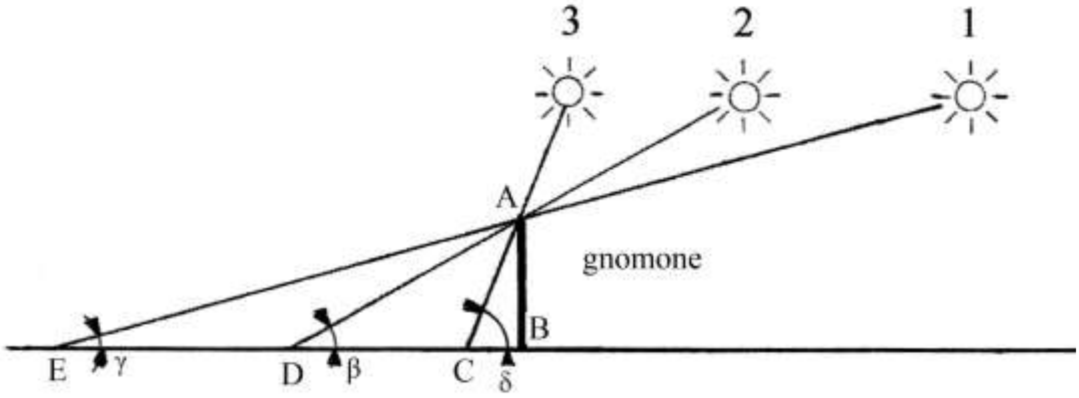
È pure attribuita ai Babilonesi l'invenzione dello *gnomone*, da loro usato per misurare la distanza angolare fra le stelle o fra i pianeti rispetto all'orizzonte.

Anche gli Egizi conobbero lo gnomone.

Lo gnomone e la cotangente dell'angolo

L'uso dello gnomone da parte dei Babilonesi per la determinazione dell'*ora solare* implicava l'uso della funzione trigonometrica *cotangente*.

Nella figura che segue, AB è lo gnomone conficcato verticalmente nel terreno:



CB = AB * ctg α
DB = AB * ctg β
EB = AB * ctg γ

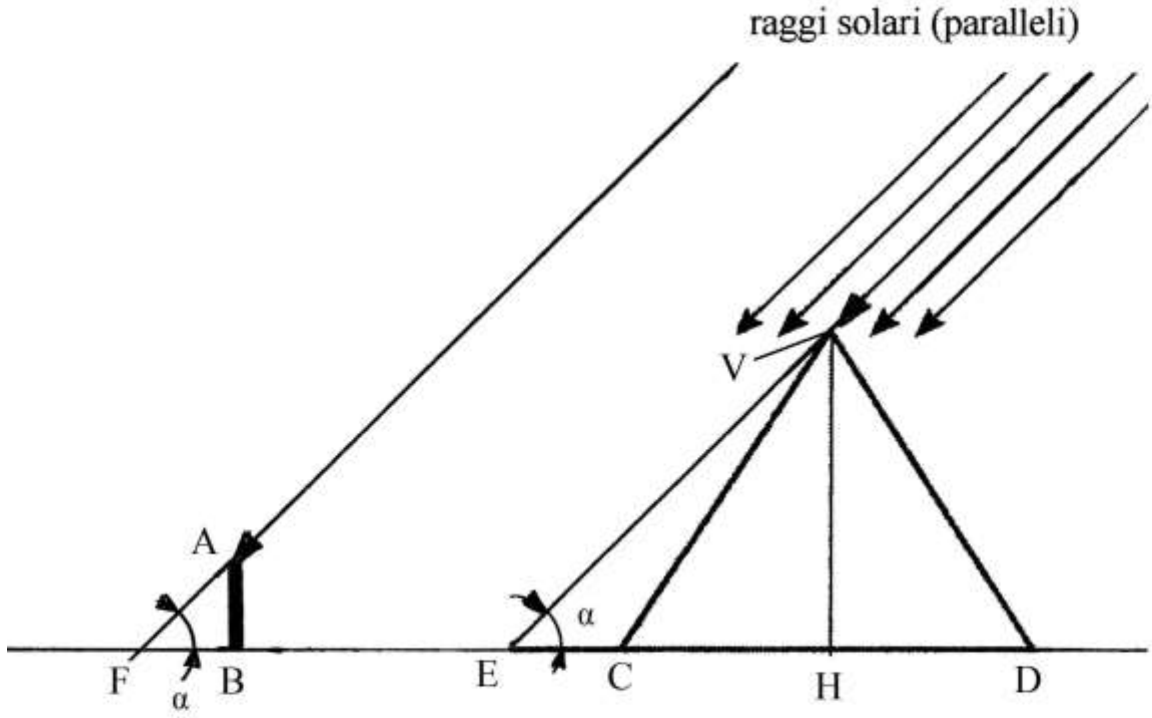
Nella posizione "1" il Sole proietta sul terreno l'ombra rappresentata dal segmento BE. Il moto apparente del Sole porta la sua posizione prima in "2" e poi in "1". Questa ultima è quella che esso assume poco prima di mezzogiorno.

I triangoli ABC, ABD e ABE sono rettangoli.

La lunghezza delle ombre proiettate dal Sole sul terreno (BE, BD e BC) è proporzionale all'altezza AB dello gnomone e alla *cotangente* degli angoli (rispettivamente γ, β e α).

Talete e l'altezza della piramide

Una leggenda racconta che, in Egitto, il matematico greco Talete di Mileto (VII-VI secolo a.C.) avrebbe misurato l'altezza di una piramide con l'aiuto di uno *gnomone* (o di un *obelisco?*):



AB è uno gnomone conficcato verticalmente nel terreno a fianco della piramide CVD.

Nella figura, i raggi del Sole colpiscono la piramide e lo gnomone: provenendo da grande distanza dalla Terra, essi sono pressoché paralleli.

I raggi solari determinano, nella figura, le ombre BC e HE: essi creano due triangoli rettangoli (ABC e VHE) che sono simili perché hanno lo stesso angolo di incidenza α.

I segmenti BC e HE hanno lunghezze proporzionali alla *cotangente* dell'angolo α.

Secondo la leggenda, Talete calcolò l'altezza della piramide VH con la semplice proporzione:

$VH : HE = AB : BF = tg\ \alpha : 1$ da cui

$VH = HE * AB/BF$.

La cotangente di α è uguale a:

$ctg\ \alpha = HE/VH = BF/AB$, oppure

$HE : VH = BF : AB = ctg\ \alpha : 1$.

L'inverso della cotangente (che è la tangente di α) è:

$tg\ \alpha = 1/(ctg\ \alpha) = VH/HE = AB/BF$.

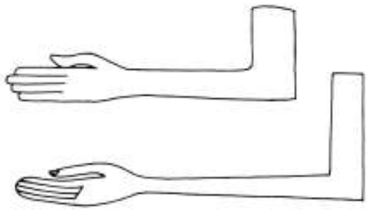
La leggenda, come altre relative a Talete, fu creata dai suoi discepoli dopo la morte del geometra. Gli Egizi erano perfettamente in grado di misurare l'altezza e le altre lunghezze di una piramide.

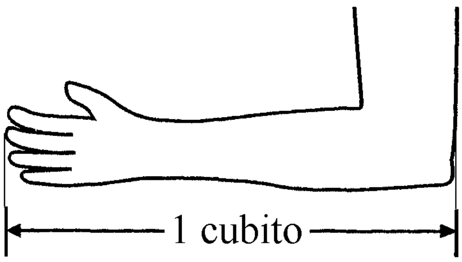
Le unità di misura egizie

La principale unità di misura lineare usata dagli Egizi nel campo architettonico era il *cubito reale*, lungo circa 52,5 cm.

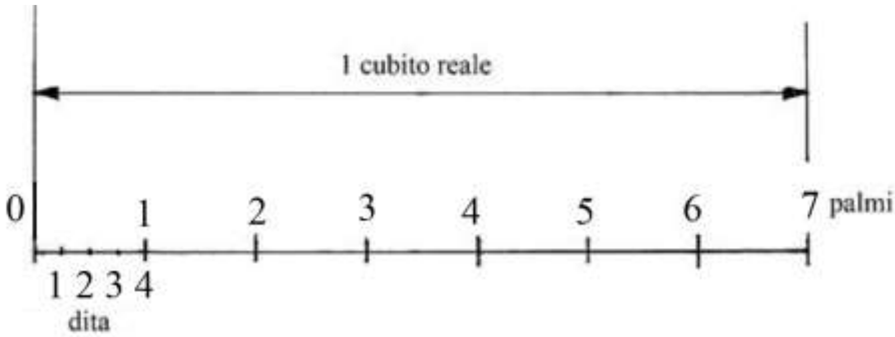
Il cubito era definito come la lunghezza dell'avambraccio dal gomito fino alla punta del dito medio.

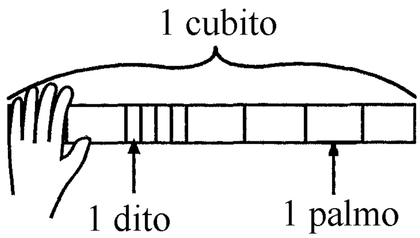
Il geroglifico che rappresentava il cubito era il disegno stilizzato di un avambraccio:





Il cubito reale era diviso in 7 palmi (lunghi circa 7,49 cm) e ciascun palmo era diviso in 4 dita (di circa 1,875 cm). Un cubito reale era quindi diviso in 28 dita:





È da notare la presenza dei numeri 7 e 28 (= 7*4): forse essi sono stati usati per ragioni astronomiche (per l'influenza dei cicli lunari).

Il cubito reale era usato per le costruzioni edilizie e in agrimensura.

Per le misurazioni comuni, non architettoniche, era usato il *cubito piccolo* o *cubito corto*, formato da 6 palmi e 24 dita e corrispondente a una lunghezza di circa 44,7 cm:

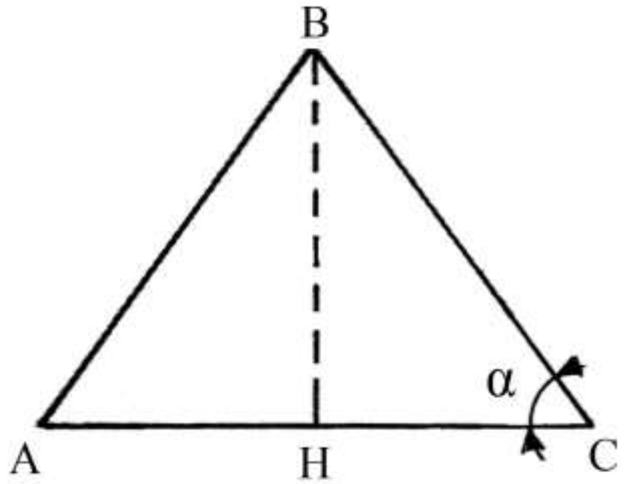
1 cubito piccolo = 6/7 cubito reale.

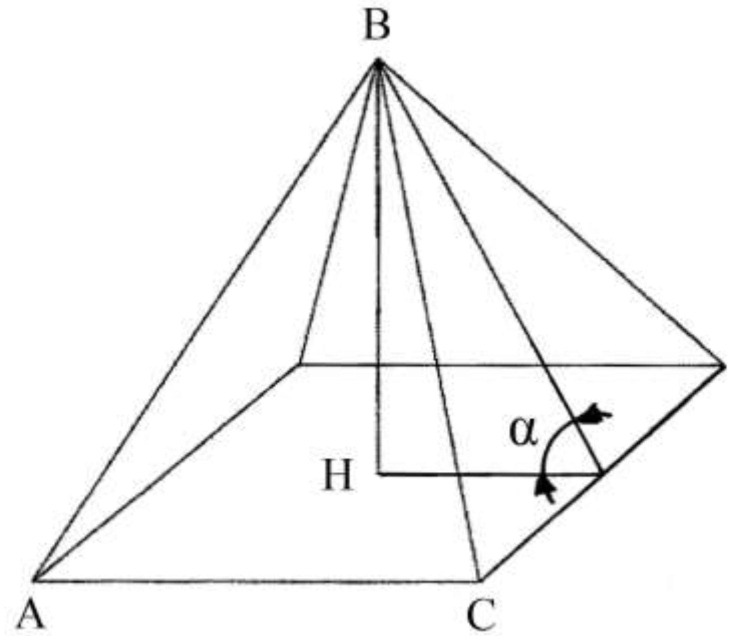
La scelta del numero 24 per le dita formanti un *cubito corto* può derivare dalla divisione del giorno in 24 ore, 12 diurne e 12 notturne?

La tabella che segue descrive sottomultipli e multipli del cubito reale:

Unità	Lunghezza in cubiti reali	Lunghezze *approssimate* in cm, m o km
1 dito	1/28 cubito = ¼ palmo	1,875 cm
1 palmo	1/7 cubito = 4 dita	7,49 cm
1 cubito reale		52,4 ± 0,5 cm
1 asta, o *rocchetto di corda* (1 *khet*)	100 cubiti reali	52,5 m
1 fiume	20 000 cubiti reali	10,5 km

Il calcolo dell'inclinazione delle facce di una piramide era determinato per mezzo di un numero chiamato *seked* (o *seqed*), che corrisponde al moderno concetto di *cotangente*. Le figure che seguono mostrano la vista frontale e quella in assonometria di una piramide a base retta: l'angolo α è formato da una faccia laterale con la base mentre BH è l'altezza:





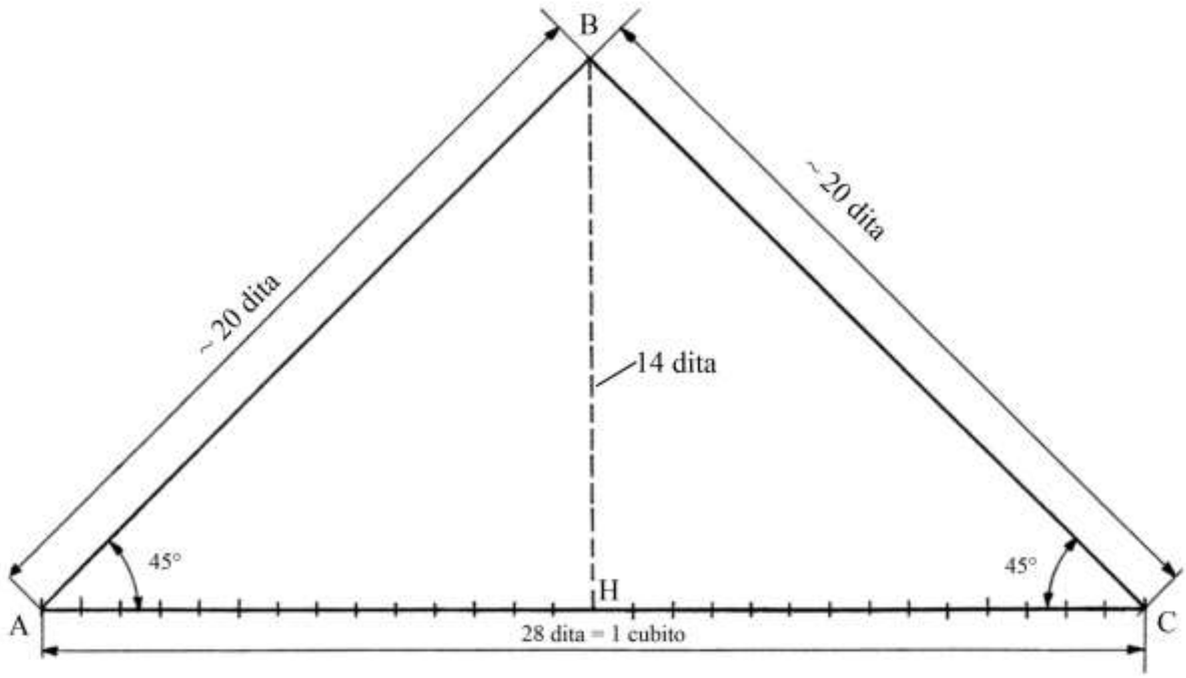
Il *seked* è spiegato nel paragrafo che segue con un esempio tratto dal papiro Rhind.

- APPROFONDIMENTO -

<u>Il remen e il doppio remen</u>

Dalle unità *dito* e *cubito reale* gli Egizi derivarono altre due unità di misura delle lunghezze: il *remen* e il *doppio remen*.

Su di un segmento lungo 28 dita o 1 cubito, l'equivalente di 28*1,875 = 52,5 cm era costruito un triangolo rettangolo isoscele:



L'altezza BH è lunga 14 dita e cioè la metà dell'ipotenusa AC.

Come approfondiremo nei successivi paragrafi, gli Egizi impiegarono un precursore della funzione trigonometrica *cotangente*, il *seked*.

La tangente dell'angolo BAH è data da:

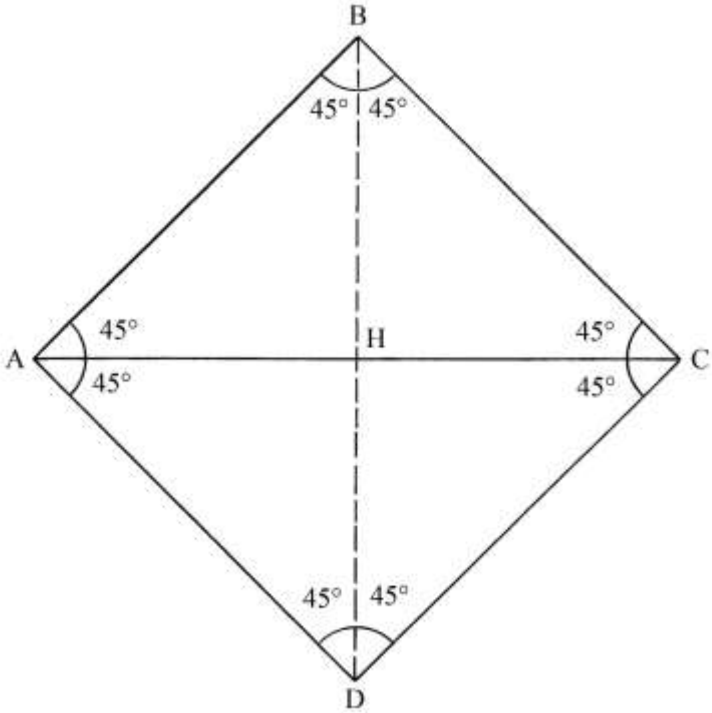
tg BAH = BH/AH = 14/14 = 1 .

Anche la cotangente di questo angolo vale 1:

ctg BAH = AH/BH = 14/14 = 1 = tg BAH.

Benché non conoscessero la trigonometria, gli Egizi avevano sicuramente comprese le conseguenze geometriche dell'uso di una pendenza con inclinazione uguale a 45°.

Il triangolo ABC è metà di un quadrato che ha le due diagonali AC e BD lunghe 28 dita:



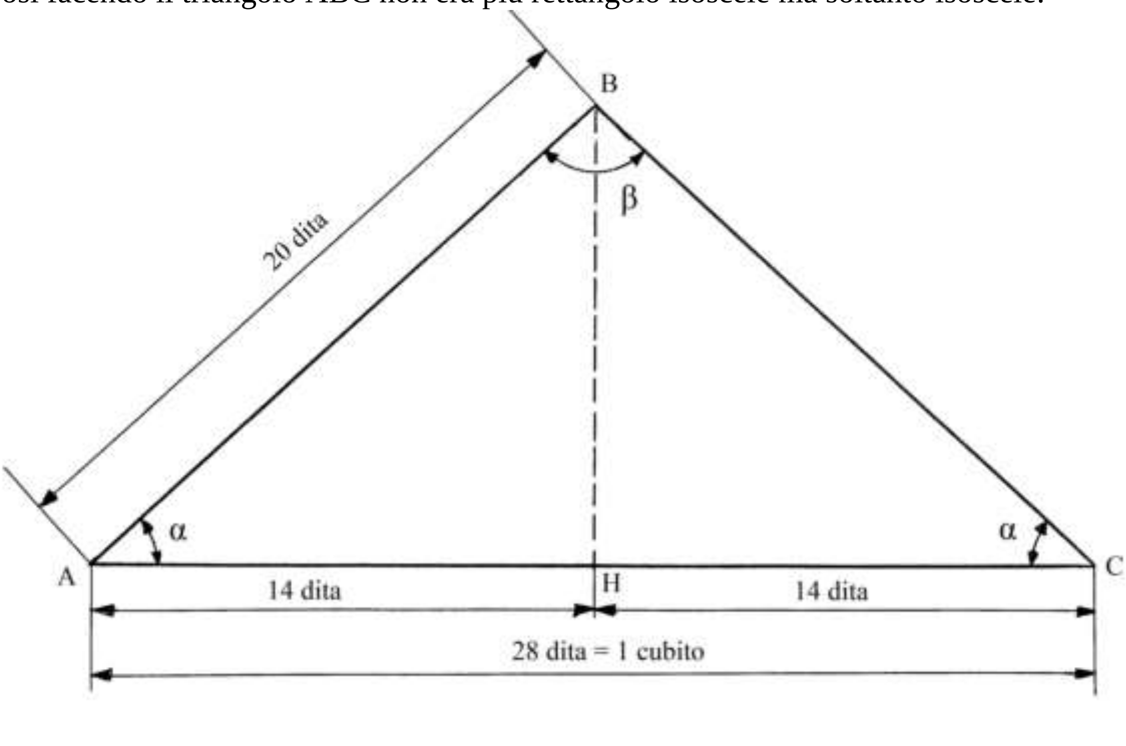
I cateti AB e BC hanno lunghezze uguali:

AB = BC = AC/√2 = 28/√2 = (28*√2)/2 ≈ 19,7989 dita ≈ 37,123 cm .

Gli scribi Egizi non possedevano gli strumenti per determinare l'esatto valore di √2, ma erano giunti alla conclusione che il rapporto fra la lunghezza della diagonale di un quadrato e quella del suo lato fossero approssimabili:

AC/AB ≈ 7/5 = 1,4 oppure AC/AB ≈ 10/7 ≈ 1,4286.

Essi devono avere approssimato per eccesso la lunghezza dei cateti AB e BC da 19,7989 a 20 dita. Così facendo il triangolo ABC non era più rettangolo isoscele ma soltanto isoscele:

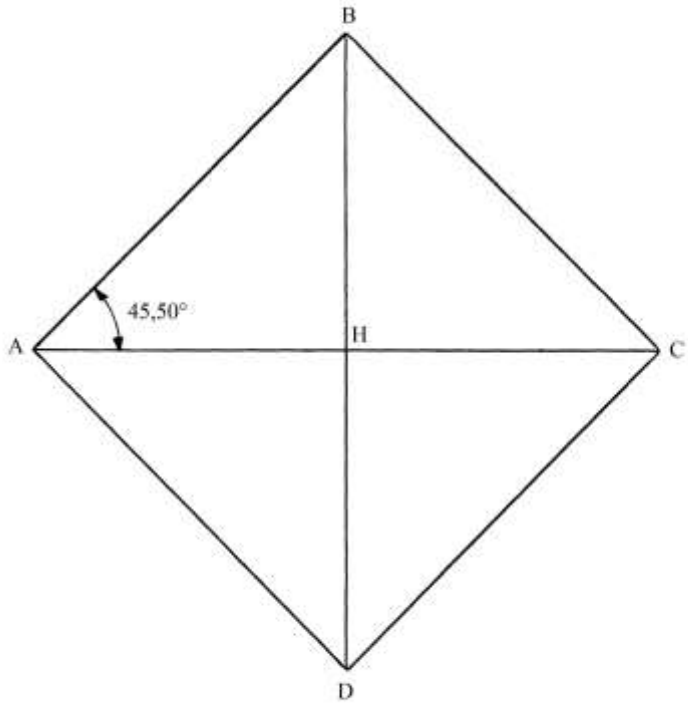


In questa figura, ABH e BHC sono due triangoli rettangoli che hanno uguali dimensioni. L'altezza BH non ha più la stessa lunghezza dei segmenti AH e HC delle prime due figure.

Il rapporto fra le lunghezze dell'ipotenusa AB e del cateto AH riconduce alla seconda approssimazione usata dagli scribi:

$$AB/AH = 20/14 = 10/7 \approx 1{,}4286.$$

Il triangolo ABC è la metà di un rombo che ha lati lunghi 20 dita e la diagonale *minore* AC lunga 28 dita:



Utilizziamo moderne conoscenze di trigonometria elementare, sconosciute agli Egizi, per ricavare l'ampiezza dell'angolo α:

$\cos \alpha = AH/AB = 14/20 = 0{,}7$, valore al quale corrisponde un angolo

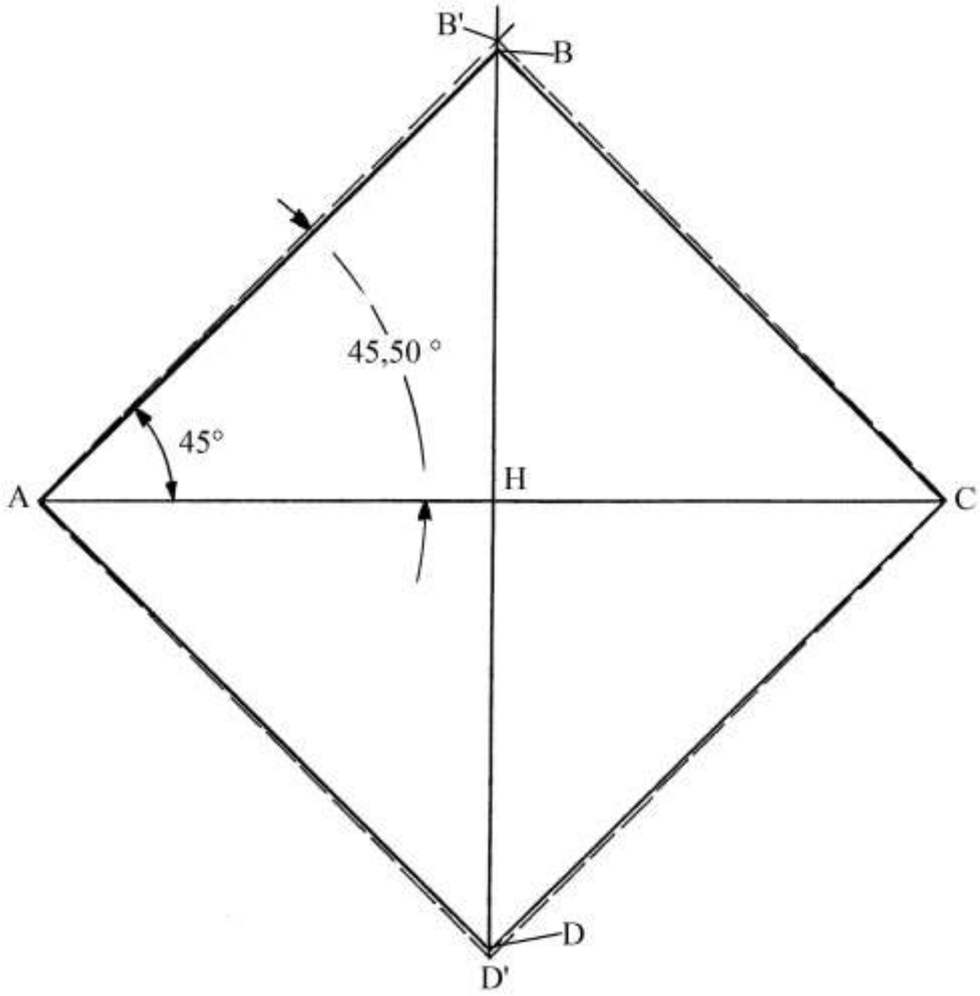
$\alpha \approx 45° \ 30' \approx 45{,}50\ °$.

Il cateto BH è lungo:

$BH^2 = AB^2 - AH^2 = 20^2 - 14^2 = 400 - 196 = 204$ da cui

$BH = \sqrt{204} \approx 14{,}2828$ dita e cioè leggermente più lungo dell'altezza BH delle precedenti prime due figure.

È possibile confrontare le due soluzioni:

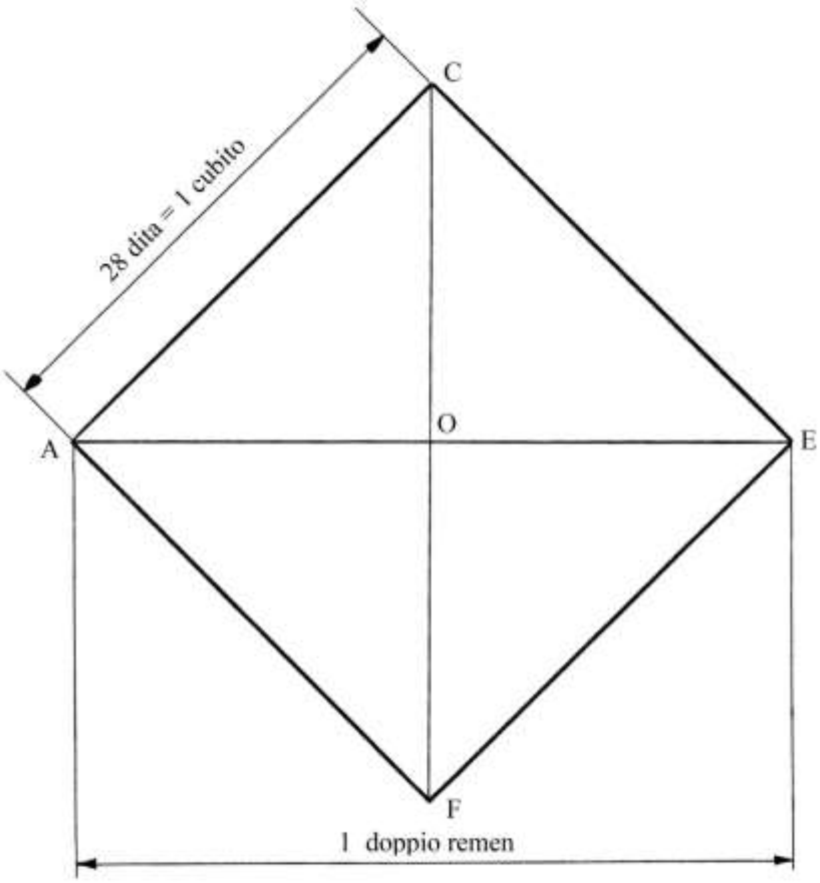


Come è facile costatare, la differenza fra il quadrato ABCD e il rombo AB'CD' è minima.

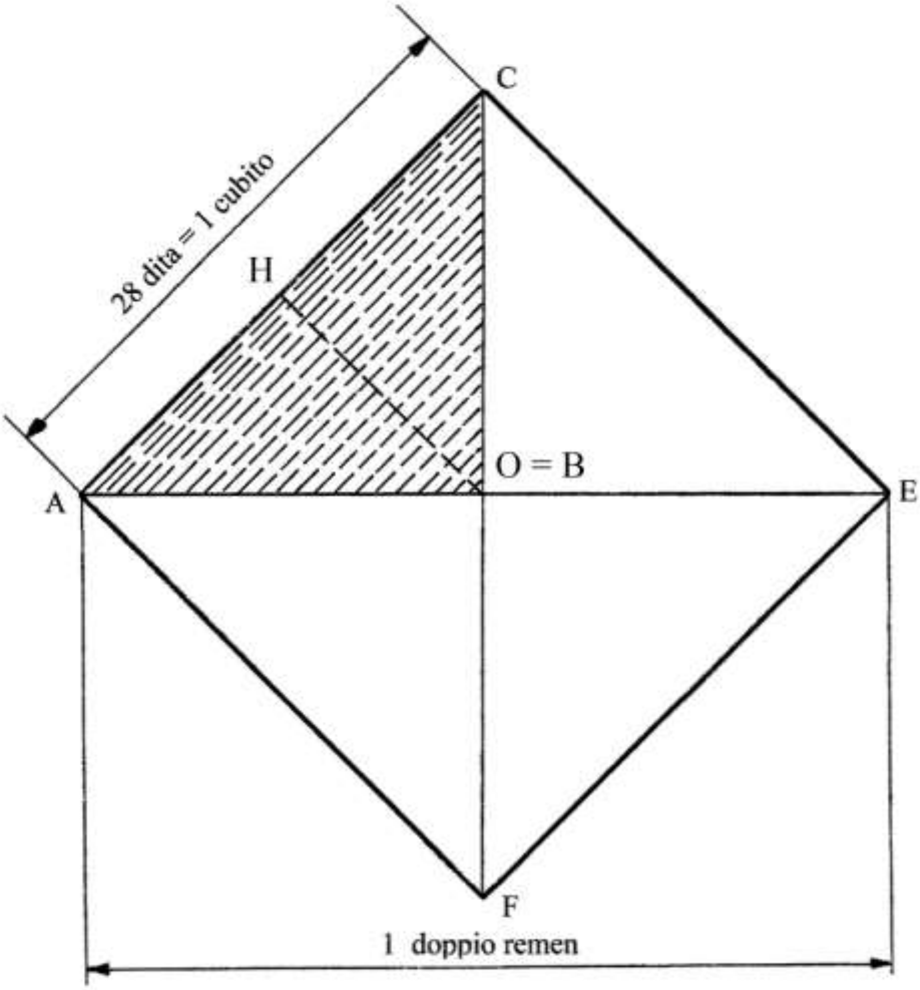
Dal remen deriva il *doppio remen*. ACEF è un quadrato che ha lati lunghi 28 dita = 1 cubito. Le diagonali AE e CF sono lunghe:

$$AE = \sqrt{2} * AC \approx 39{,}5979 \text{ dita} \approx 74{,}246 \text{ cm} = 2 \text{ remen} = 1 \text{ doppio remen}.$$

Il *doppio remen* è lungo esattamente 2 remen.



Lo schema che segue confronta il remen e il doppio remen:



Il triangolo rettangolo isoscele tratteggiato ha l'ipotenusa AC lunga 28 dita e i cateti AB e BC lunghi *1 remen*: il poligono riproduce, ruotato in senso antiorario di 45°, il triangolo del primo schema. Esso è *un quarto* del quadrato di cui fa parte.

ACEF è un quadrato che ha lati lunghi 28 dita o 1 cubito. Le semidiagonali OA, OC, OE e OF sono lunghe *1 remen*. Le diagonali AE e CF sono lunghe *2 remen*.

Il remen e il doppio remen erano usati in agrimensura.

- -

Il papiro Rhind

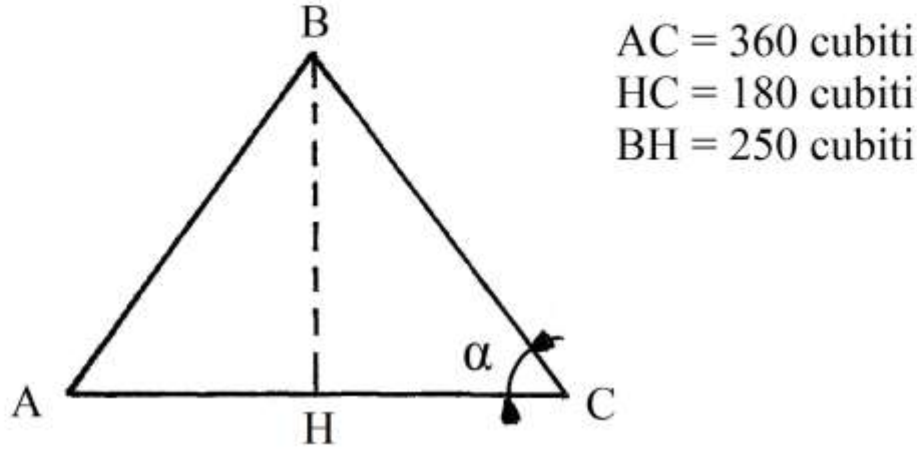
Il *papiro Rhind* reca questo nome perché fu acquistato dallo scozzese Henry Rhind in Egitto (a Luxor) nel 1858.

Esso contiene un testo di carattere matematico preparato dallo scriba egizio Ahmes verso il 1650 a.C. che nel testo affermò di averlo copiato da un papiro precedente, scomparso, che risalirebbe al periodo 2000 – 1800 a.C. È attualmente conservato a Londra.

Il papiro è lungo 3 m e alto 33 cm.

Il suo contenuto è vario: sono presenti tabelle di frazioni e 84 problemi aritmetici e geometrici con le soluzioni.

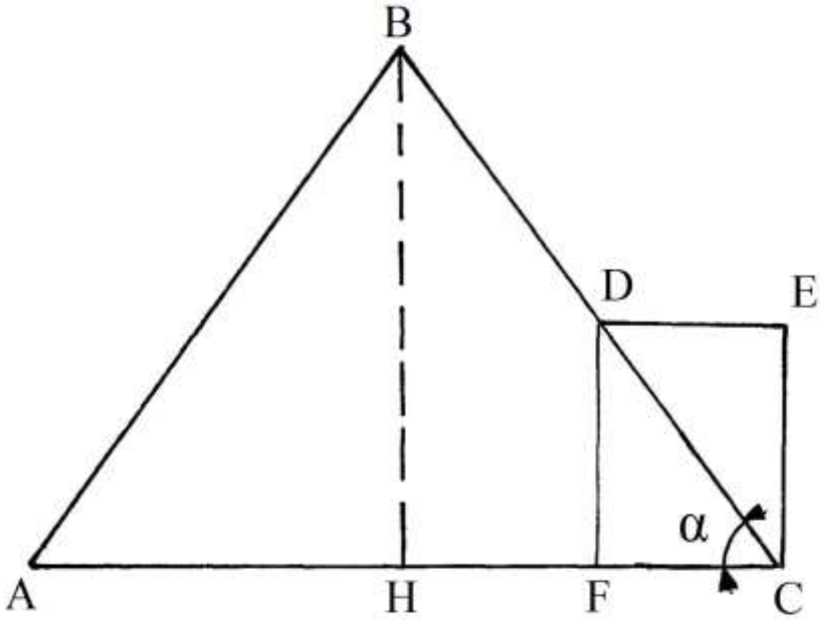
Fra i problemi di tipo geometrico vi è quello numero 56. Una piramide retta a base quadrata ha lato di base lungo 360 cubiti ed è alta 250 cubiti (nel papiro è sempre usato il *cubito reale*):



Il problema chiede di calcolare il *seked* e cioè la pendenza o inclinazione della faccia laterale. L'inclinazione è data dall'angolo α.

Il metodo usato dagli Egizi è descritto nelle figure che seguono.

ABC è la proiezione sul piano verticale di una piramide:



Sullo spigolo BC sono costruiti i triangoli rettangoli DEC e DFC: essi hanno uguali dimensioni. Il segmento DE è parallelo a AC e i segmenti EC e DF sono paralleli all'altezza BH e perpendicolari al lato AC.

I triangoli HBC e FDC sono *simili*.

Come già visto in precedenza, in un triangolo rettangolo (DFC) la *tangente* di un angolo (α) è uguale al rapporto fra la lunghezza del cateto opposto (DF) e quella del cateto adiacente (FC):

$$\text{tg } \alpha = DF/FC = CE/DE \text{ .}$$

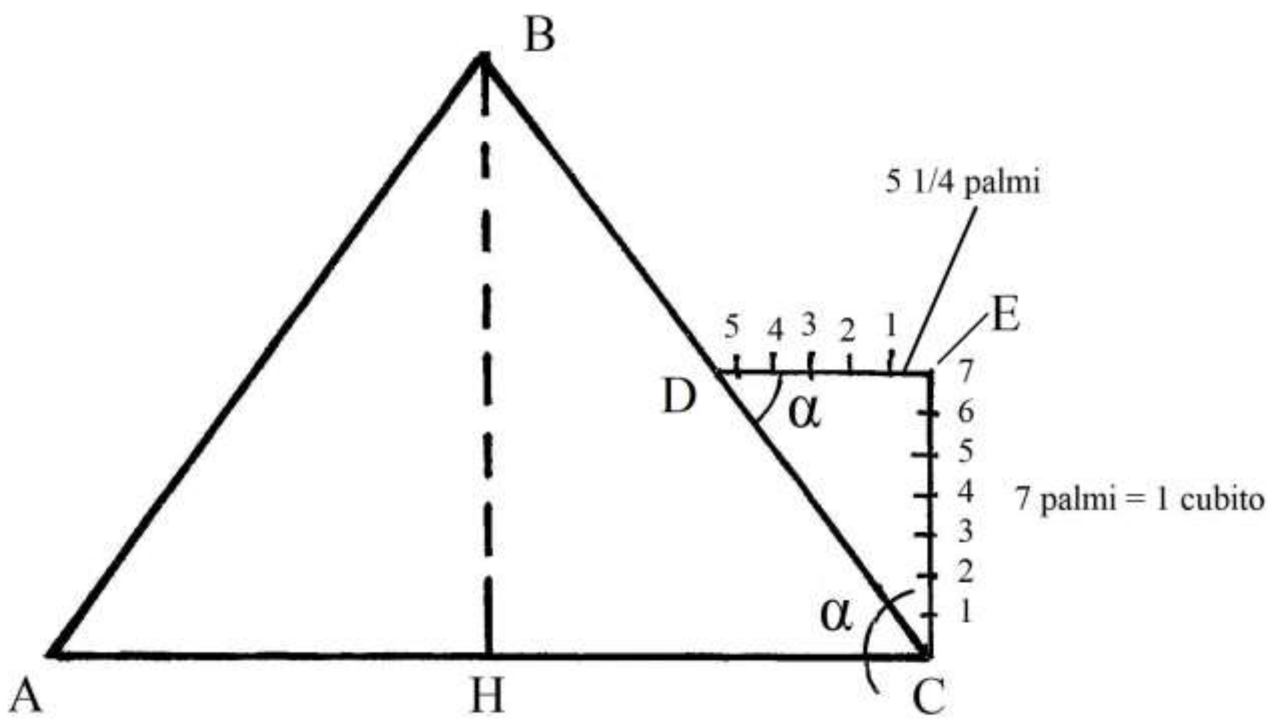
La *cotangente* dello stesso angolo (α) è uguale al rapporto fra la lunghezza del cateto adiacente (FC) e quella del cateto opposto (DF):

$$ctg\ \alpha = FC/DF = DE/CE .$$

Ne deriva che il valore della tangente e quello della cotangente sono reciproci:

$$tg\ \alpha = 1/(ctg\ \alpha)$$
$$ctg\ \alpha = 1/(tg\ \alpha) .$$

Gli Egizi usavano controllare la pendenza delle facce laterali delle piramidi con la misura della *cotangente*. Una squadra di legno (o di altro materiale deperibile) a forma di triangolo rettangolo, come quello DEC della precedente figura, era impiegata dai costruttori egizi per il controllo della pendenza:



Il *seked* era la cotangente dell'angolo (α): nel caso del problema 56 del papiro Rhind, il cateto verticale era lungo 1 cubito e quello orizzontale 5 ¼ palmi. La tangente dell'angolo (α) è uguale al rapporto fra il cateto adiacente (5 ¼ palmi) e quella del cateto opposto (1 cubito = 7 palmi). Con riferimento alla piramide con semilato di base lungo 180 cubiti e altezza uguale a 250 cubiti e cedente figura è possibile calcolare il valore della cotangente di α:

seked [di α] = ctg α = HC/BH = 180/250 = 18/25 = 0,72 , al quale corrisponde un angolo $\alpha \approx 54° \ 14'$.

Il seked può essere ricavato anche da:

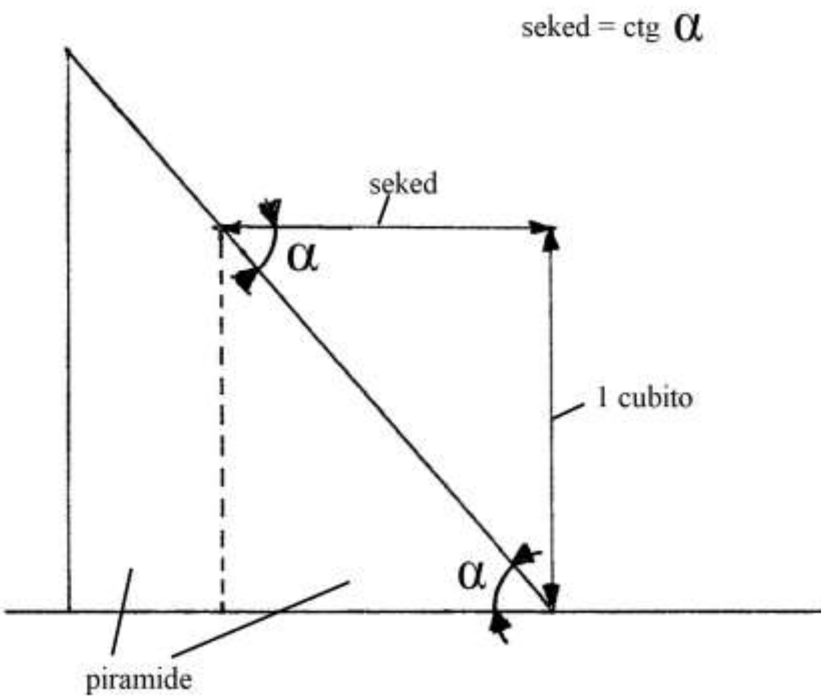
seked [di α] = ctg α = DE/EC .

L'aritmetica usata dagli Egizi per indicare il valore del seked era quella del rapporto fra la lunghezza *variabile* del cateto orizzontale (in palmi) e quella, *fissa di 1 cubito*, del cateto verticale: nel caso del problema 56 occorre convertire i cubiti in palmi. Il rapporto 18/25 è un numero ricavato dalla divisione di due lunghezze espresse nella stessa unità di misura (il cubito reale) e può essere convertito in un rapporto fra cubiti e palmi (1 cubito reale = 7 palmi):

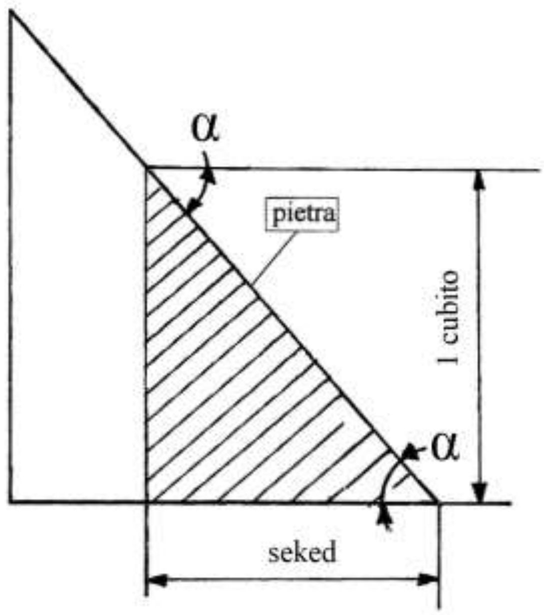
seked [di α] = 18/25 [cubiti/cubiti] = (18/25) * 7 = 5,04 = 5 1/25 [palmi/cubiti].

Gli Egizi scrivevano (5 1/25) perché non usavano l'operatore infisso +, come facciamo oggi: (5 + 1/25).

In sintesi, il seked era il rapporto fra la lunghezza di un cateto orizzontale e quella di un cateto verticale lungo 1 cubito reale:



In altre parole, il seked è uguale alla differenza fra la lunghezza del lato inferiore (più lungo) e quella del lato superiore (più corto) di una pietra alta 1 cubito e applicata sulla faccia di una piramide:

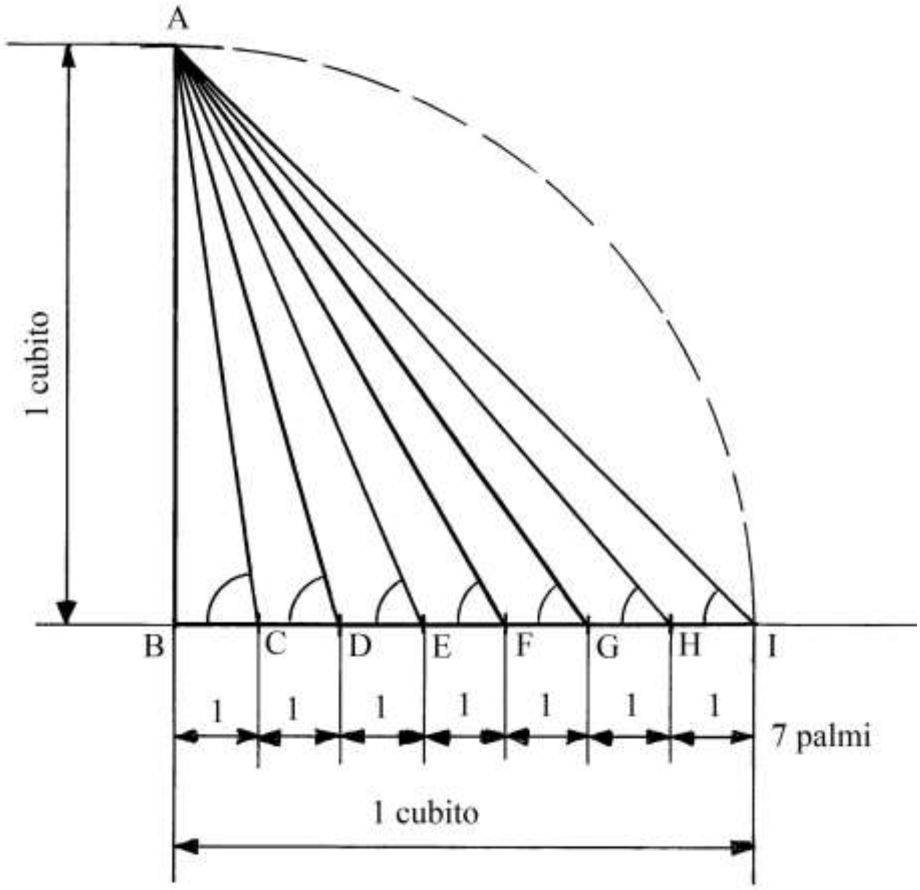


L’inclinazione calcolata nella soluzione del problema 56 (54° 14’) è vicina a quelle attuali di tre importanti piramidi:

- Cheope (circa 2570 a.C.): 51° 52’.
- Chefren (circa 2500 a.C.): 52° 20’.
- Micerino (circa 2500 a.C.): 50° 47’.

Alcune inclinazioni tipo

Nella figura che segue sono disegnate diverse inclinazioni. AB è il cateto verticale di lunghezza 1 cubito, mentre il cateto orizzontale BI, pure lungo 1 cubito, è diviso in 7 parti uguali di lunghezza 1 palmo:



La tabella che segue fornisce i valori *approssimati* della *cotangente* dell'angolo α in relazione alla lunghezza del cateto orizzontale nella figura precedente:

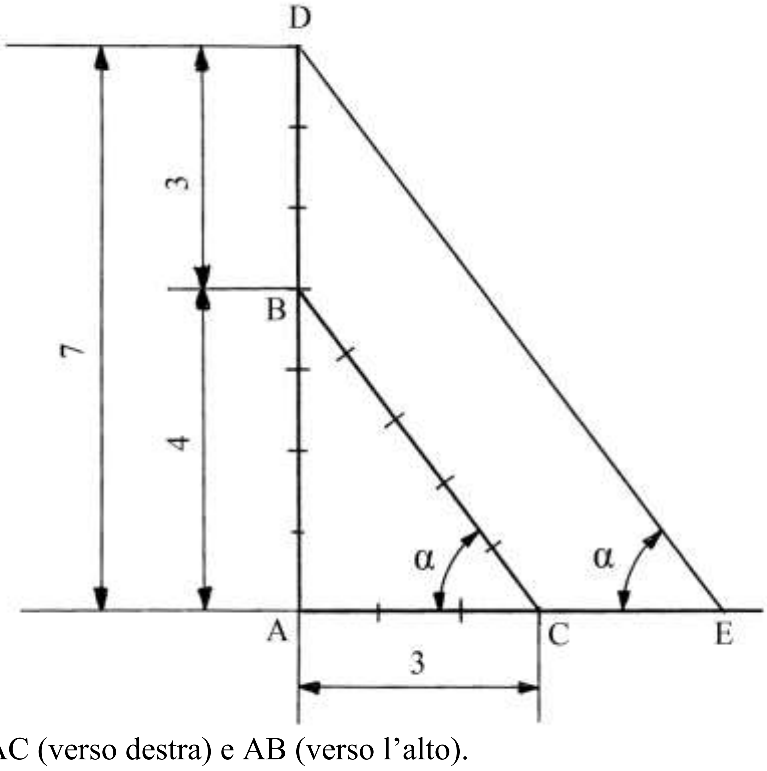
Angoli	Cotangente angoli	Ampiezza angoli
BIA	BI/AB = 7/7 = 1	45°
BHA	BH/AB = 6/7 = 0,857	49° 26'
BGA	BG/AB = 5/7 = 0,714	54° 26'
BFA	BF/AB = 4/7 = 0,571	60° 15'
BEA	BE/AB = 3/7 = 0,428	66° 46'
BDA	BD/AB = 2/7 = 0,285	73° 56'
BCA	BC/AB = 1/7 = 0,142	81° 56'

La tabella che segue riassume un più ampio insieme di inclinazioni tipiche:

seked	Valori approssimati degli angoli corrispondenti
4 (≡ 4/7) (*)	60° 15’
4,25 (≡ 4,25/7)	58° 44’
4,50 (≡ 4,50/7)	57° 16’
4,75 (≡ 4,75/7)	55° 50’
5 (≡ 5/7)	54° 26’
5,25 (≡ 5,25/7)	53° 8’
5,50 (≡ 5,50/7)	51° 50’
5,75 (≡ 5,75/7)	50° 36’
6 (≡ 6/7)	49° 26’
6,25 (≡ 6,25/7)	48° 14’
6,50 (≡ 6,50/7)	47° 7’
6,75 (≡ 6,75/7)	46° 2’
7 (≡ 7/7)	45°
7,25 (≡ 7,25/7)	43° 59’
7,50 (≡ 7,50/7)	43° 1’

(*) Il simbolo “≡” significa *equivale a*…

Il caso del seked 5,25 è interessante. La figura che segue descrive questa inclinazione che corrisponde a quella nei vertici C e E della figura, costruita sul triangolo rettangolo ABC con i lati aventi lunghezze proporzionali alla più semplice terna pitagorica (3-4-5):



Prolungare i lati AC (verso destra) e AB (verso l’alto).

Fissare un punto, D, in modo che la lunghezza di AD sia proporzionale a 7.

Dal punto D tracciare un segmento parallelo all’ipotenusa BC, fino a determinare un punto, E, sul prolungamento di AC.

I triangoli ABC e ADE sono entrambi rettangoli e sono *simili*.

La proporzione seguente

AC : AB = AE :AD   e

$AC/AB = AE/AD = ctg\alpha$ fornisce il valore della cotangente dei due angoli α di figura.

Sostituendo i valori effettivi si ha:

$3 : 4 = AE : 7$

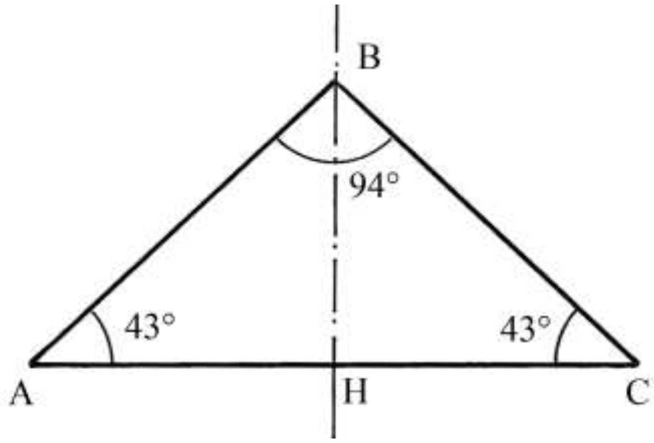
Da questa espressione si ricava il seked 5,25:

$AE = (3 * 7)/4 = 5,25$.

- APPROFONDIMENTO -

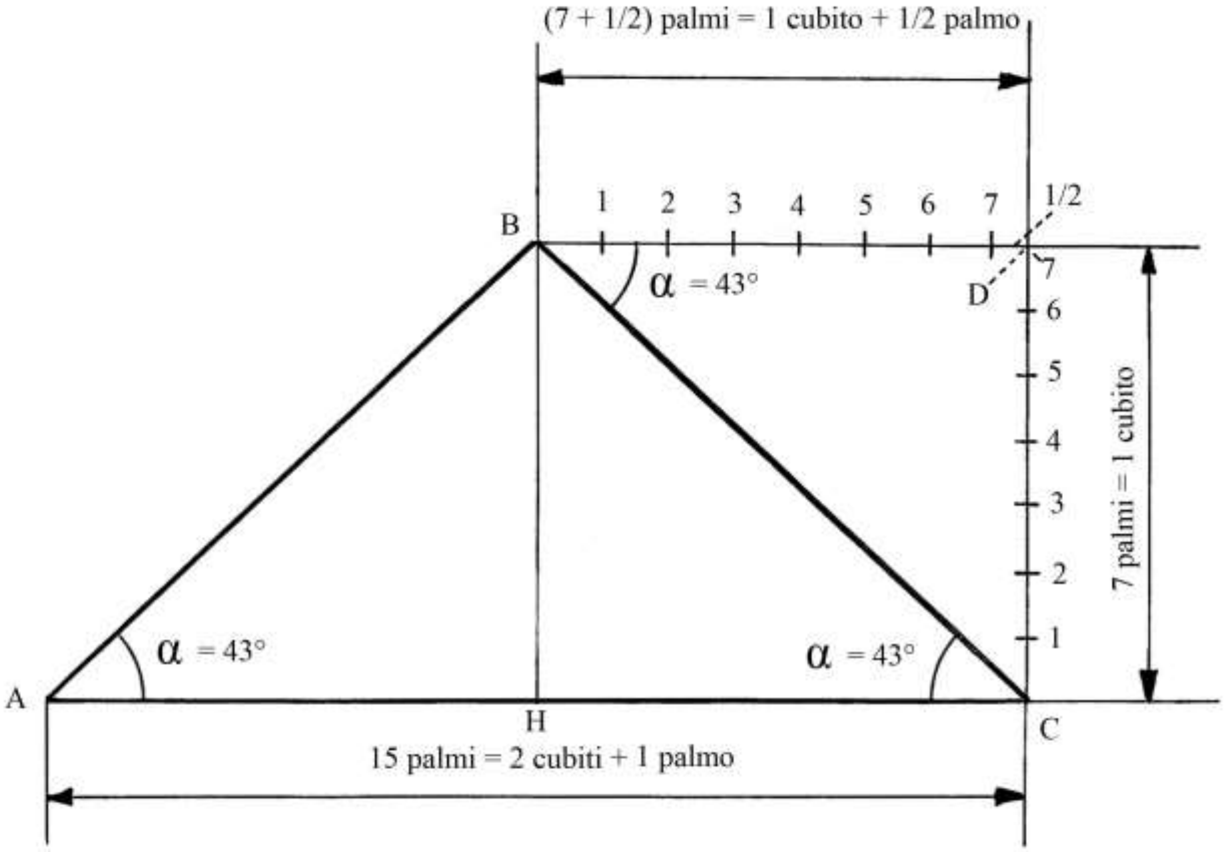
L'altezza delle piramidi

Jacques Vicari, a p. 39 del suo libro citato in bibliografia, ha stimato la pendenza di una collina di sabbia creata dal vento nel deserto egiziano: egli ritiene che essa formasse rispetto al piano orizzontale un angolo di 43°.



Nota: il testo di Vicari è diviso in tre parti dedicate a: la *forma*, la *funzione* e il *mito* della *torre di Babele*. Solo la prima parte è basata su fondamenti geometrici, mentre la seconda e la terza parte presentano contenuti assai discutibili. Il testo di Vicari è qui citato perché nella prima parte offre alcuni confronti fra le tecniche costruttive degli Egizi e quelle dei Babilonesi.

Costruiamo il seked relativo a un mucchio di sabbia con pendenza uguale a 43°:



Disegnare una retta orizzontale e fissarvi il punto H, piede dell'altezza. Da questo ultimo punto condurre verso l'alto una linea perpendicolare lunga – nella scala di rappresentazione scelta – 7 palmi o 1 cubito e stabilire il punto B. BH è l'altezza del mucchio di sabbia.

Per il punto B tracciare verso destra una semiretta parallela alla retta orizzontale.

Dal punto B disegnare due linee inclinate dell'angolo α = 43° rispetto all'orizzonte rappresentato dalla retta passante per H. Le due linee intersecano la retta orizzontale in due punti, A e C.

ABC è un triangolo isoscele.

Da C elevare un segmento fino a incontrare in D la semiretta uscente da B.

CD è lungo quanto BH e cioè 7 palmi. Segnare su CD questi sette palmi.

Misurando con la massima precisione si può rilevare la lunghezza di BD: è 7 + ½ palmi (con un errore veramente trascurabile)

La base AC è lunga:

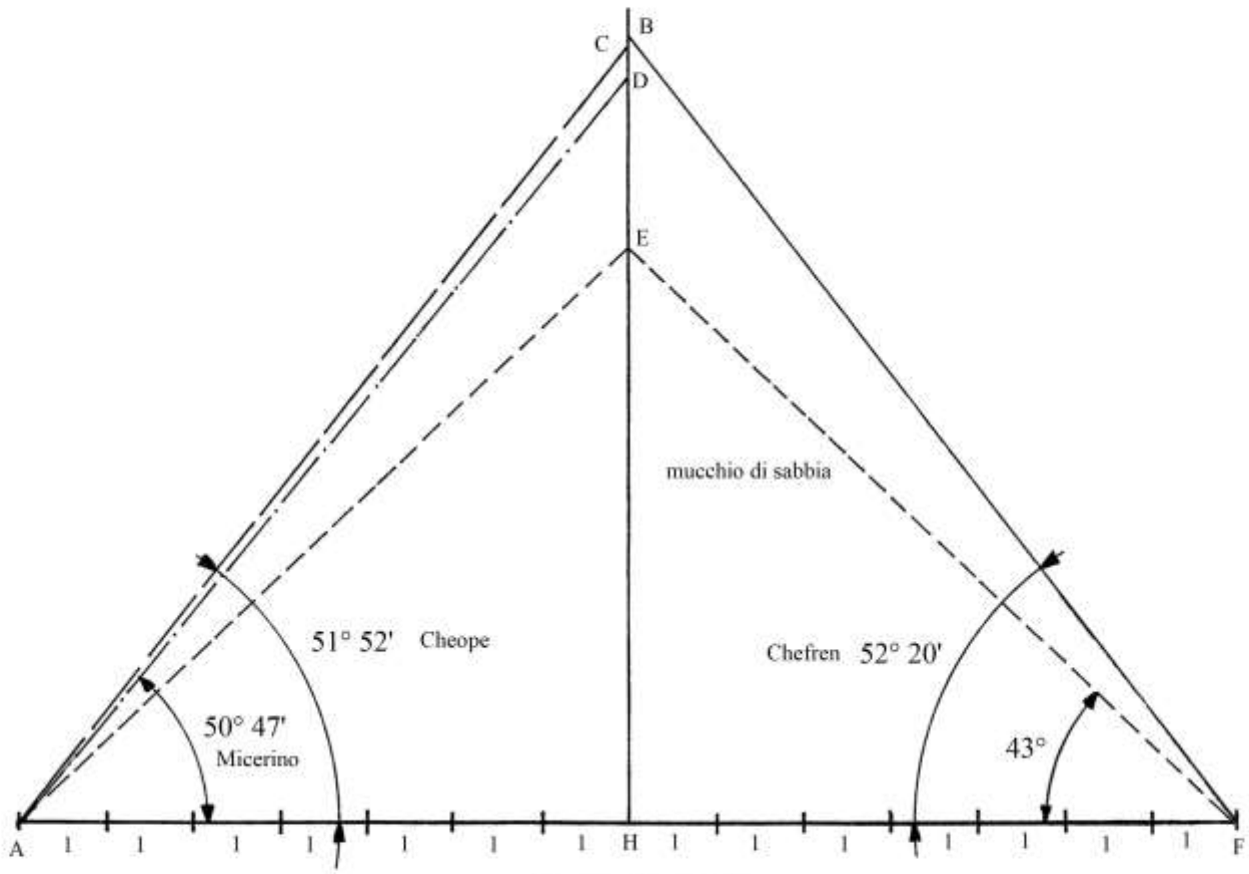
AC = BD * 2 = (7 + ½) * 2 = 15 palmi = 2 cubiti + 1 palmo.

Il seked di α è:

seked [di α] = BD/CD = 7,5 palmi/7 palmi ≈ 1,071428.

Gli scribi e i geometri egizi avranno misurato la pendenza degli instabili mucchi di sabbia?

Il grafico che segue mette a confronto le inclinazioni delle tre note piramidi e quelle del mucchio di sabbia (qui per semplicità ritenuto a forma di piramide a base quadrata, invece che conica irregolare). Per rendere comparabili i diversi valori del seked è tracciata una base comune, AF, di lunghezza convenzionale pari in scala a 14 palmi ossia a 2 cubiti. Il disegno è una vista frontale:

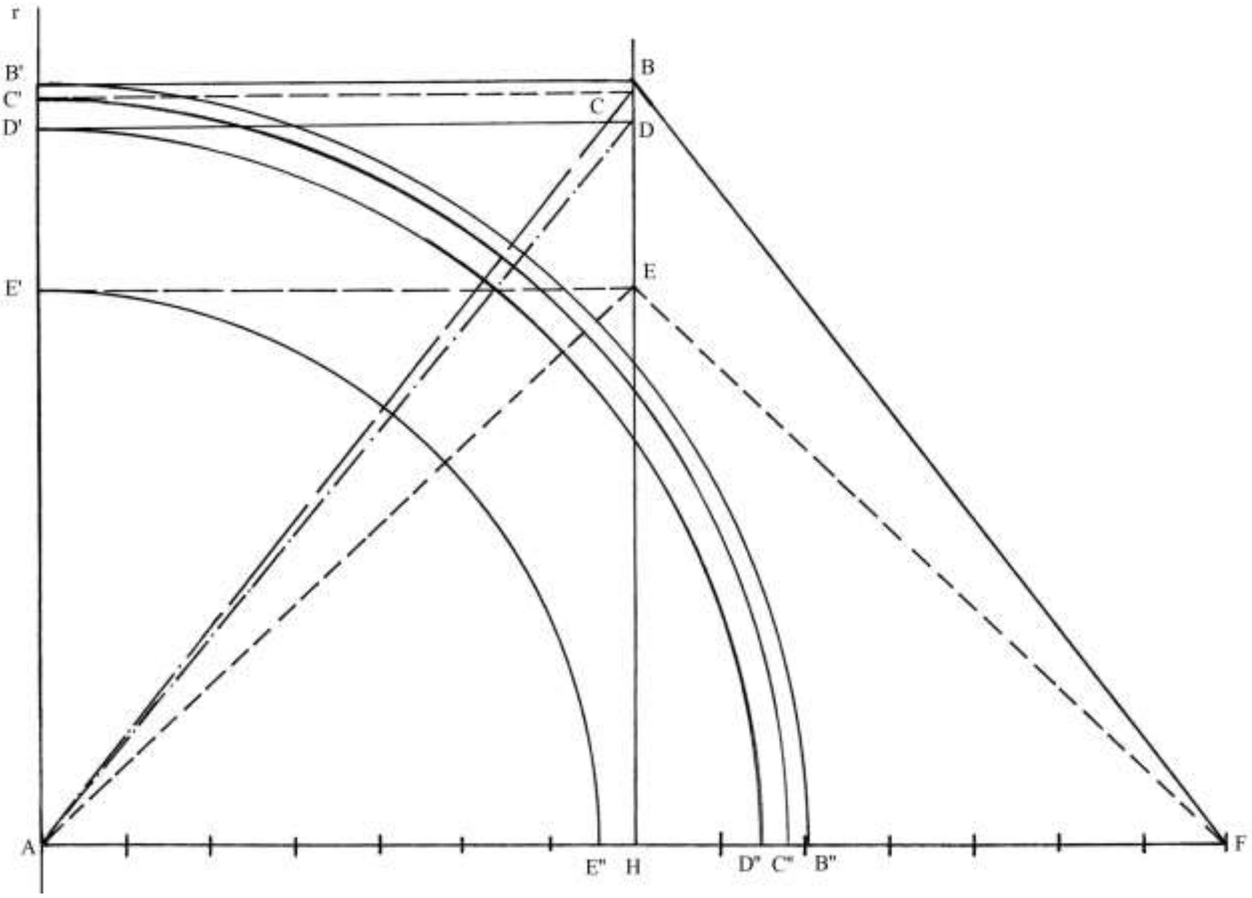


AF = 14 palmi = 2 cubiti

L’esame superficiale del grafico mostra che le tre piramidi, costruite con lastroni di pietra, hanno tutte un’altezza superiore a quella – in scala – dell’ipotetico mucchio di sabbia.

Dalla misurazione del mucchio di sabbia gli scribi e i costruttori egizi avevano dedotto che spingersi in altezza nella progettazione delle piramidi di pietra?

Lo schema che segue è basato sul precedente:



Per il punto A tracciare la retta *r*, perpendicolare a AF. Dai punti B, C, D e E condurre verso sinistra linee parallele a AF fino a incontrare *r* nei punti B', C', D' e E': essi definiscono le altezze delle tre piramidi e del mucchio di sabbia convenzionale.

Fare centro in A e con raggi AB', AC', AD' e AE' disegnare in senso antiorario quattro quarti di circonferenza fino a fissare i punti B'', C'', D'' e E''.

I segmenti AB'', AC'', AD'' e AE'' sono le altezze delle tre piramidi e del muccio di sabbia ribaltate su AF: esse tutte *più corte* della base AF.

Tutte le piramidi costruite dagli Egizi avevano altezze più corte del lato della base quadrata.

Nota: nell'ultima tabella del precedente paragrafo, per il seked
7,50 (≡ 7,50/7) è stato calcolato un angolo di 43° 1'.

- -

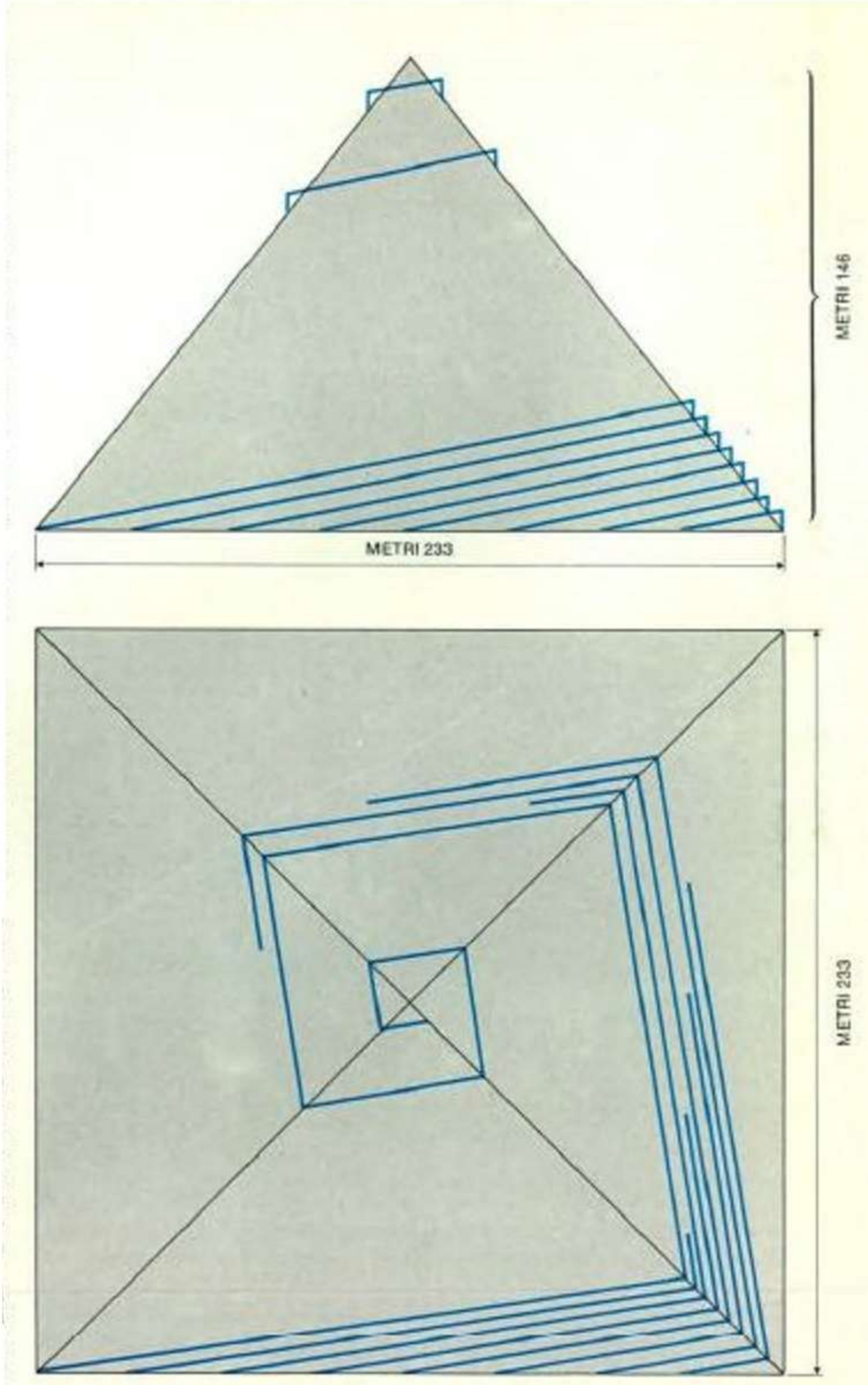
La piramide di Cheope

Nell'articolo di Pedrini-Pedrini-Actis Dato, citato in bibliografia, sono affrontati alcuni argomenti di natura geometrica e tecnologica relativi alla costruzione delle piramidi egizie nel corso del periodo compreso fra il 2700 e il 2480 a.C., all'epoca della III e della IV dinastia di faraoni.

A quell'epoca gli Egizi conoscevano solo la leva e il piano inclinato e con l'impiego di queste due macchine semplici avrebbero edificato le piramidi.

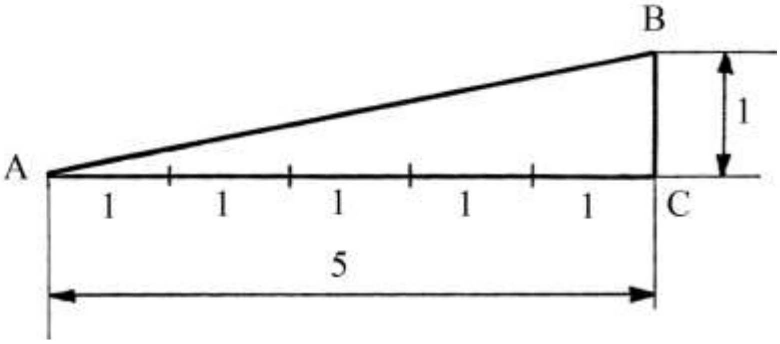
Secondo i tre Autori, i massi di calcare usati per la costruzione di una piramide venivano posti in opera con la realizzazione di rampe (e cioè *piani inclinati*) disposte a spirale, fra loro parallele e con pendenza del 20%.

I due schemi che seguono, riprodotti dal citato articolo, sono in alto la vista frontale e in basso la vista in pianta e si riferiscono alla piramide di Cheope, secondo faraone della III dinastia.



In colore azzurro, sono disegnate solo le rampe che salgono da un lato, quello visibile nella vista frontale.

La pendenza del 20% significa che *una* lunghezza in verticale era raggiunta da *cinque* lunghezze in orizzontale, tutte misurate con la stessa unità di misura:



L’angolo α è formato dal profilo della rampa con l’orizzonte ed è facilmente calcolabile:

ABC è un triangolo rettangolo e vale la relazione:

BC/AC = 1/5 = 0,2 che è la *pendenza* della rampa. Essa esprime pure il valore della tangente dell’angolo α:

tg α = BC/AC = 0,2 (ed è anche il valore della cotangente di β).

Ad essa corrisponde un angolo:

α ≈ 11° 19’.

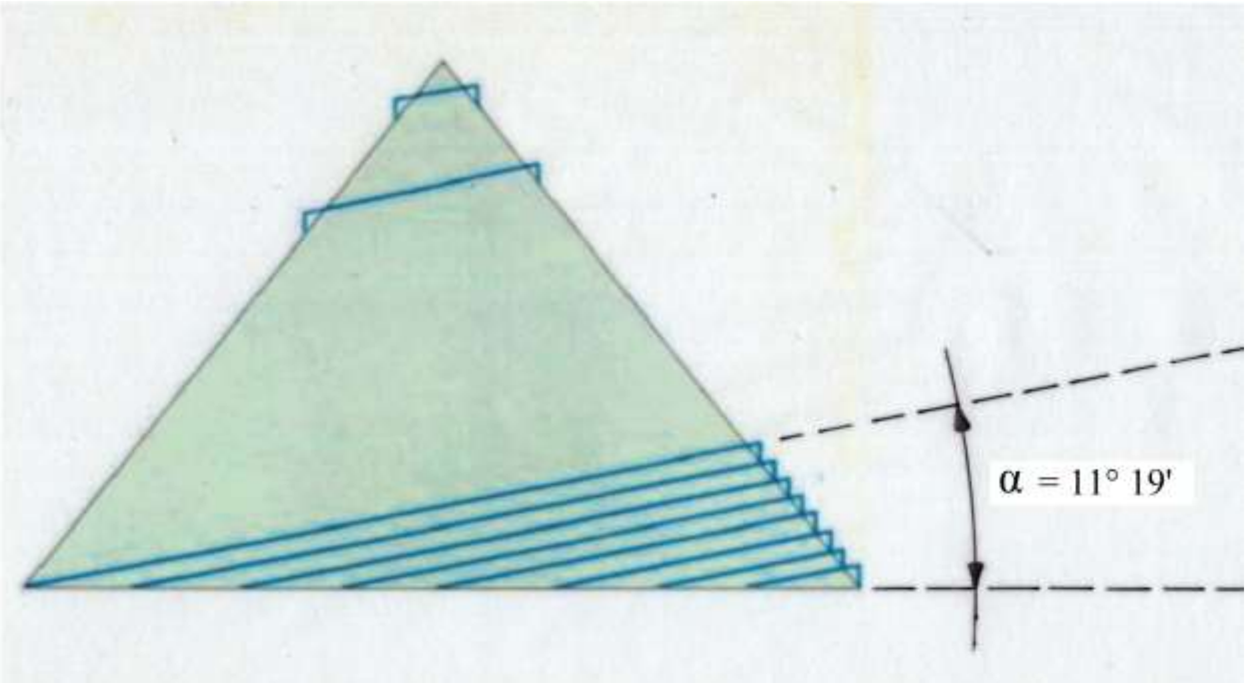
Il rapporto inverso, AC/BC, è la cotangente di α:

ctg α = 1/tg α = 1/0,2 = 5 (che è anche il valore della tangente di β).

L’angolo β è ampio:

β = 90° – α = 90° – 11° 19’ ≈ 78° 41’.

Le rampe disegnate nella vista frontale della faccia della piramide sono tutte fra loro parallele e inclinate dell’angolo α:

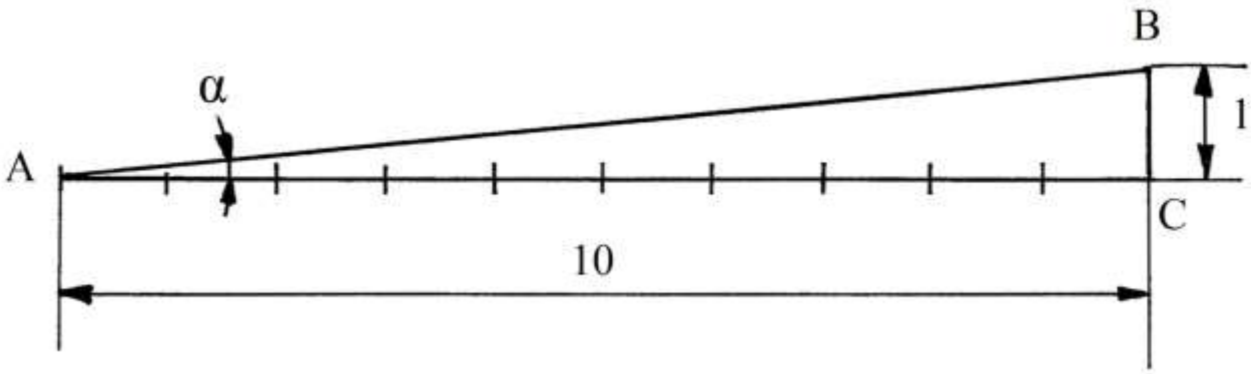


- APPROFONDIMENTO -

I segnali stradali

La pendenza fa la sua comparsa anche sui cartelli della segnaletica stradale a forma di triangolo equilatero bordati di rosso, che indicano un generico pericolo. Nel caso delle figure che seguono, la prima indica una strada in *salita* con pendenza del 10% e la seconda una strada in *discesa*, sempre con pendenza del 10%:

In questi due casi, il triangolo rettangolo ABC che simula il profilo della pendenza ha cateti lunghi rispettivamente 10 (AC) e 1 (BC) unità:



La tangente dell'angolo α vale:

$\text{tg } \alpha = BC/AC = 1/10 = 0{,}1$, che corrisponde a un angolo $\alpha \approx 5° 46'$.

- -

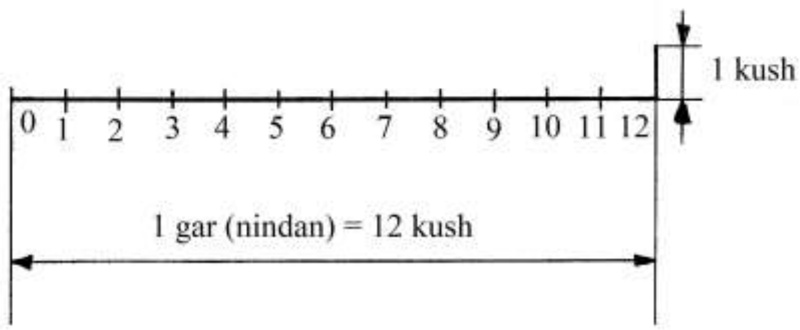
LE UNITÀ DI MISURA DI LUNGHEZZA USATE DAI SUMERI

Prima i Sumeri poi i Babilonesi hanno usato in Mesopotamia unità di misura di lunghezza lineare basate su una unità base, il *cubito* o *braccio* (kush).

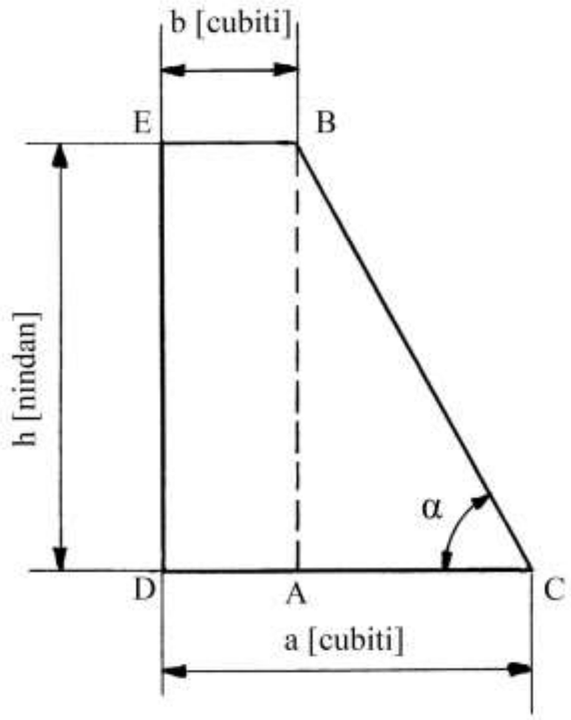
La tabella che segue descrive i rapporti fra le unità lineari:

Nome	Rapporto con il cubito		Lunghezza in cm o in m
dito	1/30 cubito = 1/10 piede		1,65 cm
piede	1/3 cubito		16,5 cm
spanna	½ cubito		24,75 cm
cubito (kush)			49,5 cm
nindan (o ninda o gar)	12 cubiti		5,94 m

Le due più importanti unità usate sul terreno e in edilizia erano il *cubito* e il suo multiplo *gar* o *nindan*:



I Sumeri calcolavano l'inclinazione o *pendio* di una scarpata in pendenza nel modo descritto nella figura che segue:



Le dimensioni orizzontali (a e b) erano misurate in *cubiti* e l'altezza (h) in *nindan*.

Il triangolo rettangolo ABC ha altezza h e il cateto orizzontale AC è lungo (a – b).

Il rapporto $AC/AB = (a – b)/h$ rappresentava la *cotangente* dell'angolo α.

Il precedente rapporto è di seguito indicato con la lettera greca minuscola ω (omega):

$$(a – b)/h = \omega \quad \text{da cui}$$

$$(a – b) = h * \omega .$$

I Sumeri indicavano l'inclinazione di BC con il numero di cubiti (a – b) relativi all'altezza *h* (espressa in nindan = 12 cubiti).

Il coefficiente ω era espresso in:

$$\omega = \text{cubiti/nindan} = \text{cubiti/(12 cubiti)} = 1/12 .$$

Il metodo usato dai Sumeri per determinare l'inclinazione di un muro, di una scarpata, di un edificio o della parete di un canale di irrigazione era simile al concetto del *seked* usato dagli Egizi. Entrambi i popoli impiegavano la *cotangente* di un angolo, senza conoscere l'ente geometrico *angolo* e la funzione trigonometrica *cotangente*.

- APPROFONDIMENTO -

Che cosa è l'Assiriologia

Per una consolidata tradizione, è chiamata *Assiriologia* la scienza che si occupa dello studio della cultura, della storia, della religione, dell'economia, della tecnologia e delle scienze e dell'archeologia delle civiltà della Mesopotamia e dei popoli delle regioni confinanti che impiegarono la *scrittura cuneiforme* creata dai Sumeri.

La successione cronologica dei tre popoli più importanti della Mesopotamia è la seguente:

Sumeri → Babilonesi → Assiri.

I Sumeri non erano Semiti (e la loro origine è ancora abbastanza sconosciuta), mentre lo erano i Babilonesi e gli Assiri che parlavano due dialetti dell'*accadico*, lingua strettamente imparentata pure con l'*eblaita*, parlata nella distrutta città Stato di Ebla nell'odierna Siria.

Spesso i testi che contengono studi specialistici sulle civiltà mesopotamiche (compresa quella dei Sumeri) si riferiscono genericamente ai Babilonesi.

- -

La tavoletta Plimpton 322

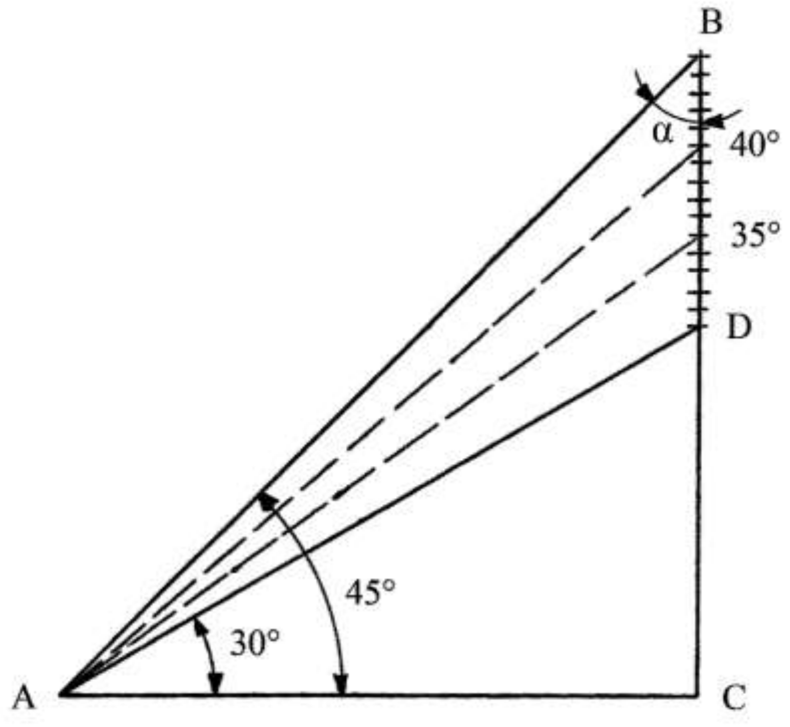
Essa risale al periodo del regno di Hammurabi di Babilonia (XIX o XVIII secolo a.C.) e fu ritrovata in scavi condotti nella regione di Larsa (nel sud dell'odierno Iraq).

Il suo nome deriva da quello dell'americano George Arthur Plimpton che donò la sua collezione di tavolette alla Columbia University di New York.

È piuttosto danneggiata. Contiene una tabella di numeri scritti secondo il sistema di numerazione dei Sumeri e dei Babilonesi, in base 60, distribuiti su quattro colonne e quindici righe.

Le interpretazioni del contenuto della tavoletta sono assai differenziate.

Secondo alcuni studiosi essa conterrebbe soltanto quindici *terne pitagoriche* corrispondenti alle lunghezze di cateti e ipotenuse di triangoli rettangoli con un angolo di ampiezza variabile di 1 grado - grosso modo – fra 45° e 30°:



L'angolo nel vertice B è α: la sua ampiezza varia in relazione alla posizione del punto B: ad esempio, l'angolo ADC è ampio soltanto 30°.

Questa interessante proprietà ha suggerito ad altri storici della matematica l'ipotesi che la tavoletta possa contenere dei dati di natura *trigonometrica* per cui la tabella fornirebbe il valore del *quadrato della secante*, come risultato del rapporto fra il quadrato della lunghezza dell'ipotenusa AB (nel caso di 45°) e il quadrato di quella del cateto verticale CB:

$CB/AB = \cos\alpha$ e l'inverso di questo rapporto è

$AB/CB = \text{secante } \alpha = \sec\alpha$ e

$(AB/CB)^2 = (\sec\alpha)^2$.

Nota: sulle diverse funzioni trigonometriche si rimanda all'APPENDICE in calce a questo articolo.

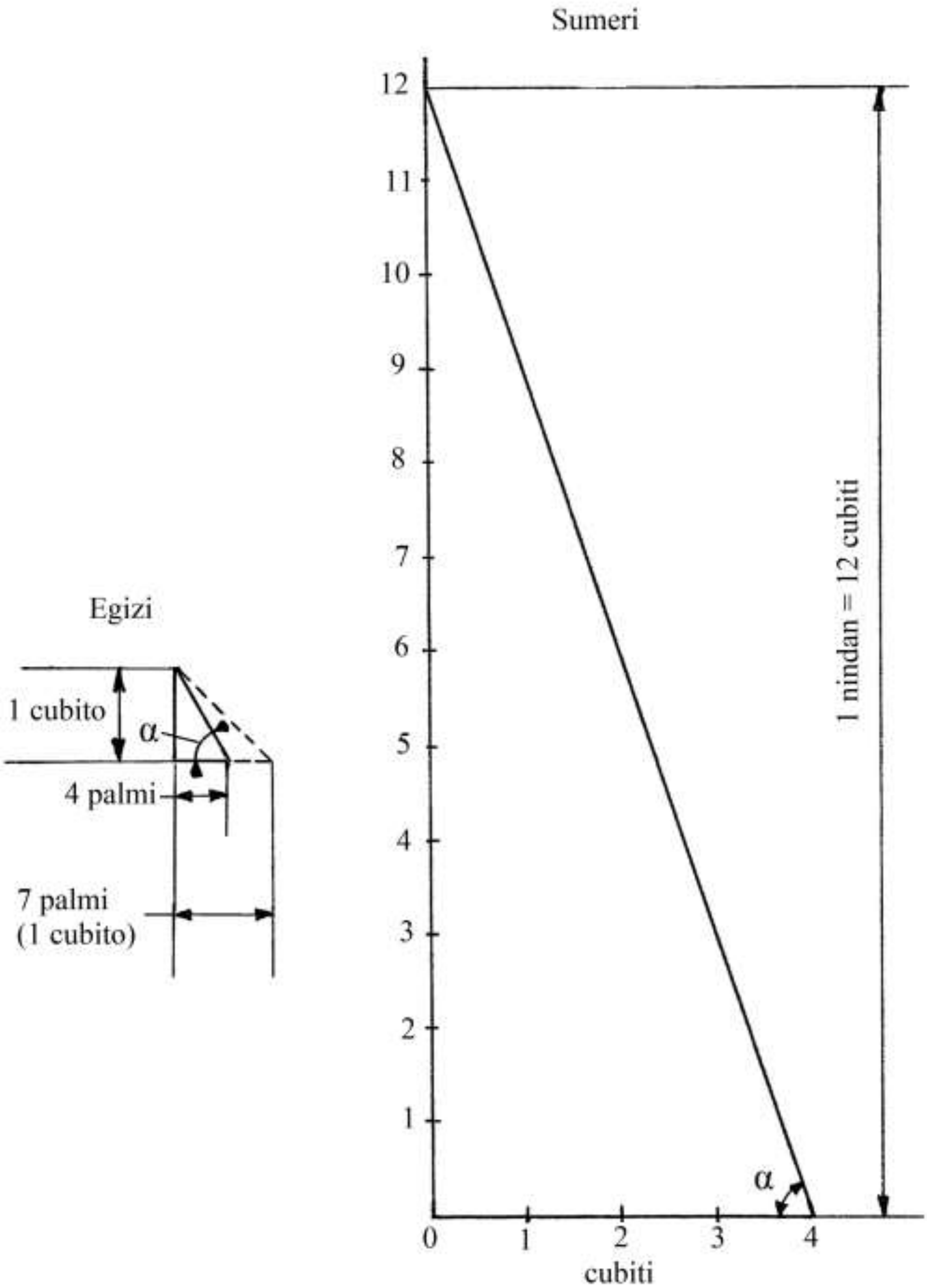
Secondo questa ipotesi, la tabella sarebbe articolata come segue:

quadrato del rapporto $\frac{\text{ipotenusa}}{\text{cateto verticale}}$	lunghezza cateto verticale	lunghezza ipotenusa	numero d'ordine
			1
			2
			3
			4
			5
			6
			7
			8
			9
			10
			11
			12
			13
			14
			15

Ovviamente, gli scribi Babilonesi non conoscevano i concetti di coseno e secante. Essi arrivarono a impiegare la funzione trigonometrica *cotangente* calcolando le inclinazioni da attribuire alle costruzioni e agli scavi dei canali per mezzo dello studio di triangoli rettangoli con cateti lunghi numeri interi formanti terne pitagoriche.

Confronto fra le unità di misura degli Egizi e quelle dei Sumero-Babilonesi

A parte le diverse dimensioni assegnate al *cubito* presso gli Egizi e i presso i Sumero-Babilonesi, i metodi di misura delle inclinazioni erano simili: l'unica differenza era data dall'*ordine di grandezza* del *gar* sumerico, lungo 12 volte il cubito egizio. La figura che segue mette a confronto i due metodi:



Il rapporto fra la lunghezza di 1 cubito egizio (52,5 cm) e quella di 1 nindan sumerico (12 cubiti = 12 * 49,5 cm = 594 cm) è:

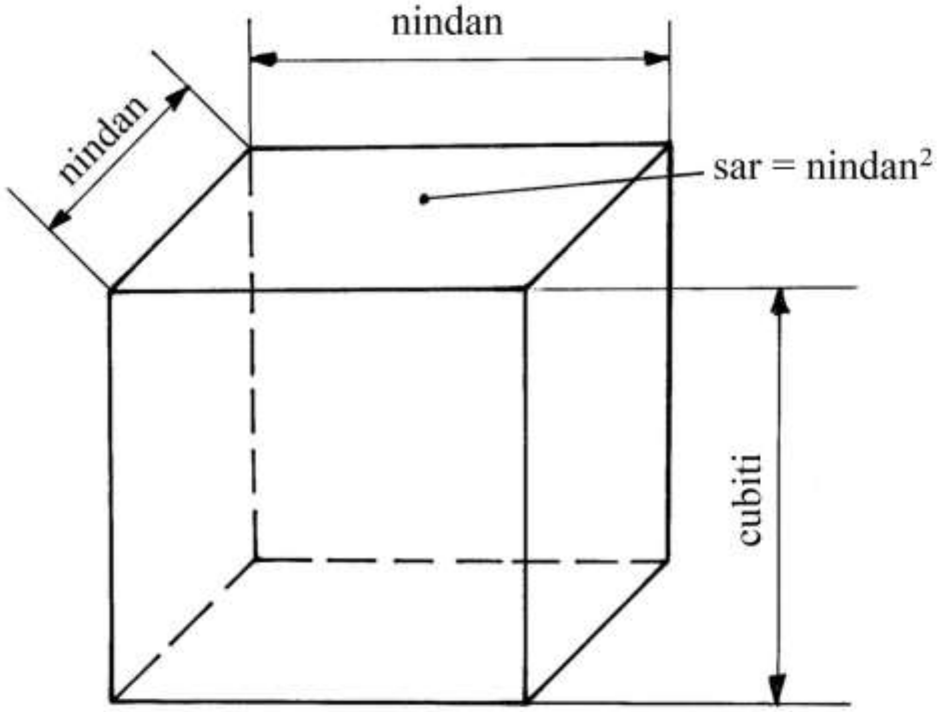
$$52{,}5 : 594 = 1 : 8{,}8383 .$$

- APPROFONDIMENTO -

I Sumeri calcolavano il volume di un solido a forma di prisma, come facciamo oggi, moltiplicando l'area di base per l'altezza.

Al contrario di quello che accadeva nel calcolo dell'inclinazione di una scarpata, la lunghezza orizzontale di un prisma era misurata in *nindan* e l'altezza in *cubiti*: l'area di base veniva espressa in un'unità di misura chiamata *sar*:

$$1 \text{ sar} = 1 \text{ nindan}^2.$$

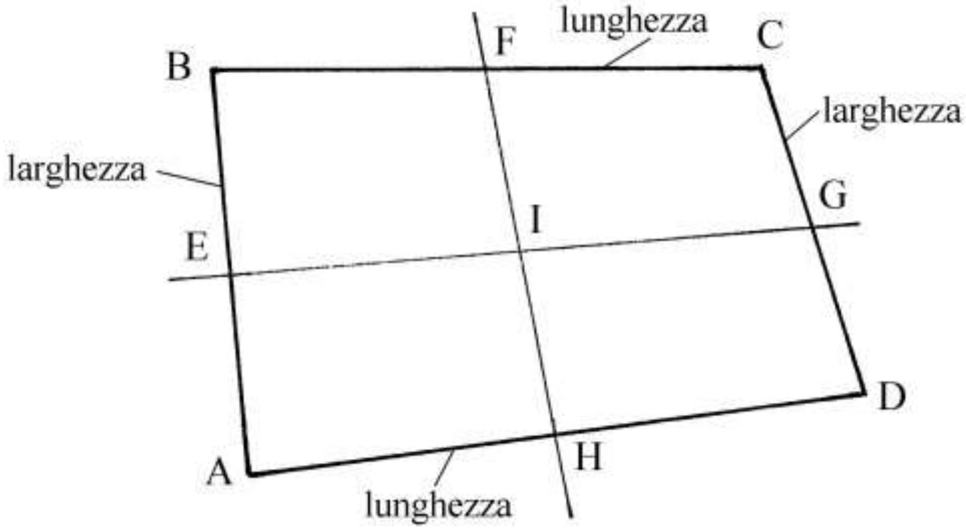


Una spiegazione per questo uso difforme può essere fornita dal maggiore sviluppo in senso orizzontale (rispetto a quello verticale) di molti edifici. Per non usare numeri troppo grandi per misurare le dimensioni orizzontali espresse in cubiti, i Sumeri e i Babilonesi usavano il suo diretto multiplo, il *nindan*.

- -

<u>Il calcolo approssimato dell'area di un quadrilatero</u>

ABCD è un quadrilatero generico. I suoi lati opposti non sono paralleli.



E, F, G e H sono i punti medi dei quattro lati.

Gli agrimensori Sumerici usavano una formula pratica per calcolare l'area S di un quadrilatero moltiplicando la *lunghezza media* (EG) per la *larghezza media* (FH):

S = EG * FH

Alcuni papiri egizi proponevano una soluzione leggermente diversa per lo stesso calcolo. L'area veniva ricavata con il prodotto delle *semisomme* dei due lati opposti:

S = (AD + BC)/2 * (AB + DC)/2

Queste due espressioni sono varianti di quella che è conosciuta come la *formula degli agrimensori*, un metodo approssimato per calcolare l'area di un quadrilatero, metodo usato per millenni.

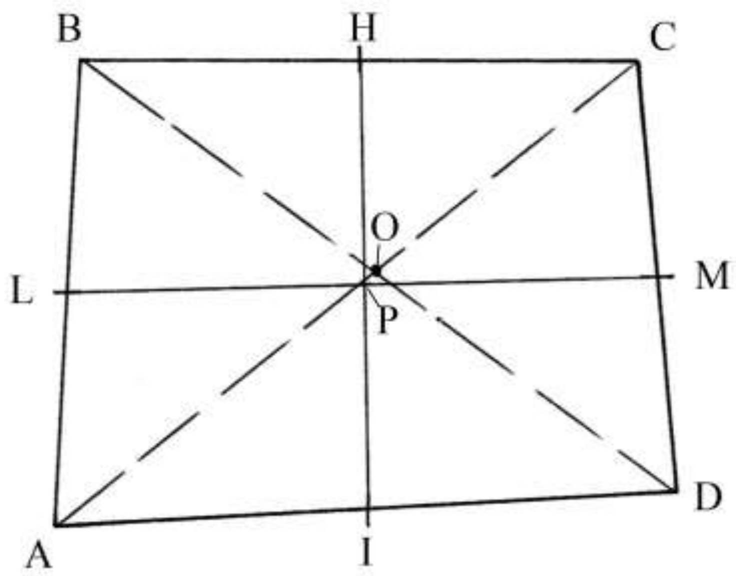
- APPROFONDIMENTO -

<u>Uso della formula degli agrimensori</u>

La figura che segue descrive la pianta, assai semplificata, di una stanza, di un'aula scolastica o di un piccolo terreno.

Essa ha la forma di un *trapezoide* perché non vi sono lati opposti paralleli.

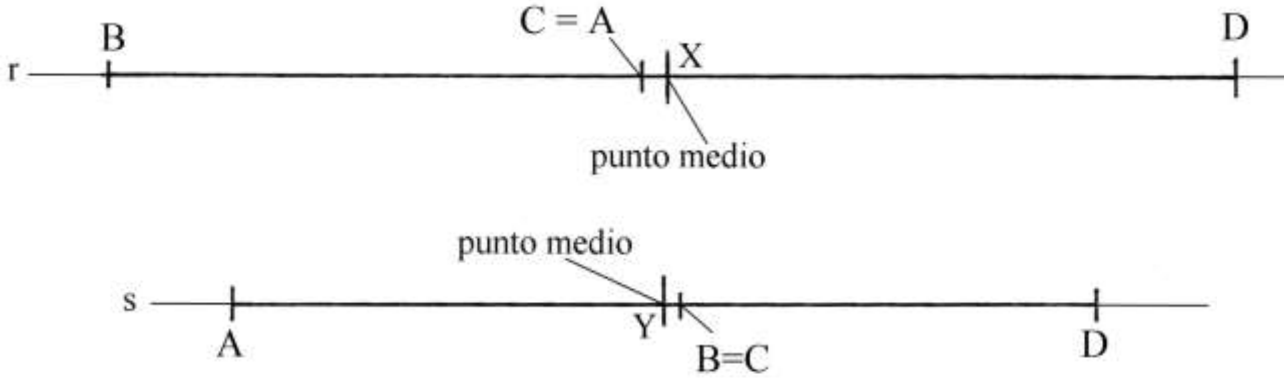
Deve essere misurata la sua superficie:



Le diagonali del quadrilatero si intersecano nel punto O.

H, I, L e M sono i punti medi dei quattro lati. I segmenti che collegano i punti medi dei lati opposti (HI e LM) si incrociano nel punto P, *non* coincidente con il punto O.

Un tecnico misura le lunghezze dei quattro lati e delle due diagonali, AC e BD: se questi due ultimi segmenti hanno lunghezze non troppo diverse, per gli usi pratici può determinare con buona approssimazione la superficie del trapezoide calcolando la lunghezza media delle coppie di lati opposti: [BC e AD] e [AB e CD].



La precedente costruzione grafica è ottenuta riportando le lunghezze dei quattro lati su due distinte *rette*, r e s, e dividendo a metà.

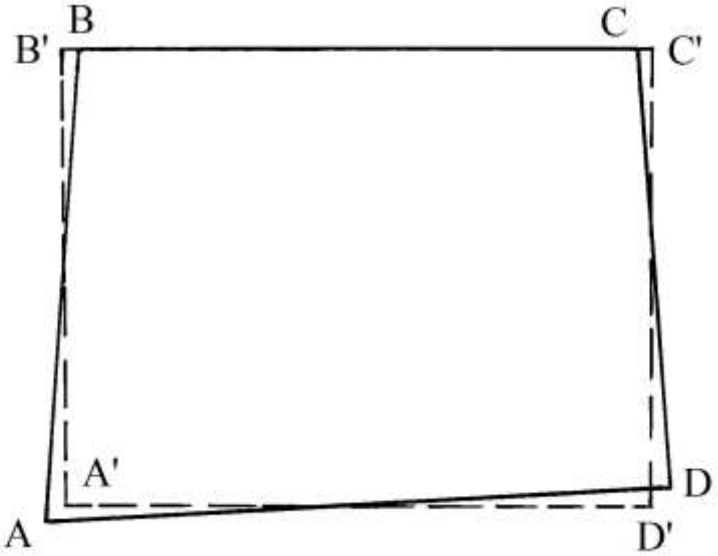
La costruzione determina le lunghezze medie:

BC + AD = BX + XD
BX = XD = (BC + AD)/2

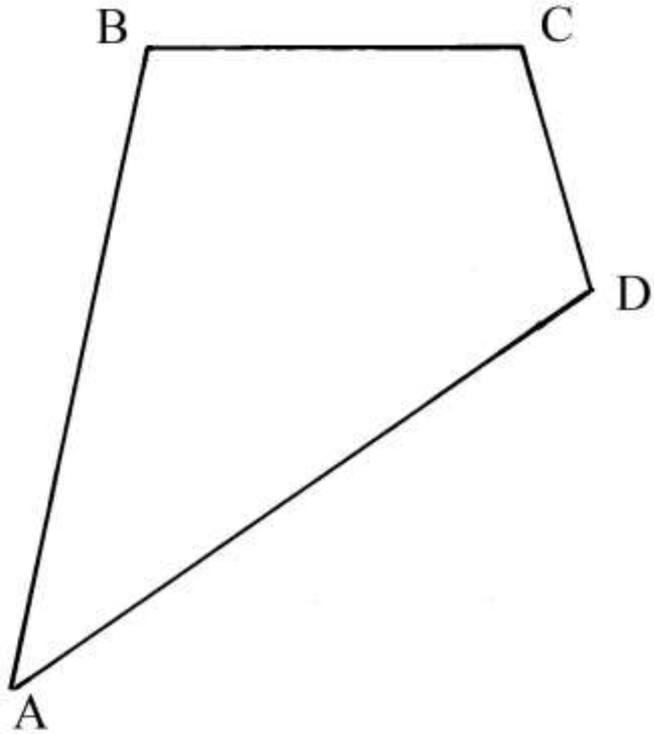
AB + CD = AY + YD
AY = YD = (AB + CD)/2

L’impiego della *formula degli agrimensori* fornisce un risultato accettabile quando le dimensioni dei lati opposti di un quadrilatero hanno valori vicini.

Il trapezoide ABCD della figura precedente può essere facilmente trasformato nel rettangolo A'B'C'D' che, con approssimazione accettabile per usi tecnici, ha la sua stessa superficie:



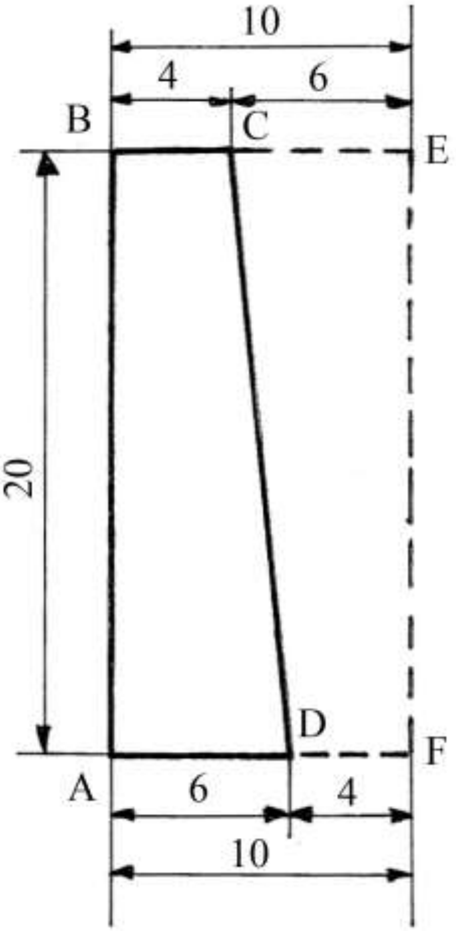
Se la formula è applicata a un quadrilatero di forma molto deformata rispetto a quella di in rettangolo, essa fornisce risultati aberranti, come nel caso della figura che segue:



<u>Il problema 52 del papiro Rhind</u>

Lo scriba Ahmes propose il seguente problema (n. 52 del papiro Rhind): qual è l'area di un *triangolo troncato* con lato lungo 20 khet e con le basi lunghe 4 e 6 khet?

In realtà, il *triangolo troncato* è un trapezio rettangolo (ABCD nella figura che segue):



La *khet* è un'unità di misura della lunghezza che vale 100 cubiti.

Ahmes risolse il problema con una semplice costruzione: prolungò le basi AB e BC verso destra. Alla base più corta (BC) sommò un segmento (CE) lungo quanto la base più lunga (AD).

Alla base più lunga (AD) aggiunse un segmento (DF) lungo quanto la base più corta (BC).

I segmenti AF e BE avevano la stessa lunghezza, uguale a 10 khet.

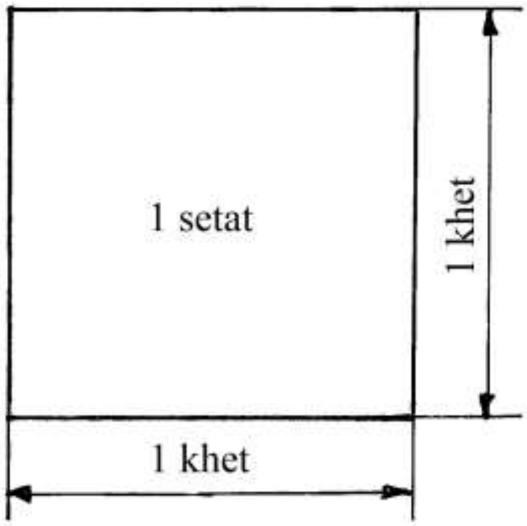
Il quadrilatero ABEF era un rettangolo, diviso dal segmento CD in due trapezi (ABCD e CEFD) di uguale superficie.

L'area di ciascun trapezio era la metà di quella del rettangolo ABEF.

L'area venne calcolata facendo la media fra le due basi del trapezio (AD e BC) e moltiplicando il risultato per l'altezza AB e cioè:

$$\text{Area}_{ABCD} = (AD + BC)/2 * AB = (6 + 4)/2 * 20 = 100 \text{ khet}^2 = 100 \text{ setat} .$$

La *setat* era un'unità di misura della superficie e corrispondeva a quella di un quadrato con lato lungo 1 khet:



La soluzione del problema 52 proposta da Ahmes sembra essere basata sulla *formula degli agrimensori*.

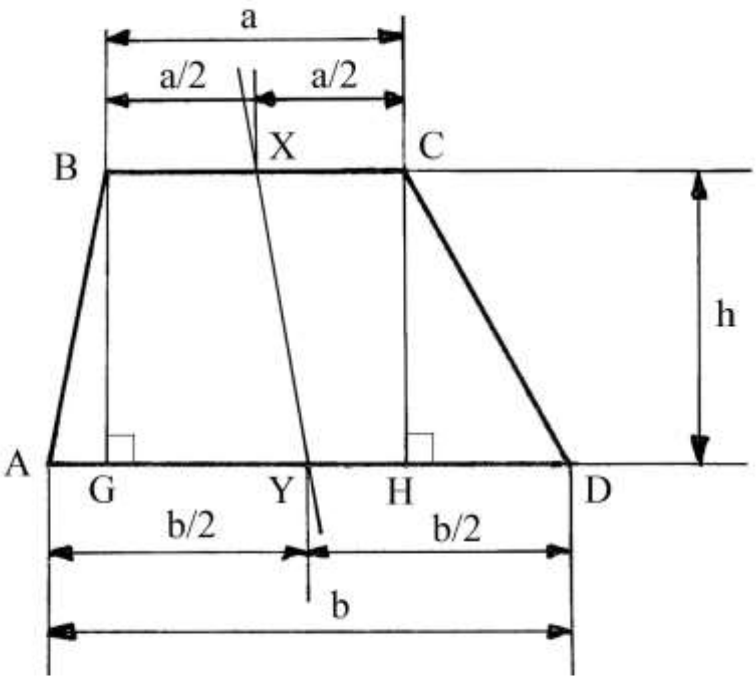
- -

Divisione di un terreno a forma di trapezio

Torniamo in Mesopotamia.

ABCD è un trapezio *scaleno* con due lati paralleli: AD e BC.

I segmenti BG e CH sono due altezze del trapezio, di lunghezza h:



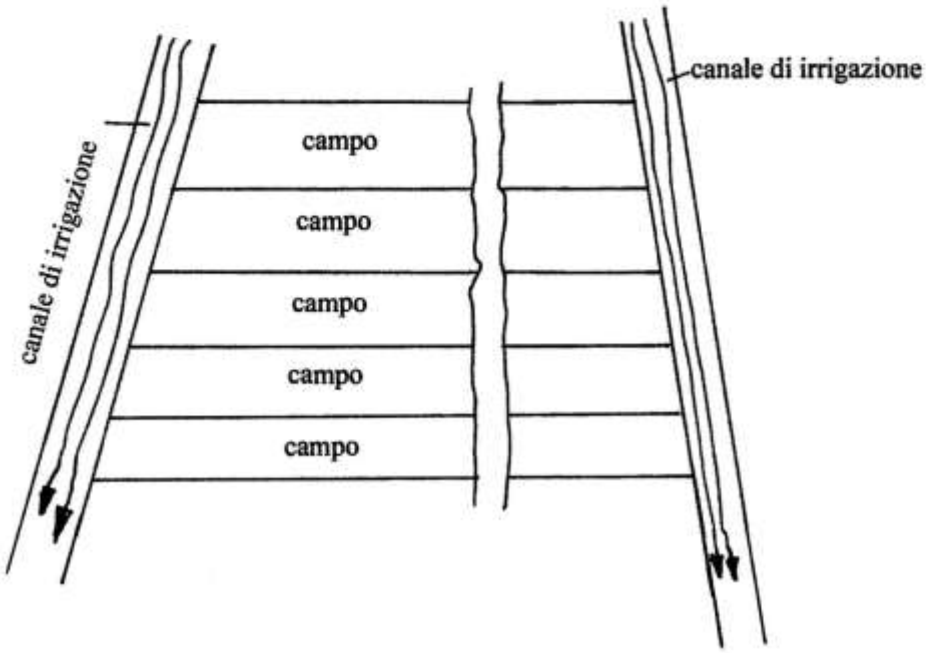
I punti X e Y dividono le due basi in parti uguali. Il segmento XY divide il trapezio ABCD in due trapezi, ABXY e XCDY, di uguale superficie.

Gli agrimensori Sumerici erano in grado di dividere con questo metodo, in due parti uguali, un campo con la forma di ABCD, con un taglio effettuato lungo XY.

Nella Mesopotamia meridionale (la regione occupata dai Sumeri) questo metodo non poteva essere sempre usato perché c'era un problema: buona parte dei campi avevano una forma molto allungata per poter attingere acqua dai canali di irrigazione. I terreni agricoli avevano forma di *campo lungo* perché erano il frutto di una colonizzazione pianificata.

Il lato corto confinava con un canale; l'altro lato corto poteva confinare con un altro canale o con un territorio non coltivato (come un bacino, una palude, una zona semi arida) nel quale scaricare l'acqua di irrigazione in uscita dai campi.

La scelta di questa particolare disposizione dei campi era imposta dalla necessità di irrigarne la maggiore quantità possibile:



I due canali potevano essere costruiti a livelli leggermente differenti: ad esempio, quello di sinistra poteva essere leggermente più elevato di quello di destra e l'acqua scorreva nei campi da sinistra verso destra, per fluire nel canale a destra.

Invece nella Mesopotamia a nord della regione abitata dai Sumeri, i terreni agricoli avevano forme meno allungate, quadrangolari.

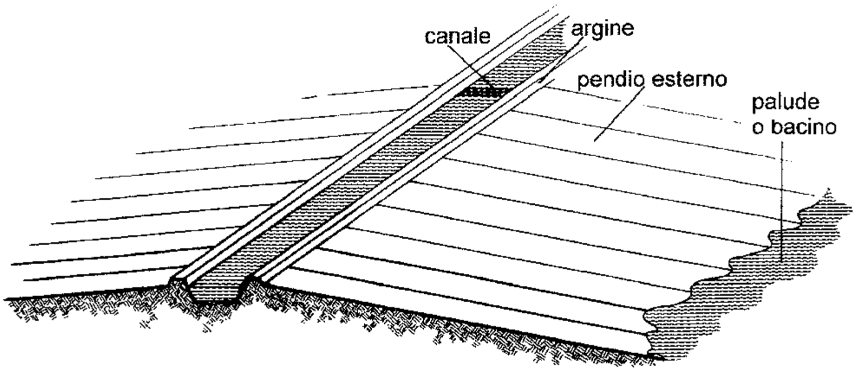
- APPROFONDIMENTO -

L'irrigazione nella bassa Mesopotamia

Mario Liverani ha così descritto i metodi di irrigazione impiegati nella bassa Mesopotamia ai tempi dei Sumeri (da "Uruk la prima città", pp. 20-21):

"... Del resto la coincidenza delle zone di alluvio irriguo con le sedi delle più antiche civiltà era un fatto già avvertito dagli studiosi del secolo scorso

Ma solo di recente si è messo in evidenza come il momento essenziale in tale processo sia stata la messa a punto del sistema dei campi lunghi, con irrigazione a solco (figura):



Nell'alluvio basso-mesopotamico sono storicamente attestati due sistemi di irrigazione, ben diversi tra loro: l'irrigazione a bacino e l'irrigazione a solco, rispettivamente adattabili al meglio alle due sotto-zone idrologiche e geo-morfologiche della «valle» e del «delta».

L'irrigazione a bacino, che comporta la completa sommersione del campo sotto un sottile strato d'acqua (poi rapidamente assorbito dal terreno per percolazione verticale), viene praticata in campi quadri recintati da un piccolo argine. Questi campi sono necessariamente di modeste dimensioni e perfettamente orizzontali (altrimenti la sommersione non sarebbe omogenea), e possono essere sistemati anche individualmente, a livello familiare, e con modesta necessità di coordinamento coi campi contigui. Comportano dunque una gestione di ambito familiare e di villaggio, e una sistemazione idraulica del territorio per aggiustamenti parziali e progressivi, senza bisogno di particolare pianificazione e centralizzazione.

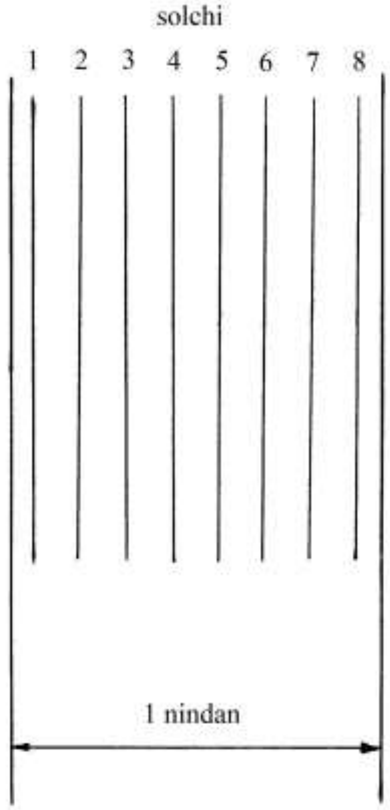
Invece l'irrigazione a solco viene praticata in campi lunghi, sottili strisce parallele tra di loro, che si estendono in lunghezza per molte centinaia di metri, in leggera e regolare pendenza, e che hanno una «testata alta» adiacente al canale da cui ricavano l'acqua, e una «testata bassa» verso acquitrini o bacini di drenaggio. L'acqua inonda solo i solchi, e il terreno è imbevuto per percolazione orizzontale. Questi campi, data la loro dimensione e il loro rigido posizionamento rispetto al canale, possono essere convenientemente sistemati solo in maniera coordinata o pianificata, colonizzando ex novo un'area piuttosto estesa, con grossi blocchi di campi paralleli ordinatamente disposti a spina di pesce ai lati del canale. La costante inclinazione del terreno si adatta alla morfologia del delta, con canali sopraelevati (per accumulo di sedimenti) entro i loro argini, e bacini o paludi laterali di sfogo dell'acqua eccedente. I campi lunghi dunque richiedono per l'impianto e la gestione la presenza di un'agenzia centrale di coordinamento. Una volta istallati, consentono una produttività su più larga scala, in connessione con le altre innovazioni che vedremo subito.

I campi lunghi - che la documentazione successiva mostra prevalenti nel sud basso-mesopotamico - sono già ben presenti nella prima documentazione amministrativa «arcaica» di Uruk III ...”.

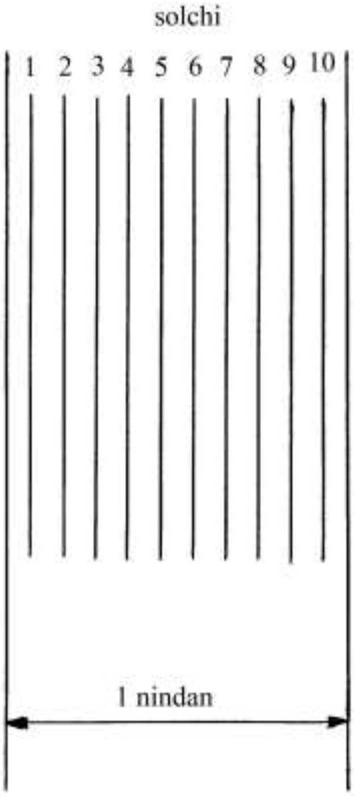
Ulteriori precisazioni sono offerte da Liverani nel suo più recente studio del 2018 [11] alle pp. 26-7:

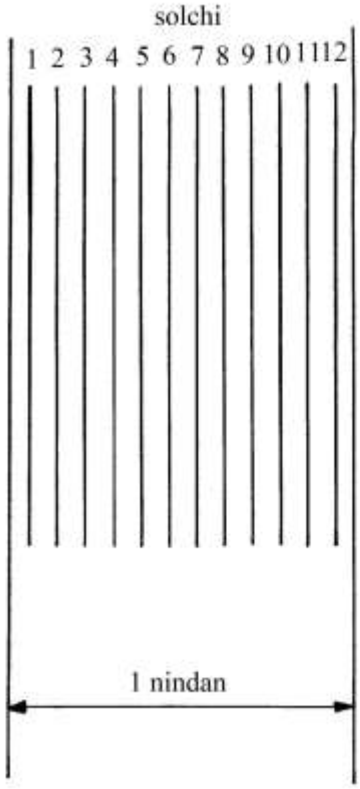
“*...A parte qualche caso di precoce ma modesta adozione di canali d'irrigazione in piccole vallate intermontane, il grande sistema d'irrigazione mediante canali venne progressivamente realizzato in Bassa Mesopotamia a partire da micro-sistemi di dimensione locale, progressivamente integrati col trascorrere dei secoli fino ad una completa unificazione che avverrà però solo a cavallo tra terzo e secondo millennio. Il sistema trova un presupposto necessario nel* *fatto che l'accumulo dei detriti trasportati dai fiumi (grandi e minori) provoca un innalzamento del loro letto (e dei loro argini) al di sopra del circostante piano di campagna. È così possibile irrigare le terre situate in due ampie fasce ai lati dei fiumi, mediante canali che hanno la loro testata "alta" sull'argine del fiume stesso e discendono lievemente fino a perdersi in paludi abbastanza lontane. Lo schema basilare è dunque un tratto di fiume o di canale dal quale si dipartono da entrambi i lati (a "spina di pesce") canali secondari e campi lunghi, irrigati nel senso della lunghezza mediante canaletti o semplicemente mediante i solchi di aratura…*".

Un testo sumerico spiegava come seminare l'orzo in solchi molto fitti: 8 ogni nindan di larghezza:



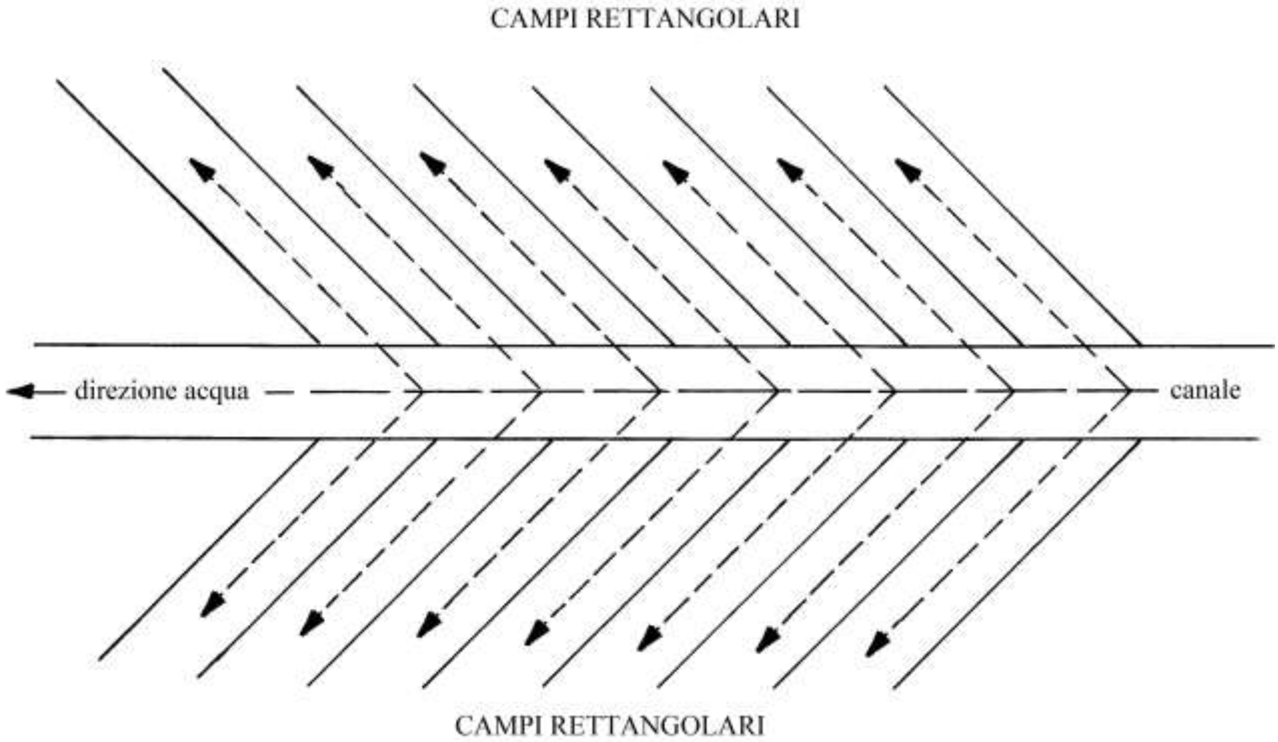
In altri casi la densità aumentava fino a 10-12 solchi per nindan:





Con i solchi così fitti, la semina era effettuata con l'*aratro seminatore*.

Lo schema che segue esemplifica la struttura dei lunghi campi coltivati nella bassa Mesopotamia, irrigati da un canale nel quale l'acqua scorre da sinistra verso destra:



Lo schema è in pianta e i campi sono schematizzati sotto forma di strisce rettangolari fra loro parallele, inclinate di 45° rispetto alla direzione della corrente: i campi hanno la testata disposta lungo le due rive.

Orzo, sesamo e palma da datteri

Nella Mesopotamia meridionale, colonizzata dai Sumeri e dai loro precursori della *civiltà di Ubaid*, l'orzo fu scelto fra i cereali per la sua maggiore resistenza alla salinizzazione dei suoli e per la e per sua più rapida maturazione rispetto alle varietà di grano. L'orzo veniva seminato in autunno e e raccolto prima delle piene primaverili del tigri e dell'Eufrate.

In estate veniva seminato il *sesamo*, una pianta a crescita rapida il cui raccolto era effettuato all'inizio dell'autunno.

Non potendo disporre degli ulivi, i Sumeri coltivarono il sesamo perché i suoi semi contengono fino al 50% di olio molto stabile che può essere facilmente conservato nel tempo grazie a due suoi composti che lo proteggono dalla rancidità. Oltre che per usi alimentari, l'olio di sesamo era usato per produrre profumi e sostanze medicamentose e per l'illuminazione. Infine, i residui della spremitura dei semi venivano usati come foraggio per l'alimentazione degli animali domestici.

A fianco dell'orzo e del sesamo era attuata un'arboricoltura intensiva della *palma da datteri* dalla quale oltre ai frutti venivano ricavati fibre e aghi dal fogliame e legno dal tronco.

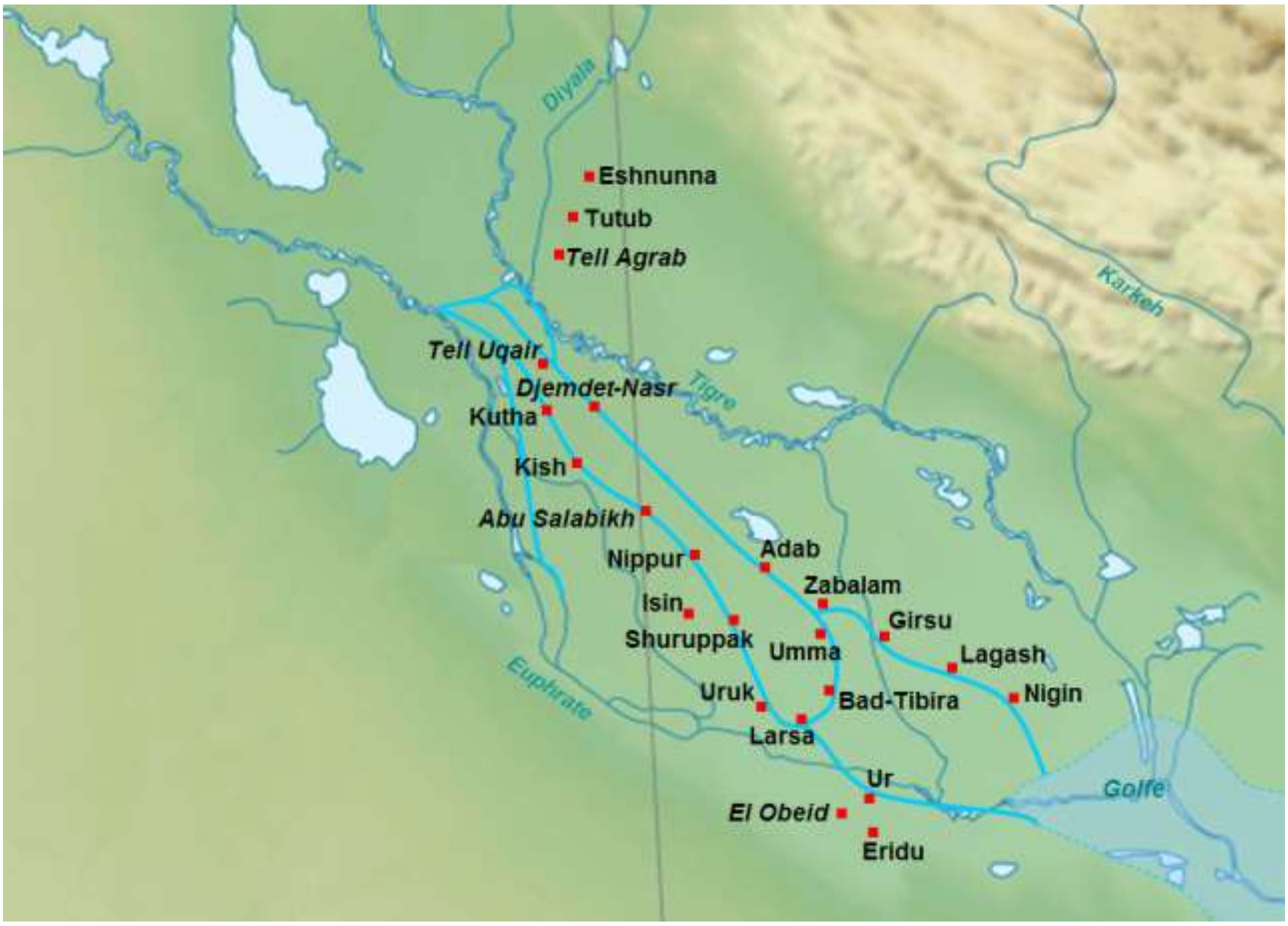
- -

Le dimensioni dei campi

In vari musei sparsi fra diversi Stati sono conservate grosso modo 500 000 tavolette e di esse 500 sono di contenuto matematico o geometrico.

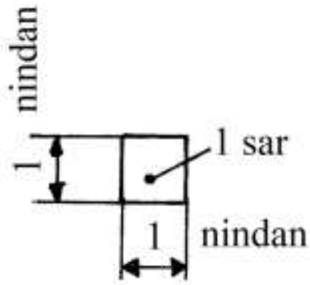
L'assiriologo italiano Mario Liverani in un fondamentale articolo ("*The shape of neo-sumerian fields*", "Bulletin on Sumerian Agriculture", V, 1990, pp. 147-86, il cui contenuto è stato in parte ripreso in Liverani, 2018) ha descritto un insieme di tavolette risalenti all'epoca del re Shulgi (o Sulgi) di Ur con dati catastali riferiti a proprietà terriere nei pressi della città sumera di Lagash. Shulgi regnò nel periodo compreso fra il 2120 e il 2000 a.C.

La mappa che segue (tratta da Wikipedia) mostra le posizioni dei centri urbani sumerici:

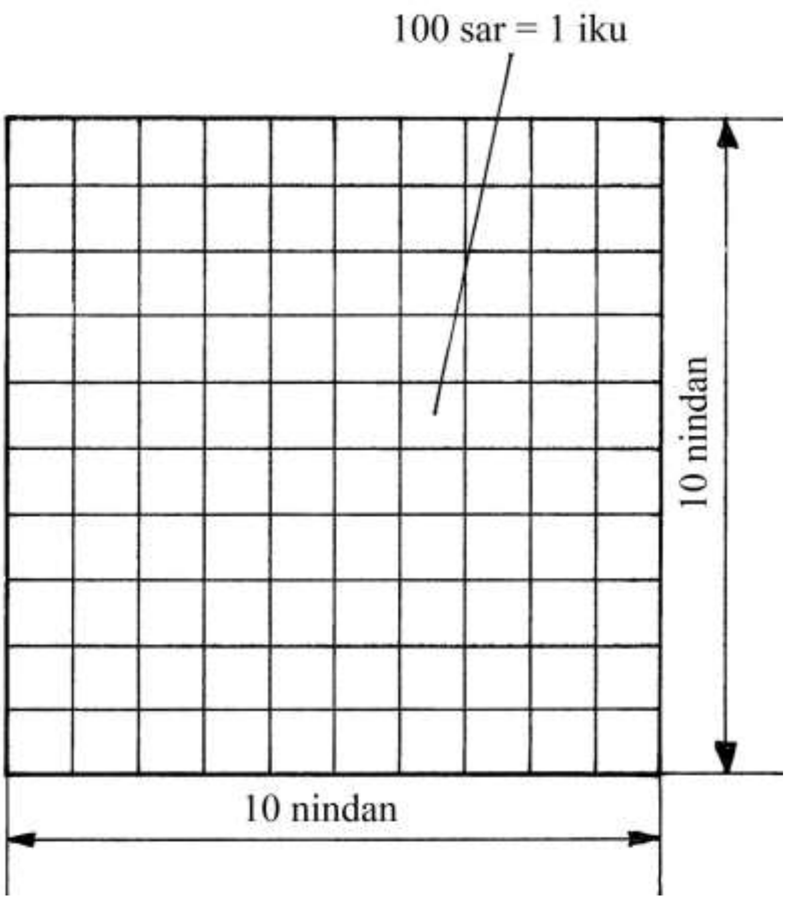


Prima di procedere occorre definire le unità di misura della superficie usate dai Sumeri.

Il *sar* era l'unità di misura di superficie che corrisponde all'area di un quadrato con lato lungo 1 *nindan*:

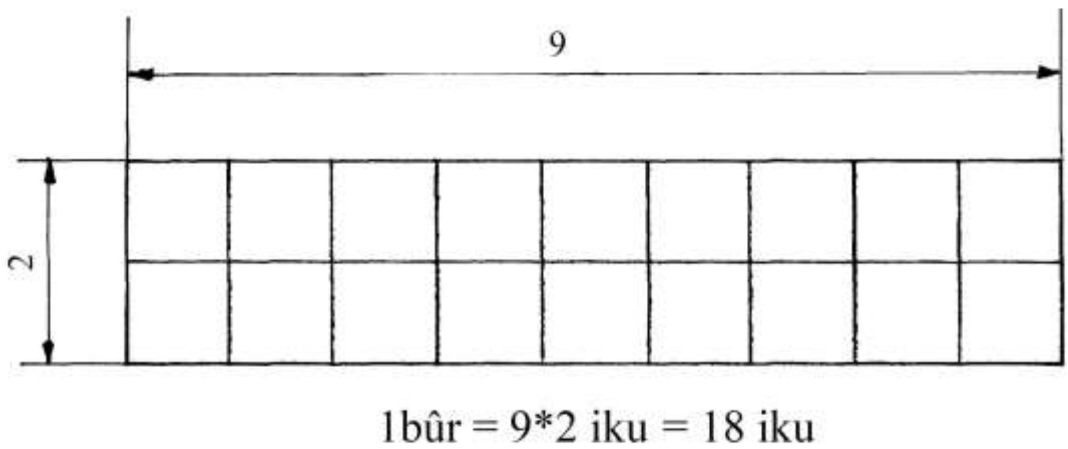


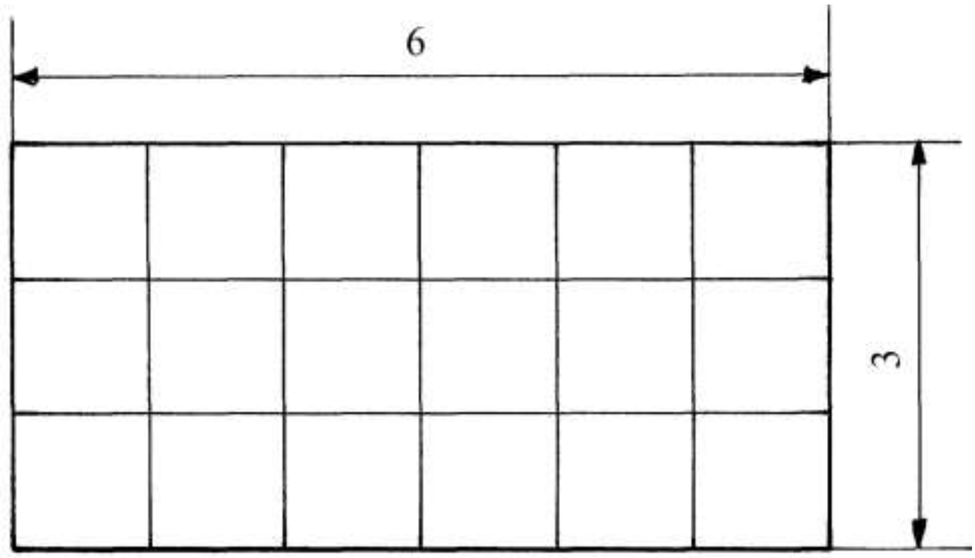
Un multiplo del *sar* era l'*iku* che corrispondeva all'area occupata da 100 *sar* e quindi equivaleva alla superficie di un quadrato di lato 10 *nindan*:



Un multiplo dell'*iku* era il *bûr*:

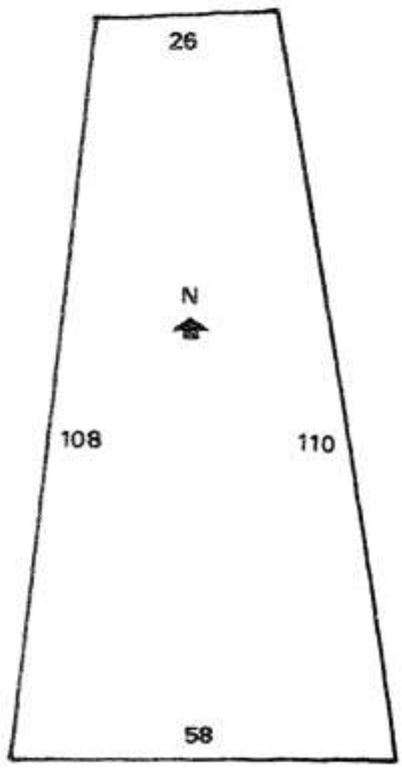
1 *bûr = 18 iku = 1800 sar*





1bûr = 6*3 iku = 18 iku

I documenti incisi in cuneiforme sulle tavolette informano riguardo a campi con superfici di dimensioni che crescono con il passare del tempo, ma che rimangono sempre molto allungati. Lo schema che segue è riprodotto da Liverani (fig. 40, pag. 204 di "Antico Oriente. Storia società economia") e descrive un campo a forma di trapezoide con dimensioni in *nindan* (o *gar*), con le dimensioni maggiori orientate nella direzione Nord.



dimensioni in nindan (o gar)

Si tratta di un *trapezoide* (e non di un trapezio scaleno) perché le due basi lunghe 26 e 58 nindan *non* sono parallele.

- APPROFONDIMENTO -

Le unità di misura della superficie usate dai Sumeri

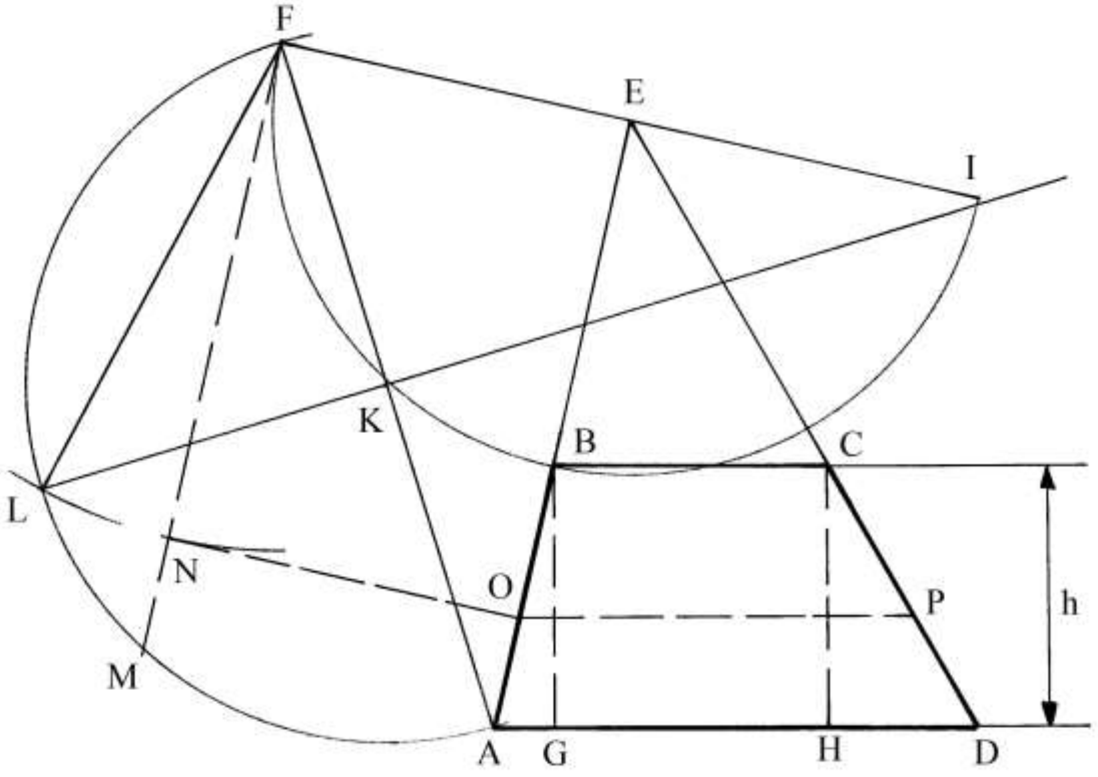
La tabella che segue contiene le principali unità di misura della superficie e i valori approssimati in m^2:

Unità di misura	Equivalenti a m^2	Valori arrotondati per eccesso, in m^2
1 sar (= 1 nindam^2)	35,2836	36
1 iku = 100 sar	3 528,36	3 600
1 eše = 6 iku	21 170,16	21 600
1 bûr = 3 eše	63 510,48	64 800
1 bur'u = 10 bûr	635 104,8	648 000
1 šar = 6 bur'u	3 810 628,8	3 888 000

- -

Una costruzione geometrica moderna

ABCD è un trapezio scaleno con i lati orizzontali AD e BC paralleli:



L’area del trapezio, S, viene attualmente calcolata con il prodotto della somma delle basi (AD e BC) per l’altezza h (BG = CH), diviso per 2:

S = [(AD + BC)/2] * BG

Presso i Babilonesi il trapezio ABCD poteva rappresentare un terreno da dividere in due parti uguali con una linea parallela ai lati AD e BC con un eventuale vincolo imposto dalla presenza di canali di irrigazione paralleli a un lato obliquo o a entrambi (AB e CD).

Una dettagliata costruzione geometrica è descritta di seguito.

Prolungare i lati obliqui AB e CD fino a farli incontrare in un punto, E, esterno al trapezio. Per il punto E condurre una linea perpendicolare al segmento AE.

Fare centro in E e, con raggio EB, tracciare una semicirconferenza da F a I.

Disegnare il segmento FA e determinare il suo punto medio, K: per questo punto condurre la perpendicolare a FA.

Fare centro nel punto K e, con raggio KA, tracciare una semicirconferenza da F a A; disegnare la corda FL.

Tracciare la corda FM, parallela al segmento EA.

Con centro in F e raggio FL condurre un arco di circonferenza da L fino a intersecare la corda FM in un nuovo punto, N.

Dal punto N disegnare un segmento parallelo a FI, fino a incontrare il lato AB in un punto, O.

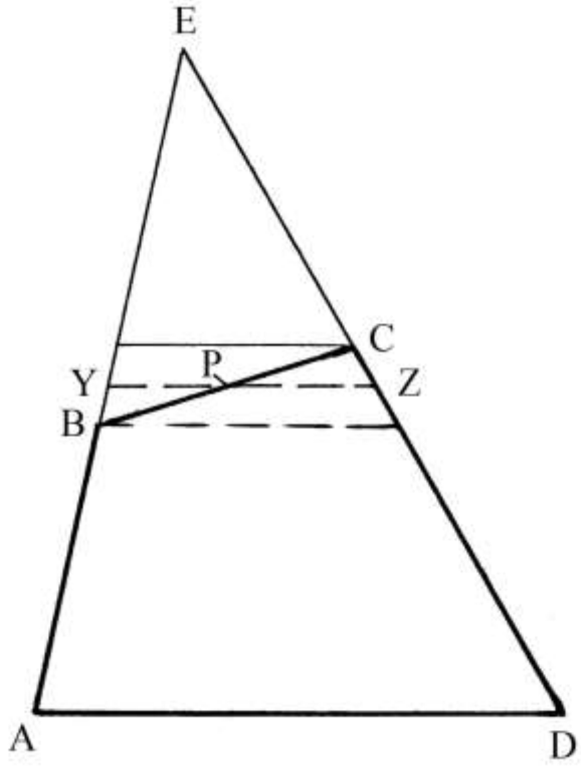
A partire dal punto O, tracciare un segmento parallelo al lato AD: il segmento OP taglia il trapezio ABCD in due aree di uguale superficie, AOPD e OBCP.

Nel caso di un trapezoide, senza lati paralleli, come è il caso della figura che segue, è possibile usare la precedente costruzione per ricavare una soluzione *approssimata* con un errore piccolo.

Il lato BC non è parallelo a quello AD. Determinare il punto medio del lato BC: è P.

Parallelamente al lato AD, tracciare un segmento passante per il punto P: è YZ.

Ripetere la precedente costruzione relativamente al nuovo trapezio scaleno AYZD:

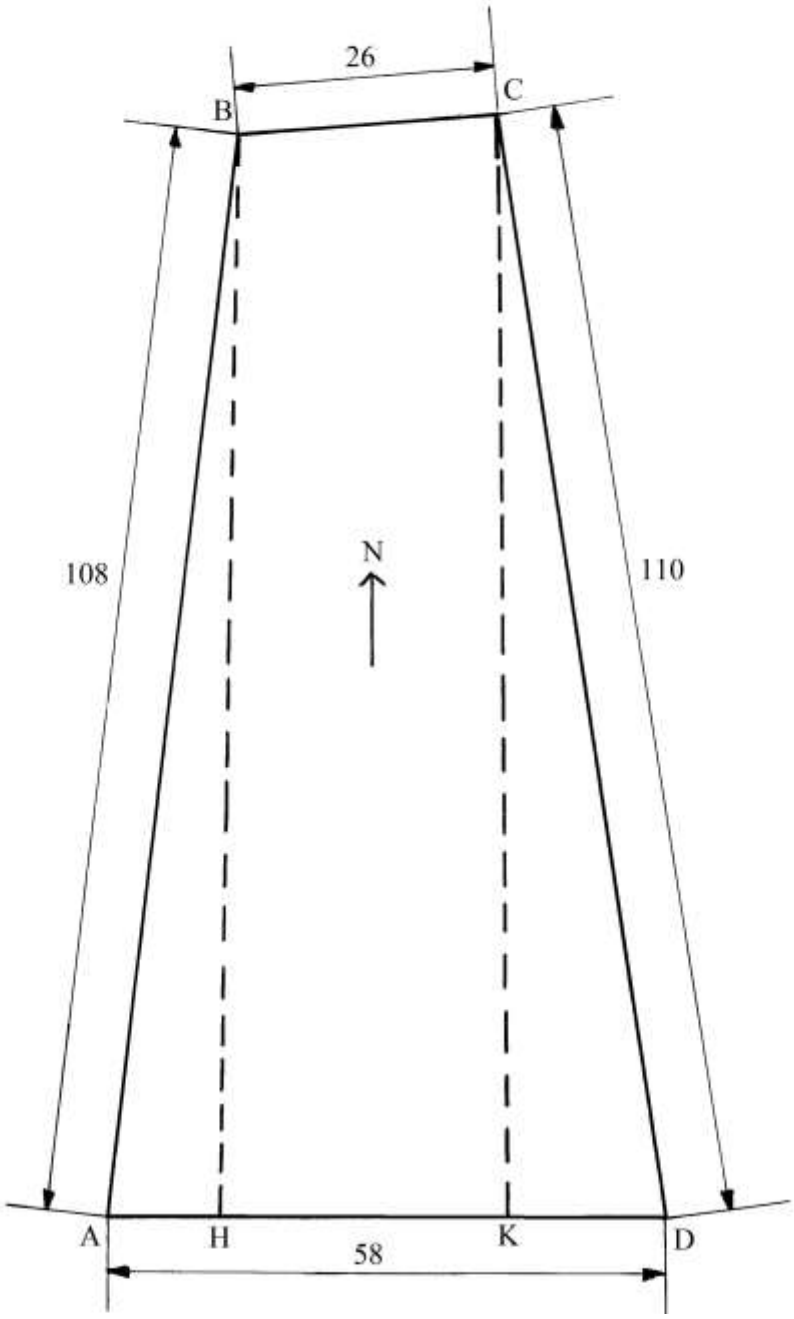


I Babilonesi

A loro volta, gli scribi Babilonesi scoprirono, intorno al 1800 a.C., la seguente soluzione *approssimata* per determinare la lunghezza del segmento OP parallelo alle basi AD e BC:

$$OP^2 = (AD^2 + BC^2)/2$$

Nella figura che segue sono tracciate le due altezze BH e CK relative al campo trapezoidale descritto nel precedente paragrafo:



La tavoletta che contiene la mappa del campo fornisce sia le dimensioni dei quattro lati sia l'area del campo, ma non quelle delle due altezze BH e CK:

S = 2 bûr + 9 iku e convertendo questi dati in *sar*:

S = 2 bûr + 9 iku = 36 iku + 9 iku = 45 iku = 4500 sar (= 4500 nindan^2) .

Con buona approssimazione, l'area del trapezoide ABCD può essere calcolata moltiplicando la media fra le lunghezze delle due basi (AD e BC)

(AD + BC)/2 per la media delle due altezze:

h = (BH + CK)/2 =

La media delle due basi vale:

(AD + BC)/2 = (58 + 26)/2 = 84/2 = 42 nindan .

L’area è quindi uguale a:

$A_{ABCD} = (AD + BC)/2 * h = 42 * h = 4500$ sar , da cui si ricava il valore incognito dell’altezza media *h*:

$h = 4500/42 \approx 107{,}14$ nindan .

Il valore calcolato di *h* è vicino alla media delle due altezze BH e CK, misurate o calcolate sullo schema.

Questi calcoli dimostrano che, probabilmente, gli scribi babilonesi erano in grado di calcolare correttamente l’area di un trapezio o di un trapezoide, senza confondere la lunghezza dei lati obliqui (AB e CD) con quella delle due altezze (BH e CK).

I catasti dei terreni di Lagash

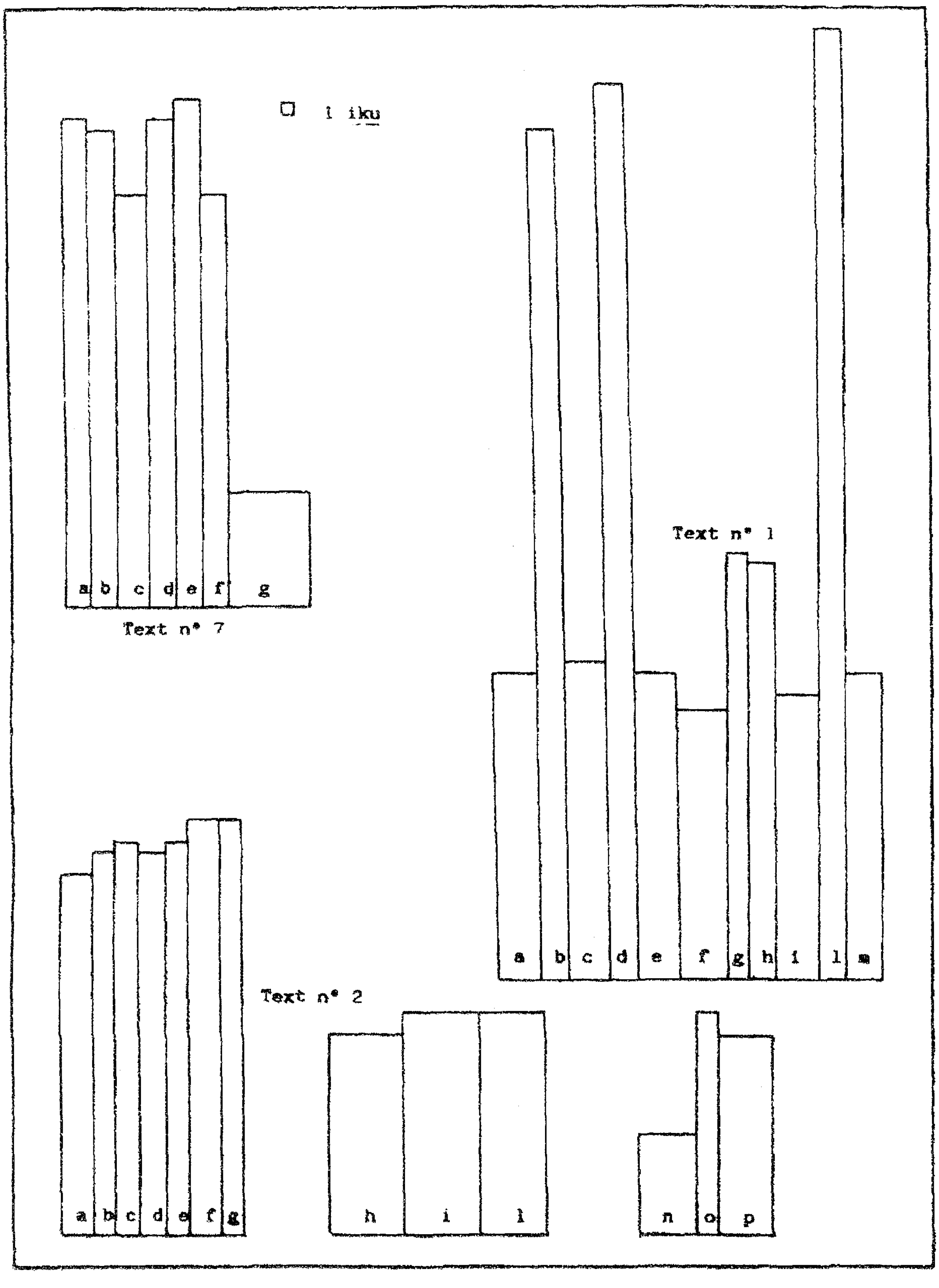
Al periodo dell’impero neo-sumerico di Ur risalgano almeno 30 catasti di superfici dimensioni: a uno di essi è dedicata una scheda a parte.

Nel citato articolo, Mario Liverani ha descritto un buon numero di tavolette sumeriche che descrivono una notevole varietà di campi situati nei pressi di Lagash.

La superficie media di quei campi era compresa fra i 100 e 125 *iku* (360 000 ÷ 450 000 m^2 e cioè 36 ÷ 45 ettari). La forma più comune era quella rettangolare: aumentando una delle due dimensioni, l’altra diminuiva in proporzione.

Liverani ha anche individuato la presenza di proprietà di dimensioni più piccole (50 e 75 *iku*) e più grandi (150, 200 e perfino 300 *iku*).

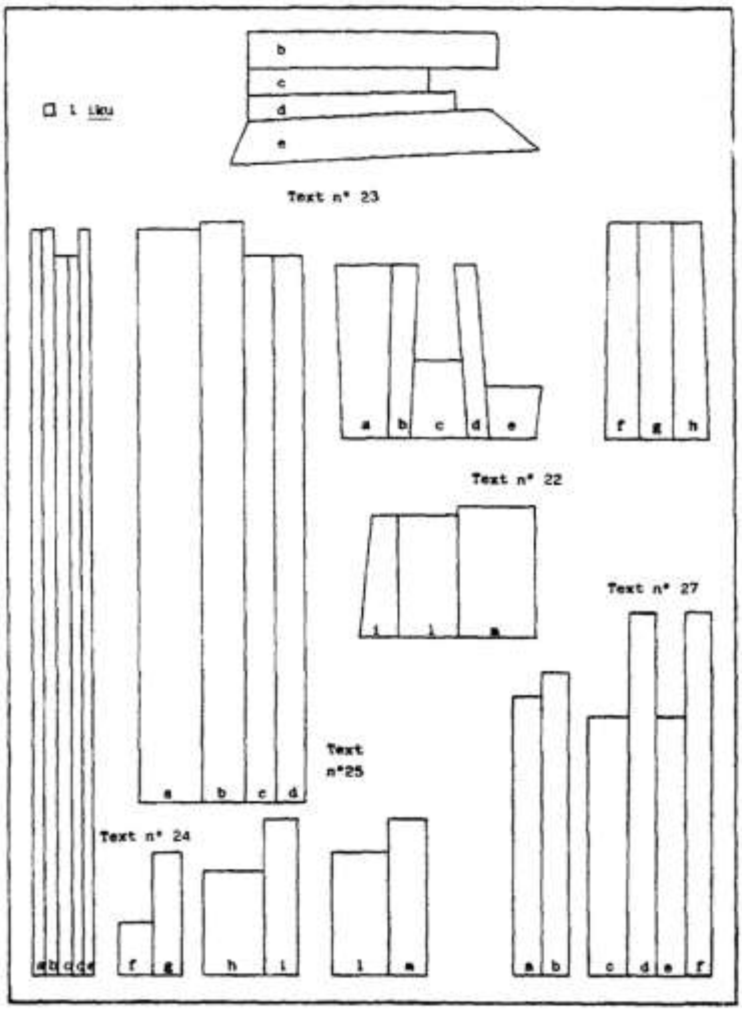
Nella figura che segue (dall’articolo di Liverani) sono riprodotte le forme in scala di alcuni campi: il piccolo quadrato disegnato in alto a sinistra ha la superficie di 1 *iku* (e cioè di 3600 m^2, cifra approssimata per eccesso, come spiegato nella precedente tabella delle unità di misura della superficie usate dai Sumeri):



I terreni descritti nel *Text n° 7*, nel blocco in alto a sinistra, avevano le seguenti dimensioni:

Particella	Dimensioni in *nindan*	Area in *iku*	Area in m^2 (approssimata per eccesso)	Area in ettari (ha)
a	450 x 26,50	119,25	429 300	42,93
b	440 x 27,33	120,252	432 907,2	43,29
c	380 x 29,33	111,454	401 234,4	40,12
d	450 x 25,33	113,985	410 346	41,03
e	470 x 25	117,50	423 000	42,30
f	380 x 25,50	96,90	348 840	34,88
g	106 x 73	77,38	278 568	27,86

Le forme dei campi descritti nella precedente figura erano tutte rettangolari. In realtà in alcune tavolette erano incisi dati relativi a campi di forma più complessa, trapezoidali come nella figura che segue:



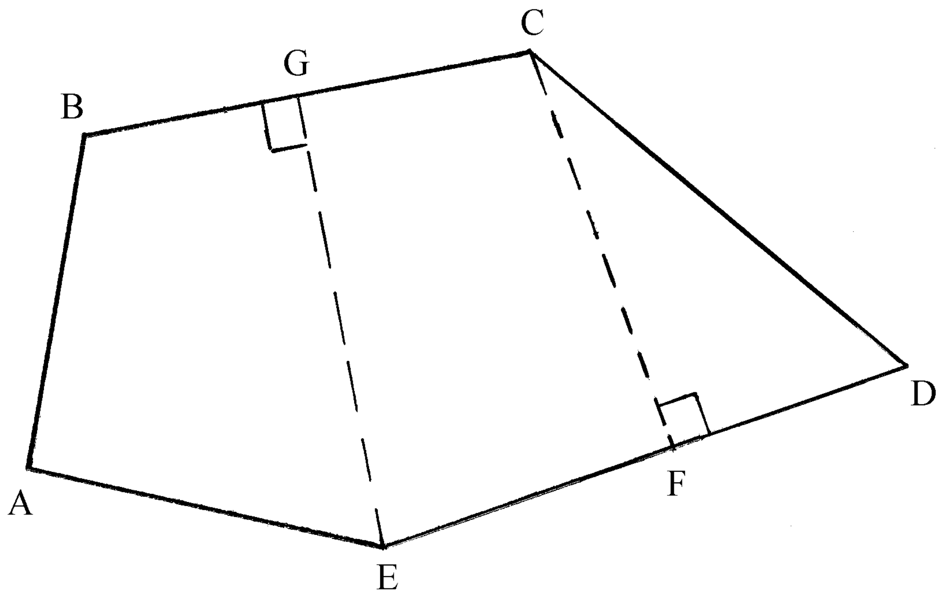
I campi contrassegnati con le lettere da *a)* a *e)* nel blocco indicato con *Text n° 22* avevano forma trapezoidale con le due basi di differente lunghezza, come riassume la tabella che segue (le coppie di cifre che seguono la prima dimensione si riferiscono alle due *basi*):

Particella	Dimensioni in *nindan*
a	200 x 54-64
b	200 x 24-27,50
c	90 x 67-56
d	200 x 24-26
e	60 x 60-70

Il calcolo dell’area

In Mesopotamia, le superfici dei terreni erano piuttosto irregolari e per calcolarne l’area totale gli agrimensori dividevano i terreni in figure più semplici: triangoli rettangoli e quadrilateri dei quali erano in grado di determinare le superfici.

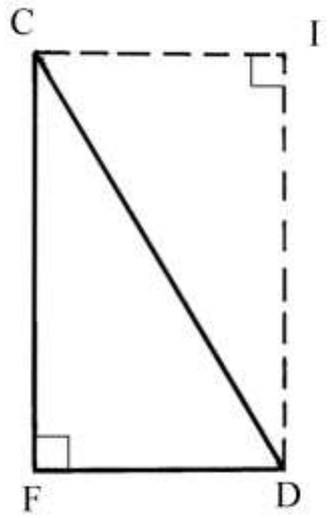
Nella figura che segue, ABCDE è un ipotetico terreno di forma irregolare: si tratta di un pentagono non regolare.



Per determinare la superficie gli agrimensori seguirono un metodo simile a quello qui suggerito. La figura fu divisa in tre parti: dal punto C fu abbassata la perpendicolare al lato ED, ottenendo il triangolo rettangolo CDF.

Dal punto E fu tracciata una seconda perpendicolare al lato BC: essa divise il pentagono non regolare ABCFE in due quadrilateri (due *trapezoidi*): CFEG e GEAB.

Il triangolo rettangolo CDF poteva essere ottenuto dalla divisione di un (ipotetico) rettangolo di base FD e altezza FC:



L’ipotenusa CD è la diagonale del rettangolo FCID.

L’area del rettangolo FCID era facilmente calcolabile moltiplicando la media dei due lati orizzontali (FD e CI) per la media dei due lati verticali (FC e DI):

$$S_{FCID} = (FD + CI)/2 * (FC + DI)/2 = 2*FD/2 * 2*FC/2 = FD * FC .$$

Essendo la figura un rettangolo con i lati paralleli di uguale lunghezza, la sua superficie è uguale al prodotto di base (FD) per altezza (FC).

Nella precedente formula si ha un esempio di impiego della *regola* o *formula degli agrimensori*, usata almeno dall’epoca dei Sumeri per calcolare con buona approssimazione di un quadrilatero.

L’area del triangolo rettangolo poteva essere calcolata con lo stesso metodo, moltiplicando la lunghezza del cateto verticale FC per la media fra la lunghezza del cateto FD e il valore 0 (perché l’ipotetico cateto orizzontale uscente da C vale 0 e cioè la lunghezza dello stesso punto C):

$$\text{Area}_{CFD} = (FD + 0)/2 * (FC + DI)/2 = FD/2 * 2*FC/2 = FD*FC/2 .$$

L’area del triangolo rettangolo CFD è pertanto uguale alla metà di quella del rettangolo FCID.

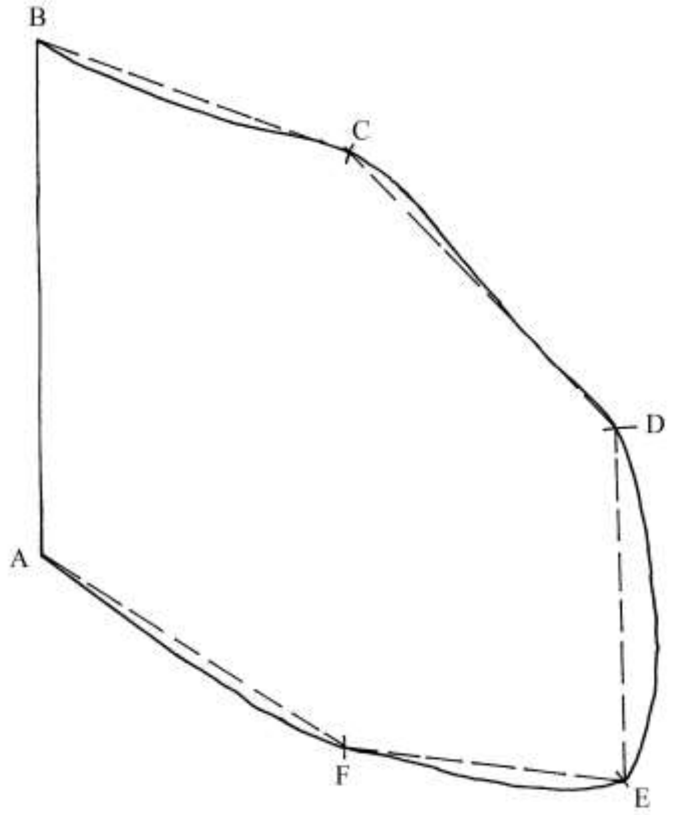
Un catasto sumerico del III millennio a.C.

Una tavoletta sumerica conservata a Istanbul (MIO 1107) contiene una pianta dettagliata di un complesso di terreni, forse situati in un villaggio nei pressi della città di Lagash: si tratta di un vero e proprio *catasto*. Anch’essa risale al periodo del re Shulgi di Ur.

I terreni descritti erano in parte pianeggianti e in parte collinari: sulla base dei calcoli effettuati da assiriologi e storici della matematica risulta che l’area totale della superficie catastale era di 41 km^2 dei quali 32 km^2 erano terreno coltivabile e 9 km^2 terreni accidentati.

La tavoletta ha dimensioni 12,7 x 10,8 cm e fu curata da due agrimensori.

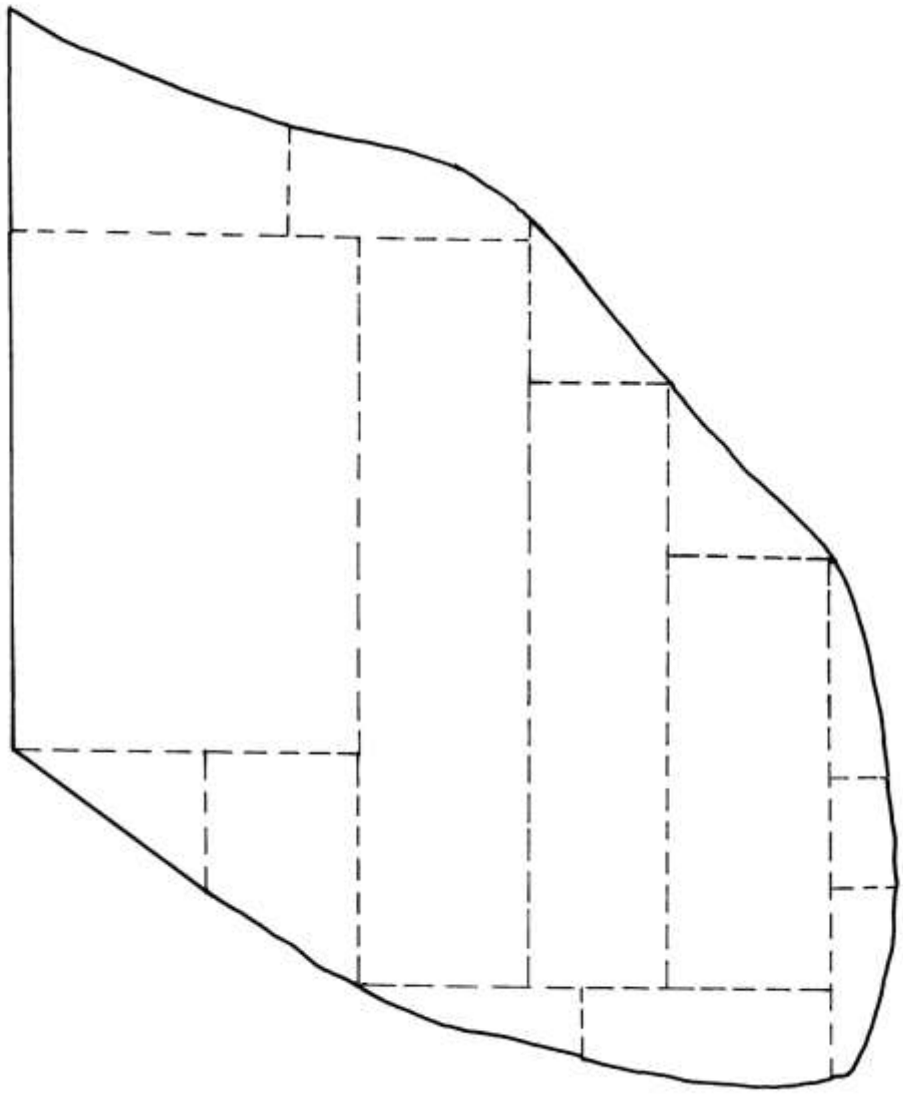
La forma complessiva dei terreni descritti era piuttosto irregolare, con un solo lato rettilineo (AB nella figura che segue) e altri cinque non del tutto regolari:



Le lettere sono state qui aggiunte e non erano scritte sulla tavoletta sumerica. Con una certa approssimazione, per difetto, la grande superficie agraria formava un grosso esagono irregolare, ABCDEF qui sopra disegnato con gli spigoli tratteggiati. Il lato AB poteva avere forma rettilinea perché delimitato da un canale artificiale di irrigazione.

Sulla tavoletta furono scritte 23 misure lineari e 24 misure di superficie.

Come spiega la figura che segue, per facilitare l'uso e la consultazione della tavoletta, gli agrimensori sumeri divisero la superficie totale in *quindici* particelle: *quattro* particelle più grandi (di forma rettangolare o trapezoidale) e in *undici* più piccoli triangoli e trapezi.



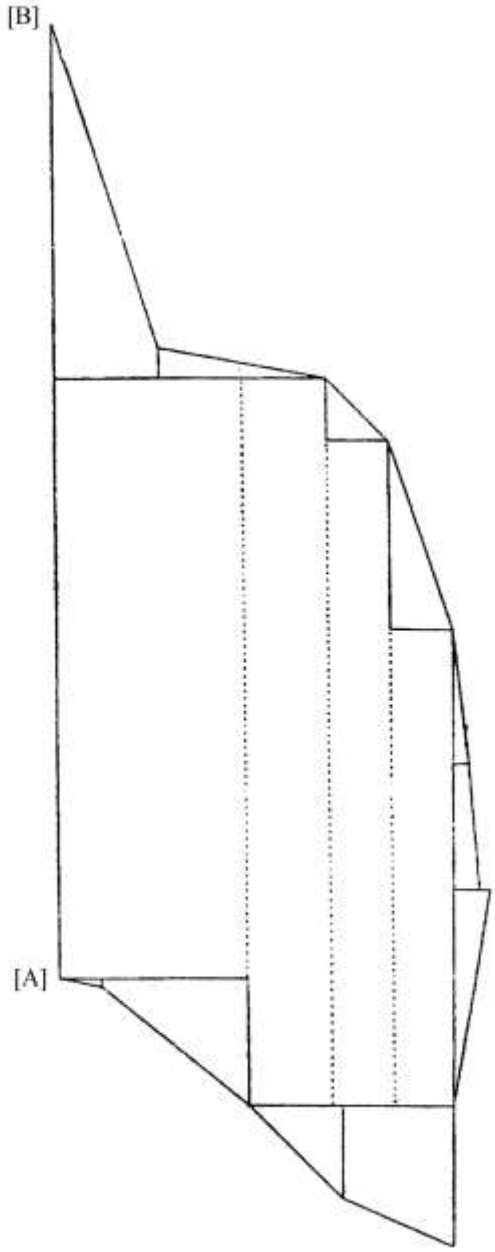
Queste semplici figure geometriche permisero di determinare la superficie delle singole quindici particelle e di sommare i risultati. Gli agrimensori usarono due metodi elementari: le quadrangolazioni e le triangolazioni.

La divisione in particelle fu fatta esclusivamente su basi geometriche: alcune particelle contenevano sia superfici pianeggianti che collinari. Inoltre essa non teneva conto delle tipologie coltivate.

Sulla base di una stima molto grossolana, parrebbe che le dimensioni lineari e le superfici fossero incise usando una scala che dovrebbe essere di 1:6400 o un multiplo di 60 che si avvicina a quel rapporto (da 1:6000 a 1:6600).

Le due precedenti figure riproducono lo schema inciso sulla tavoletta: sono state eliminate tutte le scritte in sumerico cuneiforme.

Gli studiosi che si sono occupati di questo catasto hanno disegnato la reale mappa basandosi sulle misure incise e la forma del catasto è risultata più allungata, come spiega lo schema seguente (i punti A e B sono stati scritti - fra parentesi quadre – per confrontare questo schema con i precedenti):


[B]
[A]

- APPROFONDIMENTO -

Gli strumenti usati dagli agrimensori Sumerici e Babilonesi

I campi disegnati dai Sumeri e dai Babilonesi erano perfettamente geometrici. Ciò fa presumere la presenza di un corpo di agrimensori professionali: fra i loro strumenti erano certamente presenti le *canne* e le *corde* con lunghezze unificate.

La *canna* più usata era lunga ½ *nindan* e cioè 6 cubiti, equivalenti a 297 cm.

Altre canne usate avevano lunghezza multipla (12 cubiti = *1 nindan* = 594 cm) o sottomultipla, come le seguenti:

- ~ 50 cm (1 cubito);
- ~ 25 cm (½ cubito);
- ~ 17 cm (1/3 cubito);
- ~ 33 cm (2/3 cubito).

Le *corde* usate dagli agrimensori avevano due lunghezze:

- ~ 50 cm (1 cubito);
- ~ 25 cm (½ cubito).

Oltre alle canne e alle corde, il perfetto allineamento dei lati lunghi dei campi richiedeva l'impiego di altri strumenti per verificare il parallelismo "con la vista". I Sumeri e i Babilonesi conoscevano lo *gnomone*: lo impiegarono per verifiche su lunghe distanze?

- -

Le tavolette degli agrimensori sumerici

La natura del materiale impiegato nella produzione delle tavolette cuneiformi, *argilla fresca*, non permetteva agli scribi sumerici e poi a quelli babilonesi la tracciatura di disegni geometrici molto precisi.

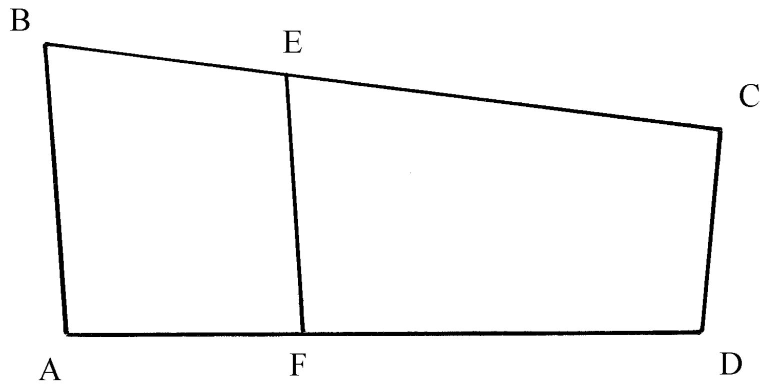
Le prime tavolette di argilla avevano forma quadrata e piccole dimensioni: 5 – 6 cm di lato. L'incisione dei segni cuneiformi era effettuata dagli scribi tenendo le tavolette nel palmo di una mano e impugnando con l'altra lo stilo.

In seguito le dimensioni delle tavolette crebbero fino a raggiungere e talvolta superare i 30 cm di lato.

Gli scribi dimostrarono una grande abilità nell'incisione delle tavolette: un *segno* cuneiforme era generalmente composto da più tratti e la sua altezza complessiva non superava i 4 mm.

I terreni e i campi non erano rappresentati in una scala corretta, ma deformati.

La mancanza di strumenti di disegno portò gli scribi a commettere anche gravi errori, come spiega la tavoletta YBC 4675, conservata all'Università di Yale (USA) e probabilmente realizzata nel Sud della Mesopotamia (a Larsa). Essa contiene un unico problema geometrico: data una superficie, di forma trapezoidale, dividerla in due parti di area uguale con una linea (la trasversale EF nella figura che segue) orientata come i due lati più corti. La figura riproduce la forma dello schema inciso sulla tavoletta (le lettere sono state aggiunte qui per comodità), ma essa non corrisponde alle dimensioni reali:



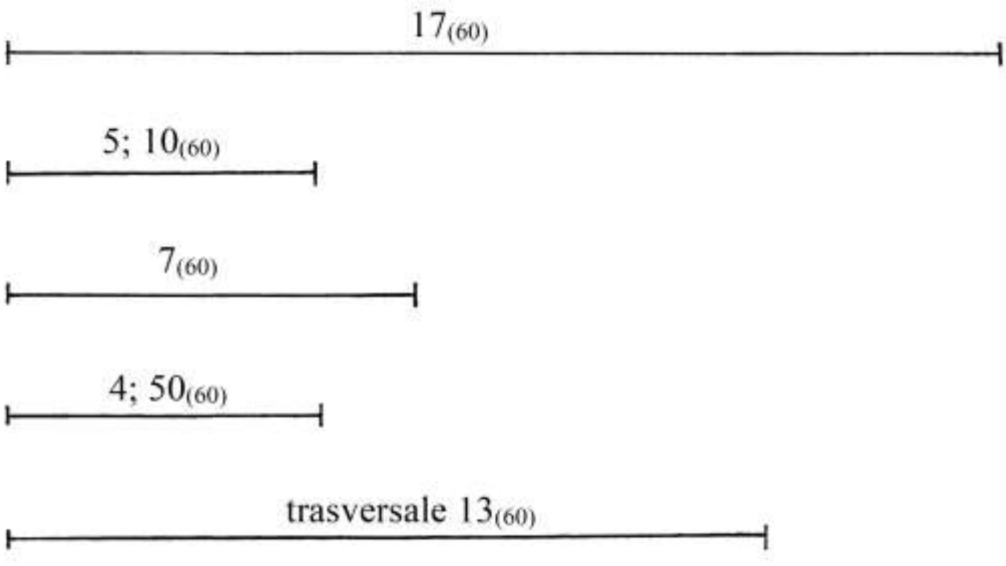
Sulla tavoletta sono riportate anche le lunghezze dei segmenti del trapezoide, in *nindan*:

* AB =17
* BC = 5; 10
* CD = 7
* AD = 4: 50
* EF = 13 .

Il segno di interpunzione *punto e virgola* (;) separa la parte intera da quella frazionaria dei numeri in base 60, secondo la convenzione introdotta dallo storico della matematica austro-americano Otto Eduard Neugebauer (1899 – 1990).

Con queste dimensioni la costruzione della figura è impossibile.

Il grafico che segue mette a confronto le lunghezze dei cinque segmenti:



Peraltro, la tavoletta utilizza la *formula degli agrimensori* per calcolare l’area:

Area = (AB + CD)/2 * (AD + BC)/2 .

Infine, il testo calcola correttamente la lunghezza della trasversale EF:

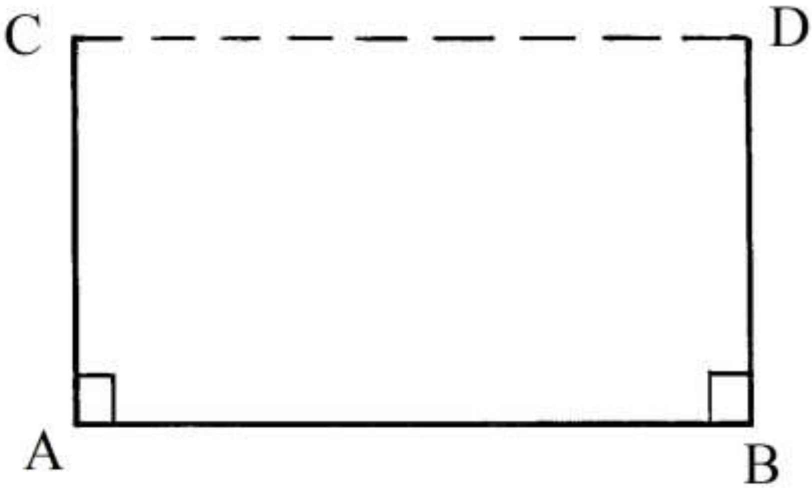
$EF^2 = (AB^2 + CD^2)/2 = (17^2 + 7^2)/2 = (289 + 49)/2 = 169$ da cui

$EF = \sqrt{169} = 13$ *nindan*.

Tracciatura di un rettangolo sul terreno

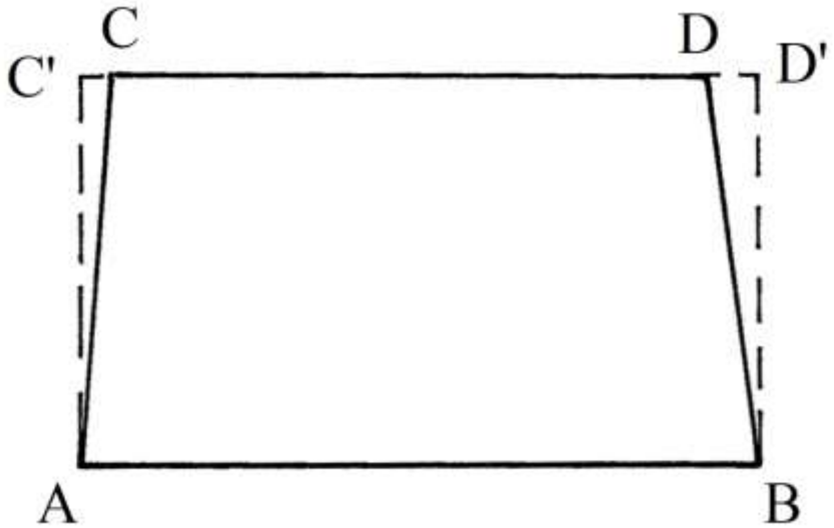
Gli agrimensori della Mesopotamia si trovavano spesso a dover dividere dei terreni per ricavarne strisce di forma rettangolare.

Per prima cosa, con corde e canne, tracciavano il lato più lungo, AB:



Ai suoi vertici costruivano le perpendicolari (in figura sono rivolte verso l’alto). A partire dai punti A e B riportavano due misure (AC e BD) di uguale lunghezza. CD completa la figura rettangolare.

Nel caso di errori di perpendicolari commessi nei vertici A e B, la figura ABCD non era più un rettangolo (indicato con AC’D’B nella figura che segue) ma un trapezio o addirittura un trapezoide (nel caso non vi fossero stati più lati opposti non paralleli):

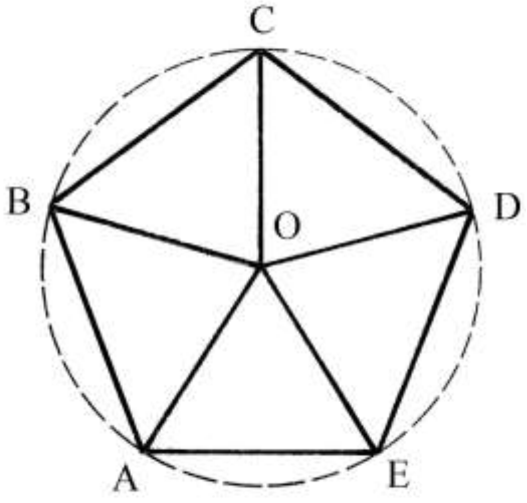


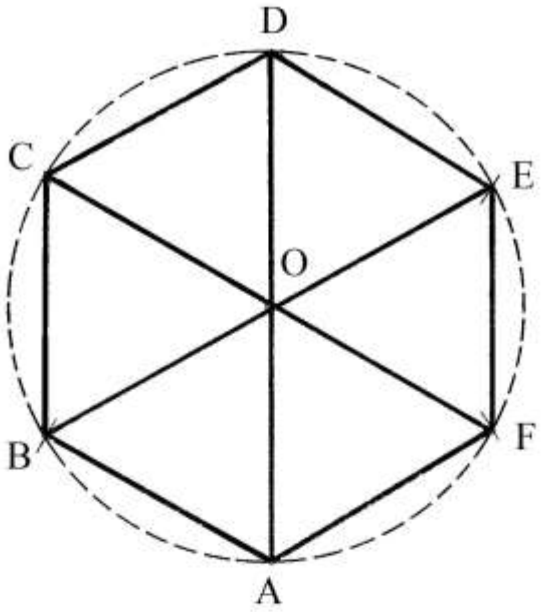
Costruzione di alcuni semplici poligoni

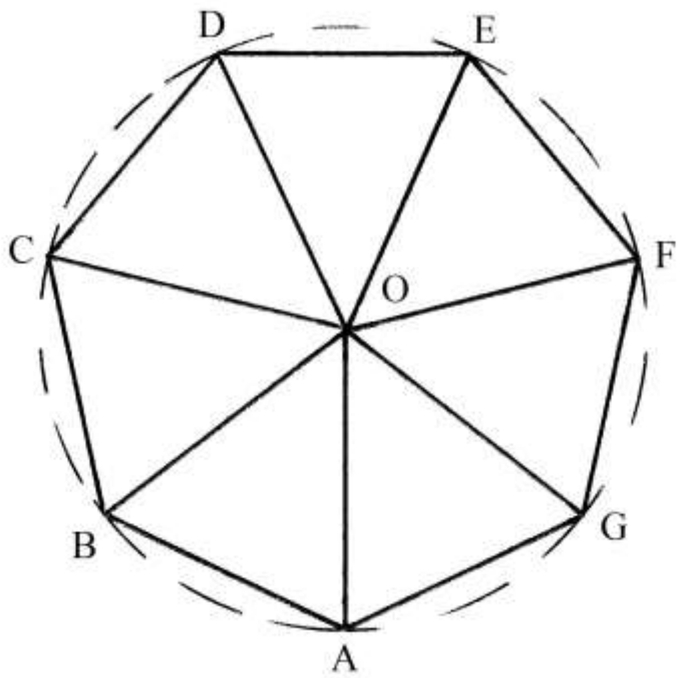
Da una tavoletta cuneiforme (TMS 2), risalente alla civiltà dell’Elam (Susa) (regione dell’attuale Iran sud occidentale confinante con la regione di Sumer e in stretti rapporti con la cultura della Mesopotamia), è stata ricavata la descrizione di un metodo semplificato per la costruzione di tre semplici poligoni regolari:

- Pentagono.
- Esagono.
- Ettagono.

Tutti e tre i poligoni hanno lati della stessa lunghezza e raggi delle circonferenze variabili in proporzione al numero dei lati.







Fissata convenzionalmente a 1 la lunghezza dei lati di tutti e tre i poligoni, le lunghezze dei raggi delle circonferenze nelle quali inscrivere i tre poligoni era stabilita in modo approssimato (per il pentagono e l'ettagono) con i valori riassunti nella tabella che segue:

Poligono	Lunghezza lato AB	Lunghezza raggio OA
pentagono	1	5/6 ≡ 0,83
esagono	1	1
ettagono	1	7/6 ≡ 1,16

- APPENDICE -

Alcuni cenni storici

Dalla voce "*Storia delle funzioni trigonometriche*" di it.wikipedia.org riproduciamo alcuni passi sulla storia di queste funzioni:

"La storia delle funzioni trigonometriche si estende per circa 4000 anni. Vi sono delle prove che indicano che i babilonesi furono i primi ad usare (pur in forma ancora primitiva) delle funzioni trigonometriche, in base ad una tabella di numeri scritta su una tavola cuneiforme babilonese, Plimpton 322 (risalente a circa il 1900 a.C.), che si può interpretare come una tavola di secanti. Vi è, tuttavia, un dibattito ancora aperto sul fatto che essa fosse una tavola trigonometrica o no. Il più antico uso della funzione seno appare nel *Sulba Sutras* scritto nell'antica India fra l'ottavo e il sesto secolo a.C., che calcola correttamente il seno di $\pi/4$ (45°) come $1/\sqrt{2}$ in una procedura per il problema opposto della quadratura del cerchio, sebbene non fosse ancora stata sviluppata la nozione di *seno* in senso generale.

"Più tardi, le funzioni trigonometriche furono studiate da Ipparco di Nicea (180–125 a.C.), che tabulò le lunghezze degli archi di circonferenza (angolo α moltiplicato per il raggio r) insieme alla lunghezza delle corde sottese ($2r \sin(\alpha/2)$).2 Nel Il secolo Claudio Tolomeo dell'Egitto estese questo lavoro nel suo *Almagesto*, derivando formule di addizione/sottrazione equivalenti a $\sin(\alpha + \beta)$ e $\cos(\alpha + \beta)$. Tolomeo ricavò l'equivalente della formula di bisezione $\sin^2(\alpha/2) = (i - \cos\alpha)/2$, e stilò una tabella dei suoi risultati. Né le tavole di Ipparco, né quelle di Tolomeo ci sono pervenute, nonostante le descrizioni di altri autori antichi lascino pochi dubbi sulla loro esistenza.

"I successivi importanti sviluppi della trigonometria si ebbero in India. Il matematico e astronomo Aryabhata (476–550), nella sua opera Aryabhata–Siddhanta, definì per la prima volta il seno come la relazione moderna fra la metà di un angolo e la metà della corda, definendo anche il coseno, il *senoverso*, e l'inverso del seno. Le sue opere contengono anche le più antiche tavole pervenuteci dei valori del seno e del senoverso (1 – coseno), per intervalli di 3,75° da 0° a 90°, con un'accuratezza di 4 cifre decimali. Egli usò le parole *jya* per il seno, *kojya* per il coseno, *ukramajya* per il senoverso, e *otkram jy*a per l'inverso del seno. Le parole *jya* e *kojya* divennero in seguito seno e coseno per via di un errore di traduzione.

"La parola moderna seno è derivata dalla parola latina *sinus*, che significa "baia" o "insenatura", a causa di un errore di traduzione (dall'arabo) della parola sanscrita *jiva*, altrimenti detta *jya*. Aryabhata usava il termine *ardha–jiva* ("metà–corda"), che venne abbreviato in *jiva* e quindi translitterato dagli Arabi come *jiba*… I traduttori europei come Roberto di Chester e Gerardo di Cremona, nella Toledo del dodicesimo secolo, confusero *jiba* per *jaib* … che significa "baia"…

"Altri matematici indiani estesero successivamente i lavori di Aryabhata sulla trigonometria. Varāhamihira sviluppò le formule $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $\sin x = \cos(\pi/2 - x)$, e $(1 - \cos(2x))/2 = \sin^2 x$. Bhaskara I costruì una formula per calcolare il seno di mi angolo acuto senza l'uso di tavole. Brahmagupta sviluppò la formula $1 - \sin^2 x = \cos^2 x = \sin^2(\pi/2 - x)$, e la formula di interpolazione di Brahmagupta per calcolare i valori del seno …

"Le opere indiane furono in seguito tradotte ed ampliate dai matematici musulmani, il matematico persiano Muhammad ibn Mus al–Kwarizmi compilò tavole dei seni e delle tangenti, e contribuì anche alla trigonometria sferica. A partire dal X secolo, nelle opere di Abu'l – Wafa, i matematici musulmani usavano già tutte le sei funzioni trigonometriche principali, e possedevano tavole per i seni con incrementi di 0,25°, con una precisione di 8 cifre decimali, come pure tavole dei valori delle tangenti. Abu'l–Wafa sviluppò anche la formula trigonometrica $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$. Il matematico persiano Omar Khayyam risolse le equazioni cubiche tramite soluzioni numeriche approssimate trovate per interpolazione nelle tavole trigonometriche…".

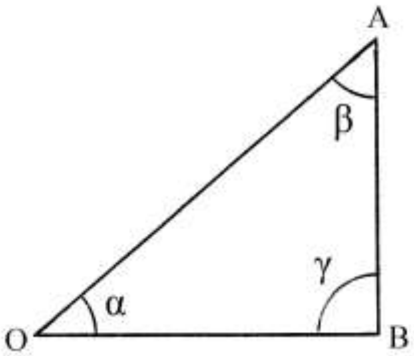
Le funzioni trigonometriche

Le funzioni trigonometriche più utilizzate sono *sei* e sono indicate con le seguenti abbreviazioni:

* seno $\alpha \rightarrow$ *sen* α oppure *sin* α ;
* coseno $\alpha \rightarrow$ *cos* α ;
* tangente $\alpha \rightarrow$ *tan* α oppure *tg* α ;
* cotangente $\alpha \rightarrow$ *cot* α oppure *ctg* α ;
* secante $\alpha \rightarrow$ *sec* α ;
* cosecante $\alpha \rightarrow$ *csc* α oppure *cosec* α .

OAB è un triangolo rettangolo e i suoi tre angoli interni sono:

* AOB = α .
* OAB = β .
* OBA = γ = 90°.



Gli angoli α e β sono *complementari* perché la somma delle loro ampiezze è uguale a 90°:

$\alpha + \beta = 90°$.

Il rapporto fra la lunghezza di un cateto e quella dell'ipotenusa è il *seno* dell'angolo *opposto* (al cateto):

sen α = AB/OA e sen β = OB/OA.

Il rapporto fra la lunghezza di un cateto e quella dell'ipotenusa è il coseno dell'angolo *adiacente* (al cateto):

cos α = OB/OA e cos β = AB/OA.

Dalle precedenti formule consegue:

sen α = cos β e sen β = cos α .

Fra il seno e il coseno di un angolo vale la relazione:

$\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$, espressione che può essere scritta anche come:

$(AB/OA)^2 + (OB/OA)^2 = AB^2/OA^2 + OB^2/OA^2 = (AB^2 + OB^2)/OA^2 =$

$= OA^2/OA^2 = 1$, che è un'applicazione del teorema cosiddetto di Pitagora al triangolo rettangolo OAB.

La *tangente*, *tg*, di un angolo è data dal rapporto fra la lunghezza del cateto *opposto* all'angolo e la lunghezza dell'altro cateto:

tg α = AB/OB e tg β = OB/AB .

Ne risulta:

tg α = 1/tg β e tg β = 1/tg α .

La *cotangente*, *ctg*, di un angolo è il rapporto fra la lunghezza del cateto *adiacente* e quella dell'altro cateto:

ctg α = OB/AB e ctg β = AB/OB.

È evidente che:

ctg α = 1/ctg β e tg α = ctg β e tg β = ctg α .

La *secante*, *sec*, di un angolo è l'inverso del suo coseno:

$\sec \alpha = 1/\cos \alpha$ e $\sec \beta = 1/\cos \beta$.

Infine, la *cosecante*, *cosec*, di un angolo è l'inverso del suo seno:

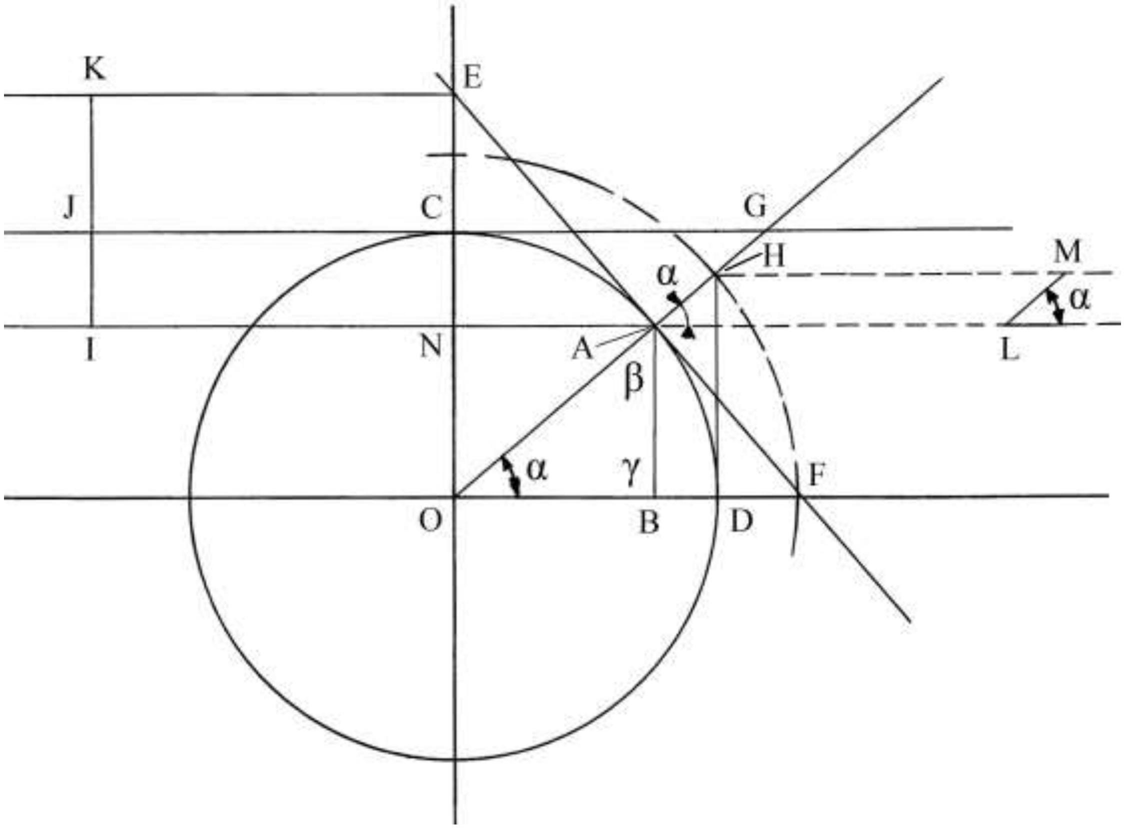
$\mathrm{cosec}\ \alpha = 1/\mathrm{sen}\ \alpha$ e $\mathrm{cosec}\ \beta = 1/\mathrm{sen}\ \beta$.

La circonferenza goniometrica

Lo schema che segue contiene una circonferenza goniometrica costruita intorno al precedente triangolo rettangolo OAC.

L'ipotenusa OA è il raggio della circonferenza, qui fissato con lunghezza *convenzionale* uguale a 1:

$OA = 1$.



Il seno di α vale:

$\mathrm{sen}\ \alpha = AB/OA = AB/1 = AB$. Quindi il cateto AB è lungo convenzionalmente quanto il seno dell'angolo opposto.

Analoghe considerazioni valgono per le altre funzioni.

Ecco la spiegazione del grafico. Tracciare due assi fra loro perpendicolari nel punto O. Fare centro in O e con raggio OA disegnare una circonferenza che ha $OA = 1$.

La circonferenza taglia gli assi nei punti C e D: per questi ultimi condurre le tangenti che risultano parallele o perpendicolari ai due assi.

Tracciare la tangente alla circonferenza nel punto A: la retta incrocia gli assi nei punti E e F.

Fare centro in O e con raggio OF disegnare in senso antiorario un arco a partire da F.

Prolungare il raggio OA: esso determina i punti G e H.

Per i punti A, E e H disegnare linee parallele all'asse orizzontale.

A sinistra tracciare il segmento IJK parallelo all'asse verticale.
Sulla retta passante per I e per A fissare un punto, L, e da questo tracciare un segmento LM parallelo a OG: esso forma un angolo α ampio quanto quello AOB.

Nello schema sono individuate diverse funzioni trigonometriche, oltre alle *sei* già citate:

* sen α = AB ;
* cos α = OB ;
* tg α = DH ;
* ctg α = CG ;
* sec α = OH ;
* csc α = OE ;

* senoverso α = versin α = BD = OD – OB = 1 – cos α ;
* cosenoverso α = cvs α = IJ = NC = OC – ON = 1 – sen α ;
* secante esterna α = exsec α = LM =AH = DF ;
* cosecante esterna α = excosec α = JK = CE .

<u>Le origini della tangente e della cotangente</u>

Dallo studio di George Gheverghese Joseph,citato in bibliografia, riproduciamo i paragrafi che seguono (da pp. 333–334):

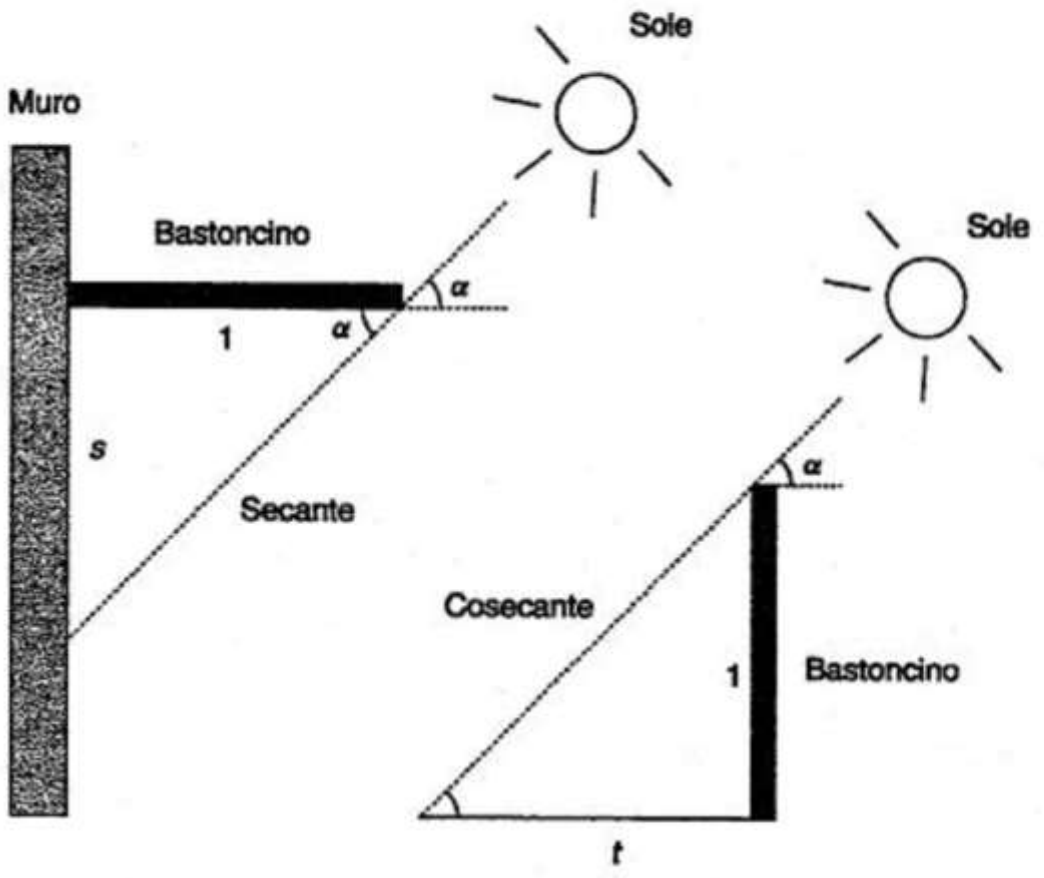
"…Durante il IX secolo l'astronomo arabo al–Hasib [circa 770 – 870] prese in esame la misura dell'ombra di un'asta, di lunghezza unitaria e collocata orizzontalmente su un muro, quando il sole si trovava a un certo angolo rispetto al piano orizzontale. Si dimostra facilmente che la lunghezza *s* dell'ombra sul muro può essere calcolata come

$$s = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$$

dove α è l'angolo di elevazione del sole sopra l'orizzonte. La lunghezza *t* dell'ombra proiettata da un'asta verticale è

$$t = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \cot\alpha.$$

Le funzioni cli secante e cosecante comparivano raramente nelle tavole trigonometriche arabe, sebbene ci siano riferimenti diffusi a queste funzioni nelle, opere di Abul Wafa [Abu'l – Wafa] e al–Tusi.

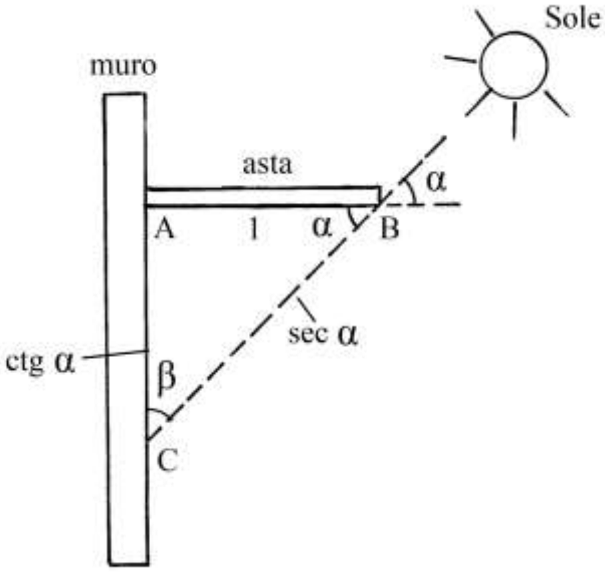


La secante e la cosecante erano conosciute rispettivamente come l' "ipotenusa dell'ombra" (la distanza tra la cima dell'asta orizzontale e l'estremità dell'ombra nella figura e l’"ipotenusa dell'ombra rovesciata" (la distanza tra la cima dell'asta verticale e l'estremità dell'ombra nella figura. Una tradizione trigonometrica antica basata sulle lunghezze delle ombre si trova sia nella matematica indiana che in quella araba…”.

Infatti, le due linee punteggiate sono le ipotenuse dei due triangoli rettangoli e con bastoncini lunghi convenzionalmente 1esse rappresentano le lunghezze della *secante* (a sinistra) e della *cosecante* (a destra) dell’angolo α.

Approfondiamo l’analisi dei due precedenti schemi di Joseph.

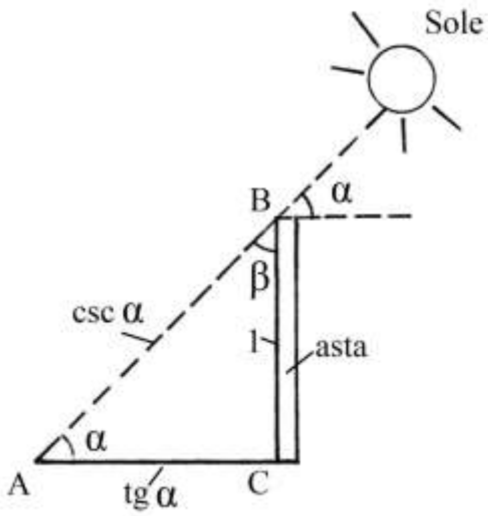
Nel primo caso l’asta AB è *orizzontale*; un raggio del Sole la colpisce formando un angolo α ed esso giunge fino al punto C: ABC è un triangolo rettangolo.



Valgono le seguenti relazioni:

* sen α = AC/CB ;
* cos = AB/BC = 1/BC ;
* sec α = 1/cos α = BC ;
* tg α = AC/AB = AC ;
* ctg α = AB/AC = 1/AC .

Nel secondo caso l’asta BC è *verticale*:



Valgono le seguenti relazioni:

* sen α = BC/AB = 1/AB ;
* cos α = AC/AB ;
* tg α = BC/AC = 1/AC ;
* ctg α = 1 /tg α = AC ;
* csc α = 1/sen α = AB .

Fino al Rinascimento la tangente e la cotangente erano chiamate rispettivamente *umbra recta* (o *ombra* recta) e *umbra versa* (o *ombra versa*). Fu il matematico danese Thomas Fincke

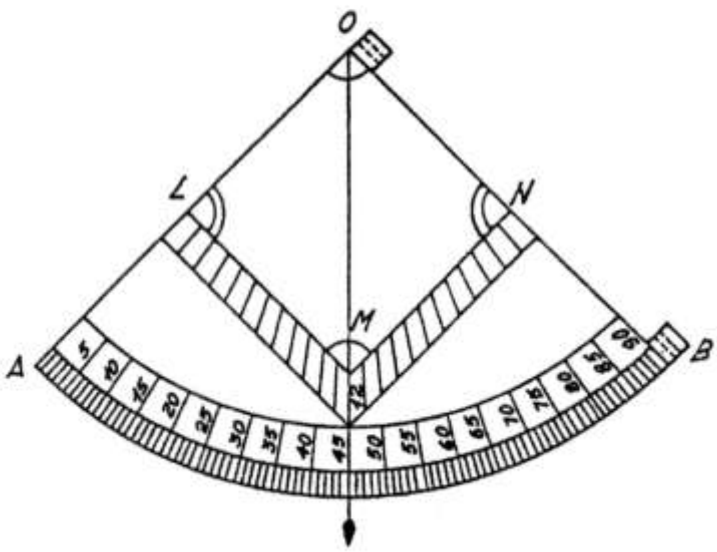
(1561-1656) a introdurre per primo alcune moderne denominazioni delle funzioni trigonometriche: nel suo libro “*Geometriae Rotundi Libri XIIII*”, pubblicato a Basilea nel 1583, egli usò i termini *tangente* e *secante*. Il matematico e astronomo inglese Edmund Gunter (1581-1626) pubblicò nel 1620 il trattato “*Canon Triangolorum o Table of Artificial Sines and Tangents*” nel quale introdusse i termini *coseno* e *cotangente*.

Negli *astrolabi* e nei *quadrati geometrici* usati nei secoli passati era spesso inciso un apposito rettangolo utilizzato per effettuare misure di altezze (ad esempio di edifici) o di distanze.

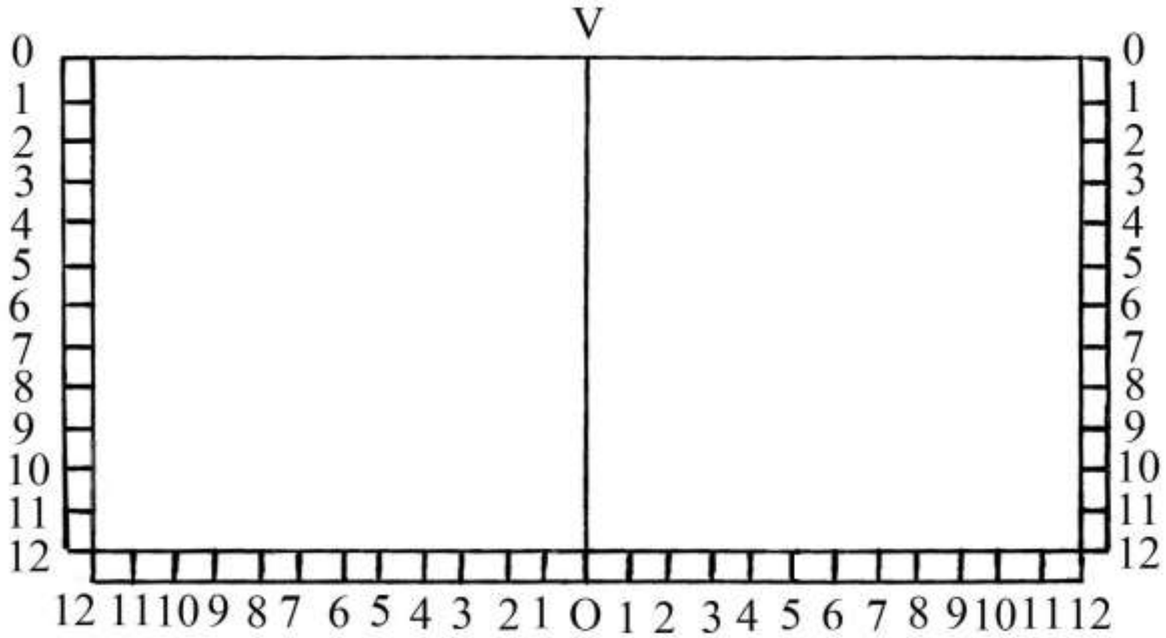
Dallo studio di Annalisa Simi (citato in bibliografia) riportiamo il seguente passo (da pp. 165-166):

“Il q u a d r a n t e, detto anche *oroscupum*, deriva il nome dalla sua stessa forma, un quarto di cerchio. E, infatti, costituito da due aste rigide (solitamente di metallo) di medesima lunghezza, AO e OB, che individuano un settore circolare dell'ampiezza di 90°. L'arco del settore circolare è suddiviso in gradi. Al vertice O dell'angolo retto è attaccato un filo con un piccolo peso metallico vincolato alla sua estremità libera. Su uno dei due lati diritti (OB ad esempio), agli estremi (O e B) sono montati due fori di traguardo.

Tenendo il quadrante verticalmente e allineando i fori di traguardo con la cima dell'oggetto di cui vogliamo, ad esempio, misurare l'altezza, l'angolo di elevazione può essere letto sulla scala graduata mediante la posizione del filo che è tenuto in linea verticale dal peso. I quadranti descritti nei manoscritti esaminati sono corredati quasi tutti di una squadra LMN delle ombre (montata come in figura), utile ai rilievi trigonometrici. I lati LM e LN sono suddivisi in 12 parti ciascuno. Da L a M, … , si misura la così detta *ombra recta*, da M a N, l'*ombra versa*. Veniva detta ombra retta quella prodotta da un corpo opaco posto perpendicolarmente all'orizzonte, mentre veniva detta ombra versa quella che era proiettata su una superficie ideale, perpendicolare all'orizzonte…”. Ecco la figura della Simi:



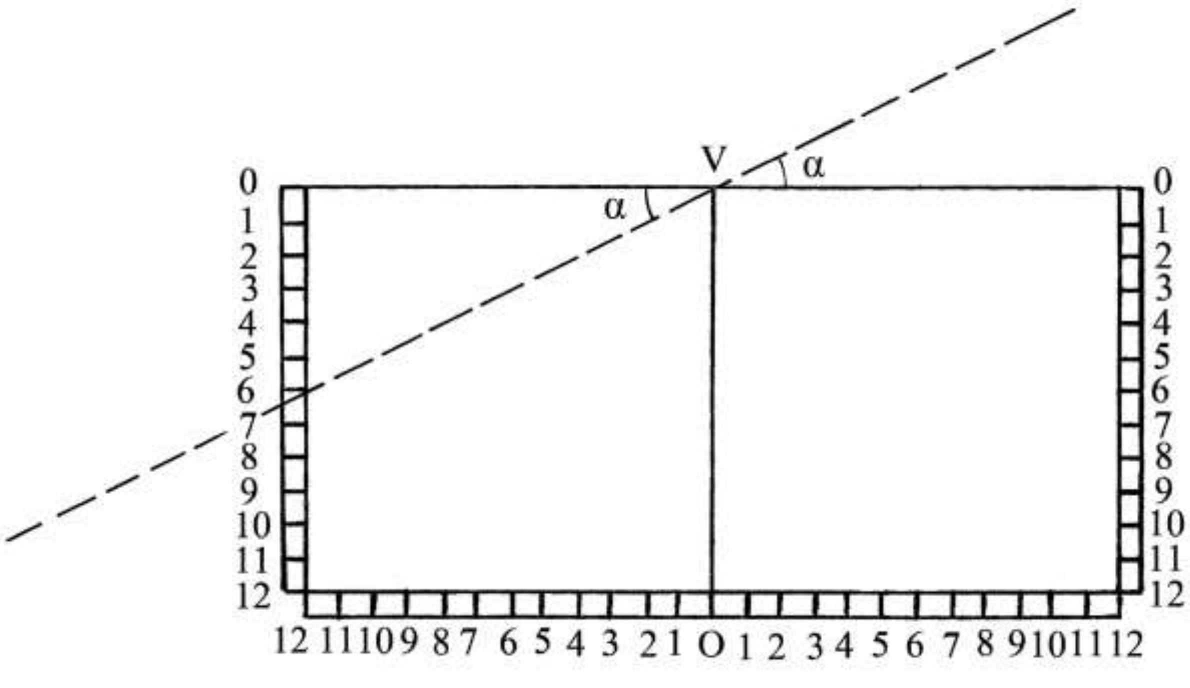
Il principio di funzionamento del metodo della misura delle ombre *recta* e *versa* è spiegato con lo schema che segue:



Il doppio quadrato ha i lati divisi in *dodici* parti uguali ed è disposto verticalmente.

Un raggio del Sole attraversa il punto O e colpisce uno dei lati del quadrato.

Nel caso che il raggio raggiunga un lato verticale viene misurata l'ombra versa e cioè la cotangente dell'angolo α:

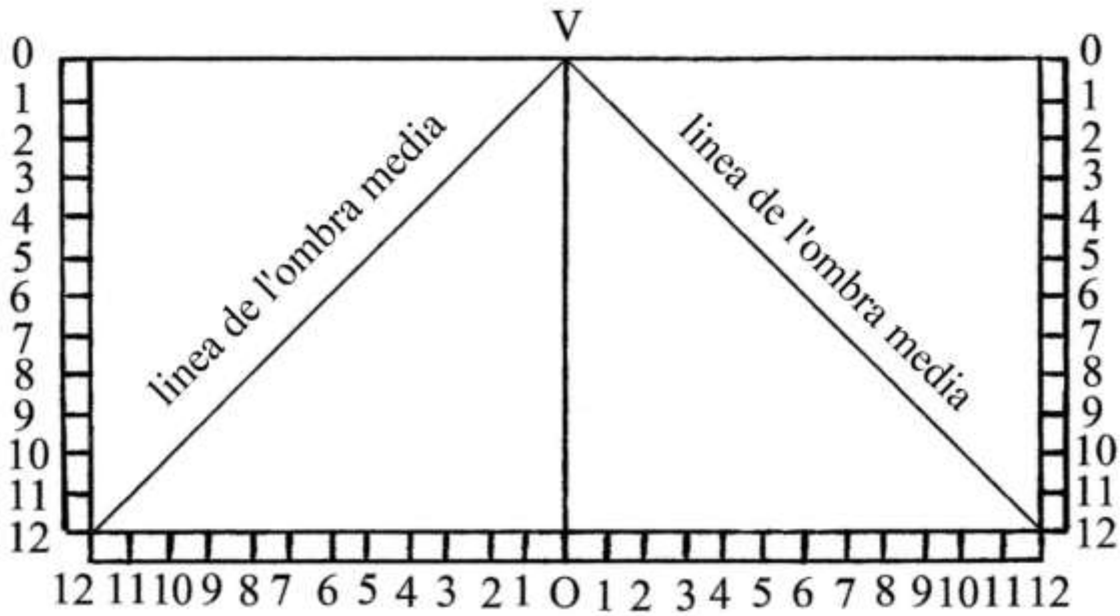


Il tratto 0-6 misura la cotangente di α che vale:

ctg α = 0-V/0-6 = 12/6 = 2. A questo valore corrisponde un angolo

α ≈ 26° 35' .

Se un raggio passa per il punto V, attraversa uno dei due quadranti (quale dipende dalla posizione del Sole in cielo e cioè dall'ora) e colpisce uno dei due vertici estremi alla base, esso è inclinato di 45°: si tratta della diagonale di un quadrato che il matematico Niccolò Tartaglia (circa 1499 – 1557) definì come “linea de l’ombra media”:

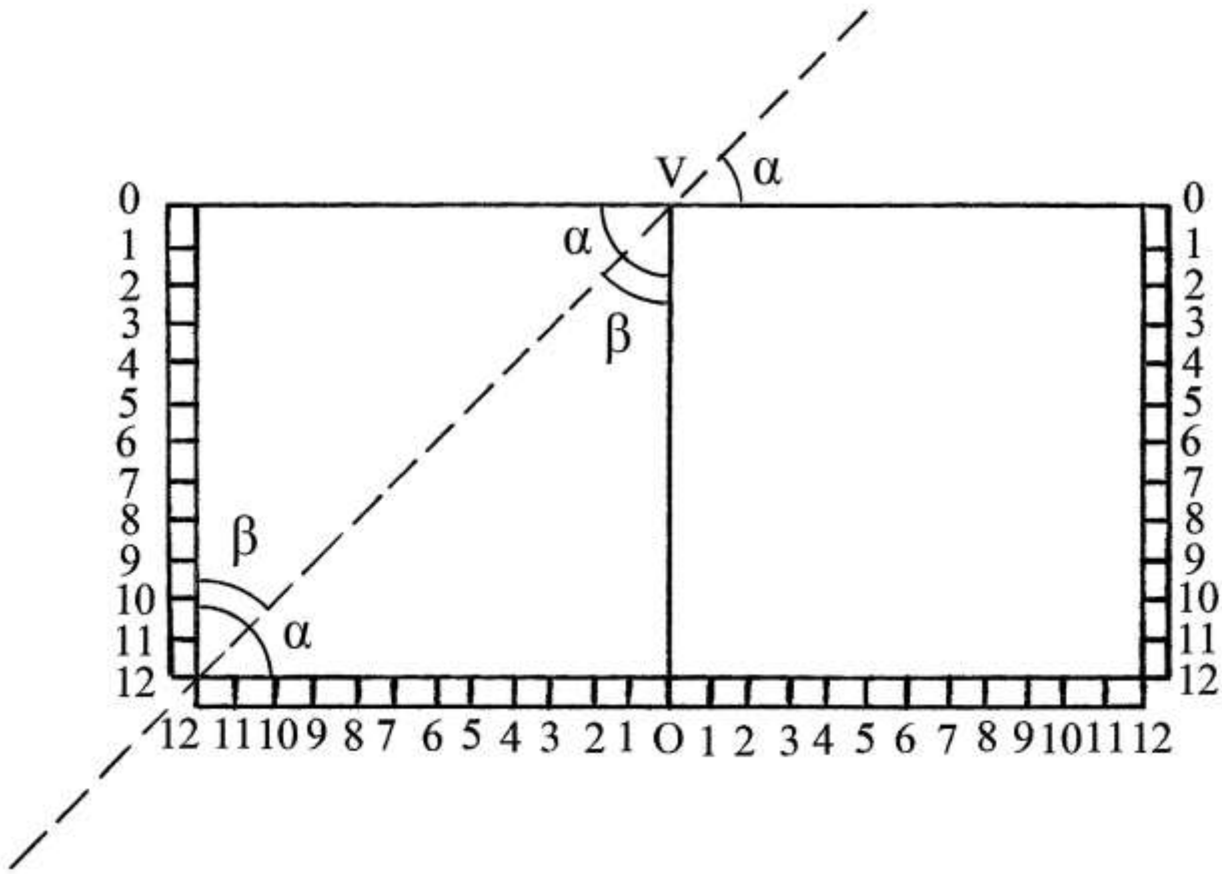


In questo caso si ha:

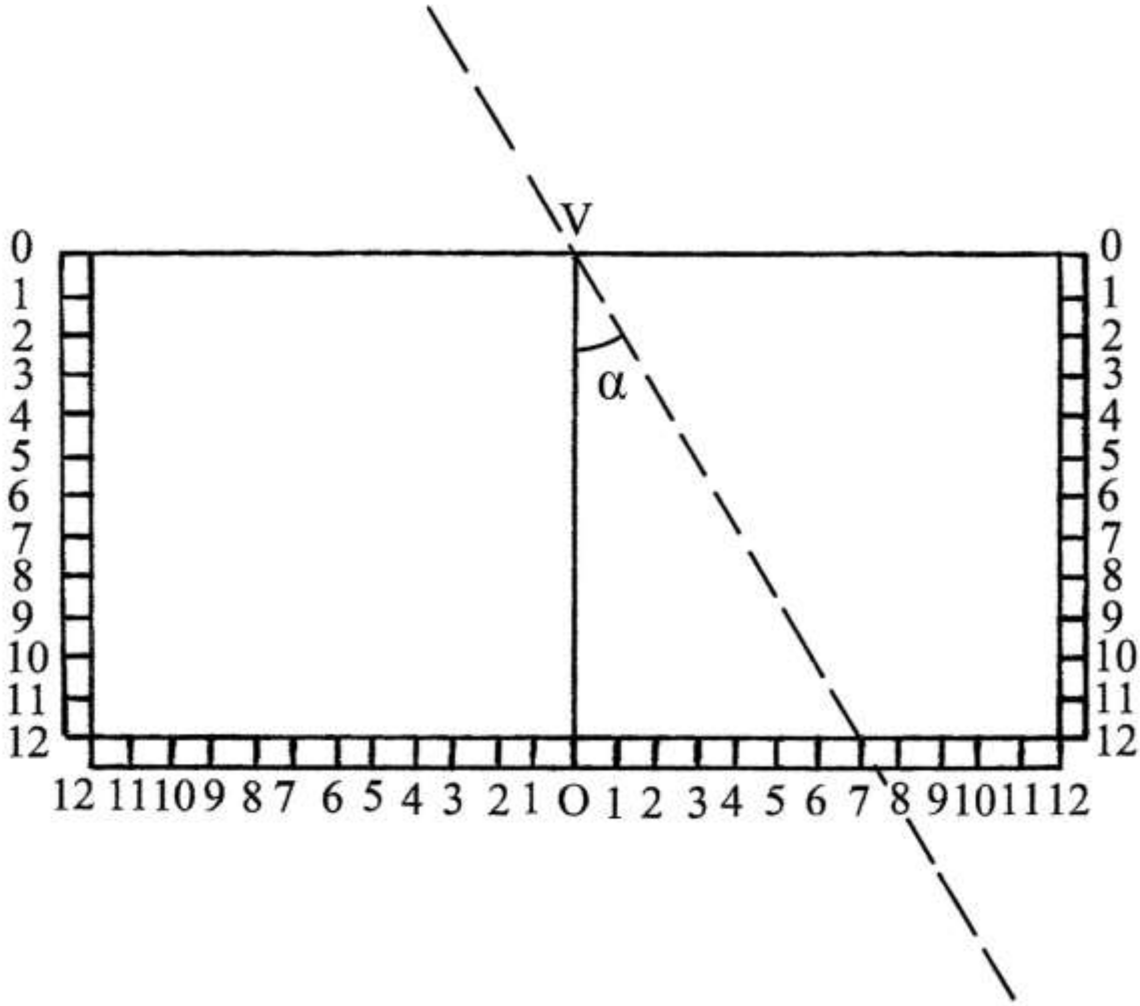
$$\text{ctg } \alpha = 0\text{-V}/0\text{-}12 = 12/12 = 1 = \text{tg } \alpha = 0\text{-}12/0\text{-}6 .$$

Sia l’angolo α che quello β hanno uguale ampiezza, 45°, e i valori delle loro due funzioni trigonometriche sono uguali:

$$\text{tg } \alpha = \text{ctg } \alpha = \text{tg } \beta = \text{ctg } \beta = 1 .$$



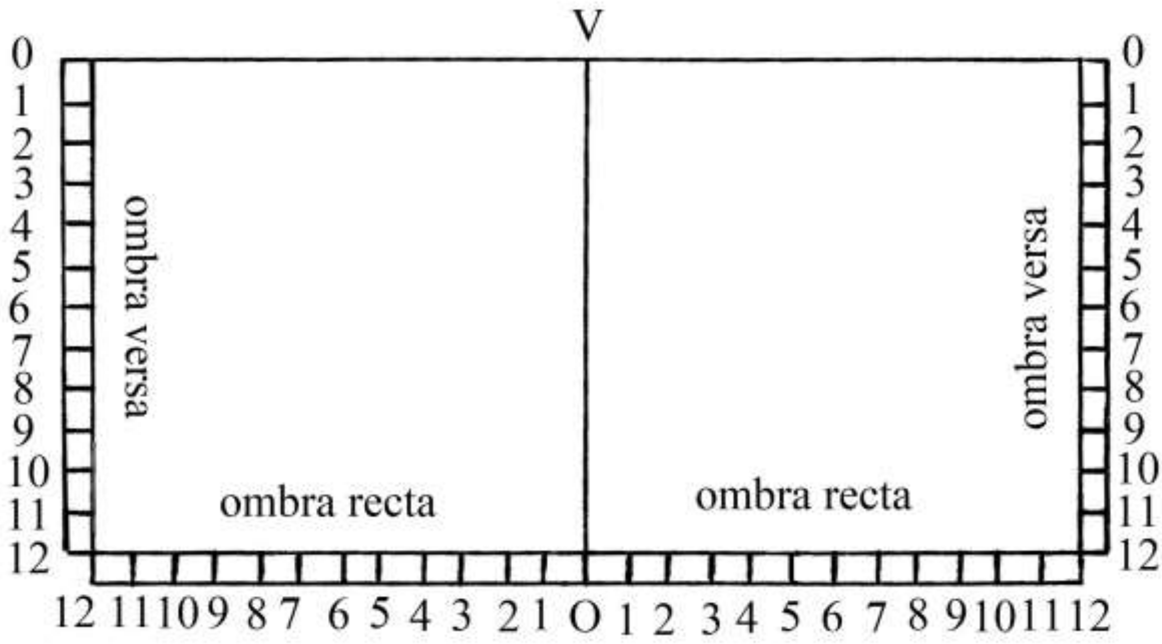
Un ultimo caso è da considerare: se il raggio passante per V colpisce il punto 7 sulla base del quadrante, esso misura la tangente dell’angolo α:



La tangente di α vale:

tg α = 0-7/V-0 = 7/12 ≈ 0,58(33) alla quale corrisponde un angolo ampio α ≈ 30,26° ≈ 30° 16'.

Lo strumento forniva risultati approssimati per intervalli di 1/12 di angolo retto.
Questi strumenti recavano spesso le diciture incise come nell'esempio che segue:



L’origine dell’astrolabio

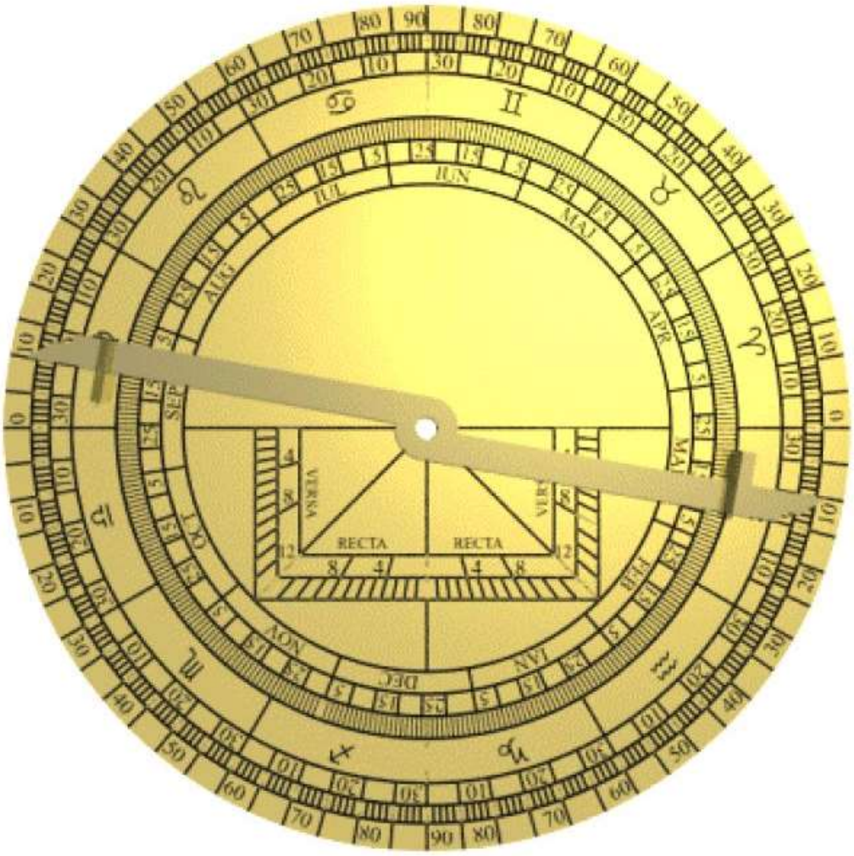
L’invenzione di questo strumento è attribuita all’astronomo Ipparco di Nicea, vissuto nel II secolo a.C.

L’astrolabio fu successivamente perfezionato dai matematici e astronomi musulmani.

Come già accennato, lo strumento poteva contenere al *dorso* un doppio quadrato.

Un interessante fascicolo di Franco Martinelli, docente dell’Istituto Tecnico Nautico “Artiglio” di Livorno è dedicato alla descrizione del funzionamento e alla spiegazione della costruzione di un modello di *astrolabio*. Il fascicolo, datato 2003, è in formato .pdf, consta di 58 pagine e può essere scaricato e utilizzato per usi *non commerciali* dal sito:
http://www.agopax.it/Astrolabio/Pdf/Astrolabio_P.pdf

Dalla pagina 37 riproduciamo la figura che segue che mostra il *dorso* di un astrolabio:



Lo spazio al centro del dorso dell’astrolabio ospitava tavole o altri diagrammi fra i quali il più utilizzato era quello che determinava l’*umbra recta* e l’*umbra versa*.

Eccone la spiegazione fornita dal Martinelli alle pp. 39-40:

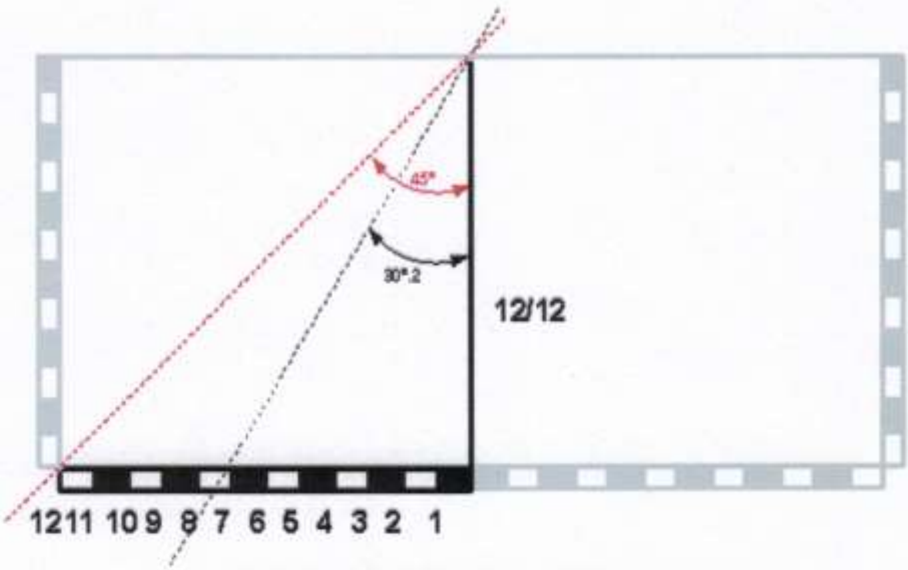
“…

La scala delle tangenti

Lo spazio libero al centro del disco veniva sfruttato inserendo tavole o diagrammi di uso particolare. A differenza delle scale delle altezze e delle longitudini, che erano praticamente obbligatorie su tutti i modelli se li si volevano utilizzare anche come strumenti di misura, ciò che veniva posto al centro era estremamente variabile ed il più delle volte, personalizzato sulle esigenze dell'utilizzatore dello strumento.

Un diagramma molto diffuso è quello cosiddetto *umbra recta* e *umbra versa*, termini con i quali anticamente si indicavano la tangente e cotangente trigonometrica. Tale diagramma consentiva la

risoluzione di triangoli rettangoli e, tipicamente, si utilizzava per determinare la distanza di un oggetto di altezza nota e viceversa.
Il termine umbra deriva dall'impiego della lunghezza dell'ombra proiettata da un oggetto verticale (gnomone) per la determinazione dell'altezza del Sole.
Il diagramma è costruito sostanzialmente sotto forma di triangolo rettangolo i cui cateti sono divisi in un numero arbitrario di parti uguali; una tra le tante divisioni impiegate era in dodicesimi, come nel caso da noi proposto.
Anticamente la tangente trigonometrica era data sotto forma di rapporto tra numeri interi. Noto pertanto il rapporto tra la lunghezza del cateto orizzontale e quello verticale (2/12, 3/12, ... 12/12) era possibile determinare l'angolo al vertice e viceversa.
Il diagramma è fatto in modo che il vertice del triangolo rettangolo coincida con il centro dell'astrolabio materializzato dal perno di rotazione dell'alidada; posizionando quest'ultima sulla scala graduata delle altezze (il bordo graduato più esterno dello strumento) è possibile determinare il valore della tangente.



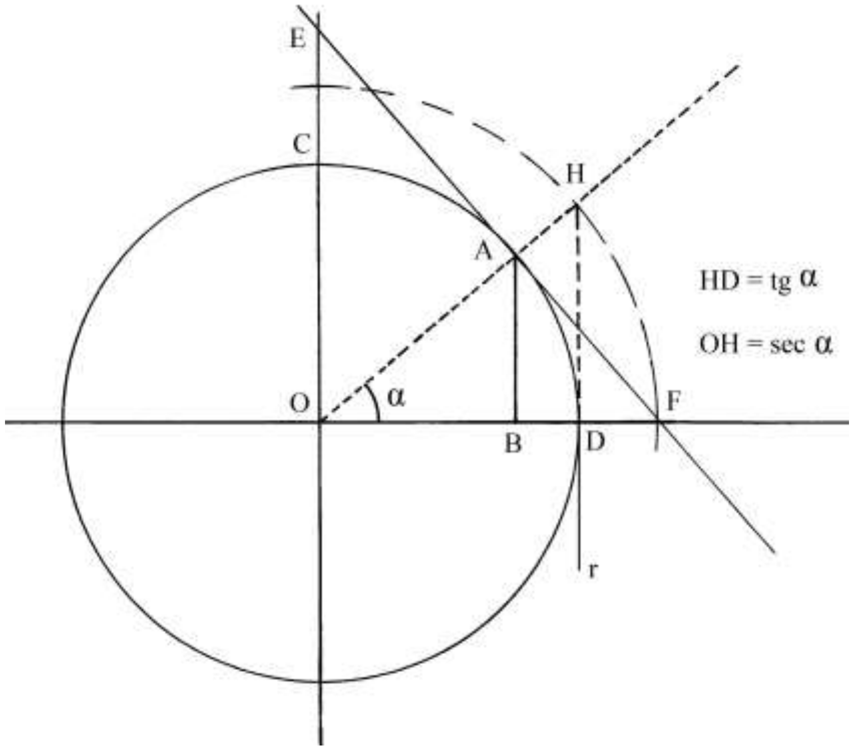
Il quadrato *umbra recta* e *umbra versa*

Il triangolo viene poi completato in modo da formare un quadrato ed estendere così la possibilità di calcolo fino ad angoli pari a 90°. Per un principio di simmetria, ma solo di natura estetica, il quadrato era riprodotto da entrambe le parti rispetto all'asse verticale dello strumento.
La costruzione del quadrato è pertanto estremamente semplice e può essere personalizzata a piacere. Si tratta solo di dividere in parti uguali i suoi lati, qualunque sia il numero di parti e qualunque siano le sue dimensioni. E' ovvio che una suddivisione più fitta consente di effettuare calcoli più precisi.
Nella figura di cui sopra sono riportati la modalità di costruzione del quadrato per rapporti in dodicesimi e due esempi di calcolo.
Con un rapporto di 12/12 si ottiene una (moderna) tangente trigonometrica pari a 1 ed il corrispondente angolo di 45°; per 7/12 si ha la tangente pari a 0.5833 ed un angolo di circa 30°.

…".

L’origine dei termini tangente e secante

Riprendiamo, semplificandolo, il precedente schema della *circonferenza goniometrica*:



Prolunghiamo il segmento HD: esso giace su una retta, *r*, tangente alla circonferenza nel punto D: la sua lunghezza è la *tangente* dell’angolo α con OA lungo convenzionalmente 1. Questa funzione trigonometrica deriva il suo nome dalla proprietà della tangenza.

OH è la lunghezza del segmento che giace sul prolungamento del raggio OA e che è intercettato – tagliato – dalla tangente HD: da ciò deriva il nome di *secante*:

$OH = \sec \alpha$.

ombraI triangoli rettangoli OAB e OHD sono *simili* per cui valgono le proporzioni:

$OA : OH = OB : BD = AB : HD$.

Sostituendo i valori convenzionali si ha:

$1 : \sec \alpha = \cos \alpha : 1 = \text{sen}\ \alpha : \text{tg}\ \alpha$. Da cui si ottengono le seguenti relazioni:

$\sec \alpha = 1*1/\cos \alpha = 1/\cos \alpha$

$\text{tg}\ \alpha = \text{sen}\ \alpha/\cos \alpha$.

Bibliografia

1. Bernal Martin, “Atena nera”, trad. it., Milano, il Saggiatore, 2011, pp. 504.
2. Cartocci Alice, “La matematica degli Egizi”, Firenze, Firenze University Press, 2007, pp. 142.
3. Fiocca Alessandra, “Un approccio alla trigonometria attraverso un percorso storico”, in “Annali online della Didattica e della Formazione Docente”, Università di Ferrara, vol. 4, n° 4, 2012, pp. 75-88.
4. Gillings Richard J., “Mathematics in the time of the Pharaohs”, New York, Dover Publications, 1972, pp. xii-288.
5. Joseph George Gheverghese, “C’era una volta un numero. La vera storia della matematica”, trad. it., Milano, il Saggiatore, 2003, pp. 444.
6. Katz Victor J. (a cura di), “The Mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India and Islam”, Princeton, Princeton University Press, 2007, pp. xiv-685.
7. Launay Mickaël, “Il grande romanzo della matematica. Dalla preistoria ai giorni nostri”, trad. it., Milano, La nave di Teseo, 2019, pp. 334.
8. Liverani Mario, “The shape of neo-sumerian fields”, “Bulletin On Sumerian Agriculture”, Cambridge, vol. V, 1990, pp. 147-186.
9. Liverani Mario, “Uruk la prima città”, Bari, Laterza, 1998, pp. VII-138.
10. Liverani Mario, “Antico Oriente. Storia, società, economia”, Bari, Laterza, 2011, pp. 899.
11. Liverani Mario, “Paradiso e dintorni. Il paesaggio rurale dell’antico Oriente”, Bari, Laterza, 2018, pp.VII+187.
12. Lumpkin Beatrice – Strong Dorothy, “Multicultural Science and Math Connections. Middle School Projects and Activities”, Portland, J. Weston Walch Publisher, 1995, pp. xiii-193.
13. Lumpkin Beatrice, “Algebra. Activities from Many Cultures”, Portland, J. Weston Walch Publisher, 1997, pp. vi-119.
14. Mander Pietro – Sist Loredana, “Le scienze nel Vicino Oriente antico”, Roma, Carocci, 2014, pp. 160.
15. Maor Eli, “Trigonometric Delights”, Princeton, 1998, Princeton University Press, pp. xiv-236.
16. Michel Marianne, “Les mathématiques de l’Égypte ancienne”, Bruxelles, Éditions Safran, 2014, pp. 603.
17. Obenga Théophile, “La Géométrie Égyptienne. Contribution de l’Afrique antique à la Mathématique mondiale”, Parigi, Éditions L’Harmattan – Gif-sur-Yvette, Khepera, 1995, pp. 335.
18. Pedrini Lidia – Pedrini Brunetto – Actis Dato Massimo, “Le piramidi e l’economia dell’antico Egitto”, “Le Scienze”, n. 136, dicembre 1979, pp. 24-37.
19. Pichot André, “La nascita della scienza”. Mesopotamia, Egitto, Grecia antica, trad. it., Bari, Edizioni Dedalo, 1993, pp. 646.
20. Robson Eleanor, “Mathematics in Ancient Iraq”, Princeton, Princeton University Press, 2008, pp. xxvii-441.
21. Simi Annalisa, “Problemi caratteristici della geometria pratica nei secoli XIV-XVI”, in “Scienze matematiche e insegnamento in epoca medioevale”, Atti del Convegno Internazionale di Studio, Chieti, 2-4 maggio 1996, a cura di Paolo Freguglia, Luigi Pellegrini e di Roberto Paciocco, Napoli, Edizioni Scientifiche Italiane, 2000, pp. 327 (l’articolo è contenuto alle pp. 153-199).
22. Singer Charles et alii (a cura di), “Storia della Tecnologia. Volume I: dai tempi primitivi alla caduta degli antichi imperi”, trad. it., Torino, Boringhieri, seconda edizione riveduta, 1966, pp. LXIII-837.
23. Vicari Jacques, “La Torre di Babele”, trad. it., Roma, Edizioni Arkeios, 2001, pp. 154.