sergio(punto)calzolani(at)outlook(punto)it

Parole chiave: *Practica Geometriae*, Fibonacci, volgarizzamento pisano, Francesco Feola, figure piane, triangoli, quadrilateri, unità di misura pisane, linee larghe, Jens Høyrup, area quadrilateri, area triangoli, formula di Erone, terne primitive e derivate, triangolo 13-14-15, area cerchio, teorema delle corde, scomposizione quadrilateri, pentagoni e esagoni

I VOLGARIZZAMENTI DELLA *PRACTICA GEOMETRIAE* DI LEONARDO FIBONACCI

La *Practica Geometriae* (anche nota come *Practica Geometrie)* di Leonardo Pisano, Fibonacci, composta nel 1220, fu scritta in latino.

Per rendere il suo contenuto più accessibile ai mercanti, agli artigiani e a costruttori medievali ne furono compiute diverse compilazioni in lingua volgare.

La più antica è probabilmente quella contenuta nel Codice Chigiano M.V. 104 della Biblioteca Apostolica Vaticana. Esso è anonimo ed è intitolato *Savasorra, idest libro di geometria*: è scritto in toscano pisano. Il suo titolo reca una traccia evidente del trattato *Liber Embadorum* di Abraham bar Hiyya, il matematico ebreo catalano conosciuto con il nome di Savasorda (1070 – 1136 o 1145). L'influenza esercitata da questo ultimo trattato, perfino su Fibonacci, per la riscoperta e la rinascita della Geometria in Occidente fu talmente importante che Savasorda e Savasorra assunsero per antonomasia il significato di *Geometria*.

Secondo Ignazio Baldelli, il testo contenuto nel Codice Chigiano risalirebbe alla prima metà del XIV secolo. Il codice è membranaceo, ha dimensioni 25,5x17 cm e contiene 44 carte. Sempre secondo questo Autore, i disegni geometrici inseriti sul margine esterno sono opera di due diverse mani: la prima ha eseguito quelli da carta 1 *recto* a carta 4 *r* e da 36 *r* a 40 *verso* e la seconda quelli da 4 *r* a 36 *r*.

È questo il testo esaminato da Francesco Feola nel bello e dettagliato studio, citato in bibliografia: se un appunto può essere mosso è di natura tipografica: per migliorare la lettura della trascrizione del manoscritto sarebbe stato molto utile separare i singoli problemi, anche con una semplice linea o con una serie di caratteri.

Il secondo volgarizzamento è anche esso scritto in volgare pisano, risalirebbe al 1441 ed è di qualità più scadente rispetto al precedente. Si tratta del Codice 2186 della Biblioteca Riccardiana di Firenze ed è noto dal nome del suo copista, il pisano Cristofano di Gherardo di Dino. Il codice è stato trascritto e pubblicato da Gino Arrighi.

INTRODUZIONE

Il manoscritto contenuto nel Codice Chigiano è interamente dedicato alla geometria piana.

In questo articolo sono presentati i problemi geometrici e sono ridisegnate le figure.

Sono aggiunte ulteriori spiegazioni riguardo alle regole impiegate dall'Autore.

Alcuni argomenti sono ampliati in riquadri separati contrassegnati con la dicitura APPROFONDIMENTI.

Per semplificare, in questo articolo le frazioni sono scritte usando la *barra* "/" invece della linea orizzontale.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

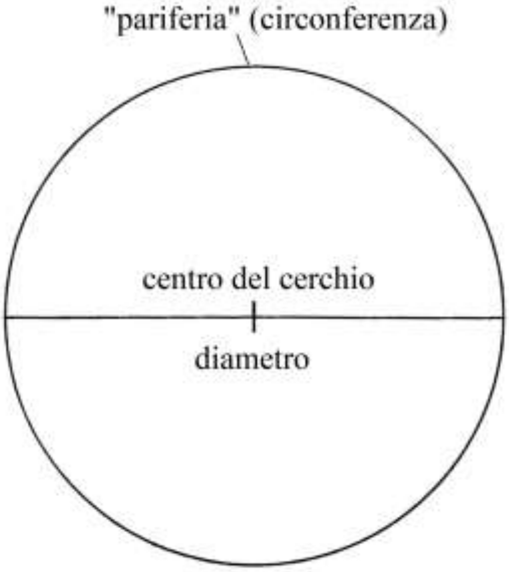
Le pagine iniziali del manoscritto sono riservate alla definizione dei più importanti enti geometrici: punto, linea, angolo, superficie, solido.

Seguono poi il cerchio e la circonferenza e poi la classificazione dei triangoli e dei quadrilateri.

Conclude la parte iniziale la definizione dei poligoni.

Cerchio e circonferenza

Il cerchio è definito come la superficie delimitata da una linea rotonda che è chiamata *pariferia* e cioè *circonferenza*: la più lunga linea interna è il *diametro* e il suo punto medio è il *centro*:



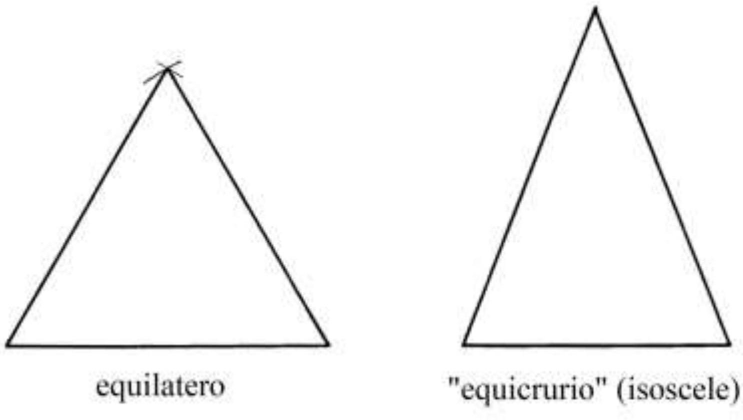
Un semicerchio è detto *mezzo cerchio* e la curva che lo delimita è una mezza *pariferia* del cerchio:

Una figura che è meno di un semicerchio è un *settore di cerchio*:

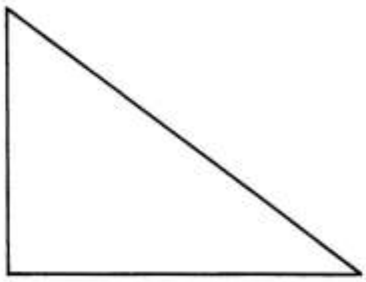
I triangoli

Sono le figure delimitate da tre linee rette e sono chiamati *triangoli rettilinei*.
I triangoli sono classificati in cinque classi:

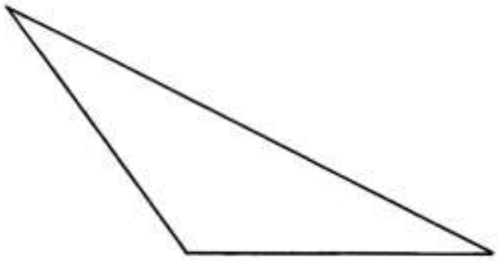
* equilatero;
* isoscele (*equicrurio*):



* rettangolo (*diversilatero ortogonio*), quando possiede un *canto* (angolo) retto;
* ottusangolo (*amprigonio*):

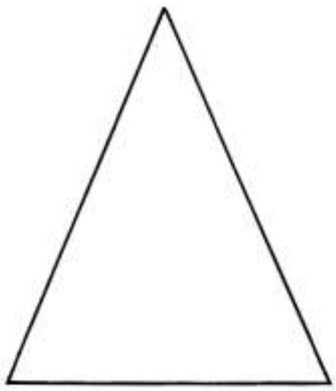


"diversilatero ortogonio"
(rettangolo)



"amprigonio"
(ottusangolo)

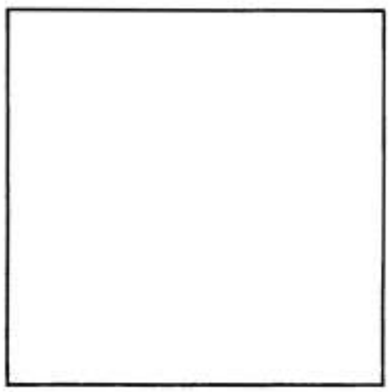
* acutangolo (*agutiangulo*):



"agutiangolo"
(acutangolo)

<u>I quadrilateri</u>

Il quadrato è definito quadrato o *tetragono* e possiede quattro angoli (*cantoni*) retti e i suoi quattro lati di uguale lunghezza:

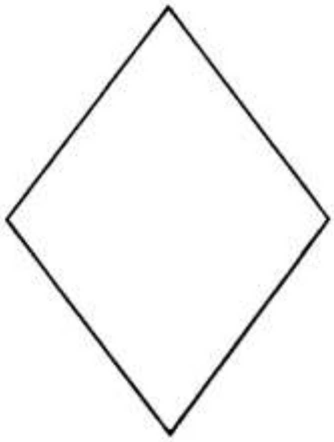


"quadrato o tetragono"

Il rettangolo è un quadrilatero con il lato maggiore (la lunghezza) detto *altra parte più lunga*:

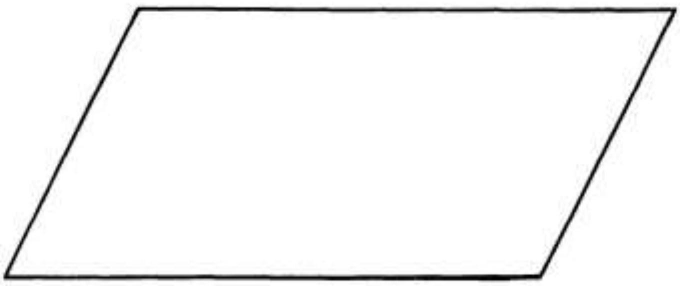
"altra parte più lunga" (lunghezza)

Un rombo (*ronbo* in pisano) ha tutti i lati di uguale lunghezza ma non possiede alcun angolo retto: due opposti sono acuti e gli altri due opposti sono ottusi. Nel testo, il rombo è anche chiamato *briccaldello*, forse con il significato di *mattonella*:



"ronbo" (rombo)

Un parallelogramma è definito con il termine *ronboido*:



"ronboido" (parallelogramma)

<u>LE UNITÀ DI MISURA USATE A PISA</u>

<u>Unità di misura lineari</u>

Prima di procedere alla descrizione dei singoli problemi è necessario presentare le unità di misura pisane.

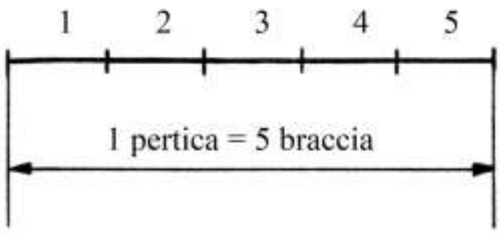
Le fonti principali di informazioni relative alle unità di misura lineari e superficiali usate a Pisa nel Medioevo sono il *De Practica Geometrie* di Leonardo Fibonacci (circa 1170 – dopo il 1240), composto negli anni 1220-1221e questo manoscritto che lo traduce in toscano pisano.

Pochissimi sono gli studi sull'argomento: lo stesso testo di Zupko (citato in bibliografia) fornisce limitate informazioni sulle unità pisane.

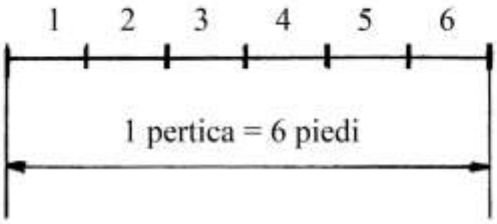
Altre fonti secondarie sono date da studi specialistici su singoli monumenti medievali che furono a suo tempo costruiti impiegando le unità di misura lineari in uso all'epoca: la loro interpretazione metrologica richiede la conoscenza di quelle unità.

La *pertica lineare pisana* era lunga l'equivalente di 2,9175 m. Essa aveva due sottomultipli:

* il *braccio a terra*, lungo *un quinto* di una pertica e cioè 2,9175/5 ≈ 0,5835 m, valore arrotondato a 0,5836 m [si noti la sua equivalenza con la lunghezza del *braccio da panno fiorentino* di 0,583626 m, ciò che può confermare un'influenza pisana sulle unità di misura fiorentine]:



* il *piede lineare*, uguale a 1/6 della pertica lineare e cioè 2,9175/6 ≈ 0,48625 m:



Fra la lunghezza del braccio a terra e quella del piede valeva il rapporto 6/5 = 1,2.

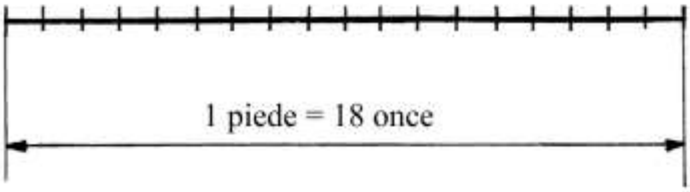
A fianco del *braccio a terra*, a Pisa era usato il *braccio a panno* che era lungo l'equivalente di 0,686 m.

Anche fra le lunghezze dei due bracci sembra potersi individuare un rapporto fisso:

braccio a terra/braccio a panno ≈ 0,5836/0,686 ≈ 0,8507 → 17/20.

A sua volta, il piede lineare aveva un sottomultiplo, l'*oncia* o *uncia lineare*:

1 piede = 18 once e 1 oncia = 1/18 * piede ≈ 2,7 cm.



Anche l'oncia lineare aveva un sottomultiplo, il *punto*:

1 oncia = 18 punti e cioè 1 punto = 1/18 * oncia ≈ 0,15 cm.

L'oncia era talvolta chiamata *pollice*.

Nota: sia nella traduzione del trattato geometrico di Fibonacci sia nell'articolo (entrambi citati in bibliografia), Barnabas Hughes adotta il rapporto *1 oncia = 20 punti*.

Il *grano* era un sottomultiplo del punto:

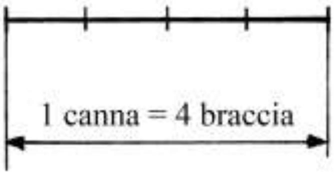
1 punto = 2 grani e 1 grano ≈ 0,075 cm.

La tabella che segue riassume i rapporti fra le unità di misura lineari basate sul *piede* e sulla *pertica*:

	Pertica	Piede	Oncia	Punto	Grano
Grano					1
Punto				1	2
Oncia			1	18	36
Piede		1	18	324	648
Pertica	1	6	108	1944	3888

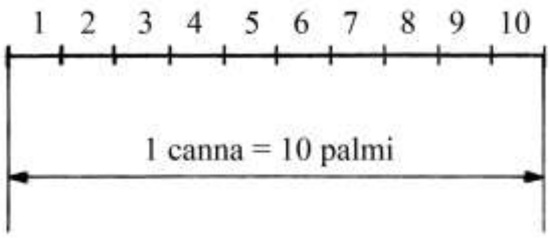
Un altro multiplo del braccio a terra era la *canna pisana*:

1 canna pisana = 4 braccia a terra ≈ 4 * 0,5836 ≈ 2,334 m:



Canna era pure il nome dell'asta rigida lunga 4 braccia a terra.
Il *palmo* era un sottomultiplo della canna:

1 palmo = 1/10 * canna ≈ 2,334/10 ≈ 0,2334 m:



Riassumiamo i sottomultipli della canna pisana:

Unità di misura	Palmo	Braccio a terra	Canna pisana
Palmo	1		
Braccio a terra	(2 + ½)	1	
Canna pisana	10	4	1

La tabella che segue è ricavata dal citato articolo di Barnabas Hughes (p. 624):

Table 4
Linear measurements.

Rod pertica 3 m	Foot piè 50 cm	Inch uncia 2.78 cm	Point punto 1.4 mm	Grain granello .7 mm
				1
			1	2
		1	*20*	40
	1	*18*	360	7200
1	*6*	108	2160	4320

I valori sono basati sul rapporto 1 oncia = 20 punti, anziché su quello
1 oncia = 18 punti.

La tabella contiene un errore: nell'ultima colonna a destra, "7200" va sostituito con "720".

I dati contenuti nella tabella di Barnabas Hughes sono leggermente arrotondati, per eccesso o per difetto.

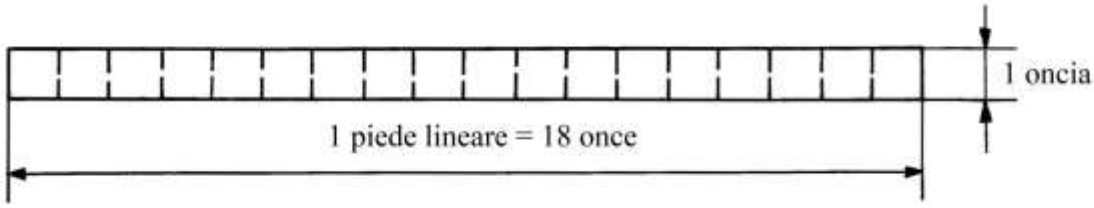
Per chiarezza, nella tabella che segue sono contenute le equivalenze *approssimate* in metri o in centimetri delle unità di misura lineari pisane:

Unità di misura	Metri (m) o centimetri (cm)
1 pertica lineare = 5 braccia a terra = 6 piedi	2,9175 m
1 braccio a terra = 2,9175/5 m	0,5835 m = 58,35 cm
1 piede = 2,9175/6 m	0,48625 m = 48,625 cm
1 braccio a panno = 20/17 * braccio a terra	68,6 cm
1 palmo	23,34 cm
1 oncia = 1/18 di piede	2,7 cm
1 punto = 1/18 di oncia	0,15 cm
1 grano = ½ punto	0,075 cm

LE UNITÀ DI MISURA SUPERFICIALI DI PISA - Premessa

Alcune unità di misura delle superfici usate a Pisa portavano lo stesso nome di quelle lineari.

L'unità di misura minima di riferimento sulla quale erano basati i multipli era l'*oncia superficiale*. Essa rappresentava l'area di un rettangolo lungo 1 piede lineare e cioè 18 once lineari e largo 1 oncia:

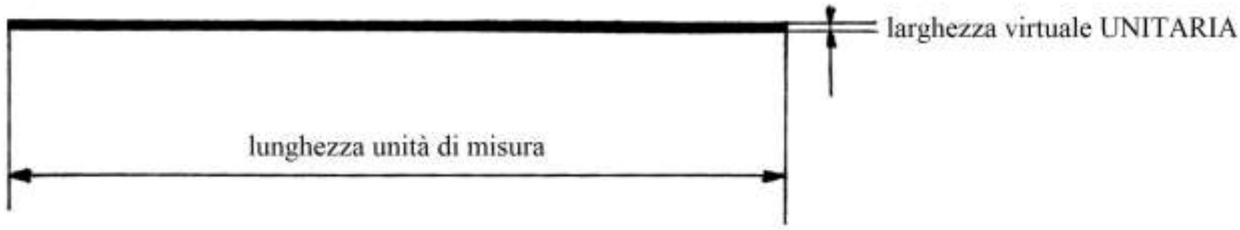


È questo un esempio di applicazione del metodo al quale Jens Høyrup ha efficacemente attribuito l'espressione *linee larghe*.

<u>"Linee larghe"</u>

Lo storico della matematica danese Jens Høyrup, fra l'altro profondo conoscitore della matematica medievale italiana – argomento al quale ha dedicati diversi studi fra i quali un volume su Jacopo da Firenze –, ha messo in evidenza un particolare metodo geometrico e aritmetico nella definizione delle unità di superficie, metodo impiegato perfino presso popoli antichi quali i Babilonesi e gli Egizi, che egli ha definito con l'espressione *linee larghe*, da lui tradotta in inglese con *Broad lines*.

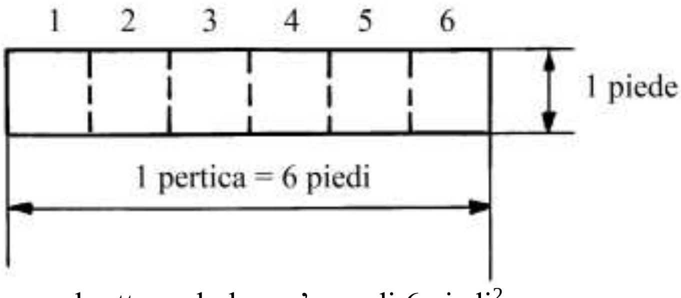
Le *linee larghe* erano delle strisce rettangolari larghe soltanto un'unità di misura e lunghe un multiplo di essa:



Alcune unità di misura di superficie usate nel Medioevo a Pisa seguivano questo metodo.

Nella *Practica geometrie* sono descritte le unità di misura lineari e superficiali usate nel Medioevo a Pisa. In questa Repubblica le unità superficiali erano basate sull'applicazione del metodo delle *linee larghe*, come è il caso dell'esempio che segue.

Una *pertica superficiale* era rappresentata da un rettangolo lungo 1 pertica lineare e largo 1 piede lineare:



Oggi diremmo che quel rettangolo ha un'area di 6 piedi^2.

\- APPROFONDIMENTO -

<u>Il commercio delle stoffe</u>

Høyrup fa notare come il metodo delle *linee larghe* sia tuttora usato nel commercio delle stoffe (e lo era nel Medioevo quando le stoffe erano misurate e vendute a *braccia da panno*).

Una *pezza di stoffa* è una striscia di tessuto prodotta da un telaio e priva di orli o finiture: essa viene avvolta intorno a un'anima di robusto cartone o di plastica.

La lunghezza di una pezza è variabile a seconda delle fibre tessili con le quali è stata prodotta e può partire da 30-40 m per le pezze destinate alla vendita al dettaglio.

La larghezza di una pezza è chiamata *altezza*: le misure più usate sono 90, 150 e 240 cm.

Una volta scelta la pezza con una data altezza, l'acquirente compra la lunghezza in metri che gli occorre.

Il metodo delle *linee larghe* non è poi così insensato.

<u>I rotoli di nastri e di carta</u>

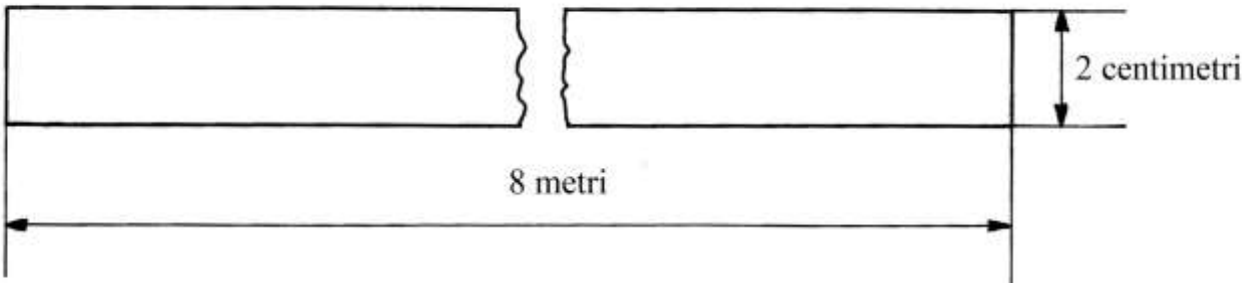
L'applicazione ai nostri giorni del metodo delle *linee larghe* può essere individuata in alcuni prodotti di larghissimo uso, tutti caratterizzati dall'essere *nastri* di spessore sottile, di notevole lunghezza e di ridotta larghezza, usati nelle più varie applicazioni.

Tutti questi prodotti sono avvolti intorno a un'anima a forma di cilindro cavo, di cartone rigido o prevalentemente di materiale plastico.

La lunghezza è sempre indicata in *metri* e la larghezza in *centimetri* o in *millimetri*: non è mai indicata l'area di m^2 dell'intero rotolo.

Facciamo alcuni esempi:

* nastro adesivo, usato per riparazioni, è lungo 8 metri e largo 2 centimetri:



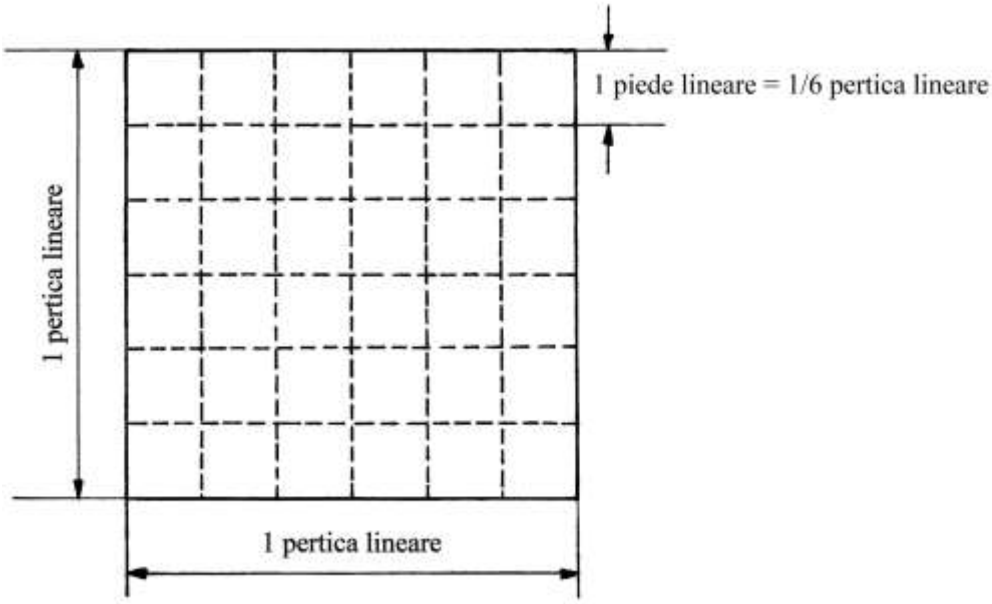
* nastro adesivo trasparente: 19 mm * 7,5 m;
* nastro adesivo in alluminio: 10 cm * 50 m;
* rotoli carta per plotter: 914 mm * 50 m;
* nastro segnaletico: 48 mm * 33 m;
* cerotto di fissaggio: 5 m * 1,25 cm;
* nastro da imballaggio: 48 mm * 66 m.

La carta assorbente usata in cucina è avvolta intorno a un'anima di cartoncino e viene venduta in rotoli la cui lunghezza è misurata con il numero degli *strappi*.

- -

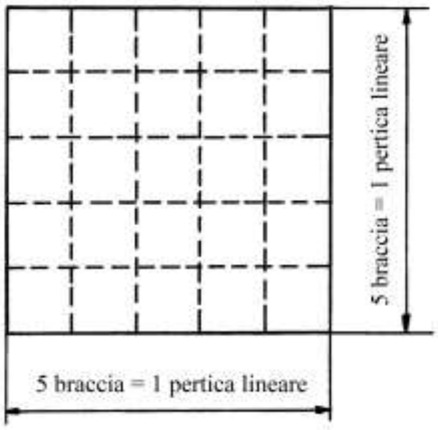
<u>Le unità di misura superficiali di Pisa</u>

Per Fibonacci l'unità superficiale fondamentale del sistema metrologico pisano era la *pertica quadrata* corrispondente all'area di un "rettangolo" lungo 6 pertiche lineari e largo 6 pertiche lineari e cioè un *quadrato*:



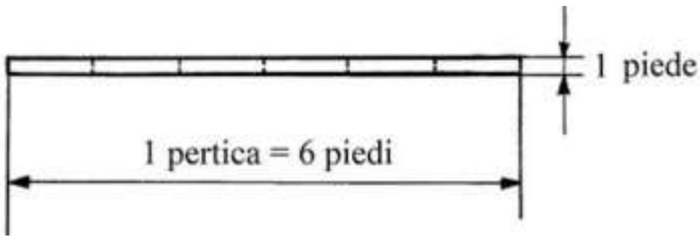
La pertica quadrata possedeva multipli e sottomultipli.

Forse fu usata anche una pertica quadrata basata sul braccio: la sua area era uguale a quella della pertica quadrata costruita su lati lunghi 6 piedi:

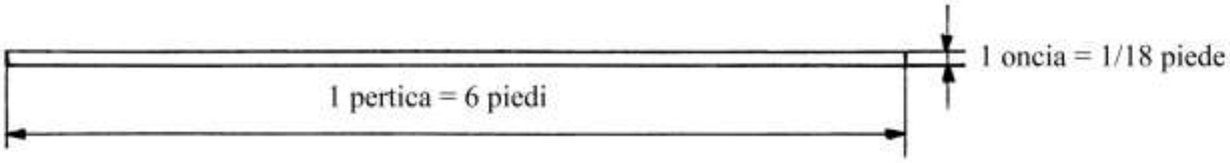


I sottomultipli della pertica quadrata

Il *piede superficiale* era rappresentato da un rettangolo lungo 1 pertica lineare (e cioè 6 piedi lineari) e largo 1 piede lineare:

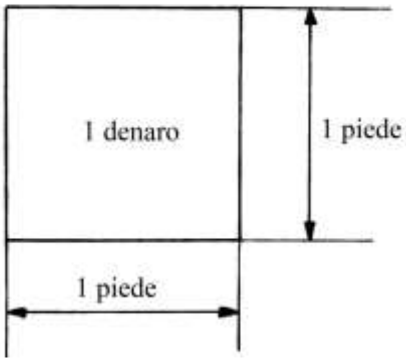


L'*oncia superficiale* era l'area di un rettangolo lungo 1 pertica lineare e largo 1 oncia lineare:



L’oncia superficiale valeva 1/18 di un piede superficiale e (1/18)*(1/6) = 1/108 esimo di una pertica quadrata.

La pertica superficiale era scomponibile in 36 quadrati con lati lunghi 1/6 di pertica lineare e cioè 1 piede lineare:



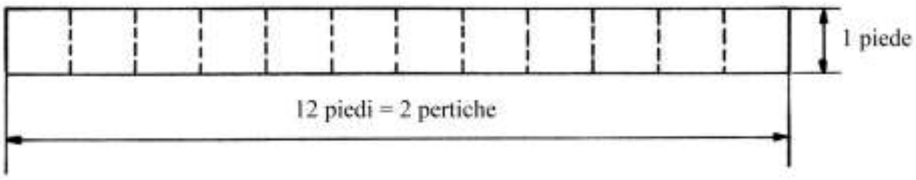
Questa unità era chiamata *denaro* e valeva:

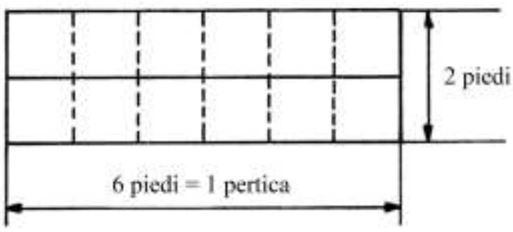
1 denaro = 1/36 pertica quadrata = 3 once superficiali.

Un altro sottomultiplo della pertica quadrata e multiplo del piede superficiale era il *soldo superficiale* che aveva superficie doppia di questa ultima unità:

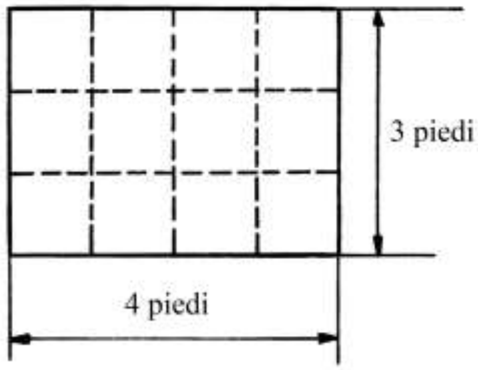
1 soldo = 2 piedi superficiali.

I due schemi che seguono mostrano due varianti dell’applicazione del metodo delle *linee larghe* al *soldo superficiale*:





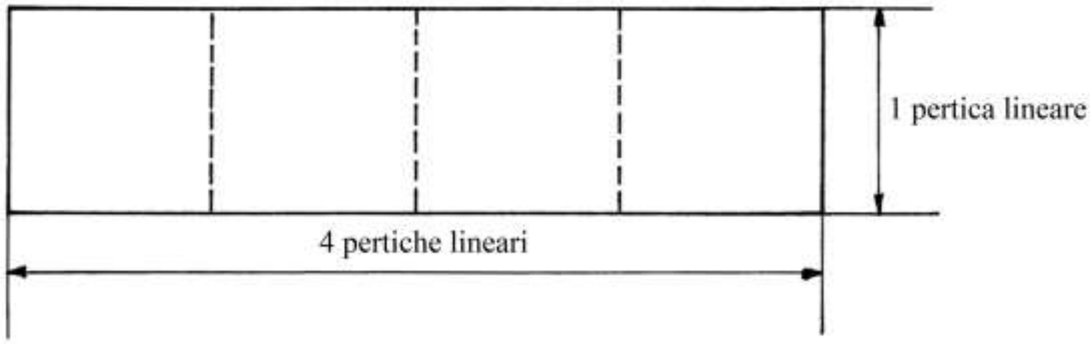
Infine, il *soldo superficiale* poteva essere strutturato sotto forma di una matrice rettangolare di dimensioni 3x4 piedi:



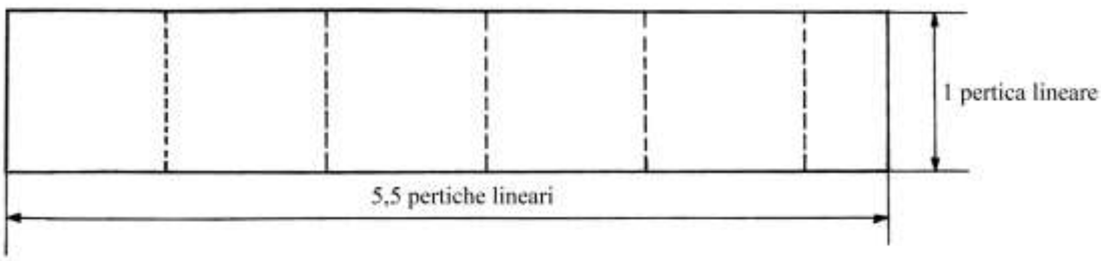
<u>I multipli della pertica quadrata</u>

La *scala* era un multiplo della pertica quadrata:

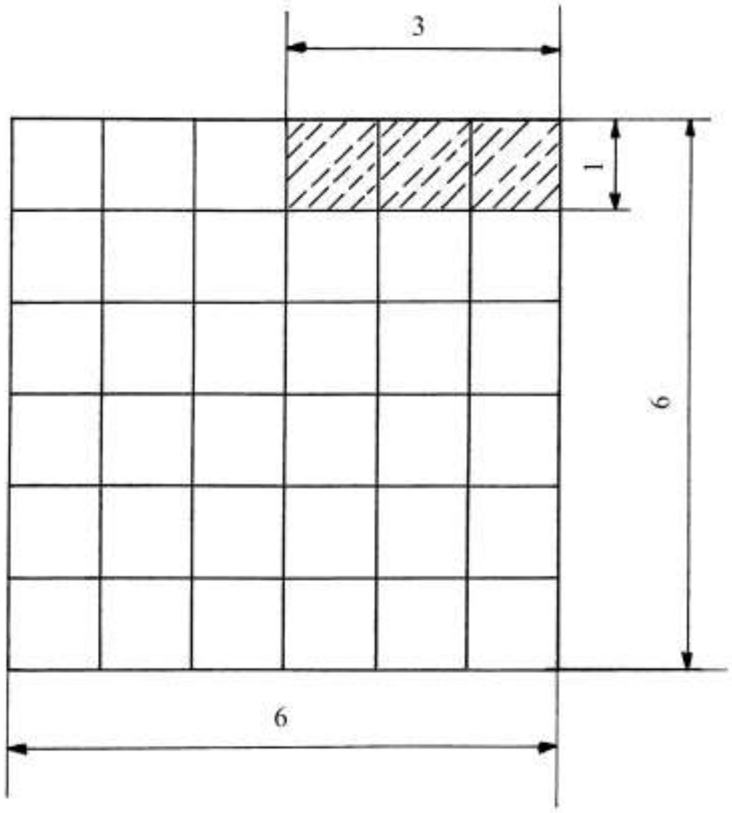
1 scala = 4 pertiche quadrate.

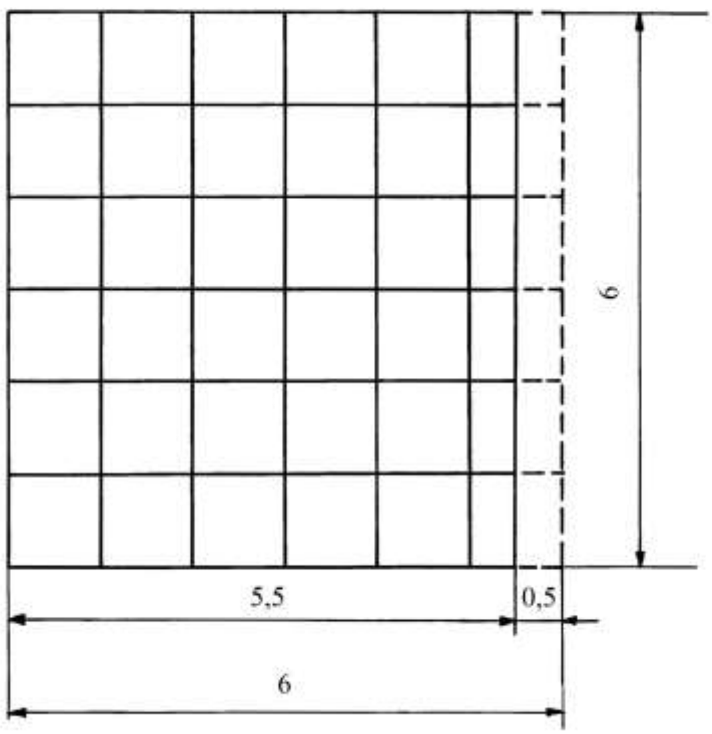


Il *panoro* era un altro multiplo della pertica quadrata:



Esso equivaleva a 5,5 pertiche quadrate: il numero 5,5 può essere spiegato con qualche difficoltà; gli schemi che seguono mostrano un quadrato di lato 6 unità dal quale è stato asportato in due differenti modi un rettangolo, tratteggiato in figura, di dimensioni 3*1 o 6*0,5 unità:





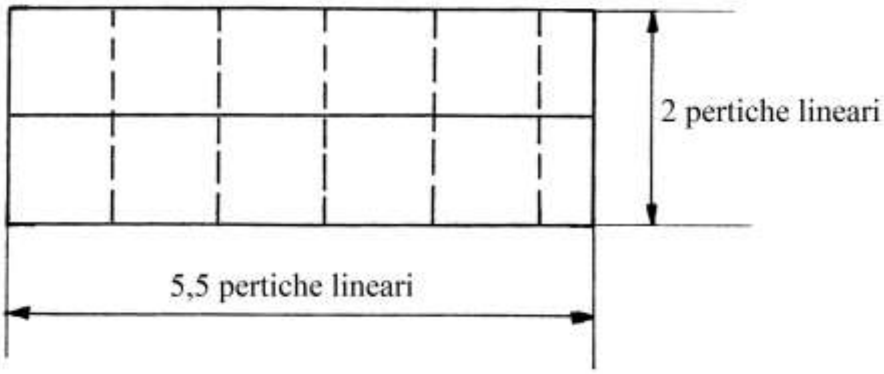
La matrice originale di 6*6 = 36 è in entrambi i casi ridotta a:

6*6 – 3*1 = 33 unità superficiali;

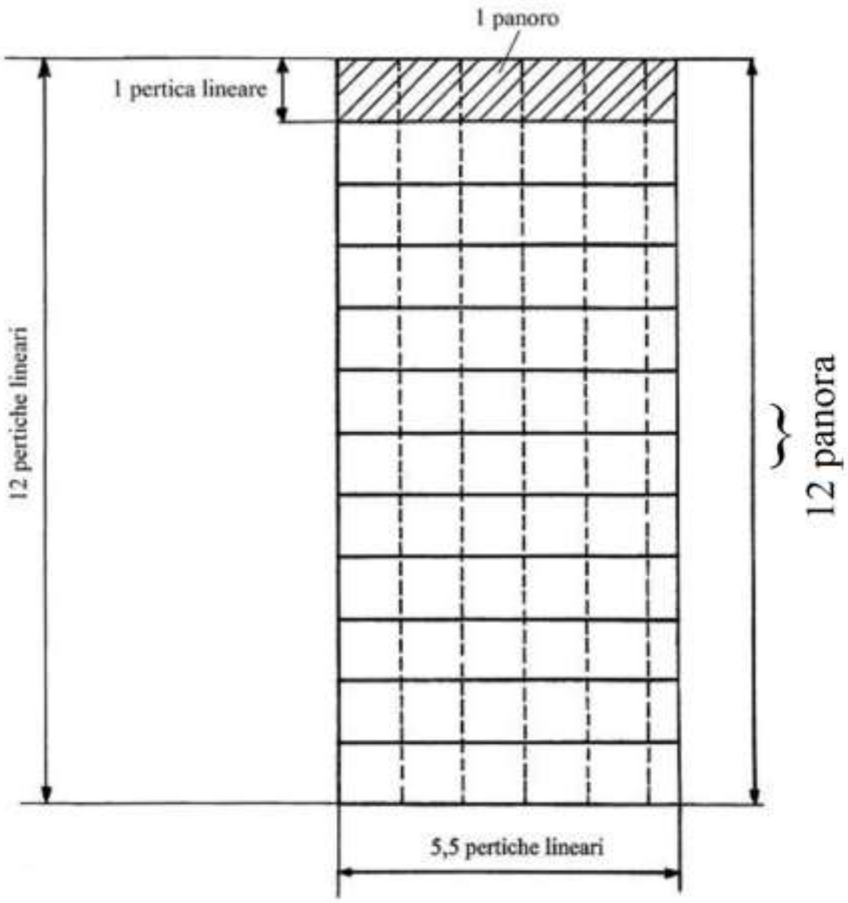
6 *6 – 6*0,5 = 33 unità superficiali.

In entrambi i casi dividendo la superficie convenzionale uguale a 33 per 6 si ottengono (5 + ½) unità superficiali.

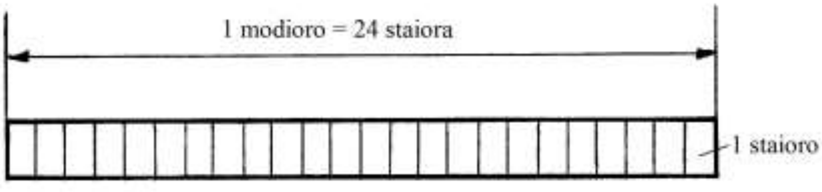
Moltiplicando, ad esempio, 1 panoro per 2 pertiche lineari si ottengono 1*2 = 2 panora:



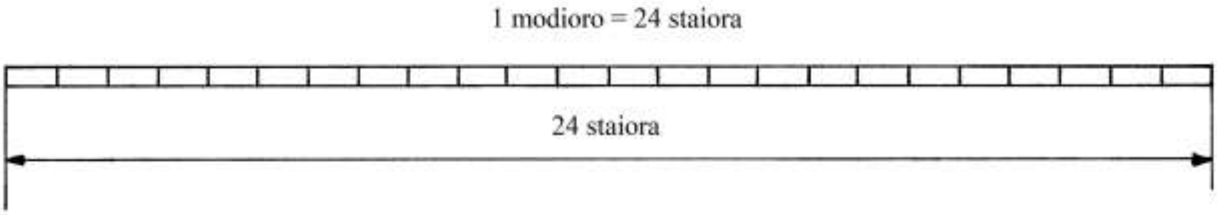
Moltiplicando 1 panoro per 12 si ha lo staioro:



Infine, l'unità ancora più grande era il *modioro* o *moggio* che valeva 24 staiora:



Il *modioro* poteva essere organizzato in altri modi, come spiegano i due esempi che seguono:



L’utilizzo così attestato a Pisa del metodo delle *linee larghe* nella definizione delle unità di misura superficiali era forse imposto dalle forme prevalentemente allungate dei terreni agricoli di proprietà privata, dovuto alla loro configurazione in ambienti collinari o nelle vallate dei corsi d’acqua?

Nella tabella che segue sono sintetizzate le relazioni fra le unità di misura lineari e superficiali:

Moltiplicandi * Moltiplicatori	Unità superficiali risultanti
1 oncia * 1 oncia	1/18 di 1/18 di denaro = 1/324 di denaro
1 piede * 1 oncia	1/18 di denaro
1 oncia * 1 pertica	1 oncia superficiale
1 piede * 1 piede	1 denaro
1 piede * 1 pertica	1 piede superficiale
1 pertica * 1 pertica	1 pertica superficiale (o pert.super.)
1 pertica * 1 panoro	1 panoro
1 pertica * 1 staioro	1 staioro
1 pertica * 1 modioro	1 modioro

Infine, la tabella che segue presenta i rapporti fra le *nove* unità di misura superficiali usate a Pisa all’epoca di Fibonacci. Nelle colonne le unità sono posizionate in ordine decrescente da sinistra (modioro) verso destra (oncia). Nelle righe le unità sono indicate in ordine crescente dall’alto (oncia) verso il basso (modioro):

	Modioro	Staioro	Panoro	Scala	Pertica	Soldo	Piede	Denaro	Oncia
Oncia superficiale									1
Denaro								1	3
Piede superficiale							1	6	18
Soldo superficiale						1	2	12	36
Pertica quadrata (o superficiale)					1	3	6	36	108
Scala				1	4	12	24	144	432
Panoro			1	1,375	5,5	16,5	33	198	594
Staioro		1	12	16,5	66	198	396	2376	7128
Modioro	1	24	288	396	1584	4752	9504	57024	171072

<u>*Nota*</u>

Nella *Practica Geometrie* Fibonacci fece una netta distinzione fra gli usi delle unità di misura superficiali:

* i terreni e le case erano misurate in pertiche, piedi e once;
* le aree agricole venivano calcolate in staiora, panora, soldi e denari;
* solo gli ambienti interni delle abitazioni potevano essere misurati in scale e nei sottomultipli, soldi e denari.

Da tutto ciò traspare la limitata importanza dell'unità *scala*.

\- APPROFONDIMENTO -

<u>Valori indicativi delle unità superficiali di Pisa</u>

La tabella che segue, elaborata a partire da diverse fonti, tenta di offrire una serie di valori *indicativi* in pertiche quadrate e negli equivalenti m^2 delle principali unità di misura superficiali di Pisa:

Unità	Rapporti con la pertica superficiale	Valori indicativi in m^2
Pertica superficiale	1	≈ 8,5
Scala	4	≈ 34
Panoro	5,5	≈ 47
Staioro	66	≈ 562,5
Modioro	1584	≈ 13500

IL CODICE CHIGIANO M.V. 104

Nota importante

Per evitare confusioni fra la *pertica lineare* e la *pertica superficiale* (unità di misura della superficie) saranno usate le seguenti convenzioni:

* la *pertica lineare* sarà abbreviata in *pertica*;
* la *pertica superficiale* (o *quadrata*) sarà sintetizzata con la sigla *pert.super*.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

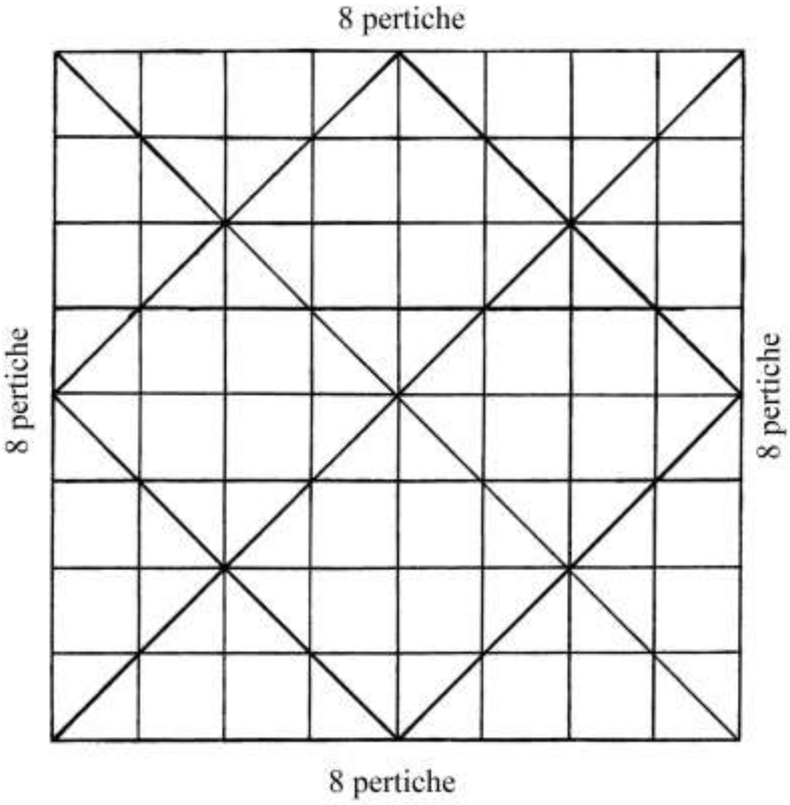
Nel manoscritto è fatto largo uso di *numeri misti*: un numero misto è la somma di un numero naturale (*parte intera*) e di una *parte frazionaria* (frazione propria, perché il numeratore è minore del denominatore). Nel Medioevo, la *virgola* non era ancora stata introdotta per separare la parte intera dalla parte frazionaria.

Nel testo sono presenti molti numeri misti scirri nella forma (5 ½), senza l'indicazione dell'operatore infisso dell'addizione. "+": nella descrizione del singoli esempi, il numero misto dell'esempio è indicato con "(5 + ½)".

QUADRILATERI

Quadrato a forma di scacchiera

Un terreno ha forma simile a quella di una scacchiera o *tavola da gioco* di forma quadrata:



I suoi lati sono lunghi 8 pertiche. La sua area è uguale a:

Area = 8 * 8 = 64 *pert.super.*

Il testo converte questo dato in *panora*:

Area = 64/(5 + ½) = 11 panora + (3 + ½) *pert.super.*.

La parte frazionaria (3 + ½) *pert.super.* è convertita in *soldi*:

(3 + ½) * 3 = (10 + ½) soldi.

L'area del quadrato è:

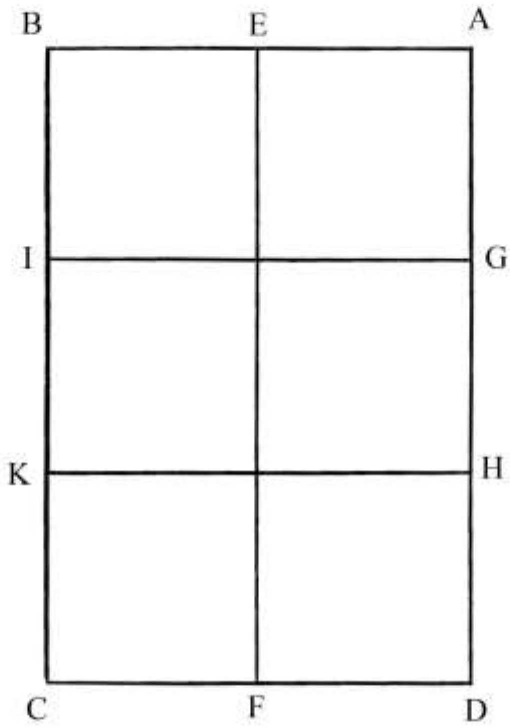
Area = 11 panora + (10 + ½) soldi.

Area di un terreno rettangolare

Nel testo originale i vertici sono contrassegnati con lettere *minuscole* e qui sono usate le corrispondenti *maiuscole*, secondo l'uso moderno, per il quale le minuscole sono riservate all'indicazione delle *rette* (*r*, *s* e *t*) e delle *variabili* usate nelle equazioni (*x*, *y* e *z*). In questo articolo sono talvolta usate le maiuscole per la variabile "x": "X".

È da notare che le lettere sono apposte ai vertici di pressoché tutte le figure rispettando quasi sempre l'ordine alfabetico, ma in *senso antiorario*.

Il terreno è lungo 2 pertiche e largo 3 pertiche.

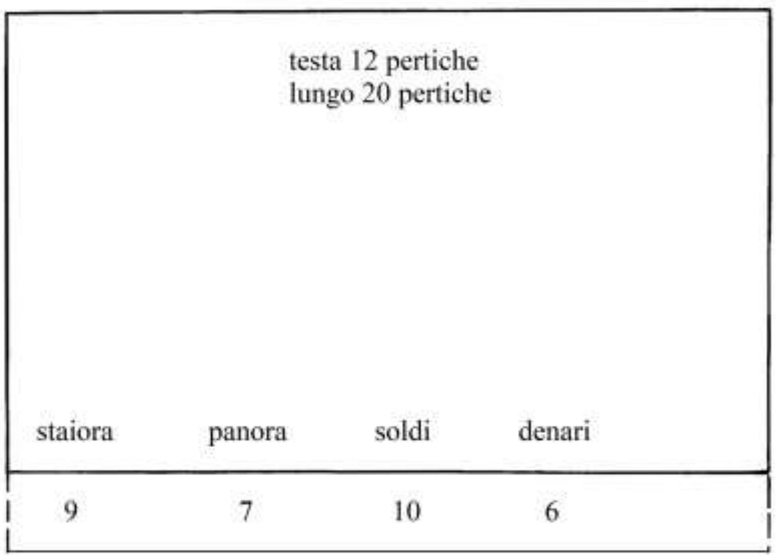


L’area del terreno è uguale a 6 pert.super. che equivalgono a:

6 pert.super. = 1 panoro + (½) pert.super. = 1 panoro + (1 + ½) soldi.

<u>Area di un altro terreno rettangolare</u>

Un altro campo di forma rettangolare ha larghezza (*testa*) uguale a 12 pertiche e lunghezza di 20 pertiche.



Nello schema contenuto nel manoscritto è aggiunto un riquadro rettangolare con le dimensioni lineari e superficiali (da Feola, p. 194):

p(er) testa 12 p(er) lungo 20			
staior(a)	pan(ora)	s	d.
3	7	10	6

La sua area è data dal prodotto della lunghezza per la larghezza:

Area RETTANGOLO = 20 * 12 = 240 pert.super.

Occorre convertire le pert.super. in staiora, panora e sottomultipli:

240 pert.super = 240/66 staiora = (3 staiora + 42 pert.super.).

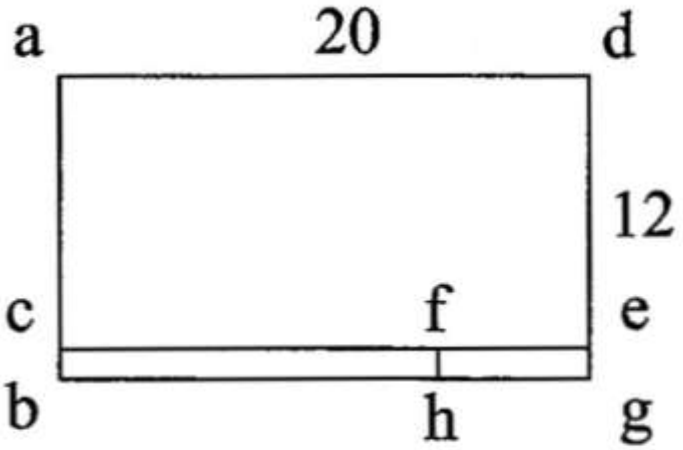
Continuiamo nella conversione:

42 pert.super./(5 + ½) = 7 panora + (3 + ½) pert.super;
(3 + ½) pert.super. * 3 = (10 + ½) soldi;
½ soldi * 12 = 6 denari.

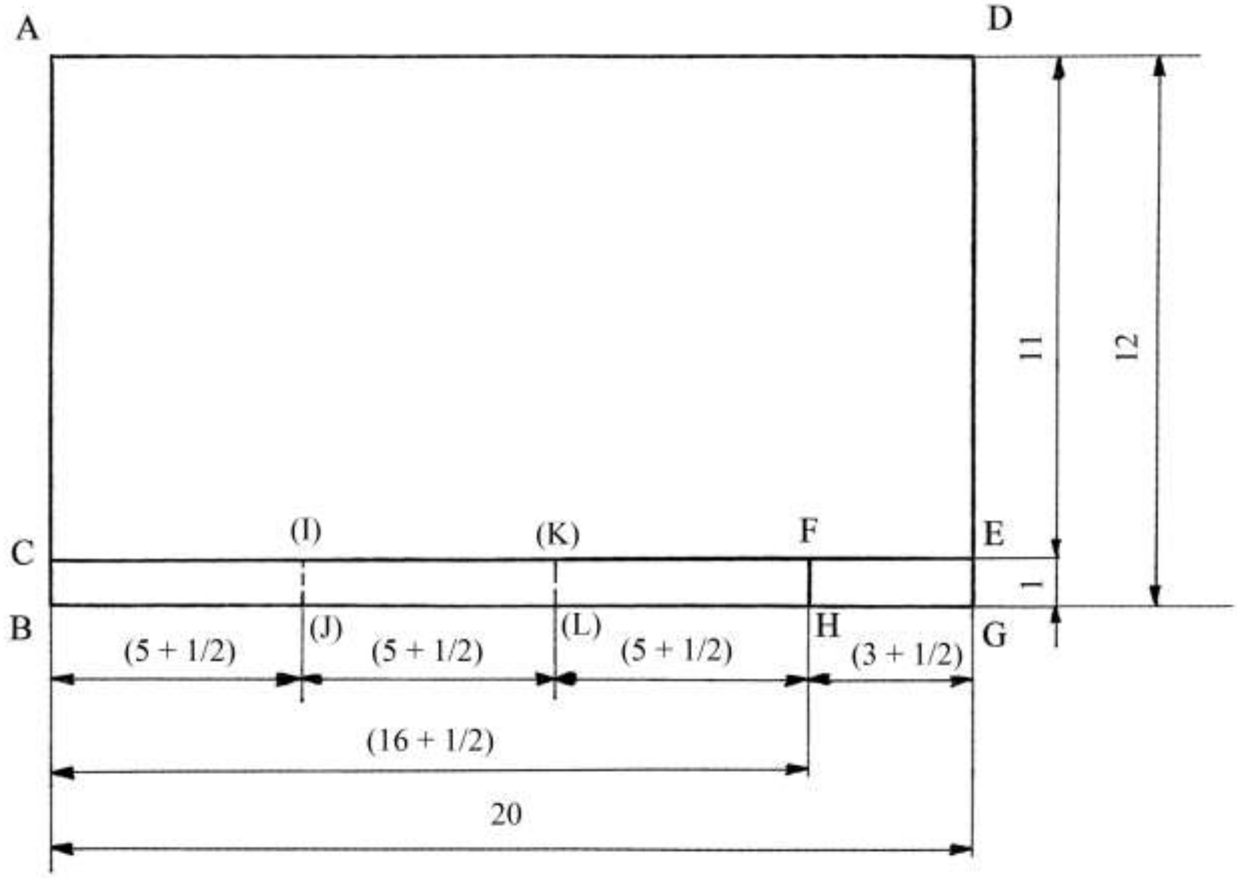
Il terreno ha area uguale a: (3 staiora + 7 panora + 10 soldi + 6 denari).

%%%%%%%%%%%%%%%%%

Una variante della soluzione del problema è presentata nella figura, riprodotta da Feola:



Lo schema può essere spiegato con il grafico che segue:



dimensioni in *pertiche lineari*

Il rettangolo ABCD è scomposto in tre rettangoli:

* ACED;
* CBHF;
* FHGE.

Il rettangolo CBHF ha dimensioni (16 + ½)*1 pertiche: “16 + ½” è multiplo di “5 + ½” perché (16 + ½) = 3 * (5 + ½).

È utile ricordare che tre delle unità multiple della pertica superficiale – il panoro, lo staioro e il modioro – lo sono secondo numeri multipli della costante “5 + ½” o “5,5”.

Il triangolo FHGE ha dimensioni (3 + ½) * 1 pertiche.

Consideriamo il triangolo CBHF: esso è scomponibile in tre triangoli di uguali dimensioni, lunghi (5 + ½) pertiche e larghi 1 pertica: ciascuno di essi ha area uguale a un *panoro*.

L’area del rettangolo ACED è:

Area $_{ADEC}$ = AC * CE = 11 * 20 = 220 pert.super. . Esse equivalgono a:
220/(5 + ½) = 40 panora.

L’area del rettangolo CBHF vale:

Area $_{CBHF}$ = BH * BC = (16 + ½) * 1 = (16 + ½) pert.super. = 3 panora

Il rettangolo FHGE ha area:

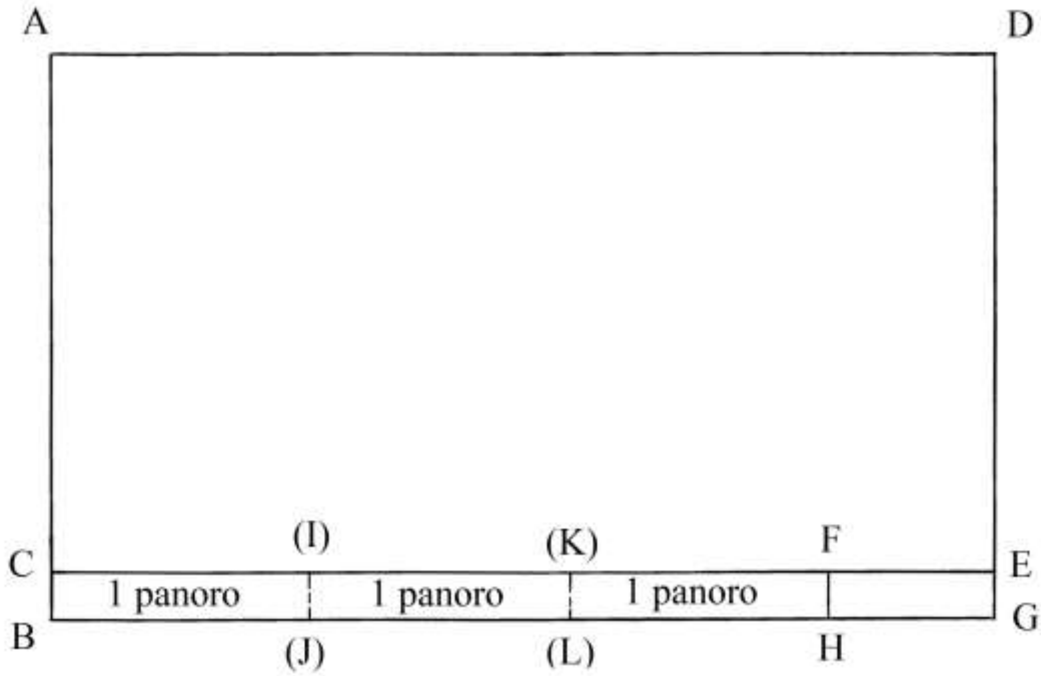
Area $_{FHGE}$ = FH * HG = 1 * (3 + ½) = (3 + ½) pert.super. Esse corrispondono a:
(3 + ½) * 3 = (10 + ½) soldi.

La somma delle aree dei tre rettangoli è:

$$\text{Area}_{ABCD} = \text{Area}_{ACED} + \text{Area}_{CBHF} + \text{Area}_{FHGE} =$$
$$= 40 \text{ panora} + 3 \text{ panora} + (10 + ½) \text{ soldi} = 43 \text{ panora} + (3 + ½) \text{ soldi}.$$

- APPROFONDIMENTO -

Il grafico che segue approfondisce il problema:



Il rettangolo BCFH è scomposto in tre rettangoli: BC(I)(J), (I)(J)(L)(K) e (L)(K)FH che hanno tutti area uguale a: 1 panoro = (5 + ½) pertiche superficiali.

Come può essere spiegata la presenza di questi dettagli nella rappresentazione di questo e del successivo problema?

Avanziamo alcune ipotesi: si trattava di indicare una qualche forma di *scala grafica superficiale*? Un'altra ipotesi è che i dettagli servissero a stimare "a occhio" il terreno rappresentato nel disegno.

- -

Un altro campo rettangolare

Un campo ha forma rettangolare e ha dimensioni 48 * 13 pertiche:

13 * 48 pertiche			
staiora	panora	soldi	denari
9	5	7	6

La sua area è data da:

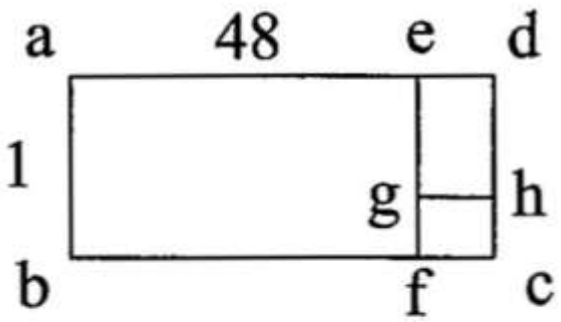
Area = 48 * 13 = 624 pert.super.

Procediamo alla conversione:

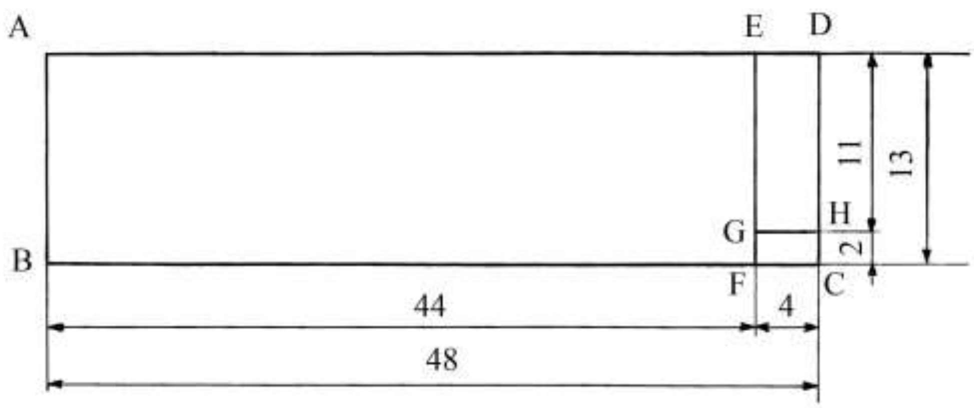
* 624/66 = 9 staiora + 30 pert.super.;
* 30/(5 + ½) = 5 panora + (2 + ½) pert.super.;
* (2 + ½) * 3 = 7 soldi + ½ pert.super.;
* ½ * 36 = 18 denari [il testo indica 6 denari].

L'area totale è: 9 staiora + 5 panora + 7 soldi + 18 denari.

Come fatto per la soluzione del precedente problema, l'Autore scompone il terreno in tre rettangoli, ABFE, EGHD e FGHC, come spiega lo schema, anch'esso riprodotto da Feola:



Lo schema precedente è qui ridisegnato in scala:



pertiche lineari

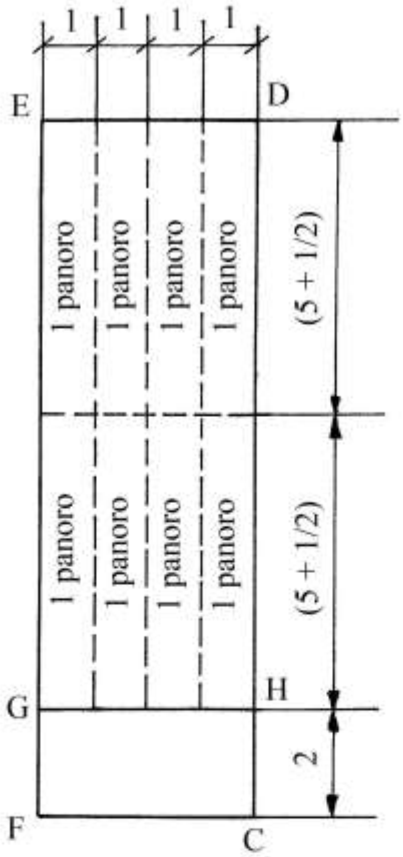
Le aree dei tre rettangoli sono:

* Area $_{ABFE}$ = 44 * 13 = 572 pert.super.;
* Area $_{EGHD}$ = 11 * 4 = 44 pert.super.;
* Area $_{FGHC}$ = 4 * 2 = 8 pert.super.

La loro somma è 624 pert.super.

I primi due valori (572 e 44) sono multipli di (5 + ½), per cui è facile passare dalle pertiche superficiali ai panora e agli staiora.

Lo schema che segue presenta un ingrandimento del rettangolo FGEDHC:



lunghezze espresse in pertiche

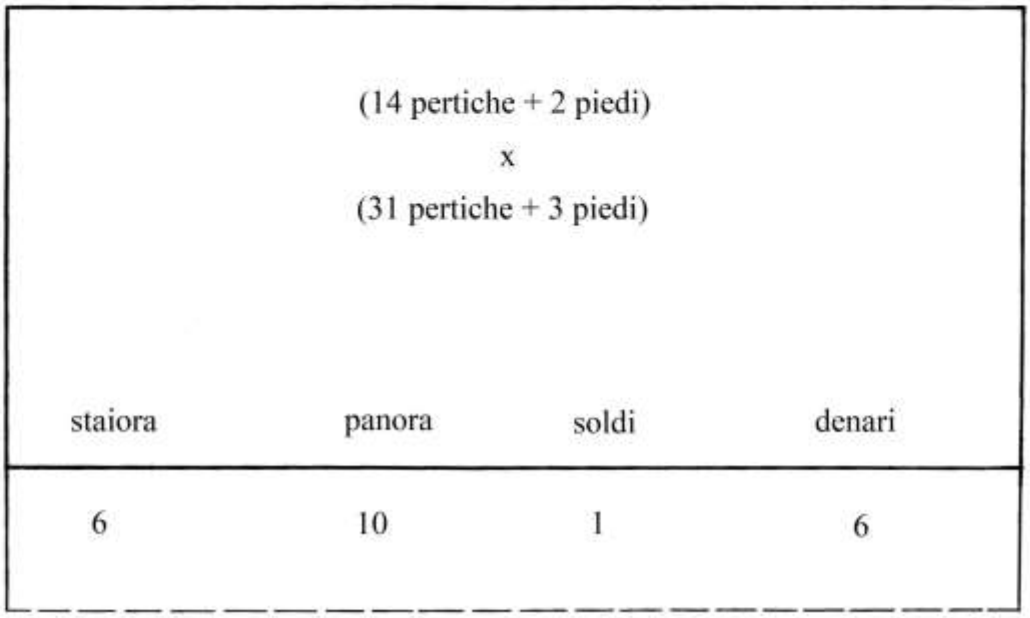
Il rettangolo GEDH ha dimensioni 4 per 11 pertiche lineari. Esso è scomposto in *otto* rettangoli di dimensioni 1 * (5 + ½) pertiche. I singoli rettangoli hanno area uguale a:

Area = 1 * (5 + ½) = (5 + ½) pert.super. = 1 panoro.

Di nuovo, sembra ricomparire la necessità della rappresentazione grafica di una specie di scala di riduzione dell'unità di misura superficiale *panoro*.

<u>Un altro terreno rettangolare</u>

Un campo ha le dimensioni indicate nella figura:

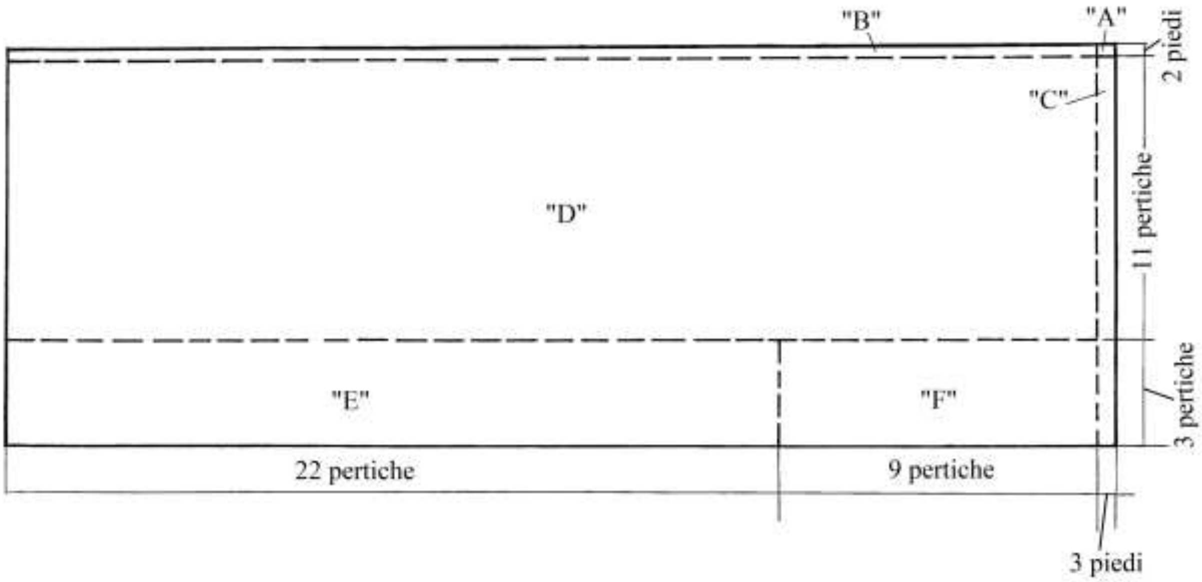


Il calcolo dell'area del campo sarebbe più semplice se le due dimensioni del rettangolo fossero convertite in piedi lineari, poi moltiplicate e il risultato riconvertito nei multipli e sottomultipli del piede superficiale. Infatti valgono le seguenti equivalenze:

* (14 pertiche + 2 piedi) = (14 * 6 + 2 piedi) = 86 piedi;
* (31 pertiche + 3 piedi) = (31 * 6 + 3 piedi) = 189 piedi.

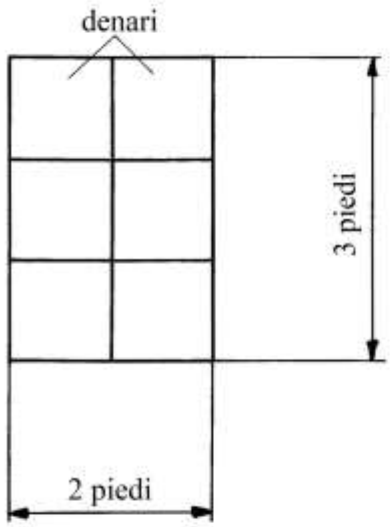
Evidentemente la moltiplicazione fra due numeri a due (86) e a tre cifre (189) era un'operazione aritmetica troppo difficile nel Medioevo.

La soluzione del problema richiede di nuovo, e in forma implicita, la scomposizione del campo in *sei* rettangoli:

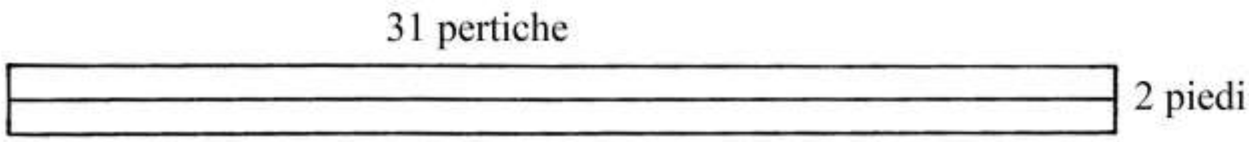


Le aree dei rettangoli contrassegnati con le lettere maiuscole sono:

* Area "A" = 2 piedi * 3 piedi = 6 denari:



*	Area “B” = 31 pertiche * 2 piedi = 31 soldi:



* Area “C” = 14 pertiche * 3 piedi = 21 soldi;
* Area “D” = 31 pertiche * 8 pertiche = 248 pert.super. = 3 staiora + 50 pert.super. =
  = 3 staiora + 50/(5 + ½) panora = 3 staiora + 9 panora + ½ pert.super. =
  = 3 staiora + 9 panora + 3 piedi superficiali.
* Area “E” = 22 pertiche * 3 pertiche = 66 pert.super. = 1 staioro;
* Area “F” = 9 pertiche * 3 pertiche = 27 pert.super. = 4 panora + 5 pert.super.

I risultati parziali devono essere sommati per ricavare l’area dell’intero campo. Una tabella come quella che segue può servire allo scopo:

Aree	Staiora	Panora	Pertiche superficiali	Soldi	Piedi superficiali	Denari
“A”						6
“B”				31		
“C”				21		
“D”	3	9			3	
“E”	1					
“F”		4	5			
Totali	4	13	5	52	3	6
					+ 1	(= 1 piede superficiale)
Totali	4	13	5	52	4	0
				+ 2	(= 2 soldi)	
Totali	4	13	5	54	0	
		+ 3		(= 3 panora + 9 soldi)		
Totali	4	16	5	9		
			+ 3	(= 3 pertiche superficiali)		
Totali	4	16	8			
	4	16 + 1	[= - 1 panoro + (2 + ½) pertiche]			
Totali	4	17	(2 + ½)			
	4 + 1	(- 1 staioro + 5 panora)				
	5	5	(2+ ½) = 2 pertiche superficiali + 3 piedi superficiali			
Totali	5	5	2		3	

La tabella simula l’uso di un *abaco* per effettuare le conversioni da un’unità all’altra e le necessarie addizioni.

L’Autore fornisce un risultato diverso: (6 staiora + 10 panora + 1 soldo + 1 denaro).

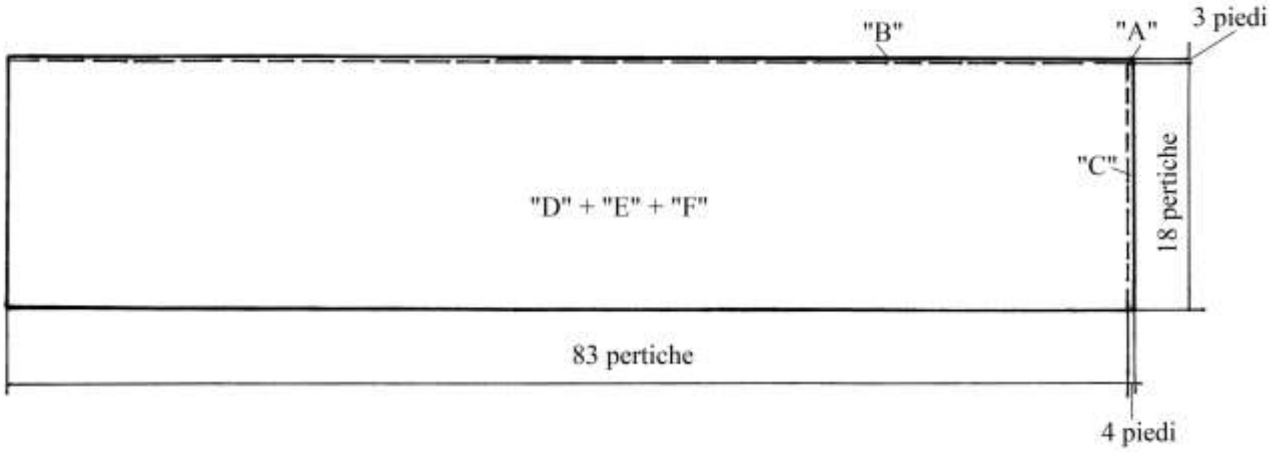
<u>Un altro campo</u>

Un campo è largo (18 pertiche + 3 piedi) e lungo (38 pertiche + 4 piedi).
Il problema chiede di calcolare la sua area.
Il disegno originale contiene un errore:

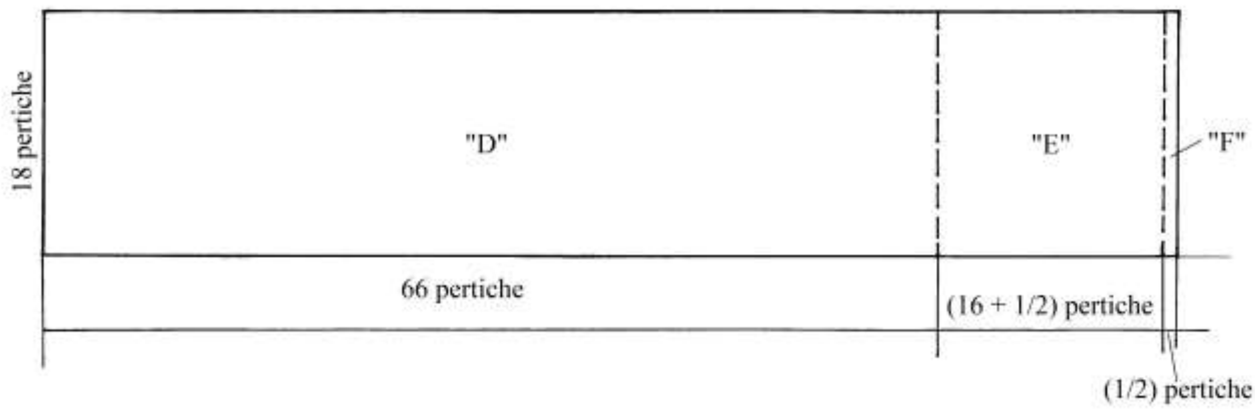
p(er) tiche			piedi
1			3
83			4
st.	pan.	s	dr.
23	5	7	Ø

Esso indica la larghezza in (*1* pertica + 3 piedi) invece di (*18* pertiche + 3 piedi).

Il metodo utilizzato ripropone quello già incontrato nella soluzione del precedente problema e cioè un'implicita scomposizione del campo in *sei* rettangoli:



Per semplificare i calcoli, il rettangolo lungo 83 pertiche e largo 18 pertiche è suddiviso in tre rettangoli che hanno in comune la quota 18 pertiche:



La ripartizione si propone di scomporre la lunghezza di 83 pertiche in due segmenti con lunghezze multiple di (5 + ½) e cioè 66 e (16 + ½) pertiche e con un resto di (1/2) pertica.

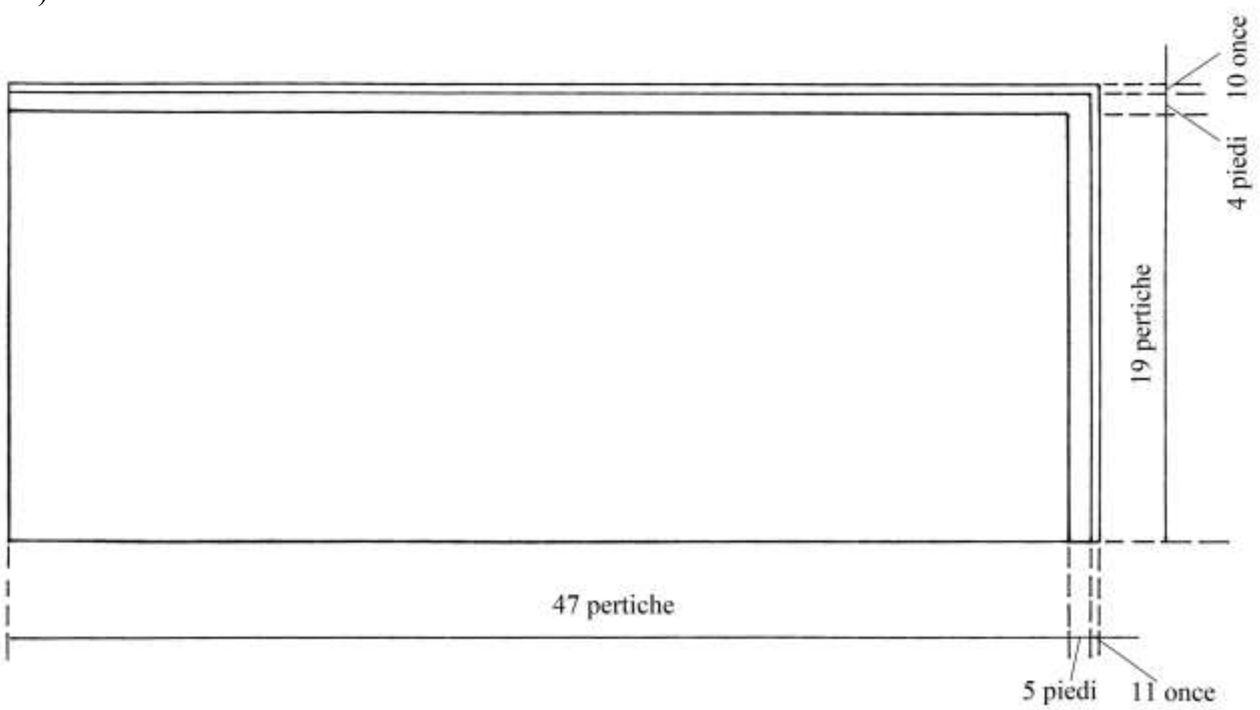
Calcoliamo le sei aree:

* Area "A" = 3 piedi * 4 piedi = 1 soldo;
* Area "B" = 3 piedi * 83 pertiche = (124 + ½) soldi;
* Area "C" = 4 piedi * 18 pertiche = 36 soldi;
* Area "D" = 66 pertiche * 18 pertiche = 1188 pertiche^2;
* Area "E" = (16 + ½) pertiche * 18 pertiche = 297 pertiche^2;
* Area "F" = (1/2) pertica + 18 pertiche = 9 pertiche^2.

L'area del campo è data dalla somma delle aree dei sei rettangoli:
Area $_{\text{CAMPO}}$ = Area "A" + Area "B" + Area "C" + Area "D" + Area "E" + Area "F" =
= (1 soldo) + (124 + ½) soldi + (36 soldi) + (1188 pertiche^2) + (297 pertiche^2) +
+ (9 pertiche^2) =
= (161 + ½ soldi) + (1494 pertiche^2) =
= [53 pertiche^2 + (2 + ½) soldi] + (1494 pertiche^2) =
= (1547 pertiche^2) + (2 + ½ soldi) =
= (23 staiora + 29 pertiche^2) + (2 + ½ soldi) =
= (23 staiora) + (29/(5 + ½) panora) + (2 + ½ soldi) =
= (23 staiora) + (5 panora + (1 + ½ pertiche^2) + (2 + ½) soldi =
= (23 staiora) + (5 panora) + (4 + ½ soldi) * (2 + ½) soldi =
= 23 staiora + 5 panora + 7 soldi.

<u>Altro campo rettangolare</u>

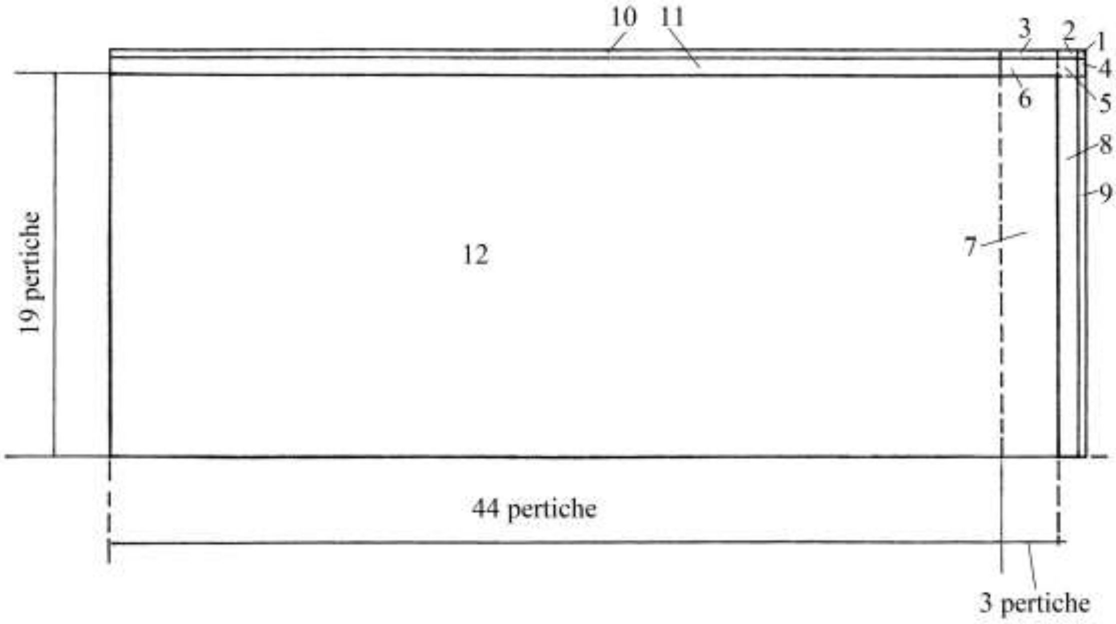
Un campo ha dimensioni (19 pertiche + 4 piedi + 10 once) per (47 pertiche + 5 piedi + 11 once) e deve esserne calcolata l'area.



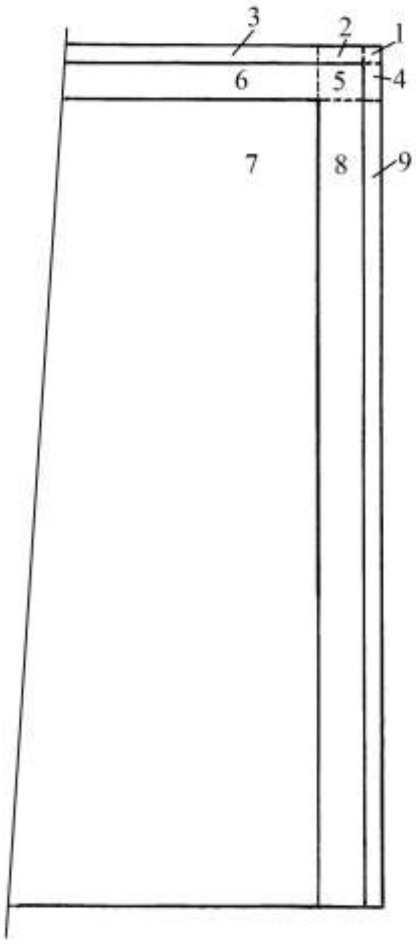
La soluzione di questo problema è più complessa di quella utilizzata per i precedenti perché sono in gioco *tre* diverse unità di misura anziché due: pertiche, piedi e once lineari.

Le lunghezze in once potrebbero essere trascurate perché un'oncia equivale a 2,7 cm: 10 once valgono 27 cm e 11 once sono 29,7 cm. Forse, i dati di questo problema sono stati scelti con finalità 'didattiche'.

Il campo è idealmente scomposto nei *dodici* rettangoli mostrati nella figura che segue:



Per chiarire la suddivisione, il grafico che segue contiene un ingrandimento della parte destra del campo:



Le aree dei dodici rettangoli valgono:

* Area “1” = 10 once * 11 once = 110/324 denari;
* Area “2” = 10 once * 5 piedi = 50/18 denari;

* Area “3” = 10 once * 3 pertiche = 30 once superficiali = 10 denari = 1 piede superficiale + 4 denari;
* Area “4” = 4 piedi * 11 once = 44/18 denari;
* Area “5” = 4 piedi * 5 piedi = 20 denari = 1 soldo + 8 denari;
* Area “6” = 4 piedi * 3 pertiche = 12 piedi superficiali = 2 pert.super.;
* Area “7” = 3 pertiche * 19 pertiche = 57 pert.super. = 10 panora + (1 + ½) pert.super.;
* Area “8” = 5 piedi * 19 pertiche = 95 piedi superficiali = 2 panora + 29 piedi superficiali;
* Area “9” = 11 once * 19 pertiche = 209 once superficiali = 1 pert.super. + 101 once superficiali;
* Area “10” = 10 once * 44 pertiche = 440 once superficiali = 4 pert.super. + 8 once;
* Area “11” = 4 piedi * 44 pertiche = 176 piedi superficiali = 5 panora + 11 piedi superficiali;
* Area “12” = 19 pertiche * 44 pertiche = 836 pert.super. = 12 staiora + 44 pert.super = = 12 staiora + 8 panora.

Procediamo alla somma delle dodici aree:

Aree	Staiora	Panora	Pertiche superficiali (pert.super.)	Soldi	Piedi superficiali	Denari	Once
“1”						110/324	
“2”						50/18	
“3”					10 = 1 piede superficiale + 4 denari		
“4”						44/18	
“5”				1 soldo + 8 denari			
“6”			2 pert.super.				
“7”		10 panora + (1 + ½) pert.super.					
“8”		2 panora + 29 piedi superficiali					
“9”			1 pert.super. + 101 once				
“10”			4 pert.super. + 8 once				
“11”		5 panora + 11 piedi superficiali					
“12”	12 staiora + 8 panora						
TOTALI	13	(10 + ½)	5	2		(5 + 110/324)	1

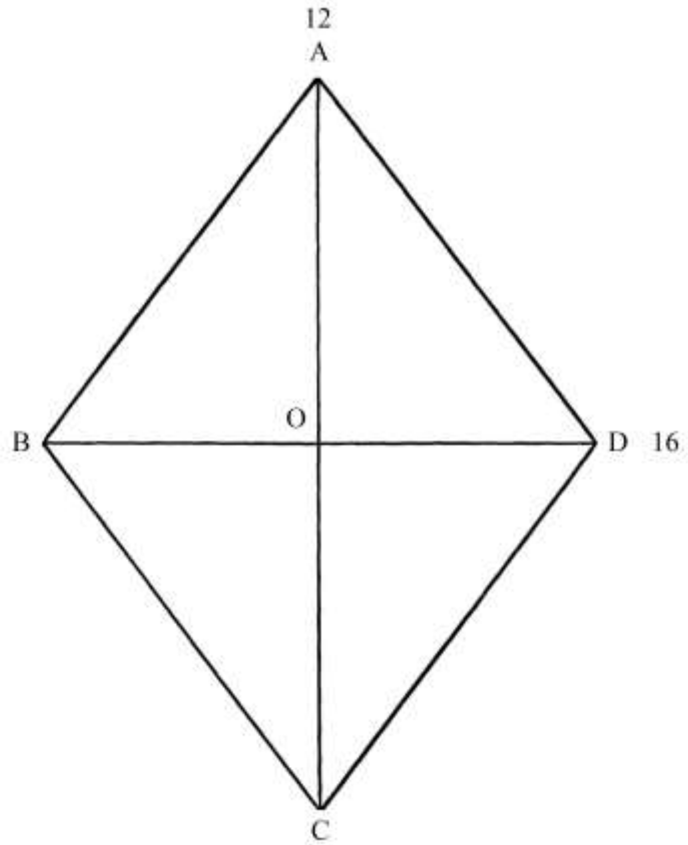
Sono omessi i calcoli intermedi che portano ai totali finali: S. E. e O. (Salvo Errori e Omissioni), assai probabili in questo tipo di calcoli.

Nel manoscritto sono forniti dati leggermente differenti:
14 staiora + 4 panora + 4 soldi + (9 + ½) denari.

La procedura applicata nel manoscritto comporta anche l'uso dell'unità *scala* che in questa ricostruzione è stata accantonata per semplificare i calcoli.

Mattonella a forma di rombo

Una mattonella ha la forma di un *rombo* i cui lati sono lunghi 10 pertiche e con la diagonale maggiore (o *diametro*) AC lunga 16 pertiche.



Nota: gli abacisti medievali chiamavano *diametro* o *diamitro* il segmento che divideva un poligono in due parti uguali.

Per calcolare l'area del rombo, l'Autore moltiplica la lunghezza di una diagonale per la metà di quella dell'altra:

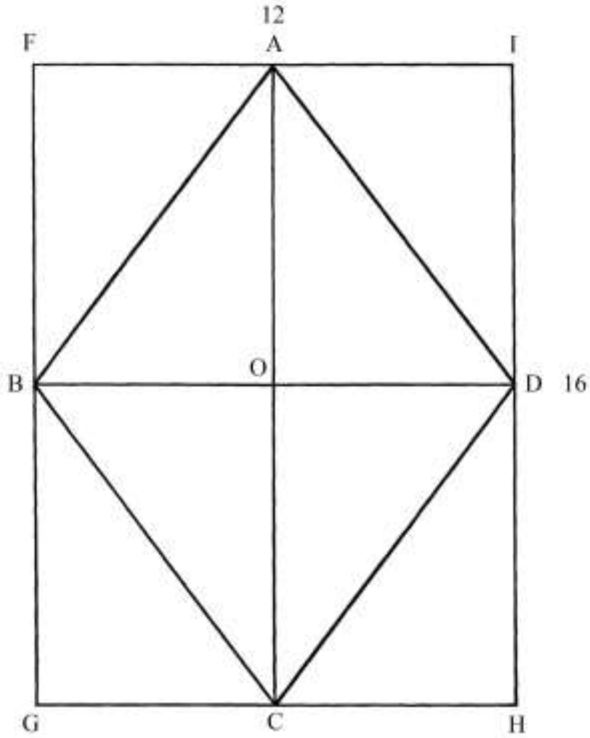
Area $_{\text{ROMBO}}$ = (12/2) * 16 = 12 * (16/2) = 96 pert.super.

Esse equivalgono a:

96/66 staiora = 1 staioro + 30/(5 + ½) panora = 1 staioro + 5 panora + (2 + ½) * 3 soldi =
= 1 staioro + 5 panora + (7 + ½) soldi.

L'Autore inscrive poi il rombo in un rettangolo, FGHI, che ha lati paralleli alle due diagonali e passanti per i quattro vertici A, B, C e D.

Il rettangolo ha dimensioni 12 * 16 pertiche, uguali a quelle delle due diagonali del rombo:



L'Autore sviluppa una soluzione del problema per così dire "allungata".

Il rettangolo FGHI risulta scomposto in otto triangoli rettangoli di uguali dimensioni e aree.

Il rombo ABCD contiene soltanto quattro degli otto triangoli e quindi la sua area è uguale alla metà di quella del rettangolo in cui è inscritto.

Il quadrilatero FGHI può essere suddiviso in ben *otto* rettangoli:

* BFAO, OAID, GBOC e CODH hanno dimensioni 8 * 6 pertiche;
* BFID e BDHG con dimensioni 8 * 12 pertiche;
* FACG e AIHC che misurano 16 * 6 pertiche.

L'area degli ultimi quattro rettangoli vale:

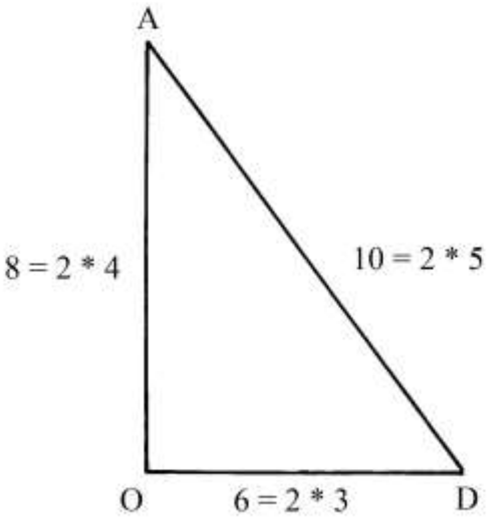
Area $_{BFID}$ = Area $_{BDHG}$ = 8 * 12 = 96 pert.super;

Area $_{FACG}$ = Area $_{AIHC}$ = 16 * 9 = 96 pert.super.

Le aree degli ultimi quattro rettangoli sono uguali a quella del rombo ABCD.

%%%%%%%%%%%%%%%%

Consideriamo uno degli otto triangoli rettangoli che formano FGHI, ad esempio quello AOD.



I suoi lati hanno lunghezze proporzionali alla terna primitiva 3-4-5 secondo un rapporto 2.

- APPROFONDIMENTO -

<u>Terne primitive e derivate</u>

Una terna pitagorica è detta *primitiva* quando i tre numeri che la compongono sono fra loro *primi* (e cioè non possiedono un divisore comune diverso da 1), come è il caso dei seguenti esempi:

* 3, 4, 5 ;
* 5, 12, 13 ;
* 8, 15, 17 ;
* 7, 24, 25 ;
* 12, 35, 37.

Tutte le terne pitagoriche *primitive* sono formate da *un* numero pari e da *due* numeri dispari.

A ogni terna pitagorica corrisponde un triangolo rettangolo e viceversa.

Le prime 18 terne pitagoriche primitive sono indicate nella seguente tabella:

[3, 4, 5]	[5, 12, 13]	[7, 24, 25]
[8, 15, 17]	[9, 40, 41]	[11, 60, 61]
[12, 35, 37]	[13, 84, 85]	[16, 63, 65]
[20, 21, 29]	[20, 99, 101]	[28, 45, 53]
[33, 56, 65]	[36, 77, 85]	[39, 80, 89]
[48, 55, 73]	[60, 91, 109]	[65, 72, 97]

Il terzo valore che compare nelle terne è sempre inferiore a 100, tranne che in quelle [20, 99, 101] e [60, 91, 109].

Le terne primitive con il terzo numero compreso fra 100 e 300 sono le seguenti:

[20, 99, 101]	[60, 91, 109]	[15, 112, 113]
[44, 117, 125]	[88, 105, 137]	[17, 144, 145]
[24, 143, 145]	[51, 140, 149]	[85, 132, 157]
[119, 120, 169]	[52, 165, 173]	[19, 180, 181]
[57, 176, 185]	[104, 153, 185]	[95, 168, 193]
[28, 195, 197]	[84, 187, 205]	[133, 156, 205]
[21, 220, 221]	[140, 171, 221]	[60, 221, 229]
[105, 208, 233]	[120, 209, 241]	[32, 255, 257]
[23, 264, 265]	[96, 247, 265]	[69, 260, 269]
[15, 252, 277]	[160, 231, 281]	[161, 240, 289]
[68, 285, 293] .		

Se i tre numeri che formano una terna primitiva sono moltiplicati per un numero si ricava una *terna pitagorica derivata* come mostrano gli esempi che seguono:

* [3 – 4 – 5] * 2 = [6 – 8 – 10] ;
* [3 – 4 – 5] * 3 = [9 – 12 – 15] ;
* [3 – 4 – 5] * 4 = [12 – 16 – 20] ;
* [3 – 4 – 5] * 5 = [15 – 20 – 25] ;
* [3 – 4 – 5] * 6 = [18 – 24 – 30] .

È anche possibile moltiplicare i componenti di una terna primitiva per un numero minore di 1, ad esempio 0,5:

[3 – 4 – 5] * 0,5 = [1,5 – 2 – 2,5] .

La terna [1,5 – 2 – 2,5] è anch’essa pitagorica.

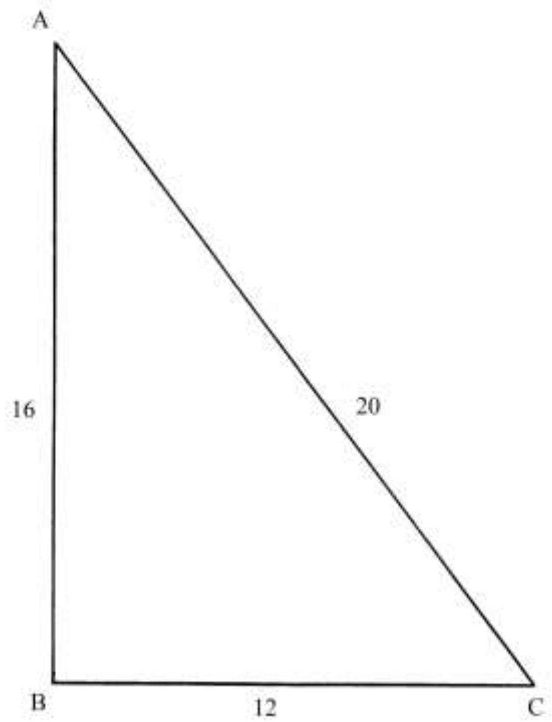
Nei suoi problemi l’Autore del *Volgarizzamento* impiega molte terne derivate.

- -

TRIANGOLI

Un campo triangolare

Un campo ha la forma di un triangolo rettangolo con le dimensioni in pertiche riportate sui lati della figura:



L'Autore verifica la corretta lunghezza dell'ipotenusa AC con l'applicazione del teorema cosiddetto di Pitagora:

$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 16^2 + 12^2 = 256 + 144 = 400$ pert.super da cui:

$AC = \sqrt{400} = 20$ pertiche.

In questo problema è di nuovo usato il triangolo rettangolo che ha lati lunghi in proporzione alla terna primitiva 3-4-5:

$12 – 16 – 20 \rightarrow 4 * \{3 – 4 - 5\}$.

L'area è calcolata moltiplicando la lunghezza di un cateto per la metà di quella dell'altro (nel testo i cateti sono i lati che contengono l'angolo retto):

$Area_{ABC} = AB * (BC/2) = (AB/2) * BC = 16 * (12/2) = (16/2) * 12 = 96$ pert.super.

Passiamo alla conversione delle pertiche superficiali:

96 pert.super. = (96/66) staiora = 1 staioro + 30 pert.super.

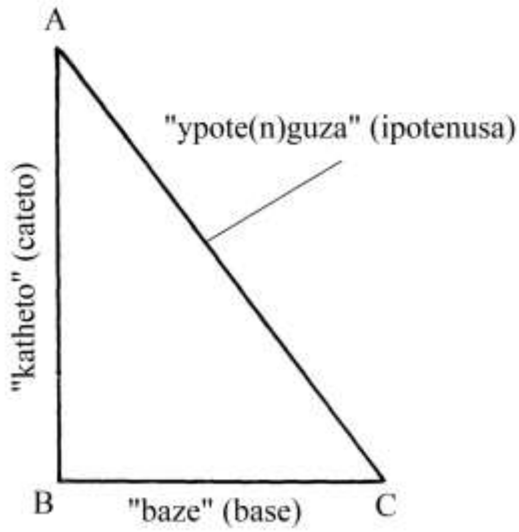
30/(5 + ½) panora = 5 panora + (2 + ½) pert.super.

(2 + ½) pert.super. = (7 + ½) soldi.

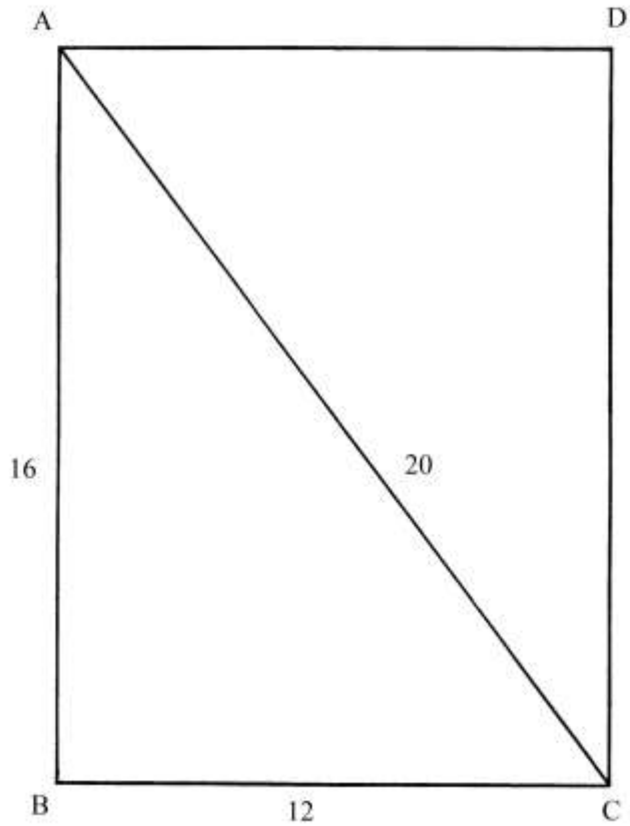
L'area del triangolo ABC è:

1 staioro + 5 panora + (7 + ½) soldi.

Nel testo originale, i lati del triangolo portano i seguenti nomi:



Per confermare la correttezza del metodo impiegato per calcolare l'area, l'Autore costruisce il rettangolo ABCD:



L'area del rettangolo è:

Area $_{ABCD}$ = AB * BC = 16 * 12 = 192 pert.super.

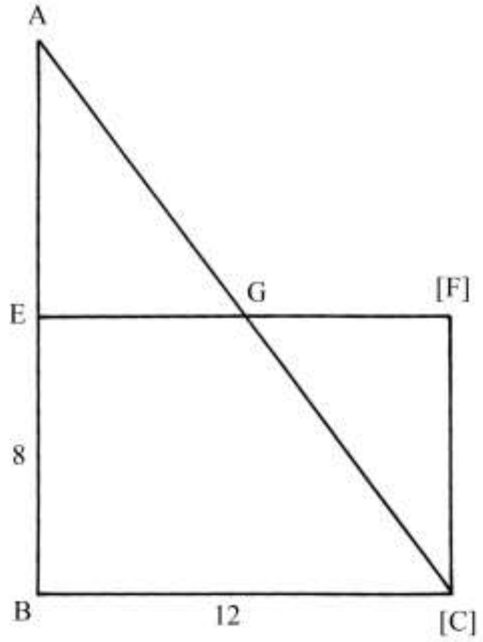
La diagonale AC divide il rettangolo in due triangoli rettangoli di uguali dimensioni: ABC e ADC.

L'area di ciascuno dei due triangoli è uguale alla metà di quella di ABCD:

Area $_{ABC}$ = Area $_{ADC}$ = (Area $_{ABCD}$)/2 = 192/2 = 96 pert.super.

L’Autore presenta altre due varianti del suo metodo per il calcolo dell’area del triangolo rettangolo ABC.

Il primo metodo chiede la determinazione del punto medio del cateto AB: è E.



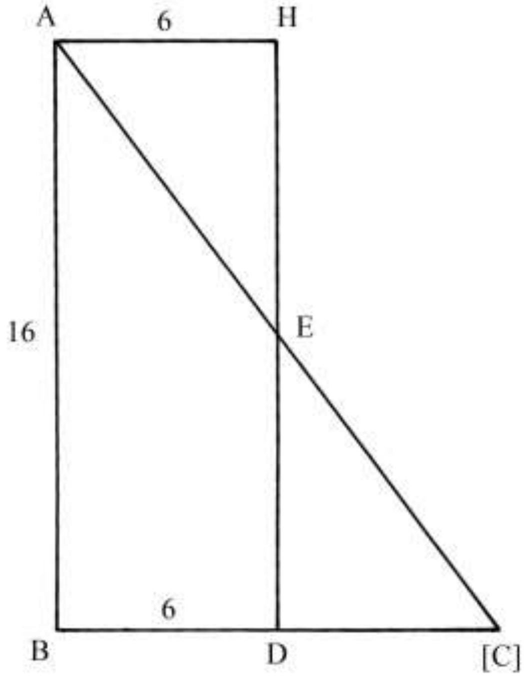
Da questo ultimo punto condurre la parallela a B[C] e dal punto [C] innalzare la parallela a AB: i due segmenti si incontrano in [F].

E[F] è il quarto lato del rettangolo BE[F][C]. L’area di questo rettangolo è:

Area $_{BE[F][C]}$ = B[C] * EB = 12 * 8 = 96 pert.super.

I triangoli rettangoli AEG e G[F][C] hanno uguali dimensioni e identica area.

Il secondo metodo è mostrato nella figura che segue:



In questo caso è il cateto B[C] a essere diviso in due parti uguali: D è il suo punto medio.

Da questo ultimo tracciare la parallela AB e da A condurre la parallela a B[C]: le due linee si incontrano in H.

L'area del rettangolo ABDH è:

$\text{Area}_{\text{ABDH}} = BD * AB = 6 * 16 = 96$ pert.super.

Anche ABDH ha area uguale a quella di ABC.

Nota

In alcune figure, come è il caso delle ultime due, l'Autore racchiude alcune lettere minuscole che segnano i vertici fra parentesi quadre: [c] e [f], qui trascritte in [C] e [F]. Egli non fornisce alcuna spiegazione del suo comportamento. Nei successivi rifacimenti dei suoi schemi, sono conversate le parentesi quadre.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Infine, l'Autore applica il teorema cosiddetto di Pitagora al triangolo ABC del quale sono note solo le lunghezze dei due cateti (lunghezze peraltro uguali a quelle dei corrispondenti lati del precedente triangolo ABC): la soluzione è data dalla formula

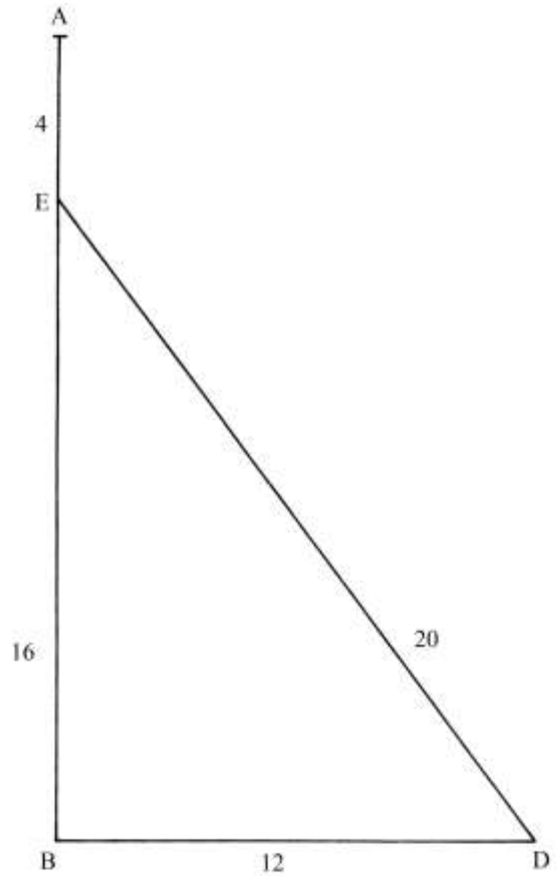
$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 16^2 + 12^2 = 256 + 144 = 400$ da cui:

$AC = \sqrt{400} = 20$ pertiche.

Primo problema della lancia

In altre forme, il problema è abbastanza diffuso nei trattati medievali: a volte si trattava di un palo, in altri di una scala che poggiati a un muro scivolavano fino a formare un triangolo rettangolo.

Una lancia DE lunga *20 palmi* (e cioè 2 canne equivalenti a 4,668 m) è appoggiata a un muro perfettamente verticale:



Il suo estremo D viene allontanato dal muro in senso orizzontale di 12 palmi e la lancia forma un ipotetico triangolo rettangolo, BED, che ha il cateto BE di lunghezza incognita.

Il problema chiede di calcolare la lunghezza del segmento, EA, che indica di quanto è sceso il vertice E poggiato al muro.

La lunghezza di BE è ricavata come segue:

$BE^2 = DE^2 - BD^2 = 20^2 - 12^2 = 400 - 144 = 256$ da cui

$BE = \sqrt{256} = 16$ palmi.

Il segmento AE è lungo:

$AE = AB - BE = ED - BE = 20 - 16 = 4$ palmi.

L'Autore ha di nuovo utilizzato il triangolo 12-16-20.

<u>Secondo problema della lancia</u>

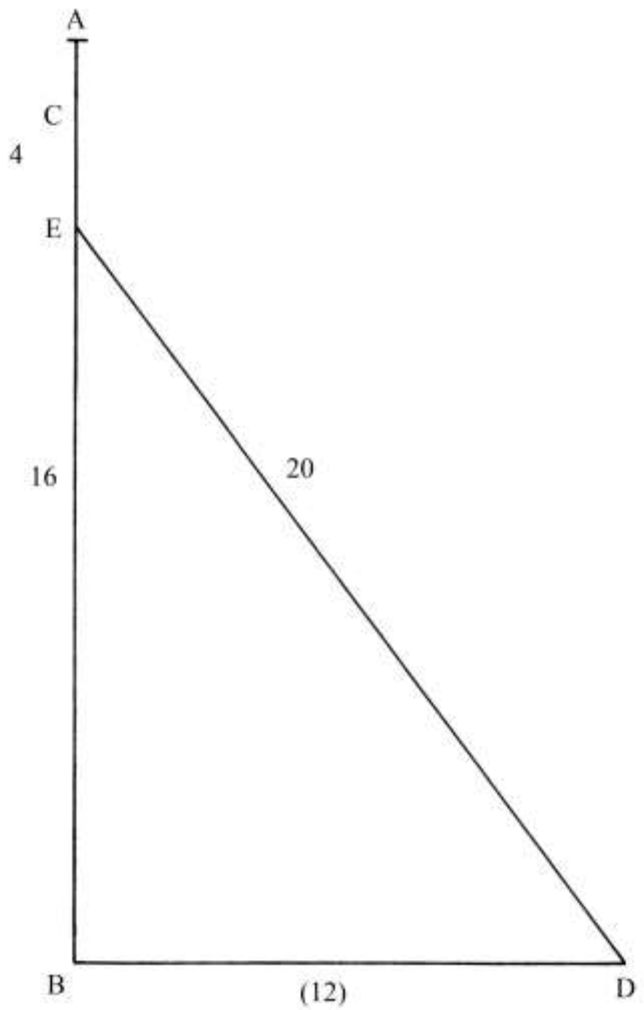
Il nuovo problema è strettamente collegato al precedente: la lancia ed è poggiata al muro.

Sono note la sua lunghezza, DE = 20 palmi, e quelle di AE = 4 e di EB = 16 palmi.

Il problema chiede di calcolare la lunghezza di BD:

$BD^2 = DE^2 - BE^2 = 20^2 - 16^2 = 400 - 256 = 144$, da cui

$BD = \sqrt{144} = 12$ palmi.



Due lance

Due lance, CD e AB, sono lunghe rispettivamente 30 e 24 palmi e sono collocate verticalmente e parallele a una distanza di 7 palmi.

La lancia CD ruota in senso orario intorno all'estremo C fino ad appoggiarsi sul vertice A della lancia AB.

Il problema chiede di calcolare la lunghezza del tratto sporgente AE della lancia CD.

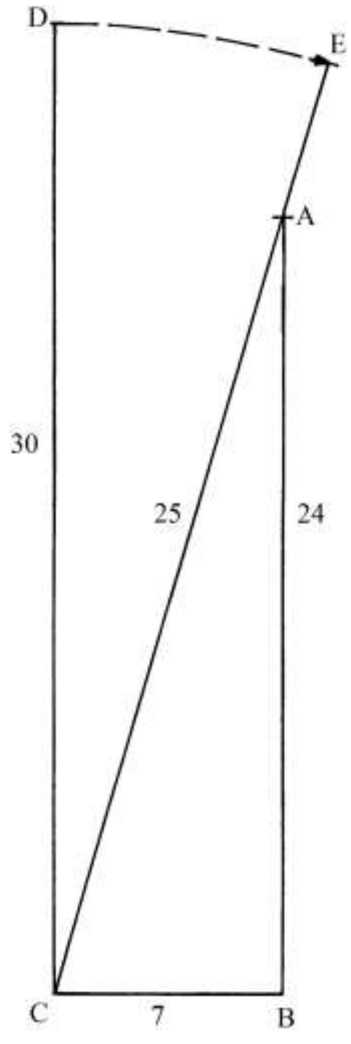
ACB è un triangolo rettangolo di cui sono note le lunghezze dei due cateti CB e AB e deve essere calcolata quella dell'ipotenusa CA. Essa è data da:

$CA^2 = CB^2 + AB^2 = 7^2 + 24^2 = 49 + 576 = 625$, da cui

$CA = \sqrt{(625)} = 25$ palmi.

La lunghezza di AE è:

$AE = CE – CA = CD – CA = 30 – 25 = 5$ palmi.

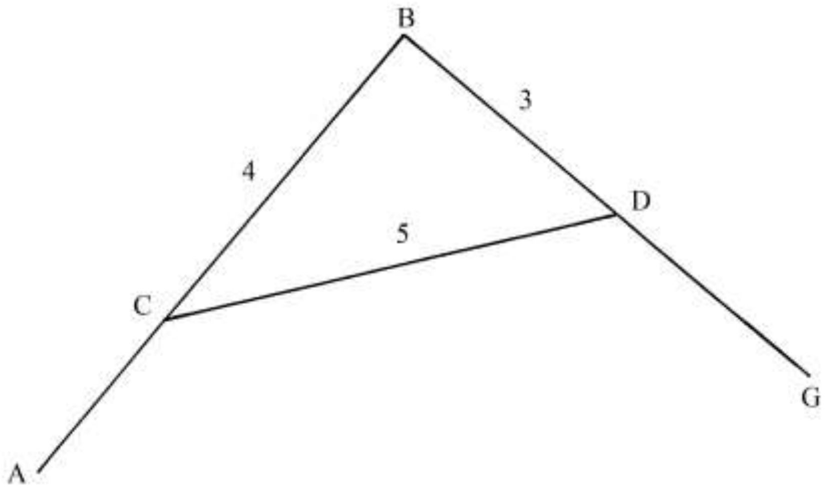


<u>Angoli retti</u>

Un angolo è delimitato da due segmenti uscenti dallo stesso vertice B: sono BA e BG. Il problema chiede di verificare se l'angolo ABG è *retto*.

L'autore propone l'uso di due canne lunghe 4 e 3 palmi da posizionare a partire da B sui due lati dell'angolo.

Collegare i punti C e D e misurare CD: se esso è lungo 5 palmi l'angolo ABG è retto.

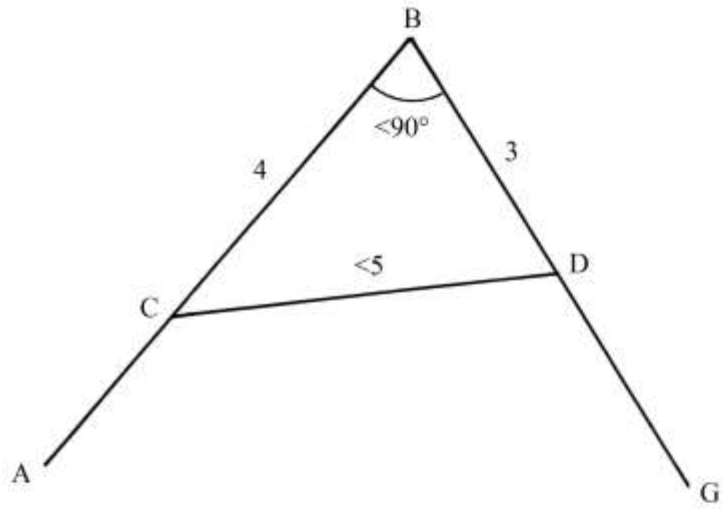


L'Autore ha implicitamente applicato il teorema cosiddetto di Pitagora:

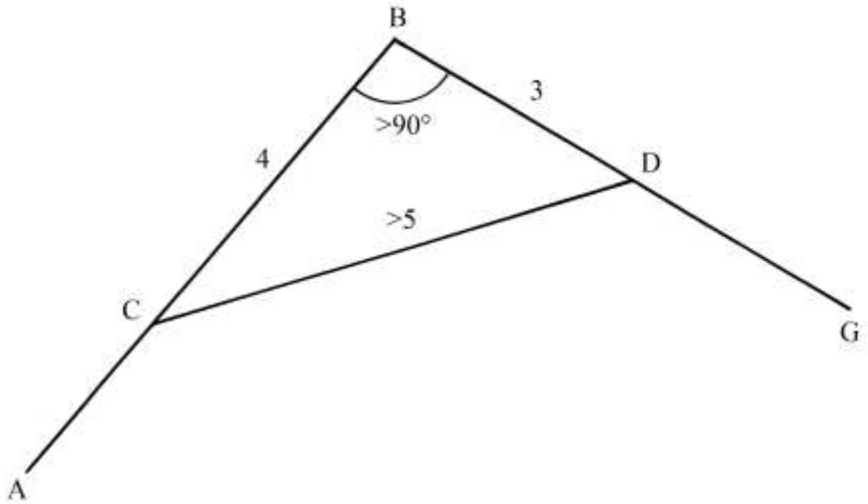
$CD^2 = BC^2 + BD^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$, da cui

$CD = \sqrt{25} = 5$ palmi.

Se CD è più corto di 5 palmi, l'angolo ABG è acuto:

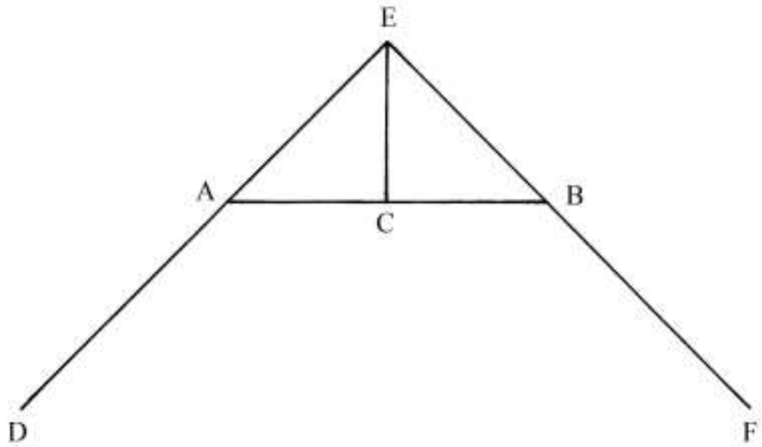


Infine se CD è più lungo di 5 palmi, l'angolo ABG è ottuso:



%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Un altro caso è mostrato in figura:



Un angolo è definito dai segmenti ED e EF, entrambi uscenti dal vertice E.

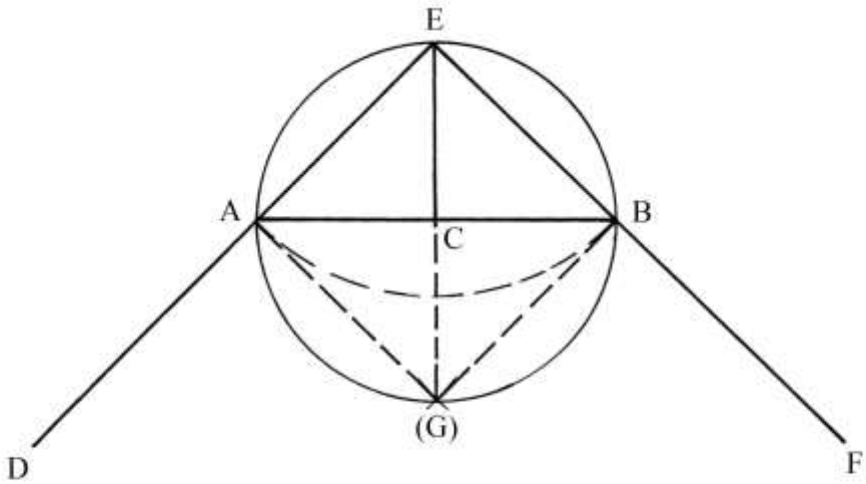
Deve essere verificato se l'angolo DEF è retto.

Posizionare una pertica o una canna a cavallo dei due lati dell'angolo su due punti scelti a piacere, ma a condizione che valga l'uguaglianza EA = EB.

Tracciare il segmento AB e determinare il suo punto medio C.

Disegnare EC: se la lunghezza è uguale a quella dei segmenti AC e CB, allora l'angolo AEB è retto.

Approfondiamo il caso:



Prolungare verso il basso il segmento EC. Fare centro in C e con apertura CA=CB=CE tracciare una circonferenza che taglia in (G) il prolungamento.

AEB(G) è un quadrato inscritto nel cerchio, AB e E(G) sono le sue diagonali e EC è una semidiagonale.

AE, EB, B(G) e (G)A sono i quattro lati del quadrato che fra loro formano angoli retti, fra i quali vi è quello AEB o DEF.

Triangoli acutangoli

L'Autore usa il triangolo 13-14-15 per dimostrare alcuni concetti attinenti alla geometria piana.

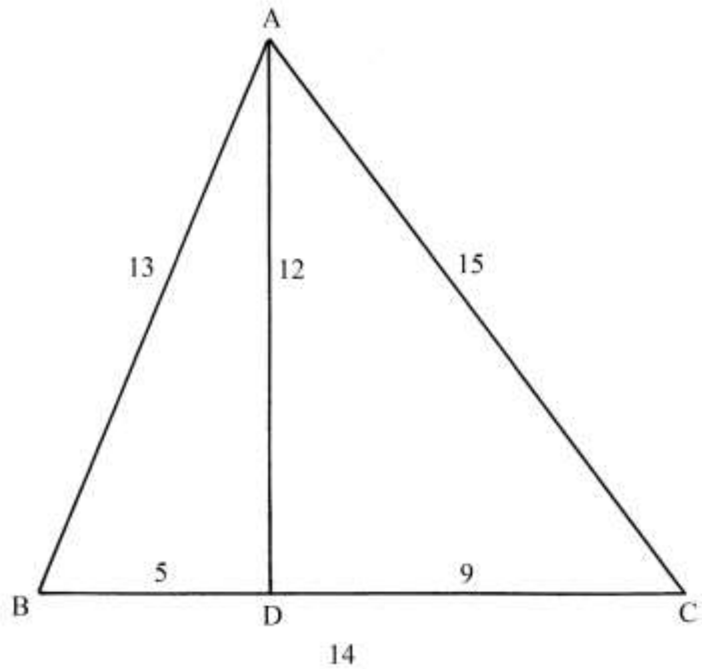
Questo triangolo presenta numerose proprietà: la lunghezza dei suoi lati, il perimetro (e il semiperimetro), l'altezza relativa al lato lungo 14 unità e l'area sono grandezze espresse da numeri interi.

Probabilmente il primo Autore a studiare a fondo le sue proprietà fu Erone di Alessandria (I secolo d.C.).

Altri Autori si interessarono o utilizzarono questo triangolo:

- Marco Terenzio Varrone (116 – 27 a.C.);
- i Gromatici *Marcus Iunius Nipsus* (II secolo d.C.) e Epafrodito (II – III secolo);
- Boezio;
- forse Gerberto;
- Leonardo Fibonacci (*Practica Geometrie)*;
- Piero della Francesca, nel *Trattato d'abaco* (fogli 80 *recto*, 80 *verso*, 81 *recto*-a, 81 *verso*, 82 *recto*);
- Giorgio Valla (1447 – 1500) nel "*De expetendis et fugiendis rebus opus*", pubblicato a Venezia nel 1501;
- Niccolò Fontana, detto Tartaglia (circa 1499 – 1557).

Il triangolo studiato nel Volgarizzamento ha le dimensioni dei lati espresse in *pertiche*:



Per determinare le lunghezze delle proiezioni di AB (BD) e di AC (DC) sul lato orizzontale BC e dell'altezza AD (relativa alla base BC), l'Autore impiega una procedura che contiene i seguenti passi:

* moltiplicare la lunghezza di AB per sé stessa: AB^2 =13*13 = 169;
* moltiplicare la lunghezza di BC per sé stessa: BC^2 = 14*14 = 196;
* sommare AB^2 e BC^2: 169 + 196 = 365;
* moltiplicare la lunghezza di AC per sé stessa: AC^2 = 15*15 = 225;
* sottrarre AC^2 dalla somma di (AB^2 + BC^2): 365 – 225 = 140;
* dividere per 2: 140/2 = 70;
* dividere per la lunghezza di BC: 70/14 = 5 pertiche, lunghezza di BD;
* sottrarre la lunghezza di BD da quella di BC: BC – BD = DC =14 – 5 = 9 pertiche;
* moltiplicare la lunghezza di BD per sé stessa: BD^2 = 5*5 = 25;
* sottrarre BD^2 da AB^2: (AB^2 – BD^2) = (169 – 25) = 144;
* estrarre la radice quadrata: √(144) = 12 pertiche, lunghezza di AD;
* dividere per 2 la lunghezza del lato BC: 14/2 = 7;
* moltiplicare per la lunghezza di AD: AD * (BC/2) = 12*7 = 84 pert.super., area del triangolo ABC.

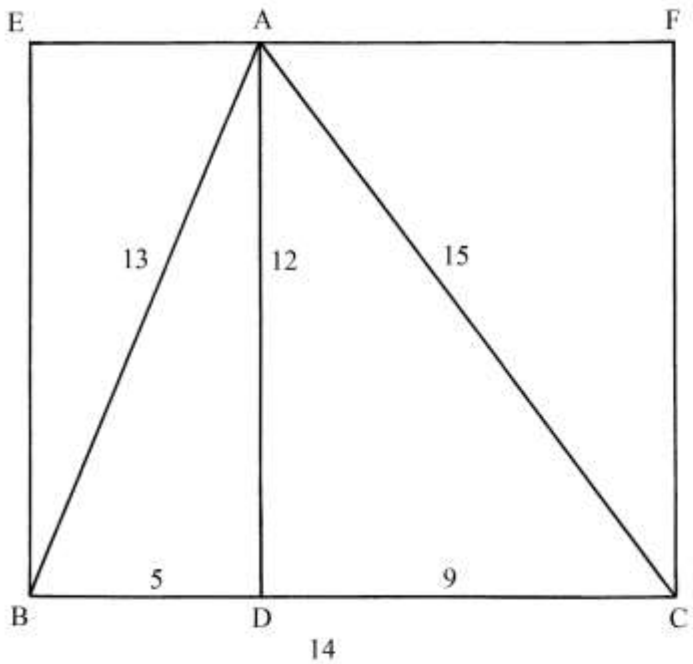
La conversione delle 84 pertiche superficiali è:

84 pert.super. = 1 staioro + 18 pert.super. = 1 staioro + 3 panora + (4 + ½) soldi.

L'Autore fornisce un risultato leggermente diverso:

1 staioro + 3 panora + *(7 + ½) soldi*.

Da notare che nel manoscritto il triangolo ABC viene poi inscritto in un rettangolo BCFE che la lunghezza uguale a quella della base BC e larghezza uguale all'altezza AD: il triangolo ABC ha area uguale a metà di quella del rettangolo.

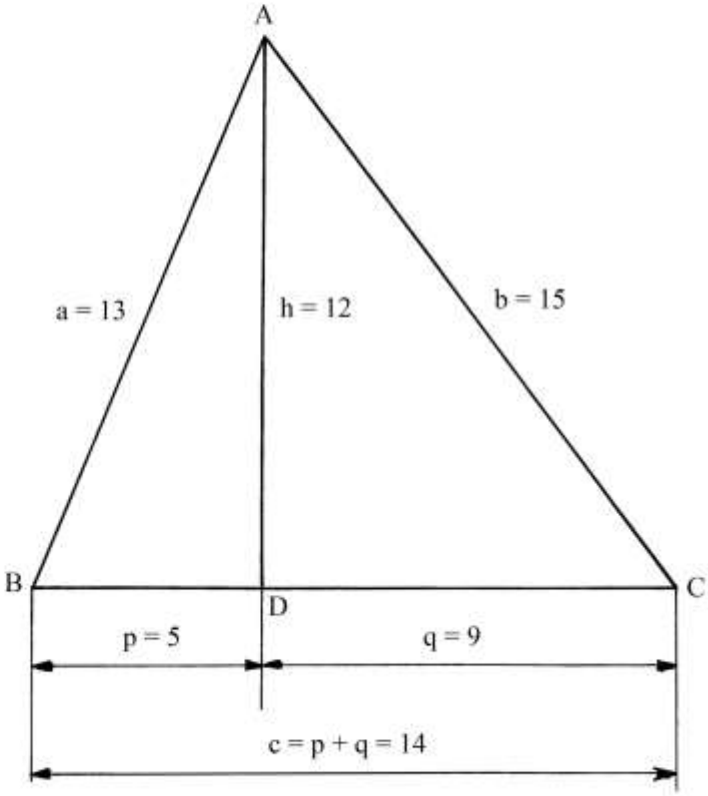


- APPROFONDIMENTO -

La procedura usata dall'anonimo Autore richiede un approfondimento.

Nella figura che segue i lati hanno le seguenti lunghezze:

- AB = a = 13 pertiche;
- AC = b = 15 pertiche;
- BC = c = 14 pertiche.



BD è l'altezza relativa alla base BC.

Il punto D divide il lato di base in due parti, p e q, che sono rispettivamente le *proiezioni* dei lati AB e AC:

$$BC = BD + DC \quad \leftrightarrow \quad c = p + q$$

Applicando il teorema di Pitagora ai due triangoli rettangoli BAD e DAC si ha:

$$AD^2 = AB^2 - AD^2$$
$$h^2 = a^2 - p^2$$

$$AD^2 = AC^2 - DC^2$$
$$h^2 = b^2 - q^2$$

Le due formule si equivalgono:

$$a^2 - p^2 = b^2 - q^2$$

Ma $p = c - q$ e sostituendo

$$a^2 - (c - q)^2 = b^2 - q^2$$
$$a^2 - (c^2 - 2*c*q - q^2) = b^2 - q^2$$
$$a^2 - c^2 + 2*c*q - q^2 = b^2 - q^2$$
$$2*c*q = b^2 + c^2 - a^2$$

Ne consegue:

$$q = (b^2 + c^2 - a^2)/(2*c)$$

Quest'ultima è la formula trovata da Erone di Alessandria per risolvere il problema.
Sostituendo nella formula precedente i valori noti si ha:

$q = (15^2 + 14^2 – 13^2)/(2 * 14) = (225 + 196 – 169)/28 = 252/28 = 9$ pertiche.

Il valore di p è:

$p = c – q = 14 – 9 = 5$ pertiche.

La formula di Erone usata per determinare p è la seguente:

$p = (a^2 + c^2 – b^2)/(2 * c) = (13^2 + 14^2 – 15^2)/(2 * 14) = 140/28 = 5$ pertiche.

L'altezza $AD = h$ è data da:

$AD^2 = AB^2 – BD^2$.

$AD = \sqrt{(AB^2 – BD^2)} = \sqrt{(13^2 – 5^2)} = \sqrt{(169 – 25)} = \sqrt{144} = 12$ pertiche.

Chiaramente, il triangolo 13-14-15 non è rettangolo. Infatti:

$(AB^2 + BC^2) > AC^2$
$(13^2 + 14^2) > 15^2$
$(169 + 196) > 225$
$365 > 225$.

Esso fa parte di una famiglia, quella dei *triangoli di Erone*, che sono caratterizzati dal possedere lati, perimetri, area e almeno un'altezza rappresentati da numeri interi o razionali: un numero razionale è ottenuto dal rapporto fra due numeri interi, quali, ad esempio:

½ = 0,5 e 10/4 = 2,5.

Fra gli altri, sono numeri irrazionali $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π e ϕ.

Solo i triangoli isosceli e quelli scaleni possono essere triangoli di Erone. Un triangolo equilatero non può esserlo.

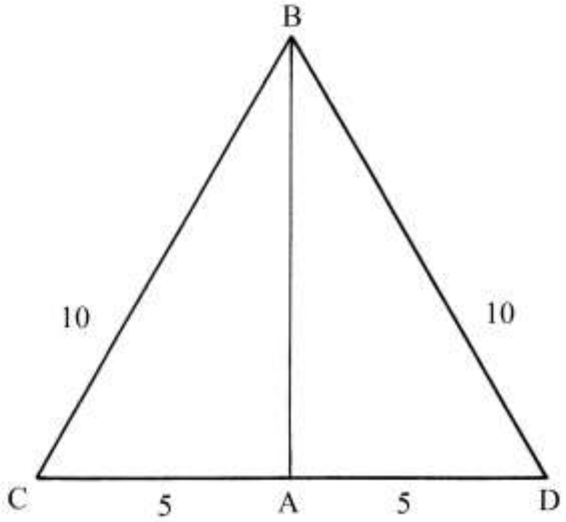
La tabella che segue elenca i primi triangoli di Erone con il lato più corto lungo fino a 17 unità. I triangoli sono indicati per lunghezza crescente del lato più corto:

Lunghezze dei lati	Area del triangolo	Tipo di triangolo
3 – 4 – 5	6	triangolo rettangolo (terna pitagorica)
3 – 25 – 26	36	scaleno
4 – 13 – 15	24	scaleno
4 – 51 – 53	90	scaleno
5 – 5 – 6	12	isoscele
5 – 5 – 8	12	isoscele
5 – 12 – 13	30	rettangolo (terna pitagorica)
5 – 29 – 30	72	scaleno
6 – 25 – 29	60	scaleno
7 – 15 – 20	42	scaleno
7 – 24 – 25	84	rettangolo (terna pitagorica)
8 – 15 – 17	60	rettangolo (terna pitagorica)
8 – 29 – 35	84	scaleno
9 – 10 – 17	36	scaleno
10 – 13 – 13	60	isoscele
10 – 17 – 21	84	scaleno
11 – 13 – 20	66	scaleno
12 – 17 – 25	90	scaleno
13 – 13 – 24	60	isoscele
13 – 14 – 15	84	scaleno
13 – 15 – 4	24	scaleno
13 – 20 – 21	126	scaleno
13 – 37 – 30	180	scaleno
13 – 37 – 40	240	scaleno
13 – 40 – 45	252	scaleno
13 – 68 – 75	390	scaleno
15 – 28 – 41	126	scaleno
15 – 34 – 35	252	scaleno
15 – 37 – 44	264	scaleno
15 – 41 – 52	234	scaleno
17 – 10 – 21	84	scaleno
17 – 25 – 26	204	scaleno
17 – 25 – 28	210	scaleno
17 – 28 – 39	210	scaleno
17 – 39 – 44	330	scaleno
17 – 55 – 60	462	scaleno

- -

Triangoli isosceli

Il problema si propone di studiare le proprietà dei triangoli isosceli, ma l'esempio presentato nella figura è quello di un triangolo equilatero (che è comunque anche isoscele):



L'altezza BA relativa alla base di un qualsiasi triangolo isoscele cade sempre nel punto medio, A, del lato (CD) che congiunge gli estremi dei due lati obliqui – BC e BD – che hanno uguale lunghezza. Le dimensioni della base CD non influiscono su questa regola.

Nel caso dell'esempio, per calcolare l'area occorre determinare la lunghezza di BA. Ecco i passi della procedura:

* moltiplicare la lunghezza di CA per sé stessa: CA*CA = 5*5 = 25;
* moltiplicare la lunghezza di CD per sé stessa: CB*CB = 10*10 = 100;
* sottrarre il primo quadrato dal secondo: 100 – 25 = 75, quadrato della lunghezza di BA;
* estrarre la radice quadrata: √75 = 8,66 ≈ (8 + 2/3) pertiche, lunghezza di BA.

A questo punto, l'Autore accantona la parte frazionaria di √75 e considera solo la parte "*sana*", cioè quella intera, che è 8 pertiche, e procede con i seguenti passi:

* moltiplicare per sé stessa la lunghezza approssimata di BA: 8*8 = 64;
* sottrarre l'ultimo prodotto da 75: 75 – 64 = 11 pert.super. = 66 piedi superficiali;
* dividere per il doppio del valore approssimato per difetto di √75:
  66/(8 * 2) = 66/16 = 4 piedi superficiali + 12 denari;
* moltiplicare i 4 piedi superficiali per sé stessi: 4*4 = 16 denari + (4 denari [che valgono 12 once]);
* dividere le 12 once per il doppio di √75: 12/[(8 + 2/3)*2] = 12 (17 + 1/3) ≈ 9/13 once.

In conclusione, secondo l'Autore l'altezza BA sarebbe lunga:

BA = √75 = 8 pertiche + 3 piedi + (17 + 4/13) once.

L'area del triangolo è calcolata impiegando i quadrati:

$(\text{Area}_{CBD})^2 = CA^2 * BA^2 = 5^2 * (\sqrt{75})^2 = 25 * 75 = 1875$, da cui

$\text{Area}_{CBD} = \sqrt{(1875)} = 25 * \sqrt{3} \approx (43 + 3/10)$ pert.super. che l'Autore arrotonda a (43 + 1/3) pert.super.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

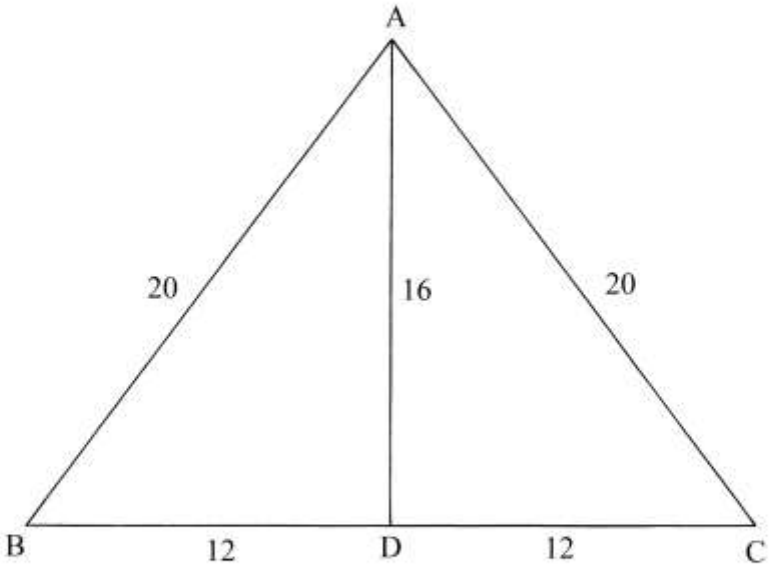
Senza citare espressamente Erone di Alessandria, l'Autore del *Volgarizzamento* applica la sua formula approssimata per il calcolo dell'area di un triangolo equilatero:

$\text{Area}_{\text{TRIANGOLO EQUILATERO}} = 13/30 * \text{lato}^2$.

Ecco i passi impiegati:
* moltiplicare la lunghezza di un lato per sé stessa: $10*10 = 100$;
* moltiplicare per 13: $100*13 = 1300$;
* dividere per 30: $1300/30 \approx (43 + 1/3)$ pert.super., area del triangolo equilatero BCD.

Area di un triangolo isoscele

Un triangolo isoscele ha la forma e le dimensioni dei lati, in pertiche, riportate sulla figura:



Per calcolare la sua area occorre determinare l'altezza AD. Dato che il triangolo è isoscele, l'altezza AD cade nel punto medio di BC.

Essa divide il triangolo ABC in due triangoli rettangoli ABD e ADC che hanno uguali dimensioni.

La lunghezza di AD è data da:

$AD^2 = AB^2 – BD^2 = 20^2 – (24/2)^2 = 20^2 – 12^2 = 400 – 144 = 256$ e

$AD = \sqrt{(256)} = 16$ pertiche.

È opportuno notare che le lunghezze dei due triangoli rettangoli formano terne derivate – 12-16-20 – dalla terna primitiva 3-4-5 e ciò all'evidente scopo di semplificare i calcoli.

L'area del triangolo ABC è:

$Area_{ABC} = AD * BD = 16 * (24/2) = 16 * 12 = 192$ pert.super.

La conversione dà i seguenti risultati:

192 pert.super. = 192/66 staiora = 2 staiora + 60 pert.super.

60/(5 + ½) panora = 10 panora + 5 pert.super.

5 pert.super. = 15 soldi.

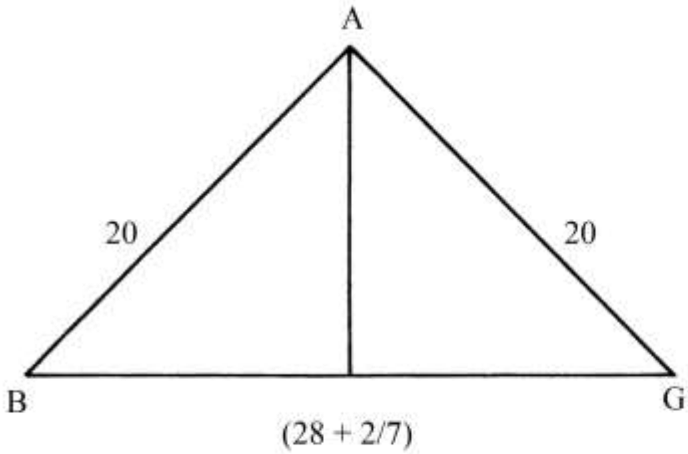
L'area di ABC è: 2 staiora + 10 panora + 15 soldi.

Un altro triangolo isoscele

Il triangolo è isoscele e il lato più lungo, la base BG, ha lunghezza legata da una relazione ben definita con quelle dei due lati obliqui:

$BG^2 = AB^2 + AG^2$

Tutto ciò è dovuto al fatto che l'angolo BAG è retto e il triangolo è anche rettangolo.



Risulta:

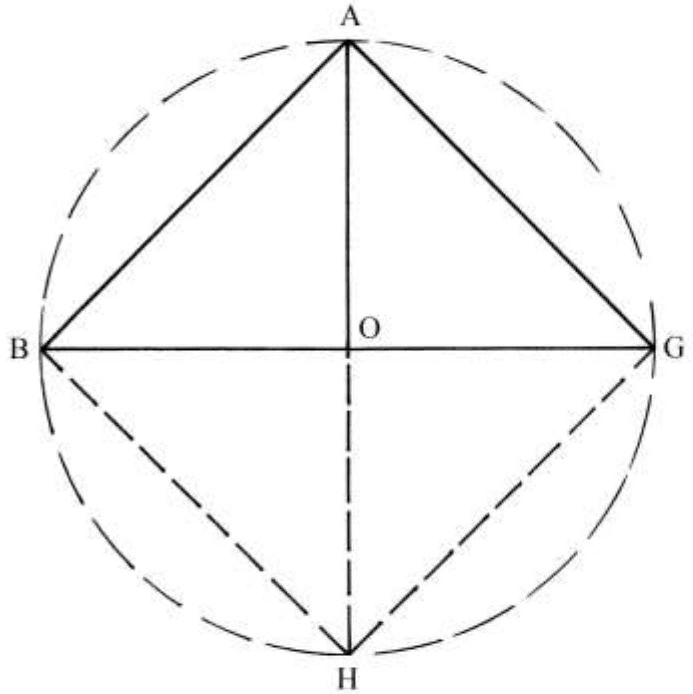
$BG^2 = 20^2 + 20^2 = 400 + 400 = 800$ e

$BG = \sqrt{(800)} \approx (28 + 2/7)$ pertiche.

Il rapporto esistente fra la lunghezza di BG e quella dei due lati obliqui è:

$BG/AB = (\sqrt{800})/20 = \sqrt{(800/400)} = \sqrt{2}$.

Ne consegue che BG è la diagonale di un quadrato, ABHG nella figura:



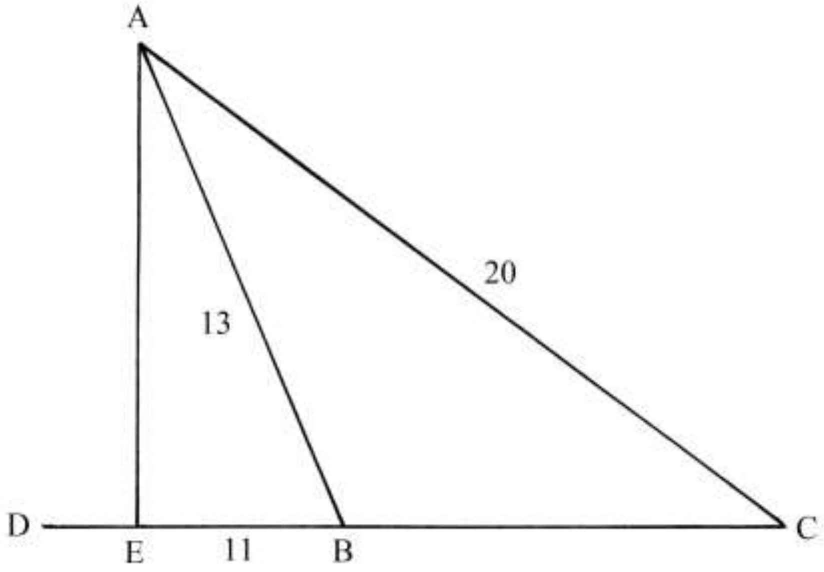
L'area del triangolo ABG è data da:

Area $_{ABG}$ = (AB * AG)/2 = (20 * 20)/2 = 200 pert.super.

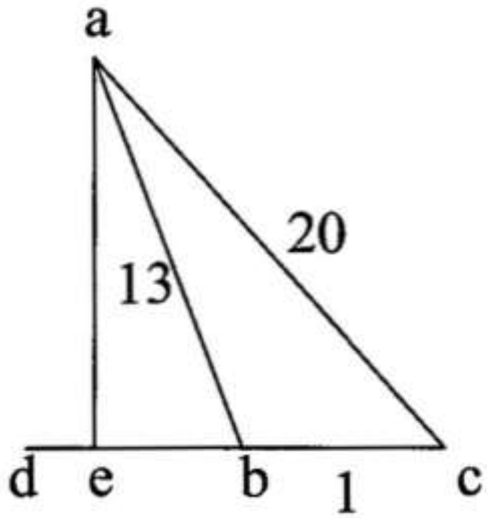
La soluzione del problema si conclude senza la conversione delle pertiche superficiali nei multipli.

Triangolo ottusangolo

Il triangolo ABC è scaleno e ottusangolo perché l'angolo in B è più ampio di 90°:



Il disegno originale contiene un errore che non è stato corretto o segnalato nel testo del Feola: il lato BC è lungo 11 pertiche e non 1.



Invece, nel testo la lunghezza di BC è correttamente indicata in 11 pertiche.

Per calcolare l'area del triangolo ABC occorre conoscere una sua altezza, ad esempio quella relativa al lato BC.

Prolungare verso sinistra il lato BC e dal vertice A abbassare la perpendicolare verso la retta orizzontale: è determinato il punto E. AE è l'altezza cercata.

AEC e AEB sono due triangoli rettangoli che hanno in comune il cateto AE.

Le lunghezze di AE e di EB sono incognite: occorre calcolare per prima la lunghezza di AE per poi ricavare quella di EB.

La procedura impiegata contiene i seguenti passi:

* elevare al quadrato le lunghezze dei tre lati di ABC:
  * $AC^2 = 20^2 = 400$;
  * $AB^2 = 13^2 = 169$;
  * $BC^2 = 11^2 = 121$;
* sottrarre da AC^2 sia AB^2 che BC^2: 400 – 169 – 121 = 110;
* dividere per 2: 110/2 = 55;
* dividere per la lunghezza di BC: 55/11 = 5 pertiche, lunghezza di EB;

* elevare al quadrato la lunghezza di EB: $EB^2 = 5^2 = 25$;
* sottrarre la quadrato di AB: $AB^2 – ED^2 = 169 – 25 = 144$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{144} = 12$ pertiche, lunghezza di AE.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

La soluzione può essere spiegata in maniera dettagliata come è fatto qui di seguito.
$AE^2 = AC^2 – EC^2 = AC^2 – (EB + BC)^2$
$AE^2 = AB^2 - EB^2$
Uguagliando le due espressioni si ha:
$20^2 – (ED + 11)^2 = 13^2 EB^2$
Indicando con *X* il valore incognito di EB si ottiene:
$400 – (X + 11)^2 - 13^2 + X^2 = 0$
$400 – X^2 – 22*X – 121 – 169 + X^2 = 0$
$110 = 22*X$ e $X = 110/22 = 5$ pertiche, lunghezza di EB.

Il triangolo rettangolo BEA ha lati lunghi 5, 12 e 13 pertiche, numeri che formano la *seconda terna primitiva*.

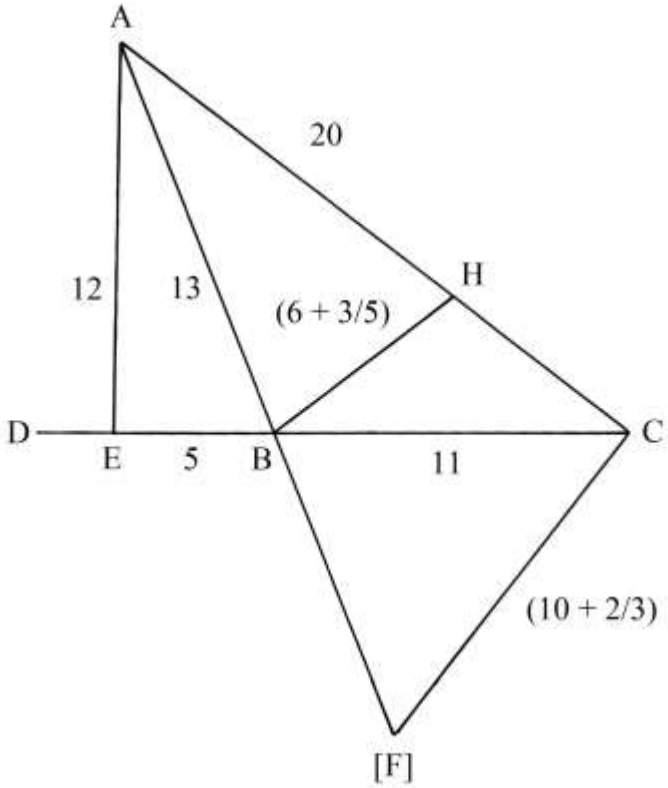
In molti altri esempi, l'Autore utilizza terne primitive e terne derivate dalle prime: il suo fine è chiaro: semplificare i calcoli.

L'area del triangolo ABC è:

$Area_{ABC} = BC * AE/2 = 11 * 12/2 = 66$ pert.super., che equivalgono a 1 staioro.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Lo schema che segue è costruito sul precedente. Prolungare verso il basso il lato AB e dal vertice C condurre la perpendicolare al prolungamento di AB fino a stabilire il punto [F]:



Il triangolo AC[F] è rettangolo.

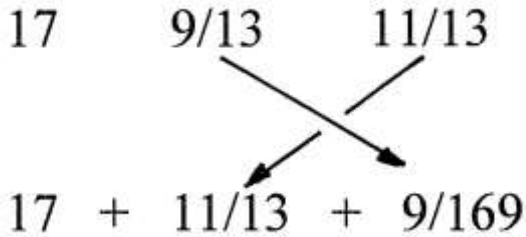
Il punto H è fissato a distanza da A uguale alla lunghezza del lato AB:

AH = HB = 13 pertiche.

Il triangolo ABH è isoscele.

Le lunghezze dei lati generati dalla trasformazione del triangolo ABC sono ricavate con una procedura che contiene questi passi:

* dividere il risultato già calcolato in precedenza di $(AC^2 - AB^2 - BC^2)/2 = 55$ per la lunghezza di AB: $55/13 = (4 + 3/13)$;
* elevare al quadrato: $(4 + 3/13)^2 = (55/13)^2 = 3025/169 = (17 + 11/13 + 9/169)$
  [il numero misto appena calcolato è scritto nel manoscritto in forma diversa:
  "17 9/13 11/13", senza gli operatori come è consuetudine e con le frazioni ordinate in senso crescente, quindi 9/13 sta per "$9/(13)^2$" ed è scritta per prima, quasi che la scrittura e la lettura procedessero *anche* da destra verso sinistra:



];
* sottrarre dal quadrato di BC, $BC^2 = 11^2 = 121$:
  $121 - (17 + 11/13 + 9/169) = (103 + 11/13 + 9/169)$ quadrato della lunghezza del cateto C[F];
* estrarre la radice quadrata dell'ultima espressione. Per effettuare questa operazione, l'Autore impiega la seguente procedura:
  * moltiplicare 103 per 13: $103 * 13 = 1339$;
  * aggiungere "1": $1339 + 1 = 1340$;

*	moltiplicare per 13:	1340 * 13 = 17420;
*	aggiungere 4:	17420 + 4 = 17424;
*	estrarre la radice quadrata:	$\sqrt{(17424)}$ = 132;
*	dividere per 13:	132/13 = (10 + 2/13) pertiche, lunghezza del cateto C[F] [l'Autore dà nel testo un diverso risultato (10 + 3/13) ma sulla figura è scritta la misura corretta].

L'area del triangolo rettangolo AC[F] è calcolata con la formula:

Area $_{AC[F]}$ = C[F] * (AB/2) = (10 + 2/3) * (13/2) = (69 + 1/3) pert.super.

L'Autore fornisce un risultato differente: 66 pert.super., valore uguale a quello calcolato per l'area di ABC.

L'Autore calcola poi con un altro metodo la lunghezza di C[F]:

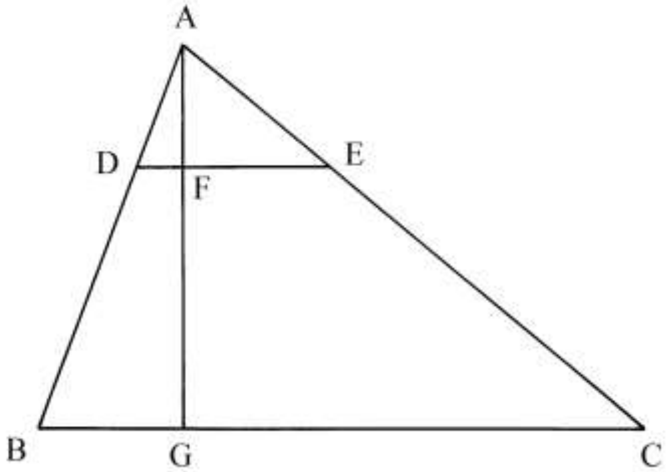
*	moltiplicare le lunghezze di AE e di BC:	AE*BC = 12*11 = 132;
*	dividere per la lunghezza di AB:	132/13 = (10 + 2/13) pertiche, lunghezza del cateto C[F].

Infine, determina la lunghezza del lato BH:

*	moltiplicare le lunghezze di AE e di BC:	AE*BC = 12*11 = 132;
*	dividere per la lunghezza di AC:	132/20 = (6 + 3/5) pertiche, lunghezza di BH.

<u>Triangoli scaleni</u>

Per procedere al calcolo dell'area di un triangolo scaleno è necessario procedere alla misura delle lunghezze dei lati:



Il lato BC, orizzontale, è il più lungo ed è seguito da quello AC e da AB che è il più corto.

L'Autore consiglia di misurare l'altezza AG che è quella relativa al lato più lungo: l'area è facilmente calcolata moltiplicando la lunghezza di AG per quella di BC e dividendo il risultato per due.

Se il campo da misurare è grande oppure non è facile verificare la posizione del punto G (come è il caso dei vigneti e terreni arborati), viene proposta una semplice soluzione che sfrutta la similitudine fra i triangoli.

Misurare le lunghezze dei tre lati esprimendole in pertiche. A partire dal vertice A misurare due lunghezze e fissare due punti sui lati obliqui, D e E, rispettando le proporzioni:

AB : AD = 1 pertica : 1 palmo

AC : AE = 1 pertica : 1 palmo.

Ricordando che 1 palmo vale 4/10 (o 2/5) di una pertica lineare, le precedenti proporzioni divengono:

AB : AD = 1 : 2/5

AC : AE = 1 : 2/5.

I triangoli ABC e ADE sono simili e quindi valgono le due seguenti proporzioni:

BC : DE = 1 : 2/5

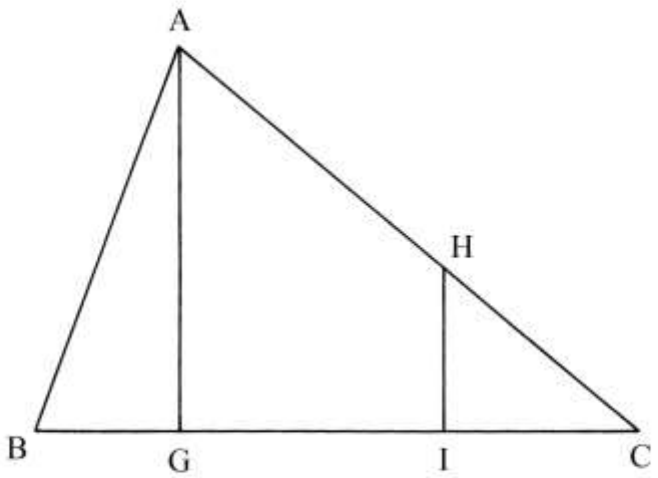
AG : AF = 1 : 2/5.

Conoscendo la lunghezza di AF perché misurata, è facilmente calcolabile quella di AG:

AG : AF = 1 : 2/5, da cui

AG = AF * 1/(2/5) = 5/2 * AF.

Alla carta *15 verso* è presentato un secondo metodo per la determinazione dell'altezza AG. Nel testo non è però inserito alcuno schema e quello che segue è una ricostruzione:



Questa seconda soluzione chiede di tracciare una parallela all'altezza AG: è HI.

I triangoli AGC e HIC sono rettangoli e simili.

Vale la proporzione:

AG : HI = AC : HC.

Conoscendo le lunghezze di HI, AC e HC è possibile ricavare quella di AG:

AG = (HI * AC)/HC.

Applicando il teorema cosiddetto di Pitagora è facile calcolare in successione le lunghezze di IC e di GC.

Infine, la lunghezza del cateto BG è data da:

$BG = \sqrt{(AB^2 - AG^2)}$.

ALTRI QUADRILATERI

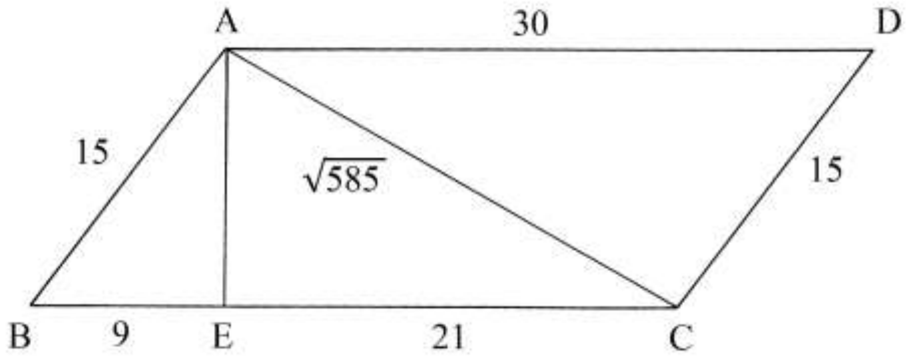
Prima di presentare gli esempi di quadrilateri delle diverse tipologie, l'Autore premette una loro sommaria ripartizione in quattro famiglie:

1. I quadrati.
2. I *ronboidi* che hanno lati di uguale lunghezza, paralleli due a due, e senza alcun angolo retto.
3. I poligoni che hanno solo due lati paralleli e uno dei due è più lungo dell'altro. Questa famiglia è definita con l'espressione *capo talliato* o *tagl(i)ato* e cioè trapezio.
4. Infine, sono compresi in questa famiglia tutti gli altri quadrilateri che l'Autore chiama *trapezi* o *mensule*.

I quadrilateri sono oggi classificati diversamente da quanto accadeva nel Medioevo.

Area di un parallelogramma

ABCD è un parallelogramma che ha lati con le lunghezze espresse in pertiche e scritte sulla figura:



L'area del quadrilatero può essere calcolata solo conoscendo l'altezza AE.

Disegnare l'altezza AE e la diagonale AC (un *diametro*).

AE viene misurata e risulta lunga 12 pertiche.

L'area è data da:

$$\text{Area}_{ABCD} = BC * AE = 30 * 12 = 360 \text{ pert.super.}$$

Il problema chiede di calcolare la lunghezza della diagonale AC. Essa è l'ipotenusa del triangolo rettangolo AEC. Occorre determinare la lunghezza del cateto EC:

$$EC = BC – BE = 30 – BE.$$

La lunghezza di BE non è inizialmente conosciuta: questo segmento è un cateto del triangolo rettangolo ABE di cui sono note le lunghezze dell'ipotenusa AB e del cateto AE per cui si ha:

$$BE^2 = AB^2 – AE^2 = 15^2 – 12^2 = 225 – 144 = 81 \text{ e}$$

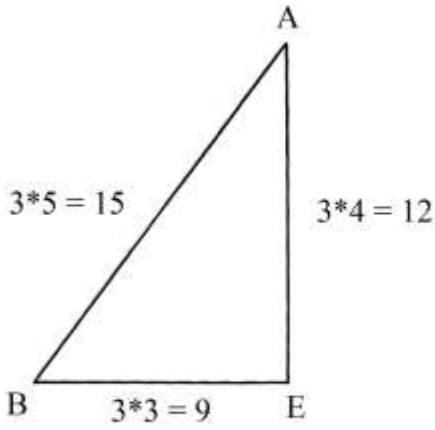
$$BE = \sqrt{81} = 9 \text{ pertiche.}$$

Ne consegue: $EC = 30 – 9 = 21$ pertiche.

La diagonale AC è lunga:

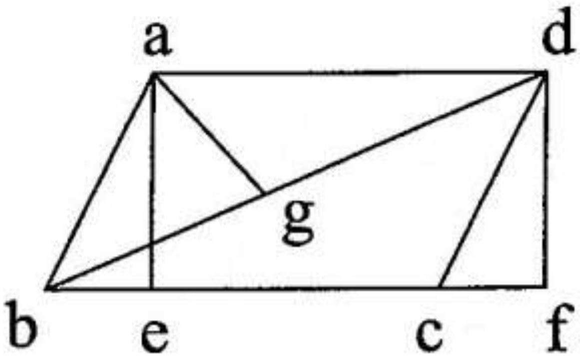
$$AC^2 = AE^2 + ED^2 = 12^2 + 21^2 = 144 + 441 = 585 \quad \text{e} \quad AC = \sqrt{585} \text{ pertiche.}$$

Il triangolo rettangolo ABE ha lati lunghi 9, 12 e 15 pertiche: questi numeri formano una terna derivata da quella primitiva 3-4-5:



La diagonale BD divide il parallelogramma ABCD in due triangoli scaleni di uguali dimensioni: BAD e BDC.

L'Autore determina l'area del triangolo BAD tracciando l'altezza AG relativa alla diagonale BD: nell'originale l'altezza AG non è disegnata correttamente:



L'area del triangolo BAD è:

$$\text{Area}_{ABD} = AG*BD/2.$$

L'area dell'intero parallelogramma è anche data da:

$$\text{Area}_{ABCD} = 2 * \text{Area}_{ABD} = AG * BD.$$

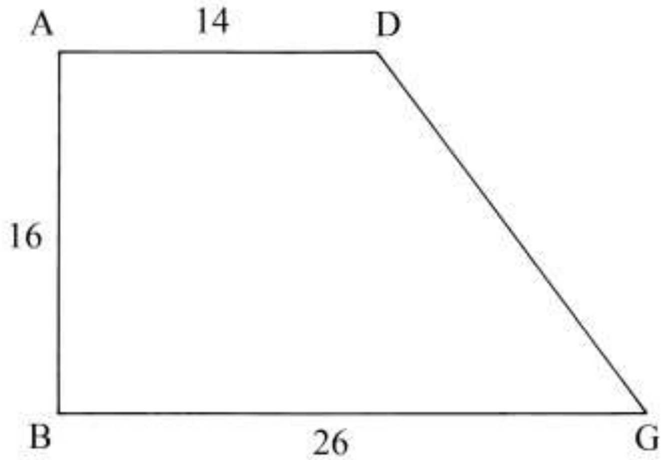
I QUADRILATERI DELLA TERZA FAMIGLIA

L'Autore colloca in questa famiglia *cinque* tipi diversi di quadrilateri:

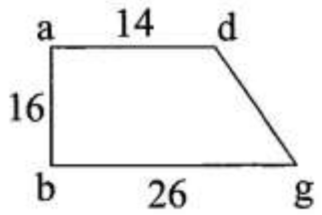
a) Mezzo capo tagliato.
b) Capo tagliato.
c) Diversamente capo tagliato.
d) Capo decrinante.
e) Pesce.

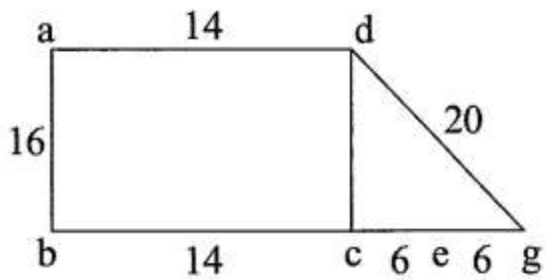
Trapezio rettangolo

Un trapezio rettangolo è presentato nello schema che segue con le dimensioni in pertiche scritte sui lati: è un quadrilatero definito come *mezzo capo tagliato*.



Le due figure relative a questo problema, contenute nel manoscritto, sono entrambe fuori scala:





L'area è correttamente calcolata con la formula:

Area $_{ABGD}$ = AB * (AD + BG)/2 = 16 * (14 + 26)/2 = 16 * 20 = 320 pert.super.

- APPROFONDIMENTO -

<u>Scomposizione di ABGD</u>

Il trapezio è scomponibile in due poligoni:

* il rettangolo ABCD;
* il triangolo rettangolo DCG.

Non è nota la lunghezza dell'ipotenusa DG: essa è ricavata da:

$DG^2 = DC^2 + CG^2 = DC^2 + (BG – AD)^2 = 16^2 + (26 – 14)^2 = 16^2 + 12^2 =$
$= 256 + 144 = 400$, da cui $DG = \sqrt{400} = 20$ pertiche.

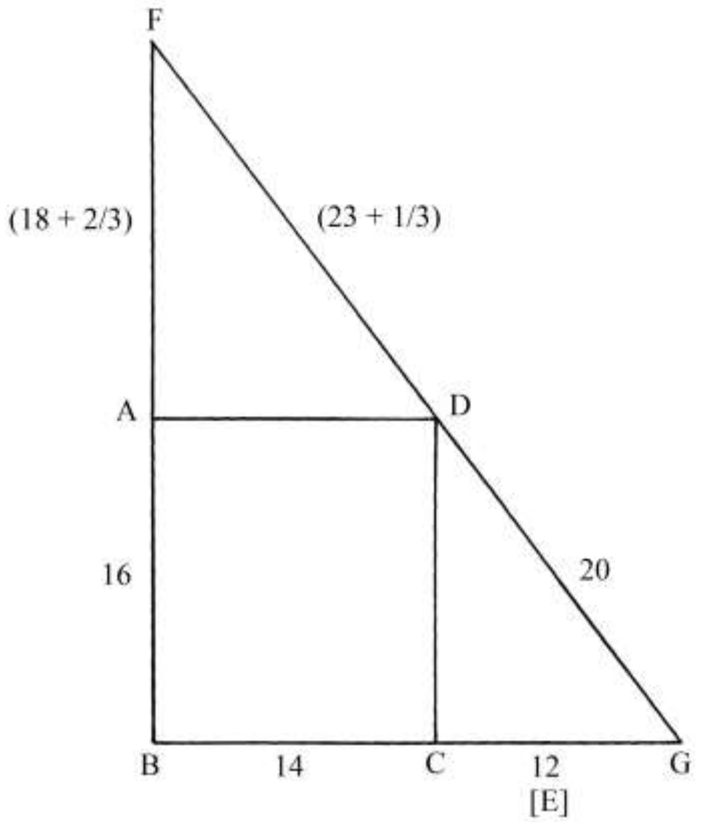
Il triangolo DCG ha lati lunghi secondo una terna derivata da quella primitiva 3-4-5.

- -

<u>Trapezio e triangolo rettangolo</u>

Il trapezio del precedente problema deriva da un triangolo rettangolo tagliato con una linea parallela alla base BG e passante per i punti A e D.

Il problema chiede di calcolare le lunghezze dei lati della parte asportata e cioè AF e DF.



Prolungare verso l'alto il cateto AB e l'ipotenusa DG: i due segmenti si incontrano nel punto F. BFG è un triangolo rettangolo.

I triangoli AFD e CDG sono rettangoli e simili, come lo è anche BFG.

Vale la proporzione:

AD : AF = CG : CD da cui

AF = (AD * CD)/CG = (14 * 16)/12 = (18 + 2/3) pertiche.

Infine, si ha:

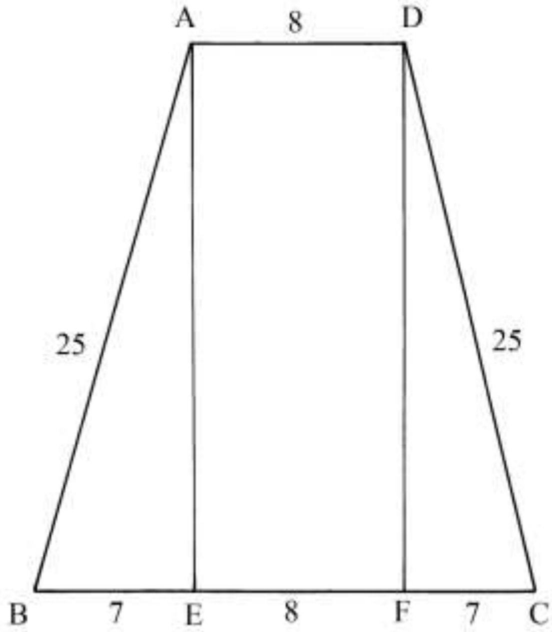
GD : DF = CG : AD da cui

DF = (GD * AD)/CG = (20 * 14)/12 = (23 + 1/3) pertiche.

Trapezio isoscele

Questo trapezio è un quadrilatero *capo tagliato* e rientra nel gruppo del secondo tipo.

I quattro lati hanno le dimensioni in pertiche scritte sulla figura:



Deve essere calcolata l'area.

Dai vertici A e D sono tracciate le altezze AE e DF: esse originano i triangoli rettangoli ABE e DFC che hanno uguali dimensioni.

I segmenti BE e FC hanno uguale lunghezza che è 7 pertiche.

L'altezza AE è lunga:

$AE^2 = AB^2 – BE^2 = 25^2 – 7^2 = 625 – 49 = 576$ da cui

$AE = \sqrt{576} = 24$ pertiche.

I triangoli ABE e DFC hanno lati lunghi 7-24-25 pertiche, numeri che formano la terza terna primitiva.

L'area del trapezio è:

$\text{Area}_{ABCD} = AE * BF = 24 * (7 + 8) = 360$ pert.super.

La conversione dà il seguente risultato:

360 pert.super. = 360/66 staiora = 5 staiora + 30 pert.super. =
= 5 staiora + 30/(5 + ½) panora = 5 staiora + 5 panora + (7 + ½) soldi.

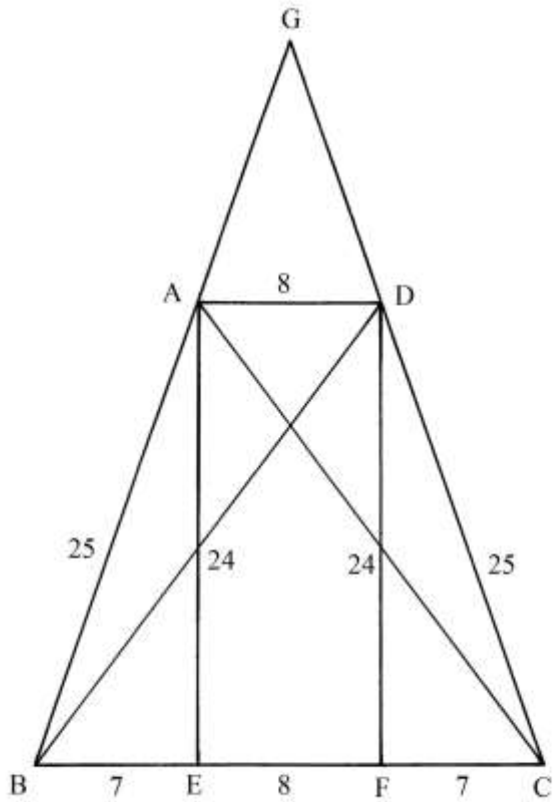
Nota

La formula usata per calcolare l'area utilizza la lunghezza di BF: questo segmento è lungo quanto la media aritmetica delle lunghezze delle due basi:

$(AD + BC)/2 = (AD + BE + EF + FC)/2 = (8 + 7 + 8 + 7) = (15 + 15)/2 = 15 =$
$= BE + EF = BF.$

Triangolo isoscele e trapezio isoscele

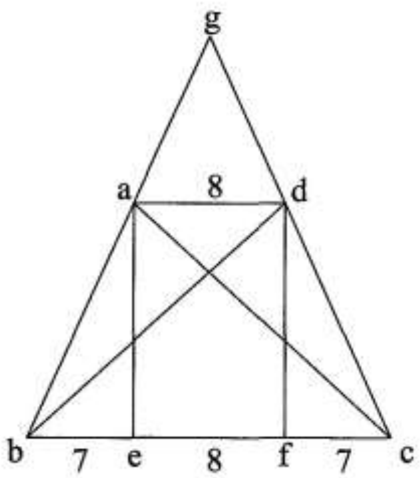
Il problema ricostruisce il triangolo isoscele da cui è derivato il trapezio isoscele dal quale è stato ricavato il trapezio isoscele esaminato nel precedente paragrafo.



Prolungare verso l'alto i lati BA e CD fino a farli intersecare in un punto, il vertice G. Il trapezio isoscele ABCD deriva dal sezionamento del triangolo isoscele GBC lungo la linea AD.

Il problema chiede di calcolare la lunghezza dei segmenti GA = GB e quella delle diagonali AC e BD.

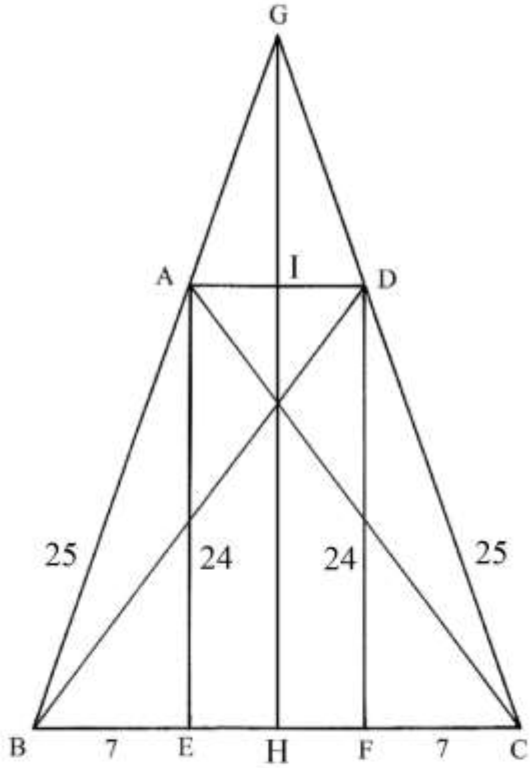
Il disegno originale è fuori scala, come è mostrato da un semplice confronto sulla figura fra le lunghezze di BE = FC = 7 e EF = 8:



Per calcolare la lunghezza di AG (e di DG) l'Autore utilizza una soluzione un po' contorta che è qui semplificata:

* sottrarre la lunghezza di AD da quella di BC: BC – AD = 22 – 8 = 14 pertiche;
* applicare la proporzione
  (BC – AD) : AD = 14 : 8 = 7 : 4
  AG : AB = AD : (BC – AD) da cui
  AG = (AB * AD)/(BC – AD) = (25 * 8)/14 = 200/14 = (14 + 2/7) pertiche.

Dal vertice G tracciare l'altezza relativa alla base BC: essa cade nel punto medio H e taglia AD in I.



I triangoli ABE e GAI sono simili per cui vale la proporzione:

AB : AG = BH : AI   da cui

AG = (AB * AI)/BH = (25 * 4)/7 = 100/7 = (14 + 2/7) pertiche: è così verificata la correttezza della procedura seguita dall'Autore.

Negli schemi sono disegnate le due diagonali (*diametri* per l'Autore) del trapezio ABCD: esse sono AC e BD e hanno uguale lunghezza perché il poligono è isoscele.

AC è l'ipotenusa del triangolo rettangolo AEC e la sua lunghezza è data da:

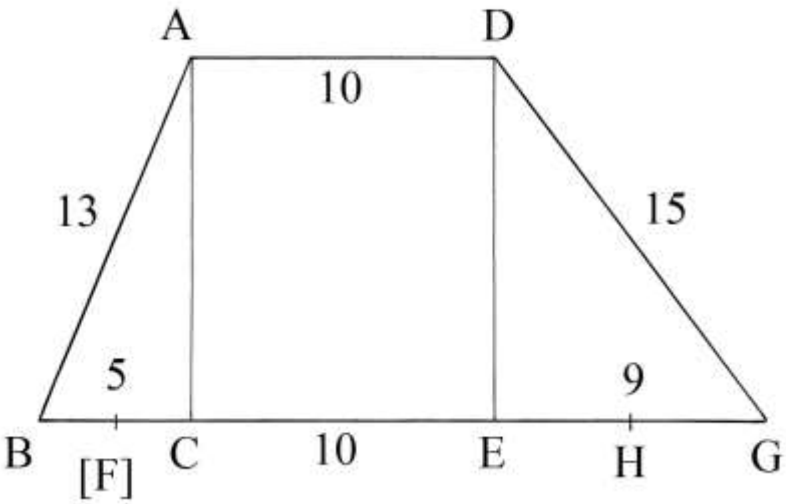
$AC^2 = AE^2 + EC^2 = 24^2 + (8 + 7)^2 = 576 + 225 = 801$ e

$AC = \sqrt{801}$ pertiche.

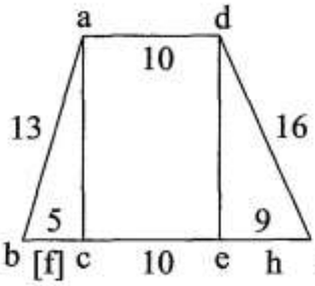
Trapezio scaleno

Il trapezio della figura è *scaleno* e fa parte del terzo tipo dei quadrilateri della terza famiglia: è *diversamente capo tagliato*.

Le dimensioni riportate sullo schema sono espresse in pertiche.



La figura originale contiene un errore, non corretto: la lunghezza del lato DG non è 16 ma 15 pertiche:



AC e DE sono le due altezze del trapezio che hanno uguale lunghezza dato che le basi AD e BG sono parallele.

La lunghezza di AC è data da:

$AC^2 = AB^2 – BC^2 = 13^2 – 5^2 = 169 – 25 = 144$ e $AC = \sqrt{144} = 12$ pertiche.

Il triangolo ABC ha lati lunghi quanto i componenti della seconda terna primitiva: 5-12-13.

Anche DE è lungo 12 pertiche, come è dimostrato dall'Autore:

$DE^2 = DG^2 – EG^2 = 15^2 – 9^2 = 225 – 81 = 144$ e $DE = \sqrt{144} = 12$ pertiche.

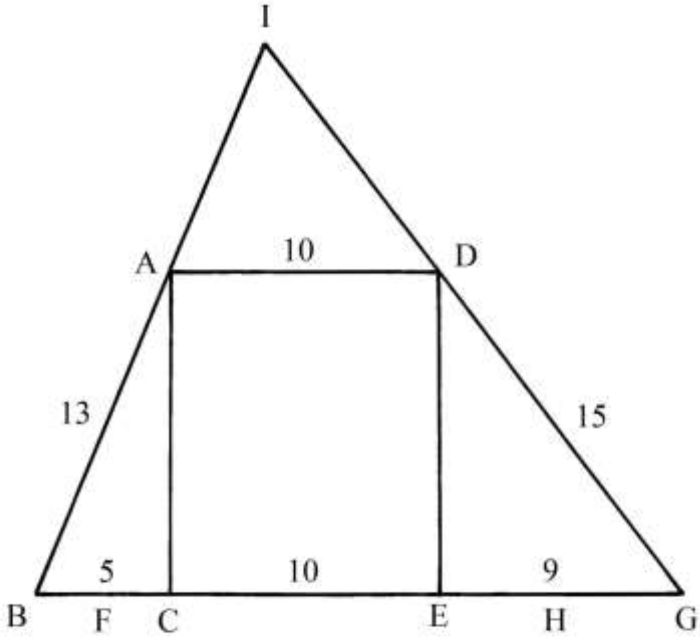
Il triangolo DEG è rettangolo e i suoi lati sono lunghi 9, 12 e 15 pertiche e cioè formano una terna derivata da quella primitiva 3-4-5.

L'area del trapezio è calcolata correttamente:

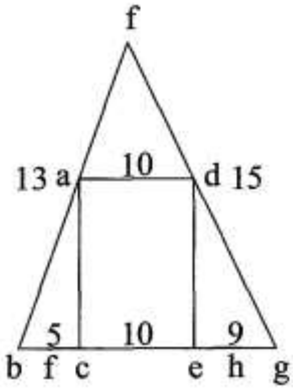
$Area_{ABGD} = AE * (AD + BG)/2 = 12 * (10 + 24)/2 = 12 * 17 = 204$ pert.super.

%%%%%%%%%%%%%%%%

Il trapezio ABGD deriva da un triangolo scaleno definito dal prolungamento verso l'alto dei lati BA e GD:



Il grafico contenuto nel manoscritto corregge l’errore relativo alla lunghezza di DG, 15 pertiche invece di 16, ma commette un altro errore: al vertice superiore del triangolo scaleno è assegnata la lettera “f”, già impiegata per il punto medio di “bc”.



Qui è stata assegnata al vertice la lettera maiuscola “I”.

L’analisi di questo trapezio e del triangolo da cui esso proviene si conclude con il calcolo delle lunghezze dei lati AI e DI:

* AI = (CE * AB)/(BC + EG) = (10 * 13)/(5 + 9) = 130/14 = (9 + 2/7) pertiche;
* DI = (CE * GD)/(BC + EG) = (10 * 15)/(5 + 9) = 150/14 = (10 + 5/7) pertiche.

La soluzione adottata dall’Autore utilizza la similitudine dei triangoli:

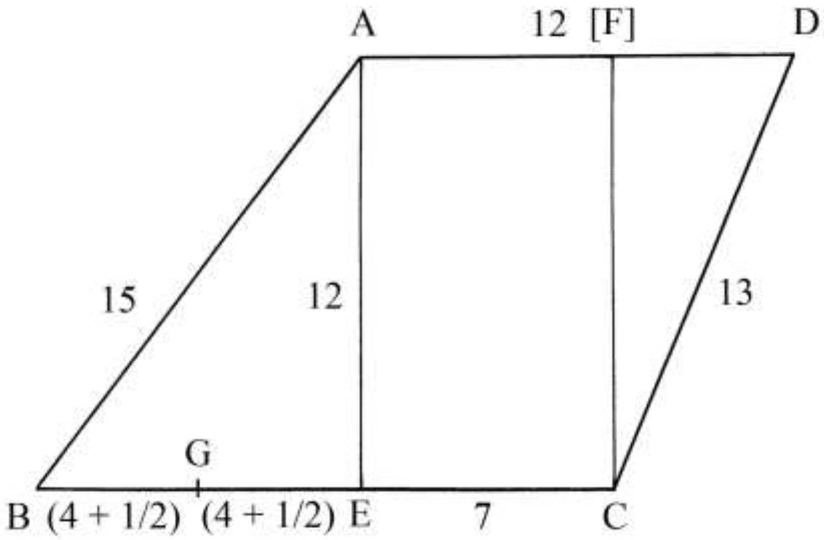
AI : BI = AD : BG
AI : (AI + AB) = AD + BG
AI : (AI + 13) = 10 : 24
24 * AI = 10 * AI + 130
14 * AI = 130
AI = 130/14 = (9 + 2/7) pertiche e

DI : GI = AD : BG
DI : (DI + GD) = AD : BG
DI : (DI + 15) = 10 : 24

$24 * DI = 10 * DI + 150$
$14 * DI = 150$
$DI = 150/14 = (10 + 5/7)$ pertiche.

Trapezio scaleno

L'Autore chiama il trapezio della figura *capo decrinante* o *declinante*:



Tracciando le due altezze AE e [F]C il trapezio è suddiviso in tre poligoni:

* il triangolo rettangolo ABE;
* il rettangolo AEC[F];
* il triangolo rettangolo [F]CD.

L'altezza AE è data da:

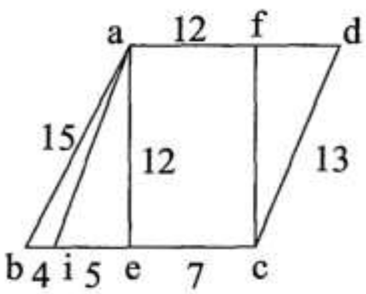
$AE^2 = AB^2 – BE^2 = 15^2 – 9^2 = 225 – 81 = 144$ e $AE = \sqrt{144} = 12$ pertiche.

L'area del trapezio è correttamente calcolata moltiplicando la semisomma delle basi per l'altezza:

$\text{Area}_{ABCD} = [AD + BC)/2] * AE = [(12 + 16)/2] * 12 = 14 * 12 = 168$ pert.super.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

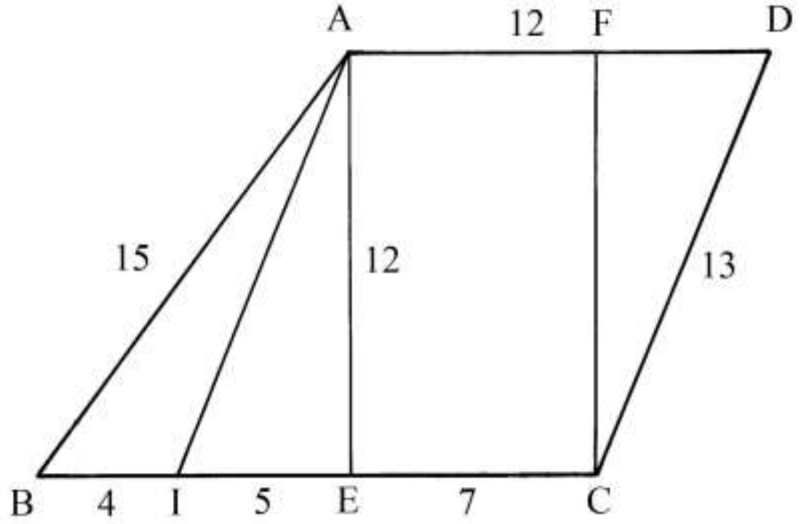
L'Autore procede a una successiva costruzione:



Sottrae la lunghezza di AD da quella di BC:

$BC – AD = 16 – 12 = 4$ pertiche.

Poi misura 4 pertiche a partire dal vertice B sulla base BC verso destra e fissa il punto I:



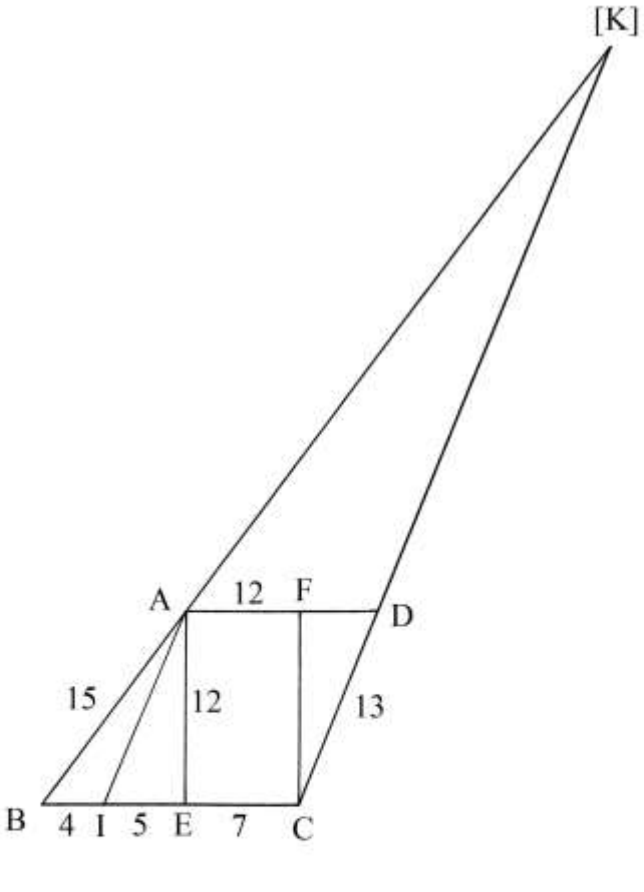
Per effetto di queste operazioni, IC e AD hanno la stessa lunghezza, 12 pertiche, e i lati AI e DC risultano fra loro paralleli: ne consegue che ADCI è un parallelogramma.

I triangoli rettangoli AIE e CFD hanno uguali dimensioni e l'ipotenusa AI è lunga quanto DC e cioè 13 pertiche: infatti

$$AI^2 = AE^2 + IE^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169 \quad \text{e} \quad AI = \sqrt{169} = 13 \text{ pertiche.}$$

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

L'Autore ricostruisce il triangolo da cui è derivato il trapezio ABCD prolungando verso l'alto i lati BA e CD: essi si intersecano in un punto, K.



Il problema chiede le lunghezze di A[K] e di D[K]. L'Autore utilizza la similitudine fra i triangoli B[K]C A[K]D:

B[K] : A[K] = BC : AD

Usando la simbologia moderna e chiamando X la lunghezza di A[K] si ha:

(AB + X) : X = BC : AD
(15 + X) : X = 16 : 12
12 * (15 + X) = 16 * X
180 + 12 * X = 16 * X
180 = 4 * X   e   X = 45 pertiche.

Invece, l'Autore introduce un'altra proporzione:

AB : A[K] = BI : IC. In questa proporzione vi è una relazione fra il terzo e il quarto termine che vale:

BI : IC = 4 : 12 = 1 : 3, per cui nella precedente proporzione si ottiene:
AB : A[K] = 1 : 3   e
A[K] = AB * 3/1 = 15 * 3 = 45 pertiche.

Infine, vale la proporzione

AB : A[K] = CD : D[K]
D[K] = A[K] * CD/AB = 45 * 13/15 = 39 pertiche.

Le lunghezze dei segmenti B[K], AB e A[K] sono legate da rapporti aritmetici:

B[K] = 60,   BA = 15   e   A[K] = 45, quindi
B[K] = 4 * AB   e   A[K] = 3 * AB.

Gli stessi rapporti valgono per i tre segmenti C[K], CD e D[K]:

C[K] = 52,   CD = 13   e   D[K] = 39, quindi
C[K] = 4 * D[K]   e   D[K] = 3 * CD.

Il quadrato della lunghezza di B[K] sta al quadrato di quella di A[K] come segue:

$(B[K])^2 : (A[K])^2 = 4*(A[K])^2 : (A[K])^2 = 4^2 : 1 = 16 : 1.$

Il quadrato della lunghezza di A[K] sta al quadrato di quella di AB come

$(A[K])^2 : AB^2 = (3 * AB)^2 : AB^2 = 9 : 1.$

Le aree dei triangoli B[K]C e A[K]D stanno fra loro come segue:

$\text{Area}_{B[K]C} : \text{Area}_{A[K]D} = 16 : 9.$

Infine, l'Autore stabilisce una relazione fra le aree di ABCD e di [K]AD:

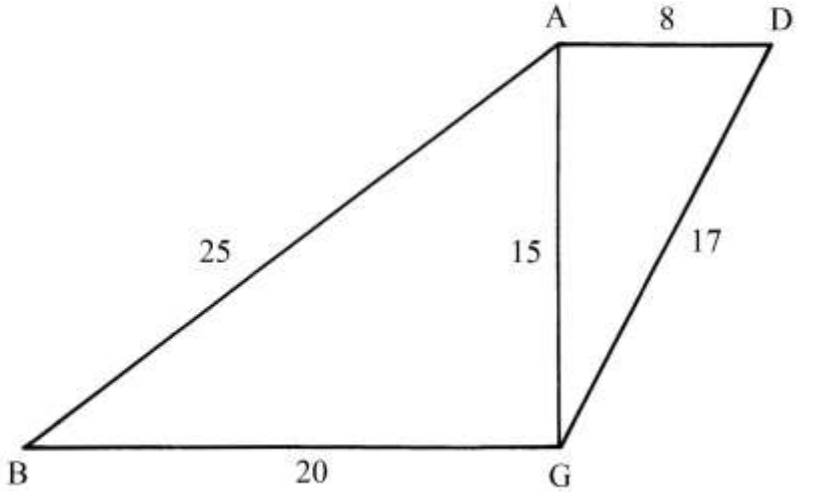
$\text{Area}_{ABCD} : \text{Area}_{[K]AD} = 7 : 9$

Da questa proporzione viene ricavata l'area di [K] AD:

$\text{Area}_{[K]AD} = \text{Area}_{ABCD} * 9/7 = 168 * 9/7 = 216$ pert.super.

PESCE O PESCIE

Un quadrilatero che ha soltanto due lati opposti paralleli è definito *pesce* o *pescie* e fa parte del *quinto tipo* della famiglia dei quadrilateri.



I lati AD e BG sono paralleli.

Il quadrilatero è scomponibile in due triangoli rettangoli:

* ABG, che ha lati lunghi 15, 20 e 25 pertiche, numeri che formano una terna derivata dalla terna primitiva 3-4-5;
* AGD: con lati lunghi 8, 15 e 17 pertiche, numeri che firmano la quarte terna primitiva.

AG, il cateto comune ai due triangoli, è anche una delle due diagonali del quadrilatero e la sua altezza relativa alla base BG.

L'area del quadrilatero è:

Area $_{ABGD}$ = AG * (AD + BG)/2 = 15 * (8 + 20)/2 = 210 pert.super.

La conversione dà il seguente risultato:

210/66 staiora = 3 staiora + 12 pert.super. = 3 staiora + 2 panora + 1 pert.super.

Nel testo è indicato un risultato leggermente diverso: 3 staiora + 2 panora + *(2 + ½) soldi*.

Ricordiamo che 1 pertica superficiale equivale a *3 soldi*.

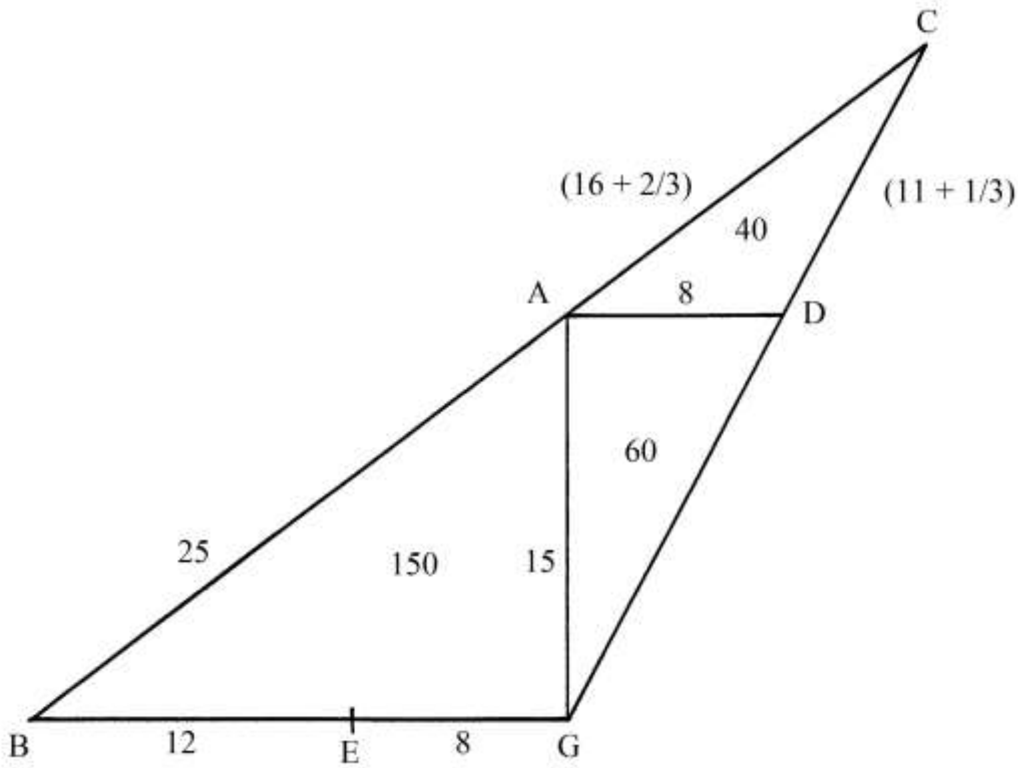
Le aree dei due triangoli che compongono il poligono ABGD valgono:

* Area $_{ABG}$ = BG * AD/2 = 20 * 15/2 150 pert.super.
* Area $_{AGD}$ = AD * AG/2 = 8 * 15/2 = 60 pert.super.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

L'Autore ricostruisce il triangolo scaleno da cui ha avuto origine il quadrilatero ABGD.

Prolungare verso l'alto i due lati BA e GD: viene determinato il vertice C.



Sulla base BG fissare il punto a distanza di 8 pertiche da G: EG = AD = 8 pertiche. Il quadrilatero ADGE è un parallelogramma con i lati opposti paralleli e di uguale lunghezza.

L'Autore utilizza una proporzione per calcolare la lunghezza di AC:

EG : AC = BE : AB   da cui:

AC = (EG * AB)/BE = (8 * 25)/12 = 200/12 = (16 + 2/3) pertiche.

Dato che i triangoli BCG e ACD sono simili, vale la seguente proporzione:

AB : AC = BG : AD, da cui

AC = AB * AD/BG = 25 * 8/12 = 200/12 = (16 + 2/3) pertiche.

Sempre sulla base di questa ultima similitudine possiamo scrivere la proporzione che segue:

AC : AB = CD : DG, da cui:

CD = AC * DG/AB = (16 + 2/3) * 17/25 = (11 + 1/3) pertiche.

Valgono le seguenti relazioni:

BC : AC = BG : AD

[25 + (16 + 1/3)] : (16 + 2/3) = 20 : 8 = 5 : 2

(41 + 1/3) : (16 + 2/3) = 5 : 2

Per calcolare l'area del triangolo ACD è impiegata una procedura:

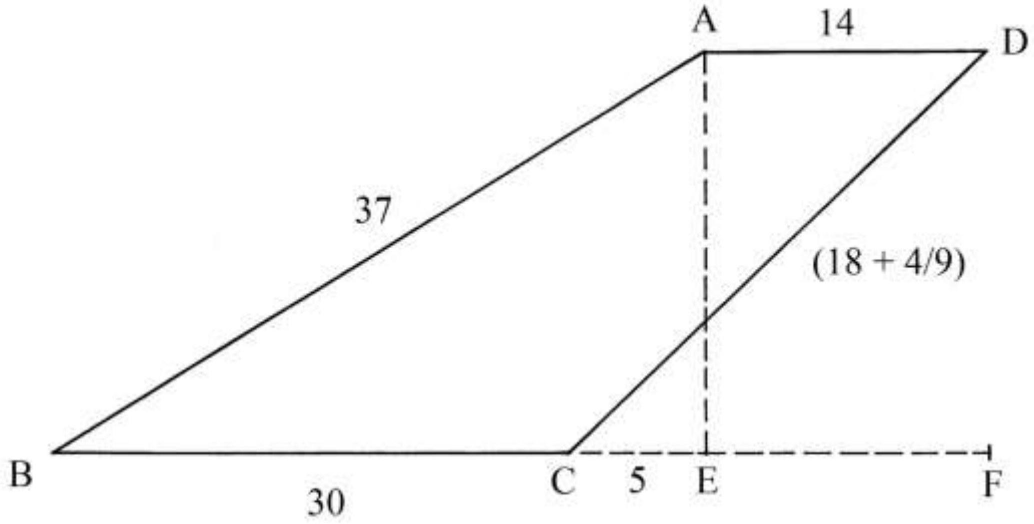
* riprendere il risultato della precedente proporzione (5 : 2) e moltiplicare il numeratore e il denominatore per sé stessi: 5*5 = 25 e 2*2 = 4;
* sottrarre 4 da 25: 25 – 4 = 21;
* moltiplicare l'area del quadrilatero ABGD per 4: 210 * 4 = 840;
* dividere per 21: 840/21 = 40 pert.super., area di ACD.

Lo stesso risultato può essere ottenuto per altra via:

* dividere l'area di ABGD per 21: 210/21 = 10;
* moltiplicare per 4: 10*4 = 40 pert.super., area di ACD.

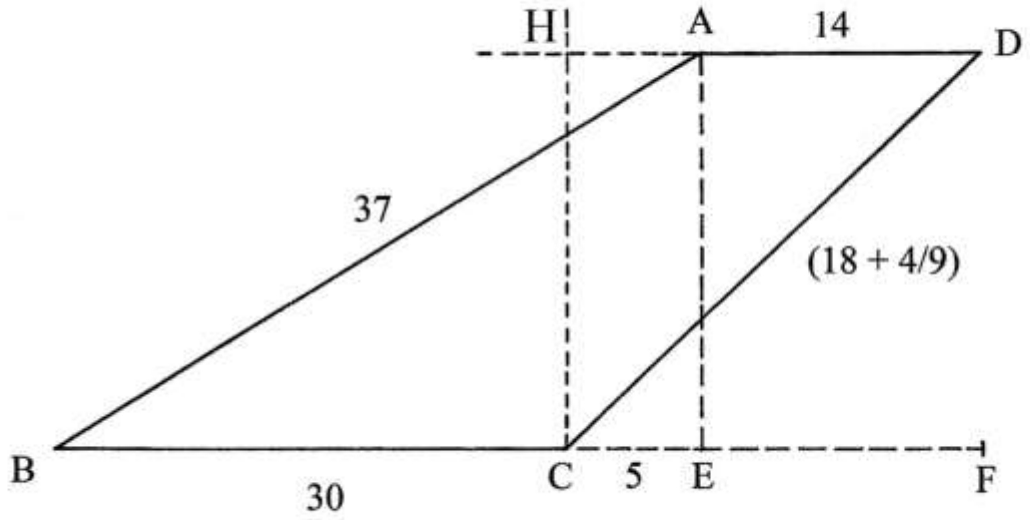
<u>Un altro quadrilatero</u>

Il quadrilatero presentato nella figura è un altro *pescie*



I lati AD e BC sono paralleli. La particolarità della figura è che l'altezza AE cade fuori del lato BC, il quale deve essere prolungato verso destra per accogliere l'altezza.

Anche innalzando l'altezza a partire da C, pure questa cadrebbe all'esterno del quadrilatero, come spiega lo schema che segue:

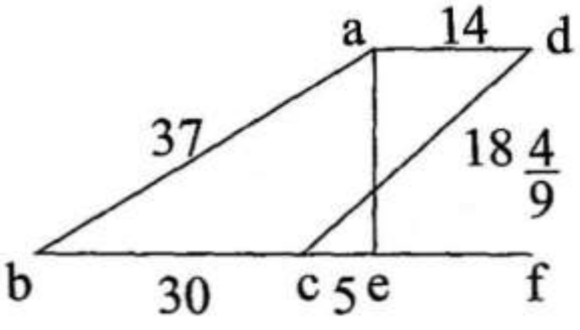


Le due altezze, AE e CH, hanno uguale lunghezza.

L'area del poligono è data da:

$$\text{Area}_{ABCD} = AE * (AD + BE)/2.$$

La figura originale dà adito a dei dubbi:



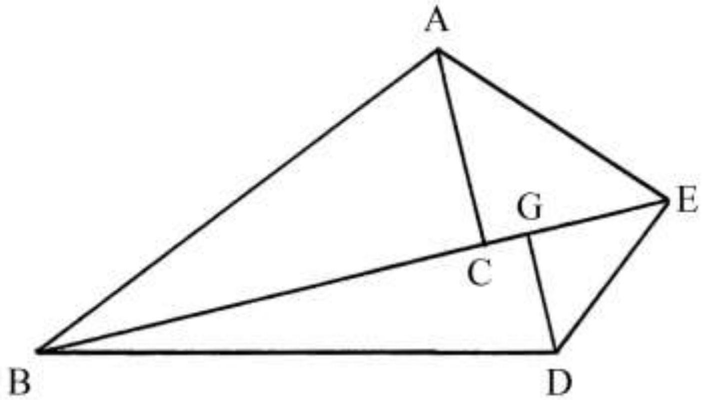
La lunghezza 30 si riferisce al solo lato BC o al segmento BE?

Il numero (18 + 4/9) è la lunghezza del lato CD o quella dell'altezza AE?

Sembra che l'esempio sia stato usato dall'Autore per presentare il metodo del tracciamento dell'altezza fuori dal perimetro del poligono.

QUARTA FAMIGLIA DEI QUADRILATERI

Il poligono mostrato nella figura è chiamato *trapezio* o *mensula*:



Con l'esempio di questo poligono inizia una serie di problemi per così dire metodologici, cioè privi di indicazioni di dimensioni.

I lati opposti di questo quadrilatero non sono paralleli e per calcolarne l'area è necessario tracciare almeno una diagonale, ad esempio quella BE, che divide il poligono in due triangoli scaleni, ABE e BDE.

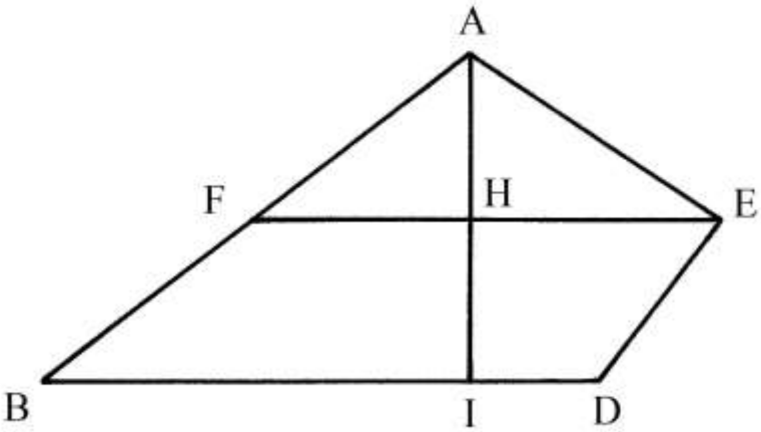
Dai vertici A e D abbassare le perpendicolari a BE: sono AC e DG, due altezze dei triangoli e relative al loro lato comune BE.

L'area del quadrilatero è:

$\text{Area}_{ABDE} = [(AC + DG)/2] * BE.$

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Un'altra soluzione del problema è mostrata nello schema che segue:



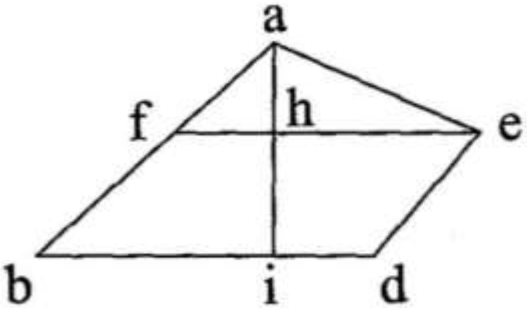
Dal punto E tracciare una parallela al lato BD. Dal vertice A abbassare la perpendicolare alla base BD: è AI.

Il quadrilatero è così scomposto in due poligoni:

*	il triangolo scaleno FAE;
*	il trapezio scaleno BFED.
L’area di ABDE è ottenuta dalla somma delle aree dei due poligoni.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

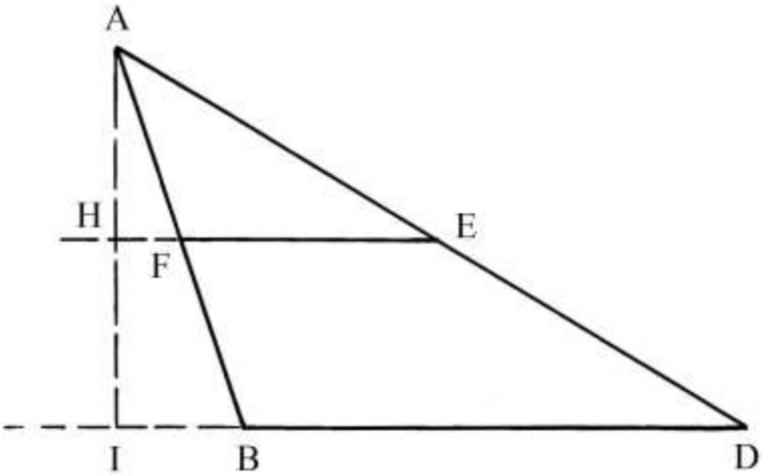
La figura contenuta nel manoscritto è riprodotta qui di seguito:



Essa è fuori scala.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Un ulteriore caso è suggerito dall’Autore, senza però presentare alcuno schema: si tratta di un triangolo che in un vertice, B in figura, abbia un ottusangolo:

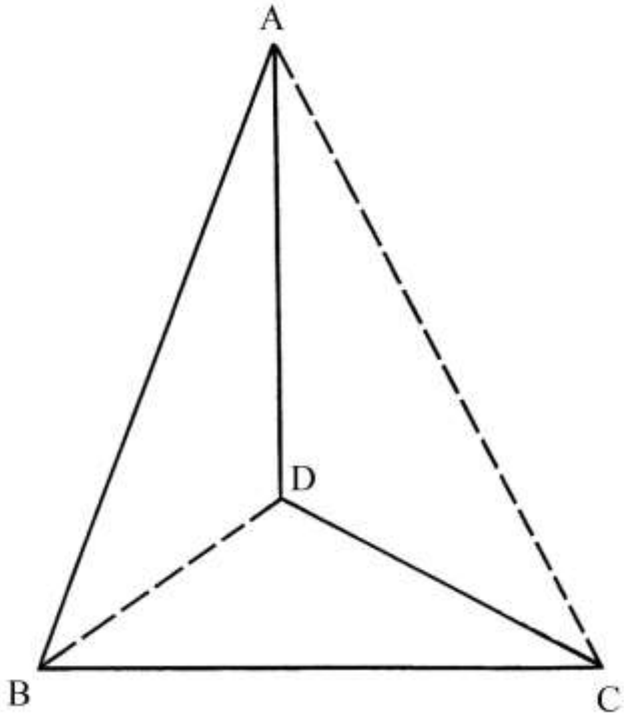


La figura è stata qui ricostruita sulla base del testo.
Per un generico punto E sul lato AD è disegnata una linea parallela alla base BD. Anche l’angolo AFE è ottuso, come quello ABD.
L’altezza AI cade sul prolungamento di BD e lo stesso accade al segmento AH che risulta esterno al triangolo AFE.

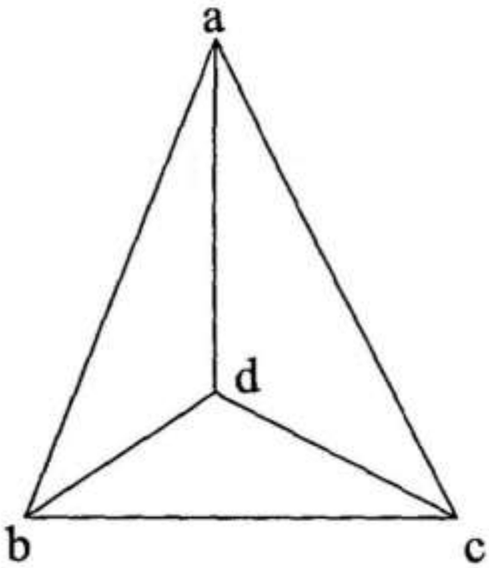
L’area del triangolo ABD è uguale alla somma delle aree del triangolo AFE e del trapezio scaleno BDEF.

<u>Quadrilatero con una diagonale esterna</u>

ABCD è un quadrilatero e BD e AC sono le sue due diagonali, qui disegnate con linee tratteggiate:



Nel disegno originale sia i lati sia le diagonali sono tracciati con lo stesso tratto continuo:



Tutto ciò può ingenerare confusione nel lettore fino a fargli scambiare la figura per un triangolo ABC, diviso in tre triangoli ABD, ADC, BDC.

L'area del quadrilatero è data dalla somma delle aree dei triangoli ABD e BDC, originati dalla tracciatura della diagonale *interna* BD: la seconda diagonale, AC, cade all'esterno.

AREA DI POLIGONI CON PIÙ DI 4 LATI

L'area di un poligono che ha più di *quattro* lati è calcolabile dopo averlo suddiviso in poligoni più semplici quali i triangoli e i quadrilateri.

A parte alcuni casi relativi al cerchio, i problemi che seguono non recano le misure dei loro lati: si tratta di esempi finalizzati alla scomposizione di queste figure in due o più parti.

Un poligono qualsiasi può essere scomposto in un numero di triangoli uguale a quello dei suoi lati meno due:

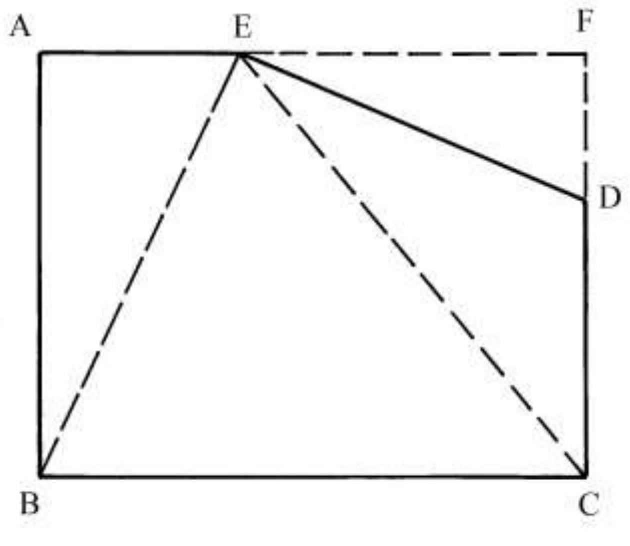
numero triangoli = numero lati poligono – 2.

La tabella che segue riassume i valori per i più semplici poligoni:

Poligoni	Numero lati	Numero triangoli
Quadrilateri	4	2
Pentagoni	5	3
Esagoni	6	4
Ettagoni	7	5
Ottagoni	8	6

Area di un pentagono

ABCDE è un pentagono non regolare:



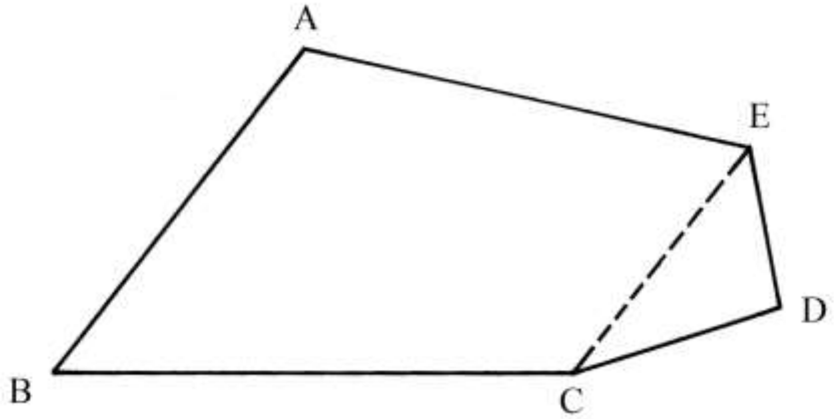
La sua area può essere calcolata dividendolo in tre triangoli per mezzo delle diagonali BE e CE: ABE, BCE e CDE.

Il poligono è divisibile anche in due sole figure utilizzando soltanto la diagonale BE: in questo caso sono creati il triangolo ABE e il quadrilatero BCDE.

Il prolungamento dei lati AE e CD fissa il punto F: il pentagono ABCDE deriva dal quadrilatero ABCF al quale è stato asportato il triangolo DEF.

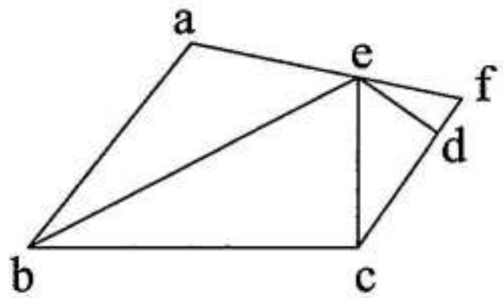
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Una variante è descritta nel testo e prevede il parallelismo fra la diagonale EC e il lato AB:



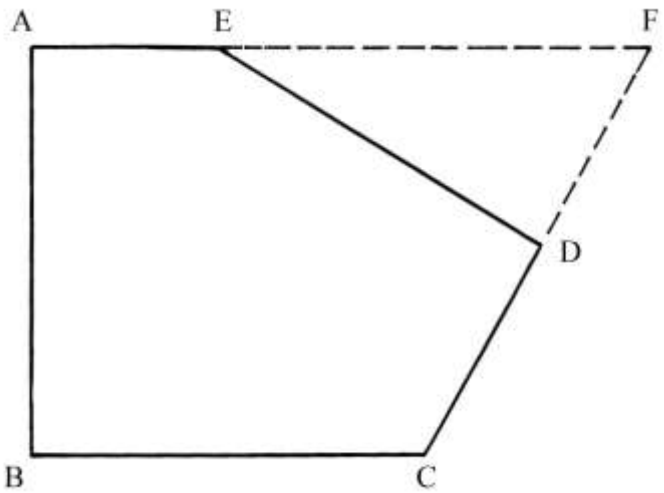
La diagonale EC divide il pentagono nel trapezio scaleno ABCE e nel triangolo CDE.

La corrispondente figura contenuta nel manoscritto è errata perché AB e EC non sono disegnati paralleli:



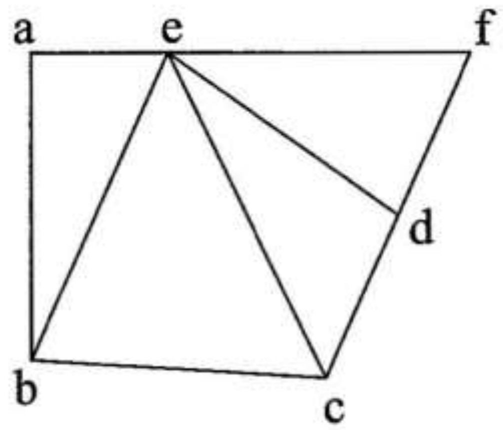
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Infine, l'Autore propone il caso del pentagono con i lati BC e AE paralleli:



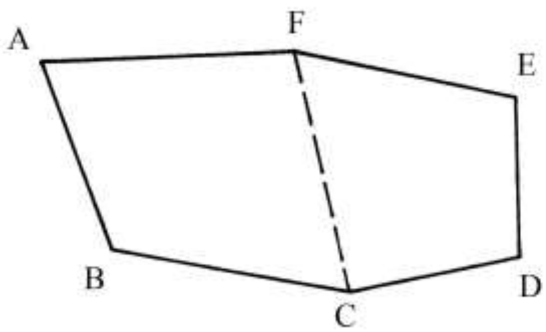
Prolungando i lati AE e CD essi si incontrano nel punto F: ABCF è un trapezio rettangolo (o almeno così sembra stando al testo e alla figura). L'area di ABCDE è data dalla differenza fra quella di ABCF e quella di EDF.

La figura originale non mostra il parallelismo fra i lati BC e AE:



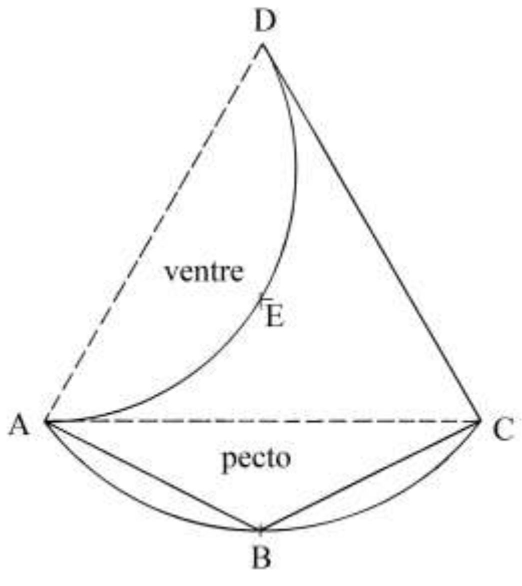
Area di un esagono

L'esagono non regolare della figura può essere scomposto in più modi, al fine di calcolarne l'area: in triangoli oppure in due quadrilateri come è il caso dell'esempio. FC è una diagonale:

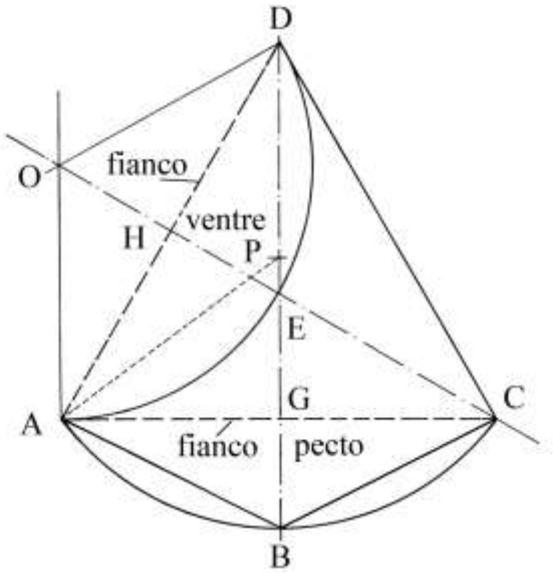


Campo con lati curvi

Il campo ABCDE ha due lati curvi, AED e ABC, e un lato rettilineo, DC:



La figura è ricostruita nello schema che segue:



ADC è un triangolo equilatero: CH e DG sono due altezze che si incrociano nel punto E.

Dal vertice A elevare la parallela all'altezza DG: essa incontra nel punto O il prolungamento di CH.

Fare centro in O e con raggio OA = OD tracciare un arco da D a A: esso passa per il punto E.

L'area delimitata dall'arco AED e dal segmento AD è il *ventre* della figura.

Sull'altezza DG, stabilire il punto P, a distanza da E pari a 1/10 della stessa DG. Fare centro in P e con raggio PA = PC disegnare un arco da A a C che interseca il prolungamento di DG in B.

L'area compresa fra il segmento AGC e l'arco ABC è il *pecto*.

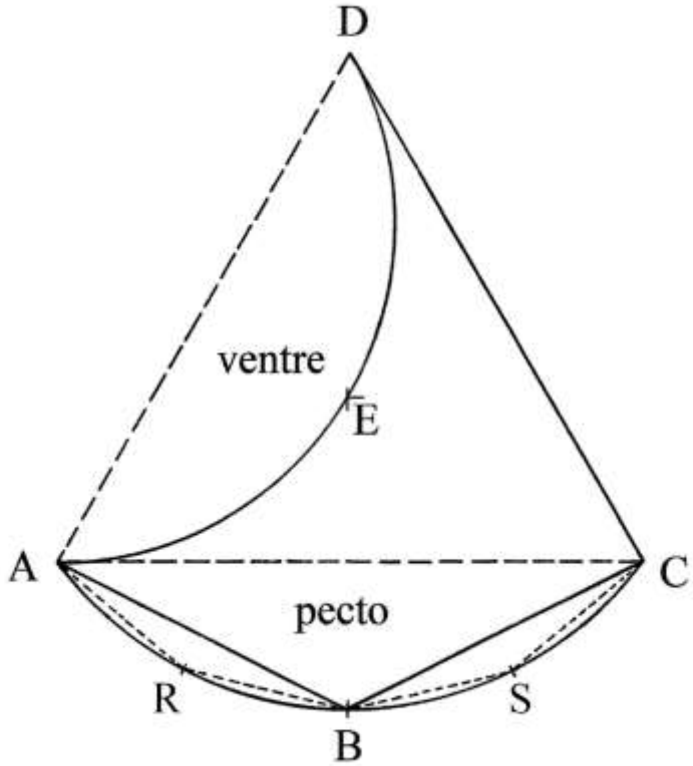
L'Autore propone di calcolare l'area del campo con la seguente procedura:

* determinare l'area del triangolo [equilatero, ma l'Autore non lo esplicita] ADC;
* calcolare l'area del *ventre* [o segmento circolare] AED;
* determinare l'area del triangolo ABC, quale approssimazione di quella del segmento circolare ABC.

L'area [approssimata] del campo è data da:

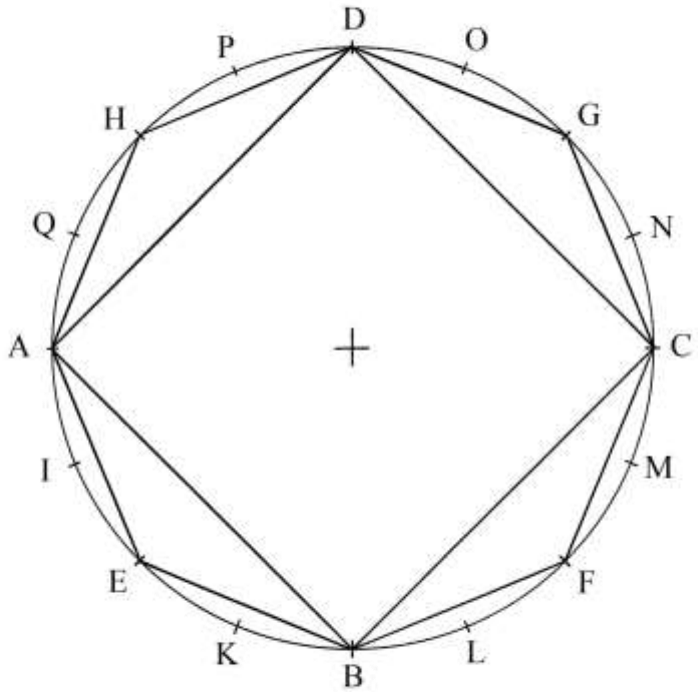
$$\text{Area}_{\text{ABCDE}} = \text{Area}_{\text{TRIANGOLO ADC}} - \text{Area ADC} - \text{Area}_{\text{VENTRE}} + \text{Area}_{\text{ABC}}.$$

Dato che il triangolo non è una buona approssimazione del segmento circolare ABC, nel manoscritto è consigliata la costruzione di altri triangoli per coprire l'area compresa fra l'arco di circonferenza e le corde AB e BC, come nell'esempio della figura:



<u>Misurazione di un campo circolare</u>

Un campo ha la forma di un cerchio:



Per misurarlo viene diviso in *quattro* parti uguali che sono definite dai vertici A, B, C e D. Tracciare il *quadrilatero rettilineo* [ma è un quadrato] ABCD.

Dividere i quattro archi di circonferenza AB, BC, CD e DA in due parti uguali e stabilire i punti E, F, G e H: disegnare l’ottagono inscritto AEBFCGDH.

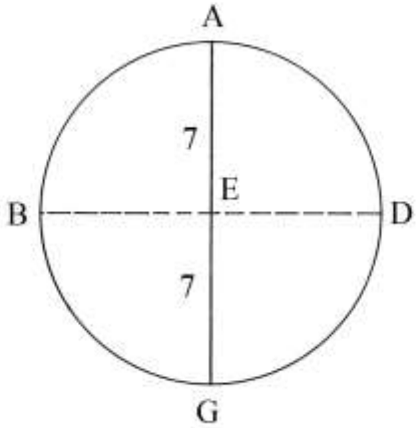
Infine, dividere in due parti uguali gli otto archi che sottendono i lati dell’ottagono: sono fissati i punti I, K, L, M, N, O, P e Q.

L’area del cerchio è calcolata come la somma delle aree del quadrato ABCD e di quelle dei triangoli che sono delimitati dalla circonferenza e dalle corde che costituiscono i lati dell’ottagono. Una maggiore precisione è ottenibile con l’aggiunta delle aree delimitate dalla circonferenza e dai lati dell’eventuale esadecagono AIEKBLFMCNGODPHQ, non disegnato in figura.

Il risultato ottenuto con questo metodo è approssimato *per difetto*.

PROBLEMI SUI CERCHI

Un cerchio ha centro in E e diametri AG e BD:



Prima di procedere con i calcoli, l'Autore fissa alcune costanti che impiegherà nella soluzione dei problemi relativi alle figure circolari:

* l'area del cerchio è data dal prodotto di metà della lunghezza del diametro AG = *d* per metà di quella della circonferenza, *c*:

Area $_{\text{CERCHIO}}$ = d/2 * c/2;

* data la lunghezza del diametro, *d*, quella della circonferenza, *c*, è:

c = (3 + 1/7) * d = 22/7 * d [l'Autore non riduce (3 + 1/7) a 22/7];

* conoscendo la lunghezza della circonferenza, *c*, si può ricavare quella del diametro, *d*:

d = c/(3 + 1/7).

Come è noto l'espressione (3 + 1/7) è un'ottima approssimazione di π ≈ 3,14159…, dovuta a Archimede: infatti

(3 + 1/7) = 22/7 ≈ 3,142857.

Passiamo ai calcoli: il diametro AG è lungo 14 pertiche per cui la circonferenza è:

c = (3 + 1) * 14 = 44 pertiche.

L'area è:

Area $_{\text{CERCHIO}}$ = c/2 * d/2 = (44/2)*(14/2) = 22 * 7 = 154 pert.super.

La conversione da pertiche superficiali ai multipli dà il seguente risultato:

154/66 staiora = 2 staiora + 22 pert.super. = 2 staiora + 4 panora.

\- APPROFONDIMENTO -

Spieghiamo l'origine della formula usata dall'Autore per calcolare l'area del cerchio.

La formula oggi usata è:

Area $_{\text{CERCHIO}}$ = $\pi * r^2$, con *r* raggio del cerchio.

Il diametro *d* vale:

d = 2 * r.

La lunghezza della circonferenza, *c*, è data da:

c = 2 * π * r ≈ 2 * (3 + 1/7) * d/2 ≈ (3 + 1/7) * d, da cui

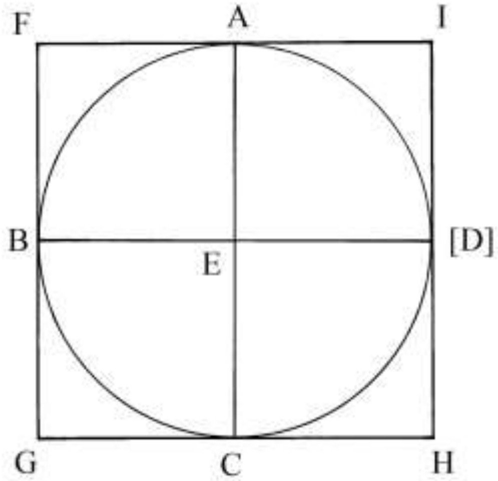
d = c/(3 + 1/7) e r = c/[2*(3 + 1/7)].

La formula dell'area può essere scritta come segue:

Area $_{\text{CERCHIO}}$ = (π *r) * r = (c/2) * (d/2).

- -

L'Autore calcola l'area del quadrato circoscritto a un cerchio con diametro lungo 14 pertiche:



Area $_{FGHI}$ = FG^2 = AC^2 = 14^2 = 196 pert.super.

Per determinare l'area del cerchio moltiplica quella del quadrato per la costante 11/14:

Area $_{CERCHIO}$ = Area $_{FGHI}$ + 11/14 = 196 * 11/14 = 154 pert.super. = 2 staiora + 4 panora.

Il risultato è uguale a quello già ottenuto in precedenza.

È necessario un chiarimento riguardo all'origine della costante 11/14. Riprendiamo la formula dell'area del cerchio:

Area $_{CERCHIO}$ = c/2 * d/2.

La lunghezza della circonferenza è espressa da:

c = (3 + 1/7) * d = 22/7 * d e sostituendo questo valore nella precedente formula dell'area si ottiene:

Area $_{CERCHIO}$ = (22/7 * d)/2 * d/2 = d^2 * 11/14.

Il lato del quadrato è lungo quanto il diametro del cerchio, *d*, e l'area del quadrato è:

Area $_{FGHI}$ = d^2.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%

L'Autore presenta un ulteriore esempio basato su di un cerchio che ha diametro lungo 7 pertiche; la sua circonferenza è lunga:

c = π * d ≈ (3 + 1/7) * 7 = (22/7) * 7 = 22 pertiche.

L'area è:

Area $_{CERCHIO}$ = (22/2) * (7/2) = (38 + ½) pert.super.

L'area del quadrato circoscritto al cerchio di diametro 7 pertiche è:

Area $_{QUADRATO}$ = 7^2 = 49 pert.super.

L'area del cerchio è gli 11/14 di quella del quadrato:

Area $_{CERCHIO}$ = 11/14 * Area $_{QUADRATO}$ = 11/14 * 49 = (38 + ½) pert.super.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

L'Autore propone un metodo semplificato per calcolare direttamente l'area di un cerchio in panora conoscendo soltanto la lunghezza del diametro misurata in pertiche lineari.

Un cerchio ha diametro lungo 7 pertiche. La procedura applicata contiene i seguenti passi:

* moltiplicare la lunghezza del diametro per sé stessa: 7*7 = 49;
* dividere per 7: 49/7 = 7 panora, area del cerchio.

Spieghiamo il metodo. L'area del cerchio di diametro 7 pertiche è:

Area $_{\text{CERCHIO}}$ = 11/14 * d^2 = 11/14 * 7^2 = (38 + ½) pert.super.

(38 + ½) pert.super. equivalgono a: (38 + ½)/(5 + ½) panora = 7 panora.

Per confermare la validitá di questo metodo semplificato, nel manoscritto è presentato un altro esempio: un cerchio ha diametro lungo 10 pertiche. Il quadrato della lunghezza del diametro è:

10^2 = 100. Dividendo per 7 si ha:

100/7 = (14 + 2/7) panora, area del cerchio.

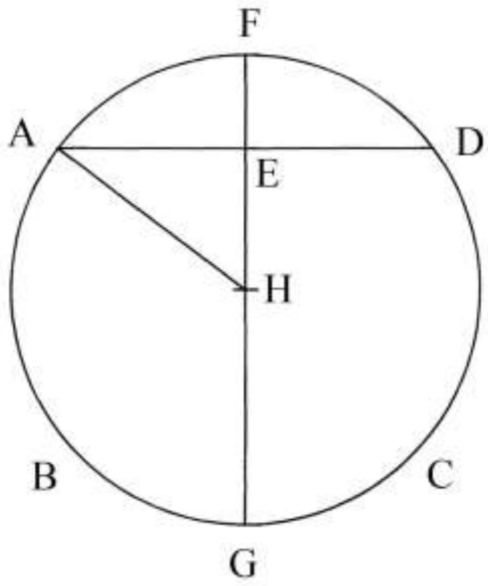
Verifichiamo:

Area $_{\text{CERCHIO}}$ = 11/14 * d^2 = 11/14 * 10^2 = (78 + 4/7) pert.super. =

= (78 + 4/7)/(% + ½) panora = (14 + 2/7) panora.

Centro di un cerchio

Un cerchio ha la circonferenza che passa per i punti A, F e D ed è ignota la posizione del centro, H:



AD è una corda ed è lunga 8 pertiche: fissare il suo punto medio E.

La corda divide il cerchio in due parti di aree differenti (che sono due *segmenti circolari*). EF è la *freccia* (o *saetta*) più corta, lunga 2 pertiche. EG è la freccia del segmento circolare più grande.

In figura, riprodotta dall'originale, sono indicati i punti B e C dei quali non è precisata l'esatta posizione: ad essi non vi è alcun riferimento nel testo.

Per risolvere il problema l'Autore ricorre al *teorema delle corde*, pur senza citarlo espressamente:

FE : AE = ED : EG o, in altri termini:

freccia minore : metà corda = metà corda : freccia maggiore.

Sostituendo i dati numerici si ha:

2 : 4 = 4 : EG, da cui

EG = 4 * 4/2 = 8 pertiche.

Il diametro del cerchio, FG, è lungo:

FG = FE + FG = 2 + 8 = 10 pertiche.

Il punto H si trova equidistante dagli estremi del diametro FG e cioè a 5 pertiche da entrambi i punti.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

L'Autore sviluppa poi una serie di soluzioni "inverse" a quella descritta fino a qui e sempre riferite allo stesso cerchio.

A) Sono note le lunghezze della freccia FE, 2 pertiche, e della freccia EG, 8 pertiche, e deve essere ricavata la lunghezza della corda AD.

La procedura è la seguente:

* moltiplicare le lunghezze delle due frecce: FE * EG = 2 * 8 = 16;
* estrarre la radice quadrata: √16 = 4 pertiche, lunghezza di metà della corda AD;
* moltiplicare per 2: 4 * 2 = 8 pertiche, lunghezza di AD.

L'Autore ha applicato il teorema delle corde:

AE * ED = FE * EG

AE^2 = FE * EG.

B) In questo caso sono note le lunghezze del diametro EG, 10 pertiche, e della corda AD, 8 pertiche.

Devono essere calcolate le lunghezze delle due frecce, FE e EG.

AEH è un triangolo rettangolo di cui sono note le lunghezze dell'ipotenusa AH e del cateto AE:

* AH = r = d/2 = 10/2 = 5 pertiche;
* AE = AD/2 = 8/2 = 4 pertiche.

Il cateto EH è lungo:

$EH^2 = AH^2 – AE^2 = 5^2 – 4^2 = 25 – 16 = 9$ e

EH = √9 = 3 pertiche.

Di nuovo fa la sua comparsa la terna primitiva 3-4-5.

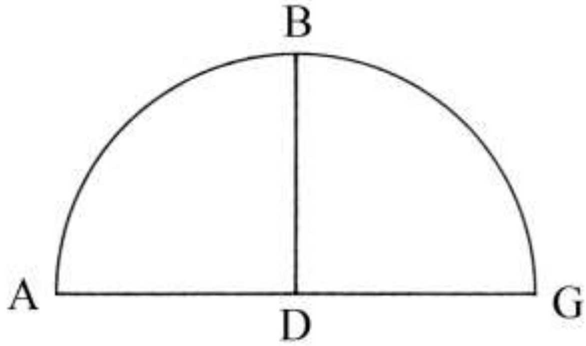
Le lunghezze delle due frecce sono:

FE = HF – HE = 10/2 – 3 = 2 pertiche

EG = FG – FE = 10 – 2 = 8 pertiche.

<u>Campo a forma di mezzo cerchio</u>

Un campo ha la forma di un mezzo cerchio:



Il diametro AG è lungo 10 pertiche.

Il problema chiede l'area del semicerchio.

L'arco ABG è lungo:

Arco $_{ABG}$ = AG/2 * (3 + 1/7) = 5 * (3 + 1/7) = (15 + 5/7) pertiche [l'Autore scrive (15 + 1/7)].

L'area del semicerchio è calcolata come segue:

Area $_{ABG}$ = (Arco $_{ABG}$)/2 * (AG/2) = (15 + 5/7)/2 * 5 = (39 + 2/7) pert.super.

Per la conversione da pertiche superficiali a panora è usato il metodo suggerito in precedenza, nella soluzione del problema del calcolo dell'area di un cerchio:

$\text{Area}_{ABG} = (AG^2/2)/7 = (100/2)/7 = 50/7 = (7 + 1/7)$ panora.

L'Autore converte poi la frazione (1/7) panora:

1/7 panora = (16 + ½)/7 soldi = 2 soldi + (4 + 2/7) denari.

Infine, per pura informazione, provvede a convertire anche la parte frazionaria (2/7) dell'area espressa in pertiche superficiali:

(2/7) pert.super = 6/7 soldi.

\- APPROFONDIMENTO -

Per consuetudine le lettere sono apposte sui vertici delle figure geometriche seguendo l'ordine alfabetico, maiuscole o minuscole che siano:

A	B	C	D	E	F	G	…
a	b	c	d	e	f	g	…

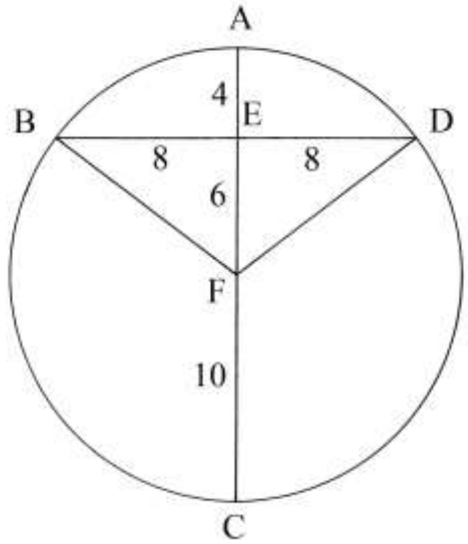
Nell'esempio della figura dell'ultimo problema il diametro è definito dai punti "a" e "g" (qui trascritti con "A" e con "G"): la lettera "g" ha preso il posto della "c". In numerose altre figure che incontreremo in seguito avviene la stessa sostituzione.

Si trattava di un problema di scrittura? Di difficoltà a distinguere fra la "g" e la "c" nella lettura e nella pronuncia?

\- -

<u>Area di un segmento circolare</u>

Un cerchio è diviso da una *corda* in due segmenti circolari:



Deve essere calcolata l'area del segmento circolare BAD.

Sono noti i seguenti dati:

* la corda BD è lunga 16 pertiche;
* la freccia AE è 4 pertiche.

Occorre calcolare la lunghezza del diametro AC. Allo scopo è di nuovo implicitamente applicato il teorema delle corde:

AE : BE = ED : EC   da cui

$EC = BE * ED/AE = BE^2/AE = (BD/2)^2/AE = (16/2)^2/4 = 64/4 = 16$ pertiche.

Il diametro AC è lungo:

$AC = AE + EC = 4 + 16 = 20$ pertiche.

Tracciare i raggi FB e FD.

FBAD è un *settore circolare* e la sua area è data da:

$\text{Area}_{FBAD} = \text{Arco}_{BAD}/2 * AF$.

L'area del *segmento circolare* BAD è:

$\text{Area}_{BAD} = \text{Area}_{FBAD} – \text{Area}_{BDF}$.

Nel testo, l'area del triangolo BDF è *sommata* anziché essere sottratta, come indicato nell'ultima formula.

Per misurare la lunghezza dell'arco BA viene proposto l'uso di una pertica (un'asta) derivata dal cerchio di una botte oppure una corda.

Nota

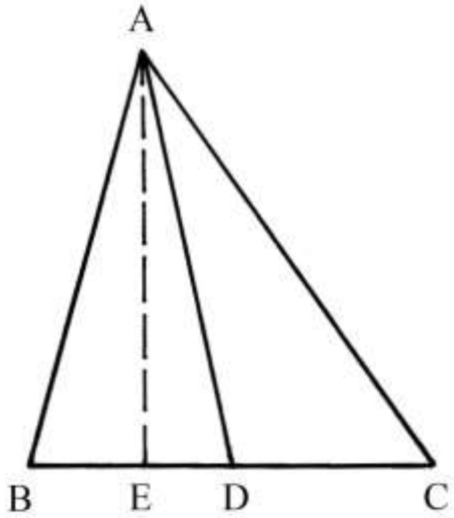
Francesco Feola fa notare che, a questo punto, il testo del manoscritto si interrompe e seguono due fogli bianchi a quali, forse, seguivano altri due: è probabile che questi ultimi contenessero la soluzione del problema con il calcolo delle aree dei due segmenti circolari.

Il problema successivo, relativo a un triangolo, sembra essere interessato dal taglio subito dal manoscritto.

DIVISIONE DEI TRIANGOLI

Triangolo scaleno

Lo schema che segue mostra un triangolo scaleno, ABC:



Dato che il lato AB è più corto di quello AC, l'altezza relativa a BC e cioè AE, cade più vicina a B rispetto a C.

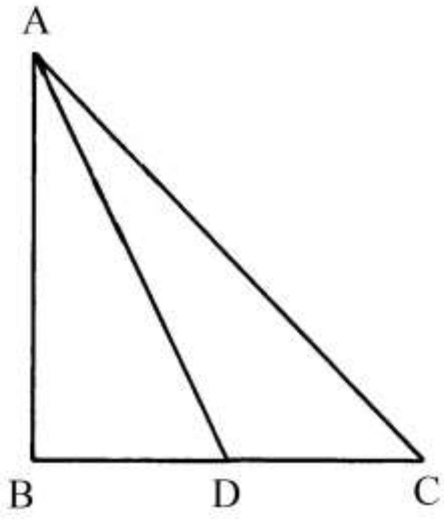
L'altezza AE è interna al triangolo.

D è il punto medio di BC.

AE è il cateto verticale comune ai triangoli rettangoli AEC e AED.

Triangoli rettangoli con un cateto comune

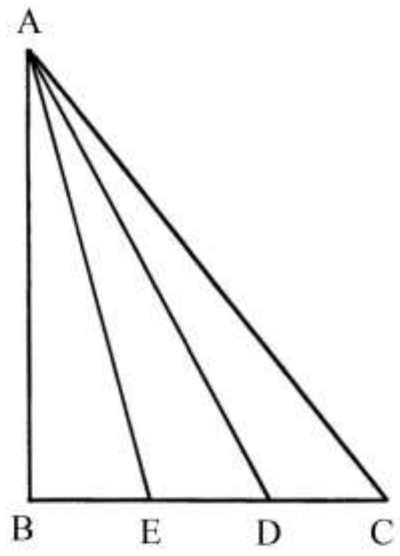
Il grafico presenta due triangoli rettangoli, ABC e ABD, che hanno in comune il cateto verticale AB:



Chiaramente, l'ipotenusa AD è più corta di quella AC.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Infine, lo schema che segue contiene diversi triangoli rettangoli e triangoli ottusangoli:



Possiamo ipotizzare che valga la relazione: BE = ED = DC.

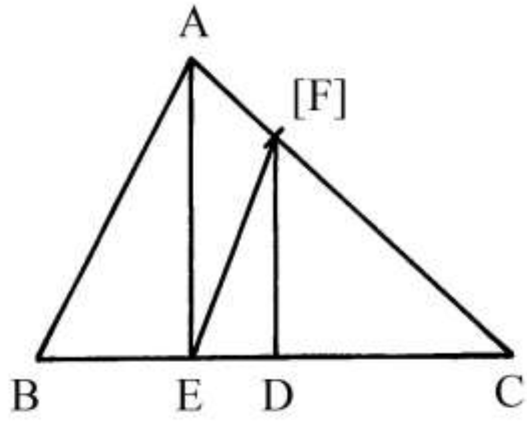
I triangoli ABC, ABD e ABE sono rettangoli, mentre quelli AED, AEC e ADC sono ottusangoli.

L'Autore conclude con un'affermazione infondata: dato che il lato (*catheto*) AE è comune, il triangolo ABD avrebbe area uguale a quella del triangolo ADC. Al contrario, il triangolo ABD ha area *doppia* di quella di ADC.

Pur considerando l'accennata omissione di almeno due carte, questi esempi di triangoli sembrano aver avuto solo uno scopo descrittivo in relazione all'argomento delle pagine successive, che formano un ideale capitolo dedicato alla *Divisione dei triangoli*.

ALCUNI PROBLEMI SULLA DIVISIONE DEI TRIANGOLI

Un triangolo scaleno deve essere diviso in due parti uguali per mezzo di un segmento uscente da un punto, [F] posizionato su di un lato, in questo caso quello AC:



Dal punto [F] abbassare la perpendicolare alla base BC: è [F]D.

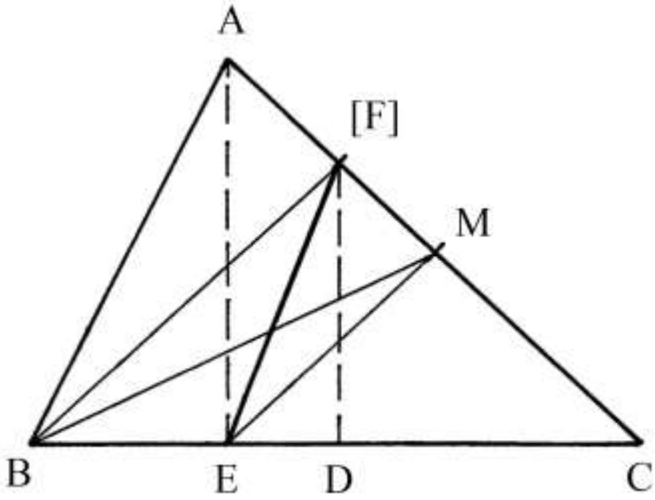
Tracciare l'altezza AE.

Collegare E con [F]: il triangolo ABC è ora scomposto in due poligoni che hanno uguale area, pari a metà di quella dello stesso ABC:

* il quadrilatero ABE[F];
* il triangolo E[F]C.

- APPROFONDIMENTO -

Un altro metodo per effettuare la divisione del triangolo ABC è descritto con l'aiuto dello schema che segue:



Stabilire il punto medio del lato sul quale giace [F]: è M su AC.

Da [F] condurre la perpendicolare al lato BC: è [F]D.

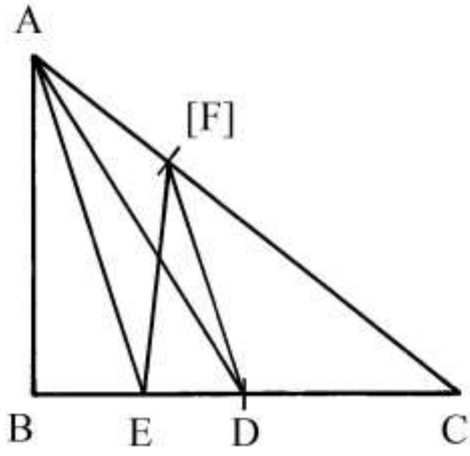
Collegare i punti [F] e M con il vertice opposto, B: sono le corde B[F] e BM.

Dal punto M tracciare una corda parallela a B[F]: è ME.

Il segmento E[F] divide il triangolo ABC nei due poligoni, ABE[F] e E[F]C già ricavati con la precedente costruzione.

- -

Il caso mostrato nello schema che segue è quello di un triangolo rettangolo, ABC, che deve essere suddiviso in due parti di uguale superficie, sempre con un segmento che parte dal generico punto F:



Determinare il punto medio di BC: è D.

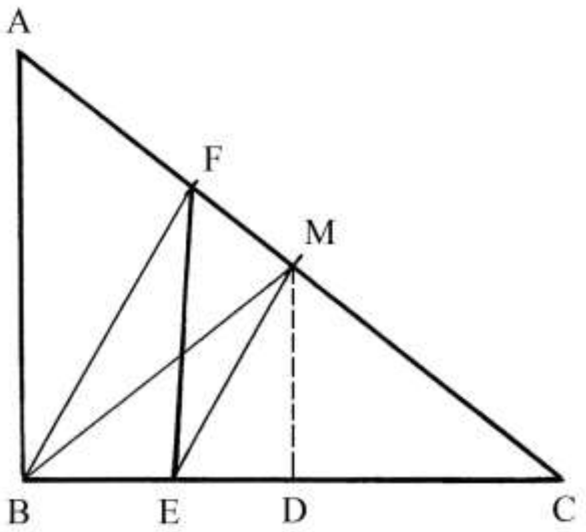
Fissare il punto medio di BD: è E.

Collegare F con D.

Secondo l'Autore, il triangolo ABC sarebbe diviso in due triangoli di uguale area:

* ABD;
* ADC.

Applichiamo al triangolo ABC il metodo descritto nell'APPROFONDIMENTO qui sopra.



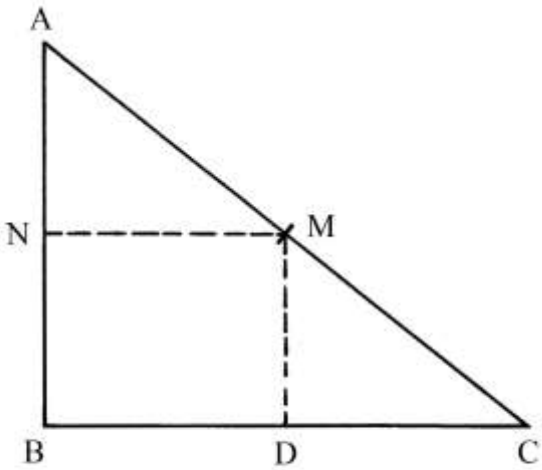
M è il solito punto medio del lato, AC, sul quale si trova F. Collegare B con F e con M.
Dal punto M abbassare la perpendicolare a BC: è MD.
Sempre da M tracciare la corda parallela a BF: è ME.
Tracciare il segmento EF.
ABC è diviso in due poligoni che hanno uguale area:

* il quadrilatero ABEF;
* il triangolo ECF.

%%%%%%%%%%%%%%%%

Il punto D è il medio del cateto BC e era definito anche nel disegno originale del manoscritto.

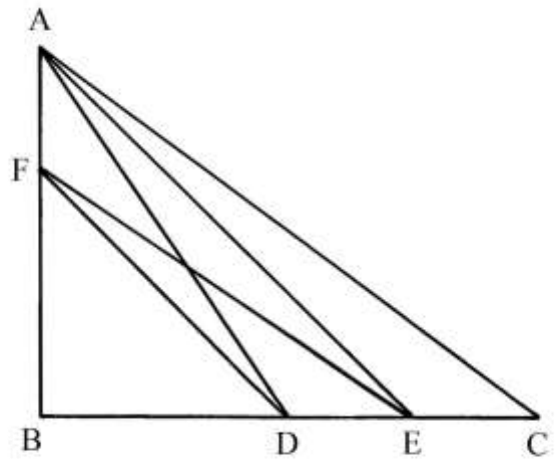
Come spiega il grafico che segue, se da M sono disegnati due segmenti paralleli ai due cateti, essi li raggiungono nei loro punti medi, D e N.



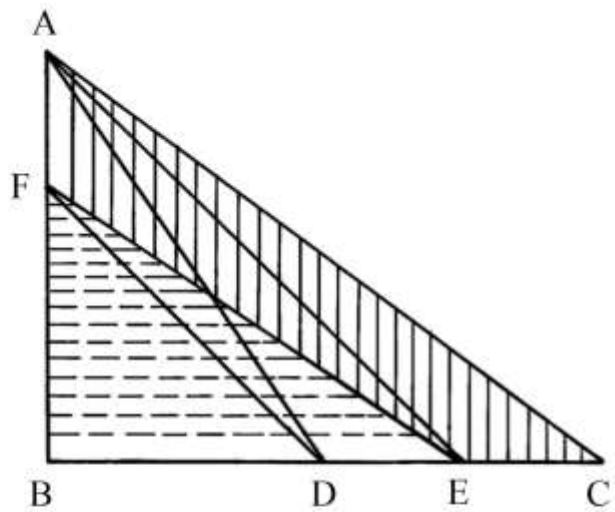
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

I successivi esempi sono riferiti, nell’ordine, a un triangolo rettangolo e a due triangoli ottusangoli. Sono tutti scomposti con lo stesso metodo usato per i precedenti triangoli e cioè con un segmento (una *corda*) che muove da un punto, F, posizionato su di uno dei tre lati e non coincidente con alcun vertice dei lati.

Il triangolo rettangolo viene diviso in due poligoni di uguale area:

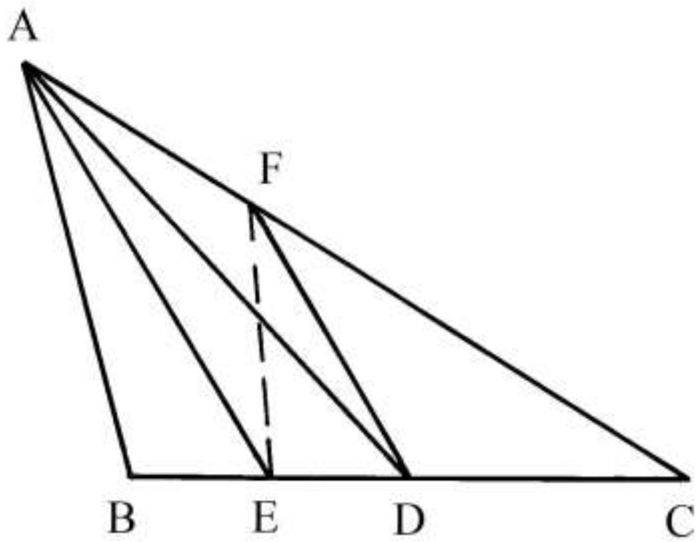


* il triangolo rettangolo FBE;
* il quadrilatero ECAF:



%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

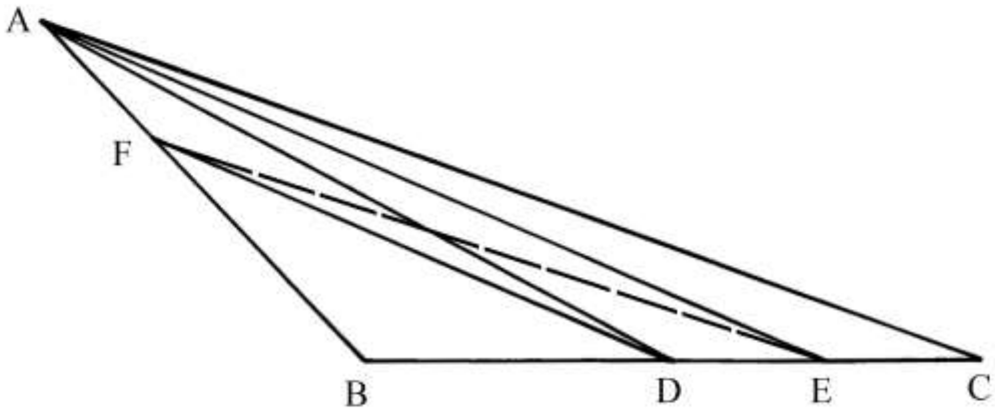
Il triangolo ottusangolo ABC è scomposto in due poligoni di uguale superficie:



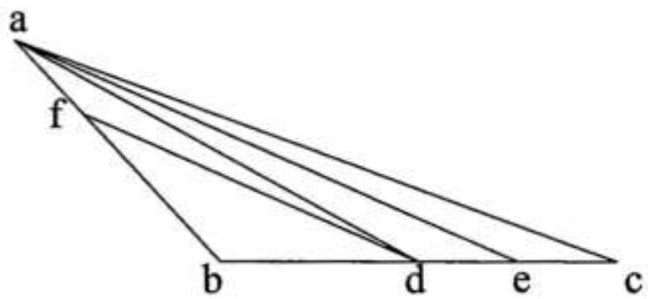
*	il triangolo FEC;
*	il quadrilatero ABEF.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Infine, l'ultimo esempio è mostrato nella figura che segue:



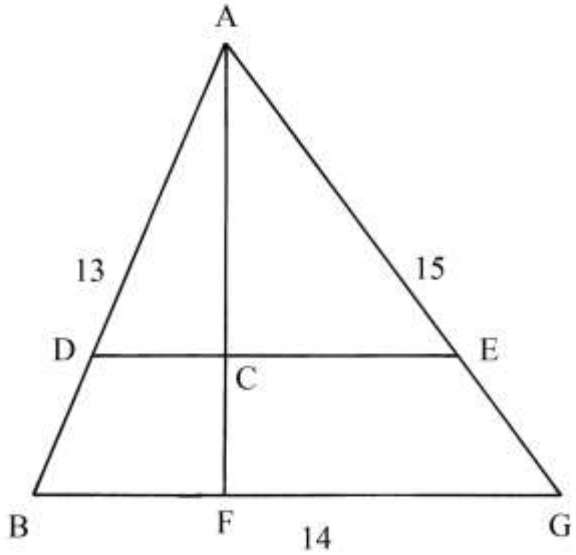
Il triangolo è suddiviso in due poligoni di uguale area:
*	il triangolo FBE;
*	il quadrilatero FECA.
Nel disegno contenuto nel manoscritto è stato omesso l'importante lato FE:



In tutti e cinque i casi, i triangoli sono sempre stati scomposti dal segmento FE.

<u>Triangolo diviso con una linea parallela a un lato</u>

ABG è un triangolo che ha lati lunghi 13, 14 e 15 pertiche:



Deve essere diviso in due parti di uguale superficie con una linea parallela al lato orizzontale BG.

La soluzione del problema prevede i seguenti passi:

* dividere per 2 la lunghezza di AB: 13/2 = (6 + ½) ;
* moltiplicare per la lunghezza di AB: (6 + ½) * 13 = (84 + ½);
* estrarre la radice quadrata: √(84 + ½) = 9 + √(3 + ½) = 9 pertiche + √21 piedi = = [9 pertiche + 1 piede + (2 + ¾) once], lunghezza di AD.

L'Autore usa lo stesso metodo per calcolare la lunghezza di AE:

* dividere per 2 la lunghezza di AG: 15/2 = (7 + 1/2);
* moltiplicare per la lunghezza di AG: (7 + ½) * 15 = (112 + ½);
* estrarre la radice quadrata: √(112 + ½) pertiche, lunghezza di AE.

La lunghezza del lato DE è ricavata con una variante del metodo appena incontrato:

* calcolare il quadrato della lunghezza di BG: 14 * 14 = 196;
* dividere per 2: 196/2 = 98;
* estrarre la radice quadrata: √(98) pertiche, lunghezza di DE.

L'Autore non riduce le ultime due radici quadrate, √(112 + ½) e √(98).

Anche l'altezza AC è ricavata con lo stesso metodo:

* calcolare il quadrato della lunghezza di AF: 12 * 12 = 144:
* dividere per 2: 144/2 = 72;
* estrarre la radice quadrata: √(72) pertiche, lunghezza di AC.

Una volta determinata la posizione di D e la lunghezza di AD possiamo completare la costruzione tracciando il segmento DCE, parallelo a BFG.

L'area del triangolo ADE è:

Area $_{ADE}$ = AC * DE/2 = [√(72) * √(98)]/2 = (√7056)/2 = 84/2 = 42 pert.super.

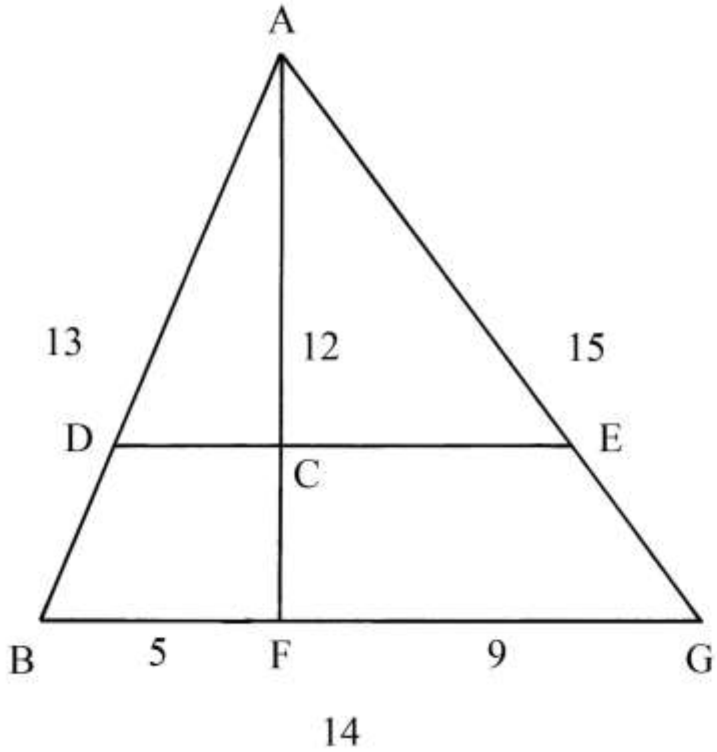
Il triangolo ABG è suddiviso in due poligoni che hanno area uguale a metà della sua e cioè 42 pert.super.:

* il triangolo ADE (simile a quello ABG);
* il trapezio scaleno DBGE.

- APPROFONDIMENTO -

Le proprietà del triangolo 13-14-15

Ricapitoliamo le proprietà geometriche del triangolo 13-14-15:



L'altezza AF è lunga 12 pertiche e divide ABG in due triangoli rettangoli:

* ABF che ha lati lunghi 5, 12 e 13 pertiche (numeri che formano la seconda terna primitiva);
* AFG con lati lunghi 9, 12 e 15 pertiche (numeri che forma una terna derivata da quella primitiva 3-4-5).

L'area di ABG è:

$$Area_{ABG} = AF * BG/2 = 12 * 14/2 = 84 \text{ pert.super.}$$

Possiamo usare la seguente proporzione:

$$Area_{ABG} : Area_{ADE} = AB^2 : AD^2 .$$

Ma l'area di ABC vale 84 pert.super. e quella di ADE è la metà esatta e cioè 42 pert.super.

La proporzione diviene:

$84 : 42 = 13^2 : AD^2$ da cui:

$AD^2 = (42 * 13^2)/84 = 13^2/2 = 169/2 = (83 + ½)$.

La lunghezza di AD è: $AD = \sqrt{(83 + ½)}$ pertiche.

Il risultato è uguale a quello ottenuto nel manoscritto.

Con il metodo usato dall'Autore calcoliamo la lunghezza di AC:

* moltiplicare per sé stessa la lunghezza di AF: $12 * 12 = 144$;
* dividere per 2: $144/2 = 72$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{(72)}$ pertiche, lunghezza di AC.

Tutto ciò può essere scritto anche come segue:

$AC^2 = AF^2/2$ e $AC = AF/\sqrt{2} = 12/\sqrt{2}$ pertiche.

Le lunghezze calcolate nel manoscritto possono essere scritte in termini moderni come segue:

* $AD = AB/\sqrt{2} = 13/\sqrt{2}$, oppure $\sqrt{2} * 13/2$;
* $AE = AG/\sqrt{2} = 15\sqrt{2}$;
* $DE = BG/\sqrt{2} = 14/\sqrt{2}$.

L’area del triangolo ADE è data da:

Area $_{ADE}$ = AC * DE/2.

A AC e DC possiamo sostituire le espressioni appena ricavate e la formula dell’area diviene:

Area $_{ADE}$ = (AF/√2) * (BG/√2)/2 = (12/√2) * (14/√2)/2 = (12 + 14/2)/2 = 12 * 14/4 = = 42 pert.super.

Il rapporto fra le lunghezze dei lati e delle altezze dei triangoli simili ABG e ADE è *costante*:

AB : AD = AG : AE = BG : DE = AF : AC
13 : 13/√2 = 15 : 15/√2 = 14 : 14/√2 = 12 : 12/√2
√2 : 1 = √2 : 1 = √2 : 1 = √2 : 1.

- -

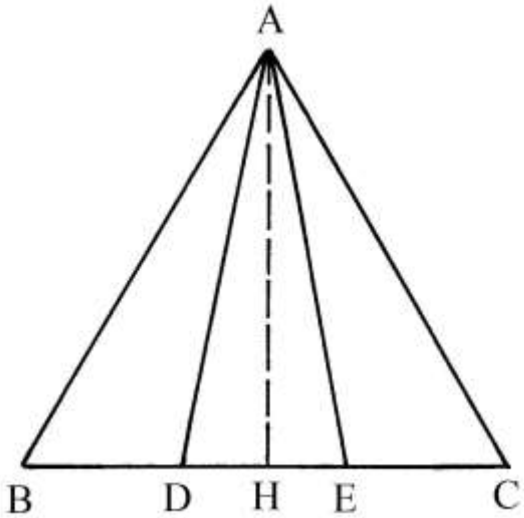
<u>Divisione di triangoli in *tre* parti uguali</u>

Una serie di quattro triangoli di varia forma devono essere ripartiti in *tre* parti uguali di forma triangolare, basando le costruzioni sulla divisione di un lato in *tre* parti uguali.

Per chiarire la soluzione sono qui aggiunte le altezze, indicate con AH, disegnate con linee tratteggiate in tre dei quattro casi: nel manoscritto esse sono assenti.

Facciamo un’ipotesi: nel vertice A può essere collocato un pozzo a servizio di un terreno triangolare da suddividere fra tre coeredi o acquirenti. Con le quattro soluzioni mostrate di seguito è garantito l’accesso al pozzo alle tre nuove partizioni.

Il primo caso è quello di un triangolo isoscele, ABC:



La base BC, opposta al vertice A, è divisa in tre parti uguali:

BD = DE = EC = 1/3 * BC.

L’altezza AH è relativa alle basi BC, BD, BE, EC, DE e DC.

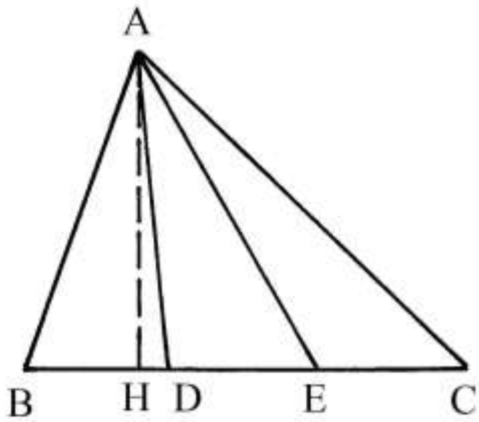
Nel caso dei triangoli ABD e AEC l’altezza cade al loro esterno.

Le aree dei quattro triangoli interessati alla divisione sono:

* Area $_{ABC}$ = BC * AH/2;
* Area $_{ABD}$ = BD * AH/2 = (1/3 * BC) * AH/2 = 1/3 Area $_{ABC}$;
* Area $_{ADE}$ = DE * AH/2 = 1/3 * Area $_{ABC}$;
* Area $_{AEC}$ = EC * AH/2 = 1/3 * Area $_{ABC}$.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Il secondo caso si riferisce al triangolo scaleno ABC:



Il lato BC è diviso in tre parti uguali:

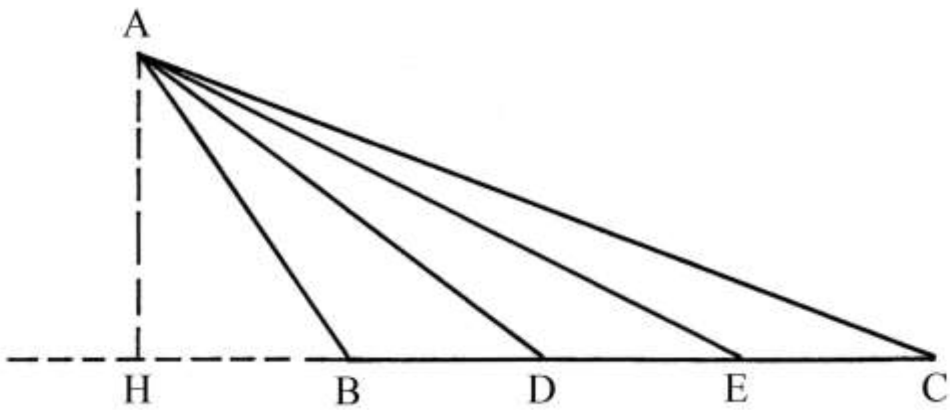
BH = DE = EC = 1/3 * BC.

Le aree dei quattro triangoli valgono:

* Area $_{ABC}$ = BC * AH/2;
* Area $_{ABD}$ = BD * AH/2 = 1/3 * Area $_{ABC}$;
* Area $_{ADE}$ = DE * AH/2 = 1/3 * Area $_{ABC}$;
* Area $_{AEC}$ = EC * AH/2 = 1/3 * Area $_{ABC}$.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Il terzo esempio è quello di un triangolo *ottusangolo*:



L'altezza AH cade fuori dal triangolo ABC e il punto H è posizionato sul prolungamento di BC e, come negli altri casi, essa è comune a tutti i triangoli interessati alla ripartizione.

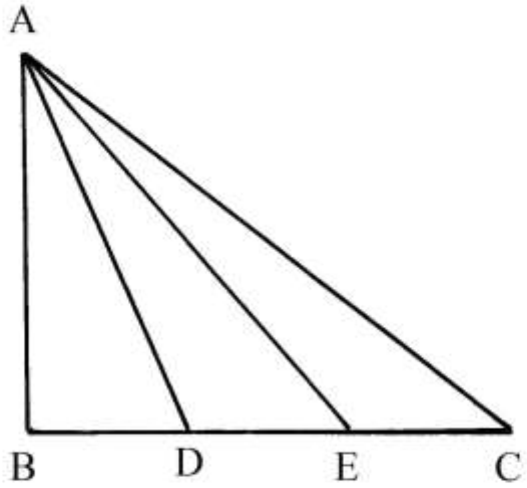
Le aree dei quattro triangoli sono:

* Area $_{ABC}$ = BC * AH/2;
* Area $_{ABD}$ = BD * AH/2 = 1/3 * Area $_{ABC}$;
* Area $_{ADE}$ = DE * AH/2 = 1/3 * Area $_{ABC}$;
* Area $_{AEC}$ = EC * AH/2 = 1/3 * Area $_{ABC}$.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Il quarto esempio riguarda un triangolo rettangolo, ABC, il cui cateto orizzontale è ripartito in tre parti uguali:

BD = DE = EC = 1/3 * BC.



Il cateto verticale AB è anche l'altezza del triangolo ABC e degli altri triangoli creati dalla scomposizione. Le loro aree sono le seguenti:

* Area $_{ABC}$ = BC * AB/2;
* Area $_{ABD}$ = BD * AB/2 = 1/3 * Area $_{ABC}$;
* Area $_{ADE}$ = DE * AB/2 = 1/3 * Area $_{ABC}$;
* Area $_{AEC}$ = EC * AB/2 = 1/3 * Area $_{ABC}$.

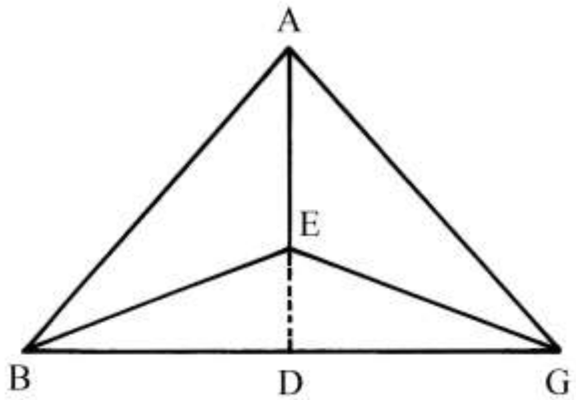
<u>Divisione di triangoli in tre parti uguali</u>

I problemi che seguono dividono quattro differenti tipi di triangoli in tre parti uguali, conservando la lunghezza integrale di tutti e tre i lati. La ripartizione è effettuata con l'aiuto di una *mediana*, segmento che congiunge un vertice (A in tutti gli esempi) con il punto medio (D) del lato opposto (BG).

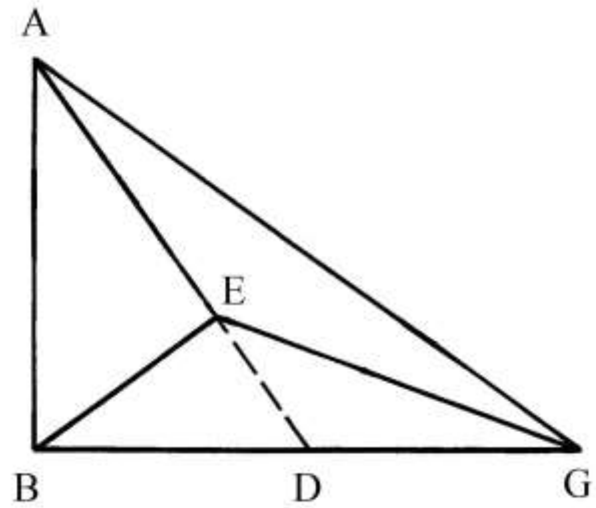
Il segmento AD è poi diviso in due parti secondo la proporzione

AE : 2 = ED : 1 e cioè il segmento ED ha sempre lunghezza uguale a *un terzo* dei quella della mediana AD.

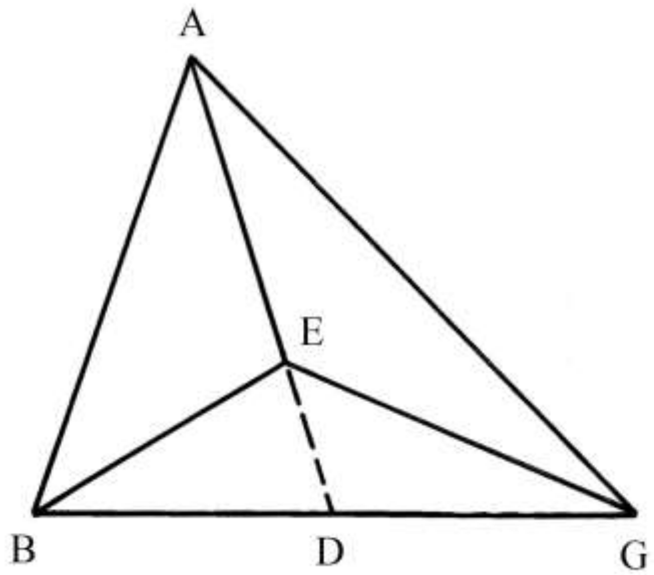
In tutti e quattro gli esempi, il punto E è collegato ai tre vertici di ABC per formare tre triangoli di area uguale a *un terzo* di quella di ABC; i triangoli sono



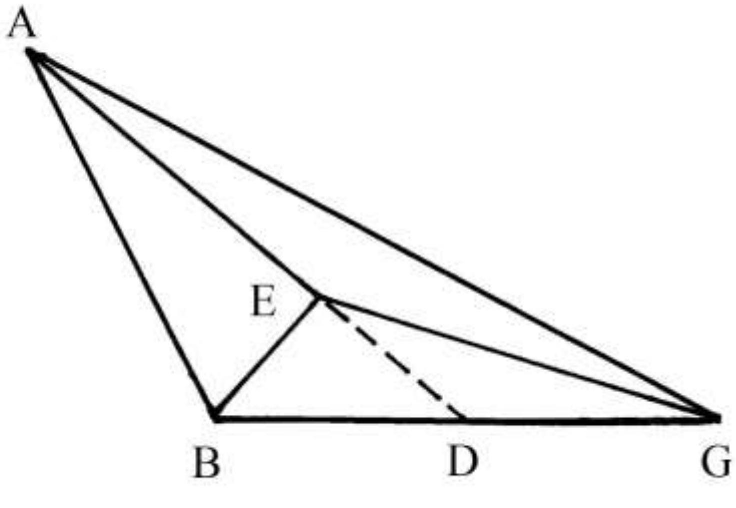
Il secondo esempio presenta un triangolo rettangolo:



Il terzo presenta un triangolo scaleno:



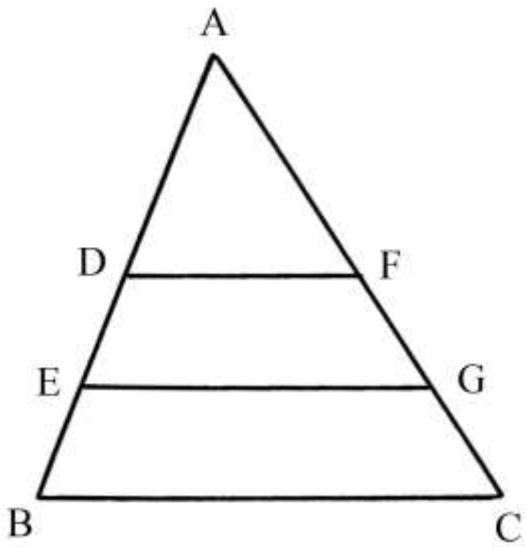
Infine, il quarto esempio mostra un triangolo ottusangolo:



Questi quattro esempi potrebbero essere spiegati con la presenza di un pozzo all'interno di ABC, grosso modo nel punto E: il terreno è da dividere in parti di uguale superficie garantendo l'accesso al pozzo stesso a tutti gli acquirenti o coeredi.

<u>Divisione di un triangolo in tre parti</u>

Il triangolo scaleno ABC deve essere ripartito in tre parti uguali tagliando i lati AB e AC con segmenti paralleli alla base BC:



Ricordiamo un dato di fatto: l'area di un generico triangolo è sempre proporzionale, con coefficienti dei quali si omette il calcolo, al quadrato della lunghezza di un lato o di un'altezza.

La procedura impiegata per dividere il triangolo ABC prevede i seguenti passi:

* calcolare il quadrato della lunghezza di AB: AB^2;
* dividere per 3: $AB^2/3$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{(AB^2/3)}$, lunghezza del segmento AD;
* moltiplicare il quadrato di AB per 2/3: $2/3 * AB^2$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{(2/3 * AB^2)}$, lunghezza di AE.

Le due lunghezze possono essere scritte come segue:

$$AD = \sqrt{(AB^2/3)} = AG/\sqrt{3} = \sqrt{3} * AB/3;$$
$$AE = \sqrt{(2/3 * AB^2)} = AB * (\sqrt{2})/(\sqrt{3}) = AB * (\sqrt{2} * \sqrt{3})/3 = AB * (\sqrt{6})/3.$$

Dai punti D e E tracciare le parallele DF e EG alla base BC: il triangolo è diviso in tre poligoni che hanno area uguale a *un terzo* di quella di ABC:

* il triangolo ADF (simile a quello ABC);
* il trapezio scaleno DEGF;
* il trapezio scaleno EBCG.

L'Autore passa poi ai calcoli fornendo la lunghezza di AB, uguale a 12 pertiche: il quadrato vale: $AB^2 = 12^2 = 144$.

La lunghezza di AD è:

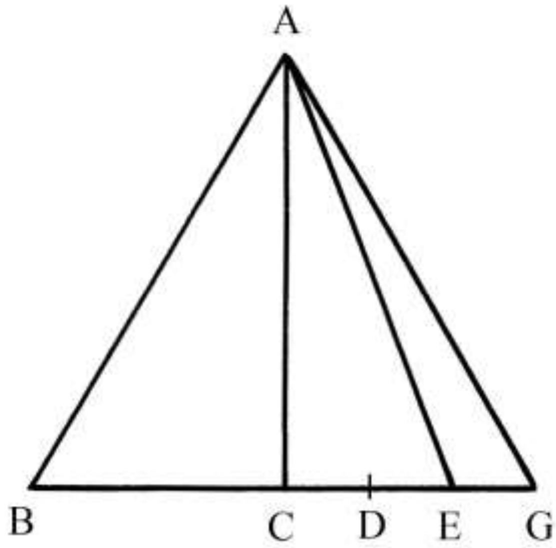
$$AD = (\sqrt{3})/3 * 12 = 4 * \sqrt{3} \approx (7 - 1/14) \text{ pertiche.}$$

La lunghezza di AE è:

$$AE = 12 * (\sqrt{6})/3 = 4 * \sqrt{6} \approx (10 - 1/5) \text{ pertiche.}$$

Divisione di un triangolo in parti non uguali

Un triangolo, isoscele come quello ABG, deve essere ripartito in parti non uguali pari a ½, 1/3 e 1/6 della sua area.



La costruzione è così organizzata. Dividere in due parti uguali il lato BG: il punto medio è C, che è anche il piede dell'altezza AC.

Dividere CG in *tre* parti uguali: sono fissati i punti D e E.

Collegare A con E.

ABG è diviso in più triangoli:

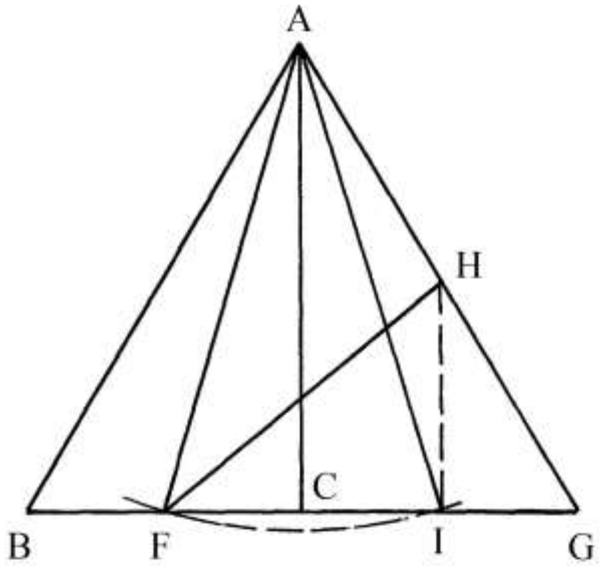
* ABC che ha area uguale a ½ di quella di ABG;
* anche ACG ha area uguale a ½ di quella di ABG;
* ACE ha area uguale a 2/3 di quella di ACG e quindi:

  $\text{Area}_{ACE} = 2/3 \ \text{Area}_{ACG} = 2/3 * (1/2 \ \text{Area}_{ABG}) = 1/3 * \text{Area}_{ABG}$;
* infine, AEG ha area che è 1/3 di quella di ACG e cioè:

  $\text{Area}_{AEG} = 1/3 * \text{Area}_{ACG} = 1/3 * (1/2 * \text{Area}_{ABG}) = 1/6 * \text{Area}_{ABG}$.

Un'altra divisione di un triangolo

Il caso presentato nello schema che segue è una rielaborazione della costruzione relativa al precedente problema:



ABG è un triangolo isoscele e il punto F è collocato sulla base BG; AC è l'altezza relativa.

Il triangolo deve essere diviso in *due* parti di uguale superficie per mezzo di un segmento che muove da F, *punto medio di BC*.

Tracciare AF. Fare centro in A e con raggio AF disegnare un arco da F fino a tagliare in I la base BG. I segmenti BF, FC, CI e IG hanno uguale lunghezza che è pari a ¼

Dal punto I innalzare la perpendicolare a BG fino a incontrare AG in un punto, H.

Collegare F con H.

Il quadrilatero ABFH ha area uguale a2/3 di quella di ABG.

Il triangolo residuale FGH ha area uguale a 1/3 di quella di ABG.

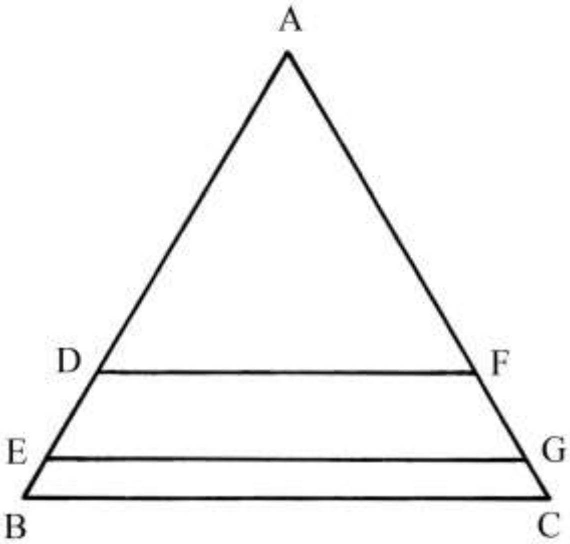
Il triangolo HIG ha area uguale a 1/3 di quella di FGH e di conseguenza:

$$\text{Area}_{HIG} = 1/3 * \text{Area}_{FGH} = 1/3 * (1/3 * \text{Area}_{ABG}) = 1/9 * \text{Area}_{ABG}.$$

L'Autore indica per il triangolo HIG un'area uguale a 1/6 di quella di ABG ma si tratta di un errore.

Divisione di un triangolo isoscele

Il triangolo ABC è isoscele e deve essere diviso con segmenti paralleli alla base in tre parti proporzionali con aree uguali a ½, a 1/3 e a 1/6 della sua.



La somma delle tre frazioni è:

½ + 1/3 + 1/6 = (3 + 2 + 1)/6 = 1.

La procedura usata per ricavare le lunghezze dei segmenti AD, AE, DE e EB contiene i seguenti passi:

* moltiplicare la lunghezza di AB per sé stessa: $AB * AB = AB^2$;
* dividere per 2: $AB^2/2$;
* sottrarre da AB^2: $AB^2 – AB^2/2 = AB^2/2$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{(AB^2/2)} = AB/\sqrt{2} = (\sqrt{2})/2 * AB$, lunghezza di AD;
* moltiplicare AB^2 per 5/6: $5/6 * AB^2$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{(5/6 * AB^2)} = AB * \sqrt{(5/6)}$, lunghezza di AE [il triangolo AEG ha area uguale a 5/6 di quella di ABC, perché (1/2 + 1/3) è uguale a 5/6].

Dai punti D e E disegnare le parallele alla base BC: sono DF e EG.

Il triangolo ABC risulta scomposto in tre poligoni:

* il triangolo isoscele ADF (simile a quello ABC), con area uguale a ½ di quella di ABC;
* il trapezio isoscele DEGF, con area uguale a 1/3 di quella di ABC;
* il trapezio isoscele EBCG, con area uguale a 1/6 di quella di ABC.

DIVISIONE DEI QUADRILATERI

La carta 33 recto del manoscritto contiene un richiamo delle definizioni di questa famiglia di poligoni, che vengono classificati in tre gruppi:

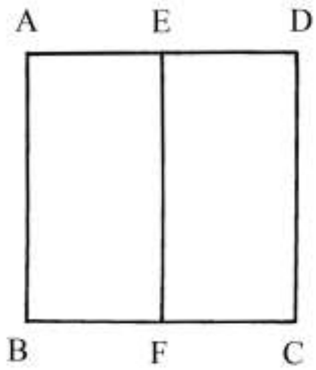
* quadrati, come le scacchiere, rettangoli e rombi perché hanno tutti lati e angoli opposti uguali;
* quadrilateri che hanno soltanto due lati equidistanti (o paralleli): sono i trapezi;
* altri quadrilateri.

Molte delle costruzioni contenute nel manoscritto sono di una banalità sconcertante, tanto a noi moderni esse paiono banali: ma forse agli occhi degli uomini del Medioevo non apparivano tali.

Divisioni con le mediane

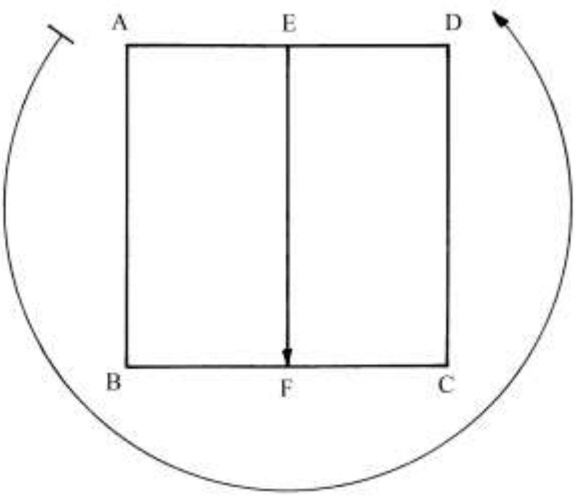
La divisione dei quadrilateri del primo gruppo per mezzo della tracciatura di una mediane è mostrata negli esempi che seguono.

Un quadrato è scomposto in due parti uguali tracciando la mediana EF che collega i punti medi dei lati AD e BC:



- APPROFONDIMENTO -

Nella precedente figura le lettere sono apposte in senso antiorario a partire dal vertice in alto a sinistra:

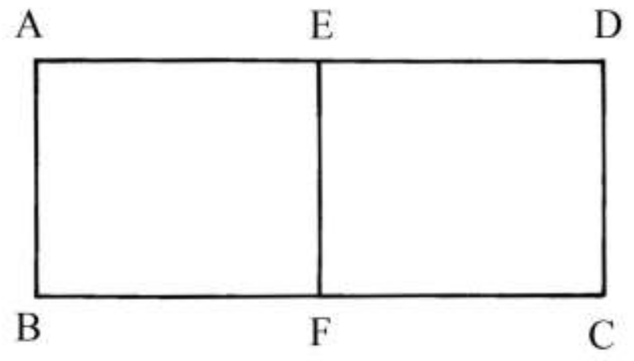


La mediana EF è definita da due lettere, E e F, apposte in senso verticale discendente: E in alto e F in basso.

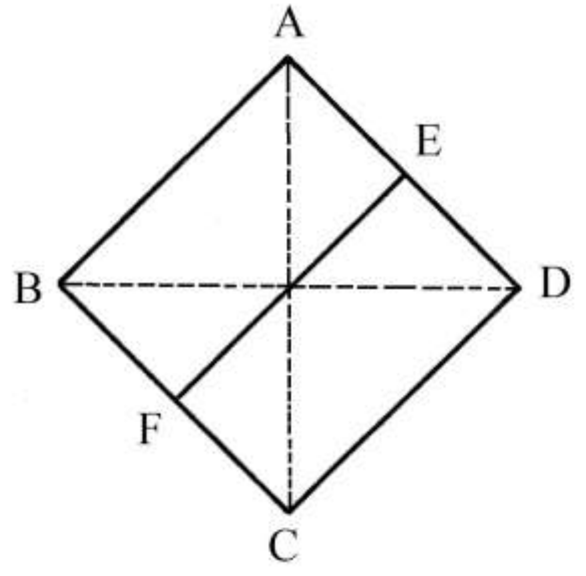
Sono queste regole costanti applicate nel manoscritto.

- -

Anche nel caso del rettangolo ABCD, la mediana EF lo divide in due parti uguali:



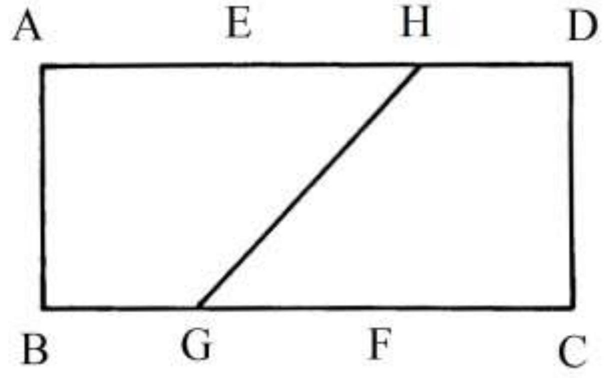
Il quadrato ruotato con le diagonali disposte orizzontalmente e verticalmente è diviso in due parti uguali dalla mediana EF che congiunge i punti medi di due lati opposti, AD e BC:



%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Il rettangolo ABCD è diviso in due trapezi rettangoli, ABGH e GCDH, da una corda, GH, che lo taglia trasversalmente in modo che valgano le seguenti uguaglianze:

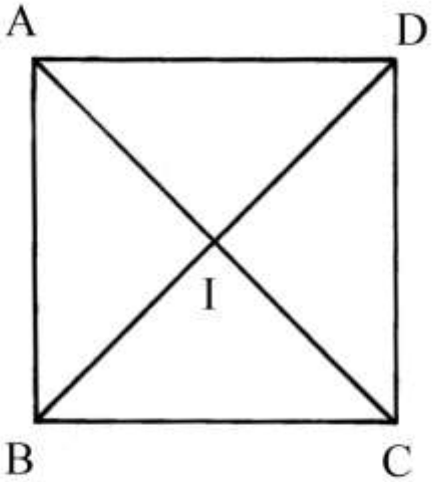
*	BG = HD;
*	AH = GC.



I due trapezi hanno uguali dimensioni e ciascuno di essi ha area uguale a metà di quella di ABCD. Infatti:
* l'area di ABCD è: Area $_{ABCD}$ = AB * BC;
* l'area di ABGH è: Area $_{ABGH}$ = (BG + AH)/2 * AB
ma (BG + AH) = (BG + FC) = BC.

Divisione lungo le diagonali

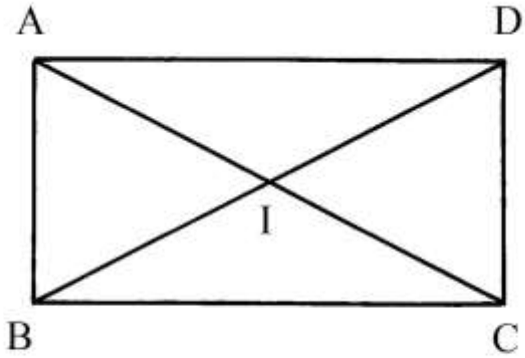
Invece della divisione lungo i lati, le prossime costruzioni prevedono quella degli angoli ai vertici: è il caso del quadrato ABCD che contiene le diagonali (i *diametri* per l'Autore) AC e BD:



Il quadrato è ripartito in *quattro* triangoli rettangoli isosceli con il vertice comune nel centro I.

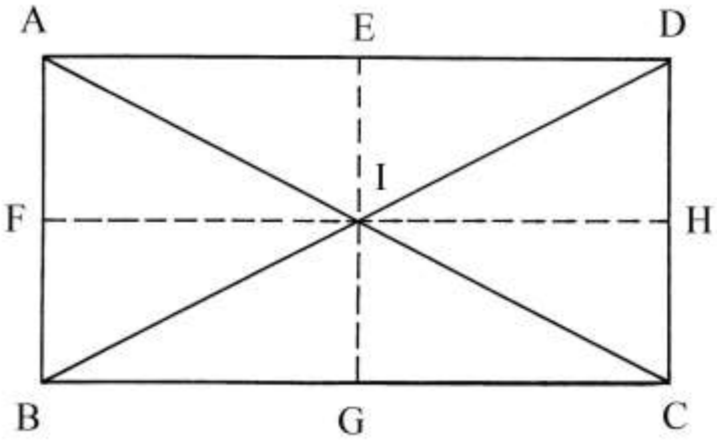
In questa figura e in alcune di quelle che seguono, l'Autore indica con la lettera "i" (qui trascritta nella corrispondente maiuscola "I") il centro dei poligoni: oggi sono usate lettere quali "O", "P" e talvolta "G" per indicare che quel punto è anche il baricentro della figura.

Il rettangolo ABCD è diviso in quattro triangoli isosceli con l'aiuto delle diagonali AC e BD che hanno uguale lunghezza:



Le coppie di triangoli opposti hanno uguali dimensioni: le coppie sono ABI-CDI e ADI-BCI.

Per i calcoli che seguono aggiungiamo le mediane EG e FH alla precedente figura:



L’area del rettangolo è:

Area $_{ABCD}$ = AB * BC.

Calcoliamo le aree dei quattro triangoli.

L’area di AIB è:

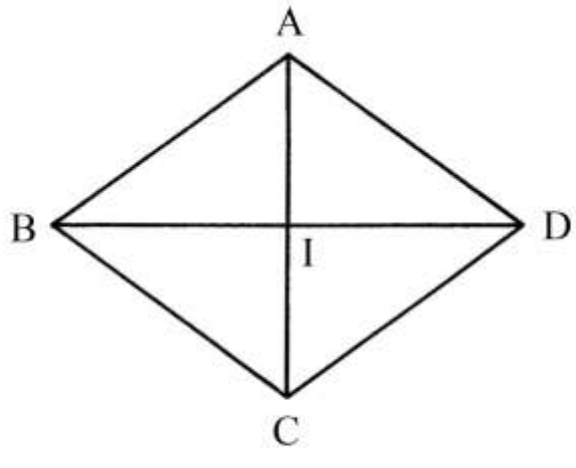
Area $_{AIB}$ = AB * FI/2 = AB * (FH/2)/2 = AB : BC/4 = Area $_{ABCD}$/4.

L’area di AID è:

Area $_{AID}$ = AD * EI/2 = AD * (EG/2)/2 = BC * AB/4 = Area $_{ABCD}$/4.

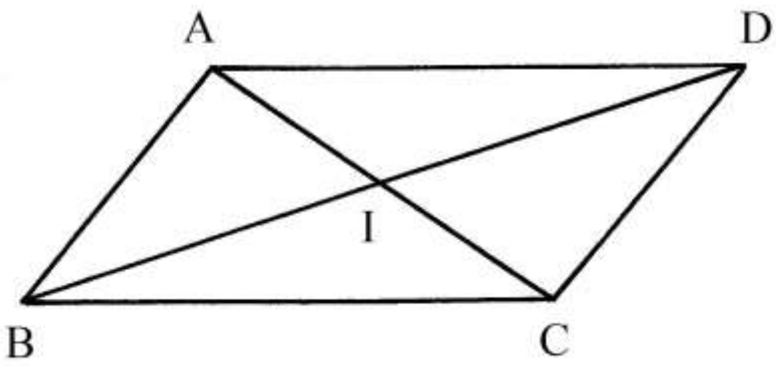
I quattro triangoli hanno tutti area uguale a *un quarto* di quella del rettangolo ABCD.

Nel caso del rombo, le diagonali si intersecano nel punto I, ma esse hanno lunghezze diverse:



Esse si intersecano a angolo retto nel punto I e formano quattro triangoli rettangoli di uguali dimensioni.

In un parallelogramma le diagonali hanno differenti lunghezze e scompongono il quadrilatero ABCD in quattro triangoli: quelli opposti al vertice hanno uguali dimensioni:



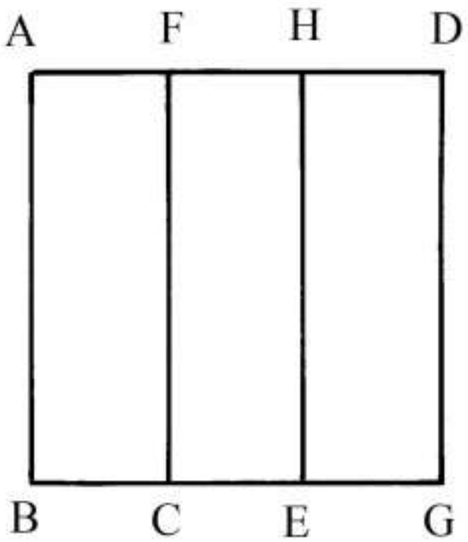
Divisione di quadrilateri in tre parti

I quattro esempi che seguono presentano quadrilateri partizionati in tre parti di uguale area dopo aver diviso in tre parti due lati opposti.

I poligoni considerati sono gli stessi quattro incontrati nel precedente paragrafo, con una variante terminologica: il terzo vertice dei quadrilateri è indicato con la lettera “G” invece che con la “C”.

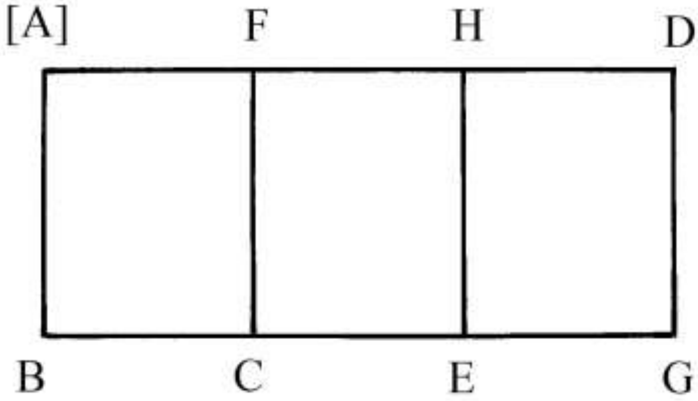
A questo proposito sia consentito avanzare un’ipotesi: il Volgarizzamento potrebbe essere *l’opera* di almeno due Autori, uno dei quali ha tracciate le figure caratterizzate dalla successione delle lettere minuscole (qui rese con le corrispondenti maiuscole) AB”C”D e l’altro dalla serie “AB”G”D. Un unico copista avrebbe poi unite le distinte parti del trattato.

Il primo caso è quello di un quadrato:



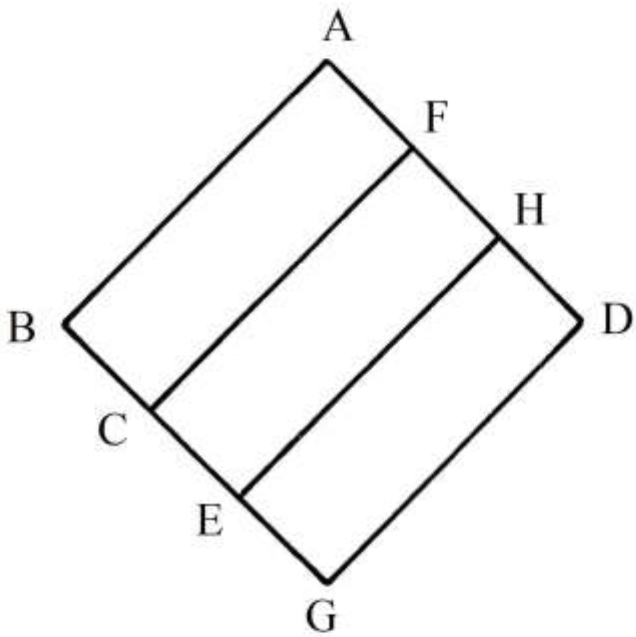
Sono divisi i lati in tre parti i lati opposti AD e BG e sono tracciate le corde FC e HE.

Il secondo caso è quello del rettangolo ABGD:

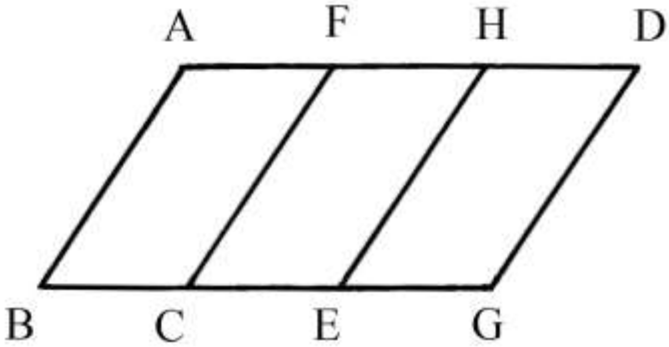


Non si comprende il motivo per cui il vertice in alto a sinistra è indicato con l’espressione [a], qui resa con [A]: a che cosa servono le parentesi quadre?

Il terzo esempio è quello del quadrato ruotato con le diagonali disposte orizzontalmente (BD) e verticalmente (AG):



Infine, il quarto esempio è quello del parallelogramma ABGD:

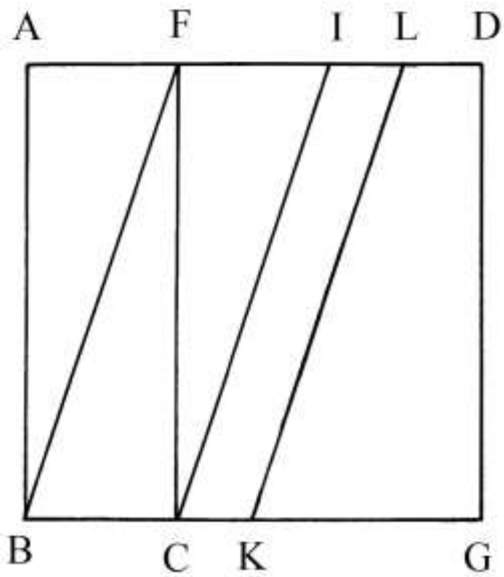


In tutti casi, la divisione dei poligoni in tre parti di uguale area è effettuata con due corde parallele, tracciate da punti posizionati a distanze uguali a 1/3 dai vertici.

<u>Divisione di quadrilateri con regole più complesse</u>

Al foglio 34 *recto* del manoscritto sono infine presentati quattro quadrilateri ripartiti sia con corde parallele ai lati che con corde inclinate.

Il quadrato ABGD ha i due lati orizzontali divisi:



Il lato AD è suddiviso in *tre* parti uguali, delimitate dai punti F e I.

Il lato BG contiene i punti C e K: C è a distanza di 1/3 di BG dal vertice B e K è il punto medio di questo lato.

Tracciare le corde FC, FB, IB e IC. Dal punto K disegnare il segmento KL, parallelo a CI e a FB.

Il triangolo ABI ha area:

$\text{Area}_{ABI} = AI * AB/2 = (2/3 * AD) * AB/2 = (2/3 * AB) * AB/2 = 1/3 * AB^{=}$

$^{=}$ $1/3 * \text{Area}_{ABGD}$.

Il triangolo ABF ha area:

$\text{Area}_{ABF} = AF * AB/2\ (1/3 * AB) * AB/2 = 1/6 * AB^2 = ½ * \text{Area}_{ABI}$.

IBGD è un quadrilatero la cui area è:

$\text{Area}_{IBGD} = (ID * BG)/2 * DG = (1/3 * AB + AB)/2 * AB = (4/6 * AB) * AB =$

$= 2/3 * AB^2$.

Il triangolo ABI e il quadrilatero IBGD sono figure complementari perché la loro unione ricompone il quadrato ABGD.

La corda KL divide il trapezio IBGD in due parti uguali: i segmenti IL e CK hanno lunghezze uguali per costruzione. Infatti:

$LD = ID – IL = 1/3 * AD – IL = 1/3 * AD – CK = 1/3 * AD – (BK – BC) =$

$= 1/3 * AD – (1/2 * BG – 1/3 * BG) = 1/3 * AD – 1/6 * BG = 1/3 * AD – 1/6 * AD =$

$= 1/6 * AD$.

$IL = ID – LD = 1/3 * AD – (1/2 * ID) = 1/3 * AD – (1/2 * ½ * 1/3 * AD) =$

$= 1/3 * AD – 1/6 * AD = 1/6 * AD = 1/6 * BG$.

Ciò perché $LD = ID – IL$

CK = BK – BC = ½ * BG – 1/3 * BG = 1/6 * BG.

L'area del trapezio LKGD è data da:

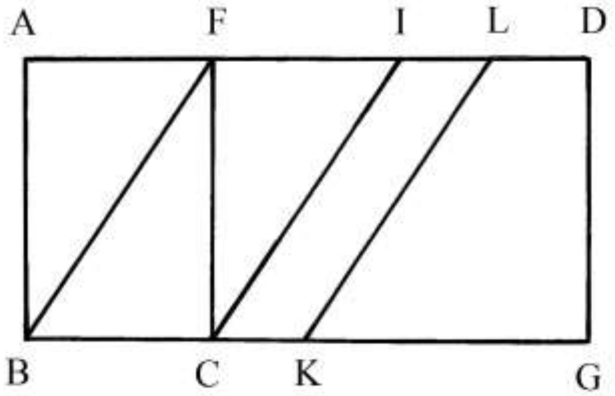
Area $_{LKGD}$ = (LD + KG)/2 * DG = (1/6 * AB + ½ * AB)/2 * AB =
= (1 + 3)/6 * AB/2 * AB = 1/3 * AB^2.

Nota: nella trascrizione è indicato un *quadrilatero ac* (qui reso con AC): forse si tratta del quadrilatero che ha vertici opposti *a* e *g* (A e G). Talvolta un quadrilatero veniva definito usando soltanto *due* vertici opposti: AG o BD.

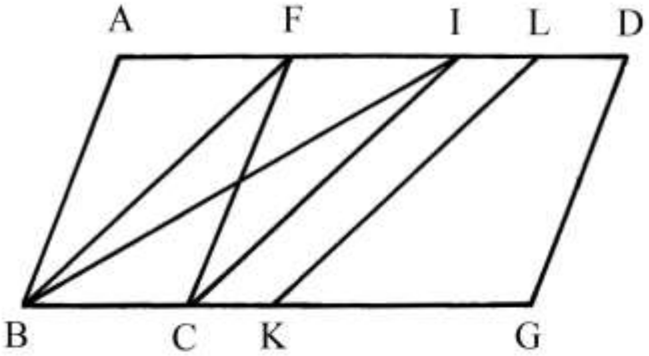
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Seguono altri tre quadrilateri: i loro lati sono suddivisi nel modo già visto nel caso del quadrato ABGD appena descritto:

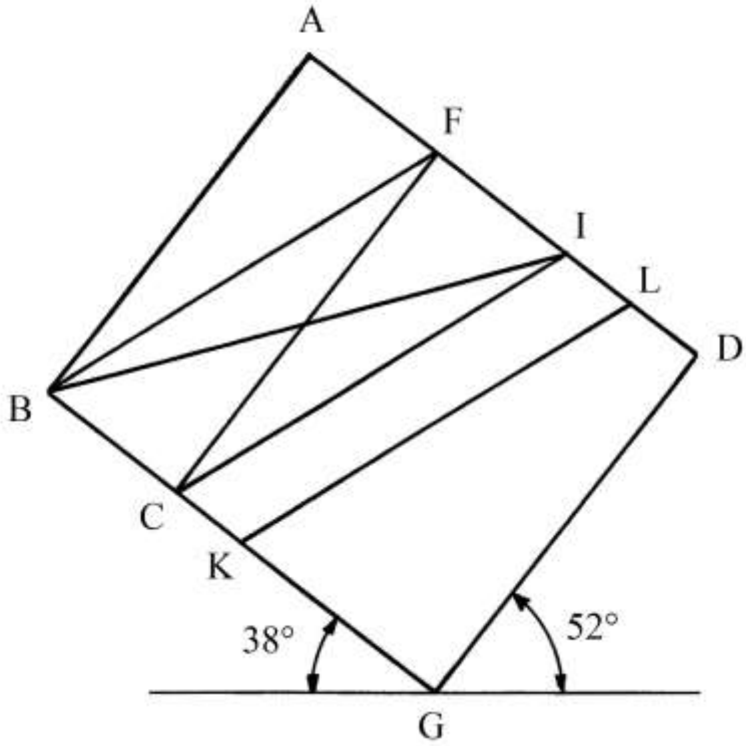
Si tratta di un rettangolo:



Segue un parallelogramma:



Chiude la serie un rettangolo (quasi un quadrato) ruotato rispetto a una retta passante per il vertice G:



Le lettere sono le stesse usate per il quadrato iniziale.

Divisione di quadrilateri in parti disuguali

Le solite quattro figure esempi di quadrilateri devono divise in parti *non uguali*, con corde tracciate parallelamente a due lati opposti.

I poligoni devono essere ripartiti fra tre *consorti* (o soci o coeredi?) in parti proporzionali a:

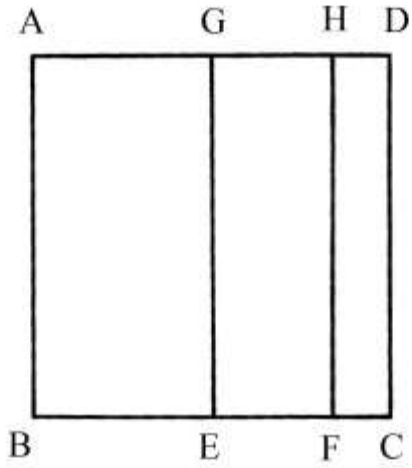
* ½;
* 1/3;
* 1/6:

La somma di queste tre frazioni ricompone l'intero:

$$(1/2 + 1/3 + 1/6) = (3/6 + 2/6 + 1/6) = 6/6 = 1.$$

In queste nuove quattro figure, l'Autore ha correttamente indicato con la lettera "*c*" (qui resa con "C"), il terzo vertice dei quadrilateri e ha riservato la lettera "*g*" (qui indicata con "G") a un altro punto della costruzione.

Il quadrato da dividere è ABCD:

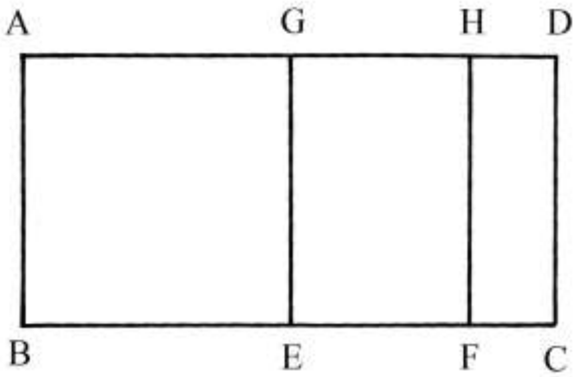


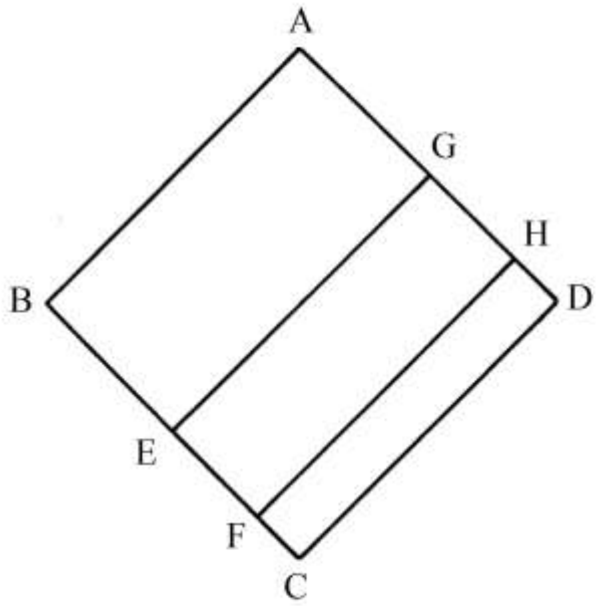
Fissare due punti sul lato BC: la costruzione parte dal basso e procede verso l'alto, come confermano le lettere scelte. *E* è il punto medio di BC. Il segmento EC deve essere diviso in due parti: il tratto EF deve essere lungo il doppio (*decutanto*, due volte tanto) di FC.

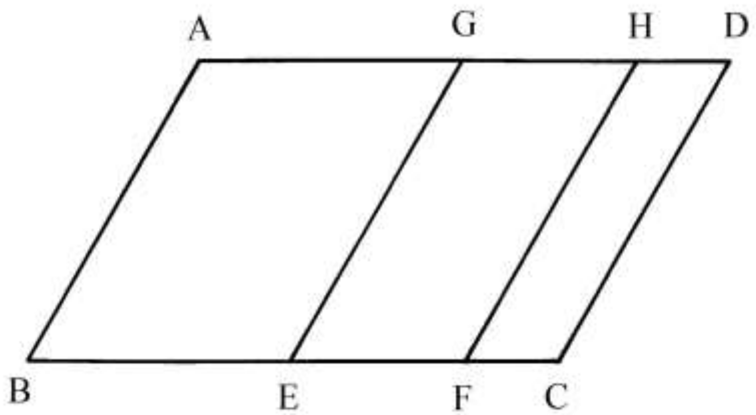
Dai punti E e F innalzare le perpendicolari ai lati BC e AD: il quadrato è ora frazionato in tre rettangoli che hanno le seguenti aree:

* Area $_{ABEC}$ = ½ * Area $_{ABCD}$;
* Area $_{GEFH}$ = 1/3 * Area $_{ABCD}$;
* Area $_{HFCD}$ = 1/6 * Area $_{ABCD}$.

Le stesse regole sono utilizzate nella ripartizione di un rettangolo, di un quadrato ruotato e di un parallelogramma:







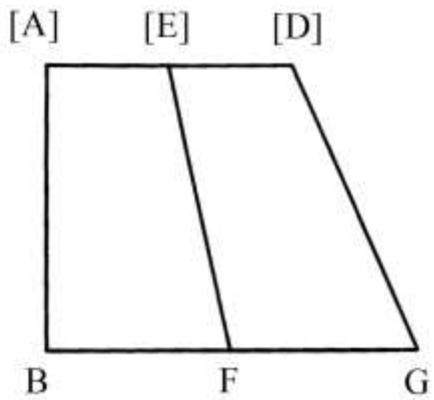
Divisione dei trapezi

La famiglia dei quadrilateri che possiedono soltanto due lati opposti paralleli comprende *cinque* diversi tipi.

La divisione in *due* parti uguali di questi quadrilateri è abbastanza semplice: è sufficiente dividere in due parti uguali i lati paralleli e tracciare le corde collegano i punti medi, sempre indicati con E e con F.

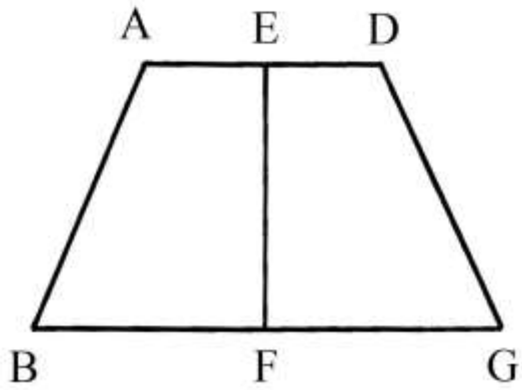
Tutti gli esempi che seguono comportano l'uso della lettera "*g*" (qui "G") per indicare il quarto vertice dei poligoni.

Il primo esempio è quello del trapezio rettangolo o *mezzo capo tagl(i)ato*:

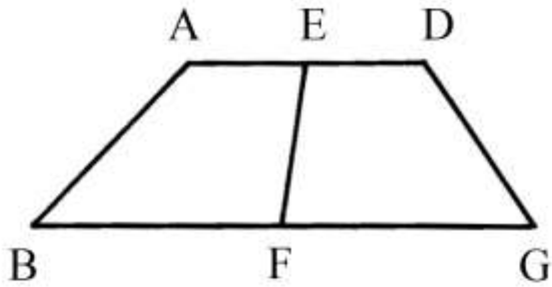


Le lettere dei punti collocati sulla base minore sono racchiuse fra parentesi quadre, senza alcuna spiegazione: [a], [e] e [d], qui rese con [A], [E] e [D].

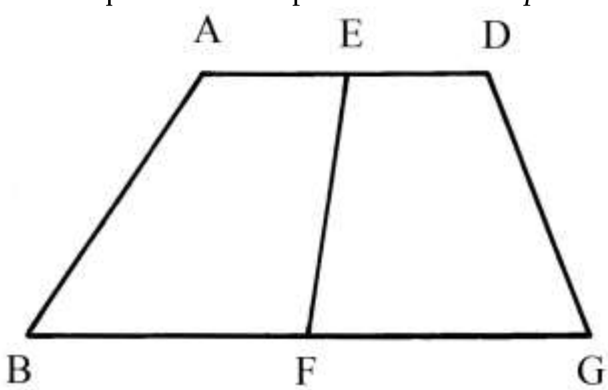
Il secondo esempio è il trapezio isoscele o *eigualm(en)te capo tagl(i)ato*:



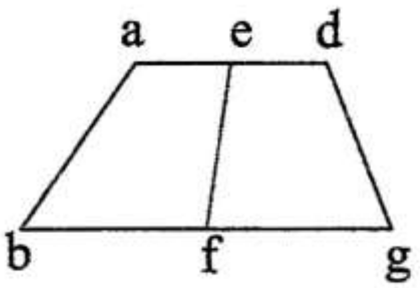
Il terzo esempio presenta un trapezio scaleno o *div(er)sam(en)te capo tagl(i)ato*:



Infine, il quarto caso è quello di un trapezio chiamato *capo chinante*:



Nel manoscritto questo trapezio è esattamente definito con questa espressione:



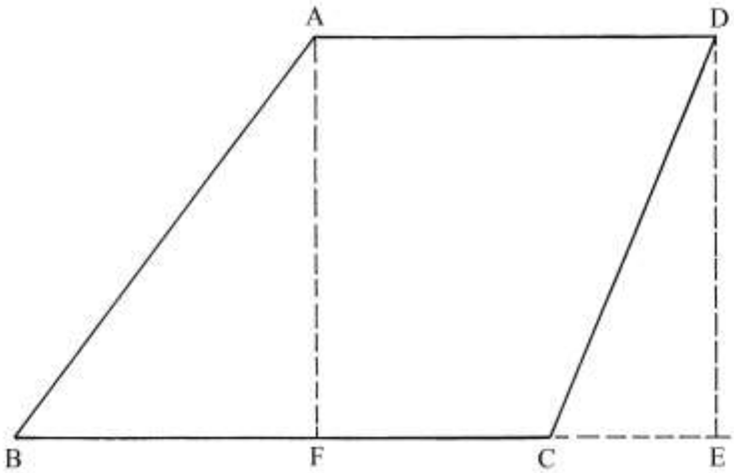
capo chinante

Probabilmente si tratta di un errore dell'Autore del Volgarizzamento perché con questa espressione nella *Practica Geometrie* Fibonacci designa un trapezio scaleno contenente alla base maggiore due angoli, uno acuto e uno ottuso, come è più ampiamente spiegato nell'APPROFONDIMENTO che segue.

- APPROFONDIMENTO -

Il *capo chinante* secondo Fibonacci

Fibonacci chiama *capo chinante* un trapezio scaleno come quello presentato in figura:



I lati hanno le seguenti lunghezze espresse in pertiche:

* BC = 16;
* AD = 12;
* AB = 15;
* CD = 13.

Le due basi, AD e BC, sono parallele. I lati AB e CD non sono paralleli.

L'angolo ABC è acuto e quello BCD è ottuso.

L'altezza AF è contenuta all'interno del quadrilatero mentre quella DE cade all'esterno sul prolungamento della base BC.

Il calcolo della lunghezza delle due altezze è ottenuto da:

$$AF^2 = AB^2 - BF^2$$
$$DE^2 = CD^2 - CE^2$$

Le due espressioni sono uguali per cui vale la seguente formula:

$$AB^2 - BF^2 = CD^2 - CE^2 .$$

La procedura impiegata da Fibonacci per calcolare la lunghezza delle altezze DE e AF prevede i seguenti passi:

* sottrarre la lunghezza di AD da quella di BC: $16 – 12 = 4$ pertiche;
* elevare al quadrato: $4 * 4 = 16$;
* calcolare il quadrato della lunghezza di CD: $13^2 = 169$;
* sommare i due quadrati: $16 + 169 = 185$;
* calcolare il quadrato di AB: $15^2 = 225$;
* sottrarre la somma dei due primi quadrati dall'ultimo: $225 – 185 = 40$;
* dividere per 2: $40/2 = 20$;
* dividere per la differenza fra le lunghezze di BC e di AD: $20/4 = 5$ pertiche, lunghezza di CE

  [tutti i precedenti passi sono riassunti nella formula che segue:

  $$CE = \{AB^2 – [(BC – AD)^2 + CD^2]\}/[2 * (BC – AD)];$$
* elevare al quadrato la lunghezza di CD: $13^2 = 169$;
* sottrarre il quadrato di CE: $169 – 5^2 = 169 – 25 = 144$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{(144)} = 12$ pertiche, lunghezza di DE (e di AF).

La lunghezza di BE è:

$$BE = BC + CE = 16 + 5 = 21 \text{ pertiche.}$$

La procedura usata da Fibonacci può essere spiegata con alcuni semplici passaggi.
Le altezze AF e DE hanno uguale lunghezze e sono date dalle seguenti formule:

$$AF^2 = AB^2 – BF^2$$
$$DE^2 = DC^2 – CE^2$$

Le due formule si equivalgono:

$$AF^2 = DE^2 \quad e$$
$$AB^2 – BF^2 = DC^2 – CE^2.$$

Il segmento CE è lungo:

$$CE = BE – BC = BE – 16.$$

A sua volta BF è:

$$BF = BE – FE = BE – AD = BE – 12.$$

Chiamiamo BE = X e riutilizziamo la precedente uguaglianza dei quadrati:

$$AB^2 – (BE – 12)^2 = DC^2 – (BE – 16)^2$$
$$15^2 – (X – 12)^2 = 13^2 – (X – 16)^2$$
$$225 – X^2 + 24 * X – 144 = 169 – 32 * X – 256$$
$$225 – 144 – 169 + 256 = 8 * X$$
$$168 = 8 * X$$

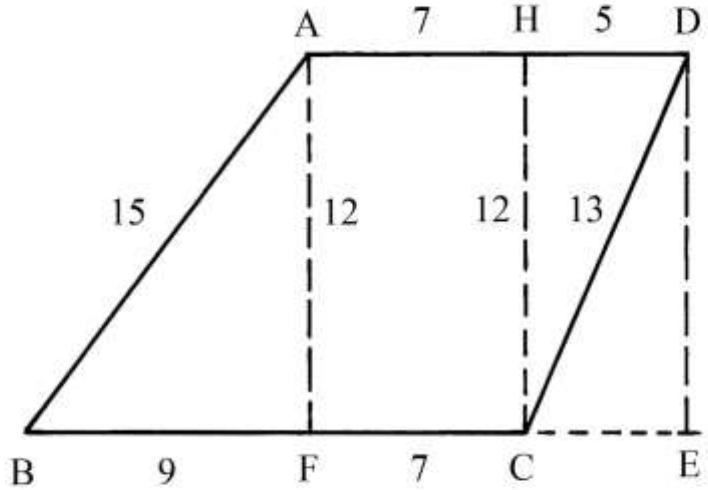
da cui: $X = 168/8 = 21$ pertiche, che conferma il valore calcolato da Fibonacci.

L'area del trapezio è:

$$\text{Area } ABCD = (AD + BC)/2 * AF = (12 + 16)/2 * 12 = 14 * 12 = 168 \text{ pertiche superficiali.}$$

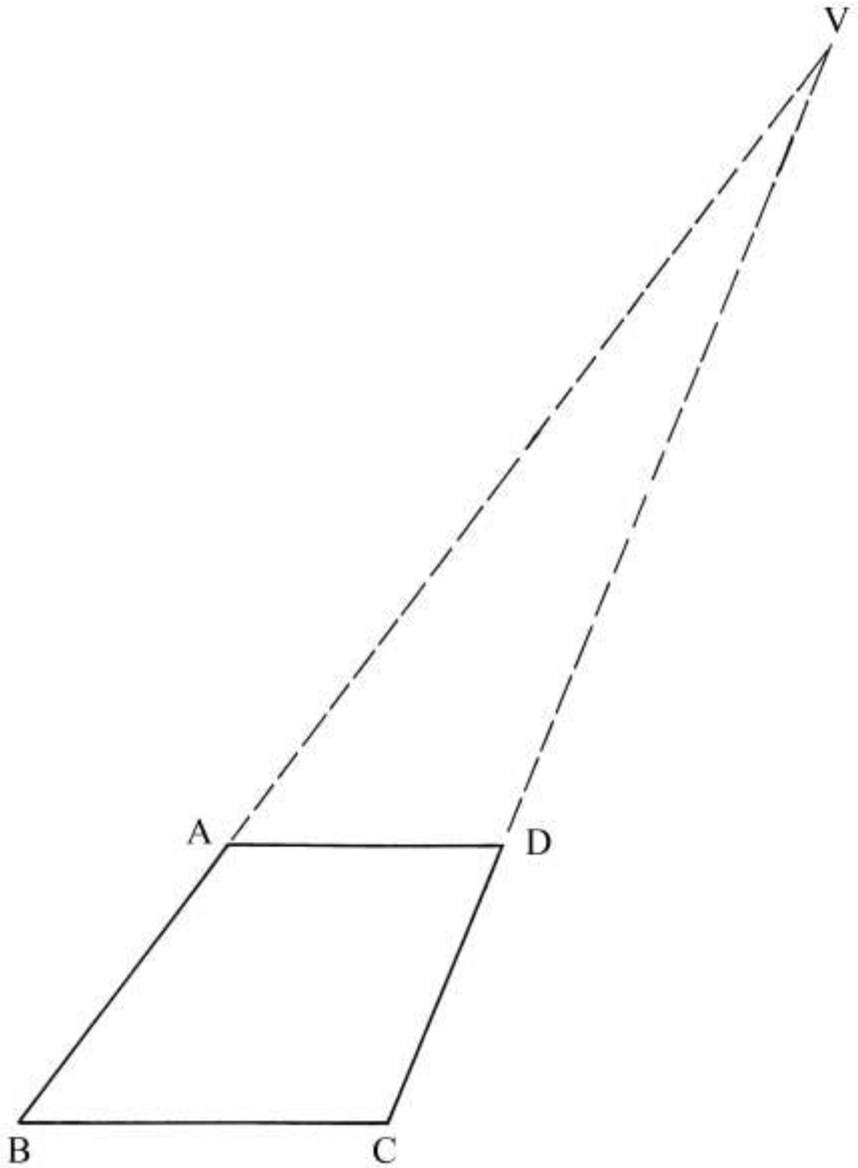
Il trapezio è scomponibile in tre poligoni:

* il triangolo rettangolo ABF;
* il rettangolo AFCH;
* il triangolo rettangolo CDH.



Il primo triangolo, ABF, ha lati lunghi 9, 12 e 15 pertiche, lunghezze riconducibili alla prima terna primitiva 3-4-5; le lunghezze dei lati del triangolo CDH formano la seconda terna primitiva, 5-12-13.

Infine, il trapezio ABCD è originato dal triangolo scaleno BCV, tagliato lungo una retta che passa per i punti A e D:



Le lunghezze dei lati VB e VC sono ricavabili con le proporzioni:

BC : AD = BV : AV.

Ma BV = AB + AV.

Chiamando X la lunghezza di AV si ha:

BC : AD = (AB + AV) : AV

16 : 12 = (15 + X) : X da cui:

16 * X = 180 + 12 * X e 4 * X = 180 con X = 45 pertiche.

Vale anche la proporzione:

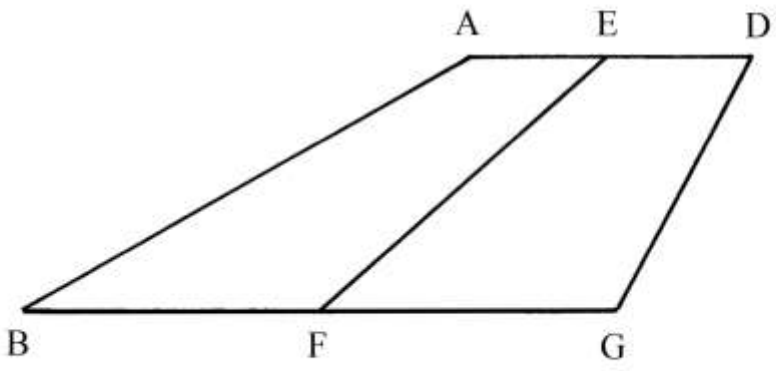
AB : AV = DC : DV da cui:

DV = (AV * DC)/AB = (45 * 13)/15 = 39 pertiche.

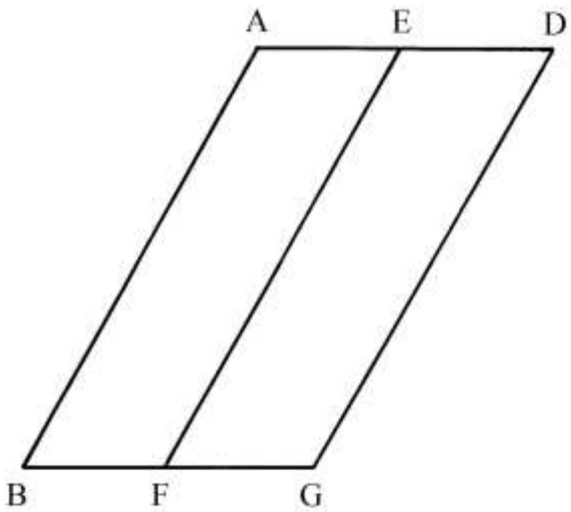
Il termine *chinante* deriva forse dal fatto che sia il triangolo BCV che il trapezio ABCD sono piegati verso destra, sono entrambi *declinati* o *declinanti* su di un fianco?

- -

Il quinto esempio è quello di un trapezio scaleno chiamato *pescie*:

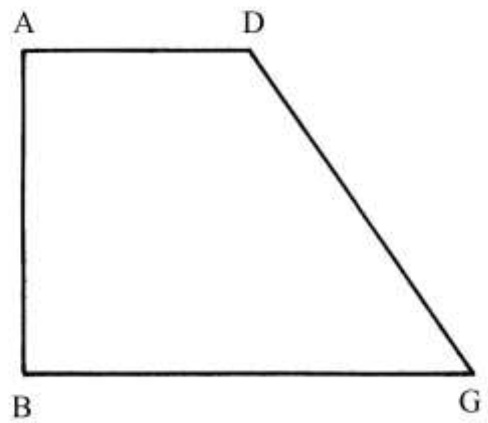


La trattazione dell’argomento si conclude con un sesto esempio, anche questo indicato come *pescie*, anche se si tratta di un parallelogramma:

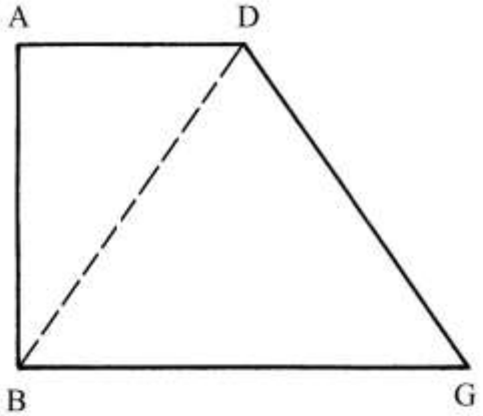


ALTRE DIVISIONI DI QUADRILATERI

ABGD è un trapezio rettangolo che deve essere diviso in due parti uguali:



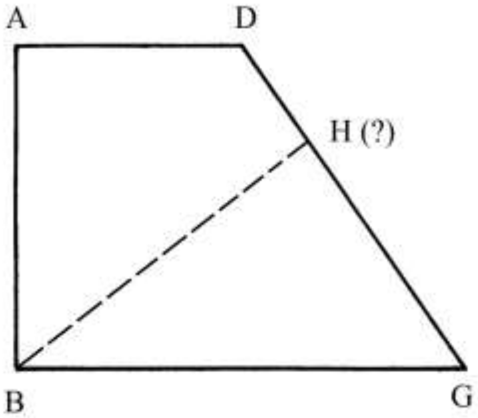
Tracciando la diagonale minore BD (il *diametro* secondo l’Autore) il trapezio è diviso in due triangoli:



*	il triangolo rettangolo ABD;
*	il triangolo BGD.

Chiaramente, i due triangoli hanno aree molto differenti e questa soluzione non è accettabile.

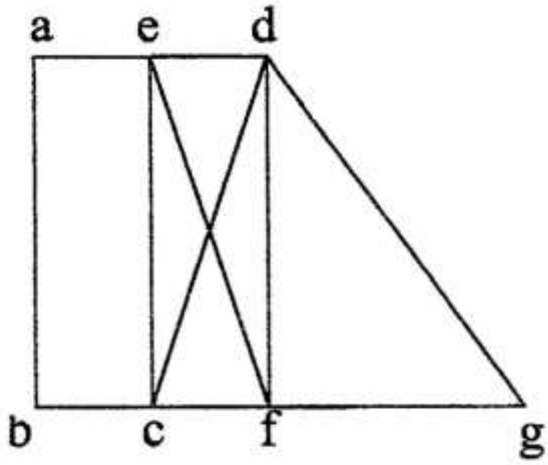
Un'altra opzione è data dalla tracciatura di una corda uscente dal vertice B fino a raggiungere un punto, H, sul lato opposto DG, ma la posizione esatta di questo punto richiede una più complessa costruzione:



L'Autore non scrive espressamente che il trapezio è rettangolo, né che la base minore sia lunga la metà di quella maggiore:

AG = 2 * AD.

Questi dati sono dedotti dall'analisi della figura originale e dalla misura dei suoi lati:



La soluzione impiegata utilizza una corda che muove dal vertice D oppure un'altra che esce dal punto E.

Determinare il punto medio di AD: è E. Dai punti E e D abbassare le perpendicolari alla base maggiore BG: sono EC e DF, lunghe quanto il lato AB.

Tracciare le diagonali del rettangolo ECFD: sono EF e CD.

I trapezi EABF e DABC hanno entrambi area uguale a *metà* di quella di ABGD.

Il trapezio ABGD ha area data da:

Area $_{ABGD}$ = (AD + BG)/2 * AB = (BG/2 + BG)/2 * AB = 3/4 * BG * AB.

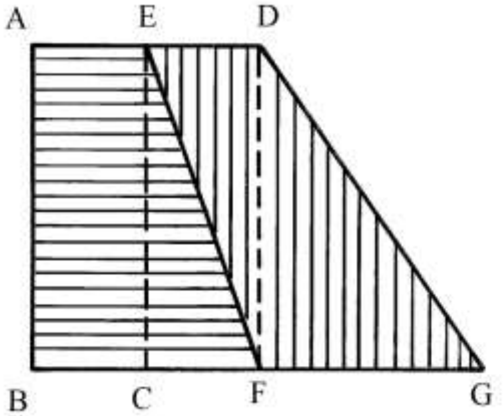
Il trapezio EABF ha area:

Area $_{EABF}$ = (AE + BF)/2 * AB = (AD/2 + AD)/2 * AB.

Ma AD = BG/2, per cui l'ultima espressione diviene:

Area $_{EABF}$ = (BG/4 + BG/2)/2 * AB = 3/8 * BG * AB, ciò che è la metà esatta dell'area di ABGD.

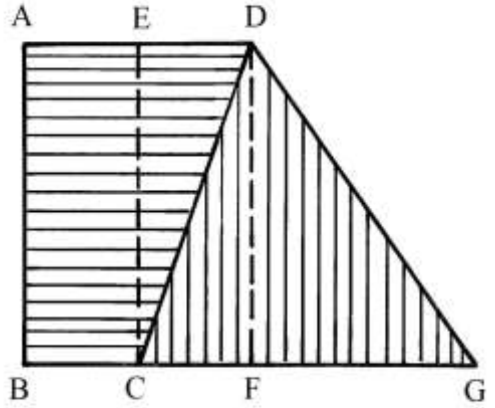
Il trapezio residuale EFGD ha anch'esso area uguale a metà di quella di ABGD:



Verifichiamo il valore dell'area di DABC:

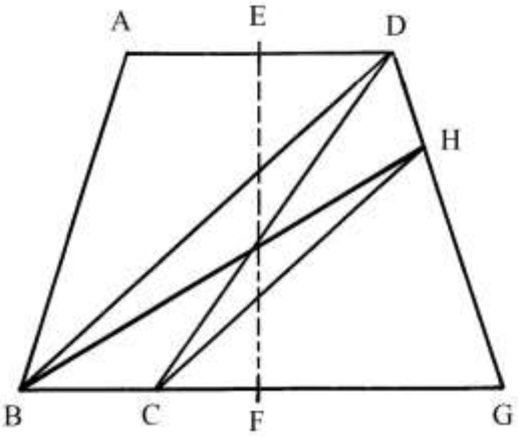
Area $_{DABC}$ = (AD + BC)/2 * AB = (BG/2 + BG/4)/2 * AB = (3/4 * BG)/2 * AB =
= 3/8 * BG * AB : anche questo trapezio ha area uguale a metà di quella di ABGD.

Pure il triangolo DCG ha area uguale a metà di quella di ABGD:



Divisione di un trapezio isoscele

Il trapezio isoscele ABGD deve essere diviso in due parti uguali con una corda uscente dal punto C collocato sulla base maggiore BG:



Come accade a numerose altre costruzioni contenute in questo manoscritteo, mancano più dettagliate spiegazioni: ad esempio, la natura "isoscele" di questo trapezio può essere dedotta sia dalle dimensioni della figura (che speriamo corrispondano alle implicite intenzioni dell'Autore) sia dalla presenza dei punti E e F che sembrano indicare i punti medi di AD e BG: il segmento EF pare perpendicolare alle due basi.

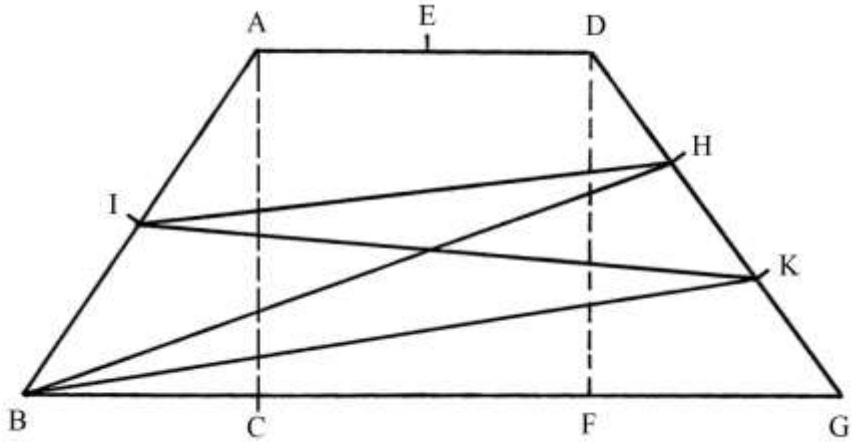
Veniamo alla costruzione. Tracciare la diagonale BD e dal punto C condurre una corda parallela a BD fino a incontrare DG nel punto H.

La corda CD taglia il trapezio ABGD in due parti di uguale superficiale, pari a metà di quella del trapezio:

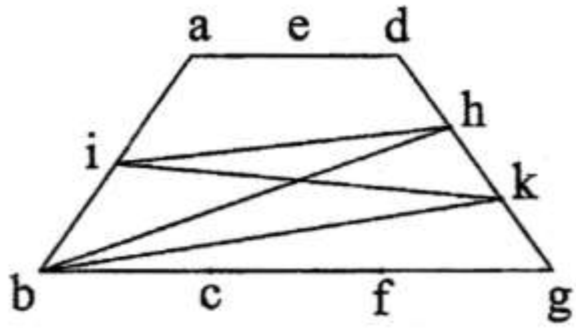
* il quadrilatero ABCD;
* il triangolo scaleno CGD.

<u>Un altro trapezio isoscele</u>

Il trapezio isoscele ABGD deve essere diviso in due parti uguali con una corda uscente dal punto I posizionato sul lato AB:



Anche se il testo non dice niente al riguardo, un attento esame della figura originale stima che essa mostri un trapezio isoscele:



Proprio sulla scorta dell'originale si può ipotizzare che l'Autore abbia fissato in I il punto medio di AB e che abbia diviso in tre parti uguali il lato DG, con la fissazione dei punti H e K: è solo un'ipotesi, ma l'originale non sembra permettere altre interpretazioni.

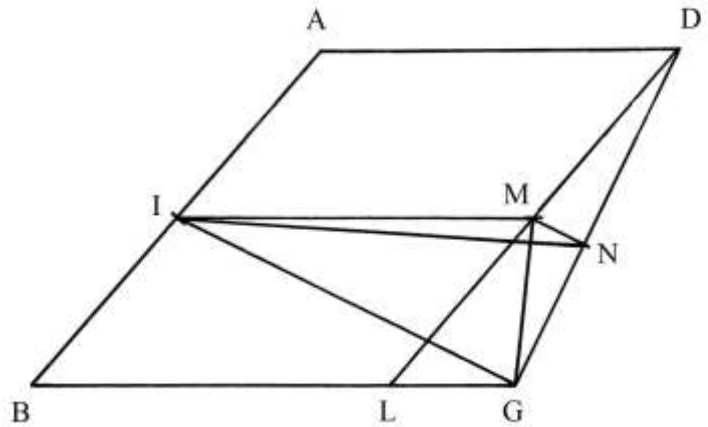
Tracciare le corde BH, BK, IH e IK.

Secondo l'Autore, la corda IK dividerebbe il trapezio in due quadrilateri, AIKD e IBGK, di uguali dimensioni.

Nonostante l'affermazione contenuta nel manoscritto affermi il parallelismo fra BK e IH le figure smentiscono tale assunto.

Divisione di un trapezio scaleno

ABGD è un trapezio scaleno che deve essere diviso in due parti uguali con una corda tracciata a partire dal punto medio di AB, I.



Dal vertice D disegnare la parallela al lato AB: è DL. M è il punto medio di DL.

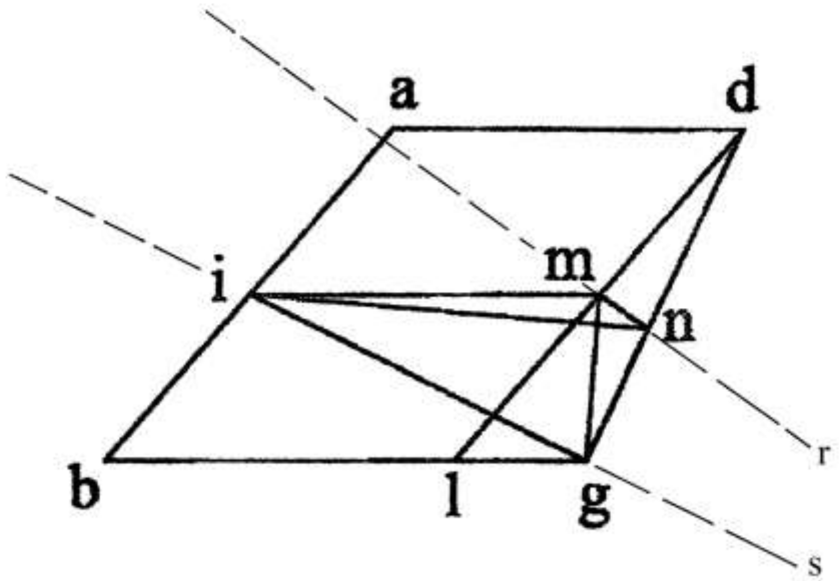
Tracciare i segmenti MI e MG e collegare I con G.

Dal punto M condurre la parallela a IG: è MN.

Infine, disegnare la corda IN: essa divide il trapezio ABGD in due quadrilateri: AIND e IBGN.

I triangoli IGM e IGN hanno uguali dimensioni perché hanno un lato in comune, IG, e i lati giacciono su linee parallele quali sono quelle MN e IG.

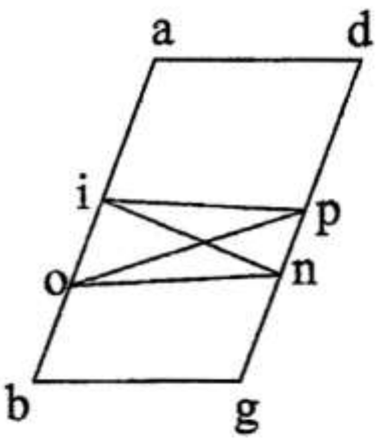
Riguardo alla precisione di questo e di altri disegni, lo schema che segue riproduce la figura originale:



Come scritto in precedenza, il segmento MN è parallelo alla corda IG: le rette passanti per M e N ("*r*") e per I e G ("*s*") non sono parallele ma convergono verso destra.

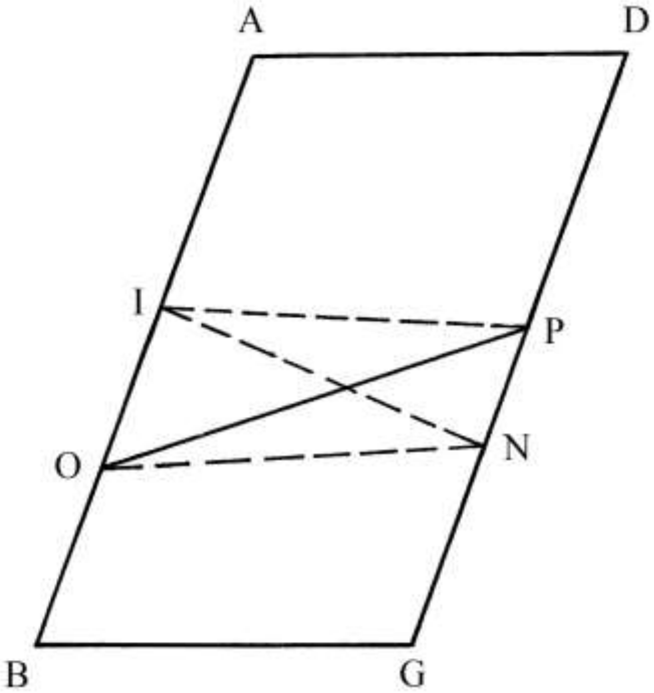
Divisione di un parallelogramma

ABGD è un parallelogramma e i suoi lati opposti sono fra loro paralleli: (AB e GD) e (AD e BG):



L'Autore non fornisce alcuna informazione sui procedimenti che impiega per deterrminare le posizioni dei punti I, O, N e P.

Lo schema che segue riproduce il grafico originale con le sue esatte proporzioni:



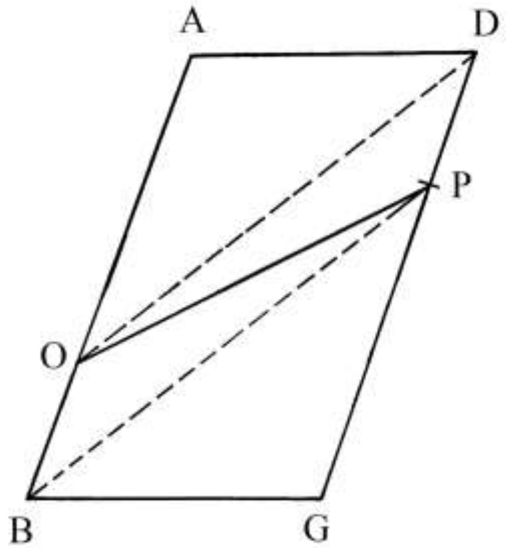
Secondo l’Autore, il quadrilatero AOPD avrebbe area uguale a metà di quella di ABGD: lo stesso dovrebbe valere per il quadrilatero OBGP.

Un semplice esame dell’ultimo schema mostra che il quadrilatero AOPD è più grande della metà di ABGD.

- APPROFONDIMENTO -

La costruzione descritta nel manoscritto è macchinosa e porta a un risultato apparentemente errato.

Lo schema che segue semplifica la costruzione:



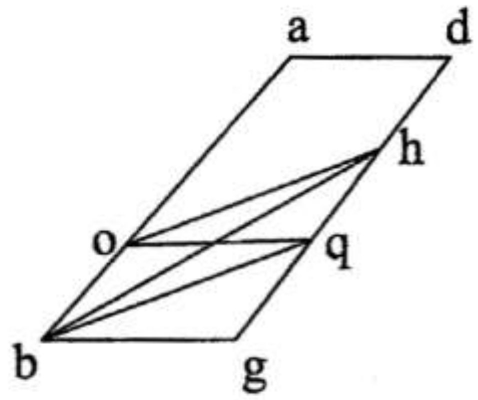
È dato il solito punto O posizionato sul lato AB. Tracciare la corda OD e parallelo ad essa il segmento BP.

Disegnare la corda OP. Il parallelogramma è così diviso in due trapezi di uguale superficie: AOPD e OBGP.

- -

Un altro parallelogramma

Il problema chiede di dividere in due parti di uguale superficie il parallelogramma ABGD:



La figura è *quasi* un parallelogramma perché solo i lati AD e BG sono *quasi* paralleli.

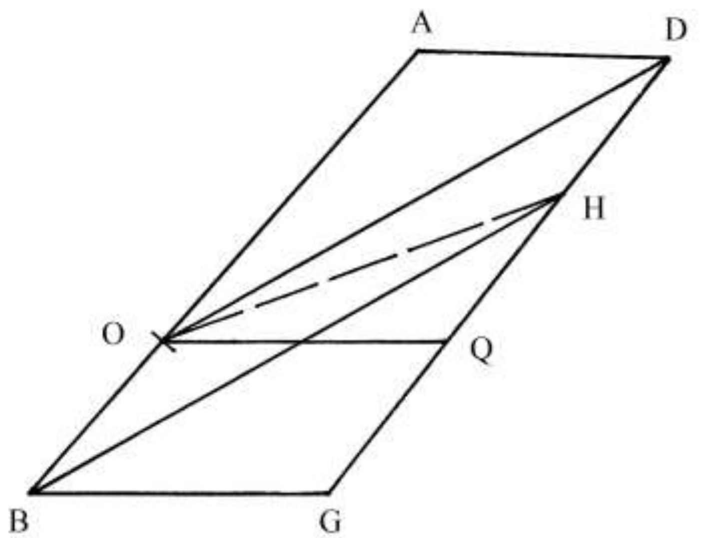
Il quadrilatero deve essere diviso in due parti di uguale area con una corda uscente dal punto O.

La soluzione contenuta nel manoscritto è presentata nello schema qui sopra, riprodotto dall'originale e ingrandito.

Tracciare la corda OQ, parallela al lato BG. Disegnare il segmento BG e parallela ad esso la corda OH.

Secondo l'Autore, AOQD ha area uguale a metà di quella di di ABGD: la costruzione è chiaramente errata.

Proviamo a darne una versione più corretta:



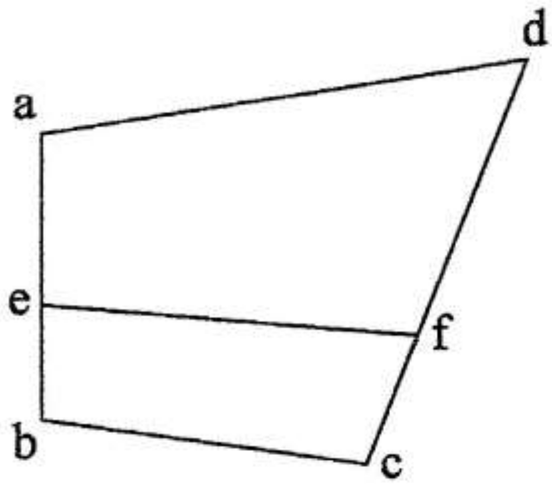
Disegnare la corda OD e parallelamente ad essa il segmento BH.

Il quadrilatero AOHD ha, con buona approssimazione, area uguale a metà di quella di ABGD.

Il punto Q e la corda OQ non hanno alcun ruolo in questa variante della costruzione.

Divisione di un quadrilatero in due parti differenti

Il quadrilatero ABCD deve essere diviso in due parti di differenti aree:



Il presupposto da cui muove la descrizione del problema è che i lati AB e CD siano paralleli ma ciò non è confermato dalla grafica.

La soluzione proposta è: fissare i punti E e F a distanza uguale a *un terzo* delle lunghezze dei lati AB e CD dai vertici B e C.

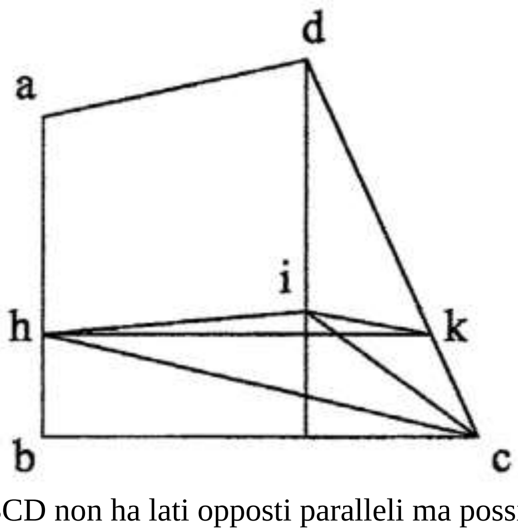
La corda EF dividerebbe ABCD in due quadrilateri:

* AEFD che ha area uguale a 2/3 di quella di ABCD;
* EBCF con area uguale a 1/3 di quella di ABCD.

Riteniamo che la costruzione fornisca risultati leggermente approssimati.

<u>Divisione di un quadrilatero</u>

Questa è l'ultimo dei problemi relativi ai quadrilateri.

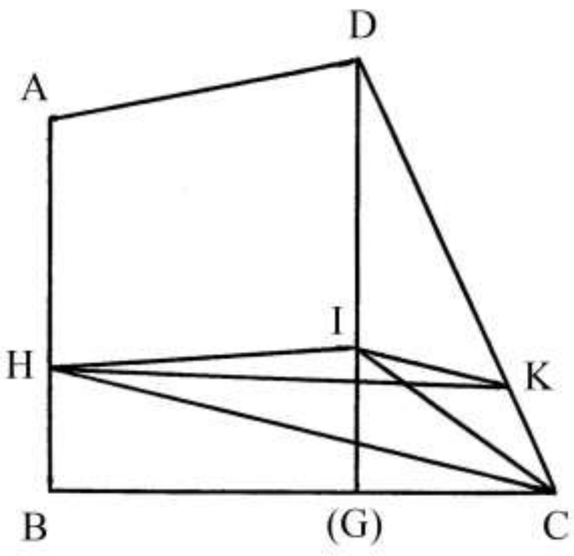


Il quadrilatero ABCD non ha lati opposti paralleli ma possiede soltanto un angolo interno *retto*, nel vertice B.

Il poligono deve essere diviso in due parti, una delle quali avrà area uguale a 1/3, con una corda uscente dal punto H, fissato a distanza BH = 1/3 * BA.

Dal punto D tracciare la parallela al lato AB: è D(G). Il punto G non è indicato sull'originale. Su D(G) fissare il punto I a distanza:

(G)I = 1/3 * (G)D.



Collegare H con C. Parallelamente a HC disegnare il segmento IK.

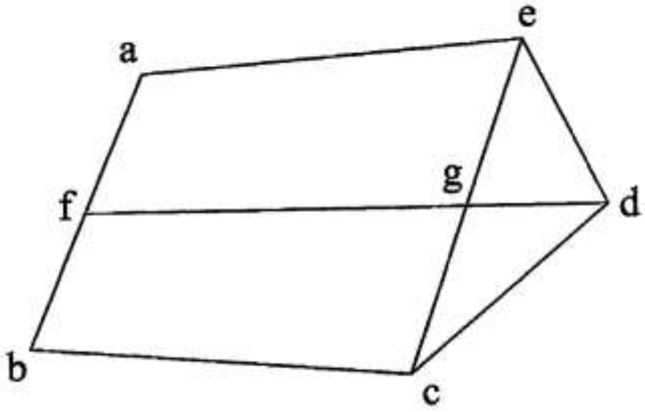
I quadrilateri HBCK e HBCI hanno aree uguali che corrispondo a *un terzo* di quella di ABCD. I due poligoni residuali hanno aree uguali a *due terzi* di quella di ABCD e sono rispettivamente:

* il quadrilatero HKDA;
* il pentagono non regolare HICDA.

DIVISIONE DEI PENTAGONI

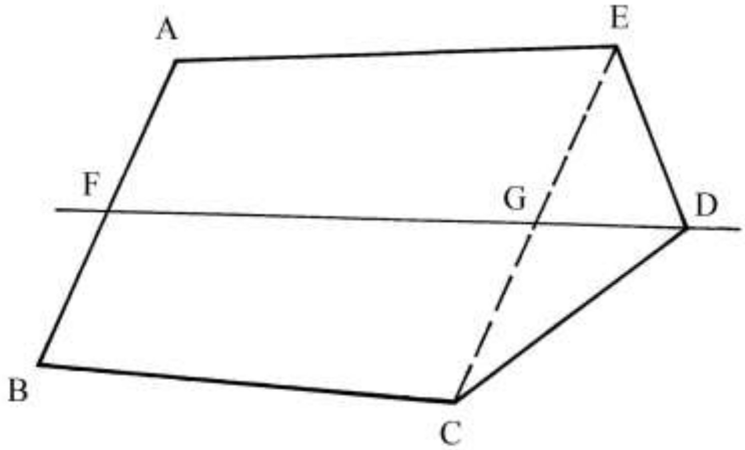
Questo paragrafo è dedicato alla scomposizione di *otto* diversi pentagoni non regolari.

Il primo è il pentagono ABCDE che deve essere diviso in due parti uguali:

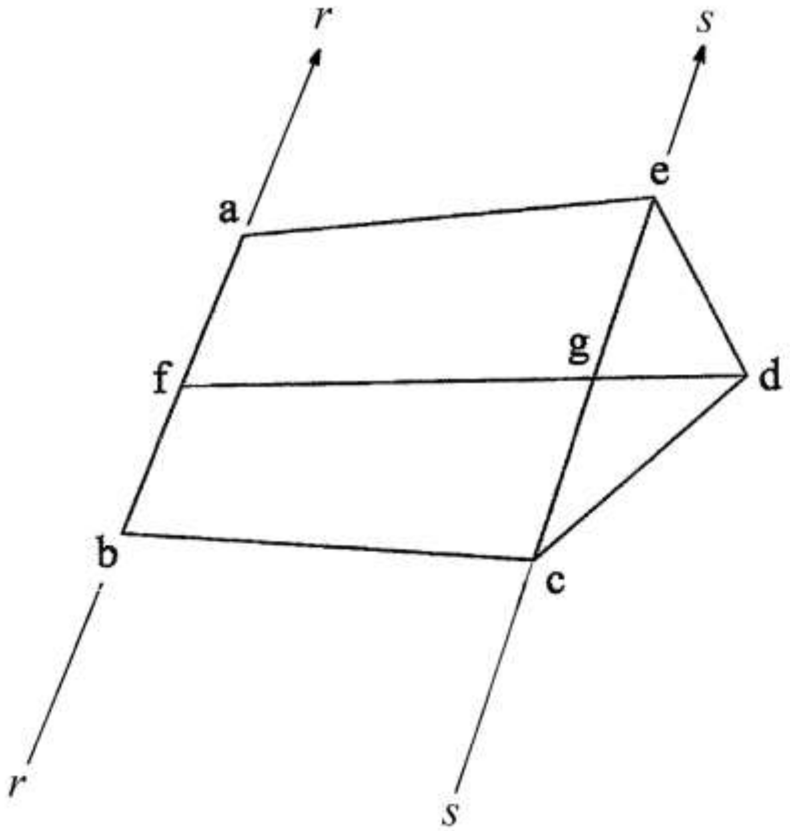


p(ri)ma figu(r)a p(en)tagoni

Tracciare la corda EC:



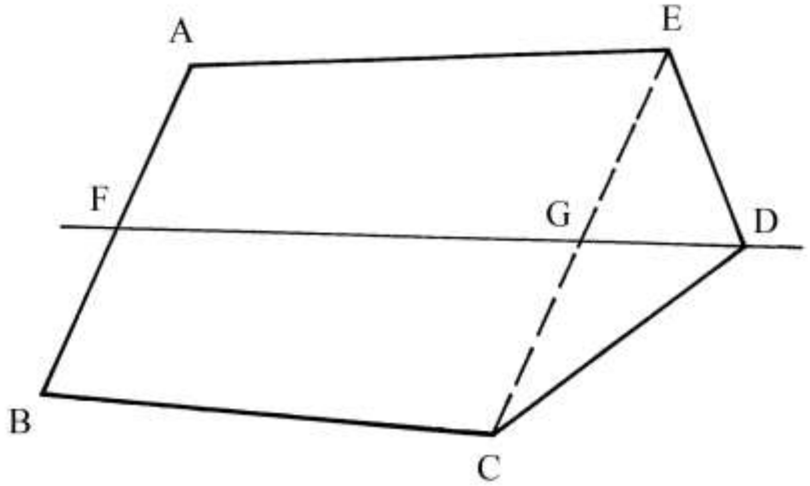
La soluzione fornita nel manoscritto è basata sull'ipotesi che AB e EC siano parallele, ma ciò non è esatto, come approfondisce lo schema che segue. I segmenti AB e EC giacciono su due rette, *r* e *s*, che non sono parallele, ma convergenti verso un punto in alto, fuori dal grafico:



Stando all’Autore, F e G sarebbero i punti medi dei segmenti AB e EC e FGD dividerebbe ABCDE in due quadrilateri: AFDE e FBCD che, sempre secondo il manoscritto, avrebbero uguale area.

Ciò non è sempre possibile perché solo casualmente la corda FD taglia EC nel suo punto medio G.

Lo schema che segue presenta una costruzione più corretta:

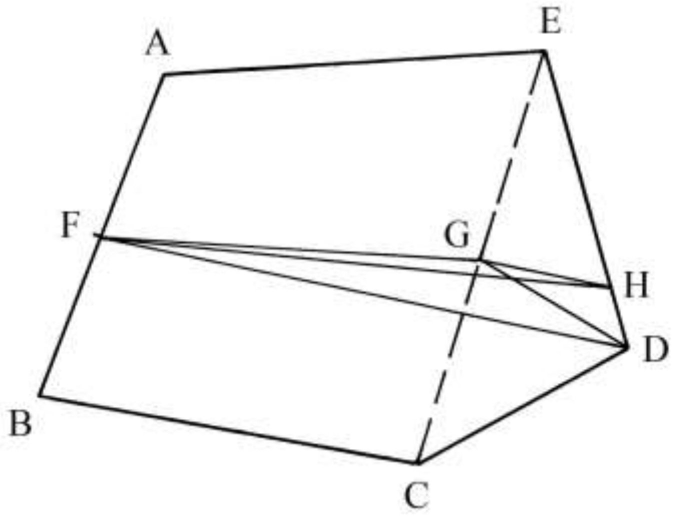


I punti F e G sono i medi dei segmenti ai quali appartengono e, per costruzione, la corda passante per questi due punti giace sulla retta FGD.

La conclusione è: i parallelogrammi AFDE e FBCD hanno area uguale a metà di quella di ABCDE.

Il secondo pentagono

ABCDE è un pentagono non regolare che deve essere diviso in due parti uguali con una corda uscente dal punto medio F del lato AB:



Tracciare la diagonale EC e fissare il suo punto medio G.

Disegnare FG e FD: le due linee non giacciono sulla stessa retta, per cui occorre procedere con la costruzione.

Collegare G con D.

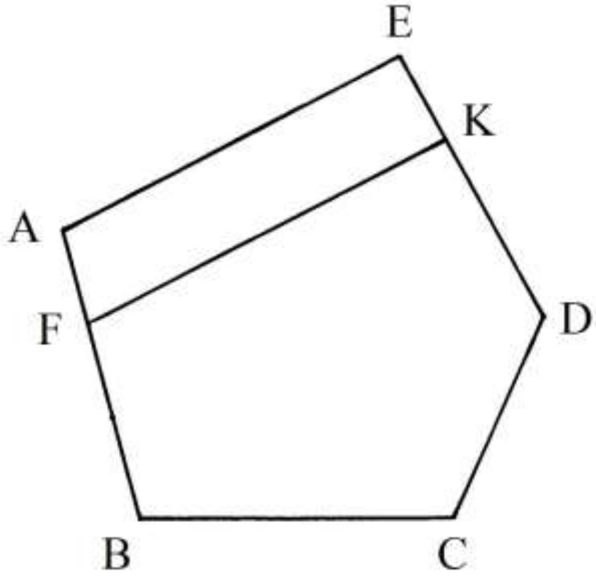
Dal punto G tracciare la parallela a FD: è GH.

La corda FH divide il pentagono ABCDE in due poligoni di uguale area:

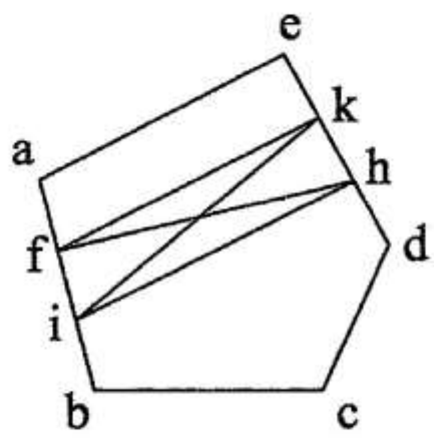
* il quadrilatero AFHE;
* il pentagono non regolare FBCDH.

Il terzo pentagono

La costruzione è apparentemente di difficile spiegazione perché l'Autore sembra presupporre la preliminare esistenza di due punti, F e K, fissati sui lati AB e ED:



Standando anche alla figura originale, la corda FK è parallela al lato AE:

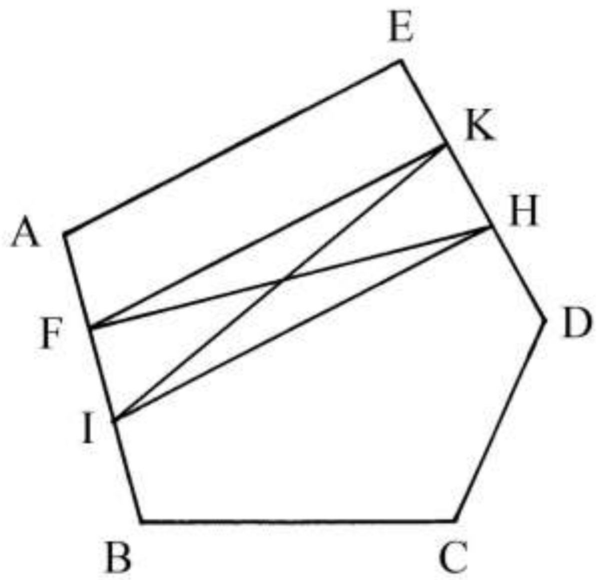


tertia

Il punto I è collocato sul segmento FB, ma non viene fornita alcuna indicazione sulla sua esatta posizione: dall’originale sembra potersi affermare che i punti F e I dividono il lato AB in *tre* parti uguali.

Sempre interpretando la figura origina, pare che le lunghezze dei lati AB e ED siano uguali.

Dal punto I tracciare due corde: IK e IH, parallela a quella FK.

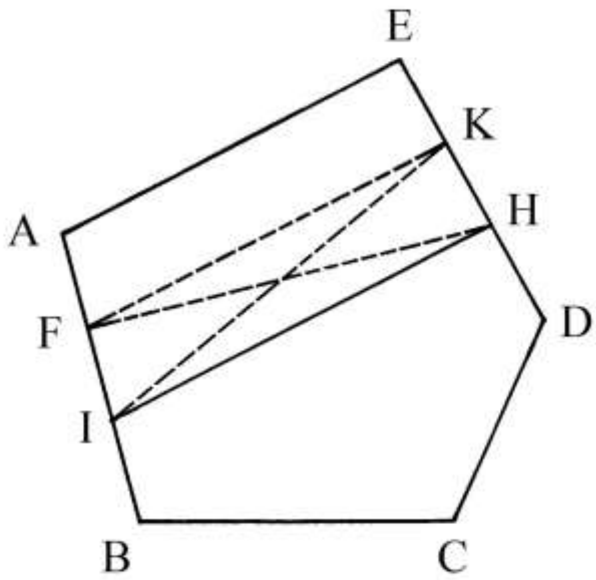


Stando al testo, il pentagono ABCDE risulta diviso in due poligoni di uguale area:

* il quadrilatero AIKE;
* il pentagono non regolare IBCDK.

La soluzione è graficamente *errata* perché il pentagono IBCDK ha area assai maggiore di quella di AIKE.

Forse la soluzione corretta è mostrata nello schema che segue:

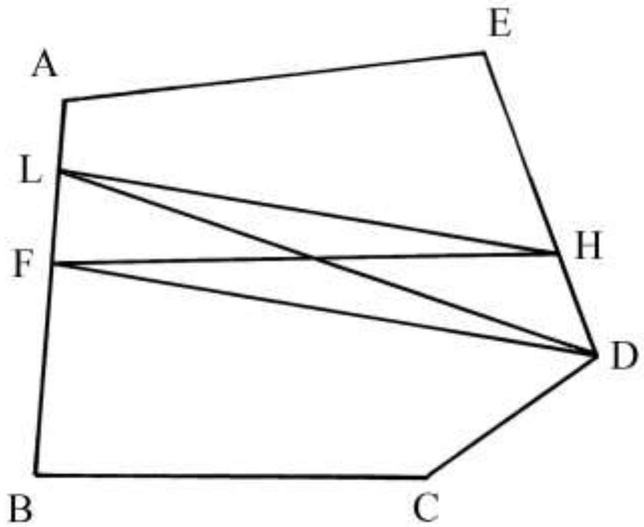


Le aree delle due figure separate dalla corda IH *potrebbero* essere la soluzione corretta e risultare uguali; i due poligoni sono:

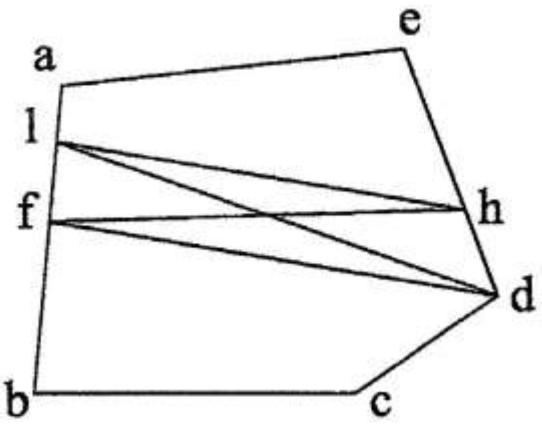
* il trapezio scaleno AIHE;
* il pentagono non regolare IBCDH.

<u>Il quarto pentagono</u>

Il disegno relativo a questo problema è abbastanza spreciso. Lo schema che segue lo riproduce rispettando le proporzioni originali:



Nessuna informazione è fornita sulle regole seguite per fissare i punti F e L sul lato AB: *forse* F potrebbe essere il punto medio del lato ma l’analisi del disegno originale non conferma questa ipotesi:



q(uar)ta figu(r)a

La costruzione *può* essere spiegata con ll'ipotesi che segue. Tracciare la corda FD e parallela ad essa la corda LH; disegnare il segmento LD.

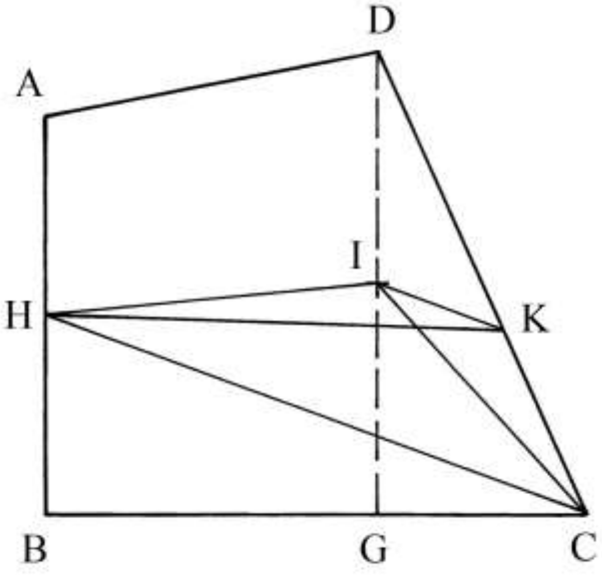
Secondo l'Autore, il pentagono ABCDE risulterebbe diviso in due poligoni di area uguale:

* il quadrilatero ALDE;
* il quadrilatero LBCD.

- APPROFONDIMENTO -

Cerchiamo di ricostruire la divisione dell'ultimo pentagono. Utilizziamo a questo scopo la ripartizione dell'ultimo *quadrilatero*, contenuta nel precedente capitolo: in quel caso, il poligono è stato diviso in *tre* parti uguali.

Provvediamo a dividerlo in *due* parti uguali:



Dal vertice D abbassare la perpendicolare alla base BC: è DG. Dato che l'angolo in B è retto, DG risulta parallela a AB.

Fissare i punti medi di AB e di DG: sono, rispettivamente, H e I.

Tracciare i segmenti HI e IC e la corda HC. Parallelamente a questa ultima, disegnare il segmento IK.

Il quadrilatero ABCD è diviso in due parti uguali:

* il quadrilatero HBCK;
* il quadrilatero AHKD.

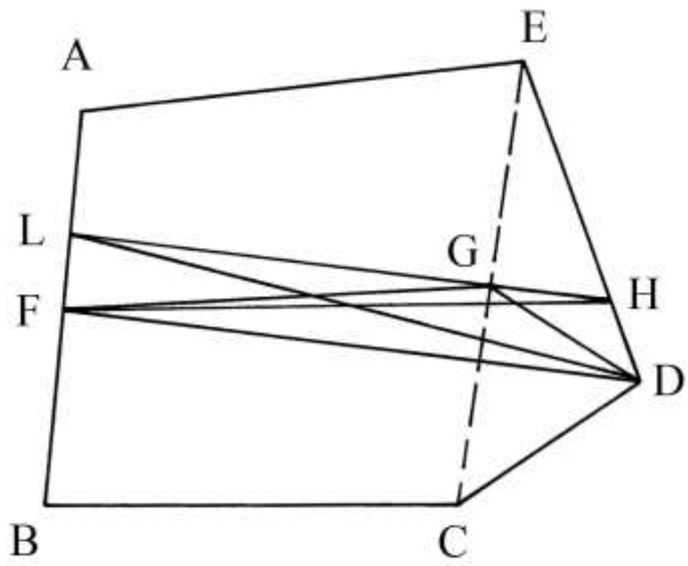
Esiste una ripartizione alternativa:

* il quadrilatero HBCI;
* il pentagono non regolare AHICD.

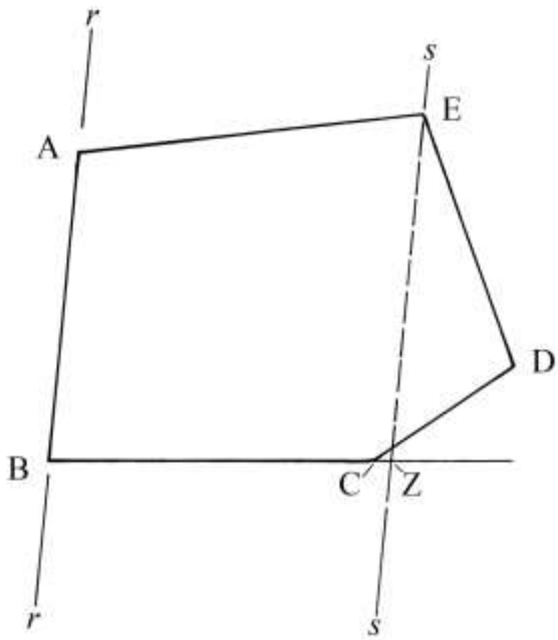
L’essenza di questa costruzione sta nell’aver disegnato la corda DG *parallela* al lato AB.

%%%%%%%%%%%%%%%%%

Applichiamo alla soluzione del problema del *quarto pentagono* la regola appena usata.



Tracciare la diagonale EC, che non è parallela al lato AB: le rette passanti per AB e per EC convergono verso un punto esterno alla figura e posizionato in basso. Non è possibile disegnarla parallela a AB perché il punto di arrivo, Z, cadrebbe fuori dal pentagono, sul prolungamento di BC:



Fissare i punti medi di AB e di EC: sono F e G.

Collegare F con GG e con D.

Dal punto G disegnare un segmento parallelo a FD: è GH.

Tracciare FH e LD.

La costruzione non corrisponde a quella del manoscritto.

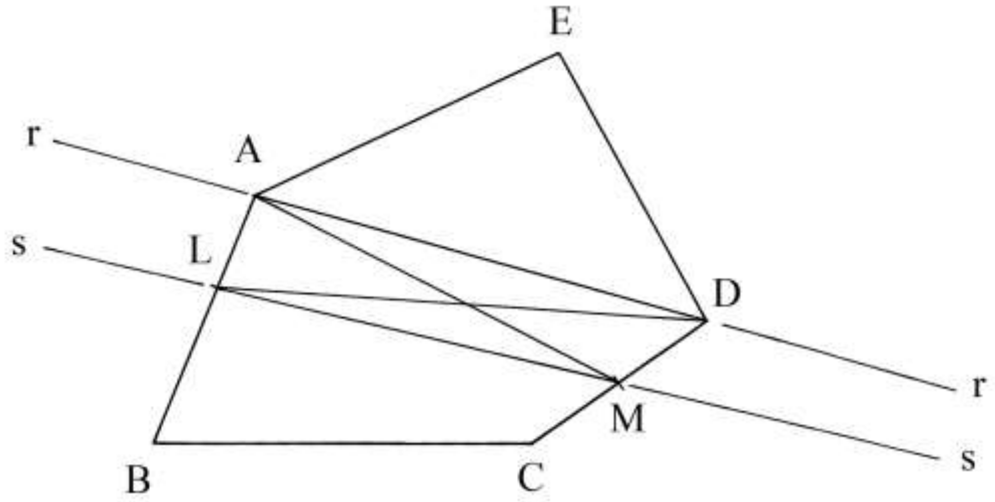
Se la soluzione qui esposta è accettabile, il pentagono originario è suddiviso in due poligoni di area uguale a metà della sua:

* il quadrilatero ALDE;
* il quadrilatero LBCD.

- -

Il quinto pentagono

Il pentagono ABCDE deve essere diviso in due parti uguali con una linea uscente dal vertice D.



Stabilire il punto medio di CD: è M.

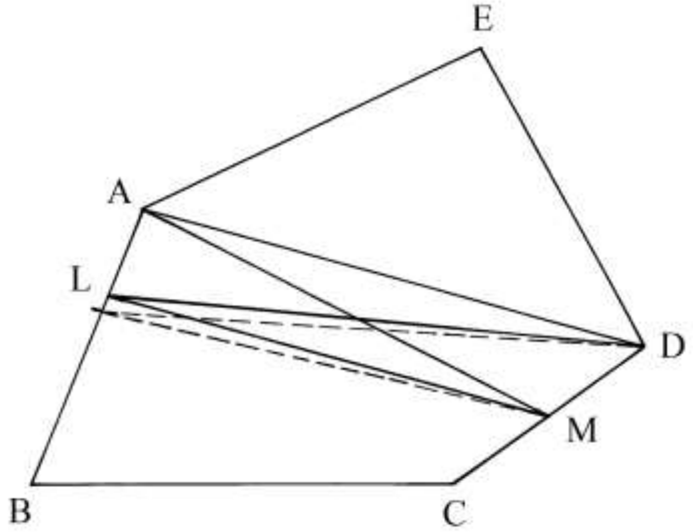
Tracciare la diagonale AD e la corda AM.

Dal punto M condurre la parallela a AD: è ML.

Secondo l'Autore, il quadrilatero AMDE ha area uguale a metà di quella di ABCDE. L'altra metà corrisponderebbe all'area del quadrilatero ABCM.

La costruzione originale presenta un problema: le rette che prolungano la diagonale AD ("*r*") e la corda LM ("*s*") non sono parallele ma convergono verso un punto a destra.

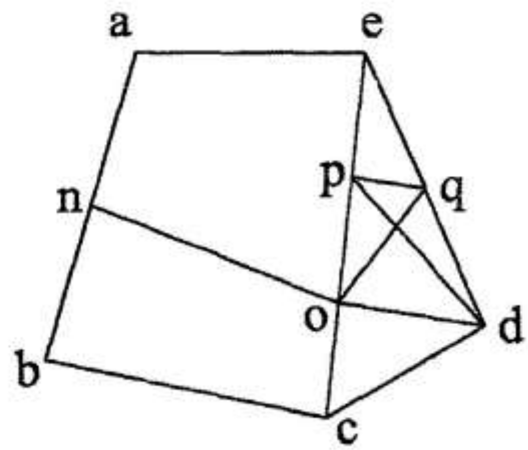
Lo schema che segue propone un'ipotesi più corretta:



Le linee tratteggiate sono ricavate dal primo schema.

Il sesto pentagono

Il pentagono non regolare *abcde* deve essere diviso in due parti uguali:

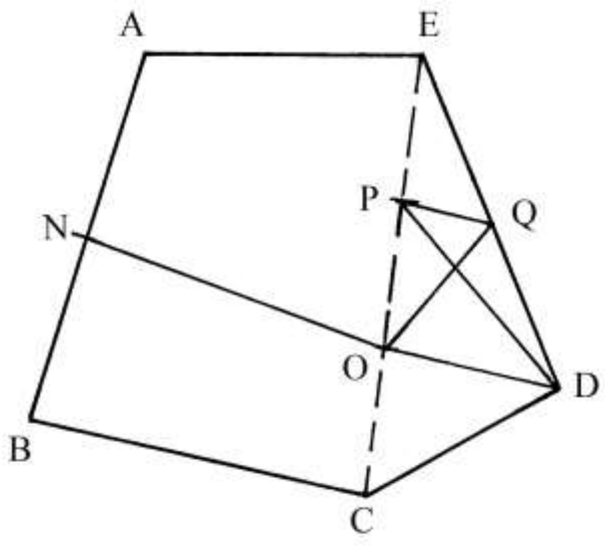


Standando al testo, il punto *n* è il medio del lato *ab* e *p* quello di *ec*: la figura è chiaramente fuori scala; infatti, il punto *p* non è posizionato a metà di *ec*.

Secondo l'Autore, il pentagono non regolare *anoqe* avrebbe area uguale a metà di quella di *abcde*.

- APPROFONDIMENTO -

L'imprecisione del disegno originale spinge a proporre la costruzione che è mostrata nello schema che segue:



Tracciare la diagonale EC.

Stabilire i punti medi di AB e di ED: sono N e Q.

Dividere in *tre* parti uguali la diagonale EC: sono fissati i punti O e P.

Collegare O con N e con D. Disegnare il segmento PQ, parallelo a OD.

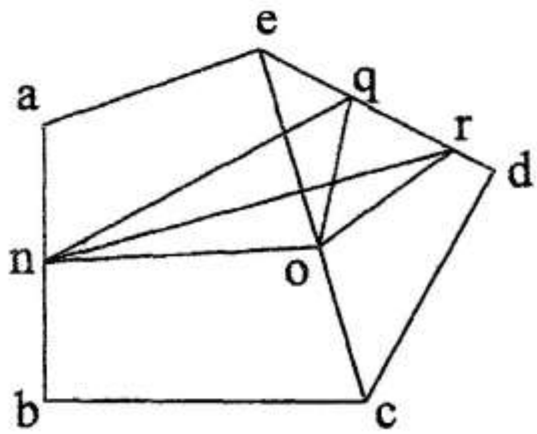
Il pentagono non regolare ANOQE *avrebbe* area uguale a metà di quella di ABCDE.

Anche l'esagono non regolare NBCDQO avrebbe area uguale a metà di quella di ABCDE.

- -

Il settimo pentagono

Anche la descrizione di questo nuovo pentagono *abcde* contenuta nel manoscritto presenta diverse incertezze:



La posizione dei punti *q* e *r* è di difficile interpretazione.

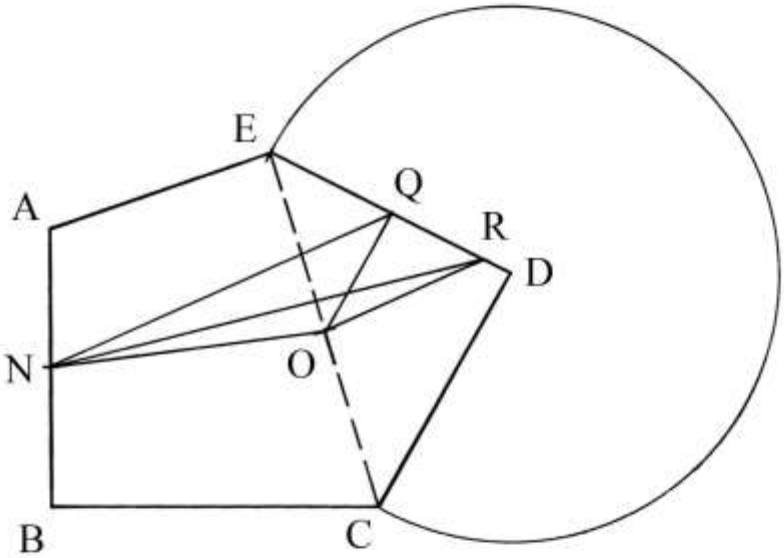
Il punto *o* è forse stato stabilito quale medio della diagonale *ec*?

Secondo l'Autore, il quadrilatero *anre* e il pentagono *nbcdr* avrebbero area uguale e pari alla metà di quella di *abcde*.

È utile notare come l'angolo nel vertice *b* sia retto.

- APPROFONDIMENTO -

Tentiamo di interpretare il precedente schema.



Tracciare la diagonale EC: dato che lati DE e DC hanno uguale lunghezza (così è nell'originale), il triangolo ECD è *isoscele*.

Fissare i punti medi di AB e di EC: sono N e O. Disegnare NO.

Dal punto O condurre la parallela a CD: è OQ.

Tracciare la corda NQ e parallelo ad essa il segmento OR.

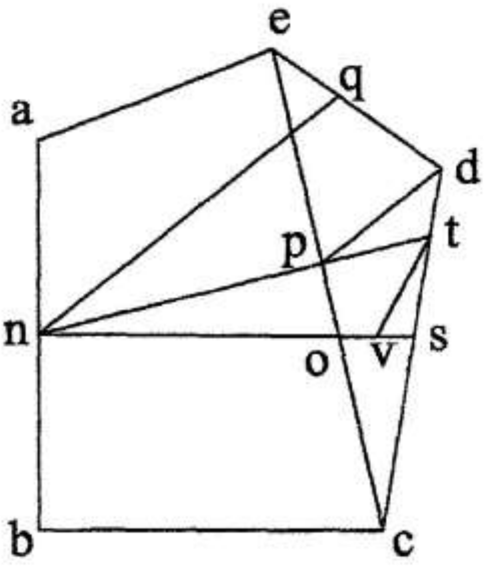
Il pentagono ABCDE sarebbe diviso in due poligoni di area uguale:

* il pentagono ANORE;
* l'esagono NBCDRO.

- -

<u>L'ottavo pentagono</u>

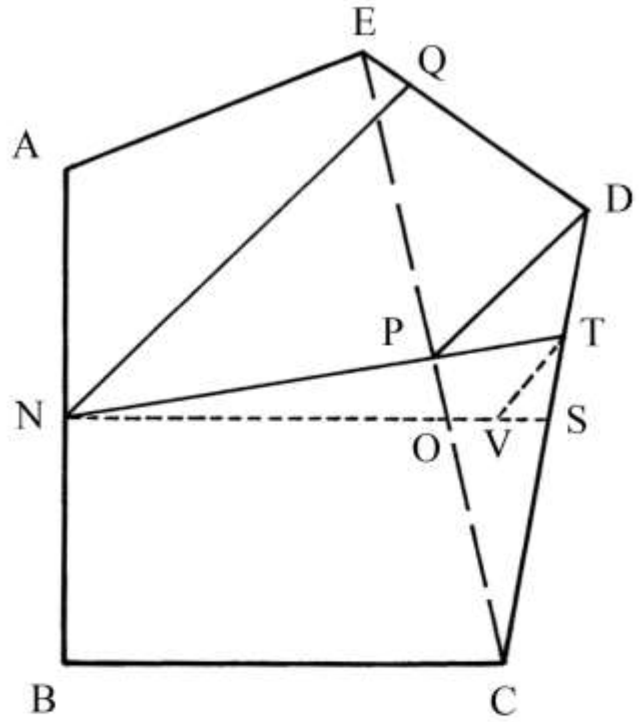
Pure questo ultimo pentagono è un problema che presenta difficoltà di comprensione:



È tracciata la consueta diagonale *ec*.
Il punto medio del lato *ab* sempre essere *n*.
La corda *ns* pare parallela al lato *bc*, oppure il punto *s* è il medio di *cd*.
La corda *nt* dividerebbe il pentagono *abcde* in due poligoni di uguale area:
* il pentagono *antde*;
* il quadrilatero *nbct*.

- APPROFONDIMENTO -

Proponiamo una soluzione del problema:



L'angolo in B è retto.
Disegnare la diagonale EC.
Stabilire i punti medi di AB e di EC: sono N e P.
Tracciare il segmento passante per N e per P fino a incontrare in T il lato DC.
Collegare P con D.
Dal punto N disegnare una corda, NQ, parallela a PD.
Dal punto N condurre una corda parallela al lato BC: è NS. Essa taglia EC nel punto O. Determinare il punto medio di OS: è V. Infine, tracciare TV.
A che cosa servono NS e TV? A questa domanda è difficile rispondere.
La corda NT divide ancora ABCDE in due poligoni di uguale area:
* il pentagono ANTDE;
* il quadrilatero NBCT.

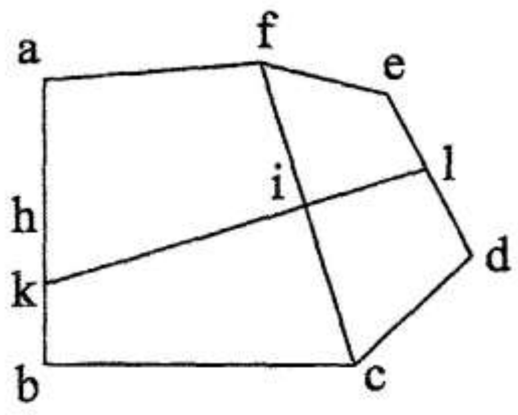
- -

DIVISIONE DEGLI ESAGONI

In questo breve capitolo sono presentate le divisioni di tre esagoni non regolari da ripartire in due poligoni di uguale area.

Il primo esagono

Il caso è presentato nello schema originale che segue:



L'angolo interno nel vertice *b* sembra retto.

Viene tracciata la diagonale *fc*. È fissato il punto medio del lato *ab*: è *h*, punto dal quale non parte alcun segmento.

Il punto medio della diagonale *fc* è *i*.

Dato che *ab* e *fc* non sono paralleli, la divisione del quadrilatero *abcf* in due parti uguali (*akif* e *kbci*) è realizzata con la corda *ik*, della cui costruzione non vi è traccia nel manoscritto; per tale ragione il punto *k* non coincide con *h*.

Forse *k* è il medio di *hb*?

Occorre ora dividere in due parti uguali il quadrilatero *cdef* e anche di questo non vi è alcuna spiegazione.

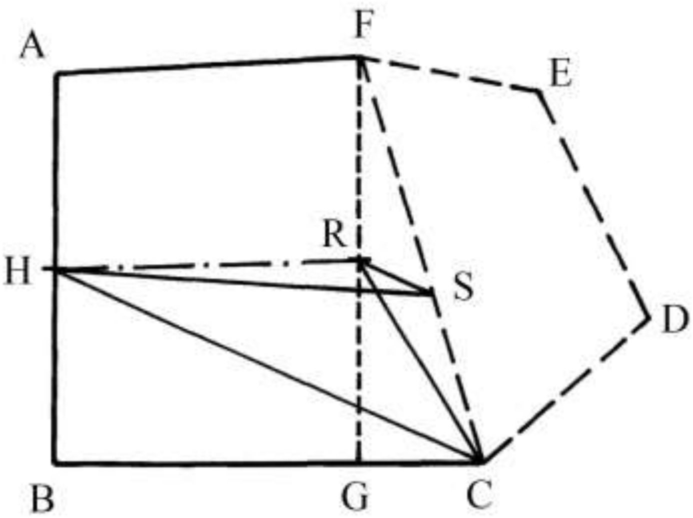
Nel caso più favorevole, prolungando *ki* verso destra viene determinato il punto *ℓ* sul lato *de*: *iℓ* divide *cdef* in due parti uguali.

In conclusione, l'esagono *abcdef* risulta diviso in due poligoni di uguale area:

- il pentagono *akℓef*;
- il pentagono *kbcdℓ*.

- APPROFONDIMENTO -

Lo schema che segue riproduce il precedente esagono ABCDEF:



I lati FE, ED e DC sono tratteggiati.

Tracciare la diagonale FC. La costruzione che segue è limitata alla divisione in *due* parti uguali del quadrilatero ABCF.

Fato che la diagonale FC non è parallela al lato AB, dal vertice F tracciare la parallela a AB (e perpendicolare a BC): è FG.

Determinare i punti medi di AB e FG: sono H e R.

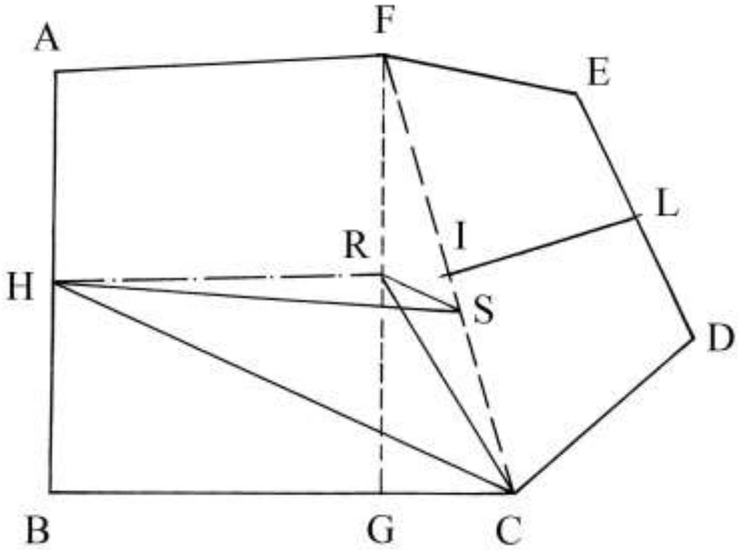
Collegare R con H e con C.

Tracciare la corda HC e parallelo ad essa il segmento RS.

La corda HS divide il quadrilatero ABCF in due parti di area uguale:

* il quadrilatero AHSF;
* il quadrilatero HBCS.

Per proseguire, occorre dividere in due parti il quadrilatero residuale CDEF. Fissiamo i punti medi della corda FC e del lato opposto ED: sono I e L.



Tracciare il segmento IL: con una certa approssimazione, esso divide in due parti *quasi* uguali il quadrilatero CDEF.

A questo punto l’esagono non regolare ABCDEF è diviso in due poligoni di area *quasi* uguale:

* l’ettagono AHSILEF;
* l’ettagono HBCDLIS.

Entrambi i poligoni non sono regolari.

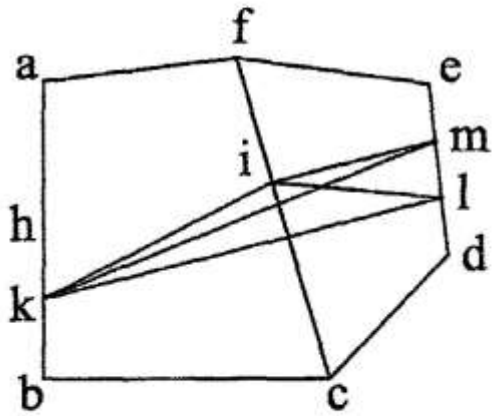
Questo APPROFONDIMENTO mira a mostrare le difficoltà incontrate dall’Autore del Volgarizzamento.

- -

Il secondo e il terzo esagono

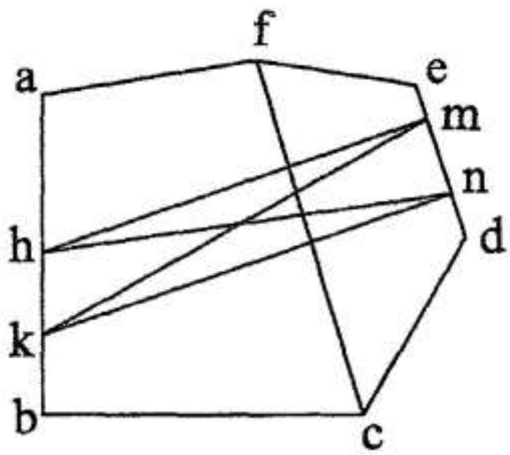
Le due costruzioni che seguono sono basate sul fatto che il segmento *kiℓ* del caso precedente non sia parte di una retta (e cioè *ki* e *iℓ* siano *adiacenti*), ma sia formato da due segmenti *consecutivi* e quindi costituiscano una linea spezzata.

Nel caso del secondo esagono, la corda *km* divide l’esagono in due parti uguali:



* il pentagono *akℓef*;
* il pentagono *kbcdℓ*.

Infine, il terzo esagono è presentato nella figura originale che segue:



In questo esempio, il punto medio di *ab*, *h*, assolve a una funzione: *hn* è la corda che divide l’esagono originario in due poligoni di area uguale:

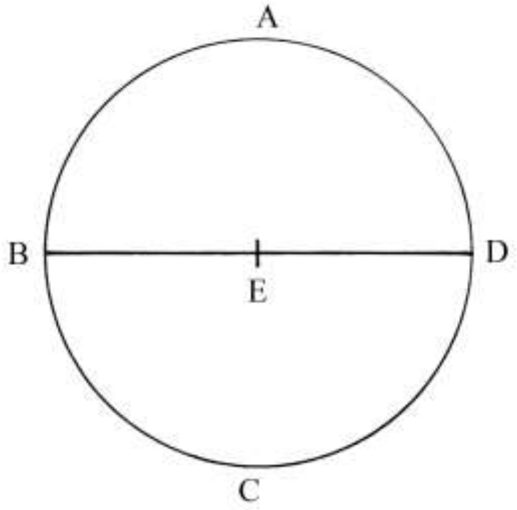
* il pentagono *ahnef*;
* il pentagono *hbcdn*.

DIVISIONE DI CERCHI E SEMICERCHI

Le costruzioni che seguono sono di una banalità sconcertante.

Divisione di un cerchio in due parti uguali

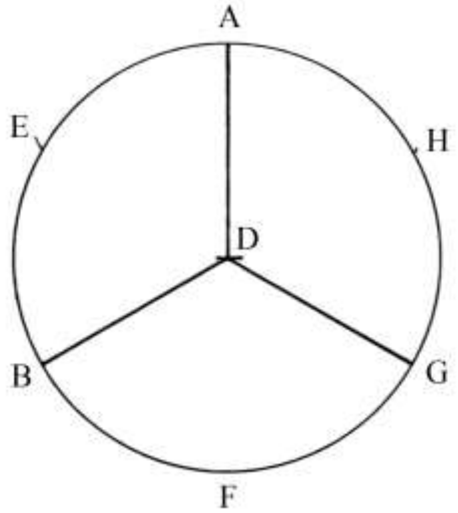
Il cerchio *abcd* deve essere diviso in due parti uguali:



Con l'aiuto di una pertica posata in corrispondenza del centro E, tracciare il diametro BD. Il cerchio è diviso in due semicerchi.

Divisione di un cerchio in tre parti uguali

La divisione è spiegata dall'Autore con l'impiego di tre pertiche: a partire dal centro D sono tracciati i raggi DA, DB e DG che dividono il cerchio:

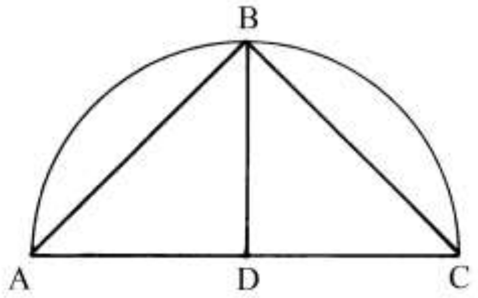


Il metodo è piuttosto primitivo perché non assicura l'esatta divisione dell'angolo giro in D in tre angoli uguali.

Occorrerebbe usare un compasso, dopo aver tracciato almeno il diametro verticale AF, compasso che sul terreno può essere sostituito da una corda tenuta in tensione.

Divisione di un semicerchio in due parti uguali

ABC è un semicerchio di raggio AD e centro in D:



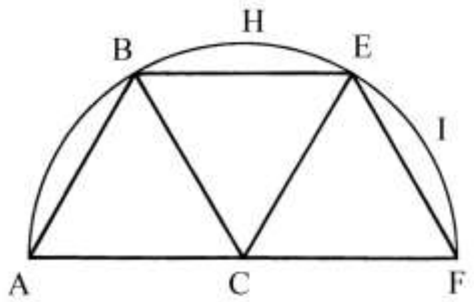
Deve essere diviso in due parti uguali.

L'Autore traccia il raggio DB perpendicolare al diametro AC.

Poi disegna le corde AB e BC: misurandole, se esse risultano di uguale lunghezza, allora anche gli archi AB e BC sono uguali.

Divisione di un semicerchio in tre parti uguali

Il semicerchio AFBHEIG deve essere diviso in tre parti uguali:



Il problema è risolto dividendo in tre parti uguali l'arco di circonferenza ABHEIF.

Tracciare poi i raggi CB e CE e le corde AB, BE e EG.

Bibliografia

1. Arrighi Gino (a cura e con introduzione di), “La pratica di geometria”. Volgarizzata da Cristofano di Gherardo di Dino cittadino pisano, dal Codice 2186 della Biblioteca Riccardiana di Firenze, Pisa, Domus Galilæana, 1966, pp. 97.
2. Baldelli Ignazio, “Di un volgarizzamento pisano della *Practica Geometrie*”, in “Studi in onore di Alfredo Schiaffini”, “Rivista di cultura classica e medievale”, VII/1-3, 1965, pp. 74-92.
3. Boncompagni Baldassare, “Scritti di Leonardo Pisano matematico del secolo decimoterzo”, Vol. II, Roma, Tipografia delle Scienze Matematiche e Fisiche, 1862, pp. 283.
4. Calzolani Sergio, “Unità di misura Toscane”, 2020, pp. 55, www.geometriapratica.it
5. Feola Francesco, “Gli esordi della geometria in volgare”. Un volgarizzamento trecentesco della *Practica Geometriae* di Leonardo Pisano, Firenze, Accademia della Crusca, 2008, pp. 231.
6. Ferraro Alfredo, “Dizionario di metrologia generale”, Bologna, Zanichelli, 1959, pp. XVI+270.
7. Guidi Giuseppe, “Ragguaglio dei pesi, delle monete e delle misure”, Firenze, Giovan-Gualberto Guidi e Ulisse Pratesi, Firenze, 1855, seconda edizione, pp. VII+320.
8. Høyrup Jens, “Linee larghe. Un’ambiguità geometrica dimenticata”, “Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche”, XV, 1995, n. 1, pp. 3-14.
9. Hughes Barnabas, “Fibonacci’s *De Practica Geometrie*”, New York, Springer, 2010, pp. xxxv+408.
10. Hughes Barnabas, “An early abridgement of Fibonacci’s *De practica geometrie*”, “Historia Mathematica”, 37 (2010), pp. 615-640.
11. Istituto Centrale di Statistica, “Misure locali per le superfici agrarie”, Roma, A.B.E.T.E., 1950, seconda edizione, pp. 191.
12. Luzzati Michele, “Note di metrologia pisana”, “Bollettino Storico Pisano”, XXXI-XXXII (1962-1963), Livorno, S.E.I.T., 1965, pp. 191-220.
13. Martini Angelo, “Manuale Di Metrologia: Ossia, Misure, Pesi e Monete in Uso Attualmente E Anticamente Presso Tutti I Popoli”, Torino, Ermanno Loescher, 1883, pp. VIII+904.
14. Ministero di Agricoltura, “Tavole di Ragguaglio dei Pesi e delle Misure Già in Uso Nelle Varie Provincie del Regno Col. Peso Metrico Decimale Approvate con Decreto Reale 20 Maggio 1877, N. 3836”, Roma, Stamperia Reale, 1877, pp. 767.
15. Rozza Nicoletta, “La *Pratica Geometrie* di Leonardo Pisano: edizione critica, traduzione e commento delle *Distinctiones* I-III”, tesi di dottorato, Università degli Studi di Napoli “Federico II”, anno accademico 2014-2015, pp. 632.
16. “Tavole di Ragguaglio per la riduzione dei pesi e misure che si usano in diversi luoghi del Granducato di Toscana al peso e misura vegliante in Firenze”, Firenze, Gaetano Cambiagi Stampator Granducale, 1782, pp. XVII+835.
17. Uzielli Gustavo, “Le misure lineari medioevali”, Firenze, Bernardo Seeber, 1899, pp. 37.
18. Zupko Ronald Edward, “Italian Weights and measures from the Middle Ages to the Nineteenth Century”, Philadelphia, American Philosophical Society, 1981, pp. lxxxiv+339.

INDICE