sergio(punto)calzolani(at)outlook(punto)it

Parole chiave: geometria teorica, geometria pratica, unità di misura fiorentine, staioro a corda, staioro a seme, staio di grano, panoro, pugnoro, braccio da terra, braccio da panno, braccio quadro da terra, canna, area quadrilateri, tipi di triangoli, area triangoli, costanti 22/3, 11/14, 7/88, 88/7, cerchio, circonferenza, semicerchio, settore circolare, segmento circolare, corda, freccia, braccio quadro corporeo, barile, volume parallelepipedo, moggio, libbra, cubo, prismi, cilindro, botte, tino da vino, piramide a base quadrata, cono, volume sfera, costante 11/21, lira, soldo, denaro, superficie sfera.

CALANDRI

Pietro [o Pier] Maria Calandri scrisse un piccolo trattato geometrico dal titolo "*Compendium de Agrorum corporumque dimensione*" che fu pubblicato da Giovan Vettorio Soderini (1526 – 1596) nel suo volume di agricoltura. A parte il titolo, il testo geometrico è scritto in italiano.

Il lavoro di Calandri inizia con un'affermazione:

"*Dividesi la geometria in due parti, delle quali l'una è detta teorica e l'altra pratica; ma la teorica lascieremo al presente a' filosofanti, e della pratica al numero congiunta, quanto a quello che alla notizia del misurare la terra fa di bisogno, diremo…*".

L'opera è divisa in quattro capitoli:

1. Misura delle superfici a forma di quadrilatero.
2. Misura delle superfici triangolari.
3. Misura delle figure circolari.
4. Misura dei solidi.

È da notare la stranezza dell'inversione dell'ordine fra i quadrilateri e i triangoli.

Il testo presenta una serie di esempi. Di seguito sono descritti e approfonditi i diversi problemi, rispettando la successione del testo originale.

Aderendo alle comuni convenzioni tipografiche, fra parentesi quadre […] sono aggiunte note e sono inseriti commenti dell'autore di questo articolo.

Per semplificare la composizione tipografica del testo di questo articolo sono stati usati alcuni simboli, fra i quali sono i seguenti:

- * : per la moltiplicazione;
- / : la barra è impiegata per rappresentare la divisione, in luogo della linea di frazione orizzontale;
- ≈ : il simbolo sta per *circa*: ad esempio $\pi \approx 3,14$:
- il *periodo* di un numero decimale periodico è compreso fra parentesi tonde, ad esempio 10/3 = 3,(3).

Per chiarire alcuni argomenti sono inseriti dei paragrafi, indicati con il termine APPROFONDIMENTI, nettamente separati dal corpo del testo.

Tutti i passi di una procedura utilizzata da Calandri per risolvere un problema possono essere condensati in formule: per economizzare lo spazio e per non appesantire l'articolo è stata conservata la versione testuale e non sono state ricostruite le formule sottostanti.

La Famiglia Calandri

Elisabetta Ulivi ha dedicato notevoli studi agli abacisti fiorentini, fra i quali quelli appartenenti alla famiglia Calandri e a Maestro Benedetto.

Calandro Calandri (1419 – 1468 o 1469) fu un importante abacista: il nonno materno fu il Maestro Luca (1356 – 1433-1437), altro importante matematico.

Dopo la sua morte, il lavoro di Calandro fu continuato dal primogenito Pier Maria (1457-1508) al quale si unì l'altro figlio, Filippo Maria (1468-1518).

Fra gli allievi di Calandro fu uno dei maggiori abacisti fiorentini, Benedetto di Antonio, conosciuto come Maestro Benedetto da Firenze (1429 – 1479).

A Maestro Benedetto sono stati attribuiti alcuni trattati fra i quali quello contenuto nel *Codice Acquisti e doni 154* della Biblioteca Medicea Laurenziana di Firenze: è il *Tractato d'abbacho* e il testo è stato pubblicato da Gino Arrighi nel 1974 che lo ha ritenuto opera di Pier Maria Calandri. Il testo sarebbe stato composto intorno al 1459, ciò che proverebbe l'erronea attribuzione a Calandri. A giustificazione dell'errore vi è sicuramente la familiarità fra i componenti della famiglia Calandri e lo stesso Maestro Benedetto.

Il codice L.IV.21 della Biblioteca Comunale di Siena, risalente al 1463, contiene una *Praticha d'arismetica* attribuita a Maestro Benedetto.

Alcuni studiosi assegnano a Maestro Benedetto anche la paternità di due codici *anonimi* conservati nella Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze:

* il Palatino 573 che reca il titolo *Praticha d'arismetricha*;
* Il *Trattato di pratiche di geometria*, scritto in toscano, e risalente a circa il 1464. È conservato con la denominazione di *manoscritto Palatino 577* nella Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze. Alcuni studiosi, fra i quali Ettore Picutti e Elisabetta Ulivi, lo attribuiscono a Maestro Benedetto da Firenze (1429-1479).

Questi due ultimi trattati sarebbero stati compilati nel periodo 1460-1465.

Filippo Calandri è l'autore del trattato "Aritmetica", compilato per uno dei figli di Lorenzo il Magnifico (Giuliano de' Medici, 1479-1516), poi pubblicato a Firenze da Lorenzo Morgiani e Johann Petri, nel 1491.

Alcuni dei problemi proposti da Pier Maria Calandri nel suo testo geometrico al quale è dedicato questo articolo sono ripresi dal *Tractato d'abbacho* di Maestro Benedetto. Il fatto era abbastanza comune nei testi degli abacisti del basso Medioevo e del primo Rinascimento: la fantasia umana è pur sempre limitata. Un fenomeno del genere accade anche ai nostri tempi: gli esercizi contenuti nei libri di testo di matematica per le scuole secondarie sono tutti originali? Parte di essi è "ispirata" da testi concorrenti: sembra che fra i libri più adottati vi siano quelli con il più ampio ventaglio di esercizi.

Premessa

Nella premessa Calandri descrive le due unità di misura lineari e superficiali usate a Firenze intorno al 1500: esso rappresenta un'importante fonte per la conoscenza di quelle unità.

Le unità lineari impiegate erano due: il *braccio da terra* e il *braccio universale* o *braccio da panno*.

L'Autore si limita a spiegare che il primo era impiegato per misurare i terreni e il secondo per misurare panni, drappi e ogni altra cosa. Non fornisce ulteriori informazioni che invece sono necessarie per chiarire le fondamenta delle unità di misura superficiali: a questo fine è inserito il riquadro che segue.

- APPROFONDIMENTO -

Le unità di misura lineari

A Firenze, dal Medioevo in poi erano usate due unità di misura della lunghezza:

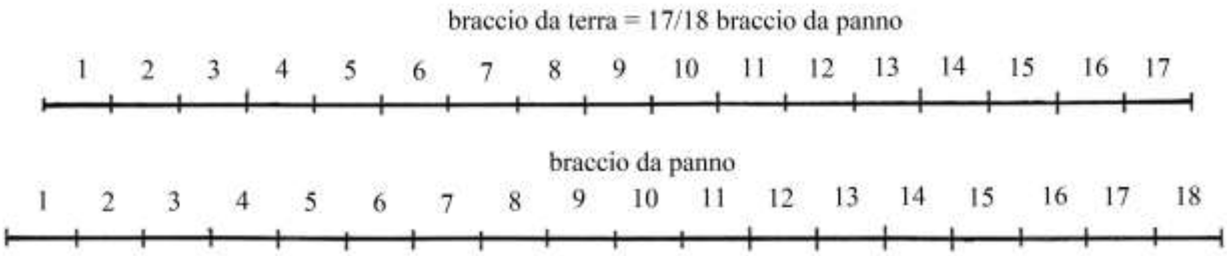
* il *braccio da panno* o *braccio a panno* ("braccio di Calimala", dal nome della strada fiorentina che ospitava molte botteghe di artigiani tessili): esso era lungo l'equivalente di 58,3626 cm;
* al suo fianco, per le misure itinerarie e per quelle dei terreni era usato il *braccio da terra* o *braccio a terra*.

Le due unità di misura lineare erano legate da un rapporto fisso:

$$1 \text{ braccio da terra} = (17/18) * \text{braccio da panno} \approx$$
$$\approx 58{,}3626 * (17/18) \approx 55{,}1202 \text{ cm} .$$

Molte grandi opere edilizie furono progettate con misure espresse in *braccia da panno* e suoi multipli e sottomultipli.

Il *braccio da terra* ebbe limitata importanza e fu soppresso con le riforme del 1781-1782 volute dal granduca Pietro Leopoldo. Fu usato nella misurazione dei terreni agricoli e nella stesura delle relative mappe catastali.

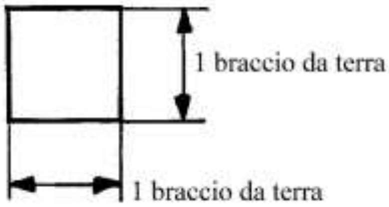


Non è chiara la ragione che portò a fissare il rapporto 17/18 fra le lunghezze delle unità fiorentine del *braccio a terra* e del *braccio a panno*.

- -

Le unità di misura superficiali

Fino alle riforme del 1781-1782, le unità di misura delle superfici agrarie usate a Firenze erano basate sul *braccio quadro da terra*.

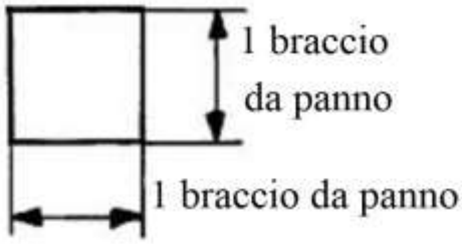


La sua area equivaleva a:

1 braccio^2 da terra = (1 braccio a terra)^2 ≈ (0,551202 m)^2 ≈ 0,303824 m^2.

Il braccio quadro da terra era un'unità troppo piccola per misurare i terreni e quindi furono introdotti alcuni multipli organizzati secondo una progressione geometrica di ragione 12, come spiega la tabella qui sotto.

Anche il *braccio quadro da panno* era un'unità troppo piccola per misurare i terreni:



Essa valeva: (0,583626)^2 m^2 ≈ 0,34062 m^2 .

Il rapporto fra le aree di un braccio quadro da panno e di un braccio quadro da terra era:

(18/17)^2 = 324/289.

Il rapporto inverso valeva:

(area braccio quadro da terra)/(area braccio quadro da panno) = (17/18)^2 = 289/324.

Lo *staio* era un'unità di misura di volume usata per i liquidi e per gli aridi (granaglie) di origine romana: in latino era chiamato *sextarius*, poi tradotto nell'italiano *sestario*, da cui derivò l'insieme dei termini staio, staioro, staiolo, stioro. L'unità romana valeva 1/16 del *moggio* o *mòdius*, equivalente a ≈ 8,75 litri.

Esso corrispondeva a ≈ 0,547 litri o dm^3.

Nel *Capitolo Quarto* Calandri utilizzò lo *staio* quale unità di misura dei volumi, basato sul braccio da panno cubico (*braccio quadro corporeo*), equivalente – intorno al 1500 – a ≈ 22,09 litri.

Nei secoli lo staio aumentò grandemente la sua capacità fino a raggiungere valori moltiplicati anche per oltre 20 volte quello iniziale di 0,547 litri.

Secondo le "Tavole di Ragguaglio dei Pesi e delle Misure Già in Uso Nelle Varie Provincie del Regno…" del 1877, lo staio usato a Firenze a quella data si era accresciuto e valeva 24,3629 litri: rispetto all'unità di misura romana si era accresciuto di ben 44,55 volte!

Lo *staioro* deriva dallo staio: esso possedeva due varianti: lo *staioro a corda o a misura* e lo *staioro a seme*.

Lo staioro a misura indicava la superficie agricola seminata con un terzo di staio di grano.

Di fatto fu introdotto un rapporto: 1 staioro a misura equivaleva a 1/3 di uno staioro da seme.

Da staio si passò a staioro: e questo termine divenne un'unità di misura della superficie agraria indipendentemente dalle coltivazioni che vi venivano impiantate.

La tabella che segue riassume i rapporti fra le unità di misura superficiali in uso a Firenze fino alle riforme del 1781-1782 e quindi utilizzate anche da Calandri, ad eccezione della più grande, la *saccata*:

Unità di misura	Rapporti con il braccio quadro da terra
$Braccio^2$ da terra	1
Pugnoro	12
Panoro	$12^2 = 144$
Stioro fiorentino (staioro a corda)	$12^3 = 1728$
Staioro a seme (= 3 stiora)	$3*12^3 = 5184$
Saccata	$12^4 = 20736$

Dato che in qualche caso le dimensioni di un terreno erano misurate con uno strumento multiplo del braccio da panno, Calandri calcolò in forma indiretta il rapporto fra lo staioro a corda e il braccio quadro da panno:

1 staioro a corda = 1728 $braccia^2$ da terra = 1728 *(289/324) = 1541,(33) $braccia^2$ da panno, valore arrotondato a 1540.

Nell'uso corrente, allo scopo di semplificare i calcoli era usata la seguente equivalenza convenzionale (errata per eccesso del 3,8%):

1 staioro a corda ≈ 1600 $braccia^2$ da panno.

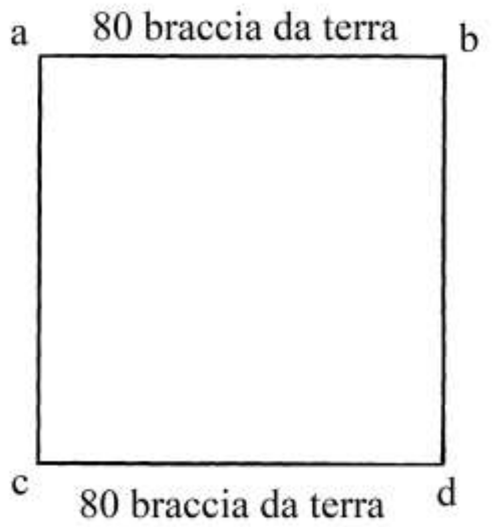
La tabella che segue riporta alcuni multipli e un sottomultiplo del braccio da panno.

Unità	Rapporti	Equivalenze in metri o in centimetri
Pertica (canna agrimensoria)	5 braccia	2,918 m
Canna mercantile	4 braccia	2,3345 m
Passetto	2 braccia	1,1673 m
Braccio da panno	20 soldi	58,3626 cm
Palmo	½ braccio	29,1813 cm

CAPITOLO PRIMO

Campo quadrato

Un campo ha lati equidistanti e uguali [di uguale lunghezza] e i suoi angoli interni sono tutti retti:

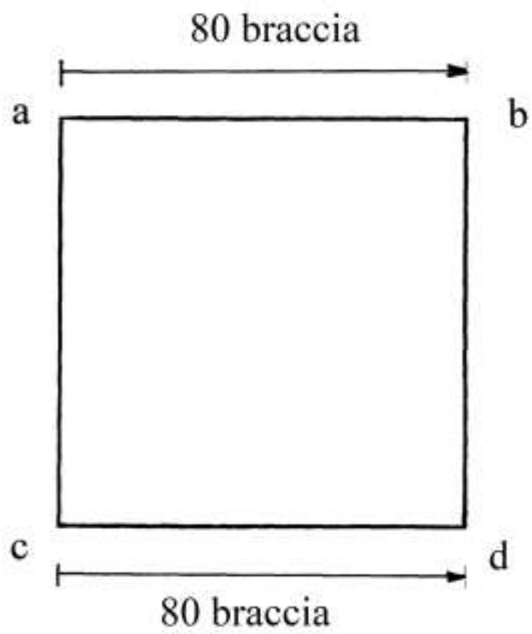


Calandri ha contrassegnato i punti con le *lettere minuscole*: il metodo non è ignoto al Rinascimento visto che anche Piero della Francesca in uno dei suoi molti schemi usava indifferentemente lettere maiuscole e lettere minuscole.

In questo articolo sono mantenute le lettere minuscole, come sono state usate nel testo originale.

Le lettere sono state apposte in un modo che sembrerebbe giustificato dalle competenze geometriche e agrimensorie di Calandri: egli potrebbe aver impiegato sul terreno una procedura con i seguenti passi, poi trasferiti sul disegno:

* Fissare la posizione di "a".
* Misurare la lunghezza di "a.b.";
* Misurare "a.c." e verificare la sua uguaglianza con quella di "a.b.".
* Misurare "c.d.".
* Misurare "b.d.".



I segmenti che formano i lati del terreno quadrato sono stati qui indicati con espressioni quali quella “a.b.” invece che “ab” perché è quello il metodo usato da Calandri.

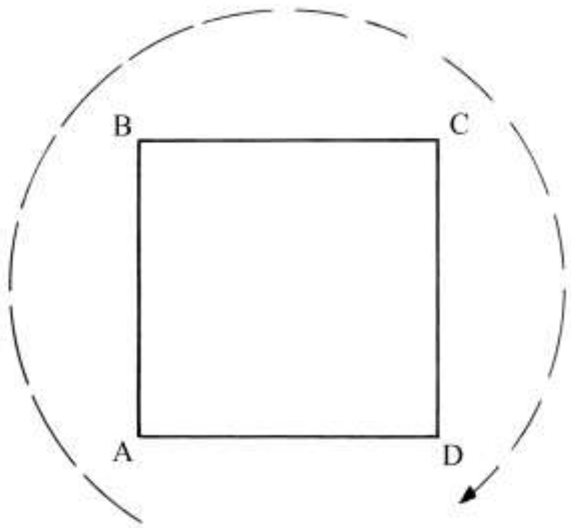
La lettera *a* è sempre stata scritta in alto a sinistra.

- APPROFONDIMENTO -

L’apposizione delle lettere

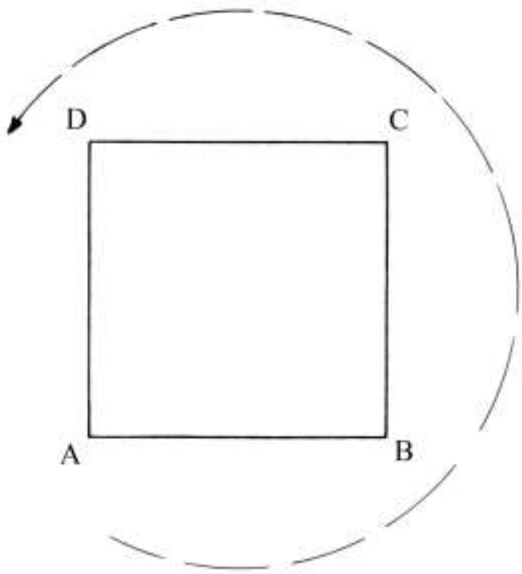
Nei testi moderni l’apposizione delle lettere ai punti significativi di una figura geometria segue quasi sempre uno dei due metodi esemplificati utilizzando l’esempio di un quadrato:

* il *metodo orario*:



La prima lettera, A, ad esempio è scritta nel vertice in basso a sinistra e le altre lettere rispettano una sequenza oraria.

* Il *metodo antiorario*:



La lettera A è sempre scritta in basso a sinistra, ma le altre tre lettere sono apposte in senso antiorario.

- -

Il campo aveva area:

$$\text{Area}_{abdc} = 80 * 80 = 6400 \text{ braccia}^2 \text{ da terra.}$$

La misura dei terreni era effettuata con la *canna di sei braccia a terra*: dato che il *braccio da terra* era lungo l'equivalente di 55,1202 cm, questa canna valeva:

1 canna di sei braccia a terra ≈ 6 * 55,1202 ≈ 330,7212 cm ≈ 3,307 metri.

Il braccio da terra era lungo i 17/18 del braccio da panno (o *braccio universale*), corrispondente a 58,3626 cm.

La misura della lunghezza di 80 braccia fatta con la canna da 6 braccia dava il seguente risultato:

80/6 = (13 + 2/6) canne = 13 canne + 2 braccia.

Evidentemente sulle canne erano incise delle tacche corrispondenti alla lunghezza del braccio e forse anche dei suoi sottomultipli.

Calandri applica una sua particolare tecnica per convertire le 6400 braccia^2 in staiora a corda, invece di dividere direttamente 6400 per 1728, con il risultato ovvio di ottenere un numero periodico come 3,(703) staiora, impiega un altro percorso: operazioni aritmetiche del genere non erano alla portata della maggior parte degli uomini del Rinascimento.

La procedura impiegata da Calandri contiene i seguenti passi:

* dividere 6400 per 12: 6400/12 = 533 pugnora + resto di 4 braccia^2;
* dividere 533 per 12: 533/12 = 44 panora + resto di 5 pugnora;
* dividere 44 per 12: 44/12 = 3 staiora + 8 panora.

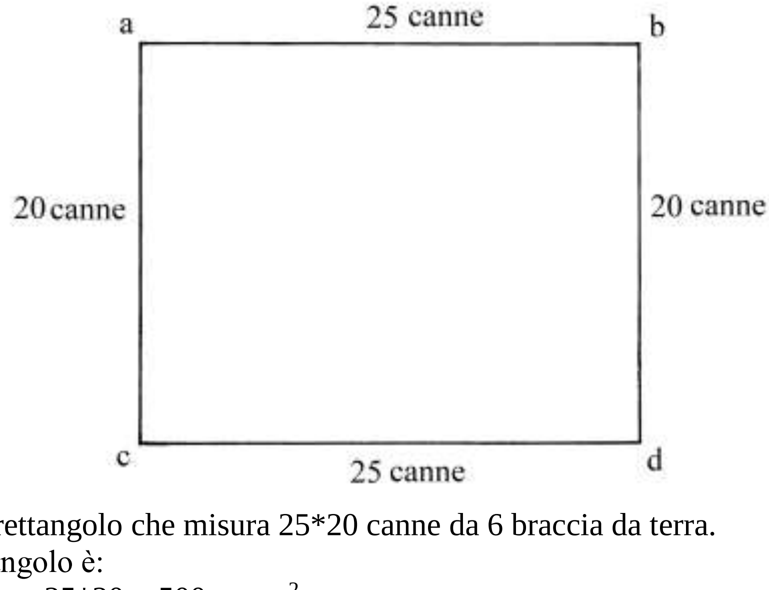
Sommando l'ultimo quoziente con i precedenti resti si ha:

6400 braccia^2 = (3 staiora + 8 panora + 5 pugnora + 4 braccia^2).

Questa complessa divisione in più passaggi era imposta anche dall'uso del sistema numerico duodecimale.

Campo di forma rettangolare

Un campo ha la forma di un quadrilatero e possiede solo angoli retti:

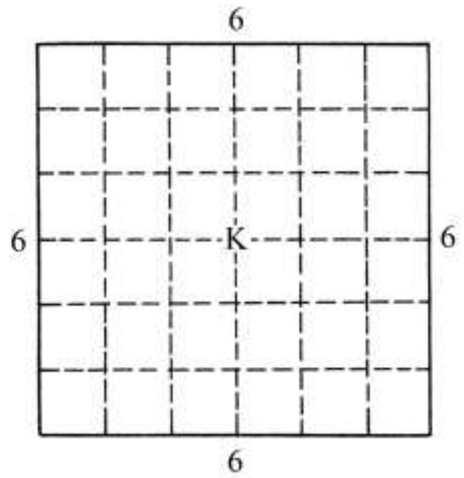


La figura è un rettangolo che misura 25*20 canne da 6 braccia da terra.

L'area del rettangolo è:

Area $_{abdc}$ = 25*20 = 500 canne^2.

Una canna quadrata vale 6*6 = 36 braccia^2 da terra:



Per calcolare l'area in staiora, Calandri introduce una nuova costante e calcola il rapporto intercorrente fra uno staioro e la canna quadrata:

1 staioro = 1728 braccia^2 = (1728/36) = 48 canne^2.

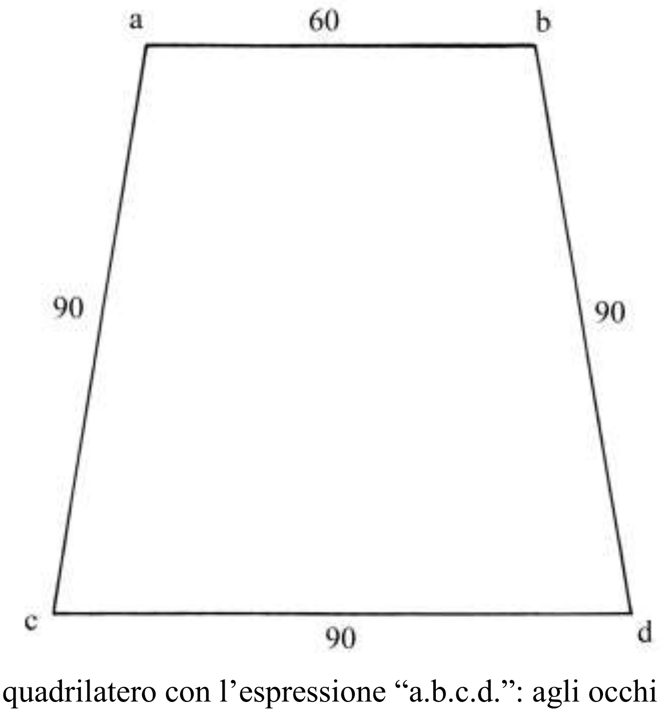
L'area del campo è così calcolata:

Area $_{a.b.d.c.}$ = 500 (canne^2)/48 = (10 staiora + 5 panora).

Area di un trapezio isoscele

L'Autore passa poi a risolvere problemi di aree di quadrilateri che non hanno tutti gli angoli retti.

Il primo caso è quello di un trapezio isoscele:



Calandri indica il quadrilatero con l'espressione "a.b.c.d.": agli occhi moderni sarebbe più logico indicarlo con espressioni quali "a.b.d.c." oppure "a.c.d.b.": negli esempi sono conservati i *punti separatori* fra le lettere, rispettando l'uso dell'Autore.

Le lunghezze dei lati sono espresse in braccia.

La procedura impiegata dall'Autore è la seguente:

* sommare le lunghezze di "a.b." e di "c.d.": 60 + 90 = 150 braccia;
* dividere per 2: 150/2 = 75 braccia;

[I due passi che seguono sono impliciti perché Calandri non li ha espressamente usati:
* sommare le lunghezze di “a.c.” e di “b.d.”: 90 + 90 = 180 braccia;
* dividere per 2: 180/2 = 90 braccia];
* moltiplicare 75 per 90: 75*90 = 6750 braccia^2, area del quadrilatero.

Per convertire le 6750 braccia^2 in staiora, l’Autore divide – come già visto in precedenza – in successione tre volte per 12:
* 6750/12 = 562 pugnora + 6 braccia^2;
* 562/12 = 46 panora + 10 pugnora;
* 46/12 = 3 staiora + 10 panora.

Sommando l’ultimo quoziente con i precedenti resti si ha:

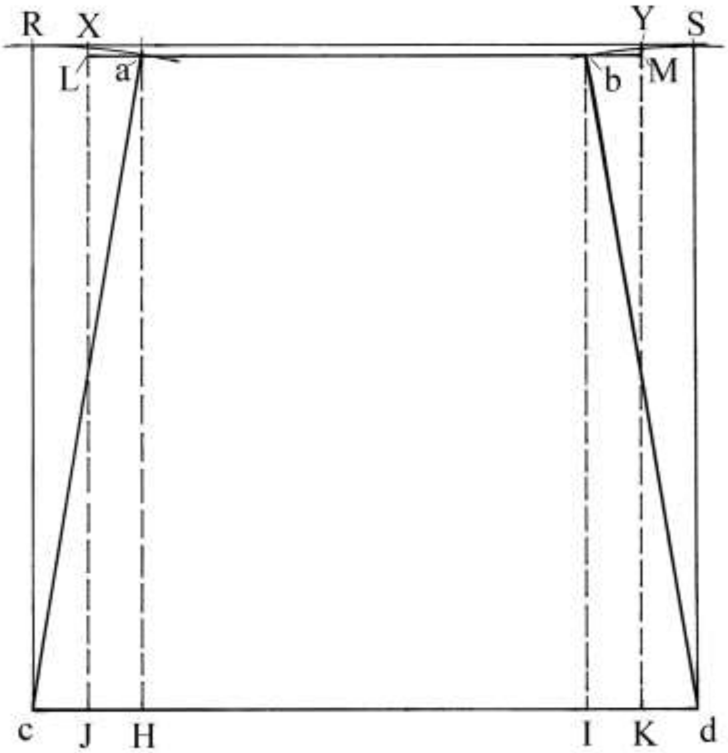
6750 braccia^2 = (3 staiora + 10 panora + 10 pugnora + 6 braccia^2).

La procedura impiegata da Calandri ricalca l’antica *formula degli agrimensori*:

Area $_{a.b.d.c.}$ = [(a.b. + c.d.)/2] * [(a.c. + b.d.)/2].

Il risultato dell’applicazione di questa formula è errato per eccesso.

Lo schema che segue mostra graficamente la deformazione subita dal trapezio:



Dai punti a. e b. abbassare le perpendicolari alla base c.d.: sono a.H. e b.I. Esse hanno uguale lunghezza e sono due altezze del trapezio.

Determinare i punti medi dei segmenti c.H. e I.d.: sono J e K.

Elevare le perpendicolari alla base maggiore a partire da c., J, K e d.

Prolungare verso sinistra e verso destra la base minore a.b.; sono fissati i punti L e M.

JLMK è il rettangolo che l’area correttamente uguale a quella del trapezio di origine:

Area $_{JLMK}$ = JK * a.H. = Area $_{a.b.d.c.}$

Infatti, l’area di un trapezio isoscele è data da:

Area $_{TRAPEZIO\ ISOSCELE}$ = (semisomma delle basi) * altezza .

Fare centro in c. e in d. e con raggio c.a. tracciare due archi fino a determinare i punti R e S.

Collegare R con S: il segmento taglia le perpendicolari innalzate da J e K in due nuovi punti, X e Y.

JXYK è il rettangolo che area uguale a quella calcolata con la procedura errata di Calandri.

Il rettangolo LXYM è l'area in eccesso dovuta all'applicazione della formula degli agrimensori. Verifichiamo la sua estensione.

Occorre calcolare il valore dell'altezza a.H. che è il cateto maggiore del triangolo rettangolo c.a.H.:

$$a.H. = \sqrt{[(c.a.)^2 - (c.H.)^2]}$$

Ma c.a. = 90 braccia e c.H. è:

$$c.H. = (c.d. - a.b.)/2 = (90 - 60)/2 = 15 \text{ braccia.}$$

Quindi:

$$a.H. = \sqrt{(90^2 - 15^2)} = \sqrt{(8100 - 225)} = \sqrt{(7875)} \approx 88{,}74 \text{ braccia.}$$

L'area del trapezio è:

$$\text{Area}_{a.b.d.c.} \approx [(90 + 60)/2] * 88{,}74 \approx 6655{,}5 \text{ braccia}^2.$$

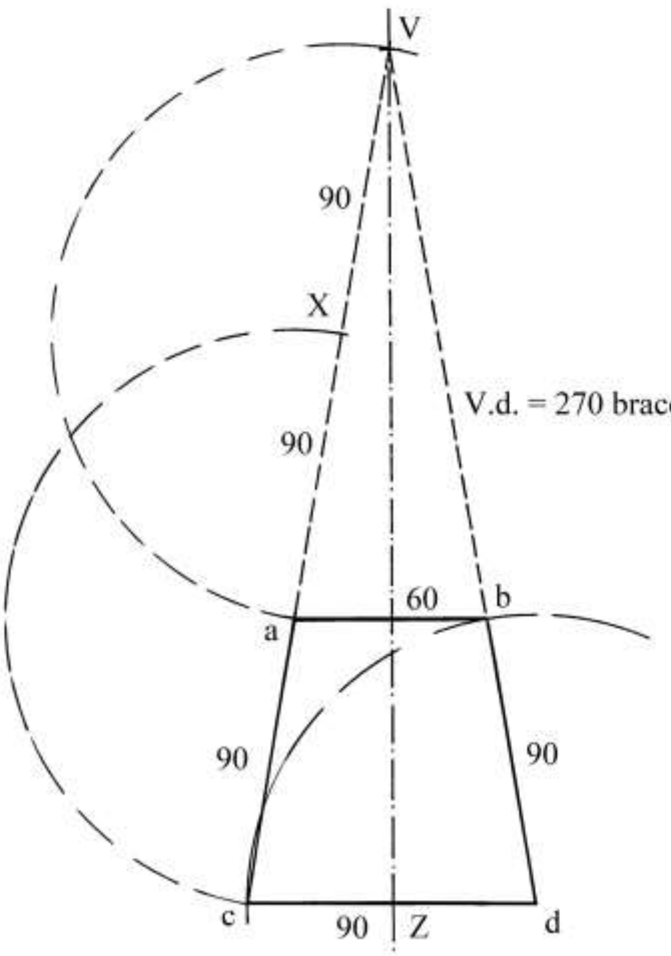
L'area in eccesso è:

$$\text{Area LXYM} \approx \text{Area calcolata da Calandri} - \text{Area corretta} \approx 6750 - 6655{,}5 \approx$$
$$\approx 94{,}5 \text{ braccia}^2.$$

L'errore è:

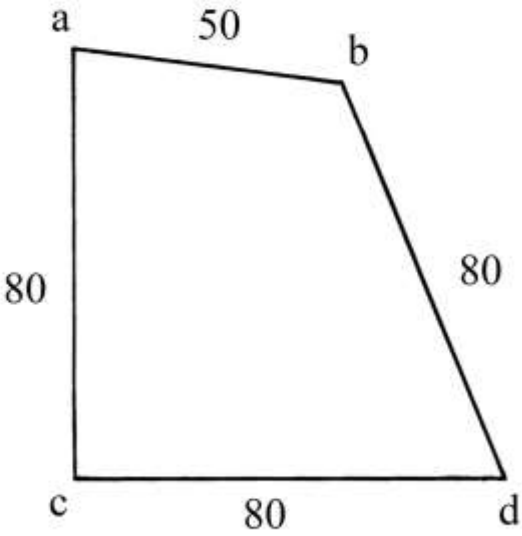
$$\text{errore} \approx 94{,}5/6655{,}5 \approx 1{,}42\% .$$

Per la precisione, il trapezio isoscele è stato ricavato da un triangolo isoscele che ha i lati obliqui lunghi 270 braccia:

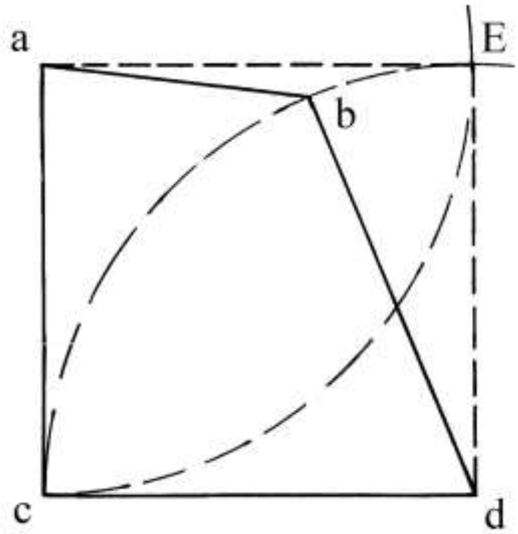


Quadrilatero con tre lati uguali

Un campo ha tre lati di uguale lunghezza e un angolo – a.c.d. – retto. Le lunghezze sono espresse in braccia da terra:



Il quadrilatero è inscrivibile in un quadrato, a.E.d.c., con lati lunghi 80 braccia:



La procedura impiegata per calcolare la sua area riproduce quella incontrata per il trapezio isoscele:

* sommare le lunghezze di due *lati opposti*: a.b. + c.d. = 50 + 80 = 130 braccia;
* dividere per 2: 130/2 = 65 braccia;
* moltiplicare per 80: 65 * 80 = 5200 braccia^2, area del quadrilatero.

Fra il secondo e il terzo passo sono state omesse due operazioni:

* sommare le lunghezze dei *lati opposti verticali*: a.c. + b.d. = 80 + 80 = 160 braccia;
* dividere per 2: 160/2 = 80 braccia.

Di nuovo, Calandri calcolò l'area con la formula degli agrimensori:

Area $_{a.b.d.c.}$ = (a.b. + c.d.)/2 * (a.c. + b.d.)/2.

Poi l'area viene convertita da braccia^2 a staiora:

* 5200/12 = 433 pugnora + 4 braccia^2;
* 433/12 = 36 panora + 1 pugnoro;
* 36/12 = 3 staiora.

L’area totale è: (3 staiora + 1 pugnoro + 4 braccia^2).

Per calcolare correttamente l’area del quadrilatero a.b.d.c. Calandri aveva a disposizione almeno due metodi:

* tracciare la diagonale c.b. e misurare la sua lunghezza, con il risultato di ricavare due triangoli, c.a.b. e c.b.d., ai quali applicare la formula di Erone di Alessandria (matematico egizio vissuto nel I secolo d.C.) per calcolarne le aree. Torneremo sulla formula nel *Secondo Capitolo*, dedicato ai triangoli;
* sempre disponendo della diagonale c.b., dal punto b. condurre le perpendicolari ai lati a.c. (è b.H.) e c.d. (è b.K.). le due perpendicolari sono due altezze dei due triangoli nei quali è suddiviso il quadrilatero.

L’area dei due triangoli è:

* Area $_{\text{a.b.c.}}$ = (a.c.) * (H.b.)/2 = 80 * (H.b.)/2 = 40 * (H.b.) .
* Area $_{\text{c.b.d.}}$ = (c.d.) * (b.K.)/2 = 80 * (b.K.)/2 = 40 * (b.K.).

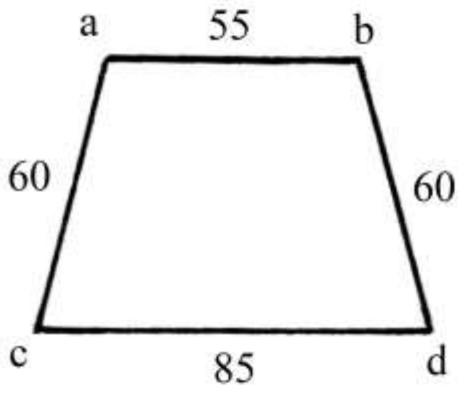
L’area complessiva del quadrilatero è data da:
Area $_{\text{a.b.d.c.}}$ = Area $_{\text{a.b.c.}}$ + Area $_{\text{c.b.d.}}$ = 40 * (H.b.) + 40 * (b.K.) = 40 * (H.b. + b.K.).

Tentiamo, con una certa approssimazione, di calcolare le lunghezze delle due altezze, H.b. e b.K..
H.b. vale 49 braccia e b.K. 73 braccia.
L’area del quadrilatero è così calcolata:
Area $_{\text{a.b.d.c.}}$ ≈ 40 * (49 + 73) ≈ 40 * 122 ≈ 4880 braccia^2.

L’errore commesso da Calandri sarebbe:
errore = (5200 – 4880)/4880 ≈ 6,56%.

<u>Altro trapezio isoscele</u>

Il trapezio a.b.d.c. è isoscele e le sue dimensioni sono misurate in braccia:



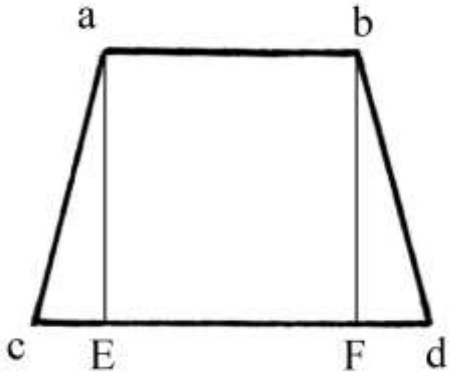
Calandri calcolò l’area con la formula degli agrimensori:

* sommare le lunghezze di a.b. e di c.d.: a.b. + c.d. = 55 + 85 = 140 braccia;
* dividere per 2: 140/2 = 70 braccia;
* moltiplicare per 60: 70*60 = 4200 braccia^2, area di a.b.d.c.

Fra il secondo e il terzo è implicita l’operazione:
(a.c. + b.d.)/2 = (60 + 60)/2 = 60 braccia.

Viene poi convertita l’area da braccia^2 a staiora: il risultato è correttamente calcolato in
(2 staiora + 5 panora + 2 pugnora).

L'area calcolata in 4200 braccia^2 è errata per eccesso. Vediamone il perché.
Tracciare le altezze a.E. e b.F. che hanno uguale lunghezza:



L'altezza a.E. è il cateto maggiore del triangolo rettangolo c.a.E.; il cateto minore c.E. è lungo:

c.E. = (c.d. – a.b.)/2 = (85 – 55)/2 = 15 braccia.

La lunghezza di a.E. è data da:

a.E. = $\sqrt{[(a.c.)^2 – (c.E.)^2]} = \sqrt{(60^2 – 15^2)} = \sqrt{(3600 – 225)} = \sqrt{3375} \approx$
$\approx$ 58,09 braccia.

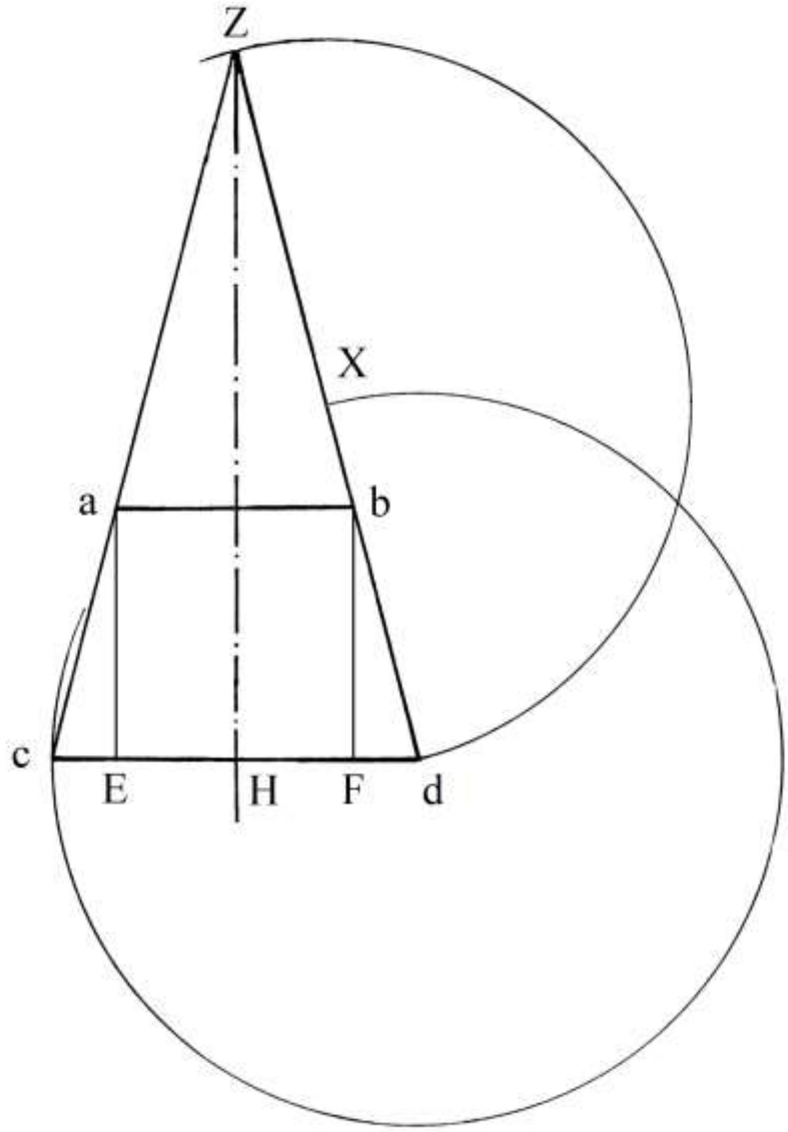
L'area del trapezio isoscele va calcolata con la formula corretta:

$A_{a.b.d.c.}$ = (semisomma delle basi) * altezza = (a.b. + c.d.)/2 * a.E. ≈
≈ (55 + 85)/2 * 58,09 ≈ 140/2 * 58,09 ≈ 4066,3 braccia^2.

L'errore commesso da Calandri è:

errore ≈ (4200 – 4066,3)/4066,3 ≈ 133,7/4066,3 ≈ 3,2 %.

Il trapezio isoscele a.b.d.c. proviene dal triangolo isoscele c.Z.d., tagliato lungo il segmento a.b., che è parallelo al lato c.d..
Prolungare verso l'alto i due lati obliqui del trapezio:



I prolungamenti si incontrano nel punto Z: da questo abbassare la perpendicolare a c.d.: ZH è un’altezza del triangolo.

Con il compasso fare centro in d. e con raggio d.c. tracciare un arco da d. fino a tagliare d.Z. in un nuovo punto, X. Con la stessa apertura fare centro in X e disegnare un secondo arco da d. fino a ritrovare il punto Z. Il segmento d.Z. è lungo il doppio di c.d. e cioè 85*2 = 170 braccia.

Verifichiamo il risultato ottenuto per via geometrica.

I triangoli rettangoli c.a.E. e c.Z.H. sono simili. Vale la proporzione:

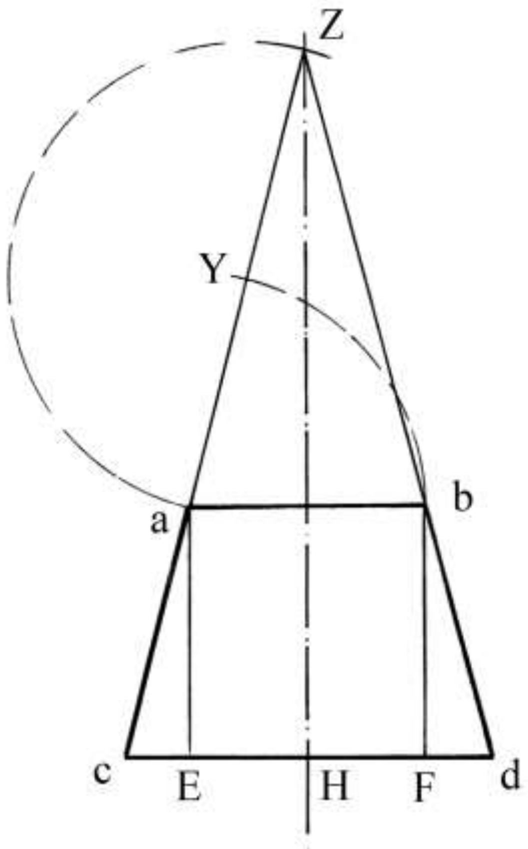
c.E. : c.H. = c.a. : c.Z. da cui

c.Z. = [(c.h.) * (c.a.)]/(c.E.) = (85/2) * (60/15 = 85/2 * 4 = 170 braccia.

Ne consegue:

a.Z. = c.Z. – c.a. = 170 – 60 = 110 braccia = 2*55 = 2 * a.b.

Un’ulteriore proprietà è evidenziata con la costruzione che segue:



Fare centro in a. e con raggio a.b. tracciare un arco da b. fino a incontrare a.Z. nel nuovo punto Y. Con la stessa apertura fare centro in Y e disegnare una semicirconferenza da a. fino a passare per il punto Z. La conclusione è semplice: il segmento a.Z. è lungo il doppio della base minore a.b. e quindi è 110 braccia.

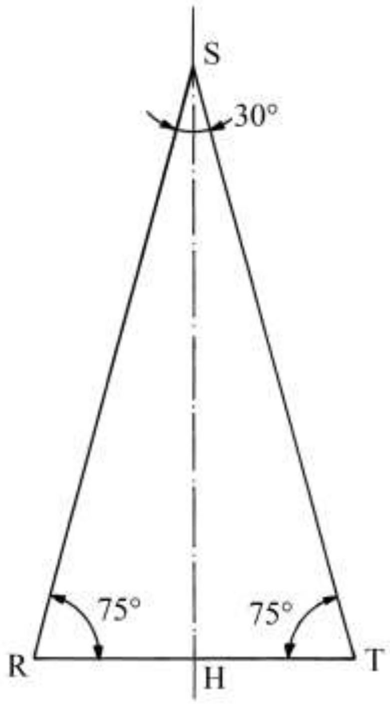
Consideriamo l'angolo a.c.E. Il coseno di questo angolo è dato da:

cos a.c.E. = c.E./c.a. = 15/60 = 0,25.

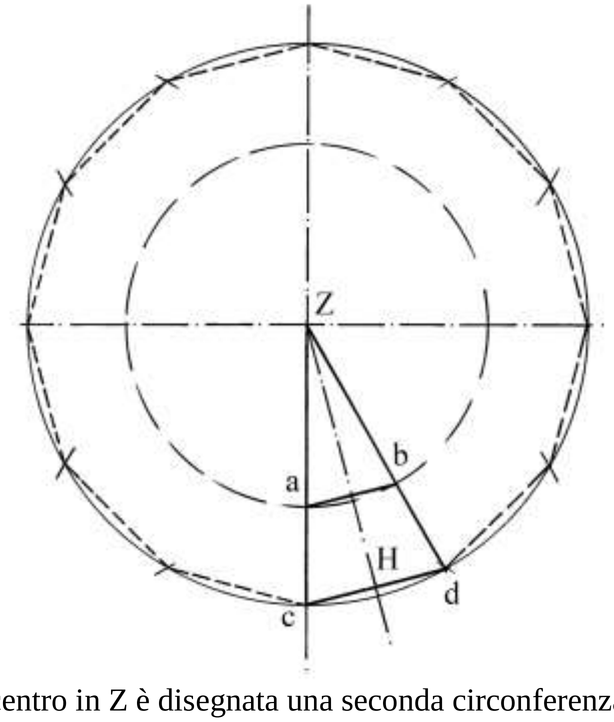
Ad esso corrisponde un angolo di ≈ 75,52°: l'angolo b.d.F. ha la stessa ampiezza mentre l'angolo nel vertice Z è ampio:

c.Z.d. ≈ 180° – a.c.E. – b.d.F. ≈ 180° – 2 * 75,52° = 180° – 151,04° ≈ 28,96°.

Questi valori sembrano poter approssimare la forma del triangolo c.Z.d. a quella di uno dei triangoli isosceli che compongono un dodecagono regolare:



Lo schema che segue mostra l’inserimento di un ipotetico triangolo isoscele, con angoli di ampiezza uguale a quelli di RST, in un cerchio di centro Z e raggio Z.c. = Z.d. di lunghezza pari a 170 braccia:



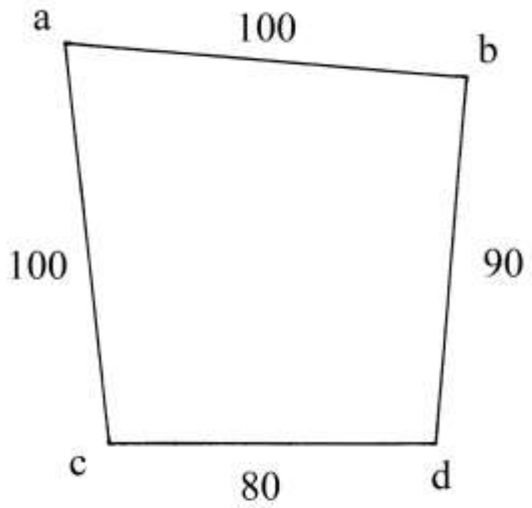
Sempre facendo centro in Z è disegnata una seconda circonferenza con raggio Z.a. = Z.b. = 110 braccia.

Il trapezio isoscele a.b.d.c. è così delimitato da due raggi (Z.c. e Z.d.) e da due corde (a.b. e c.d.).

Questa ricostruzione della forma del terreno è corretta?

Quadrilatero

Un campo ha la forma di un quadrilatero con le lunghezze dei lati espresse in braccia:



Il problema chiede di calcolare la sua area in staiora a corda.

Calandri chiama *larghezze* i lati a.b. e c.d. e *lunghezze* i lati a.c. e b.d.: oggi chiameremmo questi ultimi due *altezze*.

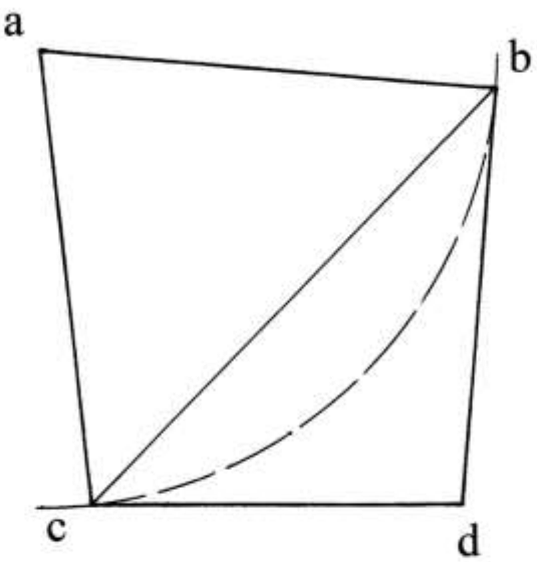
La procedura applica la formula degli agrimensori e moltiplica le semisomme delle lunghezze dei lati opposti:

*	sommare le lunghezze di a.b. e di c.d.:	100 + 80 = 180;
*	dividere per 2:	180/2 = 90 braccia;
*	sommare le lunghezze di a.c. e di b.d.:	100 + 90 = 190;
*	dividere per 2:	190/2 = 95 braccia;
*	moltiplicare 90 per 95:	90*95 = 8550 braccia^2.

Quindi il risultato espresso in braccia^2 è progressivamente diviso tre volte per 12. Il risultato è: 8550 braccia^2 = (4 staiora + 11 panora + 4 pugnora + 6 braccia^2).

Per calcolare correttamente l'area del quadrilatero occorre tracciare la diagonale c.b. che divide il poligono in due triangoli:

* a.b.c. è isoscele;
* c.b.d. è scaleno.



La lunghezza di c.b. è stimabile intorno alle 126 braccia.

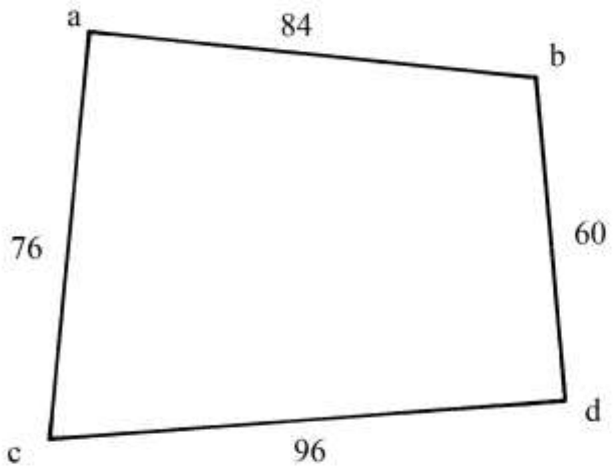
Applicando la formula di Erone ai due triangoli si ricava un'area:

Area $_{a.b.d.c.}$ ≈ 8486 braccia^2 (i passaggi intermedi sono omessi).

La differenza con il valore calcolato da Calandri è minima.

Quadrilatero con lati di differente lunghezza

Un campo ha la forma di un quadrilatero con i lati tutti di lunghezze differenti e perciò Calandri lo chiamò *diversilatero*.



Le lunghezze dei lati sono in *braccia da panno*.

L'area è calcolata con la formula degli agrimensori:

*	sommare le lunghezze di a.b. e di c.d.:	84 + 96 = 180;
*	dividere per 2:	180/2 = 90 braccia da panno;
*	sommare le lunghezze di a.c. e di b.d.:	76 + 60 = 136;
*	dividere per 2:	136/2 = 68 braccia da panno;
*	moltiplicare 90 per 68:	90*68 = 6120 braccia^2 da panno.

Dato che lo staioro a corda valeva *convenzionalmente* 1600 braccia^2 da panno, Calandri applicò la seguente procedura:

*	dividere 6120 per 1600:	6120/1600 = (3 + 33/40) staiora;
*	moltiplicare il numeratore 33 per 12:	33*12 = 396;
*	dividere per 40:	396/40 = (9 + 9/10) panora;
*	moltiplicare il numeratore 9 per 12:	9*12 = 108;
*	dividere 108 per 12:	108/12 = 9 pugnora.

Il risultato è:

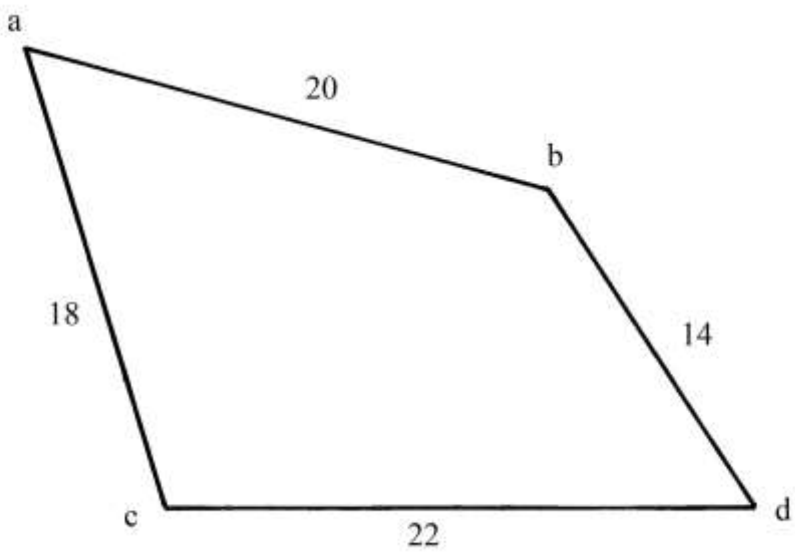
Area a.b.d.c. = (3 staiora + 9 panora + 9 pugnora).

Calandri calcolò un risultato leggermente diverso:

Area a.b.d.c. = [3 staiora + 9 panora + 10 pugnora + (9 + 3/5) braccia^2].

Un altro quadrilatero

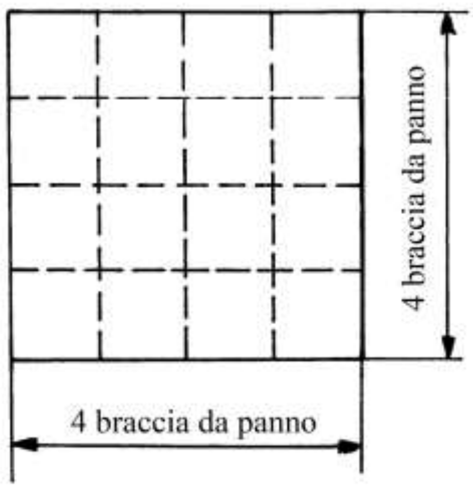
Il quadrilatero a.b.d.c. ha lati misurati con *canne da 4 braccia da panno* [o *canne mercantili*]:



Anche in questo caso Calandri impiegò la formula degli agrimensori:

*	sommare le lunghezze di a.b. e di c.d.:	20+22 = 42;
*	dividere per 2:	42/2 = 21 canne;
*	sommare le lunghezze di a.c. e di b.d.:	18+14 = 32;
*	dividere per 2:	32/2 = 16 canne;
*	moltiplicare 21 per 16:	21*16 = 336 canne^2.

Una canna quadra ha area uguale a 16 braccia^2 da panno:



Uno staioro equivale a 1600/16 = 100 canne^2 di braccio da panno.
L'area di 336 canne^2 è così convertita:

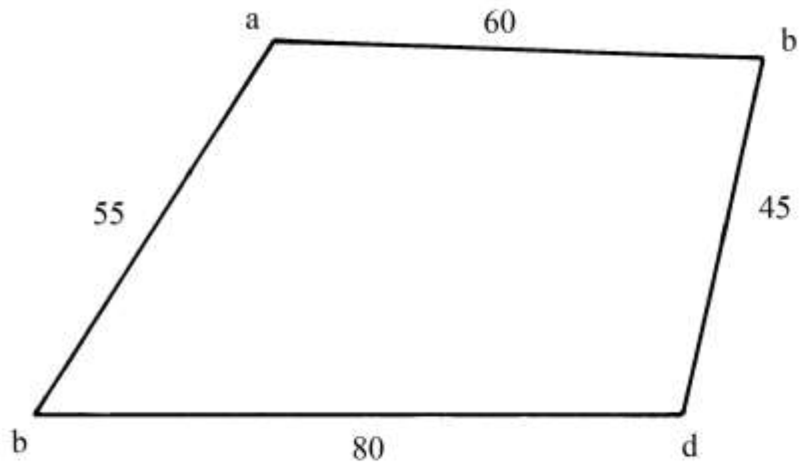
*	dividere 336 per 100:	336/100 = (3 + 36/100) staiora = (3 + 9/25) staiora;
*	moltiplicare il resto 9/25 per 12:	9/25 * 12 = 108/25 = (4 + 8/25) panora;
*	moltiplicare il resto 8/25 per 12:	8/25 * 12 = (3 + 21/25) pugnora;
*	moltiplicare il resto 21/25 per 12:	21/25 * 12 = 252/25 = (10 + 2/5) braccia^2 da terra.

L'area è:

Area $_{a.b.d.c.}$ = [3 staiora + 4 panora + 3 pugnora + (10 + 2/25) braccia^2 da terra].

<u>Un altro quadrilatero</u>

Un terreno ha le dimensioni misurate in *canne da terra da sei braccia*:



Per calcolare la sua area Calandri ricorse alla consueta procedura:

*	sommare le lunghezze di a.b. e di c.d.:	60 + 80 = 140;
*	dividere per 2:	140/2 = 70 canne;
*	sommare le lunghezze di a.c. e di b.d.:	55 + 45 = 100;
*	dividere per 2:	100/2 = 50 canne;
*	moltiplicare 70 per 50:	$70*50 = 3500$ canne^2.

Una canna quadrata da sei braccia da terra ha area uguale a:

$6*6 = 36$ braccia^2 da terra.

Lo staioro equivale a 1728 braccia^2 da terra e quindi

1 staioro = 1728/36 = 48 canne^2 da terra.

La procedura per convertire da canne^2 a staiora è la seguente:

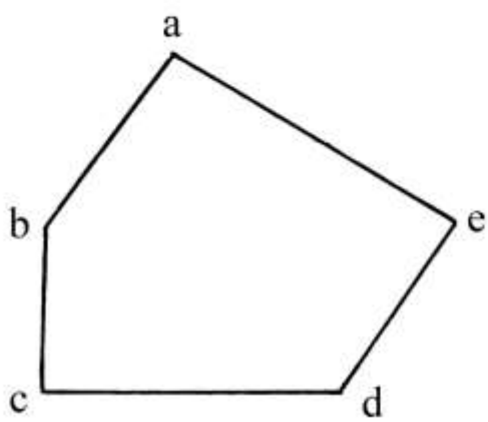
*	dividere 3500 per 48:	3500/48 = (72 + 11/12) staiora;
*	moltiplicare il resto frazionario 11/12 per 12:	11/12 * 12 = 11 panora.

Il quadrilatero ha superficie uguale a (72 staiora + 12 panora).

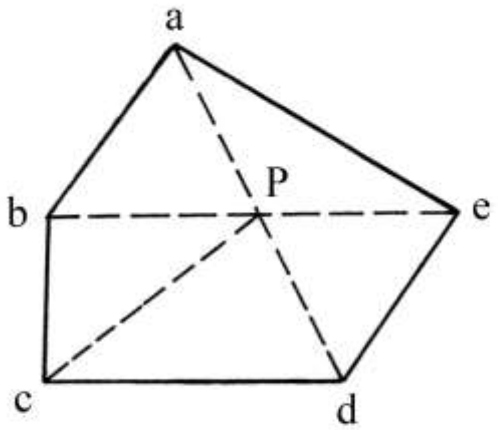
FIGURE CON PIÙ DI 4 LATI

Calandri introduce l'argomento della misurazione dei campi aventi forme poligonali più o meno regolari e con un numero di lati maggiore di *quattro*.

La figura che segue presenta il pentagono non regolare a.b.c.d.e. le cui lettere sono state apposte dall'Autore in senso antiorario:



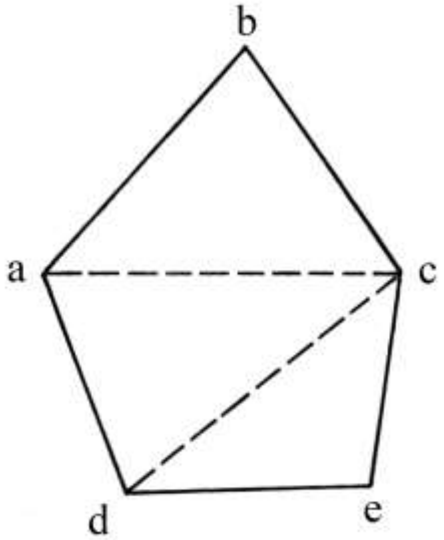
Egli propone il metodo della *triangolazione*:



Le diagonali a.d. e b.c. si incontrano in un punto interno, P, che è poi collegato con il vertice c.

Il pentagono è così suddiviso in cinque triangoli.

Un secondo metodo mirava a ridurre il numero dei triangoli nei quali scomporre il pentagono, come è il caso dell'esempio che segue:



Tracciando soltanto due diagonali, a.c. e d.c., il poligono è suddiviso in soli tre triangoli.

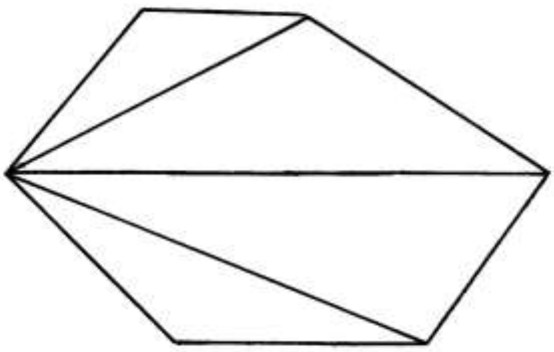
Calandri conclude citando le regole per il calcolo dell'area dei triangoli contenute nel commento al primo libro degli *Elementi* di Euclide, dovuto al matematico Campano da Novara (1220-1296).

Il capitolo termina con le figure di una serie di poligoni non regolari: esagoni, ettagoni ("eptagoni"), ottagoni ("octagoni") e ennagoni ("nonagoni").

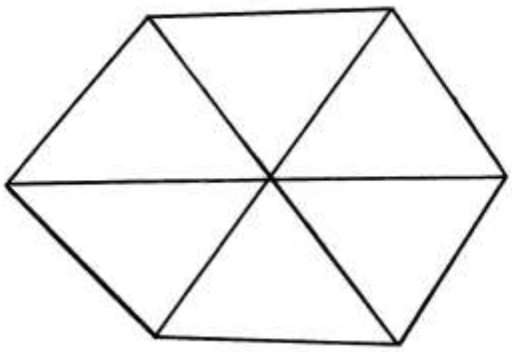
Interessanti sono i diversi metodi di scomposizione che egli suggerisce per quei poligoni.

Il primo esagono è diviso in quattro triangoli con la tracciatura di *tre* diagonali tutte uscenti dallo stesso vertice:

Esagono



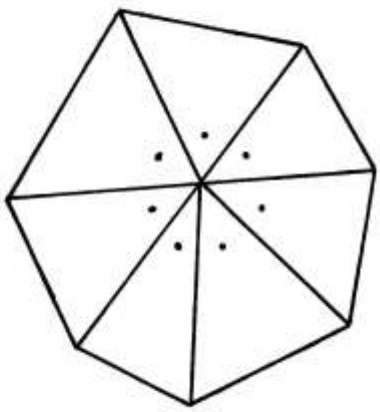
Esagono



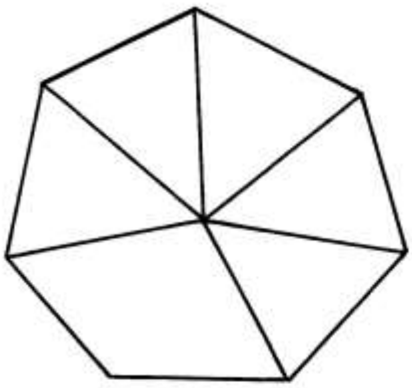
Il secondo esagono è ripartito in sei triangoli che hanno un vertice comune interno al poligono.

Gli ettagoni sono suddivisi quasi con lo stesso metodo:

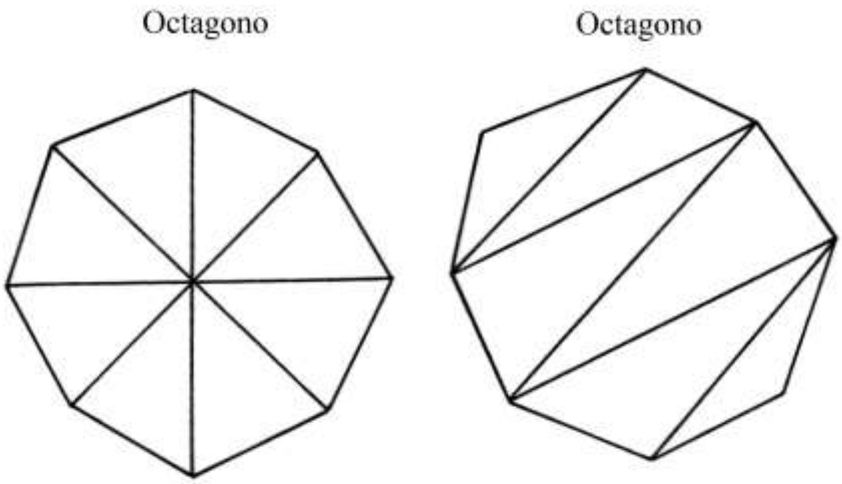
Eptagono



Eptagono

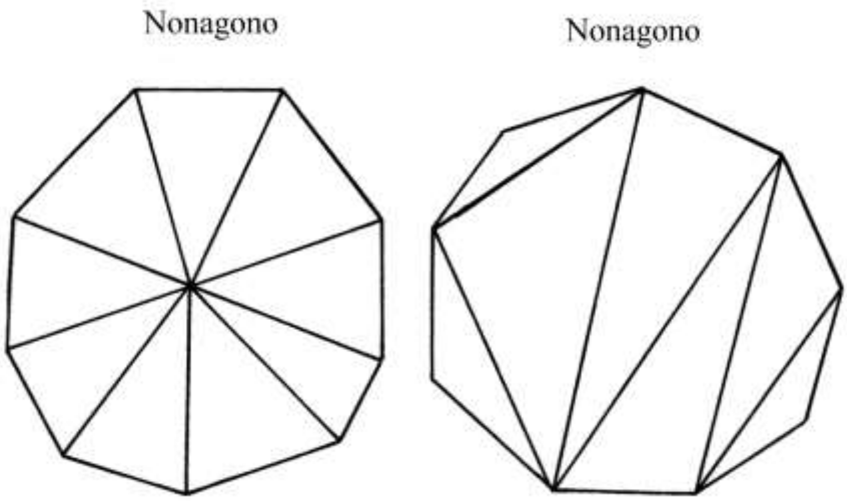


Quello di sinistra è scomposto in sette triangoli aventi un vertice comune all’interno e l’ettagono di destra è diviso in cinque triangoli e un quadrilatero, sempre con un vertice comune interno.



L’ottagono a sinistra è ripartito in otto triangoli grazie a *quattro* diagonali che collegano vertici opposti e si incontrano in un punto interno: sembra che il poligono non regolare sia stato costruito *dopo* aver tracciate quelle diagonali.

L’ottagono a destra è scomposto in *sei* triangoli grazie alla presenza di *cinque* diagonali.



Anche i due ennagoni sono ripartiti con i metodi visti per gli ottagoni: il poligono di sinistra è scomposto in nove triangoli con il vertice interno in comune, mentre quello di destra contiene al suo interno *cinque* diagonali che lo scompongono in *sette* triangoli.

CAPITOLO SECONDO

I TRIANGOLI

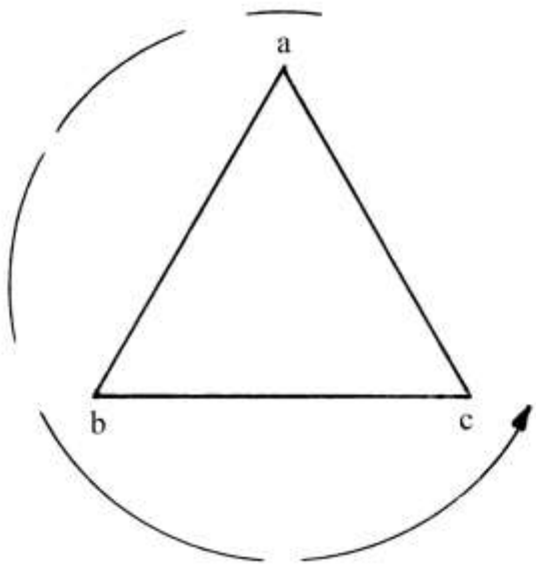
Alcuni campi potevano avere forma triangolare: Calandri utilizzò questo capitolo per descrivere i metodi da impiegare per calcolare anche l'area dei triangoli originati dalla scomposizione di poligoni con un numero di lati maggiore di tre, come mostrato alla fine del precedente capitolo.

I triangoli sono classificati in tre gruppi in relazione ai loro angoli interni:

1. Equilatero o *oxigono*.
2. *Equicrurio* o *ortogonio*: si tratta rispettivamente del triangolo isoscele e del triangolo rettangolo.
3. *Diversilatero* o *ambigonio*: è il triangolo scaleno.

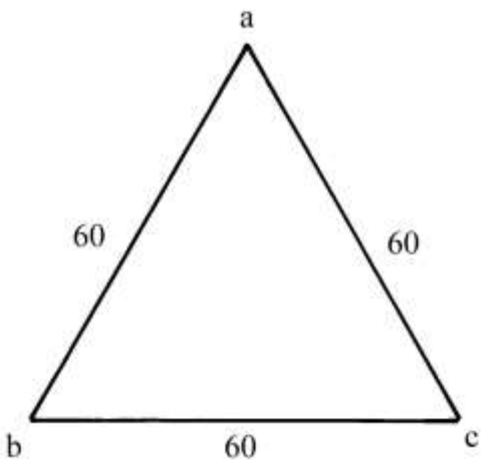
Altri Autori del XVI secolo con *ambigonio* intendevano un triangolo ottusangolo, cioè con un angolo interno ottuso.

Calandri sembra aver apposto le lettere ai vertici dei triangoli sempre in *senso antiorario*, a partire dal vertice più in alto:



Triangolo equilatero

Un campo ha la forma di un triangolo equilatero con lati lunghi 60 braccia [chiariremo in seguito che si tratta di braccia da panno]:



La procedura impiegata da Calandri per calcolare l'area contiene i seguenti passi:

* moltiplicare la lunghezza di un lato per sé stessa: 60*60 = 3600;
* calcolare 1/3 di 3600: 1/3 * 3600 = 1200;
* calcolare 1/10 di 3600: 1/10 * 3600 = 360;
* sommare gli ultimi due quozienti: 1200 + 360 = 1560 braccia^2, che è l'area del triangolo equilatero.

Approfondiamo l'origine del metodo impiegato da Calandri, riassunto nella formula:

$$\text{Area}_{\text{a.b.c.}} = \text{lato}^2 * (1/3 + 1/10) = \text{lato}^2 *(10 + 3)/30 = 13/30 * \text{lato}^2 .$$

Questa formula approssimata risale al matematico Erone di Alessandria.

La costante 13/30 vale 0,4(3).

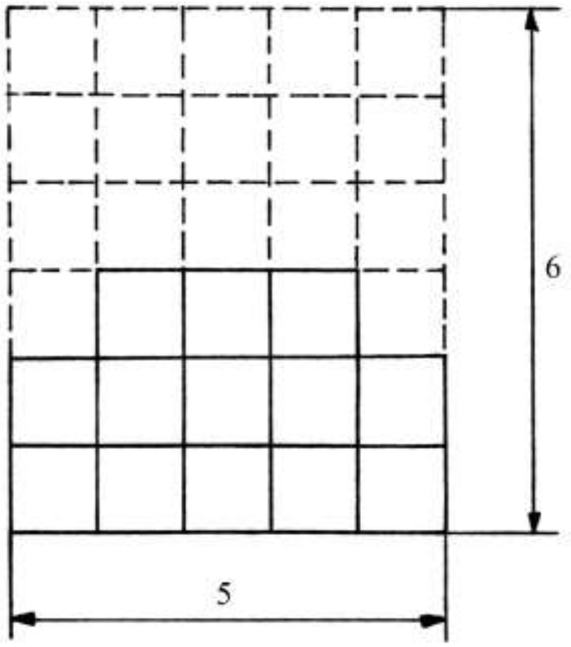
La formula corretta per il calcolo dell'area di un triangolo equilatero è:

$$\text{Area}_{\text{TRIANGOLO EQUILATERO}} = \text{lato} * \text{altezza}/2 = \text{lato} * [\text{lato} * (\sqrt{3})/2]/2 = \text{lato}^2 * (\sqrt{3})/4 \approx$$

$$\approx \text{lato}^2 * 0{,}433012.$$

La differenza fra (√3)/4 e 13/30 è minima: la seconda costante fornisce un risultato leggermente errato per eccesso.

Il grafico che segue contiene una griglia rettangolare scomposta in 30 quadrati di uguali dimensioni: secondo la formula di Erone, l'area del triangolo equilatero corrisponde a 13 quadrati:



Calandri convertì l'area di 1560 braccia^2 in staiora e per farlo fece ricorso all'equivalenza 1 staioro = 1600 braccia^2, implicitamente confermando che le unità usate per misurare questo campo erano il braccio da panno (lineare) e il braccio^2 da panno. Essendo la superficie inferiore a uno staioro, l'Autore impiegò la procedura seguente:

La procedura è la seguente:

* dividere 1560 per 12^2: $1560/12^2 = 1560/144 = (10 + 120/144)$ panora = = (10 + 5/6) panora;
* moltiplicare il resto, 5/6, per 12: 5/6 * 12 = 10 pugnora.

L'area del triangolo equilatero è (10 panora + 10 pugnora).

%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Una seconda soluzione richiede la misurazione dell'altezza a.d. che Calandri chiama *perpendicolare* o *catetto*, stimata 52 braccia.

Occorre una precisazione: il rapporto fra la lunghezza stimata dell'altezza e quella di un lato vale:

a.d./b.c. = 52/60 = 13/15 ≈ 0,8(6).

Anche questa costante risale a Erone.

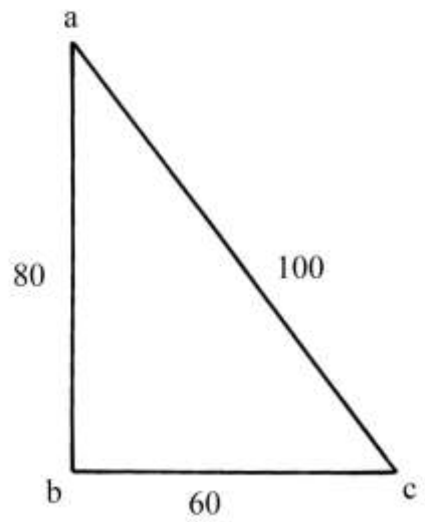
L'area del triangolo è così calcolata:

Area $_{\text{a.b.c.}}$ = (a.d.)*(b.c.)/2 = 52*60/3 = 52*30 = 1560 braccia^2.

L'area è di nuovo calcolata in (10 panora + 10 pugnora).

Triangolo rettangolo

Un campo ha la forma di un triangolo rettangolo i cui lati hanno le lunghezze espresse in braccia [da terra]:



L’angolo nel vertice b. è retto.

Questo triangolo rettangolo è metà di un rettangolo che ha lati: a.b. = 80 e b.e. =60; la sua area è 80*60 = 4800 braccia^2.

L’area di a.b.c. è uguale alla metà e cioè vale 2400 braccia^2.

Calandri non scrive di aver calcolato l’area ma di aver ricavato il “…quadro di detto campo…”. Per lui calcolare l’area è espresso con il verbo *quadrare*.

La conversione nei multipli del braccio^2 è:

*	dividere 2400 per 12^3 = 1728:	2400/1728 = (1 + 672/1728) staiora;
*	dividere il numeratore 672 per 12^2 = 144:	672/144 = (4 + 96/144) panora;
*	dividere il numeratore 96 per 12:	96/12 = 8 pugnora.

L’area è uguale a (1 staioro + 4 panora + 8 pugnora).

- APPROFONDIMENTO -

Le terne pitagoriche primitive

Le lunghezze dei lati del precedente triangolo rettangolo sono proporzionali per un fattore 20 dei numeri che formano la prima terna primitiva:

60 : 3 = 80 : 4 = 100 : 5 .

Calandri deve aver scelto quei numeri per la facilità dei calcoli che essi comportavano:

$(a.b.)^2 + (b.c.)^2 = (a.c.)^2 \quad \rightarrow \quad 80^2 + 60^2 = 100^2 \quad \rightarrow 6400 + 3600 = 10000$.

Una terna pitagorica è detta *primitiva* quando i tre numeri che la compongono sono fra loro *primi* (e cioè non possiedono un divisore comune diverso da 1), come è il caso dei seguenti esempi:

* 3, 4, 5 ;
* 5, 12, 13 ;
* 8, 15, 17 ;
* 7, 24, 25 ;
* 12, 35, 37.

Tutte le terne pitagoriche *primitive* sono formate da *un* numero pari e da *due* numeri dispari.

A ogni terna pitagorica corrisponde un triangolo rettangolo e viceversa.

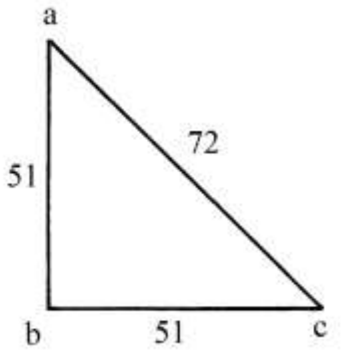
Le prime 18 terne pitagoriche primitive sono indicate nella seguente tabella:

[3, 4, 5]	[5, 12, 13]	[7, 24, 25]
[8, 15, 17]	[9, 40, 41]	[11, 60, 61]
[12, 35, 37]	[13, 84, 85]	[16, 63, 65]
[20, 21, 29]	[20, 99, 101]	[28, 45, 53]
[33, 56, 65]	[36, 77, 85]	[39, 80, 89]
[48, 55, 73]	[60, 91, 109]	[65, 72, 97]

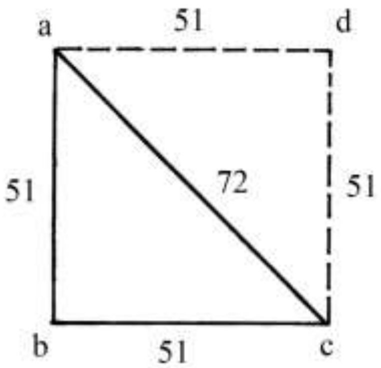
- -

Un altro triangolo rettangolo

a.b.c. è un campo che ha un angolo retto nel vertice b. Le dimensioni dei lati sono espresse in *braccia da panno*:



La figura è un triangolo rettangolo isoscele generato da un quadrato a.b.c.d. sezionato lungo la diagonale a.c.:



La lunghezza dell'ipotenusa a.c. è data da:

a.c. = $\sqrt{[(a.b.)^2 + (b.c.)^2]} = \sqrt{(51^2 + 51^2)} = \sqrt{(2601 + 2601)} = \sqrt{5202} \approx 72{,}125$ braccia, valore arrotondato per difetto a 72 braccia.

L'area del quadrato è:

Area $_{a.b.c.d.}$ = 51^2 = 2601 braccia^2.

L'area del triangolo a.b.c. è uguale a metà di quella di a.b.c.d. è cioè:

2601/2 = 1300 + ½ braccia^2 da panno.

Per evitare difficoltà con i calcoli in presenza di *rotti* – e cioè i numeri frazionari – per convertire le braccia^2 da panno in staiora e nei suoi sottomultipli, Calandri utilizzò un metodo indiretto (i numeri interi erano chiamati *sani*); ecco i passi inclusi nell'applicazione del metodo:

* moltiplicare (1300 + ½) per 12: (1300 + ½) * 12 = 15606 [lo staioro valeva 12 panora];

*	moltiplicare per 12:	15606 * 12 = 187272 [un panoro conteneva 12 pugnora];
*	moltiplicare per 12:	187272 * 12 = 2247264 [perché un pugnoro valeva 12 braccia^2];
*	dividere per 1600:	22447264/1600 = 1404,54 *braccia^2 da terra*;
[l'operazione è effettata da Calandri con due successive divisioni per 40, operazioni più facili rispetto alla divisione diretta per 1600].
[Il risultato è arrotondato all'intero più vicino, 1405 braccia^2 da terra.]

[La divisione per 1600(= 40^2) è giustificata dal rapporto convenzionale, descritto nell'iniziale paragrafo *Le unità di misura superficiali*, fra staioro e braccio^2 da panno, che è utile ricordare per evitare fraintendimenti:
1 staioro ≈ 1600 braccia^2 da panno].
*	dividere 1405 per 12:	1405/12 = (117 + 1 braccio^2 da terra);
*	dividere 117 per 12:	117/12 = 9 panora + 9 pugnora.

L'area del triangolo è:	(9 panora + 9 pugnora + 1 braccio^2 da terra).

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

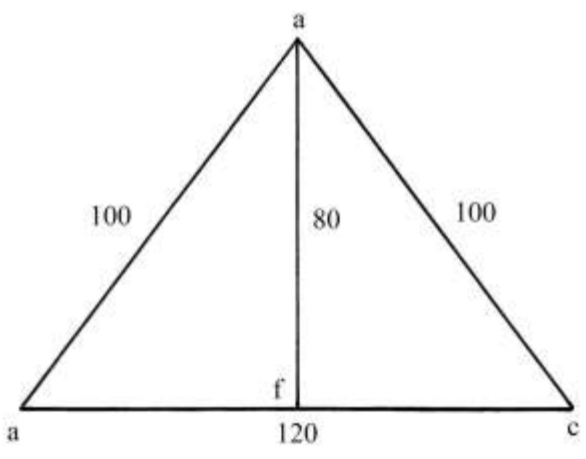
Calandri propose una seconda procedura:
*	moltiplicare la lunghezza di a.b. per metà di quella di b.c.:	51*(51/2) = 1300 + ½ braccio^2 da panno;
*	dividere per 1600:	(1300 + ½)/1600 = 2601/3200 staiora.

Anche con questa seconda procedura, la conversione da braccia^2 da panno a staiora e braccia^2 da terra porta allo stesso risultato.

È utile notare l'estrema complicazione che comportava la presenza di due distinte unità superficiali di base quali erano il braccio quadro da panno e il braccio quadro da terra.

Triangolo isoscele

La figura che segue mostra un triangolo *equicrurio* e cioè *isoscele*; le dimensioni sono espresse in braccia da terra:



La prima operazione che occorre effettuare è il tracciamento dell'altezza dal vertice a. fino al punto medio, f., del lato opposto b.c.

La sua lunghezza è ricavata con l'applicazione del cosiddetto teorema di Pitagora al triangolo rettangolo b.a.f.:

a.f. = $\sqrt{[(b.a.)^2 - (b.f.)^2]} = \sqrt{[100^2 - (120/2)^2]} = \sqrt{(10000 - 3600)} = \sqrt{6400} = 80$ braccia.

L'area del triangolo è data da:

Area $_{b.a.c.}$ = (a.f.) * (b.c.)/2 = 80 * 120/2 = 80 * 60 = 4800 braccia^2.

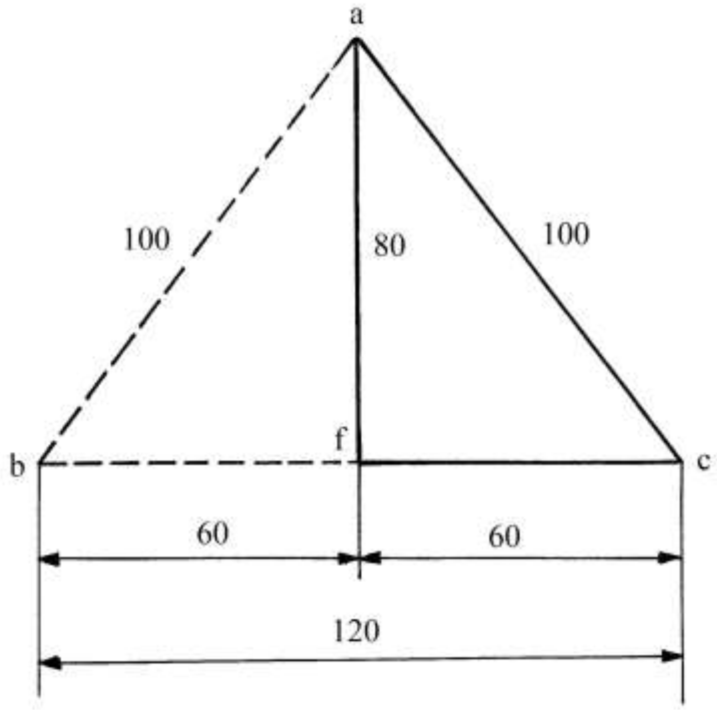
Benché non espressamente indicato, le misure lineari e superficiali sono in braccia da terra.

L'area è calcolata dividendo 4800 braccia^2 per 1728 e cioè tre volte in progressione per 12: ricordiamo che $12^3 = 1728$.

Il risultato è:

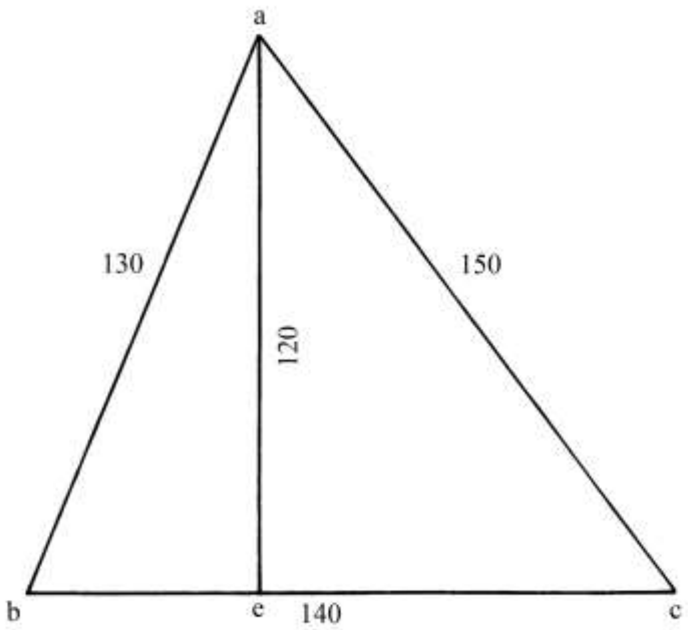
Area $_{b.a.c.}$ = (2 staiora + 9 panora + 4 pugnora).

Questo triangolo è l'esatto doppio del triangolo rettangolo con lati lunghi 60, 80 e 100 braccia da terra, incontrato nelle pagine precedenti:



Triangolo scaleno

Il triangolo della figura che segue è scaleno o *diversilatero* secondo la terminologia di Calandri:



Le dimensioni del campo sono espresse in braccia [da terra].

L'altezza a.e. è lunga 120 braccia.

L'area è calcolata come segue:

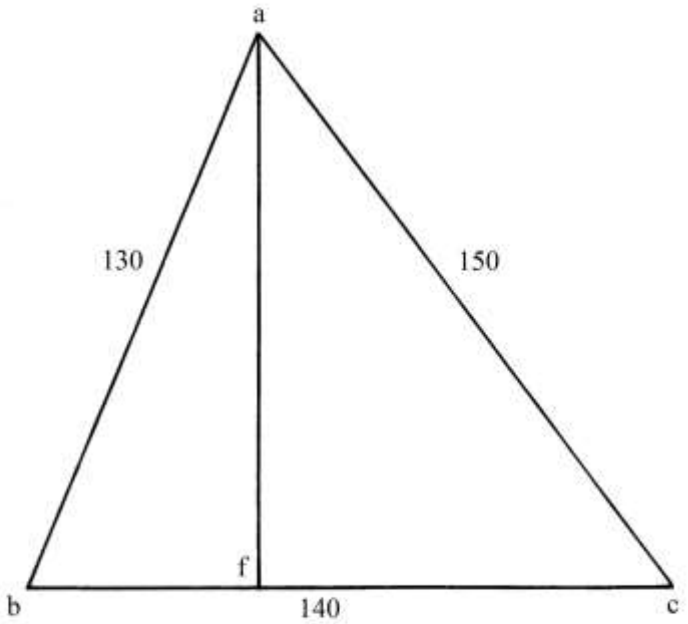
Area $_{a.b.c.}$ = (a.e.)*(b.c./2) = 120 * 140/2 = 120 * 70 = 8400 braccia^2.

La conversione in staiora è calcolata sulla base dell'equivalenza 1 staioro = 1728 braccia^2 da terra e il risultato della divisione progressiva per tre volte per 12 è:

Area $_{a.b.c.}$ = (4 staiora + 10 panora + 4 pugnora).

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Lo stesso campo fornì a Calandri l'occasione per impiegare un secondo metodo: in questo caso sono note soltanto le lunghezze dei tre lati ma non è conosciuta quella dell'altezza:



Per prima cosa occorre tracciare sul disegno l'altezza a.f. relativa alla base b.c.; lo scopo della procedura che segue è quello di determinare con il calcolo la sua lunghezza, senza doverla misurare sul terreno:

* moltiplicare la lunghezza di a.b. per sé stessa: 130*130 = 16900;
* moltiplicare la lunghezza di b.c. per sé stessa: 140*140 = 19600;
* sommare i due prodotti: 16900 + 19600 = 36500;
* moltiplicare la lunghezza del lato a.c. per sé stessa: 150*150 = 22500;
* sottrarre 22500 da 36500: 36500 – 22500 = 14000;
* dividere per il doppio della lunghezza della base b.c.: 14000/(140*2) = 14000/280 = 50;
* moltiplicare l'ultimo quoziente per sé stesso: 50*50 = 2500;
* sottrarre dal quadrato della lunghezza di a.b.: 130^2 – 2500 = 16900 – 2500 = 14400;
* estrarre la radice quadrata: √14400 = 120 braccia, lunghezza della perpendicolare a.f.

Il risultato ottenuto con questa procedura è identico a quello ricavato con la diretta misurazione sul terreno dell'altezza a.f.

- APPROFONDIMENTO -

Erone e le sue formule

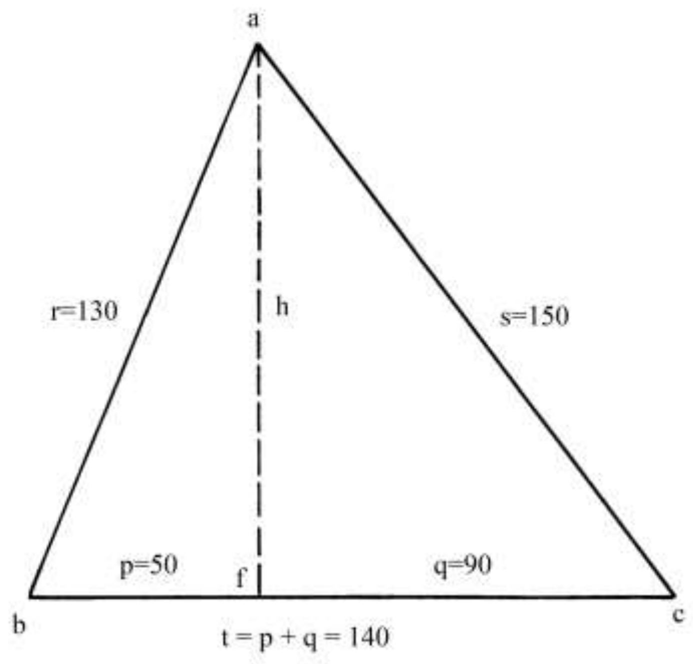
Il secondo metodo applica, senza mai citare il suo presunto Autore, una formula attribuita a Erone: secondo il matematico persiano al-Biruni (973-1048) essa sarebbe dovuta a Archimede (287-212 a.C.).

Chiamiamo:

* *r* la lunghezza del lato a.b.;
* *s* la lunghezza del lato a.c.;
* *t* la lunghezza del lato b.c.
* *h* la lunghezza dell'altezza a.f.

Il lato b.c. è formato dall'unione delle proiezioni dei lati a.b. e b.c.:

* *p* è la lunghezza di b.f.;
* *q* è la lunghezza di f.c. .



La seconda procedura impiegata da Calandri può essere riscritta come segue:

* calcolare r^2: $r^2 = 130^2 = 16900$;
* calcolare t^2: $t^2 = 140^2 = 19600$;
* sommare r^2 e t^2: $r^2 + t^2 = 16900 + 19600 = 36500$;
* calcolare s^2: $s^2 = 150^2 = 22500$;
* sottrarre s^2 da $(r^2 + t^2)$: $(r^2 + t^2) – s^2 = 36500 – 22500 = 14000$;
* dividere per 2*t: 14000/(2*140) = 14000/280 = 50 braccia = *p*;
* calcolare p^2: $p^2 = 50^2 = 2500$;
* sottrarre p^2 da r^2: $r^2 – p^2 = 16900 – 2500 = 14400 = h^2$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{14400} = 120$ braccia = h.

La procedura è sintetizzata con le formule che seguono:

$$p = [(r^2 + t^2) – s^2]/(2*t)$$
$$h^2 = r^2 – p^2$$
$$h = \sqrt{r^2 – p^2}$$

Le formule sono dovute a Erone e sono state usate da altri matematici anteriori a o contemporanei di Pier Maria Calandri, fra i quali:

* I Gromatici romani: il nucleo fondamentale fu approntato fra il 75 e il 120 d.C.
* Severino Boezio (480-524).
* Gerberto d'Aurillac – Papa Silvestro II (circa 940-950 – 1003).
* Tommaso della Gazzaia (fine XIV secolo – 1433).
* Cosimo Bartoli (1503-1572).

Il triangolo 13-14-15

Dopo il matematico Erone di Alessandria, questo particolare triangolo è stato studiato da:

- I Gromatici *Marcus Iunius Nipsus* (II secolo d.C.) e Epafrodito (II – III secolo).
- Severino Boezio.
- *Forse* Gerberto d'Aurillac – Papa Silvestro II.
- Leonardo Fibonacci (circa 1170 – circa 1250) nella *Practica Geometrie*.
- Piero della Francesca (circa 1412 – 1492), nel *Trattato d'abaco* (fogli 80 *recto*, 80 *verso*, 81 *recto*-a, 81 *verso*, 82 *recto*).
- Giorgio Valla (1447 – 1500) nel "*De expetendis et fugiendis rebus opus*", pubblicato a Venezia nel 1501.
- Niccolò Fontana, detto Tartaglia (circa 1499 – 1557).

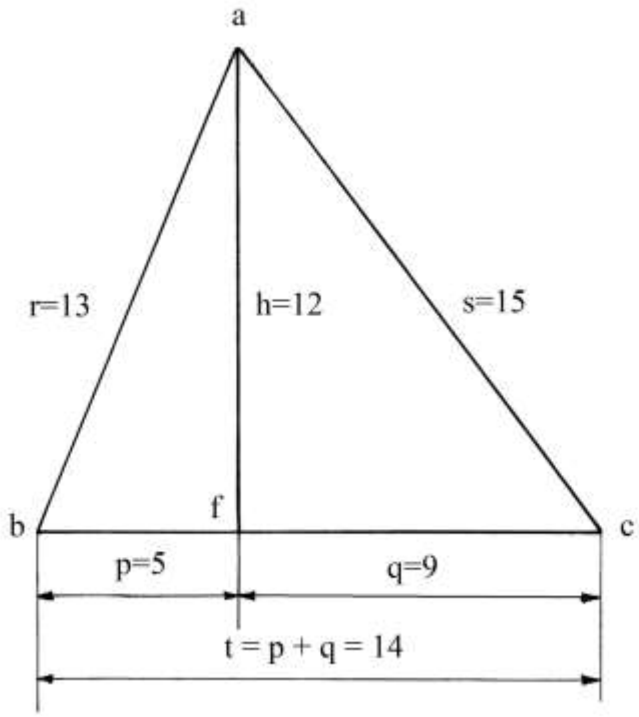
La costanza nel tempo e presso numerosi e importanti geometri dell'uso di questo triangolo può essere spiegata con le sue interessanti proprietà (lunghezze e aree rappresentate da numeri interi) che evitavano o riducevano il ricorso a complesse operazioni quali l'estrazione di radici quadrate, semplificando misurazioni e calcoli.

I triangoli contenuti nel triangolo a.b.c.

Il segmento f.c. = q [rivedere l'ultima figura] è lungo:

q = t – p = 140 – 50 = 90 braccia.

Semplifichiamo la situazione dividendo per 10 le lunghezze di tutti i lati e segmenti presenti in a.b.c: il risultato è mostrato nel grafico che segue:



Questo particolare poligono è noto come *triangolo 13-14-15*, ampiamente conosciuto dagli abacisti medievali e rinascimentali.

L'altezza a.h. scompone il triangolo a.b.c. in due triangoli rettangoli, a.f.b. e a.f.c. Essi hanno lati lunghi in proporzione a due *terne pitagoriche primitive*:

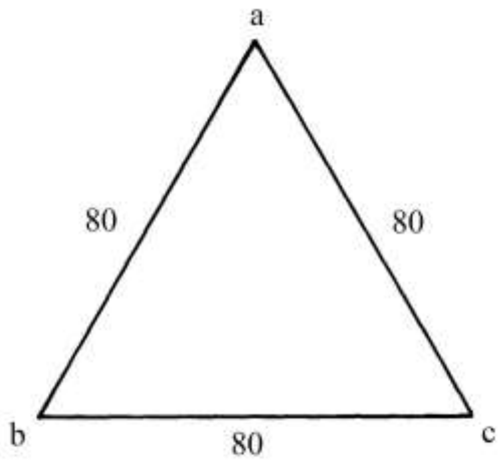
A) b.f. = 5 a.f. = 12 a.b. = 13 → $5^2 + 12^2 = 13^2$ → 25 + 144 = 169.

B) f.c. = 9 a.f. = 12 a.c. = 15 → $9^2 + 12^2 = 15^2$ → 81 + 144 = 225.

- -

<u>Triangolo equilatero</u>

Un campo ha la forma di un triangolo equilatero con lati lunghi 80 *braccia da panno*:



Per calcolare la sua area in braccia^2 da panno, Calandri utilizzò la procedura che segue:

* sommare le lunghezze dei tre lati: 80 + 80 + 80 = 240 [è il perimetro del triangolo];

* dividere per 2: 240/2 = 120 [è il semiperimetro];
* calcolare la differenza fra 120 e la lunghezza di un lato: 120 – 80 = 40, valore uguale per tutti i lati;
* moltiplicare la differenza relativa al primo lato [a.b.] per quella relativa al secondo [b.c.]: 40 * 40 = 1600;
* moltiplicare per la differenza relativa al terzo lato [a.c.]: 1600 * 40 = 64000;
* moltiplicare per il semiperimetro: 64000 * 120 = 7680000;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{7680000} \approx 2772$ braccia^2 da panno [valore arrotondato per eccesso da parte di Calandri].

La conversione in staiora è effettuata con i passi che seguono:
* dividere 2772 per 1600: 2772/1600 = (1 + 1172/1600) = (1 + 293/400) staiora;
* moltiplicare il numeratore 293 per 12: 293 * 12 = 3516;
* dividere per 400: 3516/400 = (8 + 316/400) panora;
* moltiplicare il numeratore 316 per 12: 316 * 12 = 3792;
* dividere per 400: 3792/400 = (9 + 192/400) pugnora;
* moltiplicare il numeratore 192 per 12: 192 * 12 = 2304;
* dividere per 400: 2304/400 ≈ 6 braccia^2 da terra [valore arrotondato da Calandri, per eccesso all'intero più vicino].

L'area del campo è:

Area $_{a.b.c.}$ = (1 staioro + 8 panora + 9 pugnora + 6 braccia^2 da terra).

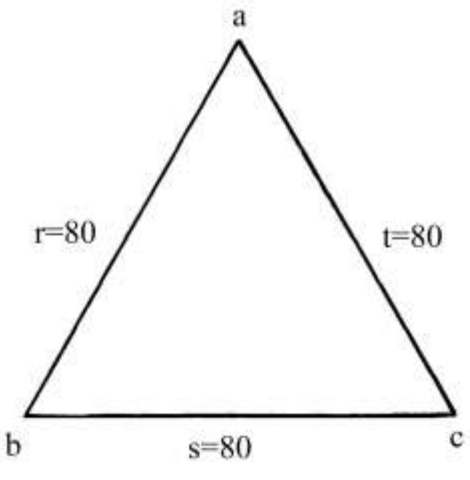
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

La procedura usata da Calandri richiede un dettagliato approfondimento.

Chiamiamo *r*, *s* e *t* le lunghezze dei tre lati, *2*p* il perimetro e *p* il semiperimetro:

r + s + t = =2*p = 80 + 80 + 80 = 240;

p = 240/2 = 120.



La procedura impiegata da Calandri per calcolare l'area del triangolo può essere scritta come segue:
* calcolare il perimetro: 2*p = r + s + t = 80 + 80 + 80 = 240;
* dividere per 2: 2*p/2 = p = 240/2 = 120;
* calcolare la differenza fra *p* e *r*: p – r = 120 – 80 = 40;
* calcolare la differenza fra *p* e *s*: p – s = 120 – 80 = 40;
* calcolare la differenza fra *p* e *t*: p – t = 120 – 80 = 40;

* moltiplicare fra loro le tre differenze: $40 * 40 * 40 = 64000$;
* moltiplicare per il semiperimetro *p*: $64000 * 120 = 7680000$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{(7680000)} \approx 2772$ braccia^2 da panno.

La procedura è sintetizzata nella formula che segue:

$$\text{Area}_{\text{a.b.c.}} = \sqrt{[p * (p - r) * (p - s) * (p - t)]}.$$

Si tratta della formula di Erone per l'esatto calcolo dell'area di un qualsiasi triangolo di cui siano note le lunghezze dei lati.

Azzardiamo un'ipotesi: questo secondo capitolo è iniziato con l'esempio di un campo a forma di triangolo equilatero la cui area era stata calcolata con la formula approssimata, sempre dovuta a Erone:

$$\text{Area}_{\text{TRIANGOLO EQUILATERO}} = 13/30 * \text{lato}^2 .$$

Forse, il trattato geometrico fu composto da Calandri in tempi diversi ed egli provvide a unire i diversi capitoli in un ordine che oggi appare un po' innaturale: prima i quadrilateri, poi i triangoli. Ulteriori letture gli potrebbero aver suggerito delle aggiunte e fra queste l'uso della più corretta formula di Erone.

La conoscenza di questa formula era diffusa presso i primi abacisti toscani, come ad esempio è il caso del fiorentino Paolo Gherardi (o Gerardi), autore di due trattati matematici.

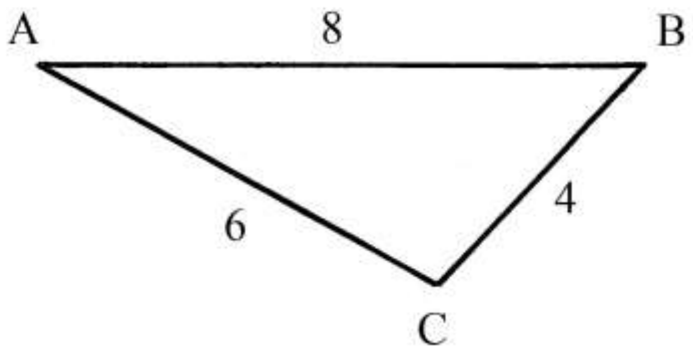
Essi sono intitolati "*Libro di ragioni*" e "*Liber habaci*" e sono scritti in fiorentino. Sono contenuti nei Codici Magliabechiani, Classe XI, nn. 87 e 88 (secolo XIV) della Biblioteca Nazionale di Firenze.

Paolo Gherardi era un mercante e un maestro di abaco fiorentino, vissuto fra Firenze e Montpellier, nel Sud della Francia.

Il "*Libro di ragioni*" di Paolo Gherardi è stato composto a Montpellier nel 1328 e impiega le cifre indo-arabiche.

Nel *Libro di ragioni* è contenuto il seguente problema

…Uno scudo ha la forma di un *triangolo scaleno*, con lati lunghi 4,6 e 8 palmi…:



[*Nota*: presso gli Abacisti medievali, lo *scudo* ha sempre forma di triangolo (isoscele o equilatero e in qualche caso scaleno), con il lato orizzontale, la *base*, posta superiormente, come è il caso della precedente figura e il vertice ad esso opposto disegnato in basso].

Il problema chiede l'area dello scudo.

La procedura risolutiva impiegata da Gherardi contiene i seguenti passi:

* sommare le lunghezze dei lati: $4 + 6 + 8 = 18$ palmi [perimetro];
* dividere per 2: $18 : 2 = 9$ [semiperimetro];
* sottrarre dal semiperimetro la lunghezza del lato più corto: $9 - 4 = 5$;
* moltiplicare per il semiperimetro: $5 * 9 = 45$;
* sottrarre dal semiperimetro la lunghezza del lato intermedio: $9 - 6 = 3$;

* moltiplicare per 45: $3 * 45 = 135$;
* sottrarre dal semiperimetro la lunghezza del lato più lungo: $9 – 8 = 1$;
* moltiplicare per 135: $1 * 135 = 135$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{135}$ palmi^2, area del triangolo ABC.

Gherardi non effettuò l'operazione di estrazione della radice quadrata: il risultato è $\sqrt{135} \approx 11,62$ palmi^2.

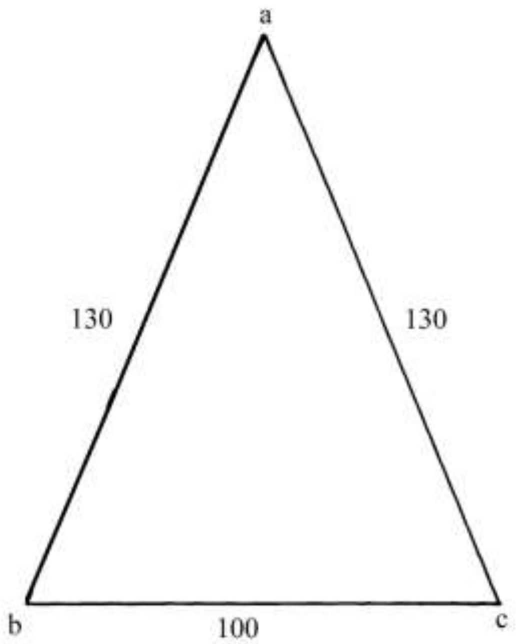
Gherardi applicò la corretta formula di Erone.

Un abacista esperto come Calandri, per giunta appartenente a una nota famiglia di matematici, conosceva quella formula: perché non la applicò in tutti i casi? Forse vi è una spiegazione: per semplificare al massimo i calcoli da parte di persone molto pratiche e poco abituate a gestire le radici quadrate, in alcuni casi scelse la formula approssimata più veloce:

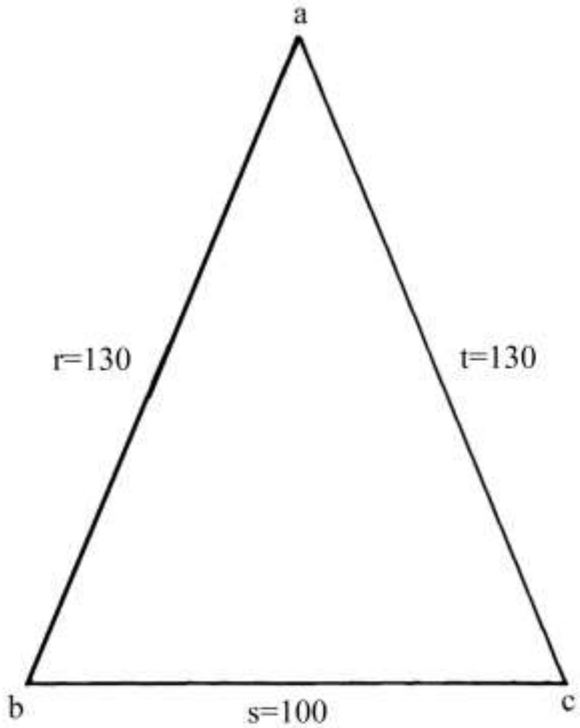
$$\text{Area}_{\text{TRIANGOLO EQUILATERO}} = 13/30 * \text{lato}^2 .$$

Un altro triangolo isoscele

Un campo ha la forma di un triangolo isoscele con le dimensioni dei lati indicate in braccia [da panno]:



Anche in questo caso, Calandri fece ricorso alla più corretta formula di Erone: La sua procedura è stata rielaborata per renderla più leggibile e a questo scopo le lunghezze dei lati sono indicate con le lettere *r*, *s* e *t*:



Ecco i passi:

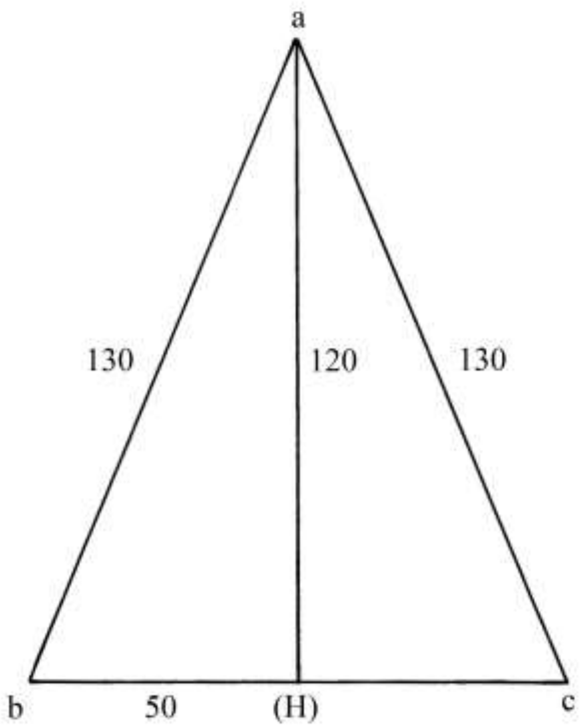
* sommare le lunghezze dei tre lati: a.b. + b.c. + a.c. = 130 + 100 + 130 = 360 = 2*p [perimetro];
* dividere per 2: 2*p/2 = 360/2 = 180 = *p* [semiperimetro];
* sottrarre r da p: p – r = 180 – 130 = 50;
* sottrarre s da p: p – s = 180 – 100 = 80;
* sottrarre t da p: p – t = 180 – 130 = 50;
* moltiplicare le tre differenze: 50 * 80 * 50 = 200000;
* moltiplicare per p: 200000 * 180 = 36 000 000;
* "…*trovare un numero, che moltiplicato per se medesimo faccia 36 000000…*", e cioè estrarre la radice quadrata: √(36 000 000) = 6000 braccia^2 [da panno], area del triangolo a.b.c.

La conversione in staiora è fatta dividendo 6000 per 1600 e quindi implicitamente affermando che le 6000 braccia2 erano da panno e non da terra.

Il risultato è: l'area equivale a (3 staiora + 9 panora).

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Per calcolare l'area di a.b.c. Calandri propose un secondo metodo che richiedeva la misurazione dell'altezza a.(H), lunga 120 braccia:

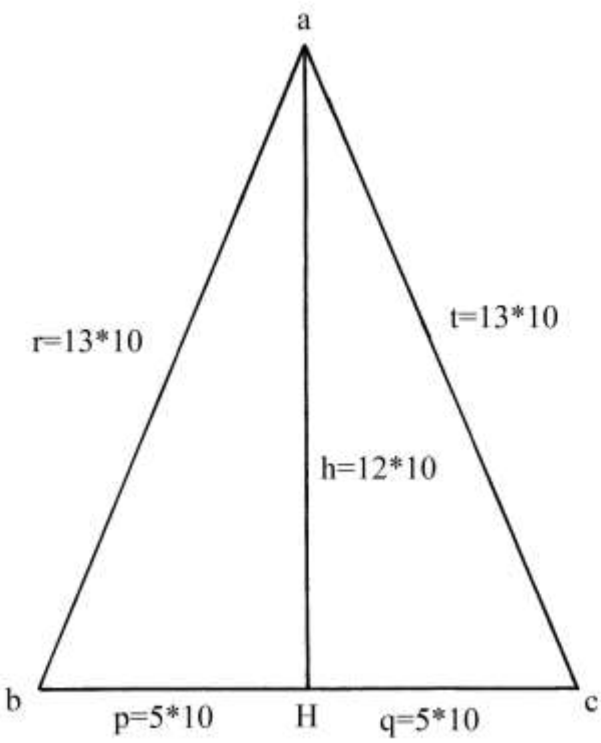


L’area del triangolo è data da:

Area $_{a.b.c.}$ = (a.(H) * b.(H) = 120 * 50 = 6000 braccia^2.

- APPROFONDIMENTO -

Nel triangolo isoscele di cui abbiamo descritto i due metodi impiegati per il calcolo dell’area è presente un’altra proprietà aritmetico-geometrica:



L'altezza a.H divide a.b.c. in due triangoli rettangoli di uguali dimensioni: a.b.H. e a.H.b. Le lunghezze dei loro lati sono proporzionali, secondo un modulo 10, ai numeri che formano la seconda terna pitagorica primitiva, quella 5-12-13. Infatti:

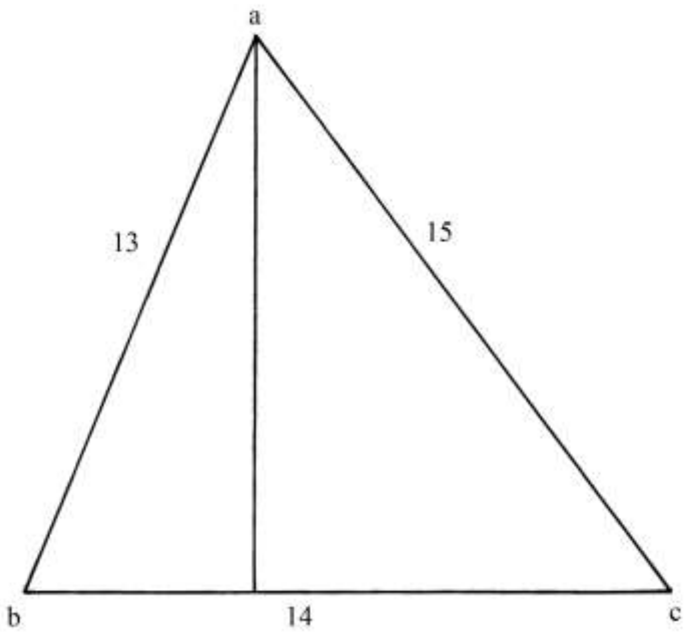
$5^2 + 12^2 = 13^2$

$25 + 144 = 169$.

- -

Triangolo scaleno

Un triangolo ha la forma di un *diversilatero* e cioè è un triangolo scaleno con le dimensioni dei suoi lati espresse in *canne*:



Il triangolo è simile a quello già incontrato in precedenza con lati lunghi 130, 140 e 150 braccia da terra.

Anche in questo caso Calandri applicò la formula di Erone:

*	calcolare il perimetro:	13 + 14 + 15 = 42;
*	dividere per 2:	42/2 = 21 = p [semiperimetro];
*	sottrarre la lunghezza di a.b. da p:	21 – 13 = 8;
*	sottrarre la lunghezza di b.c. da p:	21 – 14 = 7;
*	sottrarre la lunghezza di a.c. da p:	21 – 15 = 6;
*	moltiplicare 8 per 7 per 6:	8 * 7 * 6 = 336;
*	moltiplicare per p:	336 * 21 = 7056;
*	estrarre la radice quadrata:	$\sqrt{7056}$ = 84 canne^2, area del triangolo a.b.c.

Nel *primo capitolo* abbiamo già incontrata l'equivalenza:

1 staioro = 1728 braccia^2 [da terra] = 48 canne^2 [di 6 braccia da terra].

Una canna quadra da terra corrispondeva all'area di un quadrato con lati lunghi 6 braccia da terra.

La conversione in staiora è:

84/48 = (1 + ¾) staiora = (1 staioro + 9 panora).

CAPITOLO TERZO

Nel capitolo sono presentati diversi problemi relativi alla misura e al calcolo della superficie di campi di forma circolare: cerchi, semicerchi, segmenti circolari e settori circolari. La soluzione dei problemi richiede la conoscenza del valore di π e della sua approssimazione alla costante 22/7 e dei rapporti fra raggio, diametro e circonferenza.

Fin dall'inizio del capitolo, Calandri ribadisce l'impossibilità geometrica di quadrare il *tondo* (il cerchio). Egli cita espressamente Archimede che approssimò l'area di un cerchio agli 11/14 dell'area di un quadrato con lati lunghi quanto il diametro.

Sempre a Archimede si deve la misura approssimata della lunghezza della circonferenza, *c*, in relazione a quella del diametro, *d*:

$$c = (3 + 1/7) * d = 22/7 * d .$$

La costante 22/7 vale:

$22/7 \approx 3,(142857)$: è un numero periodico con periodo (142857).

Essa è una buona approssimazione del valore della costante π:

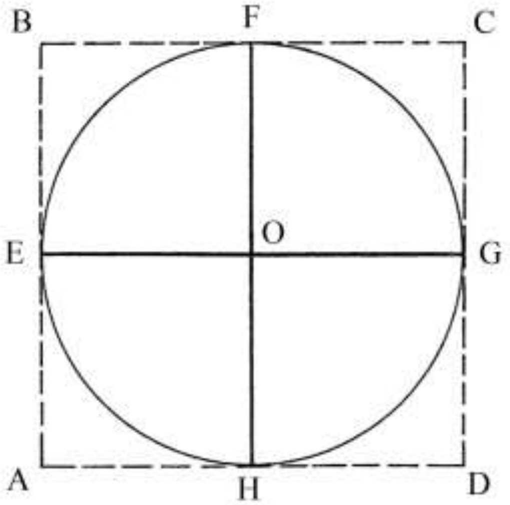
$$\pi \approx 3,14159 .$$

\- APPROFONDIMENTO -

L'origine della costante 11/14

ABCD è un quadrato che è circoscritto al cerchio di centro O e diametro

$$EG = AD = d .$$



L'area del cerchio è:

$\text{Area}_{\text{CERCHIO}} = \pi * (EG/2)^2 = \pi * r^2$, dove *r* è il raggio del cerchio.

L'area del quadrato è:

$\text{Area}_{\text{QUADRATO}} = AD^2 = EG^2 = (2*r)^2 = 4*r^2$.

Calcoliamo il rapporto fra le due aree:

$\text{Area}_{\text{CERCHIO}}/\text{Area}_{\text{QUADRATO}} = (\pi * r^2)/(4*r^2) = \pi/4 \approx 3,14159/4 \approx 0,\underline{785}3975$.

La costante di Archimede, 11/14, equivale a:

$11/14 \approx 0,\underline{785}714285$.

Le prime tre cifre decimali dei due numeri, qui sopra sottolineate, sono uguali.

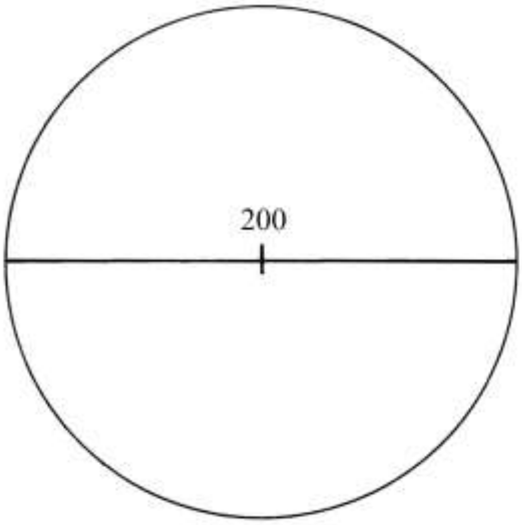
La costante 11/14 è un'accettabile approssimazione del valore di π/4; moltiplicando per 4 si ha:

$(\pi/4)*4 \approx (11/14) * 4 = 22/7$: riappare l'altra costante proposta da Archimede.

\- -

Un campo circolare

Un campo circolare ha diametro *d* lungo 200 braccia:

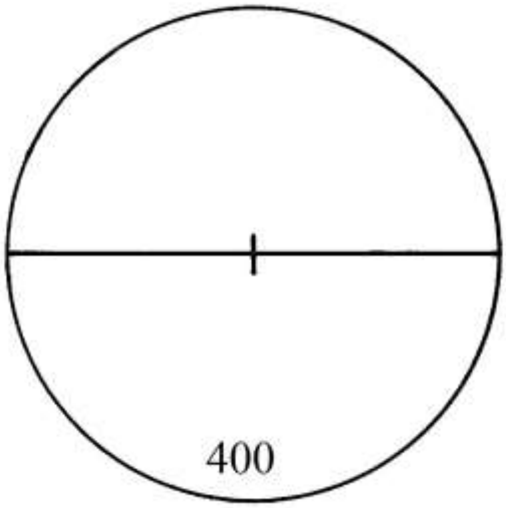


La circonferenza *c* è lunga:

c = d * 22/7 = 200 * 22/7 = 628 + 4/7 braccia.

Un altro campo circolare

Un campo circolare ha la circonferenza lunga 400 braccia:



Il problema chiede la lunghezza del diametro.

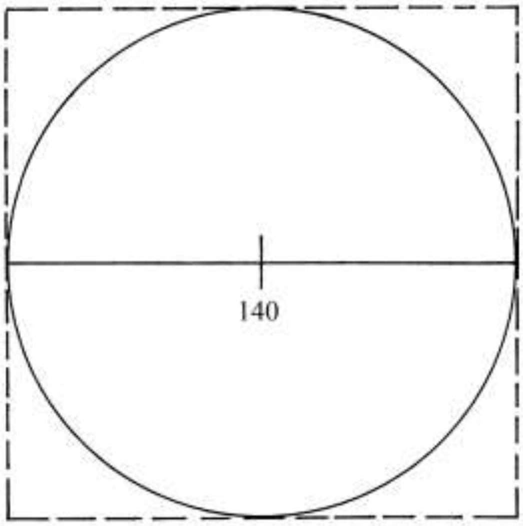
La soluzione è data dalla divisione della lunghezza della circonferenza per la costante (3 + 1/7).

La procedura usata da Calandri è la seguente:

* moltiplicare la lunghezza della circonferenza, *c*, per 7: 400*7 = 2800 [lo scopo è quello di avere soltanto numeri interi, più facili da trattare];
* dividere per 22: 2800/22 = (127 + 3/11) braccia [Calandri dà un risultato leggermente errato: (127 + 2/7) braccia].

Un altro campo circolare

Un campo ha forma circolare e il suo diametro è lungo 140 braccia:



Il problema domanda l'area espressa in *staiora a corda*.

La procedura contiene i seguenti passi:

* calcolare l'area del quadrato circoscritto al cerchio:
  Area $_{QUADRATO}$ = 140*140 = 19600 [braccia^2];
* moltiplicare per la costante 11/14: 19600*11 = 251600;
* dividere per 14: 251600/14 = 15400 braccia^2;

[la conversione da braccia^2 a staiora è ottenuta con tre divisioni in successione per 12, base del sistema duodecimale e ricordando che 1 staiora = 12^3 = 1728 braccia^2 da terra];

* 15400/12 = (1283 + 1/3) pugnora = 1283 pugnora + 4 braccia^2;
* 1283/12 = 106 panora + 11 pugnora;
* 106/12 = 8 staiora + 10 panora.

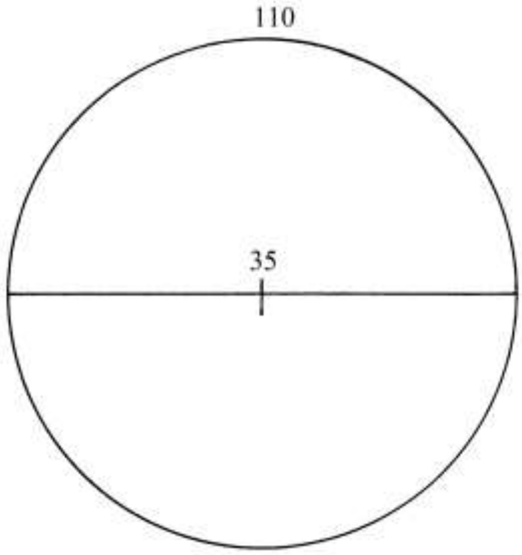
L'area totale è: (8 staiora + 10 panora + 11 pugnora + 4 braccia^2 da terra).

Campo circolare misurato a canne

Un campo ha la circonferenza *c* lunga 110 canne da panno da 4 braccia [e cioè *canne mercantili*]. Il problema chiede di calcolare la sua superficie in staiora.

Calandri descrisse due differenti metodi.

Il *primo* determina la lunghezza del diametro *d*, ricavata dalla divisione della lunghezza di *c* per la costante (3 + 1/7):



110/(3 + 17) = 110/(22/7) = 110 * 7/22 = 35 canne = *d*.

La procedura per calcolare l'area è:

* moltiplicare la lunghezza del diametro per sé stessa: d^2 = 35*35 = 1225;
* moltiplicare per 11: 1225 * 11 = 13475;
* dividere per 14: 13475/14 = (962 + ½) $canne^2$ da panno;
* dividere per 100: (962 + ½)/100 = (9 + 5/8) staiora;
* moltiplicare la frazione (5/8) per 12: (5/8)*12 = (7 + ½) panora;
* moltiplicare la frazione (½) per 12: (½) * 12 = 6 pugnora.

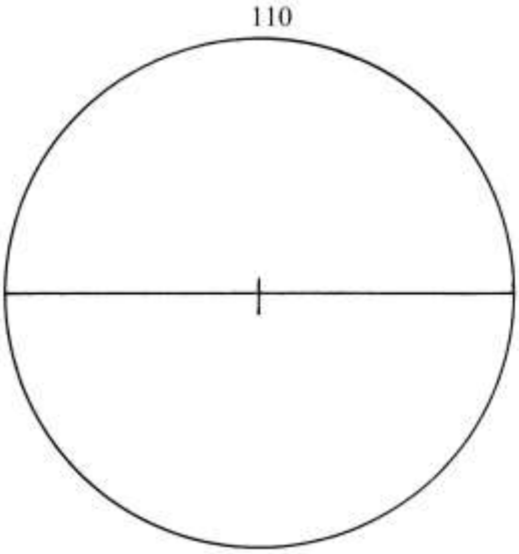
Il campo ha area uguale a (9 staiora + 7 panora + 6 pugnora).

La divisione per 100 del numero che esprime l'area in $canne^2$ da panno da 4 braccia (da panno) è spiegabile con una semplice considerazione: 1 $canna^2$ da panno è l'area di un quadrato di lato 4 braccia da panno e dato che 1 staioro equivale convenzionalmente a 1600 $braccia^2$ da panno, si ha la seguente eguaglianza:

1 staioro = 1600 $braccia^2$ da panno = (1600/16) $canne^2$ da panno = 100 $canne^2$ da panno.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Il *secondo* metodo prevede i seguenti passi:



* moltiplicare la lunghezza della circonferenza per sé stessa: $c^2 = 110^2 = 12100$;
* moltiplicare per 7: $12100 * 7 = 84700$;
* dividere per 88: $84700/88 = (962 + ½)$ canne2 da panno.

La procedura prosegue con gli stessi passi impiegati con il primo e il risultato è identico:

Area $_{\text{CAMPO}}$ = (9 staiora + 7 panora + 6 pugnora).

- APPROFONDIMENTO -

La costante 7/88 e il suo reciproco 88/7

Il secondo metodo appena descritto ha introdotto una nuova costante: 7/88 e quindi il suo reciproco 88/7.

Come già scritto in precedente, la costante π è stata approssimata a 22/7 da parte di Archimede.

La lunghezza *c* della circonferenza è data da:

$c = 2 * \pi * r$, dove *r* è il raggio.

La formula può essere scritta come:

$c = 2 * (22/7) * r = 44/7 * r$.

La formula inversa è:

$r = (7/44) * c$.

Conoscendo soltanto la lunghezza della circonferenza, c, l'area di un cerchio può essere scritta nella forma che segue:

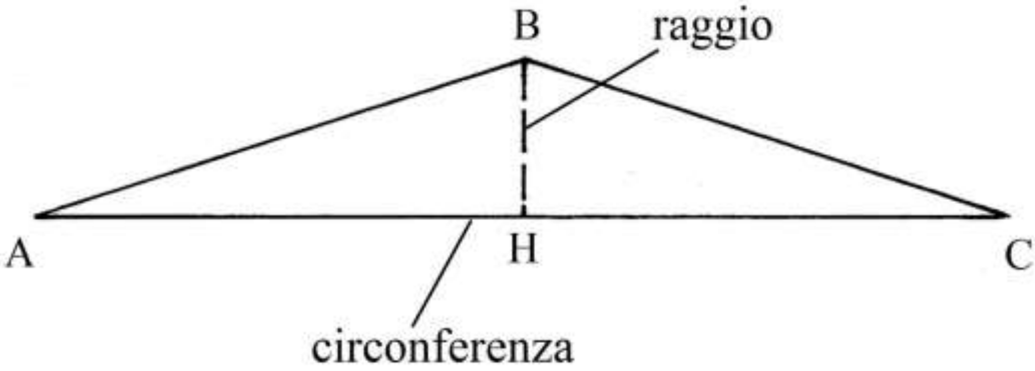
$$\text{Area}_{\text{CERCHIO}} = \pi * r^2 \approx 22/7 * (7/44 * c)^2 \approx 22/7 * 7^2/(44^2) * c^2 \approx$$
$$\approx (22 * 7(/(44 * 44) * c^2 \approx [7/(2 * 44)] * c^2 = 7/88 * c^2.$$

Da questa formula ricaviamo:

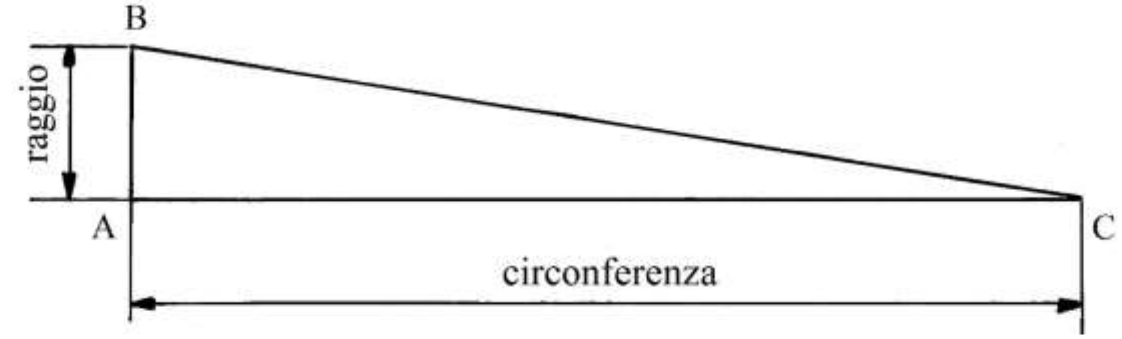
$c^2 = 88/7 * \text{Area}_{\text{CERCHIO}}$.

Approfondiamo l'origine della costante 88/7, che può essere definita con l'espressione *moltiplicatore della superficie*.

L'area di un cerchio è assimilabile a quella di un triangolo isoscele che ha la base AB lunga quanto la circonferenza e altezza CH lunga quanto il raggio:



oppure a quella di un triangolo rettangolo con cateti lunghi quanto la circonferenza e il raggio:



Nel primo caso (triangolo isoscele) l'area è data da:

Area $_{ABC}$ = (AC * BH)/2 = (circonferenza * raggio)/2 .

Nel secondo caso:

Area $_{ABC}$ = (AB * AC)/2 = (raggio * circonferenza)/2 .

Ma:

circonferenza ≈ diametro * 22/7 ≈ 2 * raggio * 22/7 ≈ 44/7 * raggio .

Da cui:

raggio ≈ circonferenza * 7/44 .

Sostituendo il valore appena trovato del raggio nella formula dell'area del cerchio si ha:

Area $_{CERCHIO}$ = $(\text{circonferenza})^2$ *1/2 * 7/44 ≈ $(\text{circonferenza})^2$ * 7/88.

Da questa ultima formula si ricava la lunghezza della circonferenza che è data da:

circonferenza ≈ √(Area $_{CERCHIO}$ * 88/7) .

La frazione 88/7 vale può essere scritta anche come

88/7 = 12 + 4/7 : questa costante è il *moltiplicatore della superficie* che verrà poi usato anche da *Orbetano da Montepulciano* nel suo trattato; esso corrisponde al rapporto fra il quadrato della circonferenza e l'area del cerchio e cioè:

circonferenza^2 = Area $_{CERCHIO}$ * 88/7.

Un'altra via permette di giungere allo stesso risultato: l'area di un cerchio di raggio r è data da:

Area cerchio = π * r^2, mentre la circonferenza è lunga: circonferenza = 2 * π * r.

Ne consegue che:

$(\text{circonferenza})^2$/(Area $_{CERCHIO}$) = (4 * π^2 * raggio^2)/(π * raggio^2) = 4 * π .

Sostituendo nell'ultima formula al valore di π quello approssimato di 22/7, risulta:

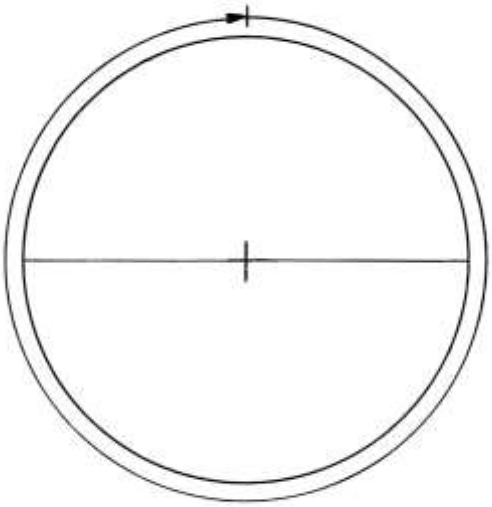
4 * (22/7) = 88/7 = 12 + 4/7 .

In conclusione, la frazione 88/7 è il valore approssimato di 4*π.

Nel Medioevo per i calcoli era più facile usare la frazione 88/7 invece dell'equivalente *numero misto* (12 + 4/7).

La costante era nota a diversi abacisti toscani: Paolo Gherardi, Paolo dell'Abbaco e il ricordato Orbetano da Montepulciano.

Questo insieme di costanti approssimate – 22/7, 11/14, 88/7 e 7/88 – erano molto utili per i diversi calcoli riguardanti il cerchio e la circonferenza. Un esempio era quello del calcolo del diametro di una colonna della quale era possibile misurare soltanto la circonferenza:

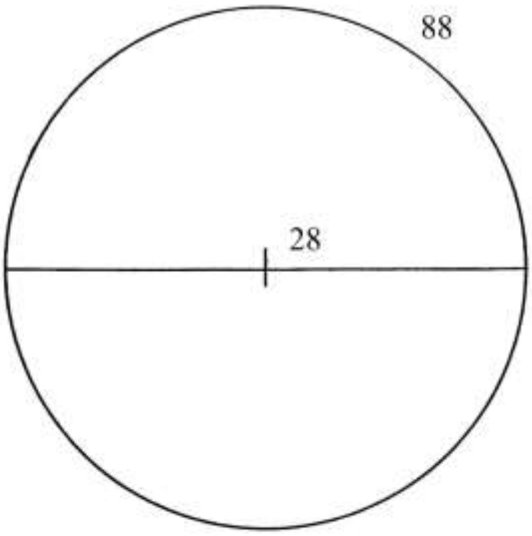


d = c//22/7) = 7 * c/22 .

- -

Campo misurato con canne da terra

Le dimensioni di un campo circolare sono misurate con canne da terra di 6 braccia:



Il problema chiede di calcolare la sua area in staiora a corda. La procedura impiegata è la seguente:

* moltiplicare la lunghezza del diametro per quella della circonferenza: 28*88 = 2464;
* dividere per 4: 2464/4 = 616 canne^2;

* dividere per 48: $616/48 = (12 + 5/6)$ staiora [nel successivo APPROFONDIMENTO sono spiegate le divisione per 4 e per 48];
* moltiplicare la frazione 5/6 per 12: $5/6 * 12 = 10$ panora.

L'area del campo era di (12 staiora + 10 panora).

- APPROFONDIMENTO -

Le divisioni per 4 e per 48

Il prodotto della lunghezza del diametro per quella della circonferenza è stato diviso per 4 allo scopo di determinare l'area. Vediamo di spiegare meglio.

L'area di un cerchio è:

$$\text{Area}_{\text{CERCHIO}} = \pi * r^2 = \pi * r * r = \pi *(d/2) * [c/(2*\pi) = d * c/4 .$$

La successiva divisione per 48 è così giustificata: 1 staioro vale 1728 braccia^2 e una canna quadra da terra equivale a (6 braccia da terra)^2 e cioè vale 36 braccia^2. Ne consegue che 1 staioro corrisponde a:

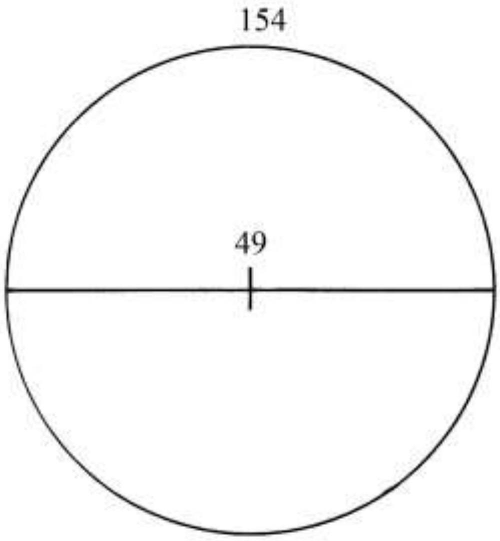
1 staioro : 1 canna^2 da terra = 1728 braccia^2 : 36 braccia^2 = 1728/36 : 36 = 48 : 1 e in conclusione: 1 staioro = 48 canne^2 da terra.

Questo argomento era stato già affrontato nel *Capitolo Primo*.

- -

Un altro campo circolare

Un campo ha la forma di un cerchio con le dimensioni espresse in canne da terra di 6 braccia:



Verifichiamo preliminarmente la correttezza dei dati forniti:

circonferenza = $\pi * d \approx 22/7 * 49 = 154$ canne da terra.

I dati sono corretti.

L'area del campo è così determinata:

* dividere per 2la lunghezza del diametro: $49/2 = 24 + ½$;
* dividere per 2 la lunghezza della circonferenza: $154/2 = 77$;

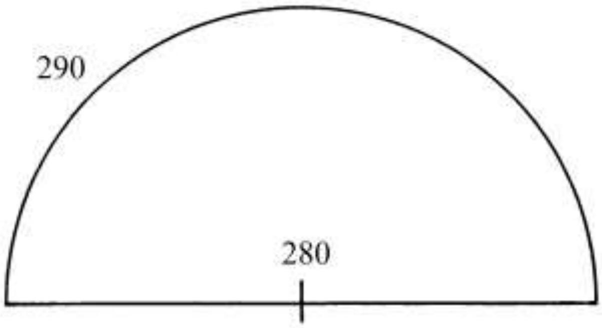
* moltiplicare i due quozienti: $(24 + ½) * 77 = 1886 + ½$ canne^2 [area del cerchio];
* dividere per 48: $(1886 + ½)/48 = [39 + (14 + ½)/48]$ staiora;
* moltiplicare la frazione $(14 + ½)/48$ per 12: $[(14 + ½)/48] * 12 = (3 + 5/8)$ panora;
* moltiplicare la frazione 5/8 per 12: $5/8 * 12 = (7 + ½)$ pugnora;
* moltiplicare la frazione ½ per 12: $½ * 12 = 6$ braccia^2.

L'area del terreno è: (39 staiora + 3 panora + 7 pugnora + 6 braccia^2 da terra).

È da notare un dato di fatto: come numerosi altri abacisti Toscani, anche Calandri esprime le lunghezze di raggi, diametri e archi, come pure le aree, con numeri che quasi sempre sono multipli di 7 e di 11: lo scopo è evidente e cioè ottenere risultati intermedi e finali il più possibile rappresentati da numeri interi.

Area di un semicerchio

Un campo ha la forma di un semicerchio con le dimensioni misurate in braccia:



Verifichiamo la correttezza dei dati. La lunghezza della semicirconferenza di un semicerchio è: semicirconferenza = π * diametro/2 $\approx 22/7 * 280/2 \approx 440$ braccia.

Il problema contiene dati errati e non è risolvibile.

Con una semicirconferenza lunga 290 braccia, il diametro corrispondente è:

d = semicirconferenza $*2/\pi \approx 290 * 2/(22/7) = 184,(54)$ braccia.

\- APPROFONDIMENTO -

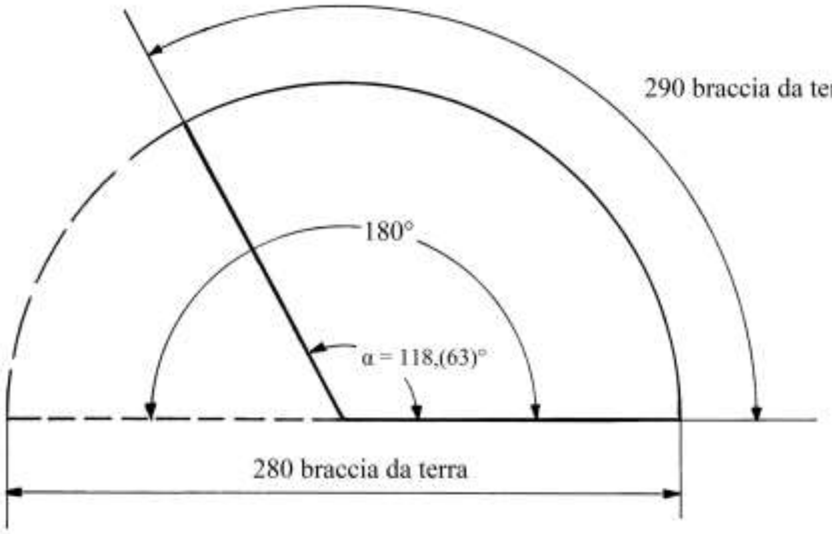
Per rispettare le dimensioni fornite da Calandri occorre procedere in altro modo.

Una soluzione che impiega metodi più moderni è data dal calcolo dell'angolo al centro sotteso da un arco lungo 290 con raggi lunghi 280/2 = 140 braccia:

arco : circonferenza = $\alpha : 360°$

$290 : \pi * d = \alpha : 360°$ da cui:

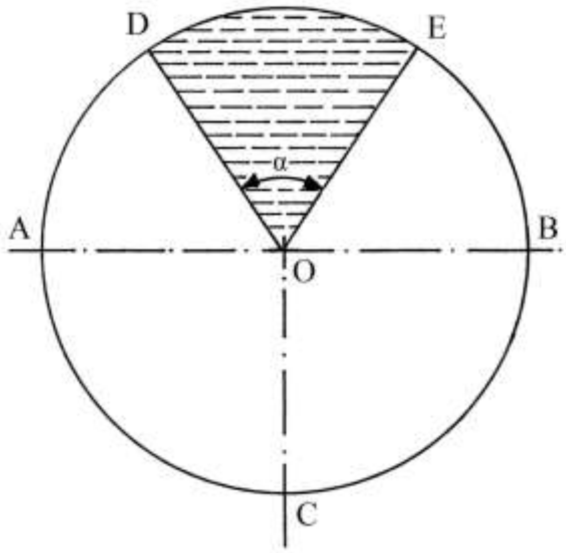
$\alpha = (290*360)/(\pi * d) \approx (290*360/[(22/7) * 280] = 118,(63)°$.



Il campo che ha arco lungo 290 e raggi lunghi 140 braccia non è un semicerchio ma un *settore circolare*.

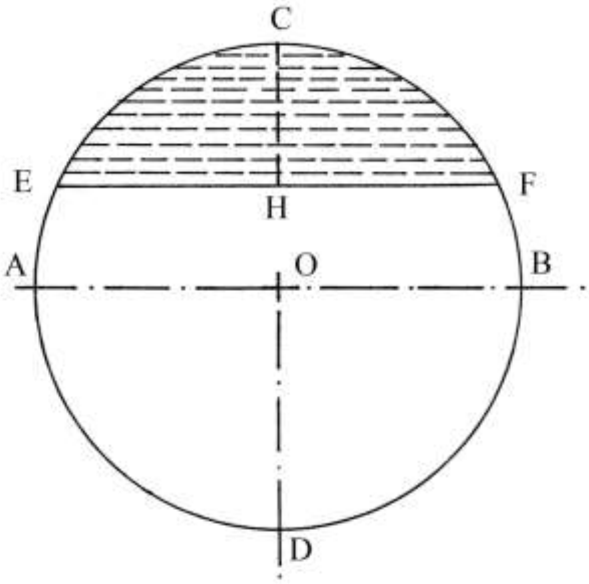
Settore circolare e segmento circolare

Un *settore circolare* è una porzione di un cerchio delimitata da un arco, DE, e da due raggi, OD e OE:



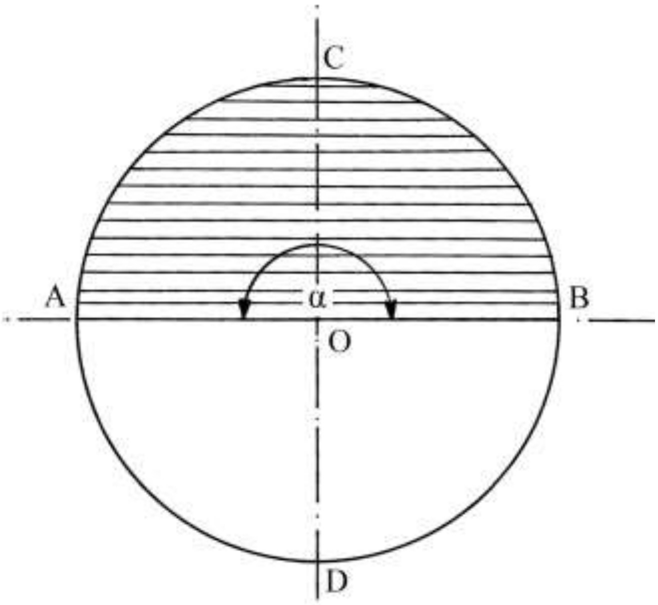
L’angolo al centro, DOE = α, è delimitato dai due raggi.

Un *segmento circolare* è una parte di un cerchio che è racchiusa da un arco e da una *corda* (o *saetta*) EF:



Dal punto medio dell’arco, C, tracciare un segmento, CH, allineato lungo il diametro CD e perpendicolare alla corda EF: CH è la *freccia* ed è perpendicolare alla corda. Il punto H è il medio EF.

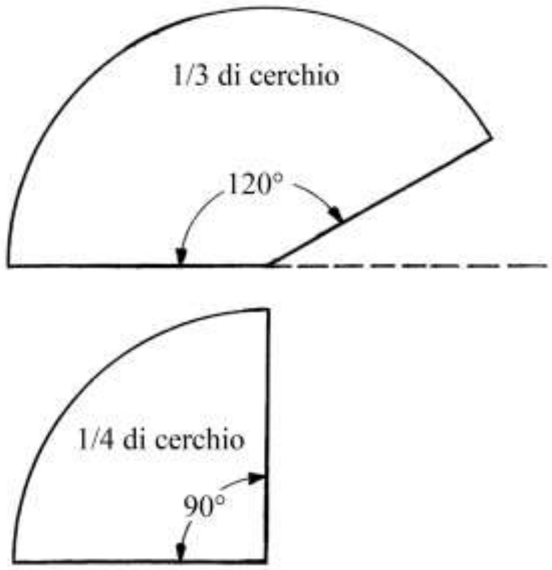
Se la corda è un diametro del cerchio di origine, la figura che ne risulta è un *semicerchio*:



Il semicerchio è sia un settore circolare con angolo al centro ampio $\alpha = 180°$, sia un segmento circolare che ha corda AB lunga quanto un diametro e freccia CO lunga quanto un raggio.

Campi a forma di settore circolare

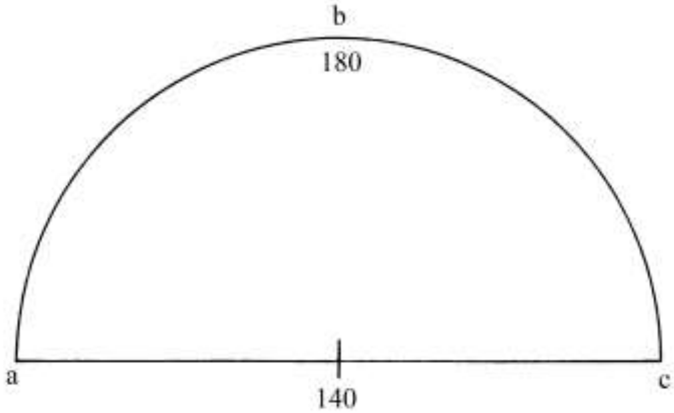
Calandri considera due settori di superficie uguale a un terzo o a un quarto di cerchio:



Le loro aree sono calcolate a partire da quelle dei cerchi di cui fanno parte dividendo le loro superfici rispettivamente per 3 o per 4.

Settore circolare

Un campo ha forma circolare che è ricavata da un cerchio:



La figura qui sopra riproduce esattamente quella pubblicata nel trattato di Calandri.

Il campo è delimitato da un arco a.b.c. lungo 18 braccia e deriva da un cerchio che ha diametro lungo 140 braccia.

Con una semplice proporzione verifichiamo se la figura è un semicerchio: x è l'ampiezza incognita dell'angolo al centro, sotteso dall'arco a.b.c.:

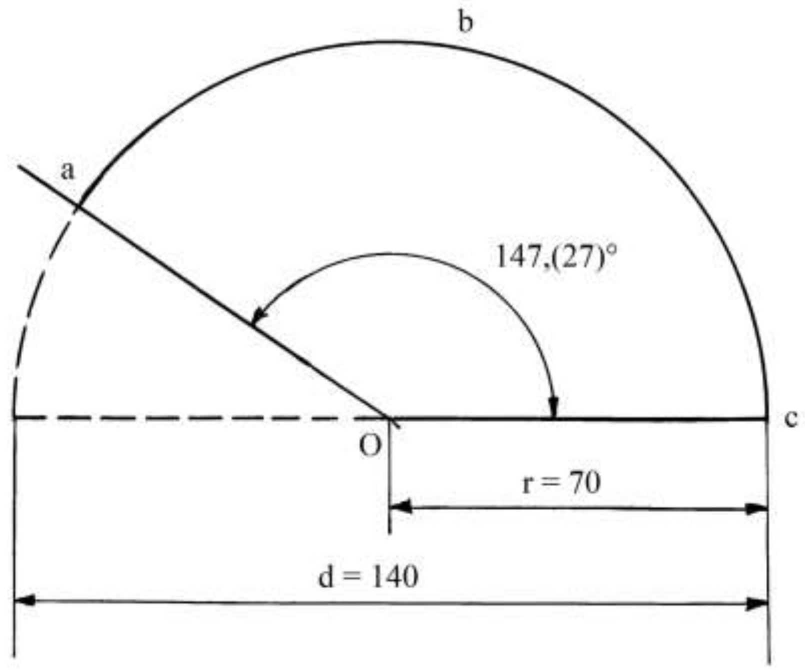
lunghezza arco : circonferenza = x : 360°

180 : (22/7 * 140) = x : 360

180 : 440 = x : 360

x = 180*360/440 = 1620/11 = 147,(27)°.

Il campo non ha la forma di un semicerchio (come si deduce dalla figura qui sopra ripresa dal testo di Calandri), ma è un settore circolare:



Calandri calcolò l'area del campo con una semplice procedura:

* dividere per 2 la lunghezza dell'arco: 180/2 = 90;
* moltiplicare per la lunghezza del raggio: 90*70 = 6300 braccia^2, area del campo.

La formula impiegata da Calandri è corretta, per analogia con la formula usata per calcolare l'area di un cerchio conoscendo le lunghezze della circonferenza e del diametro.

La conversione in staiora è ottenuta con i seguenti passi:

* dividere 6300 per 12: 6300/12 = 525;
* dividere 525 per 12: 525/12 = 43 + ¾;
* dividere 43 per 12: 43/12 = (3 + 7/12) staiora;
* moltiplicare la frazione 7/12 per 12: 7/12 * 12 = 7 panora;
* moltiplicare la frazione ¾ per 12: ¾ * 12 = 9 pugnora.

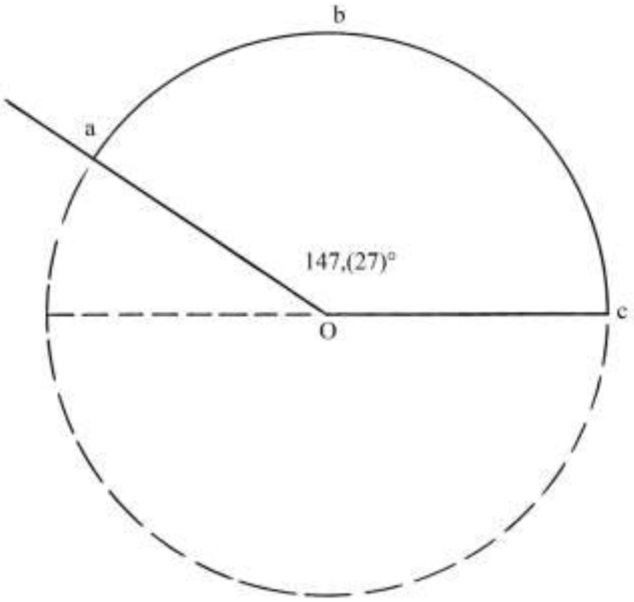
Il campo ha area uguale a (3 staiora + 7 panora + 9 pugnora).

Effettuiamo un'ulteriore verifica sulla correttezza del metodo usato da Calandri per calcolare l'area del settore circolare a.b.c.

Il cerchio da cui esso deriva per sezionamento ha area uguale a:

$$\text{Area}_{\text{CERCHIO}} = \pi * r^2 \approx 22/7 * (d/2)^2 \approx 22/7 * 70^2 = 15400 \text{ braccia}^2.$$

L'area di un settore circolare è proporzionale all'ampiezza del suo angolo al centro per cui vale la proporzione:



Area $_{\text{CERCHIO}}$: Area $_{\text{SETTORE CIRCOLARE}}$ = 360° : 147,(27)° da cui
Area $_{\text{SETTORE CIRCOLARE}}$ = Area $_{\text{CERCHIO}}$ * 147,(27)/360 ≈ 6300 braccia^2.

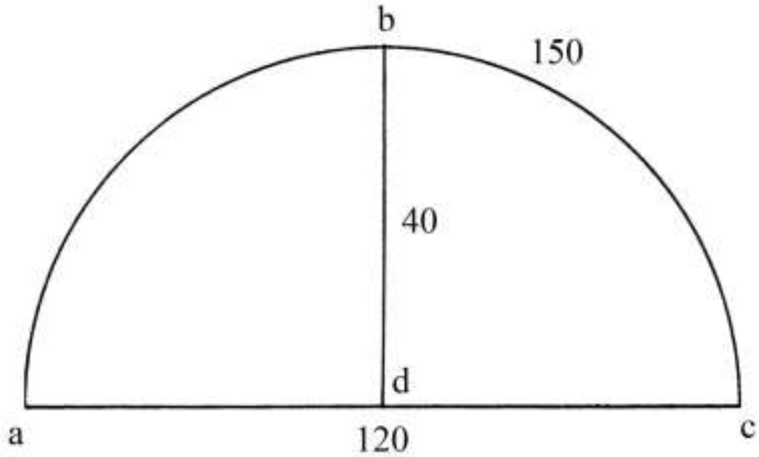
Il metodo usato da Calandri è corretto e lo è anche il risultato: soltanto il disegno è errato e il curatore Bacchi Della Lega non l'ha fatto notare.

<u>Area di un segmento circolare</u>

Per misurare con la massima precisione un campo ritagliato da un cerchio, Calandri fa notare la necessità di conoscere la lunghezza di un altro ente geometrico con queste parole:

"*…quanto sia dalla corda per fino al sommo dell'arco, la qual misura si chiama saetta dell'arco…*" (p. 321).

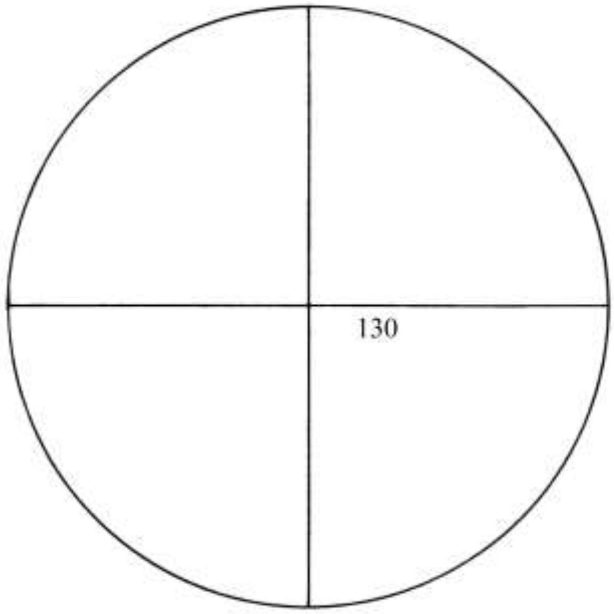
La figura che segue riproduce con la massima precisione il disegno di Calandri:



La *saetta* o *freccia* b.d. è lunga 40 braccia, l'arco a.b.c. 150 e il cosiddetto *diametro* adc 120 braccia.

Il disegno di Calandri è del tutto errato: a.c. è la corda di un segmento circolare e non il diametro di un semicerchio.

Lo schema che segue, sempre da Calandri, presenta il cerchio con il diametro lungo 130 braccia:



Per calcolare la lunghezza del diametro del cerchio sezionato per ricavare il segmento circolare, Calandri impiegò la procedura che segue:

* dividere per 2 la lunghezza della corda a.c.: 120/2 = 60;
* moltiplicare per sé stessa: 60*60 = 3600;
* dividere per la lunghezza della freccia (o *saetta*): 3600/40 = 90;
* sommare l'ultimo quoziente con la lunghezza della freccia: 90 + 40 = 130 braccia, lunghezza del diametro;

[i passi successivi sono relativi al calcolo dell'area del segmento circolare];

* dividere per 2 la lunghezza del diametro: 130/2 = 65;
* dividere per 2 la lunghezza dell'arco a.b.c.: 150/2 = 75;
* moltiplicare i due quozienti: 65*75 = 4875;
* moltiplicare la distanza della corda dal centro del cerchio per metà della lunghezza della corda stessa: (65 – 40) * 60 = 1500;
* sottrarre l'ultimo prodotto dal penultimo: 4875 – 1500 = 3375 braccia^2, area del campo.

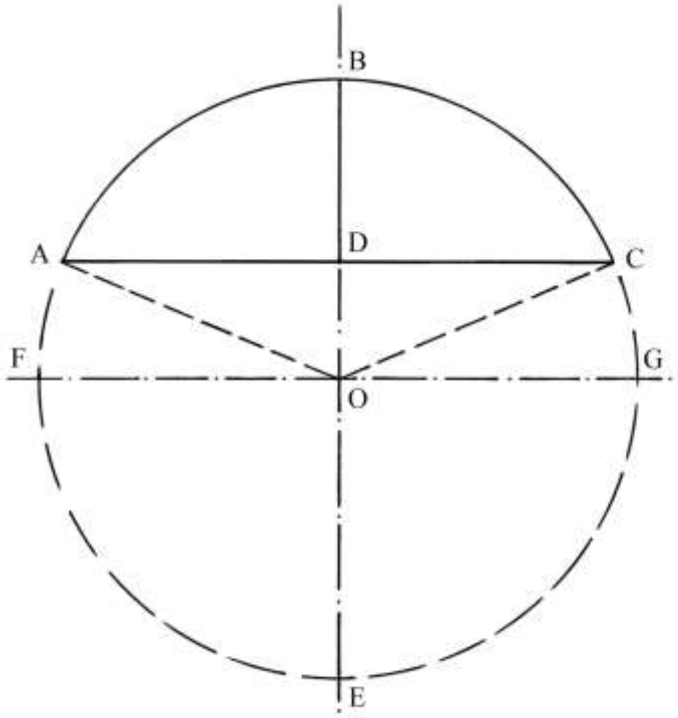
La sua conversione in staiora è la seguente:

* dividere 3375 per 12: 3375/12 = (281 + ¼);
* dividere 281 per 12: 281/12 = (23 + 5/12);
* dividere 23 per 12: 23/12 = (1 + 11/12) staiora;
* moltiplicare la frazione 11/12 per 12: 11/12 * 12 = 11 panora;
* moltiplicare la frazione 5/12 per 12: 5/12 * 12 = 5 pugnora;
* moltiplicare la frazione ¼ per 12: ¼ * 12 = 3 braccia^2.

L'area del campo è: (1 staiora + 11 panora + 5 pugnora + 3 braccia^2).

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

La procedura utilizzata da Calandri per calcolare la lunghezza del diametro del cerchio è qui di seguito spiegata con l'ausilio dello schema sul quale i punti significativi sono indicati con lettere *maiuscole*:



Per semplificare le operazioni fissiamo le seguenti convenzioni:

* AC = corda = c;
* BD = freccia = f;
* BE = FG = diametro = d;
* OA = OB = OC = OG = OE = OF = raggio = r.

La procedura utilizzata da Calandri per ricavare la lunghezza *d* del diametro BE è sintetizzata nella formula:

$BE = (AC/2)^2/BD + BD$. Con i simboli si ha:

$(c/2)^2/f + f = d$

$(c/2)^2/f = d – f$

$(c/2)^2 =(d – f)*f$

$c/2 : (d – f) = f : c/2$.

Questa ultima proporzione è un'applicazione del *teorema delle corde*: AC e BE sono due corde dello stesso cerchio e BE è un diametro. Il teorema afferma che le lunghezze dei quattro segmenti generati dall'intersezione delle due corde sono legate da una proporzione: i due segmenti che formano una corda (ad esempio BD e DE di BE) sono i *medi* e i due segmenti dell'altra corda (AD e DC di AC) sono gli *estremi*:

AD : DE = BD : DC

$c/2 : (d – f) =f : c/2$.

Il *teorema delle corde* era ben conosciuto dagli abacisti toscani: due nomi fra tutti: Paolo Gherardi (fine XIII secolo – prima metà XIV) e Paolo Dell'Abbaco (1282 – 1374).

<u>Nota</u>

È da rilevare la notevole imprecisione che mostrano numerosi dei disegni originali relativi a questo e ad altri problemi: la colpa può essere attribuita all'editore, al tipografo, all'incisore delle tavole della prima edizione del 1811, ma il curatore dell'edizione del 1902 (Alberto Bacchi Della

Lega), qui utilizzata, era un intellettuale con interessi esclusivamente letterari e quindi forse non in grado di comprendere a fondo anche semplici problemi geometrici per poter correggere gli errori contenuti nelle figure.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

La seconda parte della procedura impiegata da Calandri per risolvere questo problema è relativa al calcolo dell'area del segmento circolare.

Riutilizziamo le lettere *c*, *f*, *d* e *r* già incontrate e aggiungiamo la sigla *arc* per indicare la lunghezza dell'arco di circonferenza a.b.c. Ecco la nuova versione dei passi:

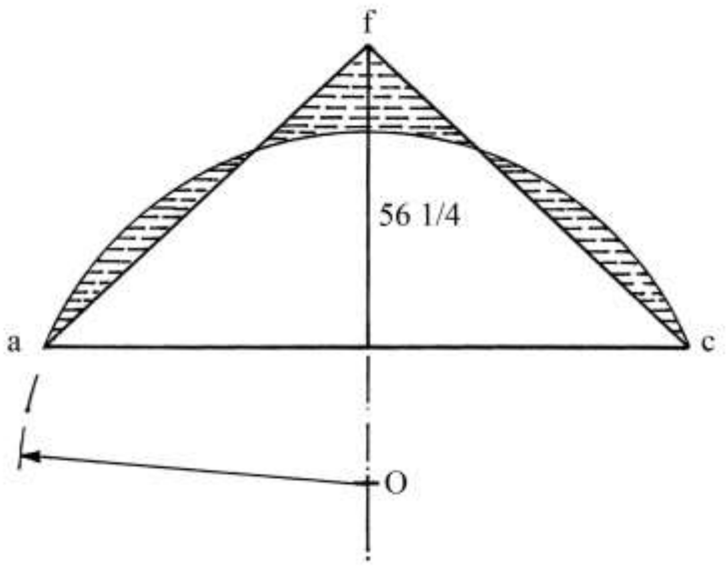
* dividere per 2 la lunghezza del diametro *d*: d/2 = 130/2 = 65 = r;
* dividere per 2 la lunghezza dell'arco a.b.c.: arc/2 = 150/2 = 75;
* moltiplicare d/2 per arc/2: d/2 * arc/2 = 65 * 75 = 4875;
* moltiplicare la distanza della corda dal centro (r – f) per la metà della lunghezza della corda: (r – f) * c/2 = (65 – 40) *120/2 = 1500;
* sottrarre l'ultimo prodotto dal penultimo: d/2 * arc/2 – [(r – f) * c/2] = 4875 – 1500 = = 3375 braccia^2, area del campo.

Tutta la procedura è sintetizzata con una formula:

Area $_{\text{SEGMENTO CIRCOLARE}}$ = d/2 * arc/2 – [(r – f) * c/2].

La formula, peraltro esatta, era già stata impiegata da Paolo Dell'Abbaco.

Infine, Calandri costruì un triangolo isoscele con area uguale a quella del segmento circolare a.b.c.:



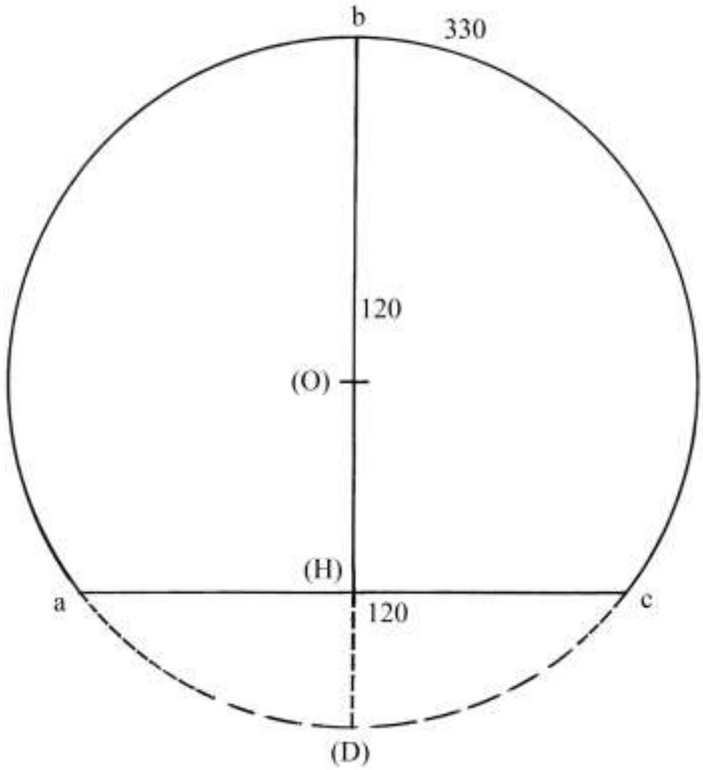
Esso ha base a.c. lunga quanto la corda a.d.c. (e cioè 120 braccia) e altezza lunga (56 + ¼) braccia; la sua area è:

Area $_{\text{a.f.c.}}$ = (a.c.) * altezza/2 = 120 * (56 + ¼)/2 = 3375 braccia^2.

Nella figura, le aree comprese fra il segmento circolare e il triangolo isoscele, tutte evidenziate con tratteggi orizzontali, si equivalgono.

Un segmento circolare maggiore di un semicerchio

Un campo ha la forma di un segmento circolare che è maggiore di un semicerchio:



La corda a.c. e la freccia hanno uguale lunghezza: 120 braccia.

L'arco a.b.c. è lungo 330 braccia.

Il problema domanda l'area in staiora.

Per prima cosa occorre ricavare la lunghezza del diametro del cerchio di origine.

La procedura è la seguente:

* moltiplicare la metà della lunghezza della corda per sé stessa: $(120/2)^2 = 3600$;
* dividere per la lunghezza della freccia: 3600/120 = 30;
* sommare il quoziente alla lunghezza della freccia: 30 + 120 braccia, lunghezza del diametro [Calandri ha di nuovo applicato il teorema delle corde].

L'area del campo è così calcolata:

* dividere per 2 la lunghezza del diametro: 150/2 = 75;
* dividere per 2 la lunghezza dell'arco a.b.c.: 330/2 = 165;
* moltiplicare i due quozienti: 75 * 165 = 12375;
* sottrarre la metà della lunghezza del diametro da quella della corda: 120 – 75 = 45;
* moltiplicare per la metà della lunghezza della corda: 45 * 120/2 = 2700;
* sommare i due ultimi prodotti: 12375 + 2700 = 15075 braccia^2, area del campo.

La procedura usata da Calandri per il calcolo dell'area in braccia^2 è riassunta nella formula che segue (già incontrata in precedenza):

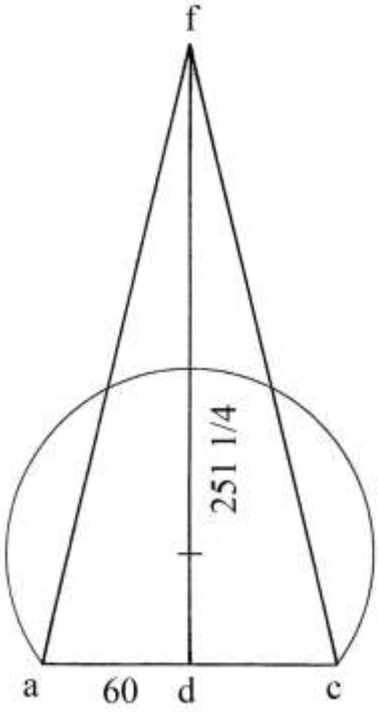
$$\text{Area}_{\text{a.b.c.}} = (d/2 * \text{arco}/2) + (d/2 – c) * c/2 .$$

La conversione da braccia^2 [da terra] a staiora fornisce il seguente risultato:

$$\text{Area}_{\text{a.b.c.}} = (8 \text{ staiora} + 8 \text{ panora} + 8 \text{ pugnora} + 3 \text{ braccia}^2).$$

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Infine, Calandri tracciò un triangolo isoscele, a.f.c., di area uguale a quella del settore circolare:



La base a.d.c. è lunga 60*2 = 120 braccia e cioè quanto la corda del settore circolare a.b.c. e l'altezza d.f. è (251 + ¼) braccia.

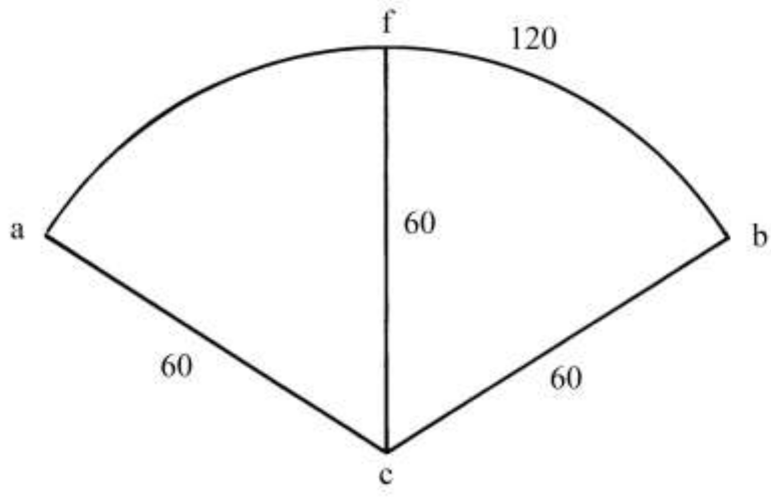
L'area del triangolo è:

Area $_{a.f.c.}$ = (a.c.) * (d.f.)/2 = (a.d.) * (d.f.) = 60 * (251 + ¼) = 15075 braccia^2.

L'area del triangolo a.f.c. è uguale a quella del segmento circolare a.b.c.

<u>Un campo a forma di settore circolare</u>

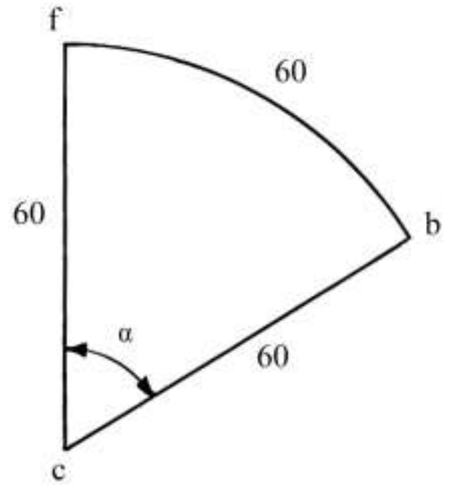
Un campo ha la forma di un settore circolare (*sector circuli*") con le dimensioni espresse in braccia da terra:



Il campo è formato da due settori circolari uniti lungo il raggio comune c.f.

La lunghezza dei raggi è uguale a 60 braccia e l'intero arco a.f.b è lungo120 braccia: si presume che gli archi a.f. e f.b. abbiano uguale lunghezza, pari a 60 braccia.

L'angolo al centro (e cioè in c.) di uno dei settori è uguale a ≈ 57,325°.



- APPROFONDIMENTO -

Il radiante

Il *radiante*, abbreviato in *rad*, è l'unità di misura dell'ampiezza degli angoli nel Sistema internazionale di unità di misura.

Un radiante è espresso dal rapporto fra la lunghezza dell'arco di circonferenza che sottende e quella del raggio (rivedere la figura qui sopra):

α_{radianti} = f.b./f.c. = 60/60 = 1.

Il quoziente della frazione è un *numero puro* perché sia il denominatore che il numeratore sono espressi nella stessa unità di misura lineare.

Una circonferenza ha lunghezza uguale a:

$c = 2 * \pi * r \approx 6{,}28 * r$.

Se il raggio *r* è convenzionalmente lungo 1, la circonferenza è:

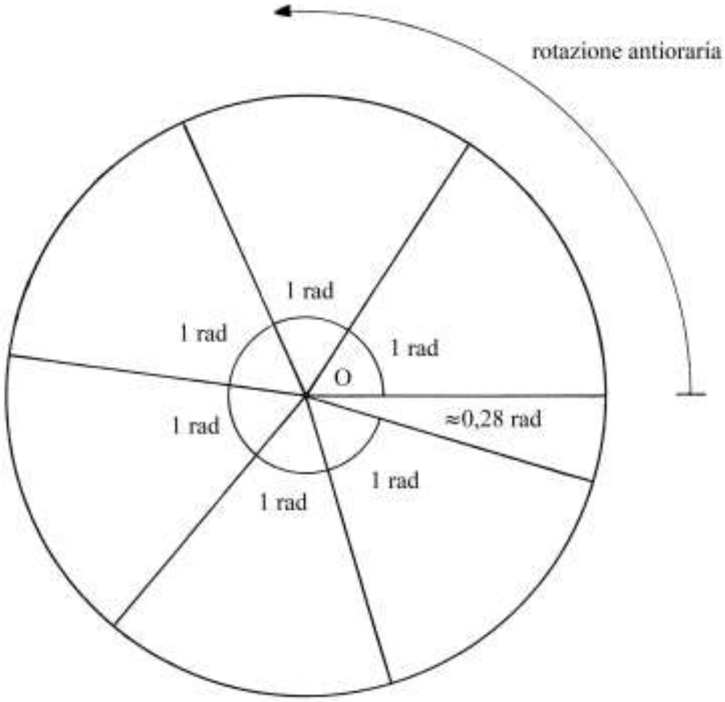
$c \approx 6{,}28$.

Il rapporto fra la lunghezza della circonferenza e il raggio è sempre ≈ 6,28.

L'angolo giro misura 360° sessagesimali. Il radiante è ampio l'equivalente di:

1 radiante ≈ 360/6,28 ≈ 57,325°

In un cerchio sono presenti ≈6,28 angoli radianti:

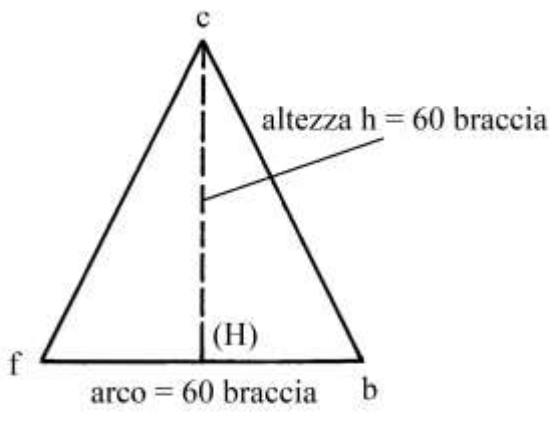


- -

<u>L'area del settore circolare</u>

Riprendiamo in considerazione il campo a forma di settore circolare.

Un settore circolare può essere assimilato a un triangolo isoscele che ha per base l'arco e per altezza il raggio dello stesso settore:

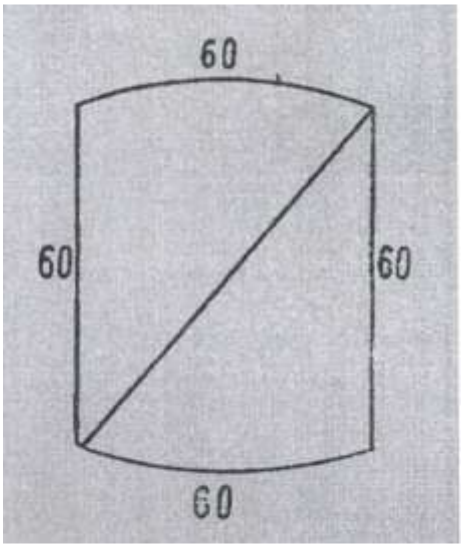


L'area del triangolo è:

Area $_{f.c.b.}$ = (f.b.) * h/2 = 60 * 60/2 = 1800 braccia^2.

L'area del campo studiato da Calandri è il doppio di quella di f.b.c. e quindi è 3600 braccia^2.

Calandri calcolò correttamente l'area con il supporto di uno schema del tutto errato:



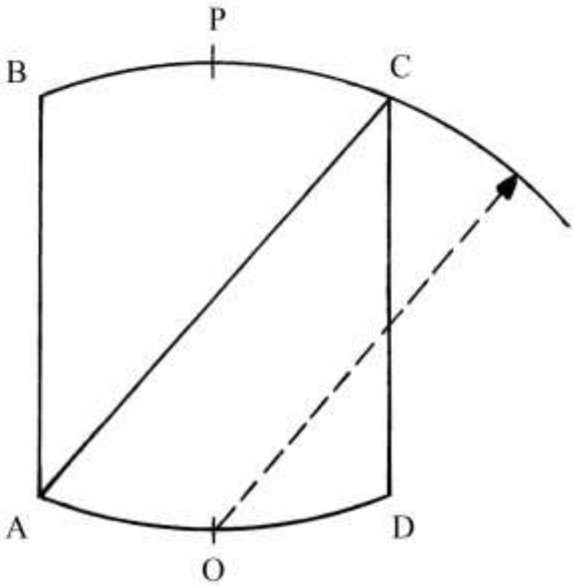
Lo schema è costruito con una tecnica che Calandri spiega con queste parole:

"…Et ora finghiamo che una delle dette parti si capovolga, cioè che l'arco che è una delle metà si congiunga con la punta dell'altra, et aremo fatta una figura quadrata…" (p. 326).

Calandri riconosce che due lati della nuova figura non sono linee rette, ma curve: con questa affermazione egli giustifica il calcolo dell'area trattandola alla stregua di un quadrato:

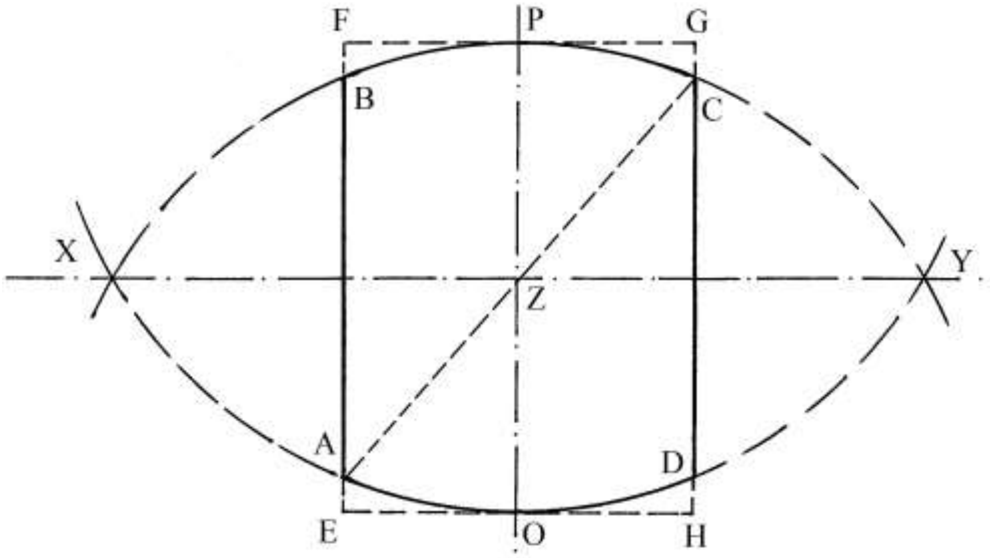
Area = 60 * 60 = 3600 braccia^2.

La figura errata ABCD è delimitata da due segmenti verticali e da due archi di circonferenza:



I punti medi dei due archi, O e P, sono i centri degli archi opposti BC e AD: i due raggi OB=OC e PA=PD hanno uguale lunghezza: OB = OC = PA = PD.

Con una buona dose di *approssimazione*, la figura sembrerebbe originata dal sezionamento di una *vesica piscis* o *mandorla*:



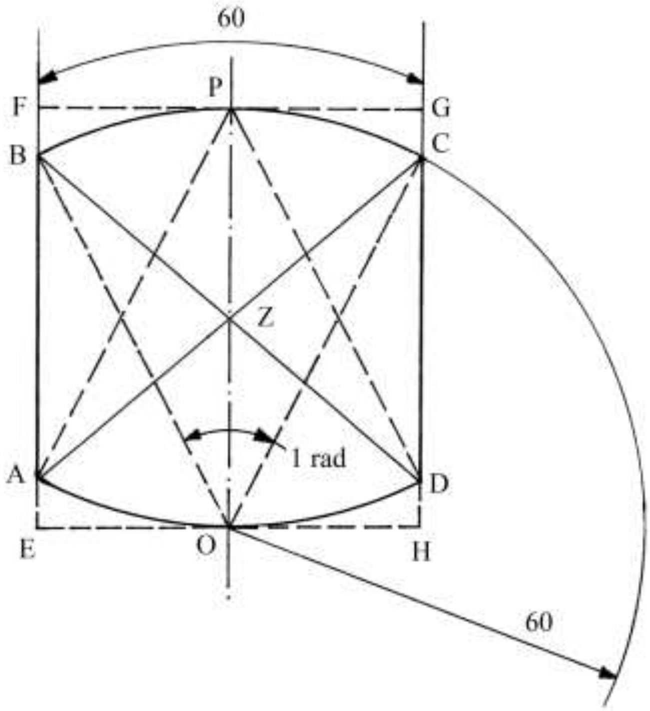
OP è il raggio dei due archi di circonferenza che si intersecano nei punti X e Y ed è anche un asse di simmetria.

OP e XY si incontrano nel punto Z.

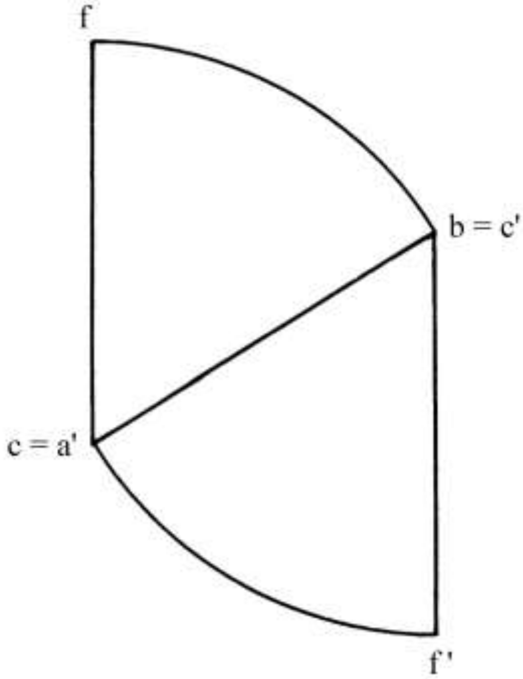
Il poligono ABCD è inscritto nel rettangolo EFGH.

La diagonale AC non è un raggio dei due archi di circonferenza.

Una più precisa definizione della figura è presentata nello schema che segue:



La corretta disposizione dei due settori dopo la rotazione e il ribaltamento di uno dei due, quello a.f.c., è mostrata nello schema che segue:



L'area di 3600 braccia^2 da terra è convertita in (2 staiora + 1 panoro).

CAPITOLO QUARTO

Questo ultimo capitolo è dedicato al calcolo del volume dei corpi solidi.

L'unità di misura del volume è definita da Calandri con l'espressione *braccio quadro corporeo* invece di *braccio cubico* o *braccio*^{3}.

Un braccio quadro corporeo era il volume di un cubo con spigoli lunghi *un braccio lineare*.

Questo solido era anche comunemente chiamato *dado*.

Benché Calandri non lo scriva espressamente, la base dell'unità braccio quadro corporeo era il *braccio da panno*: ricordiamo che il braccio da terra era impiegato soltanto per la misura dei terreni.

Nella Premessa a questo capitolo, l'Autore definisce due unità:

* 1 braccio quadro corporeo = 9 staia di grano;
* 1 braccio quadro corporeo = 5 barili di/da vino.

Le antiche unità di misura usate a Firenze per la misura del vino erano le seguenti (fonte: Martini):

*	1 soma da vino	=	2 barili	≈ 91,168082 litri;
*	1 barile da vino	=	20 fiaschi	≈ 45,584041 litri;
*	1 fiasco	=	2 boccali	≈ 2,279204 litri;
*	1 boccale	=	2 mezzette	≈ 1,139602 litri;
*	1 mezzetta	=	2 quartucci	≈ 0,569801 litri;
*	1 quartuccio			≈ 0,284901 litri.

Dato che l'unità base della lunghezza lineare era il *braccio da panno*, l'unità di volume da essa derivata era il *braccio*^{3}; valeva l'uguaglianza:

$$1 \text{ braccio}^3 = 5 \text{ barili}.$$

Per volumi maggiori di vino, a Firenze era usato un altro multiplo del barile: il *cogno* (plurale cogni o cogna) che equivale a 10 barili (e cioè ≈ 455,804 litri). Nel *Tractato d'Abbacho* oggi attribuito a Maestro Benedetto da Firenze, l'unità al plurale è scritta *chognia*. Il cogno era pure la quantità di olio lasciata al proprietario di un frantoio quale compenso per la spremitura delle olive.

Un cogno equivaleva a 2 braccia^3.

Il cogno prevedeva due sottomultipli:

* 1 orcio = 1/12 di cogno;
* 1 sestario = 1/6 di cogno = 2 orci.

A Firenze, l'unità *orcio* era usata quale sinonimo di *barile d'olio*.

In questo capitolo continueremo ad usare l'espressione *braccio quadro corporeo* in luogo di quella più semplice e corretta di *braccio*^{3} (da panno).

Calcoliamo il suo equivalente in dm^3 o litri:

* 1 braccio da panno = 0,583626 m;
* 1 braccio quadro da panno = (1 braccio da panno)^2 = $0,583626^2 \approx 0,34062$ m^2;
* 1 braccio quadro corporeo ≈ 1 braccio quadro da panno * 1 braccio da panno ≈
  ≈ 0,34062 m^2 * 0,583626 m ≈ 0,1988 m^3 ≈ 198,8 dm^3 o litri.

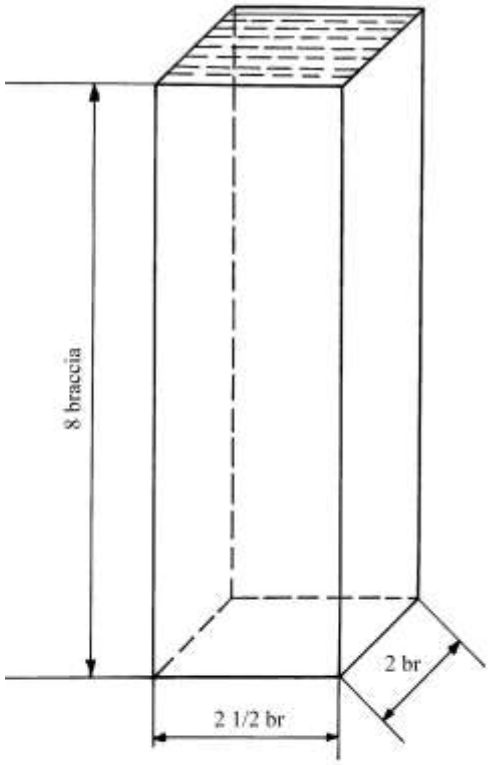
Le due unità introdotte da Calandri avevano le seguenti equivalenze:

* 1 staio di grano = 1 braccio quadro corporeo/9 ≈ 198,8 ≈ 22,09 dm^3 o litri;
* 1 barile da vino = 1 braccio quadro corporeo/5 ≈ 198,8/5 ≈ 39,76 dm^3 o litri.

Di seguito sono descritti i problemi proposti da Calandri.

Volume dell’acqua in una fonte

Una fonte ha la forma di un parallelepipedo lungo (2 + ½) e largo 2 braccia. L’acqua è profonda 8 braccia.



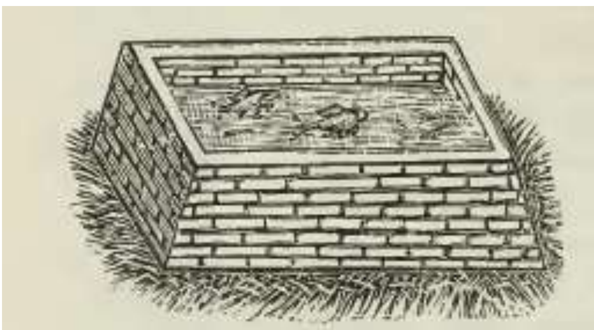
Il problema chiede il volume dell’acqua contenuta, da esprimere in barili.

La procedura impiegata contiene i seguenti passi:

* calcolare l’area della base: (2 + ½) * 2 = 5 braccia^2;
* moltiplica l’area per la profondità dell’acqua: 5 * 8 = 40 braccia quadre corporee;
* moltiplicare per 5: 40 * 5 = 200 barili di acqua.

Vivaio riempito di acqua

Un vivaio è lungo 80 braccia e largo 60. L’acqua è profonda 10 braccia.



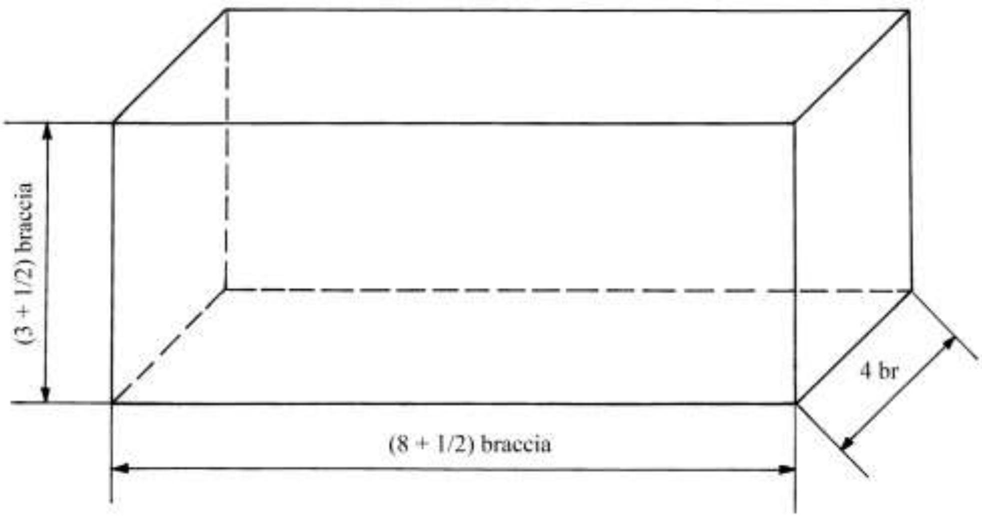
È domandato il volume dell’acqua misurato in barili.

La procedura usata è identica a quella appena incontrata:

* calcolare l’area della base: 80 * 60 = 4800 braccia^2;
* moltiplicare per la profondità dell’acqua: 4800 * 10 = 48000 braccia quadre corporee;
* moltiplicare per 5: 48000 * 5 = 240 000 barili di acqua.

Volume di un granaio

Un granaio ha la forma di un parallelepipedo e la base rettangolare ha dimensioni di (8 + ½) per 4 braccia. È alto (3 + ½) braccia.

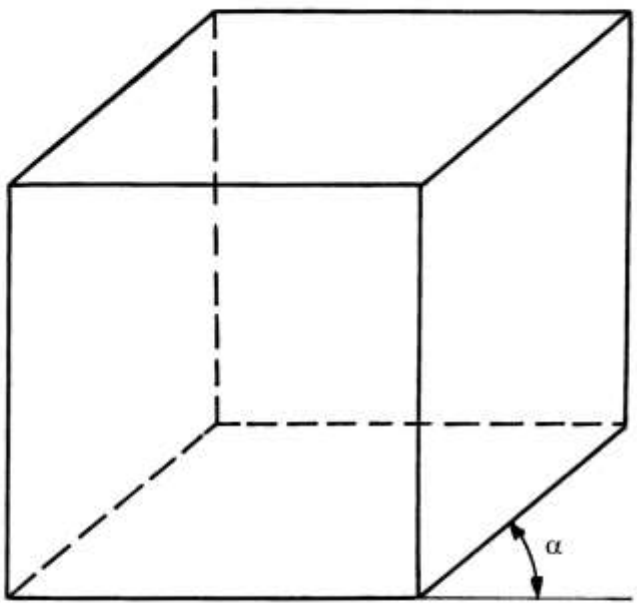


È chiesta la misura in staia del grano che vi è contenuto.

La procedura è:

* moltiplicare lunghezza per larghezza della base: (8 + ½) * 4 = 34 braccia^2, area della base;
* moltiplicare per l'altezza: 34 * (3 + ½) = 119 braccia quadre corporee, volume del granaio;
* moltiplicare per 9: 119 * 9 = 1071 staia di grano.

Nel trattato, il granaio è erroneamente rappresentato come un cubo:



Il solido è disegnato in una forma di assonometria cavaliera: l'angolo di fuga, α, è di 40°. Il rapporto di fuga è uguale a circa 2/3: questo numero indica la proporzione fra la lunghezza di uno spigolo obliquo e quella di uno spigolo reale del cubo.

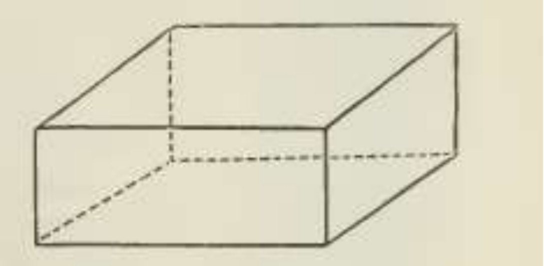
Tre spigoli non visibili sono correttamente resi con linee tratteggiate.

Volume di un'arca

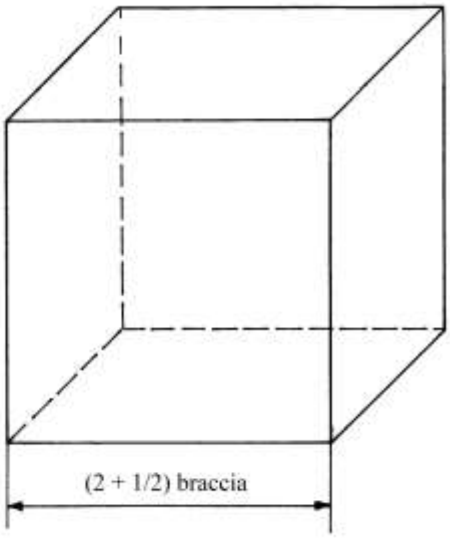
Un'*arca* ha la forma di un cubo con lati lunghi (2 + ½) braccia.

Il testo contiene alcuni errori non segnalati dal Curatore.

Il problema è accompagnato da una figura che è un'assonometria cavaliera di un parallelepipedo, rappresentazione chiaramente errata di un parallelepipedo: forse vi è stato uno scambio di immagini fra questo e il precedente problema.



L'esatta rappresentazione del cubo è nello schema che segue:



È domandato il volume del solido in staia.

Ecco la procedura usata da Calandri:

* calcolare l'area della base: (2 + ½) * (2 + ½) = (6 + ¼) braccia^2;
* moltiplicare per l'altezza: (6 + ¼) * (2 + ½) = (15 + 5/8) braccia quadre corporee;
* moltiplicare per 9: (15 + 5/8) * 9 = (140 + 5/8) staia.

\- APPROFONDIMENTO -

Che cosa è un'arca

Il progetto TLIO (Tesoro della Lingua Italiana delle Origini) studia il lessico storico della nostra lingua: *tlio.ovi.cnr.it/TLIO/* .

Secondo TLIO *arca* significa *cassone* destinato alla conservazione di derrate agricole o di panni.

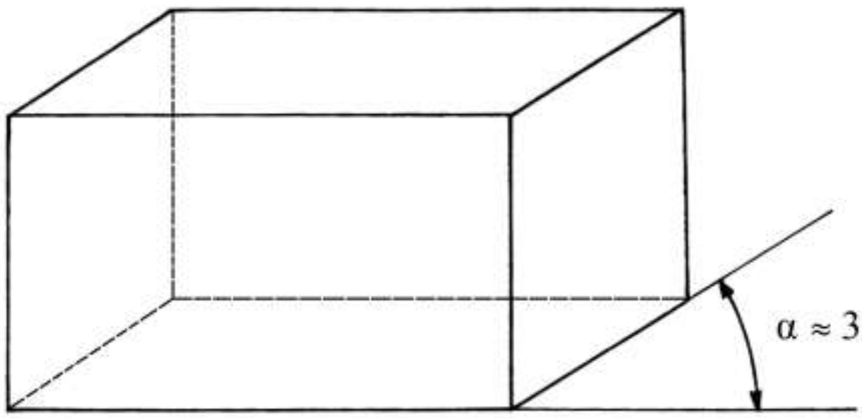
Il termine era largamente usato nei diversi volgari toscani almeno a partire dal XIII secolo.

\- -

Un altro problema relativo a due arche

Il problema coinvolge due arche.

Una persona prestò a un'altra un'arca piena di grano che aveva forma cubica con lati lunghi 3 braccia. La figura pubblicata a fianco del testo del problema rappresenta, erroneamente, un parallelepipedo disegnato in assonometria cavaliera con angolo di fuga di circa 32°:



Il destinatario del prestito restituì il grano con l'aiuto di una seconda arca, anche questa di forma cubica, con lati lunghi 2 braccia.

Il problema chiede quante volte la seconda arca andrà riempita per restituire il grano ricevuto.

Il volume della prima arca è: 3 * 3 * 3 = 27 braccia quadre corporee.

Il volume della seconda arca è: 2 * 2 * 2 = 8 braccia quadre corporee.

Il volume della prima arca è: 27/8 = (3 + 3/8) volte più grande di quello della seconda e tante volte andrà riempita questa ultima.

Peso di un blocco di marmo

Un blocco di marmo ha la forma di un parallelepipedo lungo (2 + ½), largo (2 + 1/3) e alto (1 + ½) braccia.

Calandri indica il peso specifico del marmo in 1600 libbre per braccio quadro corporeo. La libbra era un'unità di peso (o massa).

Il volume del blocco di marmo è:

(2 + ½) * (2 + 1/3) * (1 + ½) = (8 + ¾) braccia quadre corporee [Calandri dà il risultato errato di (12 + ¼) per cui i suoi successivi dati sono errati].

Il peso del blocco di marmo è:

Massa $_{\text{MARMO}}$ = (8 + ¾) * 1600 = 14000 libbre.

Verifichiamo il valore della *libbra*. Le "Tavole di Ragguaglio dei Pesi e delle Misure Già in Uso Nelle Varie Provincie del Regno Col. Peso Metrico Decimale Approvate con Decreto Reale 20 Maggio 1877, N. 3836", del 1877, indicarono in 0,3395 kg l'equivalenza della libbra usata a Firenze. Accettiamo l'ipotesi che dall'epoca nella quale Calandri scriveva (intorno al 1500) il valore della libbra sia rimasto invariato fino all'introduzione del sistema metrico decimale.

Dato che un braccio quadro corporeo equivale a 198,8 dm^3, il volume del blocco di marmo corrispondeva a:

Volume $_{\text{MARMO}}$ = (8 + ¾) * 198,8 = 1739,5 dm^3.

Il peso specifico del marmo è 2,5 – 2,8 kg/dm^3 per cui il peso o massa del blocco è:

4348,75 – 4870,6 kg.

Convertiamo le libbre in kg:

Massa $_{MARMO}$ = 14000 * 0,3395 = 4753 kg, valore che è compreso nell'intervallo appena calcolato.

Il valore del peso specifico attribuito da Calandri al marmo è:

peso specifico = 4753/1739,5 = 2,732 kg/dm^3.

Lo scavo di una volta

Un proprietario fece scavare la terra di una volta lunga (12 + ½), larga 8 e profonda (3 + ½) braccia e quindi a forma di parallelepipedo.

Lo scavatore venne pagato (1 soldo + 4 denari) al braccio quadro corporeo.

Il problema chiede di calcolare il costo dell'intero scavo.

La procedura utilizzata è la seguente:

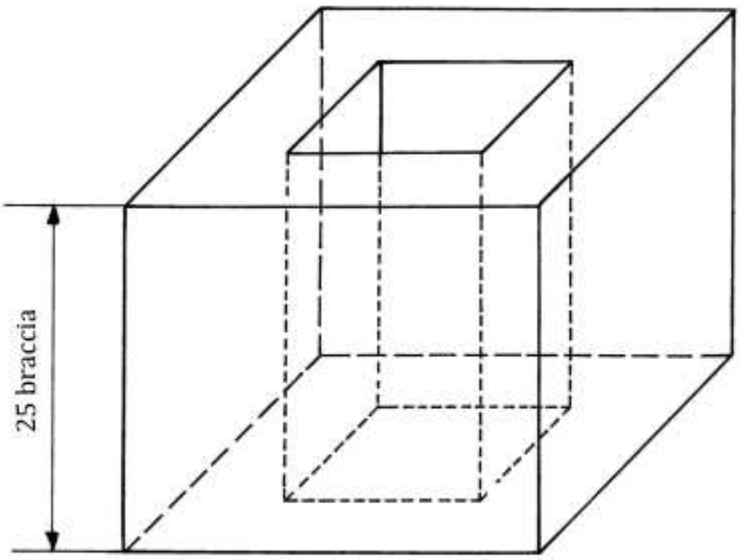
* moltiplicare la lunghezza dello scavo per la sua larghezza: (12 + ½) * 8 = 100 $braccia^2$;
* moltiplicare per la profondità: 100 * (3 + ½) = 350 braccia quadre corporee, volume della terra scavata;
* moltiplicare per il costo unitario: 350 * (1 soldo + 4 denari) = 350 soldi + 1400 denari.

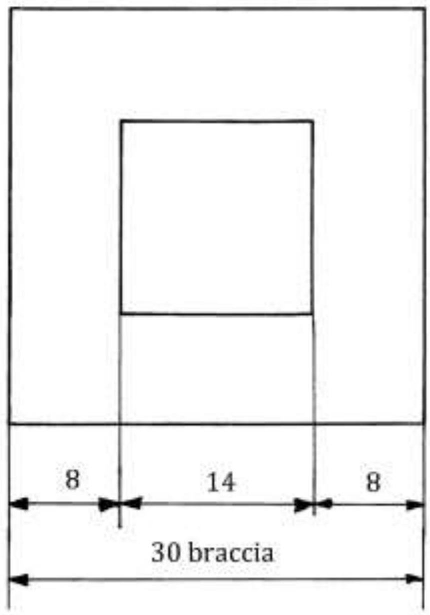
Ma 12 denari = 1 soldo e 20 soldi = 1 lira e 1 lire = 240 denari, per cui il risultato del costo dello scavo è:

(23 lire + 6 soldi + 8 denari).

Una torre quadrata

Una torre ha base quadrata e i lati sono lunghi 30 braccia, i muri sono spessi 8 ed è alta 25 braccia. Il disegno originale non è qui utilizzato perché troppo semplicistico. Lo schema che segue è una doppia vista: in alto l'assonometria cavaliera (angolo di fuga di 45° e rapporto di fuga uguale a 2/3) e in basso è una vista dall'alto.





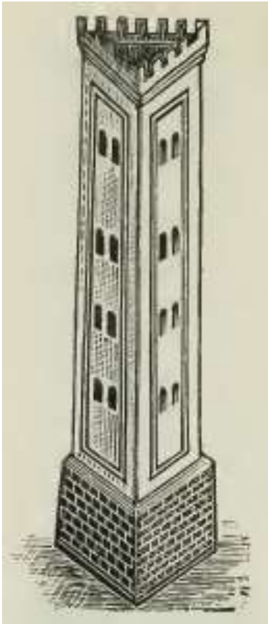
Il maestro costruttore ricevette (5 soldi + 6 denari) per ciascun braccio quadro corporeo murato.

La procedura impiegata da Calandri serviva a determinare il volume della muratura e il suo costo complessivo:

* calcolare l'area lorda della base: 30 * 30 = 900 braccia^2;
* calcolare la lunghezza del lato del vano quadrato interno: 30 – 8 – 8 = 30 – 8 * 2 = 14 braccia;
* moltiplicare la lunghezza del lato del quadrato interno per sé stessa: 14 * 14 = 196 braccia^2, area del vano interno (vuoto);
* sottrarre l'area del vano interno da quella lorda della base: 900 – 196 = 704 braccia^2, area della base murata;
* moltiplicare per l'altezza: 704 * 25 = 17600 braccia quadre corporee;
* moltiplicare per (5 soldi + 6 denari): 17600 * (5 soldi + 6 denari) = 4840 lire.

Volume di una torre triangolare massiccia

Una torre ha alla base la forma di un triangolo equilatero con lati lunghi 30 braccia, è alta 24 braccia ed è piena.

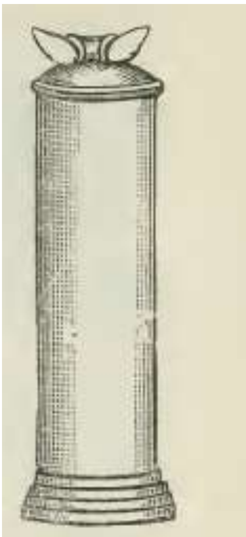


La procedura per calcolarne il volume contiene i seguenti passi:

* moltiplicare la lunghezza del lato per sé stessa: 30 * 30 = 900;
* moltiplicare per (1/3 + 1/10) = 13/30: 900 * 13 = 11700;
* dividere per 30: 11700/30 = 390 braccia^2 (area approssimata della base);
* moltiplicare per l'altezza: 390 * 24 = 9360 braccia quadre corporee.

Peso di una colonna cilindrica

Una colonna ha forma cilindrica, ha diametro di 2 braccia ed è alta 7 braccia.



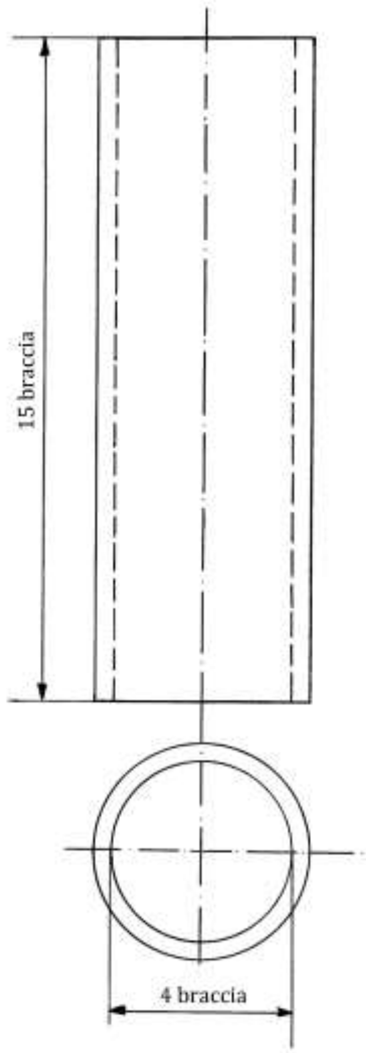
Il materiale di cui è fatta pesa 1400 libbre al braccio quadro corporeo: esso è più leggero del marmo. Calandri non fa alcun cenno alla sua natura, ma si tratta di pietra.

Il problema domanda il volume e il peso della colonna. Ecco i passi della procedura:

* moltiplicare la lunghezza del diametro per sé stessa: 2 * 2 = 4;
* moltiplicare per 11: 4 * 11 = 44;
* dividere per 14: 44/14 = (3 + 1/7) braccia^2 (area della base e della testa della colonna);
* moltiplicare per l'altezza: (3 + 1/7) * 7 = 22 braccia quadre corporee;
* moltiplicare per 1400: 22 * 1400 = 30800 libbre (peso della colonna).

Volume di una cisterna espresso in barili

Una cisterna circolare ha un diametro interno di 4 braccia e altezza di 15 braccia.



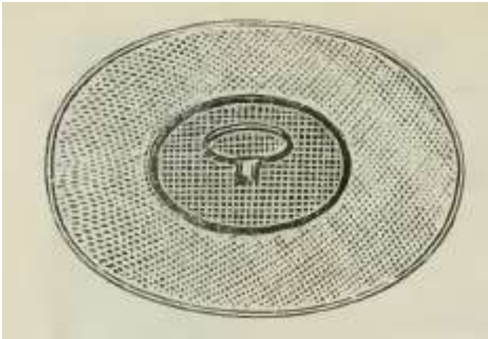
La procedura per calcolare il suo volume in barili è:

* moltiplicare la lunghezza del diametro per sé stessa: 4 * 4 = 16;
* moltiplicare per 11: 16 * 11 = 176;
* dividere per 14: 176/14 = (12 + 4/7) braccia^2 [area del cerchio interno della cisterna];
* moltiplicare per l'altezza: (12 + 4/7) * 15 = (188 + 4/7) braccia quadre corporee [volume della cisterna];

*	moltiplicare per 5:		(188 + 4/7) * 5 = (942 + 6/7) barili [volume della cisterna].

Grano contenuto in una fossa rotonda

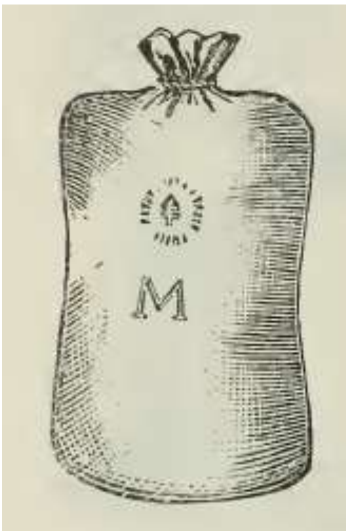
Una fossa rotonda è piena di grano: ha diametro 2 braccia ed è profonda 6 braccia.



Il problema chiede di calcolare il contenuto misurato in staia di grano.
La procedura è la seguente:
*	moltiplicare la lunghezza del diametro per sé stessa:		2 * 2 = 4;
*	moltiplicare per 11:		4 * 11 = 44;
*	dividere per 14:		44/14 = (3 + 1/7) braccia^2 [area del cerchio];
*	moltiplicare per l'altezza:		(3 + 1/7) * 6 = (18 + 6/7) braccia quadre corporee [volume del grano];
*	moltiplicare per 9:	(18 + 6/7) * 9 = (169 + 5/7) staia di grano.

Volume di un sacco di grano

Un *sacco* contenente grano ha diametro di 1 braccio ed è alto 9 braccia:



Il problema chiede di conoscere quante staia di grano vi siano contenute.
La procedura impiegata è:
*	moltiplicare la lunghezza del diametro per sé stessa:		1 * 1 = 1;

* moltiplicare per 11: 1 * 11 = 11;
* dividere per 14: 11/14 = 11/14 braccia^2 [area della base];
* moltiplicare per la lunghezza dell'altezza: 11/14 * 9 = (7 + 1/14) braccia quadre corporee [volume del sacco: Calandri dà il risultato errato di (7 + ¼)];
* moltiplicare per 9: (7 + 1/14) * 9 = (63 + 9/14) staia di grano.

<u>Contenuto di una botte</u>

Una botte da vino ha i due fondi di diametri uguali misurati all'interno e pari a 1 braccio.

La distanza fra i due fondi è di 3 braccia: anche se Calandri non scrive deve intendersi una misura presa all'interno.

La distanza è la lunghezza o *altezza* di una botte.

La procedura impiegata per calcolare il volume in barili da vino è la seguente:

* moltiplicare la lunghezza del diametro per sé stessa: 2 * 2 = 4 [nell'introduzione a questo problema Calandri ha commesso un errore perché ha indicato il diametro in 1 braccio, salvo poi svolgere i calcoli su 2 braccia];
* moltiplicare per 11: 4 * 11 = 44;
* dividere per 14: 44/14 = (3 + 1/7) braccia^2 [area di un fondo];
* moltiplicare per la distanza: (3 + 1/7) * 3 = (9 + 3/7) braccia quadre corporee [volume della botte];
* moltiplicare per 5: (9 + 3/7) * 5 = (45 + 1/7) barili di vino.

<u>Nota</u>

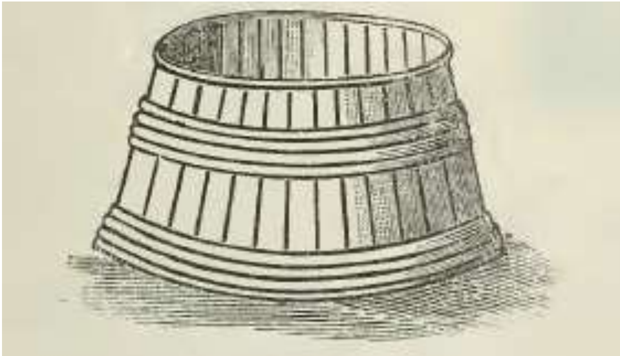
Sia nel caso della botte che in quello del tino che è l'oggetto del prossimo problema, Calandri approssimò i volumi interni dei cilindri, commettendo evidenti errori.

Prima di lui, numerosi abacisti toscani, fra i quali anche Maestro Benedetto da Firenze, avevano risolto questi problemi con formule approssimate accettabili.

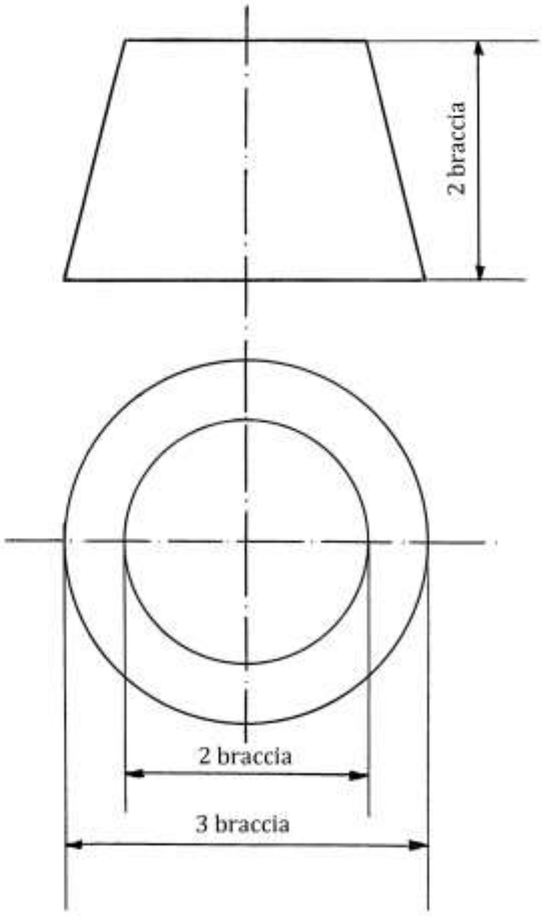
Forse, Calandri introdusse dei correttivi nella fissazione delle lunghezze dei diametri e le stabilì quali medie aritmetiche di più misure.

Contenuto di un tino

Un tino ha forma troncoconica:



Le dimensioni espresse in braccia, sono scritte sulla figura:



Il calcolo del volume contenuto segue una procedura un po' più complessa:

* moltiplicare la lunghezza del diametro del fondo per sé stessa: 3 * 3 = 9;
* moltiplicare per 11: 9 * 11 = 99;
* dividere per 14: 99/14 = (7 + 1/14) braccia^2 [area del fondo];
* moltiplicare per l'altezza: (7 + 1/14) * 2 = (14 + 1/7) braccia quadre corporee [volume del tino];
* moltiplicare per 5: (14 + 1/7) * 5 = (70 + 5/7) barili.

A questo punto Calandri introduce una scelta:

a) se sono *vini di piano* la resa è uguale a ¾ per cui il vino contenuto nel tino è:

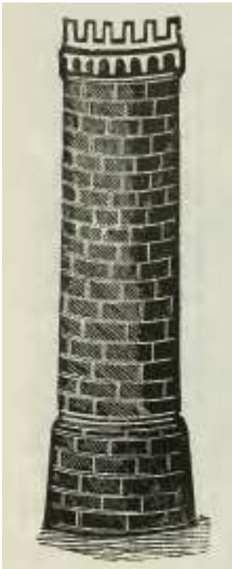
$(70 + 5/7) * ¾ = (53 + 1/28)$ barili di vino.

b) Se sono *vini di poggio* hanno gli acini con la buccia più grossa e producono più vinaccia e meno vino: occorre moltiplicare per il coefficiente 2/3:

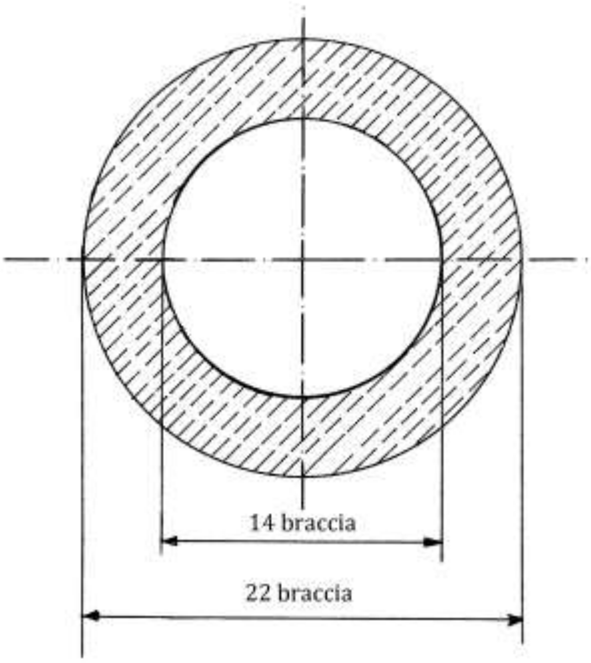
$(70 + 5/7) * 2/3 = (47 + 1/7)$ barili di vino.

<u>Il volume della muratura di una torre</u>

Una torre ha forma circolare e ha diametro esterno di 22 braccia e interno di 14. È alta 28 braccia.



La torre è una corona circolare solida:



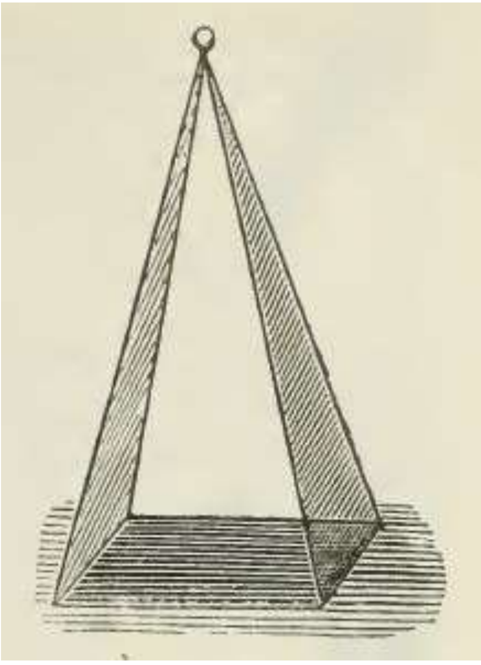
Il problema domanda il volume della muratura.

La procedura è la seguente:

* moltiplicare la lunghezza del diametro esterno per sé stessa: 22 * 22 = 484;
* moltiplicare per 11/14: 484 * 11/14 = (380 + 2/7) braccia^2 [area del cerchio esterno];
* moltiplicare la lunghezza del diametro interno per sé stessa: 14 * 14 = 196;
* moltiplicare per 11/14: 196 * 11/14 = 154 braccia^2 [area del cerchio interno];
* sottrarre l'area del cerchio interno da quella del cerchio esterno:
  (380 + 2/7) – 154 = (226 + 2/7) braccia^2 [area della corona circolare];
* moltiplicare per l'altezza della torre: (226 + 2/7) * 28 = 6336 braccia quadre corporee [volume della muratura].

Volume di una piramide a base quadrata

Una piramide retta a base quadrata ha i lati lunghi 5 braccia ed è alta 36.



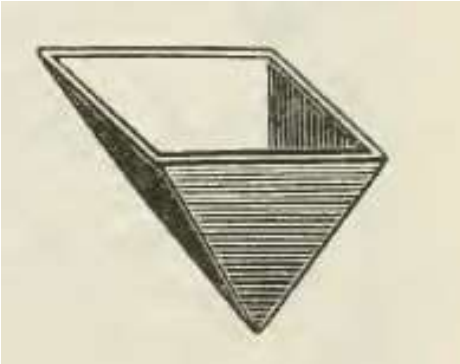
A proposito di questo solido, Calandri cita l'*Aguglia di Roma* e cioè un *obelisco*.

Il volume della piramide è calcolato con i passi che seguono:

* moltiplicare la lunghezza del lato della base per sé stessa: 5 * 5 = 25 braccia^2 [area della base];
* dividere per 3 l'altezza: 36/3 = 12;
* moltiplicare per l'area della base: 12 * 25 = 300 braccia quadre corporee [volume della piramide].

Volume di una tramoggia

Una tramoggia da mulino ha la forma di una piramide cava, a base quadrata, e rovesciata.



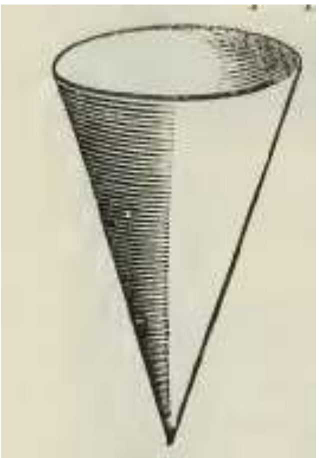
In questo e in altri disegni presenti nel trattato di Calandri è da notare l'uso delle *ombre*, tipico degli schemi prospettici o assonometrici contenuti nei libri tecnici pubblicati nell'Ottocento.

Il problema chiede di conoscere quante staia di grano può contenere la tramoggia.
I lati della base sono lunghi 2 braccia e la profondità o altezza della piramide è 1 braccio.
La procedura usata è:

* moltiplicare la lunghezza del lato per sé stessa: 2 * 2 = 4 braccia^2 [area della base];
* dividere per 3 l'altezza: 1/3 = 1/3;
* moltiplicare per l'area della base: 1/3 * 4 = (1 + 1/3) braccia quadre corporee [volume della tramoggia];
* moltiplicare per 9: (1 + 1/3) * 9 = 12 staia.

Volume di un cono

Un cono, che Calandri chiama *piramide tonda*, è disegnato rovesciato.



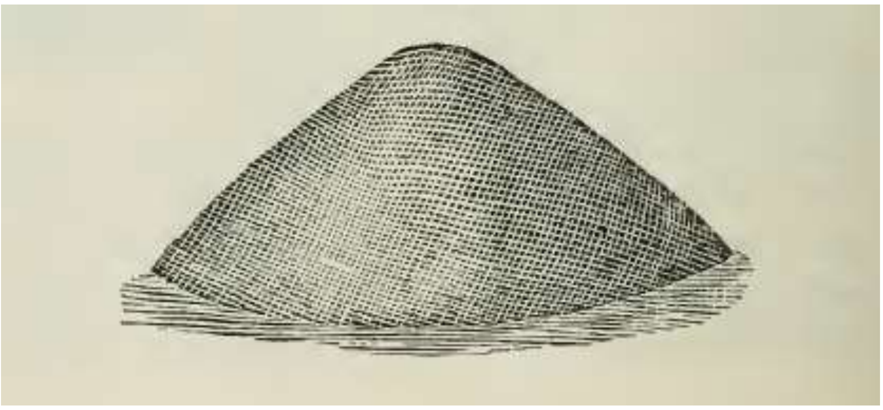
Il diametro della base è 4 braccia e l'altezza è 6 braccia.
Il calcolo del suo volume è ottenuto con i seguenti passi:

* moltiplicare la lunghezza del diametro per sé stessa: 4 * 4 = 16;
* moltiplicare per 11: 16 * 11 = 176;
* dividere per 14: 176/14 = (12 + 4/7) braccia^2 [area della base];
* dividere per 3 l'altezza: 6/3 = 2;

* moltiplicare per l'area della base: 2 * (12 + 4/7) = (25 + 1/7) braccia quadre corporee [volume del cono].

Volume di un monte di grano

Un *monte di grano* posizionato su di un'aia ha la forma di un cono con la circonferenza di base lunga 22 braccia e altezza 3 braccia.

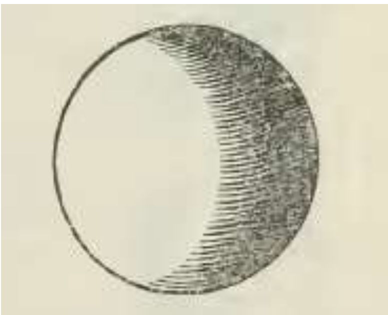


Per calcolare il volume del grano in staia, Calandri impiega i seguenti passi:

* moltiplicare la lunghezza della circonferenza per sé stessa: 22 * 22 = 484;
* moltiplicare per 7: 484 * 7 = 3388;
* dividere per 88: 3388/88 = (38 + ½) braccia^2 [area della base circolare];
* dividere per 3 l'altezza: 3/3 = 1;
* moltiplicare per l'area della base: 1 * (38 + ½) = (38 + ½) braccia quadre corporee [volume del monte];
* moltiplicare per 9: (38 + ½) * 9 = (346 + ½) staia [volume del grano].

Volume di una sfera

Una sfera (una *palla* secondo Calandri) ha diametro 5 braccia:



Il problema chiede il volume della sfera.
Calandri si rifà ad Archimede e cita la sua formula approssimata secondo la quale il volume di una sfera è uguale a 11/21 del cubo del suo diametro: vedere il successivo APPROFONDIMENTO.

Il volume è così calcolato:

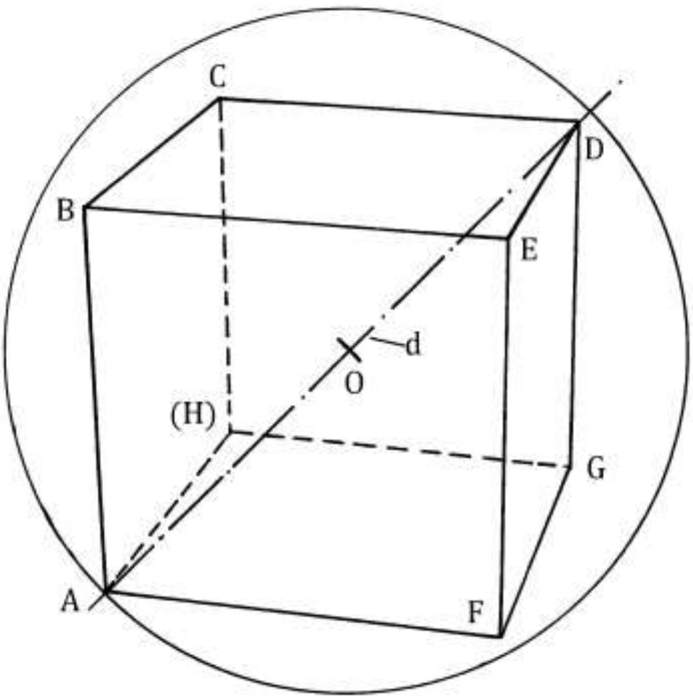
* moltiplicare la lunghezza del diametro per sé stessa: 5 * 5 = 25;

* moltiplicare di nuovo per la lunghezza del diametro: 25 * 5 = 125;
* moltiplicare per 11: 125 * 11 = 1375;
* dividere per 21: 1375/21 = (65 + 10/21) braccia quadre corporee [volume della sfera].

- APPROFONDIMENTO -

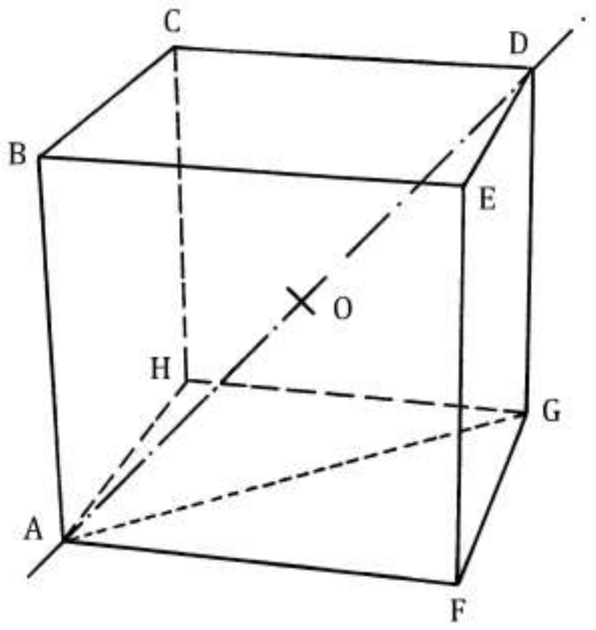
Dal cubo alla sfera

Lo schema che segue presenta una sfera e un cubo: questo è inscritto nella prima e i suoi otto vertici (A, B, C, D, E, F, G e H) giacciono sulla superficie esterna:



Il cubo è disegnato in prospettiva con tre punti di fuga, non evidenziati.
Il segmento AD è un diametro della sfera e una diagonale del cubo.
Il punto O è il centro di entrambi i solidi.

La figura qui sotto mostra lo stesso cubo isolato:



La diagonale AD è l'ipotenusa del triangolo rettangolo ADG. Il cateto DG è lungo quanto uno spigolo del cubo: DG = lato.

Il cateto AG è una diagonale della base quadrata AHGF ed è lunga:

$AG = \sqrt{2} * AF$.

A sua volta AD è:

$AD^2 = AG^2 + DG^2 = (\sqrt{2} * lato)^2 + lato^2 = 2 * lato^2 + lato^2 = 3 * lato^2$ e

$AD = \sqrt{3} * lato$.

Il volume del cubo è:

$Volume_{CUBO} = lato^3$.

Fra il cubo della diagonale AD e il volume del cubo intercorre una proporzione:

$AD^3/(lato^3) = (\sqrt{3} * lato)^3/(lato^3) = 3 * \sqrt{3}$.

Il volume della sfera è dato dalla formula:

$Volume_{SFERA} = 4/3 * \pi * r^3$ dove *r* è il raggio.

Ad volume di π sostituiamo l'approssimazione di Archimede, 22/7, e al posto del raggio *r* utilizziamo il diametro *d* e quindi *d/2 = r*. La formula diviene:

$Volume_{SFERA} = 4/3 * 22/7 * (d/2)^3 = 4/3 * 22/7 * d^3/8 = 11/21 * d^3$.

Ricordiamo che AD è anche la diagonale del cubo.

Fra la sfera e il cubo inscritto si trovano sei *calotte sferiche* delimitate dalla facce dell'esaedro e dalla superficie esterna della sfera.

- -

Volume di una sfera

Il problema richiama il caso della palla collocata alla sommità della cupola di Santa Maria del Fiore a Firenze.

Il suo diametro è uguale a 4 braccia.

Deve essere calcolata la quantità di grano in staia e in moggia che essa può contenere.

Il suo volume è così calcolato:

* moltiplicare la lunghezza del diametro per sé stessa: 4 * 4 = 16;
* moltiplicare di nuovo per la lunghezza del braccio: 16 * 4 = 64;
* moltiplicare per 11: 64 * 11 = 704;

* dividere per 21: 704/21 = (33 + 11/21) braccia quadre corporee [volume della sfera];
* moltiplicare per 9: (33 + 11/21) * 9 = (301 + 5/7) staia;
* dividere per 24: (301 + 5/7)/24 = 12 moggia + (13 + 5/7) staia.

Il *moggio* era un multiplo dello staio: 1 moggio = 24 staia.

- APPROFONDIMENTO -

La palla del Verrocchio

La sfera fu collocata sopra la Cupola di Santa Maria del Fiore nel 1471.

Essa fu realizzata dalla bottega del Verrocchio (Andrea di Michele di Francesco di Cione, detto il Verrocchio, 1435-1488).

La commissione affidata dall'Opera del Duomo fissava le sue caratteristiche geometriche e costruttive: essa fu realizzata con *otto* triangoli sferici saldati. Il diametro fu stabilito in 4 braccia [da panno], equivalenti a 233,4504 centimetri.

Il materiale usato fu una lega di rame: alcuni Autori lo ritengono *bronzo*, altri rame e vi è chi afferma che alla lega fu aggiunto anche dell'ottone. La sfera fu ricoperta di oro, probabilmente con doratura con l'impiego del mercurio. Attualmente è usata la foglia d'oro.

I tecnici dell'epoca conoscevano le principali differenze fra il rame quasi puro e il bronzo, anche se non possedevano gli strumenti per determinare le loro proprietà.

Il rame fonde a 1083°C e il bronzo (lega di rame e stagno) fonde a una temperatura più bassa, intorno ai 900°C, in relazione alla percentuale di stagno contenuta: ciò era un vantaggio perché riduceva la temperatura dei forni di fusione.

Inoltre, il bronzo è più resistente del rame sia dal punto di vista meccanico che da quello della resistenza agli agenti atmosferici.

Alcune fonti indicano in 18 quintali il peso della palla collocata dalla bottega del Verrocchio.

- -

Peso di una pallottola di bombarda

Una pallottola di una bombarda ha diametro di 1 braccio ed è di forma sferica:

Il materiale di cui è fatta ha peso specifico di 1400 libbre al braccio quadro corporeo e quindi è un po' più leggero del marmo: il proiettile doveva essere prodotto con della pietra.

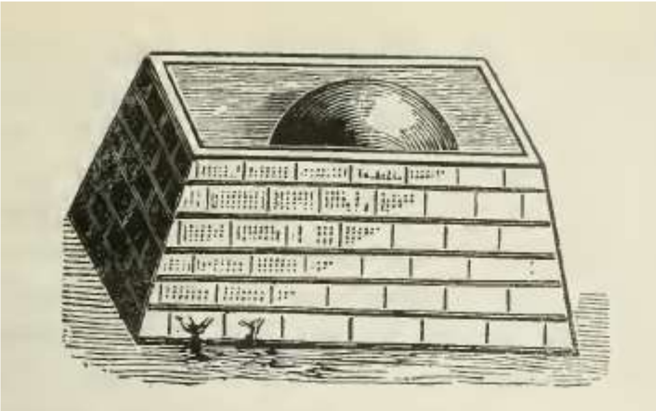
Il problema chiede il peso della pallottola. Ecco i passi della procedura:

* moltiplicare la lunghezza del diametro per sé stessa: 1 * 1 = 1;
* moltiplicare di nuovo per la lunghezza del diametro: 1 * 1 = 1;
* moltiplicare per 11: 1 * 11 = 11;
* dividere per 21: 11/21 = 11/21 braccia quadre corporee [volume della sfera];

* moltiplicare per 1400 per 11: 1400 * 11 = 15400;
* dividere per 21: 15400/21 = (733 + 1/3) libbre [peso del proiettile].

Una palla sferica caduta

Una palla sferica con diametro di 2 braccia cadde in un vivaio pieno d’acqua:

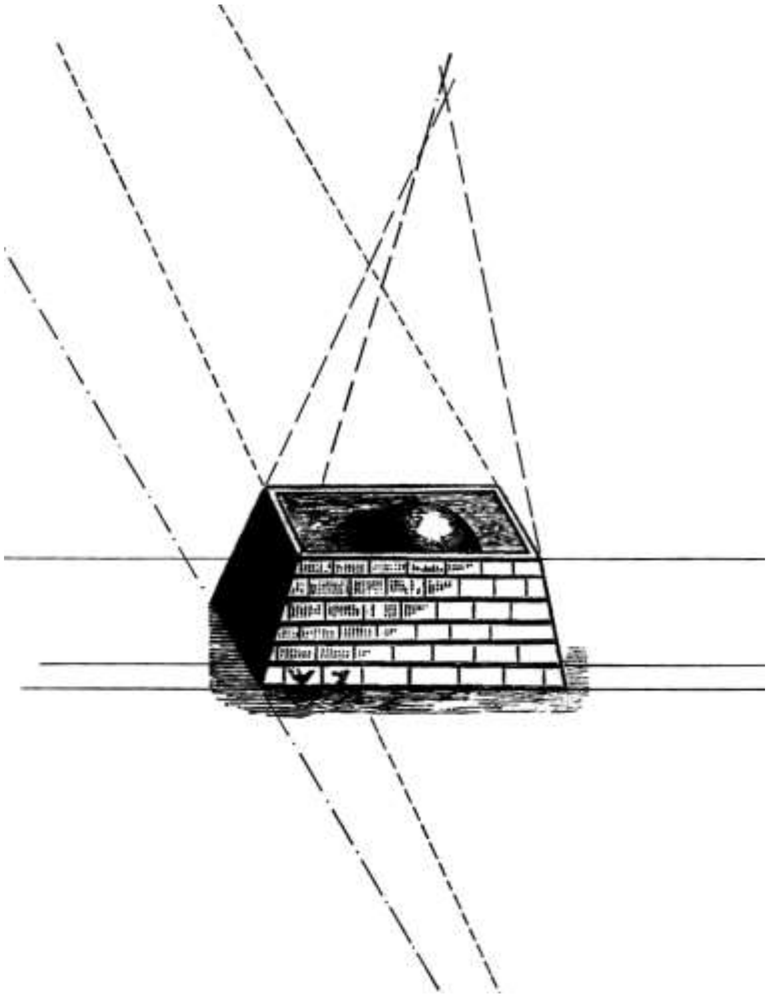


Il problema chiede il volume dell’acqua espresso in barili che uscirono dal vivaio, volume che è uguale a quello della sfera.

Ecco la procedura usata da Calandri:

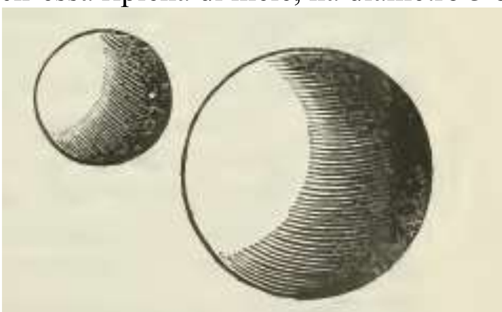
* moltiplicare la lunghezza del diametro per sé stessa: 2 * 2 = 4;
* moltiplicare di nuovo per la lunghezza del diametro: 4 * 2 = 8;
* moltiplicare per 11: 8 * 11 = 88;
* dividere per 21: 88/21 = (4 + 4/21) braccia quadre corporee [volume della palla];
* moltiplicare per 5: (4 + 4/21) * 5 = (20 + 20/21) barili di acqua fuoriuscita.

Il disegno presente nell’edizione curata da Alberto Bacchi Della Lega è una prospettiva molto approssimata, come spiega il grafico che segue:



<u>Palla piena di mele</u>

Una palla è piena di mele e ha diametro 2 braccia: il suo contenuto vale 50 lire.
Una seconda sfera, anch'essa ripiena di mele, ha diametro 3 braccia.



Il problema chiede di calcolare il valore in lire delle mele contenute nella seconda sfera.
La procedura si conclude con una semplice proporzione:

* calcolare il cubo della lunghezza del diametro della prima palla: 2 * 2 * 2 = 8;
* calcolare il cubo della lunghezza del diametro della seconda palla: 3 * 3 * 3 = 27;
* moltiplicare 27 per 50 [lire]: 27 * 50 = 1350;
* dividere per 8: 1350/8 = (168 + ¾) lire, valore del contenuto in mele della seconda sfera.

Gli ultimi due passi sono la soluzione di una proporzione:

valore mele prima sfera : $(\text{diametro}_{\text{prima sfera}})^3$ = valore mele seconda sfera : $(\text{diametro}_{\text{seconda sfera}})^3$

e cioè: 50 : 8 = x : 27 da cui x = (50 + 27)/8 = (168 + ¾) lire.

Dato che 1 lira vale 20 soldi, ¾ di lira sono 15 soldi, per cui il valore delle mele contenute nella seconda sfera è: (168 lire + 15 soldi).

<u>Copertura di una sfera</u>

Una palla che ha diametro 4 braccia deve essere ricoperta con un panno.

Il problema chiede di calcolare la quantità di panno occorrente espressa in braccia quadre.

La pezza di panno è larga 2 braccia.

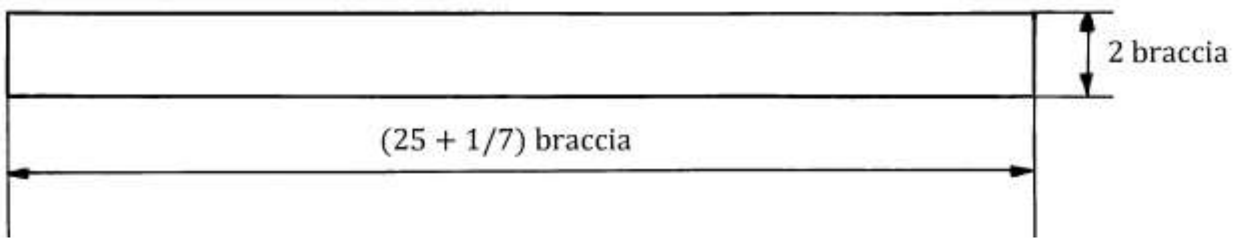
Anche questo problema è ripreso dal *Tractato d'abbacho* di Maestro Benedetto.

La superficie della sfera è calcolata da Calandri con la formula suggerita da Archimede: essa è quattro volte l'area del cerchio massimo e cioè:

$\text{Area}_{\text{SFERA}} = 4 * (\pi * r^2) \approx 4 * (22/7 * r^2) \approx 88/7 * r^2$, dove *r* è il raggio della sfera.

La soluzione del problema prevede i seguenti passi:

* moltiplicare la lunghezza del diametro per sé stessa: 4 * 4 = 16;
* moltiplicare per 11: 16 * 11 = 176;
* dividere per 14: 176/14 = (12 + 4/7) braccia^2 [area del cerchio massimo];
* moltiplicare per 4: (12 + 4/7) * 4 = (50 + 2/7) braccia^2 [superficie della sfera];
* dividere per la larghezza del panno [2 braccia]: (50 + 2/7)/2 =(25 + 1/7) braccia lineari, lunghezza della stoffa occorrente, che forma un rettangolo di dimensioni 2 * (25 + 1/7) braccia:



Bibliografia

1. Calandri Pietro Maria, “Compendium de agrorum corporumque dimensione”, in “I due trattati dell’Agricoltura e della Coltivazione delle Viti”, di Giovanvettorio Soderini, a cura di Alberto Bacchi Della Lega, Bologna, Romagnoli Dall’Acqua, 1902, pp. da 291 a 346.
2. Calandri Pier Maria [Maestro Benedetto da Firenze], “Tractato d’Abbacho” [Dal Codice Acq. E doni (sec XV) della Biblioteca Medicea Laurenziana di Firenze], a cura e con introduzione di Gino Arrighi, Pisa, Domus Galilæana, 1974, pp. 196.
3. Franci Raffaella – Toti Rigatelli Laura, “Maestro Benedetto da Firenze e la storia dell’algebra”, *Historia Mathematica*, 10, 1983, pp. 297-317.
4. Gherardi Paolo, “Opera matematica. Libro di ragioni – Liber habaci”, Codici Magliabechiani, Classe XI, nn. 87 e 88 (sec. XIV) della Biblioteca Nazionale di Firenze (a cura e con introduzione di Gino Arrighi), Lucca, Maria Pacini Fazzi Editore, 1987, pp. 173.
5. Istituto Centrale di Statistica, “Misure locali per le superfici agrarie”, Roma, A.B.E.T.E., 1950, seconda edizione, pp. 191.
6. Martini Angelo, “Manuale Di Metrologia: Ossia, Misure, Pesi e Monete in Uso Attualmente E Anticamente Presso Tutti I Popoli”, Torino, Ermanno Loescher, 1883, pp. VIII+904.
7. Ministero di Agricoltura, “Tavole di Ragguaglio dei Pesi e delle Misure Già in Uso Nelle Varie Provincie del Regno Col. Peso Metrico Decimale Approvate con Decreto Reale 20 Maggio 1877, N. 3836”, Roma, Stamperia Reale, 1877, pp. 767.
8. “Tavole di Ragguaglio per la riduzione dei pesi e misure che si usano in diversi luoghi del Granducato di Toscana al peso e misura vegliante in Firenze”, Firenze, Gaetano Cambiagi Stampator Granducale, 1782, pp. XVII+835.
9. Ulivi Elisabetta, “Gli abacisti fiorentini delle famiglie ‘Del maestro Luca’, Calandri e Micceri e le loro Scuole d’Abaco”, Firenze, Olschki, 2013, pp. X-298.
10. Zupko Ronald Edward, “Italian Weights and measures from the Middle Ages to the Nineteenth Century”, Philadelphia, American Philosophical Society, 1981, pp. lxxxiv+339.