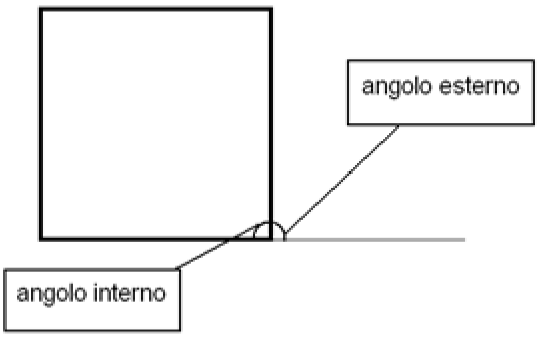
sergio(punto)calzolani(at)outlook(punto)it

Parole chiave: Euclide, Tolomeo, pentagono regolare, diagonale, lato, sezione aurea, valore di ϕ, Fibonacci, triangolo aureo, gnomone aureo, decagono, pentadecagono, Abu'l – Wafa, Villard de Honnecourt, Leonardo da Vinci, Albrecht Dürer, tassellazioni pentagonali, aquilone, dardo, costruzioni approssimate del pentagono

La costruzione dei poligoni regolari con riga e compasso

In Geometria un poligono è una figura che comprende almeno tre punti (o *vertici*), collocati in un piano, e segmenti che congiungono il primo e il secondo punto, questo con il terzo, fino a connettere l'ultimo punto con il primo. In altri termini, un poligono è una parte di piano racchiusa da una linea spezzata chiusa e non intrecciata.

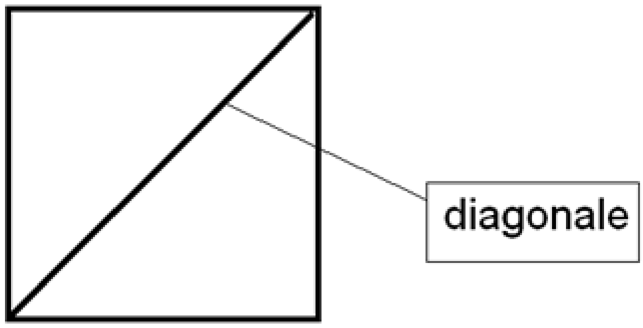
I poligoni regolari sono *equilateri* e cioè i loro lati sono della stessa lunghezza. Essi sono anche *equiangoli* perché i loro angoli sono tutti della stessa ampiezza; fra di loro lo sono gli angoli interni e, a loro volta, lo sono anche gli angoli esterni, come da figura che segue:



In un poligono regolare qualsiasi, l'angolo esterno è *supplementare* e cioè la sua ampiezza è uguale a (180° – ampiezza angolo interno).

La parola *poligono* deriva dalla fusione di due parole greche e significa "molti angoli": fu introdotta da Galileo Galilei nel 1638.

Un segmento che congiunge due vertici non consecutivi di un poligono è chiamato *diagonale*:



Il numero *D* delle diagonali di un poligono è legato a quello dei lati, *n*, da una semplice formula:

$$D = [n * (n - 3)]/2.$$

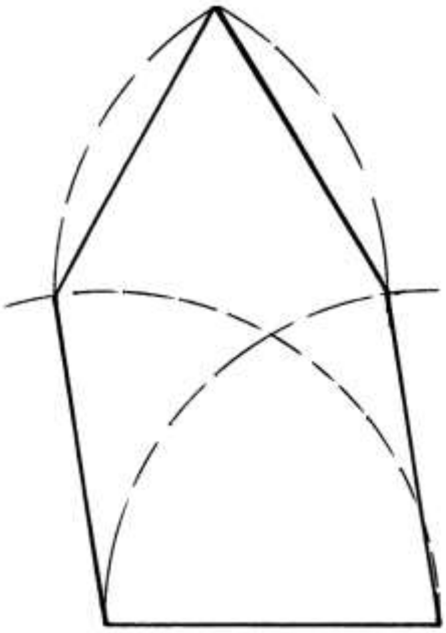
Nel caso del pentagono esso vale:

$$D = [5 * (5 - 3)]/2 = 5 * 2/2 = 5.$$

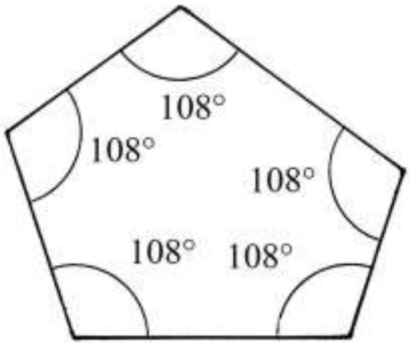
In teoria, si possono disegnare poligoni *quasi* regolari con un numero qualsiasi di lati: quando il numero è molto grande, la linea che racchiude la figura tende verso una circonferenza. È quello che accade usando uno dei dialetti del linguaggio informatico Logo quando, con i comandi *ripeti 360 [avanti 1 destra 1]* , facciamo disegnare alla tartaruga, sullo schermo del computer, un poligono formato da 360 lati lunghi 1 pixel [avanti 1]: il poligono si confonde con una circonferenza.

- APPROFONDIMENTO -

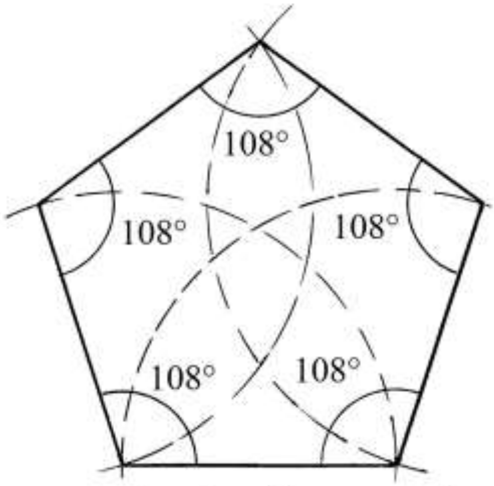
Nelle figure che seguono sono presentati tre differenti pentagoni:



pentagono equilatero



pentagono equiangolo



pentagono regolare (equilatero e equiangolo)

Il primo è *equilatero* perché ha i lati della stessa lunghezza, ma gli angoli interni hanno differente ampiezza.

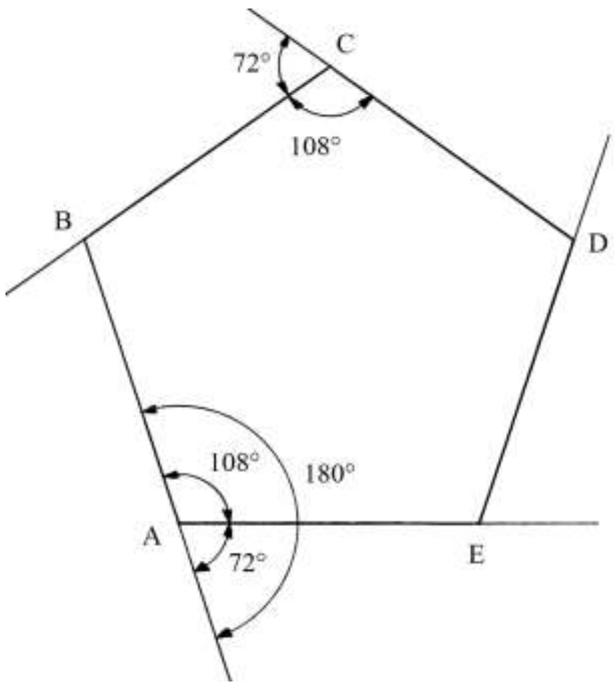
Il secondo pentagono è soltanto *equiangolo*, perché ha gli angoli interni della stessa ampiezza, 108°: i lati hanno differenti lunghezze.

Infine, il terzo pentagono è *regolare* perché è sia equilatero che equiangolo.

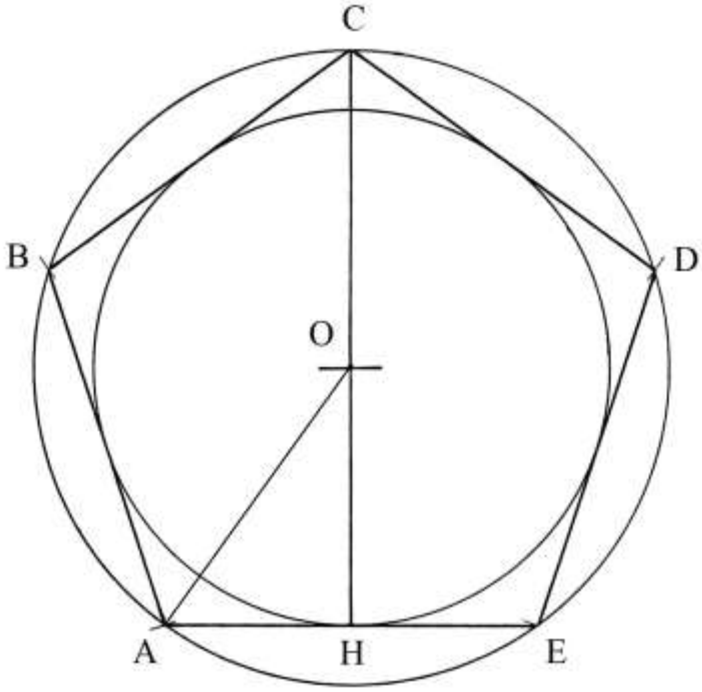
Il primo e il secondo pentagono sono poligoni *semiregolari* (o *non regolari*) e solo il terzo è, come già detto, *regolare*.

Gli angoli caratteristici di un pentagono regolare hanno le seguenti ampiezze:

* 108° quelli interni;
* 72° quelli supplementari, esterni:



Un pentagono regolare è inscritto in un cerchio di raggio OA e al suo interno è disegnabile un secondo cerchio di raggio OH, che è tangente al poligono nei punti medi dei suoi lati:



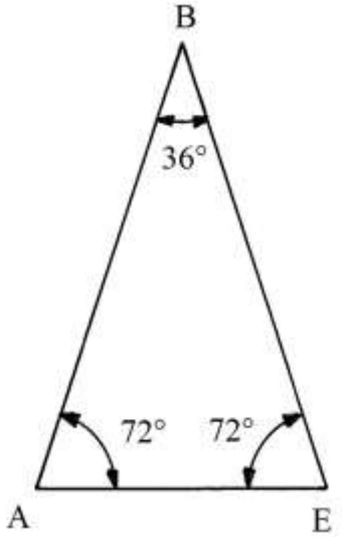
Il raggio OH è l'*apotema* del pentagono.

- -

LA COSTRUZIONE DEL PENTAGONO SECONDO EUCLIDE

Nel corso dei secoli sono stati proposti diversi metodi per la costruzione de poligono regolare con riga e compasso: essi si rifanno a due differenti metodi dovuti a Euclide e a Tolomeo.

Il primo esempio che è qui descritto risale a Euclide (III secolo a.C.). Esso inscrive in un cerchio un pentagono regolare in modo indiretto, a partire dalla tracciatura di un particolare triangolo isoscele che è chiamato *triangolo aureo*:



Gli angoli nei vertici A e E hanno ampiezza uguale a 72° e l'angolo nel vertice B è ampio la metà e cioè 36°.

Fra le lunghezze dei lati del triangolo intercorre un preciso rapporto:

$AB : AE = \phi : 1$.

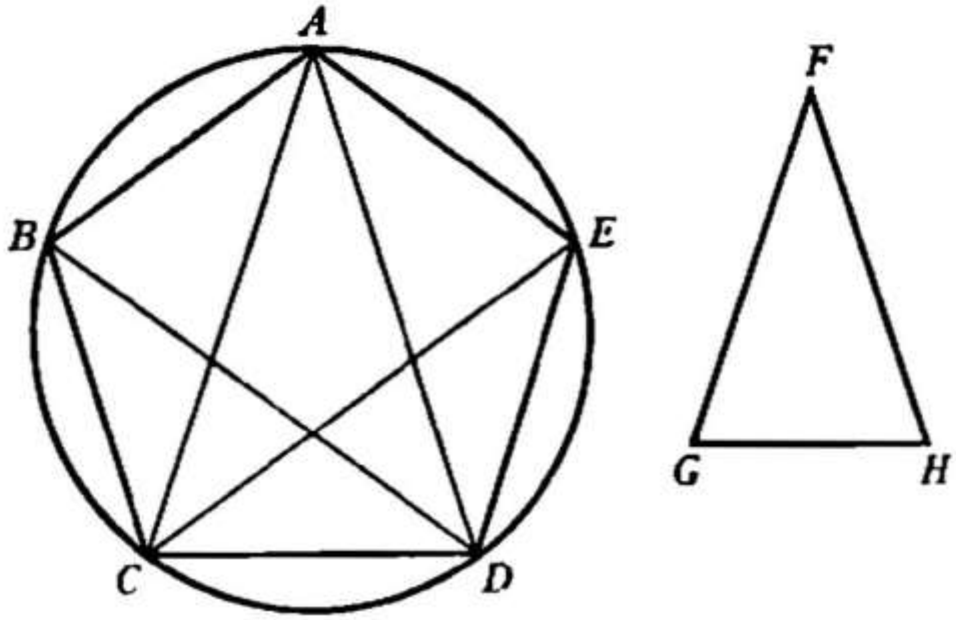
ϕ è il simbolo della *sezione aurea* e vale:

$(\sqrt{5} + 1)/2 \approx 1{,}618\ldots = \phi$.

Il segmento AE è anche un lato di un pentagono regolare e i lati AB e EB del triangolo sono due diagonali dello stesso pentagono.

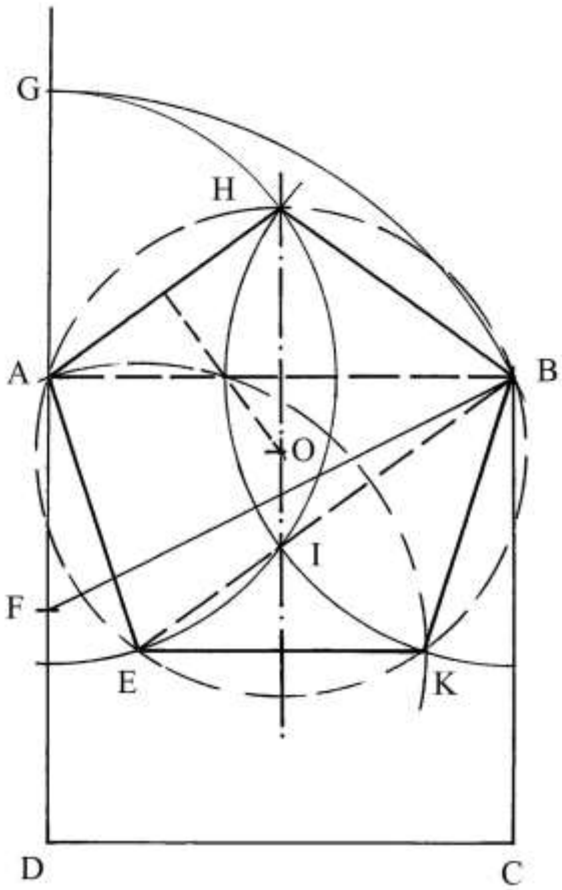
Dato il triangolo ABE il problema geometrico consiste nell'inscriverlo in un cerchio per completare il pentagono regolare inscritto.

Lo schema che segue è riprodotto dalla pagina 279 dell'edizione degli *Elementi* di Euclide curata da Frajese e Maccioni (citata in bibliografia):



Nella figura di sinistra sono disegnati due triangoli aurei: ACD e BDA.

Lo schema che segue, rielaborata dalla voce *Pentagono* dell'edizione italiana di Wikipedia, è basata sul metodo di Euclide:



Riprodurre il triangolo aureo ABE disponendo il lato AB orizzontalmente.

Costruire il quadrato ABCD, prolungare verso l'alto il lato AD e fissare il punto medio dello stesso AD, che è F.

Collegare F con B e fare centro in F con raggio FB per disegnare un arco da B fino a incontrare in G il prolungamento di AD.

Con raggio AG fare centro in A e in B e tracciare due archi che si incontrano nei punti H e I: AH e HB sono altri due lati del pentagono regolare.

La linea passante per H e per I è un asse di simmetria del poligono.

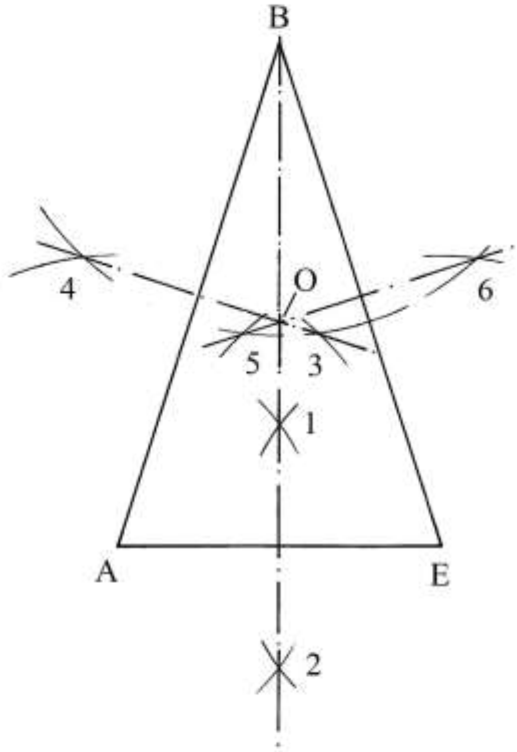
Con raggio AE fare centro in E e disegnare un arco che taglia l'arco di centro B in un punto, K.

AHBKE è il pentagono regolare. Il cerchio in cui è inscrivibile ha centro in O e raggio OA = OH: la posizione di O è determinata dall'intersezione degli assi dei lati del pentagono con l'asse passante per H e per I.

\- APPROFONDIMENTO -

In linea di principio, il triangolo aureo ABE può essere usato per costruire il pentagono regolare con un semplice metodo geometrico.

Tracciare gli assi dei tre lati del triangolo: essi passano per le coppie di punti 1-2, 3-4 e 5-6:

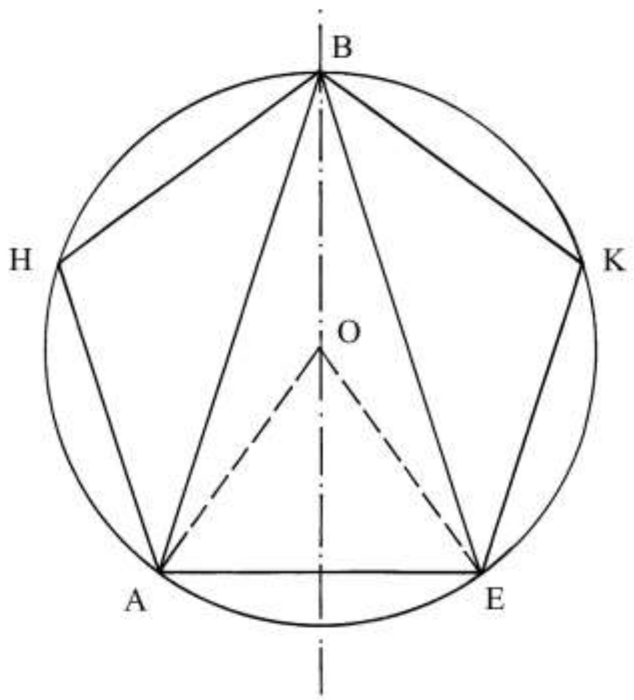


Le tre rette si incontrano nel punto O, interno al triangolo isoscele.

L'asse di un segmento (o di un lato) è una retta perpendicolare che passa per il suo punto medio.

Il punto O è chiamato *circocentro* perché è il centro del cerchio circoscritto (o *circumcerchio*) a un triangolo o a un poligono.

Fare centro in O e con raggio OA = OE disegnare una circonferenza sulla quale, a partire da A e da E, riportare la lunghezza di AE:

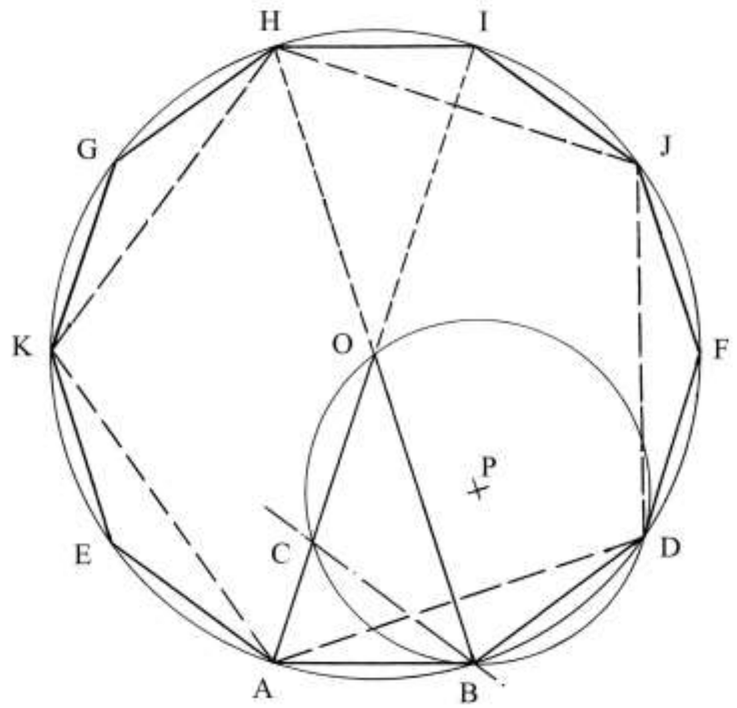


AHBKE è il pentagono regolare inscritto.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Il triangolo aureo può essere impiegato anche per la costruzione del decagono regolare inscritto.

OAB è un triangolo isoscele aureo e AB è il primo lato del decagono.



Tracciare la circonferenza di centro O e raggio OA = OB.

Costruire la bisettrice dell'angolo ABO: essa taglia il raggio OA nel punto C. I segmenti AB, BC e CO hanno uguale lunghezza:

AB = BC = CO.

Fra il raggio OA e il segmento OC vale una proporzione:

OA : OC = ϕ : 1.

Determinare il centro della circonferenza passante per i punti O, B e C: è P. Disegnare la circonferenza con centro in P e raggio PB = PC = PO: essa incontra la prima circonferenza nel punto D.

La corda BD è il secondo lato del decagono.

Riportare sulla circonferenza esterna la lunghezza di AB: AEFGHIJKDB è il decagono.

Gli angoli opposti nel vertice O, AOB e HOI, hanno ampiezza 36°:

AOB = HOI = 360°/10 = 36°.

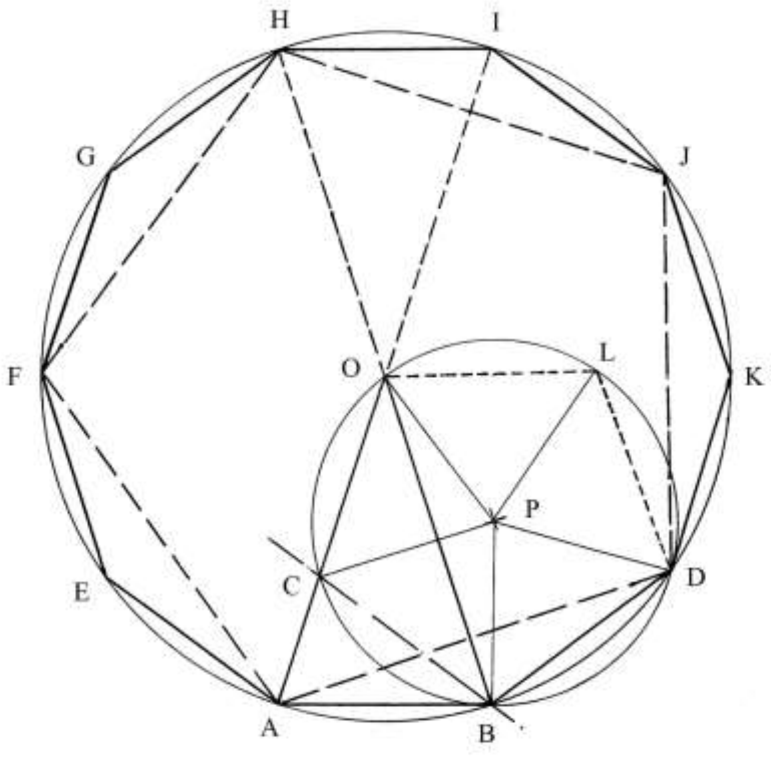
Ne consegue che gli angoli alla base, OAB e OBA, hanno ampiezza uguale a 72°.

Gli angoli interni del decagono hanno ampiezza:

EAB = EAO + OAB = 72° + 72° = 144°.

AFHJD è un pentagono inscritto nello stesso cerchio esterno.

Nel cerchio di centro P è inscrivibile un secondo pentagono con lati lunghi quanto OC: è il poligono BCOLD.



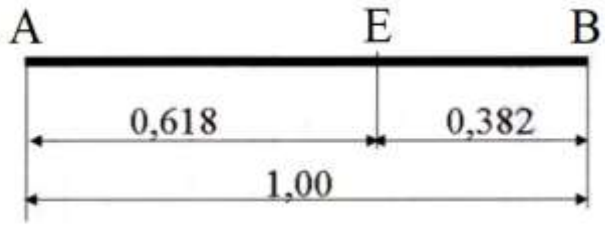
- -

LA SEZIONE AUREA

Risale a Euclide la prima definizione della *sezione aurea* (ma non l'attuale denominazione, che è piuttosto recente): egli la definì come la "divisione di un segmento in media e ultima ragione".

In termini più discorsivi, si tratta di dividere un segmento in modo che il rettangolo che ha per lati l'intero segmento e la sua parte minore sia equivalente al quadrato che ha per lato la parte maggiore.

La figura che segue descrive la situazione:

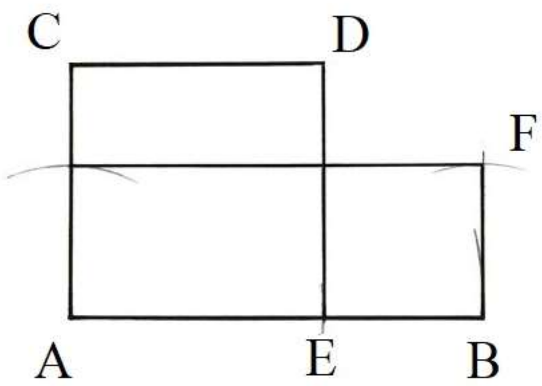


Il segmento AB è convenzionalmente lungo 1 unità. Esso è diviso dal punto E in due parti:

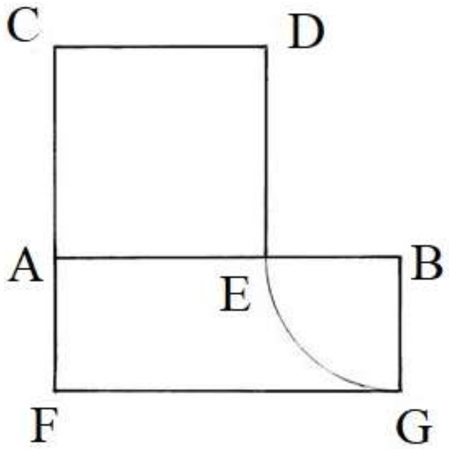
- AE è la *media ragione* ed è lungo 0,618… unità;
- EB è l'*ultima ragione* ed è lungo 0,382… unità.

I due coefficienti 0,618… e 0,382… sono leggermente approssimati: il primo per *difetto* e il secondo per *eccesso*.

Il rettangolo AB * FB (con FB = EB) possiede la stessa superficie del quadrato di lato AE:

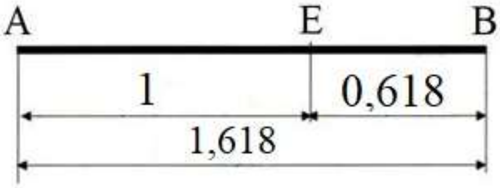


La precedente costruzione può essere leggermente modificata nel modo descritto dalla figura che segue:



Costruire il quadrato ACDE e il rettangolo ABGF: i due quadrilateri hanno la stessa area:
$AE^2 = AB * BG$ ma $BG = EB$ e quindi $AE^2 = AB * EB$

La divisione del segmento AB può essere presentata anche nel modo che segue:



Il segmento AB è lungo 1,618… unità: AE è lungo 1 e EB è lungo 0,618….
I numeri 0,618… e 1,618… sono entrambi approssimati per *difetto*.
Il numero 0,618… è spesso indicato con il simbolo φ, lettera dell'*alfabeto greco* Phi, minuscola.

Il numero 1,618… viene indicato con il simbolo ϕ, lettera dell'alfabeto greco Phi, maiuscola. Il simbolo fu scelto in onore dello scultore e architetto ateniese Fidia (vissuto fra il 490 e il 430 a.C.).

In alcuni testi, il numero 1,618… è indicato con la lettera τ, *tau*, lettera minuscola dell'alfabeto greco.

Il numero ϕ = 1,618… è la sezione aurea.

- APPROFONDIMENTO -

Riguardo alla divisione del precedente segmento AB, è utile approfondire i rapporti fra i tre segmenti AB, AE e EB:

$$AB : AE = (AE + EB) : AE$$

Chiamando x il rapporto
AB/AE = x, modifichiamo la precedente proporzione:

AB/AE = (AE + EB)/AE = AE/AE + EB/AE = 1 + EB/AE.
Ma AB/AE = x, quindi: x = 1 + EB/AE.
La frazione EB/AE può essere scritta come:
EB/AE = 1/(EB/AE).
Ma EB/AE = AB/AE = x.

La precedente espressione diviene:

$AB/AE = 1 + EB/AE \quad \rightarrow \quad x = 1 + 1/x$

$x^2 = x + 1 \quad \rightarrow \quad x^2 - x - 1 = 0$

Questa equazione di secondo grado ha due radici: x_1 e x_2:

$$x_{1,2} = [1 \pm \sqrt{(1 + 4)}]/2 = \begin{cases} x_1 = (1 + \sqrt{5})/2 = \phi \text{ (sezione aurea)} \\ x_2 = (1 - \sqrt{5})/2 \end{cases}$$

La seconda radice, x_2, è:

$(1 - \sqrt{5})/2 = - 0{,}6180339887\ldots = - 1/\phi$.

L'espressione $\sqrt{5}$ è un numero *irrazionale* il cui valore può essere determinato con una semplice costruzione geometrica.

Il valore approssimato di ϕ è:

$\phi = (1 + \sqrt{5})/2 = 1{,}6180339887\ldots$, ma per gli usi pratici viene approssimato per difetto a 1,618.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

$1/\phi = \phi - 1$

$\phi = 1 + 1/\phi$

$\phi^2 = \phi + 1$

$\phi^3 = \phi^2 * \phi = (\phi + 1) * \phi = \phi^2 + \phi$

$\phi^4 = \phi^3 + \phi^2$

$\phi^5 = \phi^4 + \phi^3$

$\phi 6 = \phi^5 + \phi^4$

In generale:

$\phi^n = \phi^{(n-1)} + \phi^{(n-2)} = \phi * \phi^{(n-1)}$

In termini aritmetici si hanno i seguenti valori:

$\phi = (1 + \sqrt{5})/2$

$\phi + 1 = (1 + \sqrt{5})/2 + 1 = (3 + \sqrt{5})/2$

$\phi^2 = [(1 + \sqrt{5})/2]^2 = (1 + 2*\sqrt{5} + 5)/2 = (3 + \sqrt{5})/2$

Fra le curiosità che questo numero manifesta vi sono le uguaglianze di alcune parti decimali:

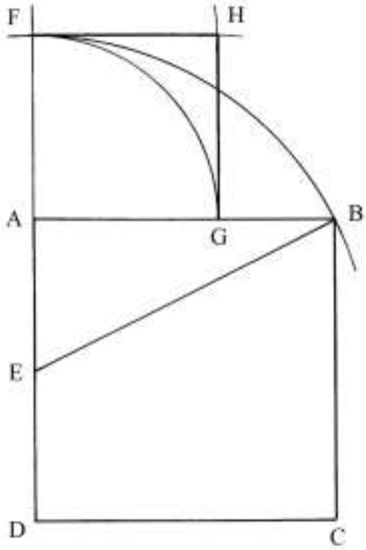
* $\phi \approx 1,$*618039887…*
* $1/\phi \approx 0,$*618039887…*
* $\phi^2 \approx 2,$*618039887…*

- -

Costruzione di un triangolo aureo esatto

La procedura che segue permette la costruzione di un triangolo aureo esatto, con riga e compasso, eliminando l'uso del goniometro, strumento che servirà alla fine per il controllo dell'ampiezza degli angoli.

Disegnare il quadrato ABCD con lati lunghi quanto i due lati inclinati del triangolo aureo che si vuole ottenere.



Prolungare verso l'alto il lato AD.

Fissare il punto medio del lato AD: è E. EB è una corda del quadrato.

Fare centro in E e con raggio EB tracciare un arco da B fino a intersecare in F il prolungamento di AD.

Fare centro in A e con raggio AF disegnare un arco da F fino a tagliare in G il lato AB.

AFHG è il quadrato costruito su AF e su AG.

La corda EB è lunga:

$EB^2 = AB^2 + AE^2 = AB^2 + (AB/2)^2 = 5/4 * AB^2$.

Per semplificare i calcoli fissiamo per AB la lunghezza convenzionale uguale a 1; quindi si ha:

$EB^2 = 5/4 * 1^2 = 5/4$ e $EB = \sqrt{(5/4)} = (\sqrt{5})/2$.

Il segmento AF è lungo:

$AF = EF – EA = EB – EB/2 = (\sqrt{5})/2 – ½ = (\sqrt{5} – 1)/2 \approx 0,618… = 1/\phi$.

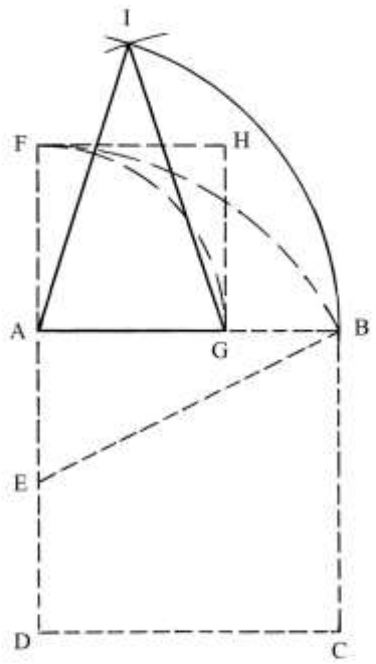
AG è lungo quanto AF e quindi: $AG = 1/\phi$.

Il rapporto fra le lunghezze di AB e di AG vale:

$AB/AG = 1/(1/\phi) = \phi$.

Fra la lunghezza del lato di base e quella di un lato inclinato di un triangolo aureo intercorre il rapporto ϕ e cioè lo stesso che esiste fra AB e AG: è quindi possibile usare queste due lunghezze per costruire un triangolo aureo.

Riproduciamo il precedente grafico:



Fare centro in A e con raggio AB disegnare un arco da B in senso antiorario. Con la stessa apertura fare centro in G e tracciare un altro arco che incontra il precedente nel punto I.

AIG è un triangolo isoscele *aureo*: con un buon goniometro è facile verificare che gli angoli IAG e IGA hanno ampiezza di 72° e che l'angolo AIG è ampio 36°.

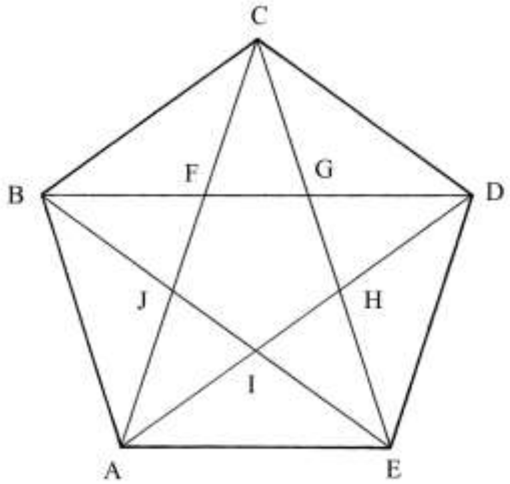
Proprietà delle diagonali di un pentagono regolare

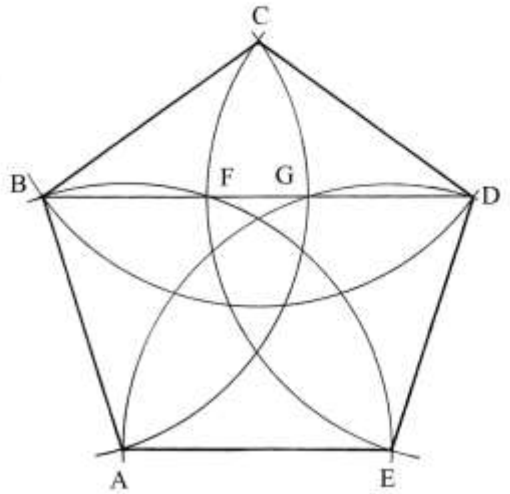
Negli *Elementi* Euclide stabilì una regola riguardante il pentagono regolare:

le diagonali di un pentagono regolare si tagliano in proporzione alla sezione aurea.

Il segmento maggiore delimitato dalle loro intersezioni ha la stessa lunghezza del lato del poligono.

I due schemi che seguono spiegano la regola:





Nel primo pentagono sono tracciate le *cinque* diagonali: AC, AD, BD, BE e CE. Le loro intersezioni sono i vertici di un secondo pentagono regolare, FGHIJ, che è ruotato di 180° rispetto a ABCDE.

Consideriamo la diagonale BD: essa è tagliata da AC in due segmenti: BF e FD.

La stessa diagonale è divisa dalla CE in due segmenti: BG e GD.

Valgono le seguenti uguaglianze:

BG = FD e BF = GD.

Le lunghezze di FD e di BF stanno nel rapporto uguale a ϕ:

FD : BF = ϕ : 1.

Applichiamo la *proprietà del comporre*: la somma del primo e del secondo termine di una proporzione sta al secondo come la somma del terzo e del quarto termine sta al quarto; quindi:

(FD + BF) : BF = (ϕ + 1) : 1

BD : BF = ϕ^2 : 1 e

BF = BD/ϕ^2 .

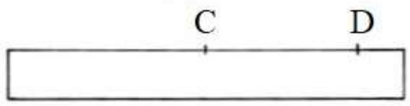
Nel secondo pentagono sono disegnati *cinque* archi di conferenza con centri nei vertici di ABCDE e raggio uguale alla lunghezza di un suo lato.

Gli archi di centri B e D dividono la diagonale BD: i segmenti BG e FD sono lunghi quanto i lati del pentagono.

PENTAGONO CON IL METODO *NEUSIS*

Il termine *neusis* viene dal greco e, grosso modo, significa “nella direzione di”.

Il metodo risale agli antichi geometri greci e in particolare a Archimede (287-212 a.C.); richiede l’uso del compasso e di un righello *graduato recante due sole tacche distanziate,* come quello rappresentato nella figura che segue:



I righelli usati dai tecnici e dagli artigiani sono quasi tutti graduati in cm, mm e talvolta in pollici.

Il righello usato con il metodo *neusis* può scorrere e ruotare. Esso era impiegato nei casi nei quali era impossibile usare la riga non graduata e il compasso: la costruzione dell’ettagono, dell’ennagono, del tridecagono, la trisezione di un angolo qualsiasi e la duplicazione del cubo.

Il righello scorre e ruota intorno a un polo posto in corrispondenza di un punto scelto, ad esempio, a sinistra di E.

- APPROFONDIMENTO -

Ippocrate di Chio

Ippocrate di Chio (470-410 a.C.) è stato un importante matematico e astronomo greco.

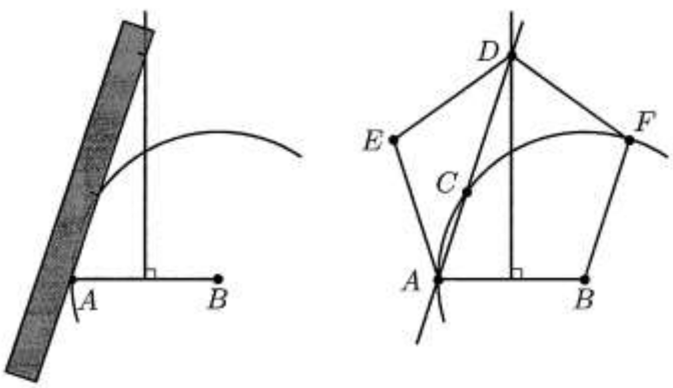
Si interessò alla geometria e studio due dei problemi classici: la quadratura del cerchio e la duplicazione del cubo. Le sue ricerche sulla quadratura lo condussero a calcolare l’area delle *lunule*.

Ippocrate sembra essere stato il primo geometra ad usare il metodo *neusis*.

Scrisse un trattato geometrico intitolato *Elementi* che però non è pervenuto.

- -

Nel suo bel libro citato in bibliografia, David S. Richeson attribuisce al matematico Pappo di Alessandria la costruzione del pentagono regolare con il metodo *neusis*.



AB è il primo lato del poligono: dal suo punto medio innalzare la perpendicolare.

Fare centro in B e con raggio BA tracciare un arco in senso antiorario a partire da A.

Poggiare sul vertice A il righello che riporta le tacche C e D: CD deve essere lungo quanto il lato AB.

Il righello deve essere posizionato in modo che il punto C tagli l’arco di circonferenza e il punto D si posizioni sulla perpendicolare.

Il punto D è un vertice del pentagono e la corda AD è una sua diagonale.

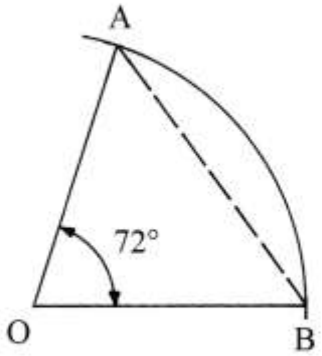
Fare centro in A e in D con raggio AB e disegnare gli archi che stabiliscono i punti E e F.

AEDFB è il pentagono regolare, costruito con un’unica apertura di compasso: AB.

LA COSTRUZIONE DEL PENTAGONO SECONDO CLAUDIO TOLOMEO

La costruzione più conosciuta e più usata del pentagono regolare inscritto è quella proposta da Claudio Tolomeo (II secolo d.C.) nell'*Almagesto*.

Lo scopo di Tolomeo non era quello di disegnare il pentagono regolare ma egli si proponeva di determinare la lunghezza della corda sottesa da un angolo al centro di 72°: la corda è la lunghezza del lato del pentagono regolare inscritto:

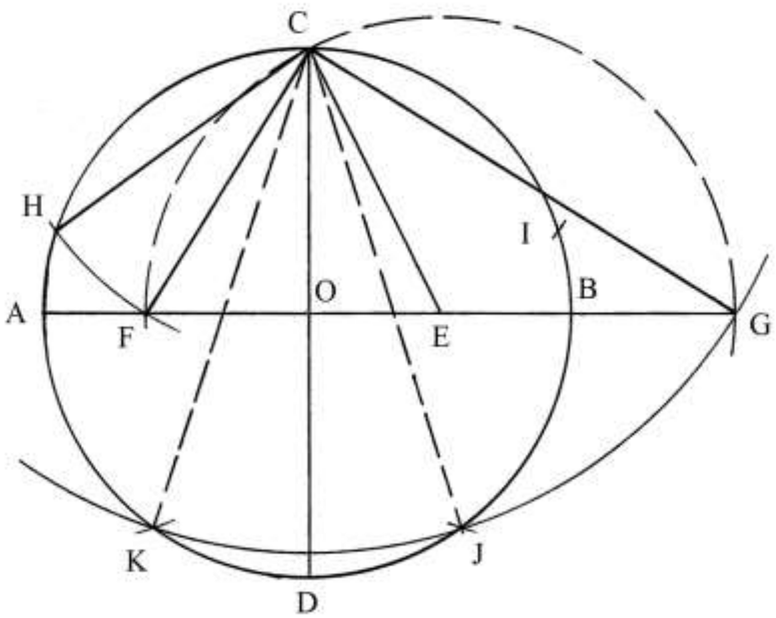


O è il centro di un arco di circonferenza di raggio OA = OB: l'angolo AOB è ampio 72°.

La corda AB sottende quell'angolo ed è un lato di un pentagono regolare inscritto nel cerchio di centro O e raggio OA = OB. Infatti, l'angolo di 72° è un sottomultiplo in base 5 di un angolo giro:

AOB = 360°/5 = 72°.

La costruzione del pentagono che consegue dall'opera di Tolomeo è presentata nello schema che segue:



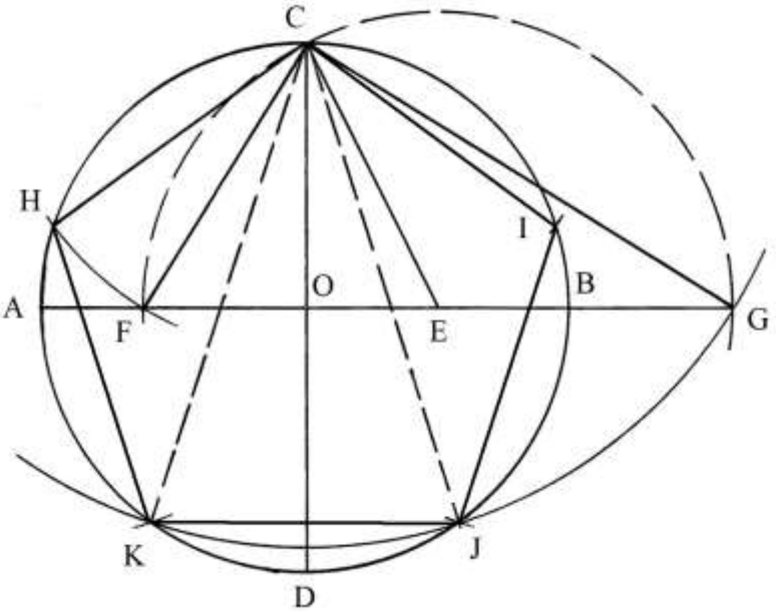
Disegnare una circonferenza di centro O e i due diametri perpendicolari AB e CD.

Determinare il punto medio del raggio OB: è E; collegare E con C. Fare centro in E e con raggio EC tracciare una semicirconferenza da C fino a incontrare OA nel punto F e il prolungamento verso destra di AB nel punto G.

Disegnare le corde CF e CG: la prima, CF, è lunga quanto il lato del pentagono: facendo centro in C con raggio CF sono fissati i punti H e I, altri vertici del pentagono.

Infine, fare centro in C e con raggio CG tracciare un arco da G fino a incontrare la circonferenza nei punti J e K, che sono i due vertici mancanti del poligono.

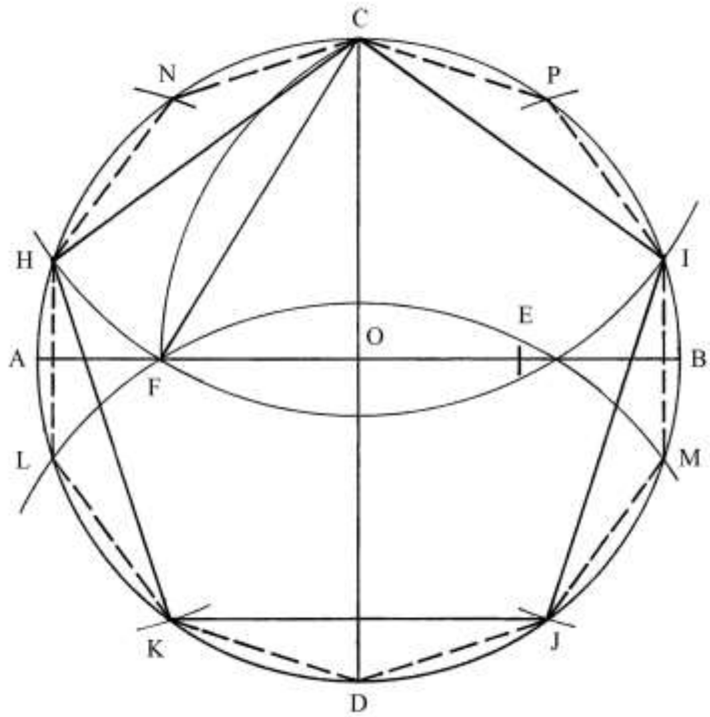
CIJKH è il pentagono regolare inscritto:



Nel grafico sono disegnate le diagonali CJ e CK: il triangolo isoscele CKJ è *aureo*.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

La precedente costruzione è la base per la tracciatura del decagono regolare inscritto nello stesso cerchio; le corde DJ e DK sono i primi due lati del decagono:



Con apertura di compasso CF fare centro in D e disegnare l’arco che taglia la circonferenza nei punti L e M. Fare centro in C con apertura DK e tracciare due archi che incontrano la circonferenza nei punti N e P.

CPIMJDKLHN è il decagono regolare.

IL MATEMATICO ABU'L – WAFA AL'BUZJANI

Abu'l –Wafa nacque nel Khorasan (attuale Iran) nel 940 e all'età di 19 anni si trasferì alla corte dei Califfi a Baghdad, città nella quale morì nel 998.

È stato uno dei maggiori matematici della storia. A lui si devono fondamentali contributi alla *trigonometria*.

Scrisse numerose opere e fra quelle di natura più pratica sono le seguenti:

- Un trattato di aritmetica applicata destinato a amministratori e uomini d'affari (un precursore dei numerosi *trattati di abaco* compilati in Italia, a partire dal basso Medioevo, per mercanti, banchieri e artigiani);
- Un trattato di geometria ad uso degli artigiani ("*Su quelle parti di geometria necessarie agli artigiani*").

In questa seconda opera Abu'l – Wafa spiegò le costruzioni geometriche piane: poligoni regolari, inscrizione e circoscrizione di poligoni dentro o su circonferenze, divisione di figure in parti uguali e unione di poligoni in altri poligoni più grandi.

Le costruzioni di Abu'l – Wafa richiedevano solo l'uso della riga *non graduata* e del compasso ad apertura *fissa*, con poche eccezioni.

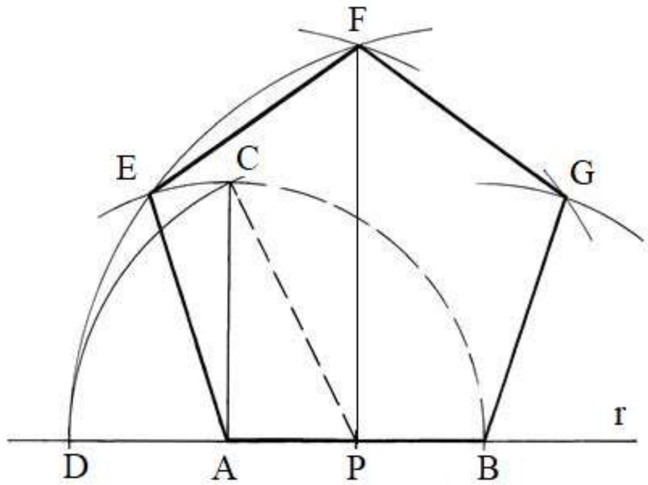
L'uso del compasso ad apertura fissa eliminava gli errori dovuti alla reciproca mobilità delle due aste: solo nei tempi moderni, l'invenzione del *balaustrino* e del *balaustrone* controllati da una vite senza fine ha permesso di bloccare le aste sull'apertura voluta. Un compasso di questo tipo era necessario agli artigiani che lavoravano i metalli: essi avevano necessità di tracciare circonferenze o archi con i solchi evidenti. Per impedire l'arbitraria apertura del compasso provocata dal divaricamento delle aste causata dalla pressione manuale su di esse, almeno fin dal XVII secolo furono introdotti modelli con apertura regolabile. Nei secoli precedenti erano usati grandi *compassi a settore*, con apertura controllata.

Abu'l – Wafa descrisse sia metodi esatti che approssimati.

Pentagono dato il lato

La costruzione che è qui descritta è quella del pentagono dato il lato.

Tracciare una retta orizzontale, *r*:



Su di essa fissare il primo lato, AB, e il suo punto medio, P.

Dal punto A innalzare la perpendicolare alla retta *r*.

Fare centro nel punto A e con raggio AB disegnare un arco da B fino a intersecare la perpendicolare in un punto, C.

Collegare i punti P e C. Fare centro in P e con raggio PC tracciare un arco da C fino a tagliare la retta *r* in un punto, D.

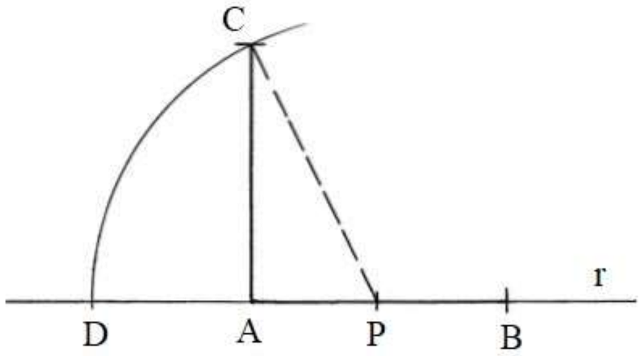
Con raggio DB fare centro nei punti A e B e disegnare due archi per stabilire i punti E e F .

Completare la costruzione facendo centro in B con raggio BA per determinare il vertice G.

AEFGB è il pentagono regolare cercato.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Approfondiamo la conoscenza della costruzione. Lo schema che segue descrive il suo significato.



ACP è un triangolo rettangolo: il cateto AP è lungo *metà* di AB e quello AC è lungo quanto il lato AB.

L'ipotenusa CP è lunga:

$$CP = \sqrt{(AP^2 + AC^2)} = \sqrt{[(AB/2)^2 + AB^2]} = \sqrt{(5/4 * AB^2)} = \sqrt{5} * AB/2.$$

Il segmento CP è lungo quanto DP.

La lunghezza di DB è:

$$DB = DP + PB = CP + PB = \sqrt{5} * AB/2 + AB/2 = AB * (\sqrt{5} + 1)/2.$$

L'espressione $(\sqrt{5} + 1)/2$ vale 1,618… ed è il *numero aureo* Φ.

Il rapporto fra le lunghezze dei segmenti DB e AB (e cioè fra una *diagonale* e un *lato* di un pentagono regolare) è:

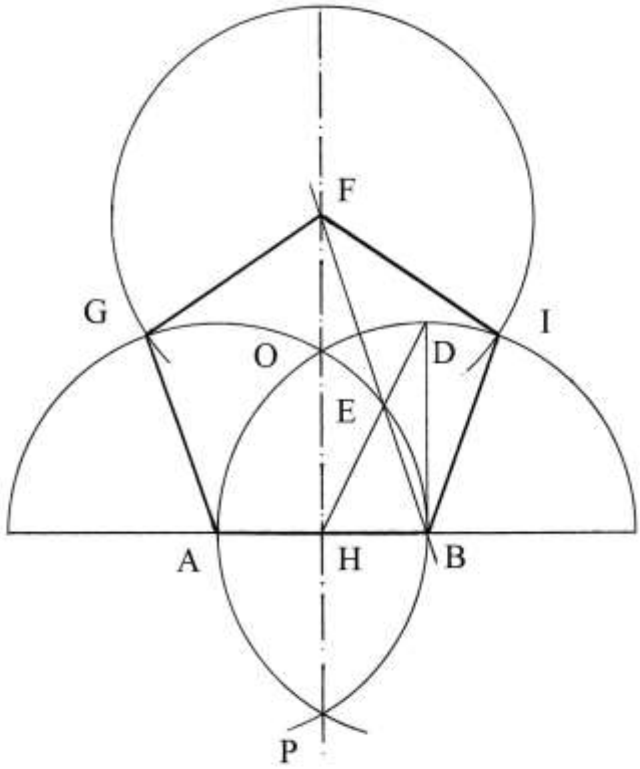
$$DB : AB = AB * (\sqrt{5} + 1)/2 : AB = (\sqrt{5} + 1)/2 : 1 = \phi : 1.$$

La costruzione di Abu'l Wafa è esatta.

Pentagono dato il lato

Abu'l – Wafa mise a punto dei metodi geometrici in grado di soddisfare un'esigenza degli artigiani: disegnare delle figure usando una sola apertura di compasso. L'esempio che segue si riferisce al pentagono.

Disegnare il lato orizzontale AB, prolungare verso destra e verso sinistra e determinare il suo punto medio (con la costruzione dell'asse del segmento realizzata con apertura uguale a AB e passante per i punti O e P). Tracciare l'asse passante per H e la parallela passante per B. Viene così individuato il punto D.



Tracciare il segmento HD che taglia l'arco di destra nel punto E.

Disegnare una semiretta uscente da B e passante per il punto E: sull'asse di AB essa intercetta il punto F. Questo ultimo punto è il terzo vertice del pentagono. Con apertura uguale a AB, fare centro in F: sono determinati i punti G e I.

Il poligono AGFIB è il pentagono costruito a partire dal lato AB con un'*unica apertura di compasso*.

Il pentagono è *equilatero* ma non *equiangolo*, per cui il poligono non è regolare.

Le ampiezze dei cinque angoli interni hanno ampiezze diverse:

* GAB = ABI ≈ 110°.
* FGA = FIB ≈ 106°.
* GFI ≈ 108°.

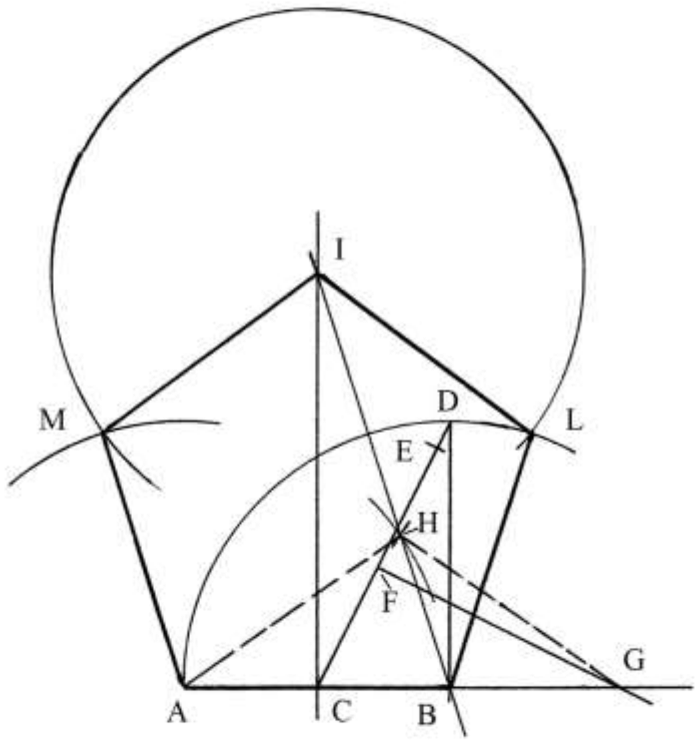
I valori sono arrotondati all'intero più vicino.

<u>Pentagono quasi esatto</u>

La costruzione che è spiegata con la figura che segue fu proposta da Abu'l – Wafa nel rispetto della consueta condizione: l'uso di un compasso ad *apertura fissa*.

Tracciare una retta orizzontale e con l'*apertura fissa* stabilire i due punti A e B: il segmento AB è il primo lato del pentagono da costruire. Prolungare AB verso destra.

Elevare la perpendicolare a AB nel punto B:



Determinare il punto medio di AB: è C; innalzare da questo punto la perpendicolare a AB.

Fare centro in B e, con raggio BA, tracciare un arco che taglia la perpendicolare in un nuovo punto: è D. Collegare C con D.

Con la stessa apertura BA, fare centro in C e disegnare un arco che interseca CD in un punto, E.

Stabilire il punto medio di CE: è F.

Per il punto F condurre la perpendicolare a CE: essa incontra la retta orizzontale nel punto G.

Con centro in A e in G (e con stessa *apertura fissa* del compasso, BA) disegnare due archi che si tagliano in un nuovo punto, H: il triangolo AHG è isoscele perché i lati AH e HG hanno uguale lunghezza (per costruzione).

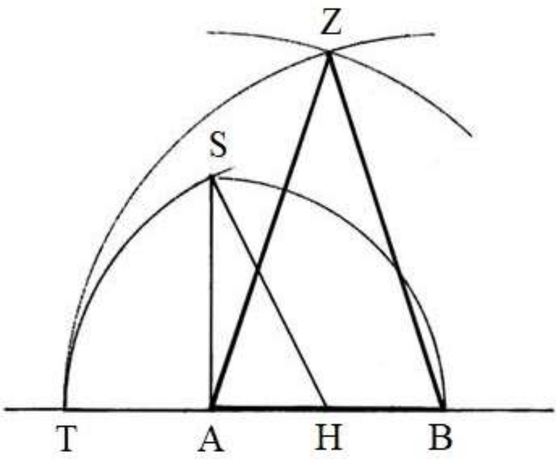
Tracciare una retta passante per i punti B e H. Fare centro in H e determinare il punto I sulla retta passante per B e H. Questo nuovo punto è il terzo vertice del pentagono.

Disegnare gli archi occorrenti per completare il pentagono facendo centro nei punti B, I e A.

AMILB è il pentagono *quasi* esatto costruito con una sola apertura di compasso, uguale alla lunghezza del lato.

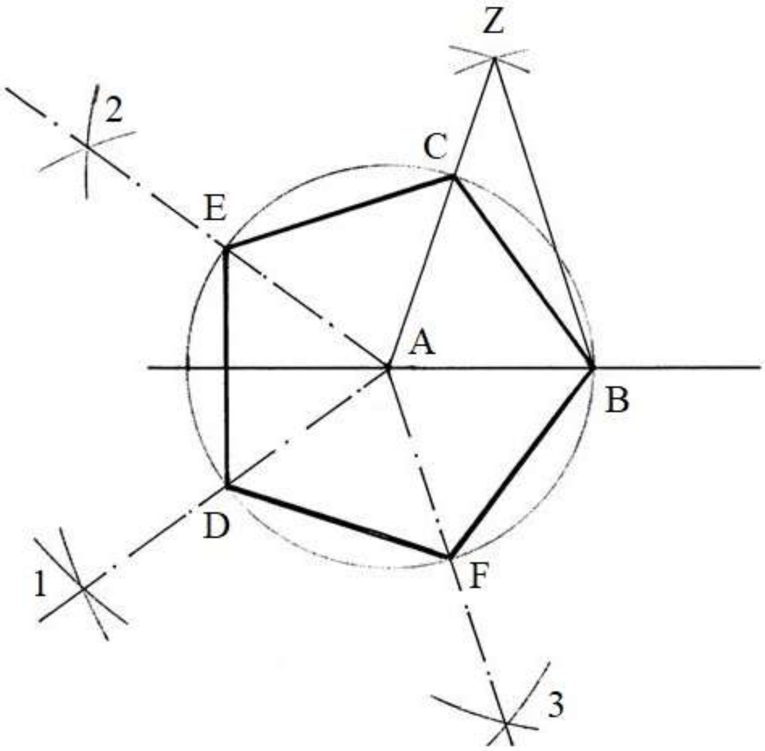
<u>Pentagono inscritto</u>

Abu'l – Wafa propose una costruzione del pentagono inscritto a partire dalla lunghezza del raggio del cerchio circoscritto:



Tracciare una retta e fissarvi due punti, A e B, a distanza AB uguale al raggio del cerchio.
Determinare il punto medio di AB: è H. Dal punto A elevare la perpendicolare a AB.
Con raggio AB, fare centro in A e disegnare un arco da B fino a intersecare in S la perpendicolare.
Collegare i punti S e H. Fare centro nel punto H e, con raggio HS, tracciare un arco da S fino a tagliare la retta orizzontale in un nuovo punto, T.
Con apertura BT, fare centro in nei punti A e B e disegnare due archi che si incontrano in un punto, Z: il triangolo AZB è un *triangolo aureo*.
Abu'l – Wafa usò la costruzione del *triangolo aureo* per ricavare il pentagono.
Il metodo qui descritto richiede l'uso del compasso a apertura variabile, perché sono impiegati tre raggi diversi di differente lunghezza: AB, HS e BT.

Nella figura che segue è utilizzato il triangolo aureo AZB:



Fare centro in A e tracciare la circonferenza di raggio AB. Sul raggio AB riprodurre il triangolo aureo AZB.

Il lato AZ taglia la circonferenza in un punto, C: la corda CB è un lato del pentagono inscritto.

I rimanenti vertici del pentagono possono essere ottenuti sia riportando la lunghezza di CB, sia dividendo in due e poi in quattro parti uguali l'*angolo convesso* CAB.

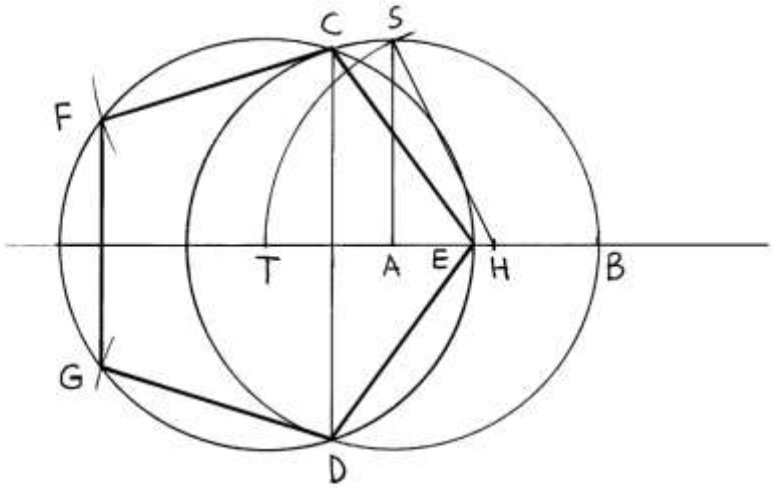
Il poligono CBFDE è il pentagono inscritto.

Pentagono inscritto

La costruzione descritta nella figura che segue è una variante della precedente.

Su di una retta orizzontale, fissare un punto, A, e facendo centro in questo punto tracciare una circonferenza con raggio AB. Elevare nel punto A la perpendicolare al segmento AB. Fissare il punto medio di AB: è H.

Collegare i punti H e S.



Fare centro in H e, con raggio HS, disegnare un arco da S fino a tagliare in T la retta orizzontale.

Fare centro nel punto T e, con raggio AB, tracciare una circonferenza che interseca la prima circonferenza in due punti, C e D, e il segmento AB nel punto E.

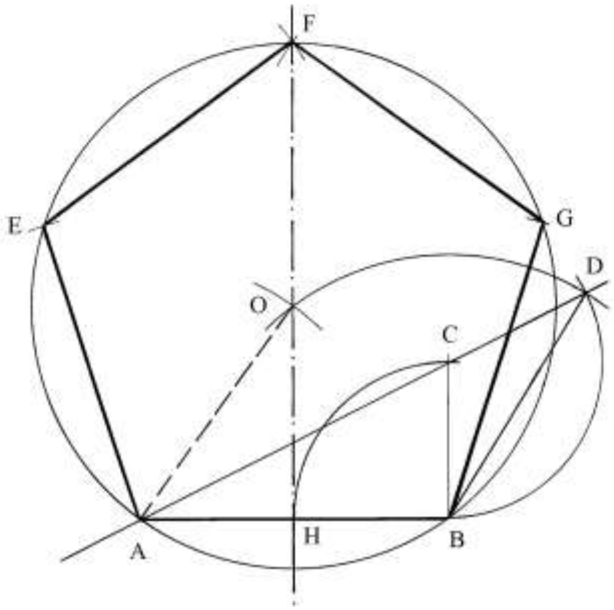
Le corde CE e ED sono i primi due lati del pentagono inscritto: riportando la lunghezza di una delle corde sulla seconda circonferenza sono fissati i punti F e G.

CEDGF è il pentagono cercato, che è regolare.

ALTRE COSTRUZIONI ESATTE

Pentagono dato il lato – metodo di Bonnycastle

La costruzione è dovuta al matematico inglese John Bonnycastle (1751-1821) che la propose nel suo manuale "*Introduction to mensuration and practical geometry*".



AB è il primo lato del pentagono: fissare il suo punto medio, H, e innalzare la perpendicolare a partire da B.

Fare centro in B e con raggio BH tracciare un arco da H fino a tagliare la perpendicolare nel punto C.

Condurre una retta passante per i punti A e C. Fare centro in C e con raggio CB (=BC =BH) disegnare un arco da B fino a tagliare in D la retta passante per A e per C.

Collegare B con D.

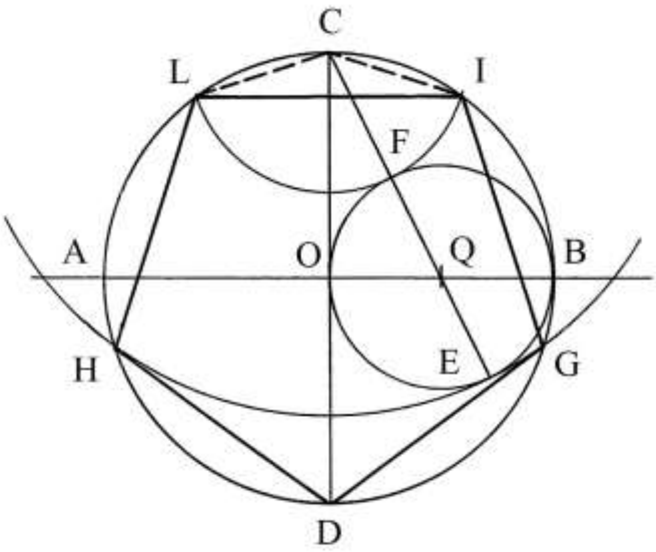
Con raggio BD fare centro in B e in A e tracciare due archi che si intersecano nel punto O, centro del cerchio circoscritto al pentagono.

Riportare la lunghezza di AB sulla circonferenza: AEFGB è il pentagono.

Pentagono inscritto (altre due costruzioni moderne)

Le due costruzioni che seguono sono varianti del metodo di Tolomeo.

Disegnare la circonferenza con centro in O e tracciare i due diametri fra loro perpendicolari, AB e CD:



Dividere in due parti il raggio OB: il punto Q ne è il medio. Fare centro in Q e con raggio QO disegnare la circonferenza che in B risulta tangente internamente alla prima.

Tracciare una linea passante per C e Q, fino a intersecare la circonferenza con centro in Q nei punti E e F.

Con centro in C e raggio CE disegnare un arco di circonferenza che individua i punti G e H sulla prima circonferenza.

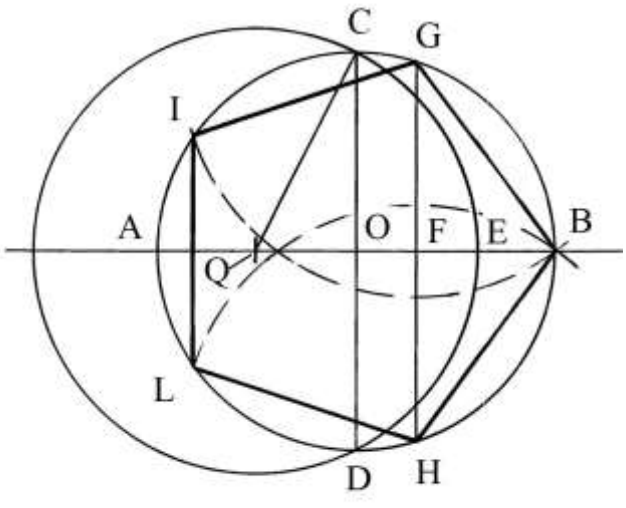
Sempre facendo centro in C, con raggio CF tracciare l’arco che intercetta i punti I e L.

D, H, L, I e G sono i vertici del pentagono regolare inscritto.

LC e CI sono due corde disegnate tratteggiate: esse sono i primi due lati del *decagono* regolare inscritto nello stesso cerchio.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Disegnare la circonferenza con centro in O e tracciare i due diametri fra loro perpendicolari, AB e CD:



Fissare il punto medio del raggio OA: è Q.

Disegnare il segmento QC e tracciare la circonferenza con centro in Q e raggio QC.

Determinare il punto medio F del segmento OE e per esso condurre la parallela al diametro CD; la linea intercetta i punti G e H sulla circonferenza: essi sono due vertici del pentagono.

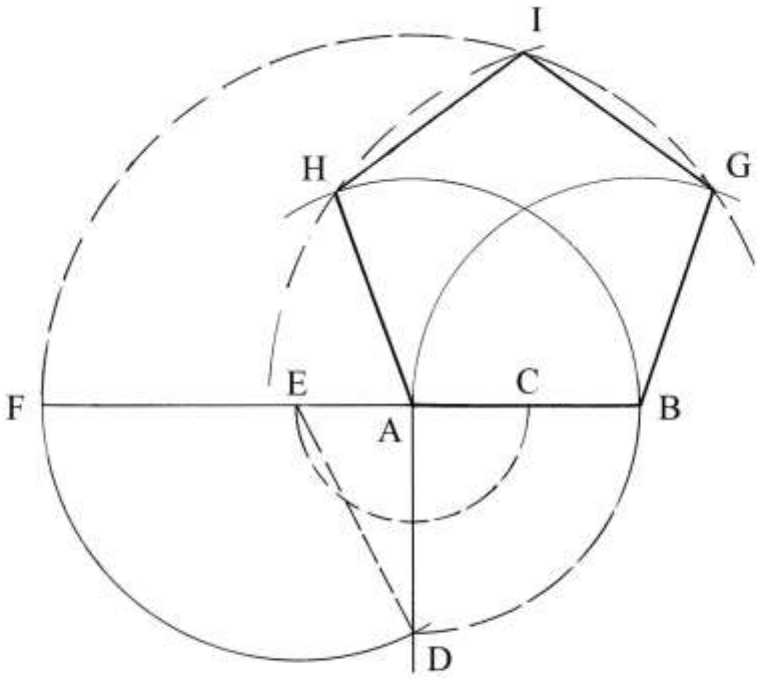
Con raggio BG fare centro in G e in H e individuare i punti I e L.

BHLIG è il pentagono regolare inscritto.

<u>Pentagono regolare dato il lato – metodo di Maor – Jost</u>

La costruzione che segue è presente nel testo di Maor e Jost citato in bibliografia.

AB è il primo lato del pentagono e C è il suo punto medio:



Prolungare AB verso sinistra e dal punto A abbassare la perpendicolare.

Fare centro in A e con raggio AB disegnare l'arco da B a D. Sempre con centro in A tracciare una semicirconferenza di raggio AC, da C fino a stabilire il punto E.

Collegare E con D.

EAD è un triangolo rettangolo con i cateti lunghi *convenzionalmente*:

* AD = 1;
* AE = ½.

L'ipotenusa ED è lunga:

$ED^2 = AD^2 + AE^2 = 1^2 + (1/2)^2 = 5/4$ e

$ED = \sqrt{(5/4)} = (\sqrt{5})/2$.

Fare centro in E con raggio ED e disegnare l'arco da D a F.

Il segmento AF è lungo:

$AF = AE + EF = AE + ED = ½ + (\sqrt{5})/2 = (\sqrt{5} + 1)/2 \approx 1{,}618\ldots = \phi$.

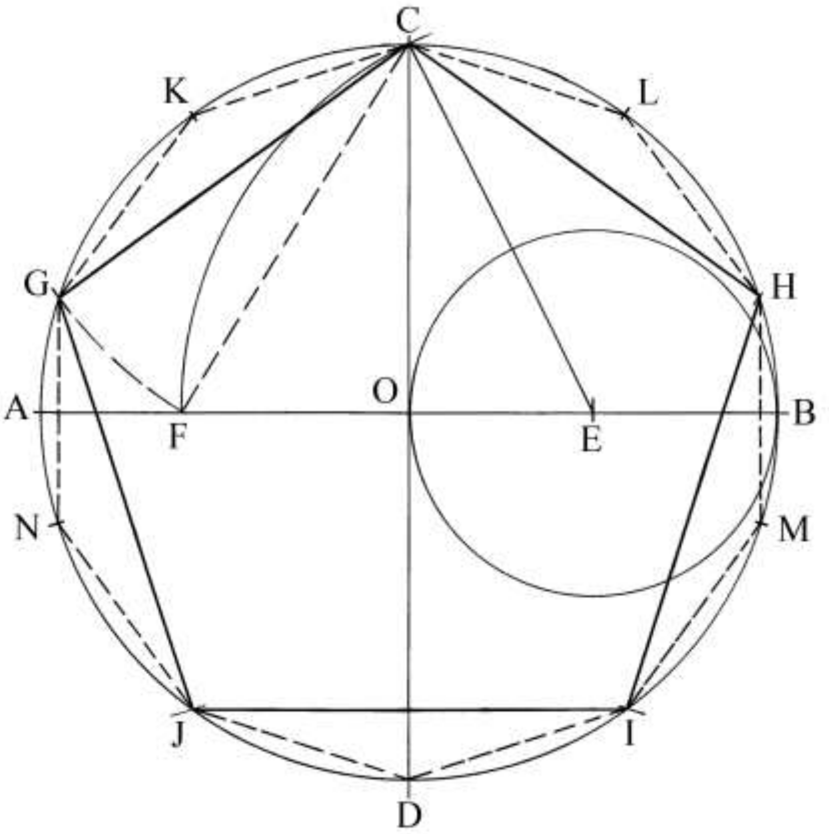
AF è la lunghezza delle diagonali del pentagono che ha lati lunghi quanto AB.

Fare centro in A e in B e con raggio AB tracciare due archi.

Con raggio AF fare centro in A e in B e disegnare due archi che tagliano i due precedenti nei punti G e H e si incrociano in I: G, H e I sono i tre vertici mancanti del pentagono regolare AHIGB.

Lunghezze dei lati del pentagono e del decagono inscritti

Disegnare la circonferenza di centro O e raggio *R* e i diametri perpendicolari AB e CD.



Fissare il punto medio del raggio OB: è E.

Fare centro in E e tracciare una circonferenza di raggio EO = EB = R/2: essa è tangente internamente in B alla prima circonferenza.

Disegnare il segmento CE.

Con centro in E e raggio EC tracciare l'arco da C fino a incontrare in F il raggio OA.

Il segmento CF è lungo quanto il lato del pentagono inscritto: a partire da C riportare la sua lunghezza sulla la circonferenza per ottenere il pentagono regolare inscritto CHIJG.

A partire dai vertici del pentagono riportare sulla circonferenza la lunghezza del segmento OF, che è uguale a quella del decagono inscritto: è così stabilito il decagono regolare inscritto CLHMIDJNGK.

Calcoliamo la lunghezza dei lati del pentagono e del decagono.

CE è l'ipotenusa del triangolo rettangolo OCE ed è lunga:

$CE^2 = OC^2 + OE^2 = R^2 + (R/2)^2 = 5/4 * R^2$, da cui

$CE = (\sqrt{5})/2 * R$.

Anche FCO è un triangolo rettangolo. Il suo cateto FO è lungo:

$FO = FE - OE = CE - OE = (\sqrt{5})/2 * R - R/2 = (\sqrt{5} - 1)/2 * R$.

La lunghezza dell'ipotenusa CF è data da:

$CF^2 = FO^2 + OC^2 = [(\sqrt{5} - 1)/2]^2 * R^2 + R^2 = (5 - \sqrt{5})/2 * R^2$, da cui

$$FC = R * \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}}$$

Come anticipato in precedenza il segmento $FO = (\sqrt{5} - 1)/2 * R$ è la lunghezza del lato del decagono.

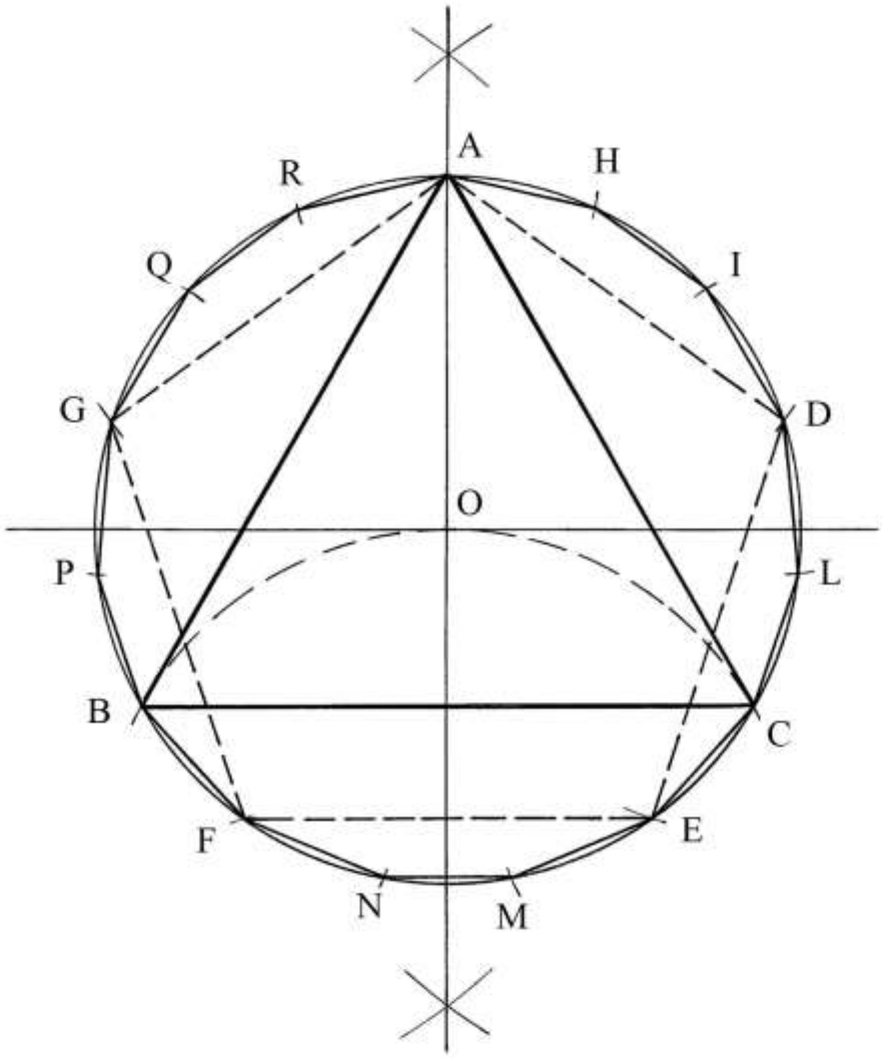
L'espressione $(\sqrt{5} - 1)/2 \approx 0{,}618\ldots$ rimanda alla *sezione aurea*.

<u>La costruzione del pentadecagono</u>

Il pentadecagono è il poligono che contiene 15 lati.

Il pentadecagono inscritto è disegnabile per via *indiretta*, dopo aver tracciati nella stessa circonferenza il triangolo equilatero ABC e il pentagono ADEFG (ovviamente entrambi inscritti).

Le corde che congiungono le coppie di vertici i vertici B-F e CE sono i primi due lati del pentadecagono AHIDLCEMNFBPQR:

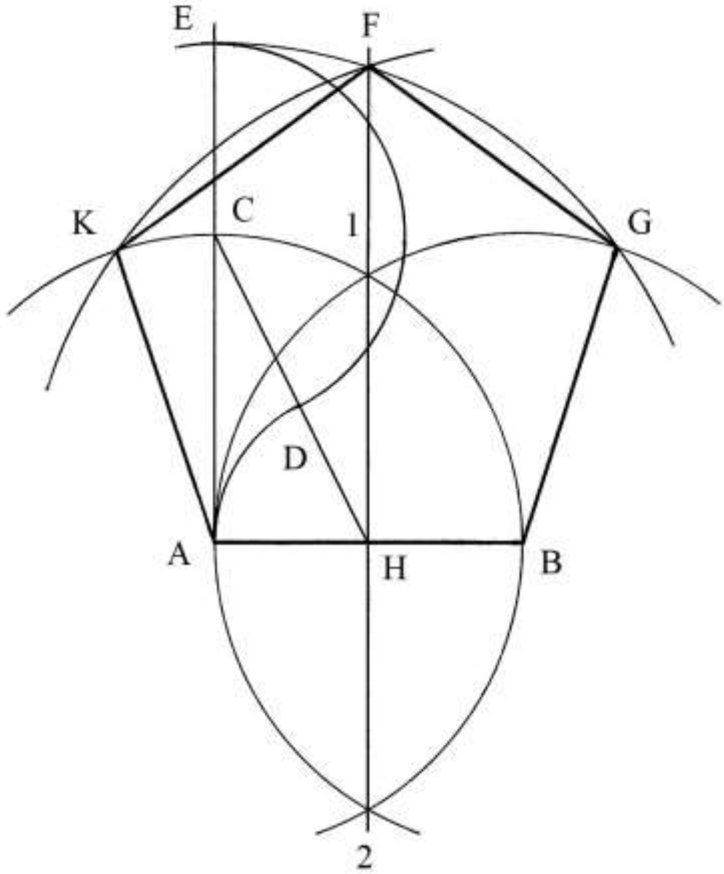


COSTRUZIONI DEL PENTAGONO CON LA SEZIONE AUREA

Pentagono regolare dato il lato

AB è il consueto lato orizzontale del pentagono regolare da costruire: non è necessario tracciare la circonferenza in cui risulterebbe inscritto.

Fare centro in A e in B con raggio AB, e disegnare due archi che si intersecano nei punti 1 e 2:



Collegare questi due punti con una lunga linea che è l'asse del segmento AB: viene così fissato il punto medio di questo ultimo, H.

Dal punto A tracciare verso l'alto una linea verticale parallela all'asse 1-H-2: essa taglia l'arco con centro in A in un nuovo punto, C. Connettere con un segmento i punti H e C.

Fare centro in H e, con raggio HA, disegnare un arco da A fino a intersecare in D il segmento HC.

Con centro in C, e raggio CD, tracciare un arco da D fino a tagliare la linea passante per A e C in un nuovo punto, E.

Il triangolo AHC è rettangolo e ha le lunghezze dei cateti AC e AH nel rapporto 2:1.

Il segmento CD è la *sezione aurea* dell'ipotenusa CH.

Il segmento CE è lungo quanto questa sezione aurea (CD).

AE è la lunghezza della *diagonale* del pentagono. Fare centro in A e, con raggio AE, tracciare un arco da E fino a tagliare l'asse di AB in un punto, F, e fissare il punto G, entrambi vertici del pentagono.

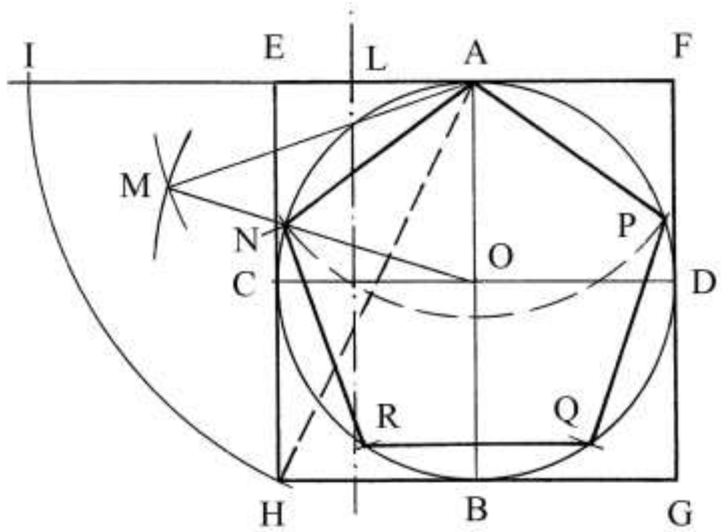
Con la stessa apertura AE fare centro in B e determinare il punto K.

Il poligono AKFGB è il pentagono regolare cercato.

Pentagono inscritto (costruzione moderna)

Disegnare una circonferenza con centro in O e i due diametri fra loro perpendicolari, AB e CD.

Costruire il quadrato EFGH, circoscritto al cerchio:



Collegare A con H.

Con centro in A e raggio AH disegnare l'arco da H fino a individuare il punto I, posto sul prolungamento del lato EF.

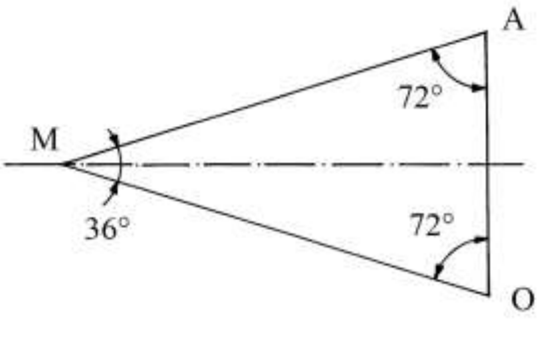
Determinare il punto medio del segmento FI: è L.

Con raggio LF, fare centro in A e in O: l'incrocio dei due archi è il punto M.

Il punto N è l'intersezione fra il segmento OM e la circonferenza: esso è un vertice del pentagono.

Riportare la lunghezza della corda AN sulla circonferenza, a partire da A e da N: i punti A, P, Q, R e N sono i vertici del pentagono inscritto.

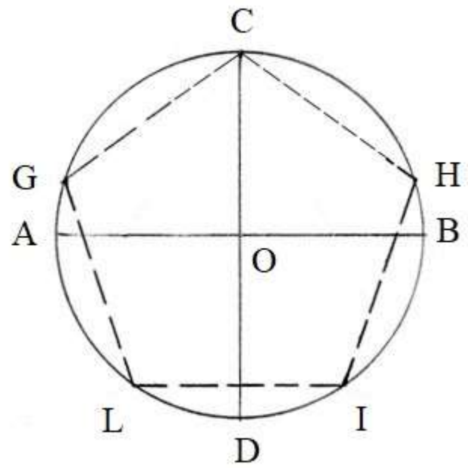
La costruzione è implicitamente basata su quel triangolo aureo AMO, che può essere disegnato in precedenza:



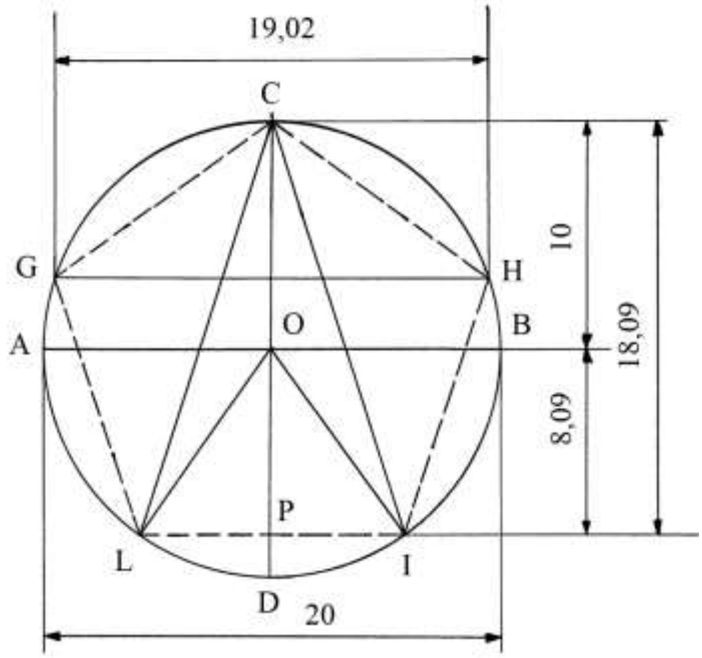
- APPROFONDIMENTO -

Le misure approssimate in un pentagono regolare

Nella figura che segue è disegnato il pentagono regolare LGCHI, inscritto in un cerchio di centro O e raggio *convenzionalmente* lungo 10:



Nella successiva figura, il pentagono è completato con l'indicazione delle lunghezze dei segmenti:



Il segmento CP è l'altezza del triangolo aureo CLP e del pentagono regolare ed è formato da:

CP = CO + OP ≈ 10 + 8,09 ≈ 18,09.

La diagonale GH è lunga ≈ 19,02.

Vediamo l'origine di questi dati.

Nel triangolo rettangolo CPL, l'ipotenusa CL è una diagonale del pentagono (lunga come quella CP e, come appena scritto, ≈ 19,02) e il cateto LP è lungo metà del lato del pentagono.

Il segmento OP è l'*apotema* del pentagono e quello OC è il raggio della circonferenza, per cui la precedente espressione può essere scritta come

CP = CO + OP = raggio + apotema ≈ 10 + 8,09 ≈ 18,09.

La lunghezza dell'apotema OP = *a* è legata a quella del raggio del cerchio circoscritto OL = OI = *r* da un rapporto costante, indicato con il *numero fisso f*:

f ≈ 0,809…   e

a = f * r ≈ 0,809 * 10 ≈ 8,09.

L’apotema di un pentagono regolare è lungo, approssimativamente, 0,688 volte il lato del poligono:

$OP \approx 0{,}688 * LI$.

La lunghezza del lato del pentagono (LI) è legata a quella del raggio (OA) della circonferenza circoscritta dalla relazione approssimata:

$LI \approx 1{,}176 * OA \approx 1{,}176 * 10 \approx 11{,}76$.

Ne deriva che l’apotema OP è lungo:

$OP \approx 0.688 * 1{,}176 * OA \approx 0.688 * 1{,}176 * 10 \approx 8{,}09$.

Il rapporto fra la lunghezza della diagonale (GH) e quella del lato (LI) è il valore approssimato di ϕ:

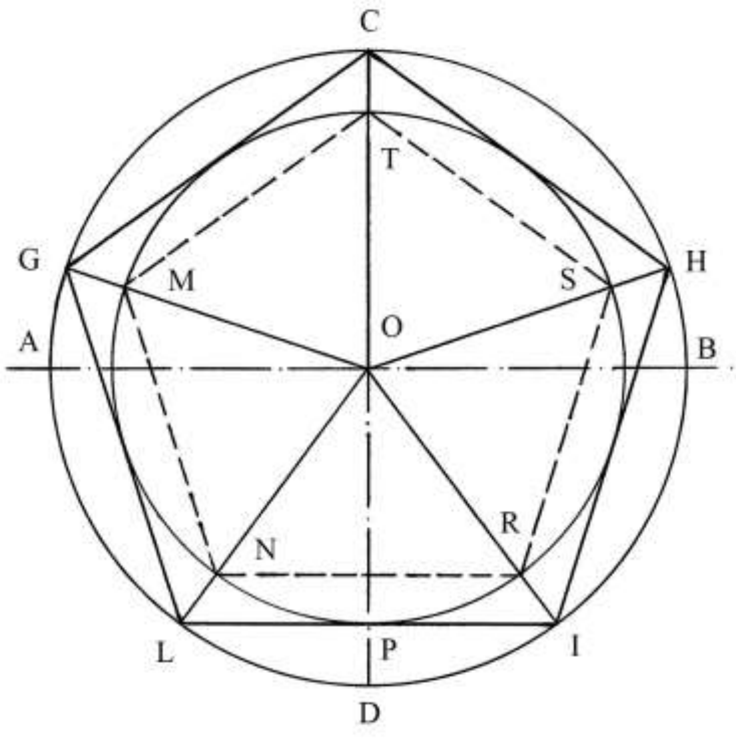
$GH/LI \approx 19{,}02/11{,}76 \approx 1{,}61734 \approx 1{,}619\ldots = \phi$.

%%%%%%%%%%%%%%%%%

Lo schema che segue presenta due pentagoni concentrici inscritti in due cerchi concentrici. Il punto P è il punto medio del lato LI: OP è l’altezza del triangolo isoscele OLI ed è l’*apotema* del pentagono CHILG.

A sua volta, l’apotema OP è il raggio del cerchio interno, tangente nei punti medi dei lati di CHILG.

TSRNM è il pentagono regolare interno.



%%%%%%%%%%%%%%%%%

Con i dati forniti relativamente alla precedente costruzione, possiamo determinare le misure approssimate in un pentagono regolare inscritto di cui sia nota soltanto la lunghezza del lato:

lato LI = 10.

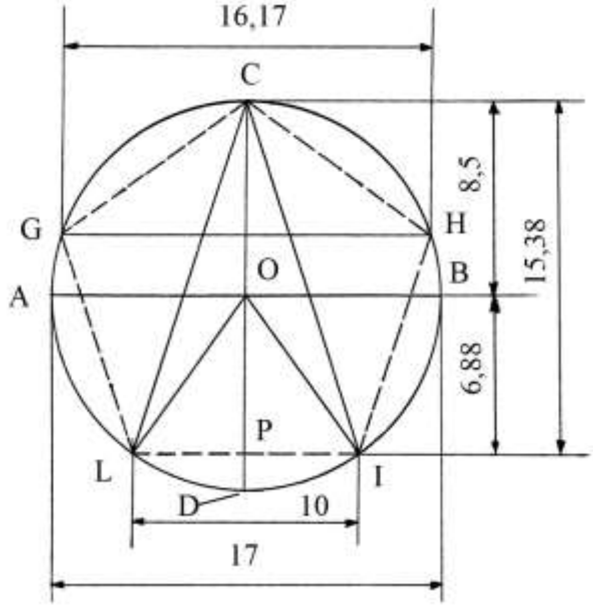
L'apotema OP è lunga:

$OP \approx 0{,}688 * LI \approx 0{,}688 * 10 \approx 6{,}88$.

Dato che il rapporto fra le lunghezze del lato del pentagono e del raggio della circonferenza è dato da

lato ≈ 1,176 * raggio è possibile effettuare l'operazione inversa:

raggio (OA) ≈ LI/1,176 ≈10/1,176 ≈ 8,50.



Il diametro è lungo:

$AB = 2 * OA \approx 2 * 8{,}50 \approx 17$.

Il segmento CP è lungo:

$CP = CO + OP \approx 8{,}50 + 6{,}88 \approx 15{,}38$.

La diagonale CL è l'ipotenusa del triangolo rettangolo CPL; la sua lunghezza approssimata è data da:

$CL = \sqrt{(PL^2 + CP^2)} = \sqrt{[(10/2)^2 + 15{,}38^2]} \approx \sqrt{(25 + 236{,}5444)} \approx \sqrt{(261{,}5444)} \approx$
$\approx 16{,}17$.

Pure la diagonale GH è lunga ≈ 16,17.

Il rapporto fra la lunghezza della diagonale (GH = CL) e quella del lato (LI) è il valore approssimato di ϕ:

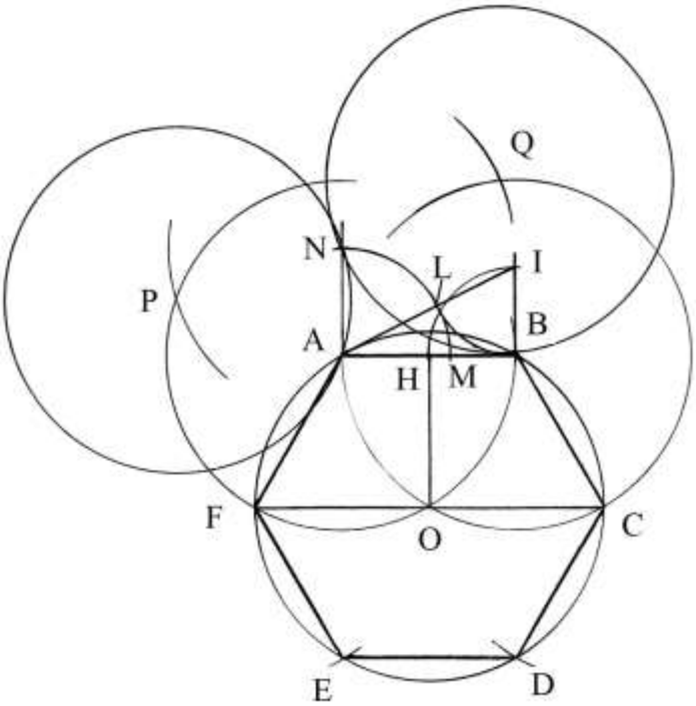
$GH/LI = CL/LI \approx 16{,}17/10 \approx 1{,}617 \approx 1{,}618\ldots = \phi$.

- -

Pentagono, esagono e decagono regolari inscritti

Nel XIII libro degli *Elementi* di Euclide è dimostrata un'interessante proporzione: tre poligoni regolari (pentagono, esagono e decagono) inscritti in tre cerchi, di raggio uguale, formano un triangolo rettangolo ANB con cateti e ipotenusa così legati:

- Il cateto AB è un lato dell’esagono.
- Il cateto AN è un lato del decagono.
- L’ipotenusa NB è un lato del pentagono.



In un decagono regolare inscritto, la lunghezza del lato è legata a quella del raggio della circonferenza dal *rapporto aureo* ϕ:

raggio : lunghezza lato = ϕ : 1

lunghezza lato = raggio/ϕ.

La tabella che segue riassume i dati relativi ai tre poligoni:

Poligono regolare	Numero lati	Lunghezza del lato
Pentagono	5	≈ 1,176 * raggio cerchio
Esagono	6	1 * raggio cerchio
Decagono	10	≈ 0,618 * raggio cerchio

La precedente figura descrive la costruzione.

Disegnare l’esagono regolare inscritto nel cerchio di centro O: è ABCDEF.

Determinare il punto medio del lato AB: è H. Elevare le perpendicolari al segmento AB nei due estremi A e B.

Fare centro in B e, con raggio BH, tracciare un arco da H fino a stabilire il punto I. Disegnare il segmento AI.

Con centro in I e raggio IB (= BH), tracciare un arco da B fino a tagliare AI in un nuovo punto, L. Fare centro in A e, con raggio AL, disegnare un quarto di circonferenza che fissa i punti M e N.

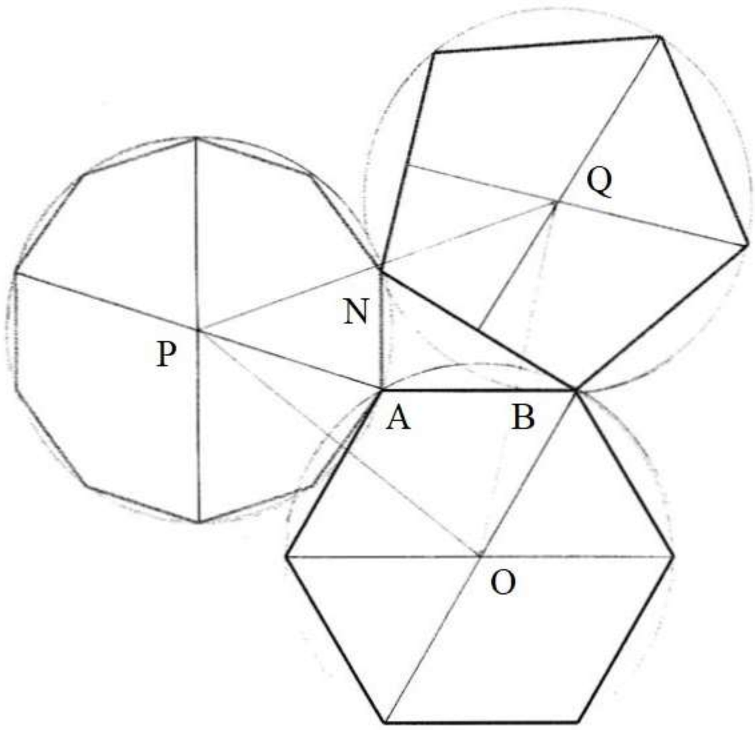
Il segmento AN (= AM) è la *sezione aurea* del lato AB. In un qualsiasi esagono regolare inscritto, il lato del poligono ha la stessa lunghezza del raggio del cerchio: ne consegue che il segmento AN è anche la *sezione aurea* del raggio OA.

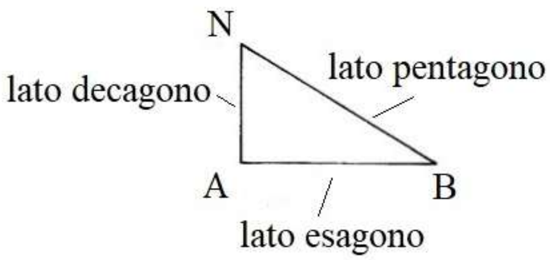
AN è la lunghezza del lato del decagono regolare inscritto in una circonferenza di raggio uguale a AB (= OA).

NB è l’ipotenusa del triangolo rettangolo ANB ed è un lato del pentagono regolare inscritto in un cerchio di raggio uguale a AB (= OA).

Con apertura uguale a AB, fare centro in A e in N: i due archi tracciati si intersecano in un punto, P, che è il centro del cerchio circoscritto al decagono regolare.

Con la stessa apertura (AB) fare centro in N e in B e disegnare due archi che si tagliano in un nuovo punto, Q, centro del cerchio circoscritto al pentagono regolare:





Tracciando i lati dei due poligoni, decagono e pentagono, si ottiene la costruzione descritta nella figura.

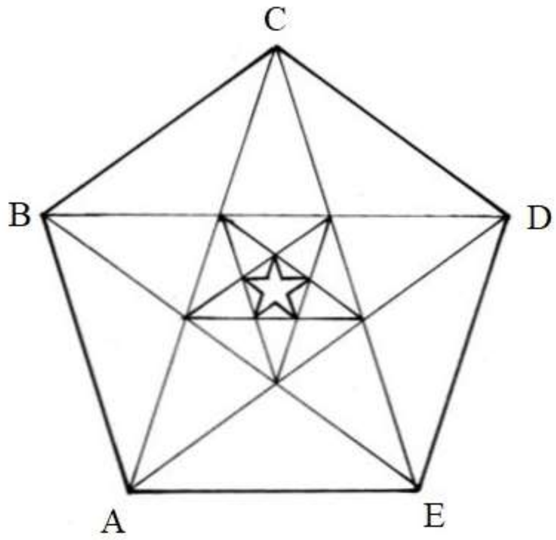
Chiaramente, NAB è un triangolo rettangolo *cosiddetto pitagorico*:

$$BN^2 = AB^2 + AN^2.$$

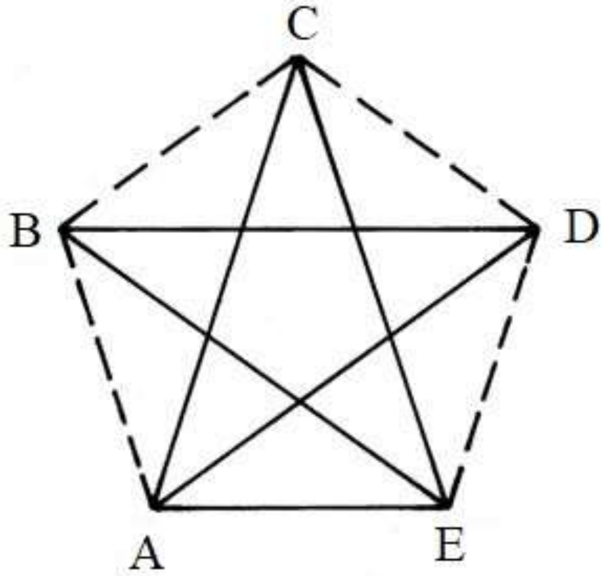
TASSELLAZIONI PENTAGONALI

Pentagono e pentagramma

In un pentagono sono inscrivibili un grande numero di pentagoni e *pentagrammi*:



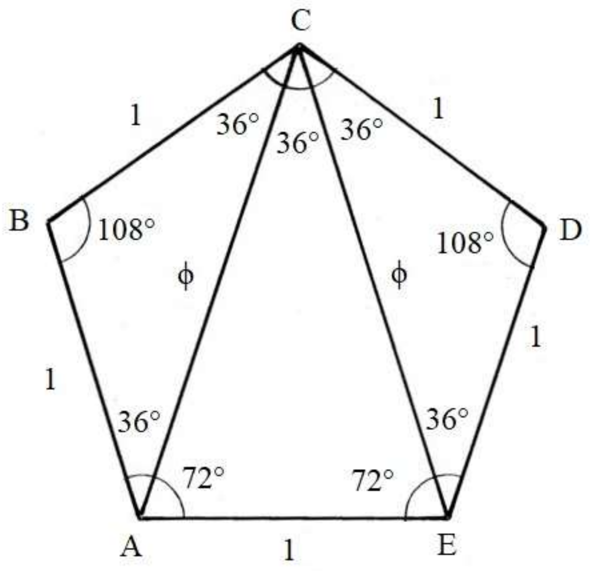
Un *pentagramma* è un *poligono intrecciato* inscritto in un pentagono (ABCDE): è la stella a 5 punte ACEBD.



Tutti i lati del pentagramma hanno uguale lunghezza, uguale a quella della diagonale del pentagono da cui derivano.

Triangolo aureo e gnomone aureo

Nella figura che segue, il pentagono regolare ABCDE è diviso in *tre* triangoli isosceli per mezzo delle diagonali AC e CE:



I triangoli ABC e CDE hanno le stesse dimensioni.

Se il lato del pentagono è *convenzionalmente* lungo 1, le sue diagonali AC e CE sono lunghe ϕ.

Il triangolo ACE è chiamato *triangolo aureo*.

Questo triangolo isoscele ha un rapporto fra le lunghezze del lato (AC) e della base (AE) dato da:

AC : AE = CE : AE = ϕ : 1.

Il triangolo ABC è noto come *gnomone aureo*: anche CDE è uno *gnomone aureo*.

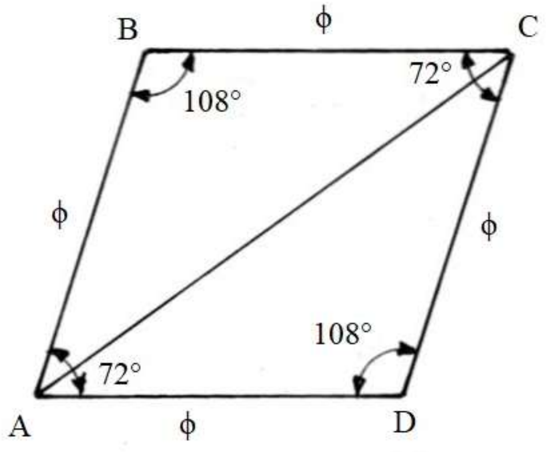
I due gnomoni sono caratterizzati da una proprietà: il rapporto fra le lunghezze dei lati è:

AC : AB = AC : BC = CE : CD = CE : DE = ϕ : 1

Aquiloni e dardi

Il matematico inglese Roger Penrose (nato nel 1931) presentò nel 1974 degli schemi di intarsio in grado di ricoprire un piano con elementi dotati di *simmetria quintupla* derivati dal pentagono.

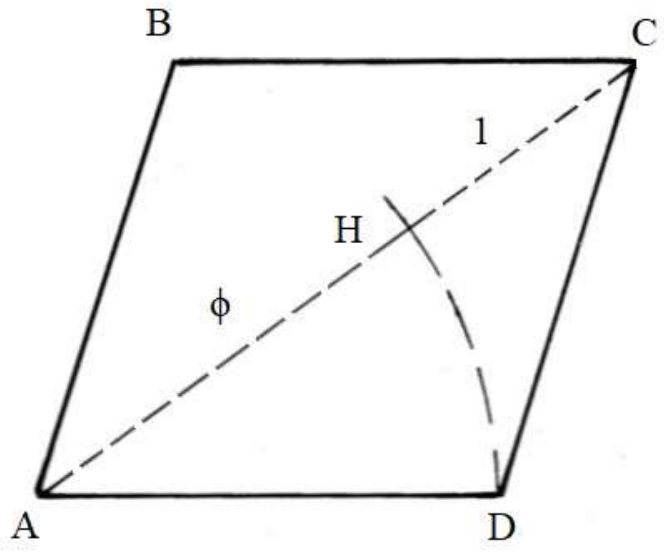
Il poligono che ha dato origine alle forme capaci di riempire il piano è un particolare *rombo*:



Il lato del rombo ABCD è convenzionalmente lungo ϕ. Le coppie di angoli interni opposti del rombo hanno ampiezze di 72° e di 108°.

Disegnare la diagonale maggiore AC.

Con il compasso fare centro nel punto A: con raggio AD tracciare un arco da D fino a intersecare AC in un punto, H:



Il segmento AH è lungo quanto AD e cioè ϕ.

Il segmento HC è lungo 1 e la diagonale AC è lunga

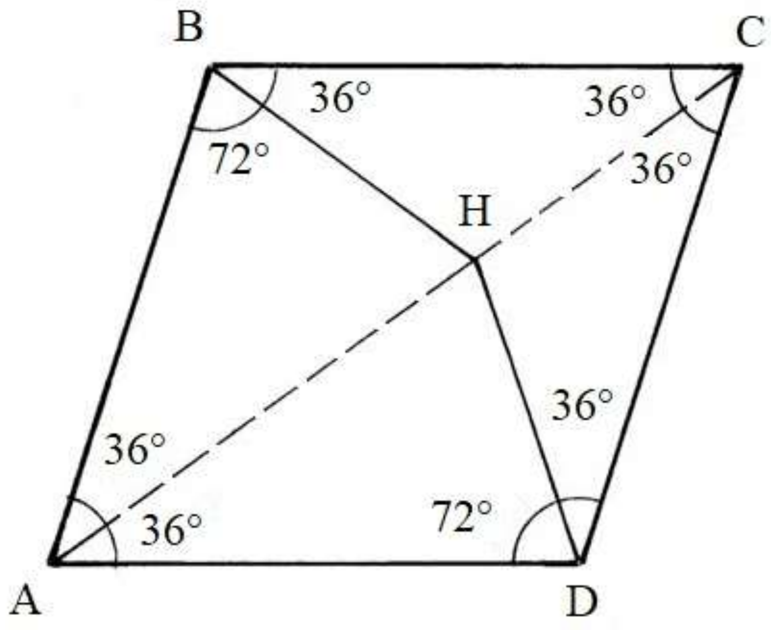
$$AC = AH + HC = \phi + 1 = \phi^2.$$

I triangoli ABC e ACD hanno le stesse dimensioni e sono due *gnomoni aurei*, come quelli (ABC e CDE) già incontrati nella precedente divisione del pentagono regolare in tre triangoli isosceli.

Nei triangoli ABC e ACD esistono i seguenti rapporti fra le lunghezze dei lati:

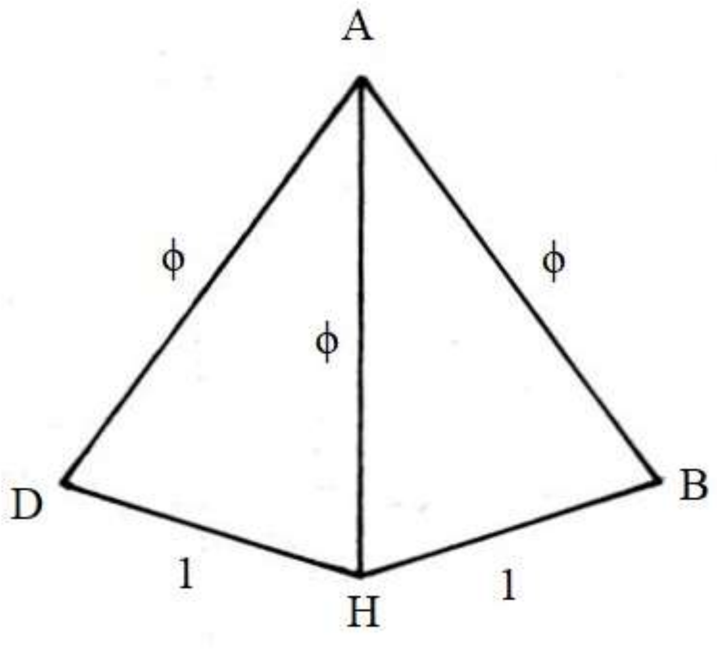
$$AC : AD = \phi^2 : \phi = \phi : 1.$$

Disegnare i segmenti HB e HD:

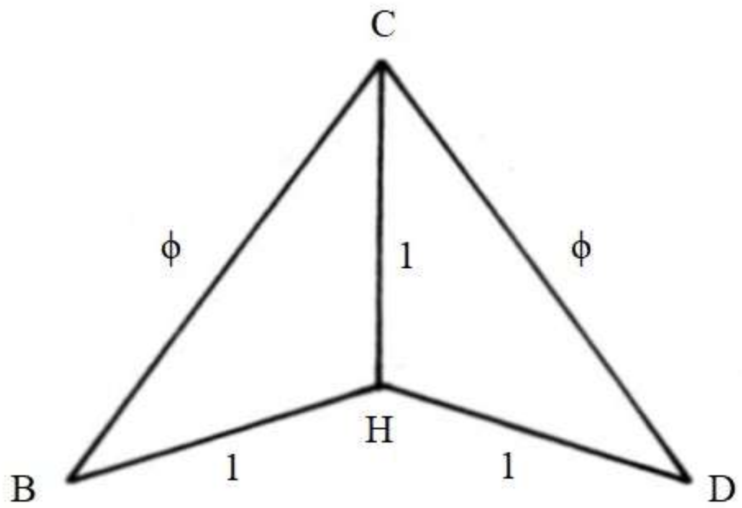


Nella figura sono indicati gli angoli interni.
Il rombo è ora scomposto in due quadrilateri:

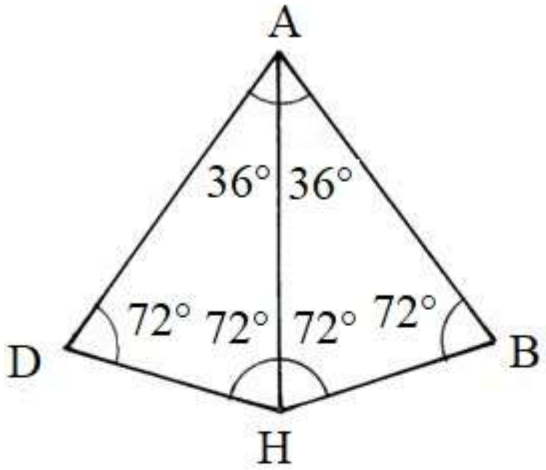
- ABHD è conosciuto con il nome di *aquilone*:

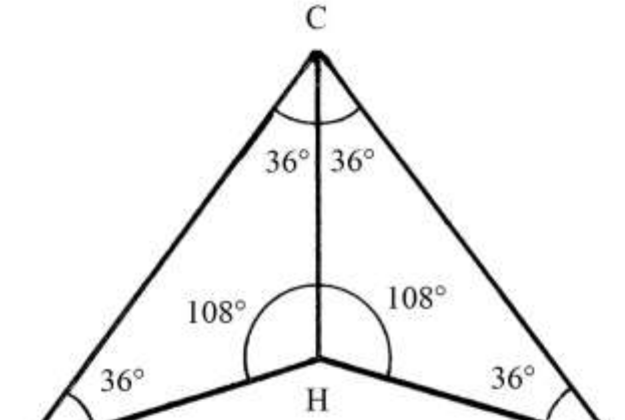


- BCDH è chiamato *dardo*:



Gli angoli caratteristici dei due quadrilateri sono mostrati nelle due figure che seguono.

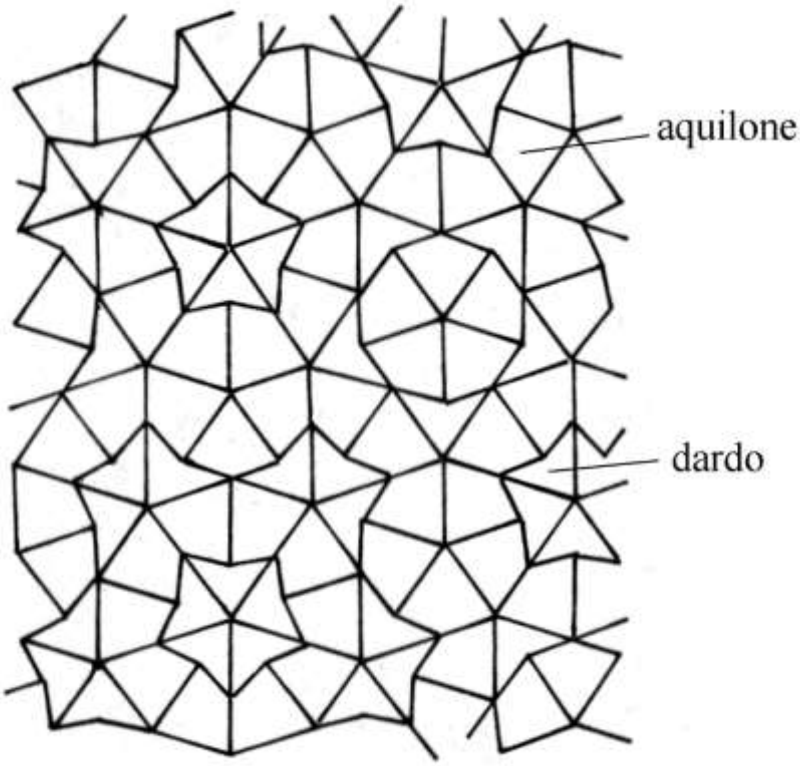




L'*aquilone* è formato da due triangoli isosceli di uguali dimensioni, DAH e ABH: entrambi sono *triangoli aurei*.

Un *dardo* è formato da due triangoli isosceli di dimensioni identiche, BCH e CDH. Entrambi i triangoli sono *gnomoni aurei*.

Un piano può essere interamente ricoperto con *aquiloni* e *dardi* senza lasciare delle lacune, come spiega lo schema che segue:



Esiste un rapporto fra il numero degli aquiloni e quello dei dardi di una tassellazione di Penrose:

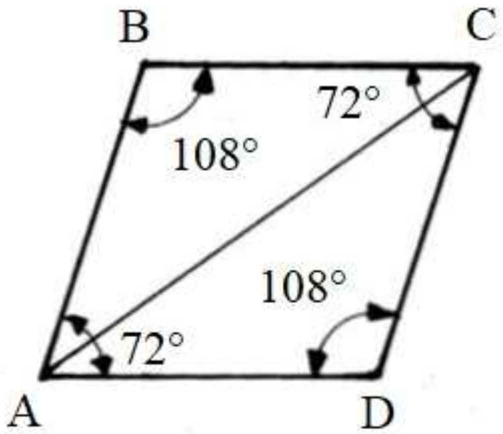
(numero aquiloni)/(numero dardi) ≈ ϕ.

Con il crescere del numero degli aquiloni e dei dardi, il rapporto tende al valore di ϕ.

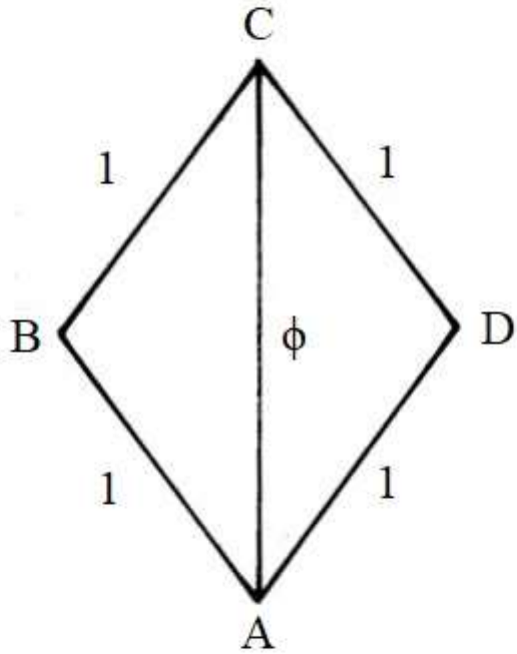
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Un'altra coppia di poligoni capace di ricoprire completamente un piano è data da due *rombi*, chiamati *semi di quadri* (per la loro somiglianza con i semi delle carte da gioco).

Il primo è *largo* ed è formato da un rombo con lati *convenzionalmente* lunghi 1: la diagonale maggiore AC è lunga ϕ:

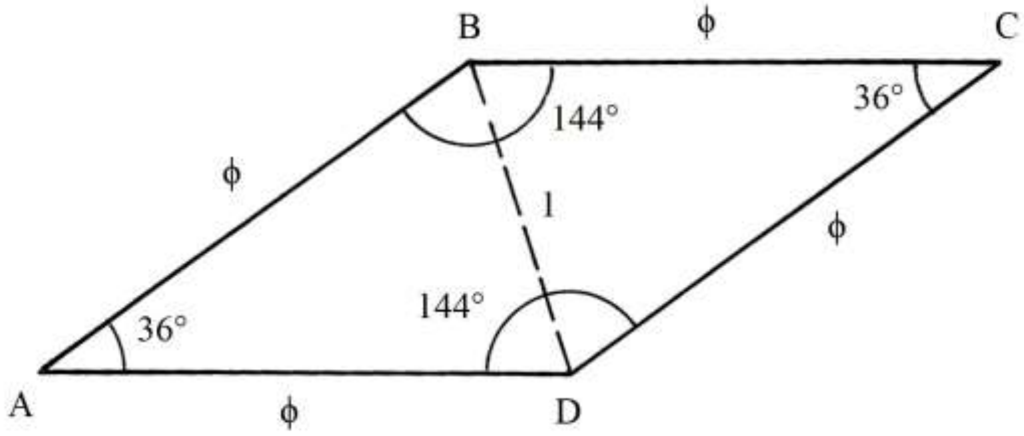


Ruotare in senso antiorario il rombo fino a rendere verticale la diagonale maggiore AC:

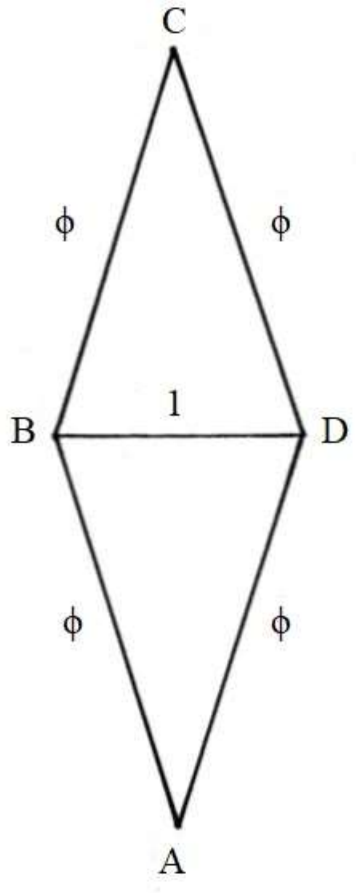


Il rombo ABCD è formato da due *gnomoni aurei*, ABC e CDA.

Il secondo poligono è mostrato nella figura che segue:



Si tratta di un rombo *lungo* e *stretto*.
I lati sono *convenzionalmente* lunghi ϕ e la diagonale minore BD è lunga 1.
Il rombo ABCD è formato dai due *triangoli aurei* ABD e BCD.
Ruotare il rombo in senso antiorario fino a rendere orizzontale la diagonale BD:



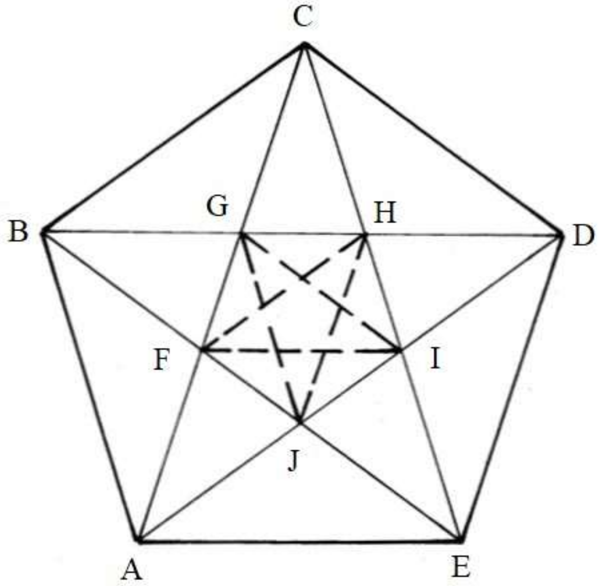
Un pavimento può essere ricoperto senza lacune con rombi *larghi* e rombi *stretti*. Fra i numeri dei due tipi intercorre la relazione già incontrata, il rapporto ϕ:

(numero rombi larghi)/(numero rombi stretti) ≈ ϕ

%%%%%%%%%%%%%%%%%

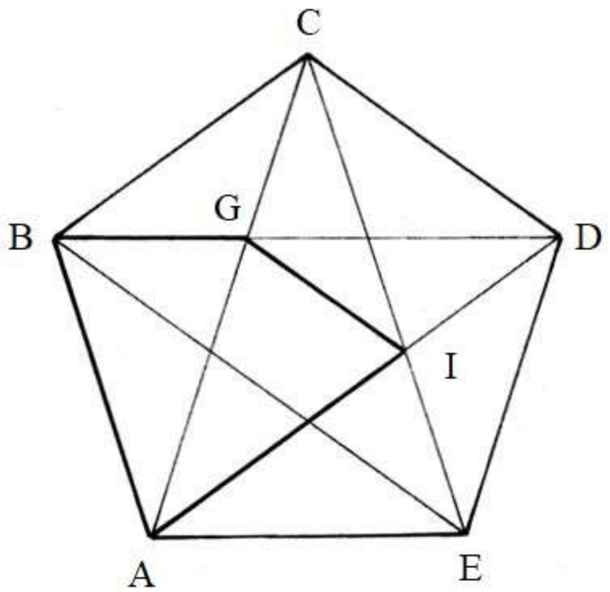
Tutti i poligoni utilizzabili per ricoprire un piano e fin qui descritti derivano dalla scomposizione del pentagono regolare.

Nella figura che segue, nel pentagono ABCDE sono tracciate le *cinque* diagonali: le loro intersezioni creano il pentagono FGHIJ al cui interno sono disegnate tratteggiate le sue cinque diagonali.

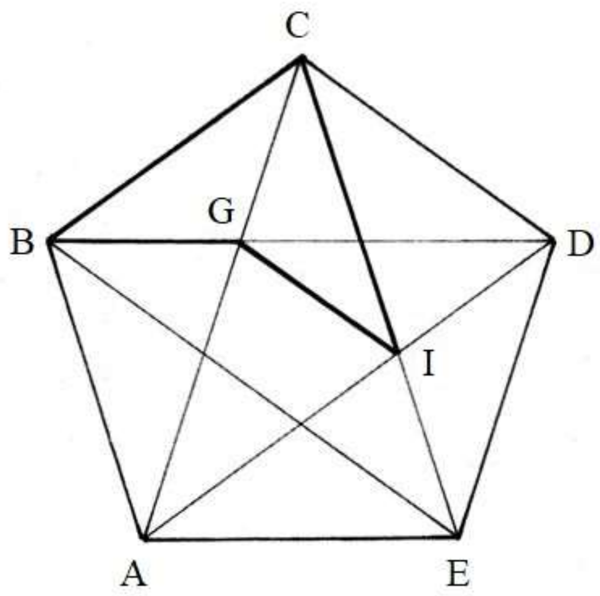


I quattro grafici che seguono sono costruiti sulla precedente figura. Sono rappresentati con tratto ingrossato i quattro tipi di quadrilateri che tassellano il piano.

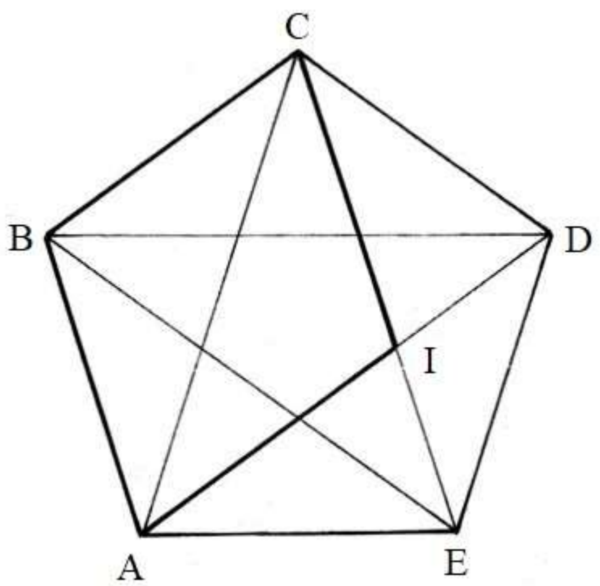
Nello schema che segue, ABGI è un *aquilone*:



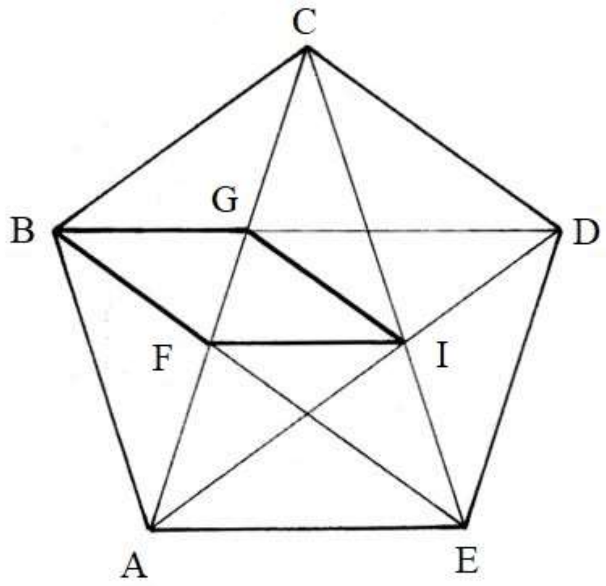
BCIG è un *dardo*:



ABCI è un *rombo largo*:

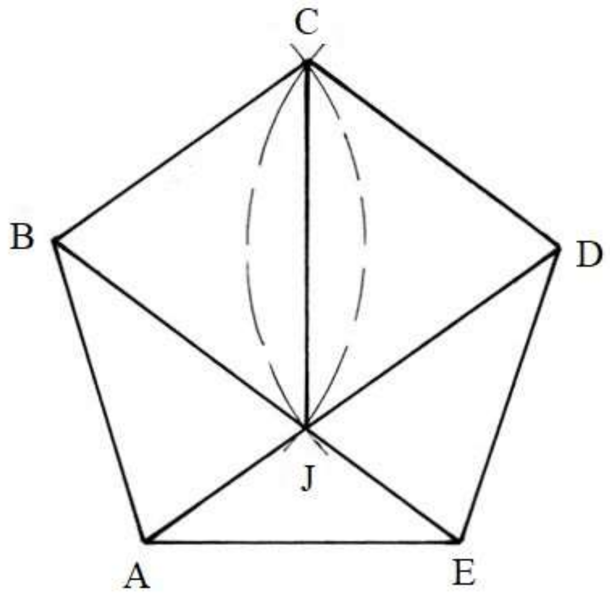


Infine, BGIF è un *rombo stretto*:



\- APPROFONDIMENTO -

Dalle ultime costruzioni con la suddivisione del pentagono regolare ABCDE discendono altre sue proprietà geometriche.



Disegnare le diagonali AD e BE: Esse si incontrano in un punto, J.

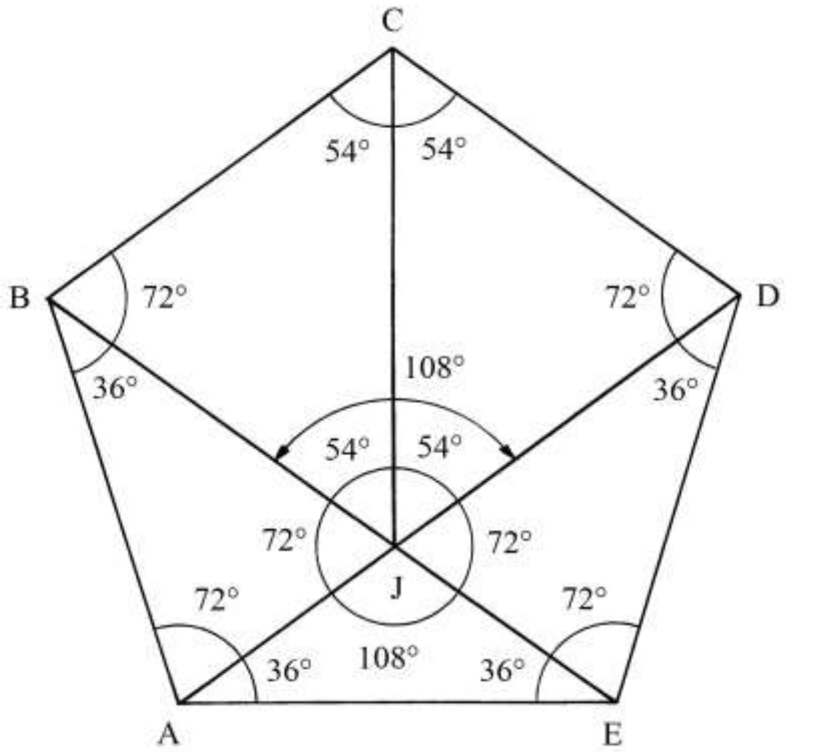
Collegare i punti C e J.

Fare centro nei punti B e D e, con raggio BC = DC, tracciare due archi passanti per i punti C e J.

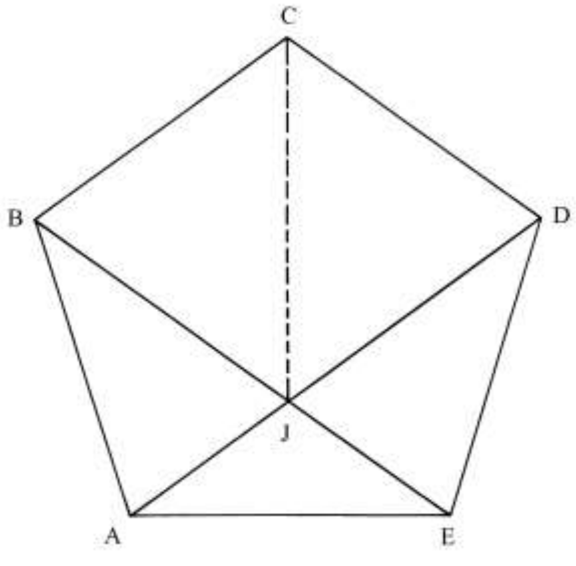
BCJ e CJD sono due triangoli isosceli, ciascuno dei quali possiede due lati di lunghezza uguale a quella del lato del pentagono regolare:

JB = BC = CD = DJ

Il pentagono è suddiviso in *cinque* triangoli isosceli con gli angoli che hanno le ampiezze indicate nella figura che segue:



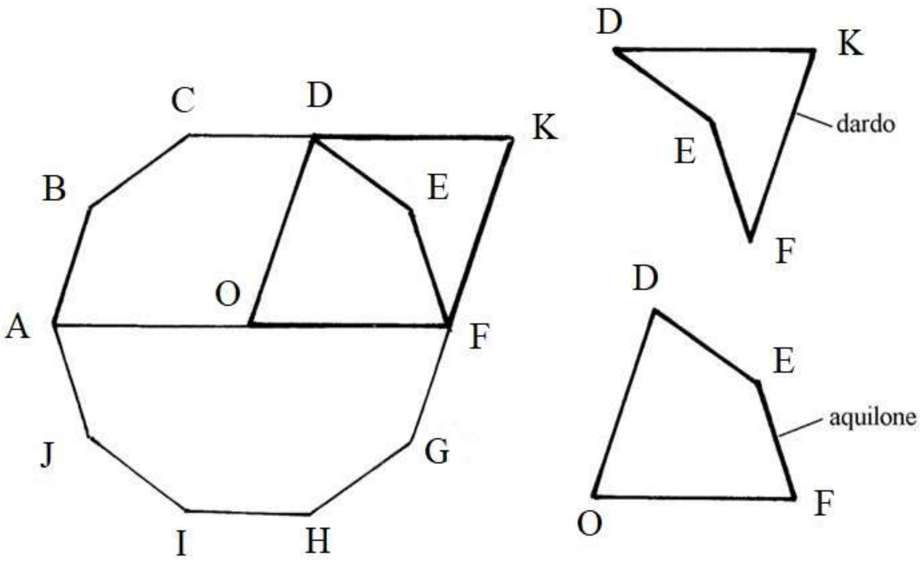
Il quadrilatero BCDJ è un *rombo largo*:



- -

<u>Decagono, dardo e aquilone</u>

ABCDE è un decagono regolare con centro O:



Prolungare verso destra il lato CD.

Tracciare il segmento OD e parallelamente a questo ultimo un segmento da F fino a incontrare in K il prolungamento di CD.

ODKF è un rombo che, dalla spezzata DEF, è diviso in due quadrilateri: DKEF è un *dardo* e ODEF è un *aquilone*.

<u>COSTRUZIONI APPROSSIMATE DEL PENTAGONO</u>

Le costruzioni del pentagono sono raggruppabili in due classi:

* pentagono non inscritto in un cerchio;
* pentagono inscritto in un cerchio.

Tutte le *costruzioni approssimate* originano pentagoni equilateri o pentagoni equiangoli, ma non pentagoni regolari: fra quelle costruzioni numerose forniscono risultati quasi esatti.

<u>Costruzione del pentagono approssimato secondo i Gromatici romani</u>

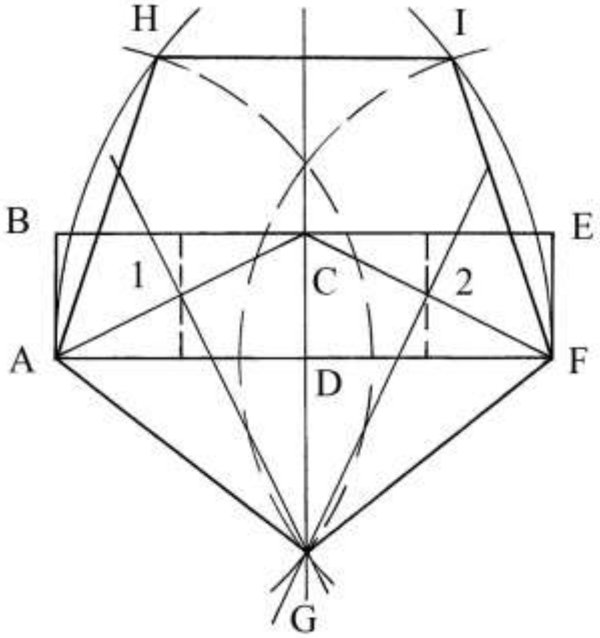
Nei testi dei Gromatici romani è spiegata una costruzione *approssimata* del pentagono.

I Gromatici erano gli agrimensori romani, così chiamati dal nome dello strumento, *groma*, che essi usavano per i rilievi sui terreni.

I testi compresi nel *Corpus Agrimensorum Romanorum* (*o Gromatici Veteres*) formano una collezione di testi di agrimensura preparati da diversi autori latini, a partire dal I secolo a.C. La raccolta sarebbe stata realizzata nel V secolo d.C. da un autore latino.

La collezione ha subito continui rimaneggiamenti nei secoli successivi. Per secoli quei testi furono impiegati per l'agrimensura e per la soluzione di problemi di geometria pratica.

La figura che segue descrive la costruzione (ripresa dai due testi di Maria Teresa Bartoli, citati in bibliografia), basata sull'impiego del rettangolo formato da un *doppio quadrato* (o *bislungo*):



Disegnare i rettangoli affiancati ABCD e DCEF, con lati nel rapporto 1:2 e cioè:

AB : AD = 1 : 2.

Prolungare il lato DC verso l'alto e verso il basso.

Tracciare le diagonali AC e CF; esse hanno le seguenti lunghezze:

$AC^2 = AD^2 + DC^2$ ma $AD = 2*DC$, per cui sostituendo si ha:

$AC^2 = (2*DC)^2 + DC^2 = 4*DC^2 + DC^2 = 5*DC^2$ e

$AC = DC * \sqrt{5}$.

Determinare gli *assi* delle due diagonali: esse fissano i loro punti medi 1 e 2.

Gli assi si incontrano in un punto, G, posto sul prolungamento di CD.

Disegnare i segmenti AG e FG: sono i primi due lati del pentagono da costruire e AF (= BE) è la lunghezza della *diagonale* del pentagono.

Con raggio AG, fare centro in A e in F e tracciare due archi in alto.

Con apertura uguale a AF, fare centro in A e in F e disegnare due archi (rispettivamente a partire da F e da A) che intersecano i due precedenti archi nei punti H e I.

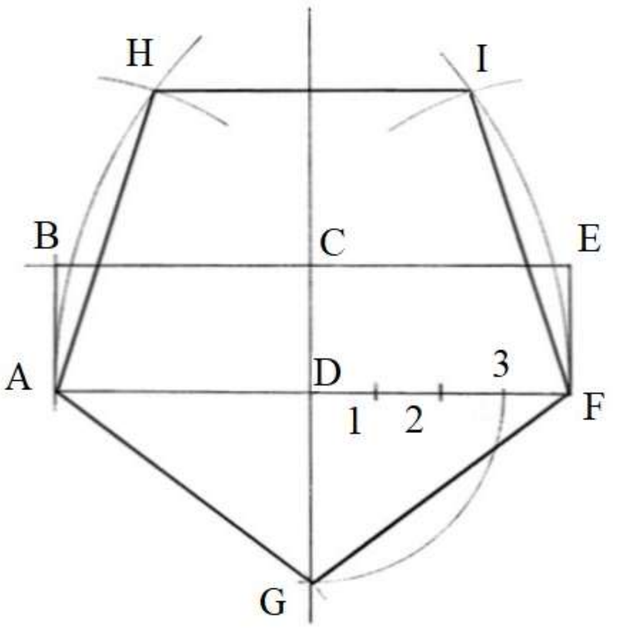
GAHIF è il pentagono *approssimato*.

Costruzione del pentagono secondo Columella

Lo scrittore latino Columella (4-70), grande esperto di agricoltura, suggerì un metodo grafico per la costruzione del pentagono *approssimato*.

Disegnare due rettangoli affiancati con uguali dimensioni e con le lunghezze dei lati nel rapporto 1:2, ABCD e DCEF:

AB : AD = 1 : 2.



Prolungare verso l'alto e verso il basso il lato CD.

Dividere in *quattro* parti uguali il lato DF: sono fissati i punti 1, 2 e 3.

Fare centro in D e, con raggio D-3, tracciare un arco dal punto 3 fino a intersecare il prolungamento di CD in un punto, G.

Il segmento D-3 è lungo quanto la *media aritmetica* fra le lunghezze di CD e DF:

D-3 = (CD + DF)/2 = (CD + 2*CD)/2 = 1,5 * CD

Il punto G è il *terzo vertice* del pentagono da costruire (A e F sono i primi due).

Disegnare i segmenti AG e FG.

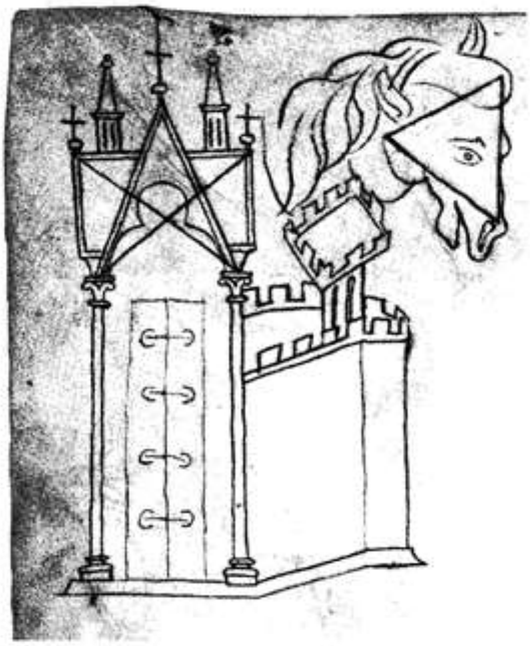
Con apertura AG, fare centro in A e in F e tracciare due archi.

Il segmento AF è una *diagonale* del pentagono: con apertura AF, fare centro in A e poi in F e disegnare due archi che tagliano i due precedenti in due punti, H e I.

Il poligono AHIFG è il pentagono approssimato.

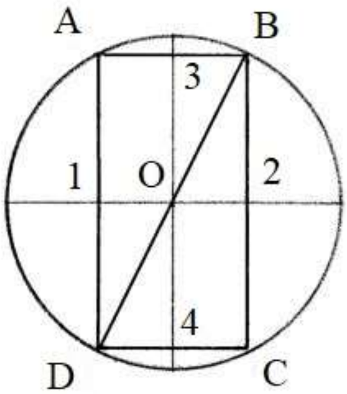
<u>La costruzione del pentagono – Villard de Honnecourt</u>

Nel Taccuino di Villard de Honnecourt è contenuto, al foglio 18 *verso*, uno schema su "*come fare una torre di cinque punte*":



Nei già citati scritti di Maria Teresa Bartoli viene suggerita una spiegazione della probabile costruzione geometrica impiegata da Villard e basata sulla ripetuta rotazione di un rettangolo con lati nel rapporto 1:2 (*doppio quadrato*).

Il rettangolo ABCD ha lati lunghi proporzionalmente a 1 (AB e CD) e a 2 (AD e BC) . Disegnare la diagonale BD e determinare il suo punto medio, O. Fare centro in O, con raggio OB, e tracciare la circonferenza circoscritta al rettangolo ABCD:



Determinare i punti medi dei quattro lati: sono 1, 2, 3 e 4.

AB-2-1 e 1-2-CD sono due quadrati identici, con lati lunghi proporzionalmente a 1.

Per il teorema di Pitagora, la diagonale DB ha lunghezza convenzionale determinata dalle seguenti relazioni:

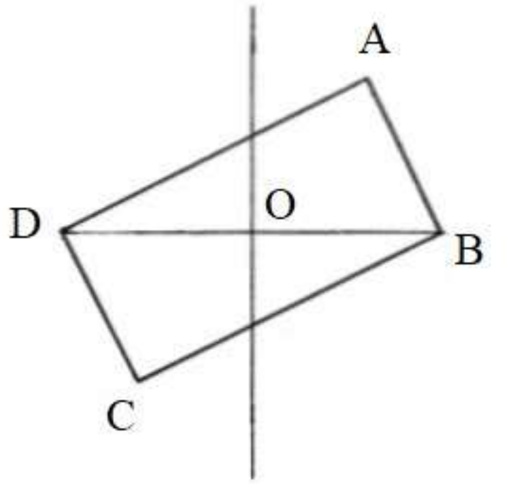
$DB^2 = BC^2 + CD^2$

$DB = \sqrt{(BC^2 + CD^2)}$

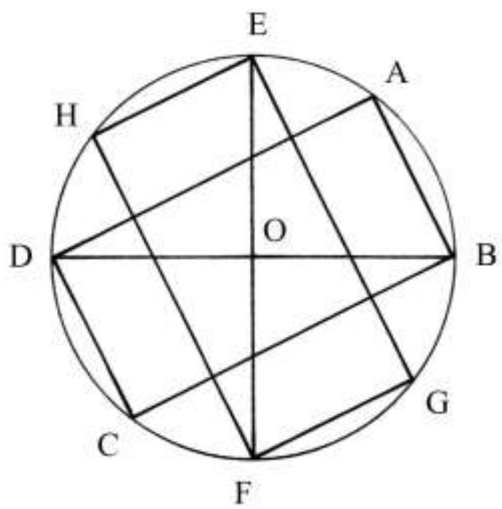
Ma: BC = 2 e CD = 1 e sostituendo questi valori si ha:

$DB = \sqrt{(2^2 + 1^2)} = \sqrt{5}$.

Ruotare in *senso orario* il rettangolo ABCD fino a disporre orizzontalmente la diagonale DB. Per il punto O, condurre la perpendicolare a DB:

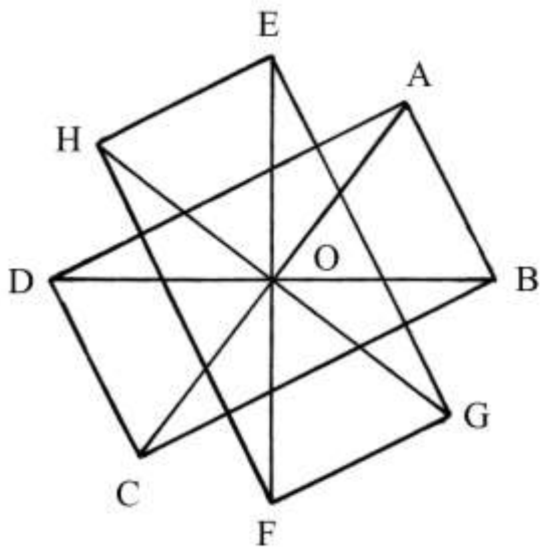


Fare centro nel punto O e ridisegnare una circonferenza con raggio OD: sono determinati i punti E e F:

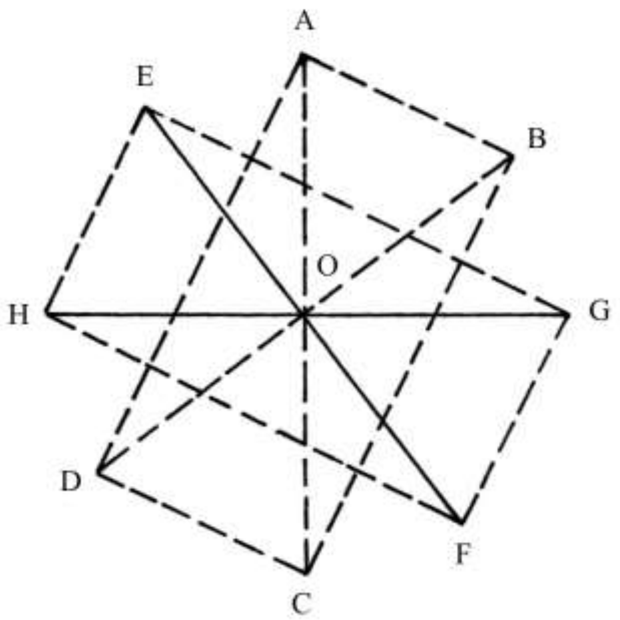


All'interno della circonferenza, costruire un secondo rettangolo uguale a quello ABCD e con diagonale EF (che è *perpendicolare* a DB): è EGFH.

Disegnare le due diagonali mancanti, AC e GH:

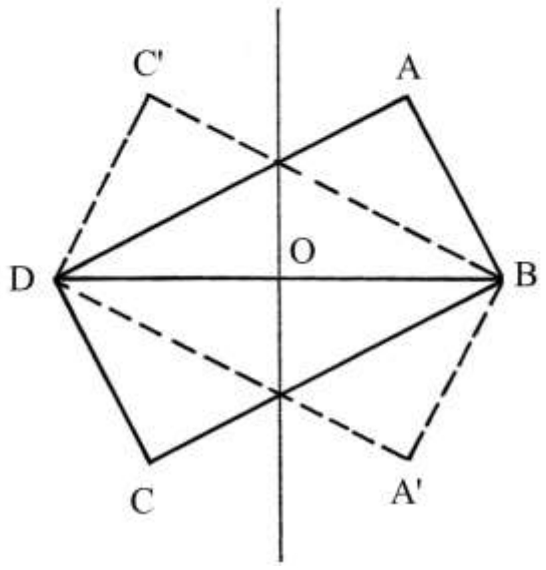


Ruotare la figura precedente *in senso antiorario*, fino a disporre verticalmente la diagonale AC e orizzontalmente la diagonale HG:

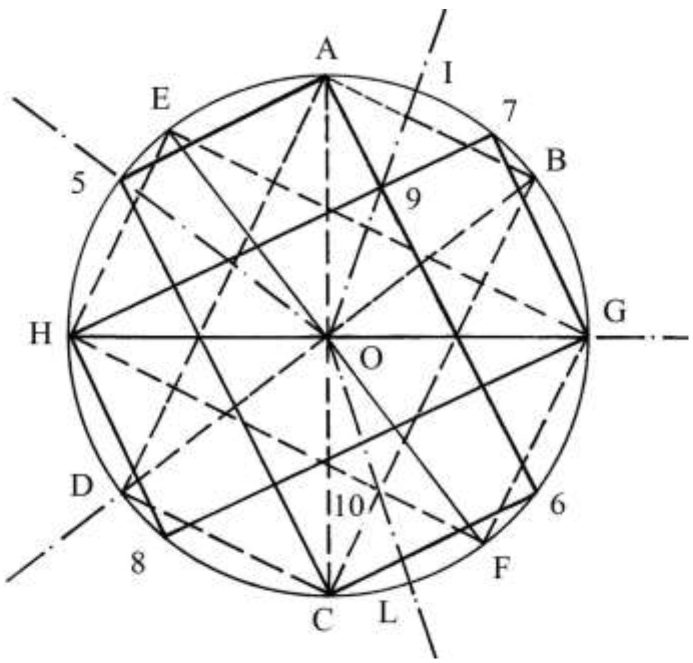


Tratteggiare i lati dei due rettangoli. Ruotare in senso orario il rettangolo ABCD fino a rendere orizzontale la diagonale DB.

Una diagonale di un rettangolo (come la DB) è comune a *due* rettangoli fra loro simmetrici rispetto alla diagonale stessa; nella figura che segue ABCD e BA'DC' sono simmetrici:



Considerare le *quattro* diagonali dei rettangoli ABCD e EGFH e su di esse costruire i rettangoli *simmetrici* A-6-C-5 e H-7-G-8:

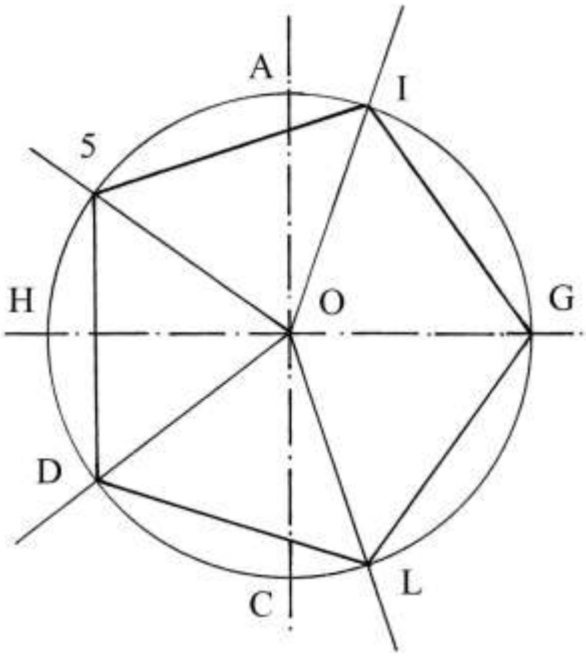


I lati dei due nuovi rettangoli si intersecano in alcuni punti: fra di essi sono utili i punti 9 e 10.

Tracciare con linea *a tratti e punti* cinque semirette uscenti da O e passanti per i punti 5, 9, G, 10 e D.

Le semirette passanti per i punti 9 e 10 tagliano la circonferenza circoscritta nei punti I e L.

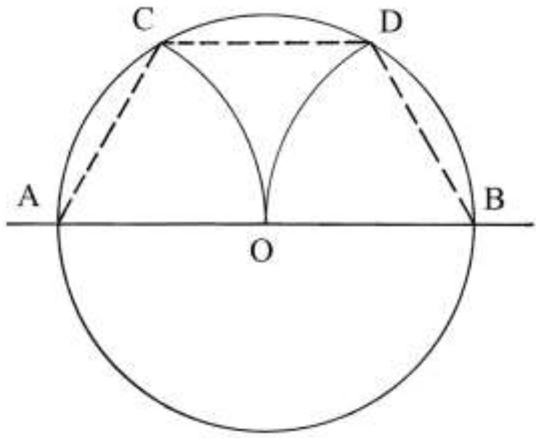
Collegando in successione i punti 5, I, G, L e D si ottiene il pentagono *approssimato* 5-I-GLD, che potrebbe corrispondere al metodo impiegato da Villard de Honnecourt:



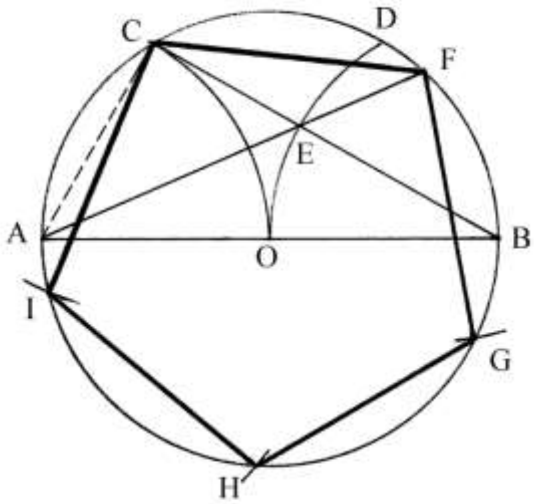
<u>Pentagono inscritto approssimato da un manoscritto persiano</u>

Un manoscritto persiano contiene una costruzione *approssimata* del pentagono inscritto che presenta una interessante caratteristica: è di rapida esecuzione: la descrizione che segue è basata sull'articolo di Jan P. Hogendijk citato in bibliografia.

La partenza è data da un cerchio nel quale è disegnato il diametro orizzontale AB:



Con raggio OA=OB fare centro nei punti A e B e tracciare due archi da O fino a incontrare la circonferenza in C e in D: le corde AC, CD e DB sono tre lati dell'esagono inscritto, non completato.



Disegnare il triangolo rettangolo ACB: l'angolo in C è *retto* e gli angoli in A e in B sono ampi, rispettivamente, 60° e 30°.

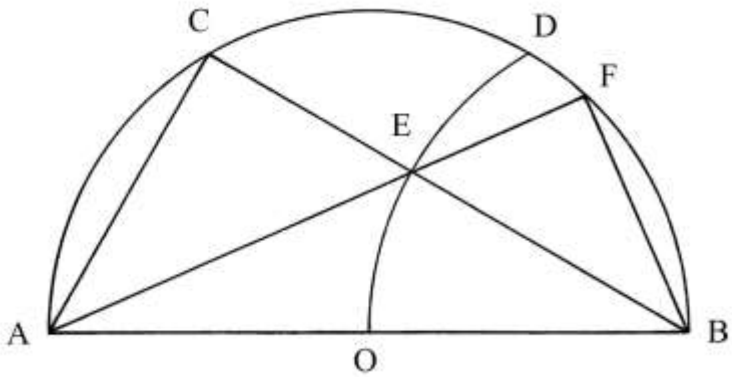
Il cateto CB taglia l'arco OD in un punto, E.

Tracciare un segmento da A, passante per E, fino a intersecare la circonferenza in un punto: è F.

Il segmento CF è il primo lato del pentagono inscritto.

Riportare sulla circonferenza la lunghezza di CF: il poligono CFGHI è il pentagono inscritto approssimato.

Nel suo articolo, Hogendijk ha indicate le ampiezze degli angoli contenuti nel semicerchio superiore:

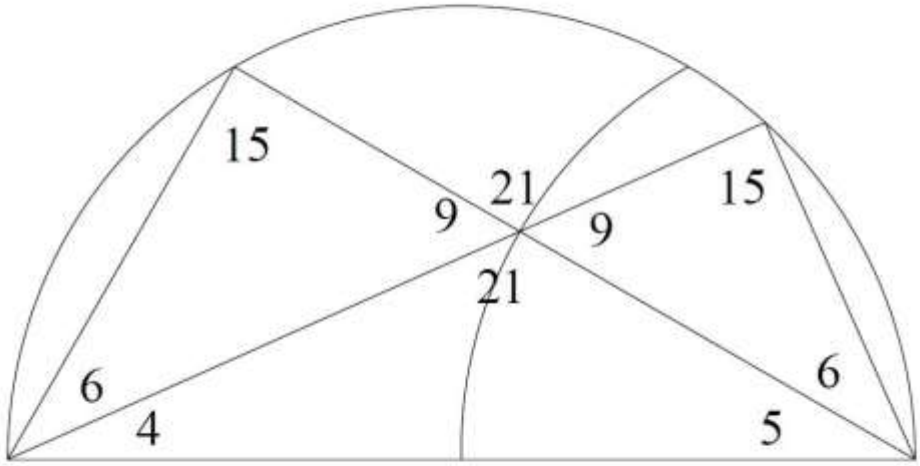


* Triangolo ACB: ACB = 90° CAB = 60° CBA = 30°.
* Triangolo AEB: EAB = 24° ABE = 30° AEB = 126°
* Triangolo ACE: CAE = 36° ACE = 90° CEA = 54°.
* Triangolo FEB: EFB = 90° FEA = 54° FAE = 36°.

L'angolo CEF è opposto nel vertice E rispetto a quello AEB ed è anch'esso ampio 126°.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

L'articolo del citato Hogendijk, uno fra i maggiori esperti della matematica islamica, contiene la figura che segue, qui riprodotta senza le sue lettere:



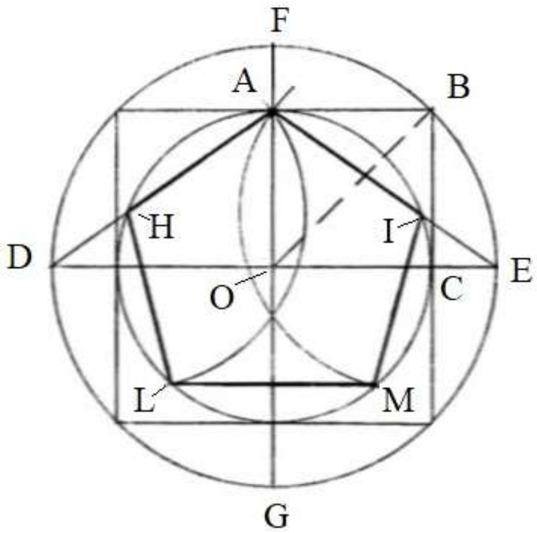
Nella figura sono indicate le ampiezze degli angoli, espresse in unità uguali a 1/15 di angolo retto: nella tradizione islamica, la divisione dell'angolo retto in 90 gradi era usata solo in astronomia e nella geografia matematica.

Una unità angolare equivaleva a:

1 unità = 90°/15 = 6°.

Pentagono – metodo dei costruttori medievali

Il metodo descritto in questo paragrafo era usato dai costruttori medievali in Europa:



Disegnare il quadrato OABC e la diagonale OB.

Prolungare i lati OA e OC.

Fare centro in O e tracciare due circonferenze concentriche con raggi OC e OB.

Il segmento OB è la diagonale del quadrato OABC ed è lungo OC*√2.

Disegnare i segmenti AD e AE: essi tagliano la circonferenza interna in due punti, H e I. Le corde AH e AI sono i primi due lati del pentagono: riportando la loro lunghezza sulla circonferenza interna si ottengono i punti L e M.

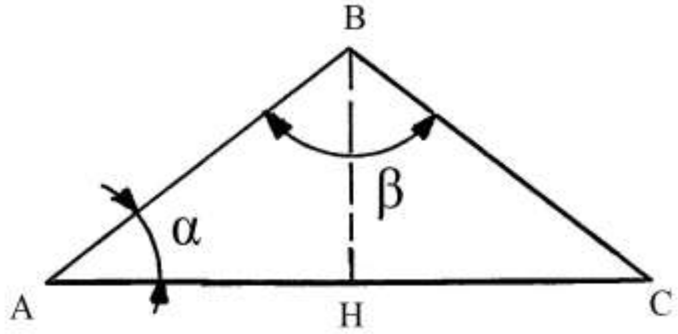
Il poligono AIMLH è il pentagono inscritto.

La costruzione è *approssimata*.

Una costruzione medievale semplificata

ABC è un triangolo isoscele i cui lati sono lunghezze proporzionali:

AC : AB = 8 : 5.



BH è un'altezza del triangolo isoscele rispetto alla base AC.

Con il c.d. teorema di Pitagora ricaviamo la lunghezza di BH:

$BH^2 = AB^2 – AH^2 = AB^2 – (AC/2)^2 = 5^2 – (8/2)^2 = 25 – 16 = 9$ e

$NH = \sqrt{9} = 3$.

I triangoli rettangoli ABH e BHC rappresentano due copie della stessa terna pitagorica primitiva: 3-4-5.

L'angolo α ha coseno:

$\cos \alpha = AH/AB = (AC/2)/AB = (8/2)/5 = 4/5$: ad esso corrisponde un angolo $\alpha \approx 36,87°$.

L'angolo ABH = β/2, *complementare* di quello α, vale:

$\beta/2 = 90° – \alpha \approx (90 – 36,87)° \approx 53,13°$.

L'angolo β è ampio:

$\beta = 2 * (\beta/2) \approx 2 * 53,13° \approx 106,26°$.

L'angolo β ha ampiezza inferiore a quella dell'angolo interno del pentagono regolare che è 108°.

AC è una diagonale del pentagono approssimato basato sul triangolo ABC e AB e BC sono due lati; il rapporto fra le lunghezze è:

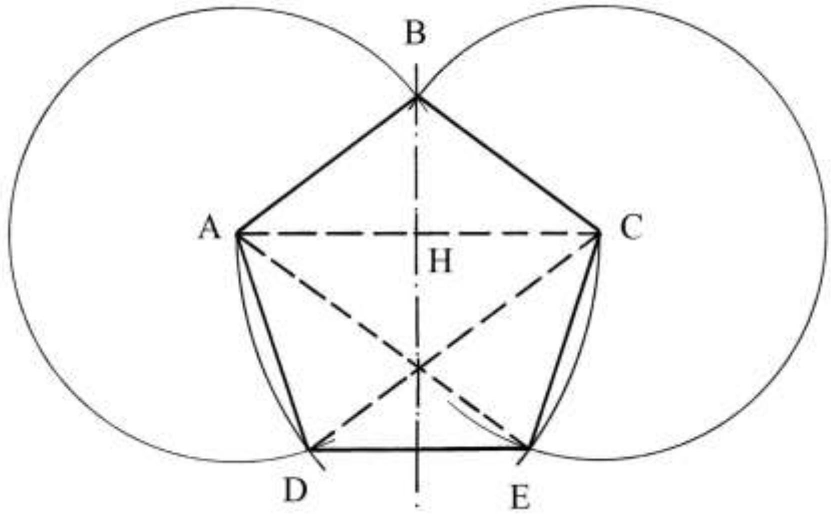
$AC/AB = 8/5 = 1,6$.

Questo valore è inferiore all'esatto rapporto fra le lunghezze di una diagonale e di un lato di un pentagono regolare che è:

diagonale/lato = $(1 + \sqrt{5})/ = \phi \approx 1,618…$

La costruzione del pentagono approssimato prevede i seguenti passi: fare centro in A e in B con raggio AB e tracciare due archi di circonferenza.

Poi, con raggio AC, fare centro in A e in B e disegnare due archi che intersecano i precedenti nei punti D e E.



Per costruzione, i lati AB, BC, AD e CE hanno uguali lunghezze, mentre il lato DE risulta più corto.

Le tre diagonali disegnate – AC, AE e CD – hanno uguali lunghezze.

Le due diagonali non disegnate – BD e BE – sono leggermente più lunghe delle prime tre.

Alcune possibili costruzioni medievali del pentagono

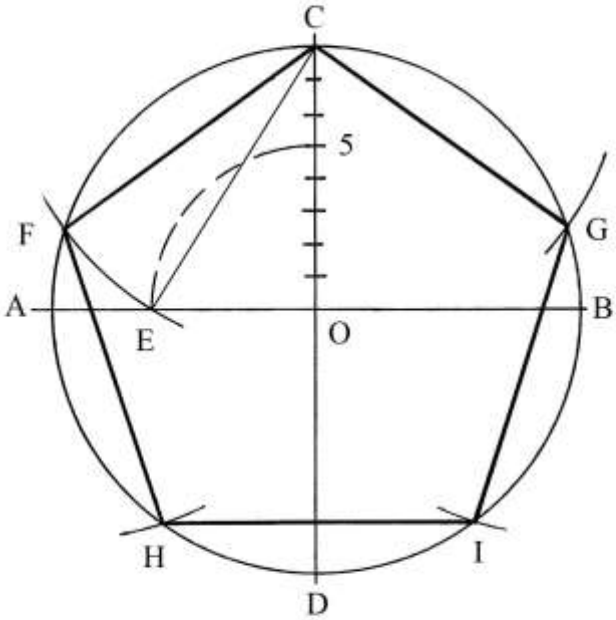
Nell'articolo di quattro ricercatori ungheresi – Fehér, Szilágyi, Bölcskei e Halmos –, citato in bibliografia, sono presentate numerose ipotesi sulla presenza del pentagono nelle fonti medievali e in architettura.

I metodi approssimati impiegati nel Medioevo per la costruzione di questo poligono erano giustificati dalla non conoscenza delle opere di Euclide e di Tolomeo.

In questa *Appendice* sono descritti alcuni esempi tratti da quell'articolo.

Il pentagono 8-5

Una costruzione approssimata del pentagono inscritto è basata sulla divisione di un raggio del cerchio circoscritto in *otto* parti uguali.



AB e CD sono due diametri perpendicolari di un cerchio di centro O e raggio OA = r.

Dividere OC in *otto* parti uguali. Fare centro in O e con raggio O-5 tracciare un arco dal punto 5 fino a incontrare OA nel punto E: il segmento CE è la lunghezza del lato del pentagono.

Fare centro in C e con raggio CE disegnare un arco che taglia la circonferenza in F e in G. A partire da questi punti riportare la lunghezza di CE sulla circonferenza: sono così stabiliti i punti H e I.

CGIHF è il pentagono inscritto quasi esatto.

ECO è un triangolo rettangolo; i suoi cateti sono lunghi:

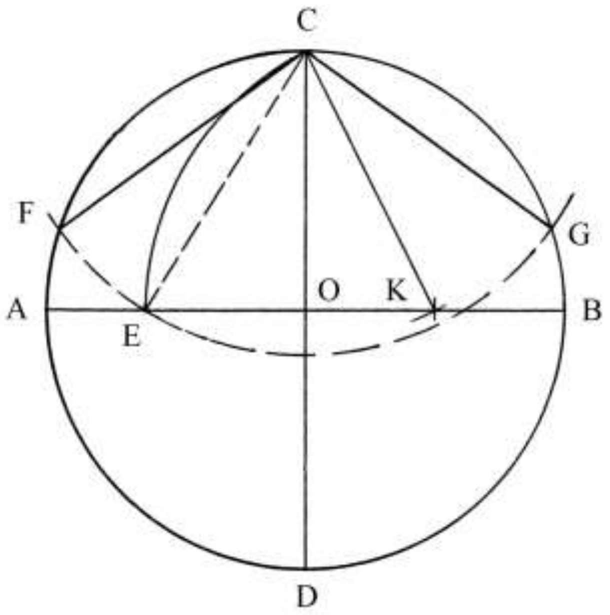
* OC = r (raggio);
* OE = 5/8 * r.

L'ipotenusa EC, che è lunga quanto un lato del pentagono, è data da:

$EC^2 = OC^2 + OE^2 = r^2 + (5/8 * r)^2 = r^2 * (1 + 25/64) = r^2 * 89/64$ e

$EC = r * \sqrt{(89/74)} = r * (\sqrt{89})/8 \approx r * 1{,}179$.

Nel caso del pentagono regolare costruito con il metodo di Tolomeo, il calcolo della lunghezza dell'ipotenusa CE (e del lato del poligono) è più lungo:



$OK = ½ * OB = ½ * r$
$CK = KE$
$CK^2 = OC^2 + OK^2 = r^2 + (r/2)^2 = 5/4 * r^2$ e
$CK = (\sqrt{5})/2 * r = KE$
$OE = KE – OK = CK – OK = (\sqrt{5})/2 * r – r/2 = (\sqrt{5} – 1)/2 * r$.

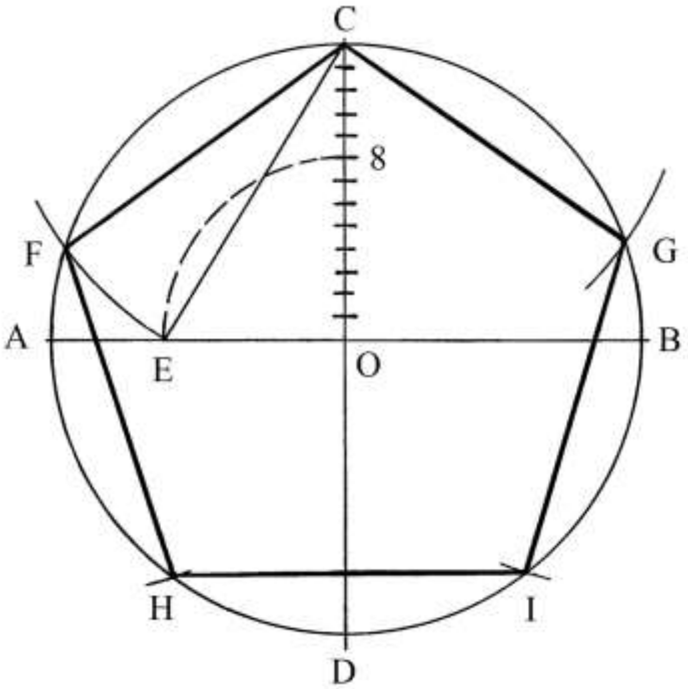
Anche in questo caso, l'ipotenusa EC è lunga quanto i lati del pentagono regolare. Essa è data da:

$EC^2 = OC^2 + OE^2 = r^2 + [(\sqrt{5} – 1)/2 * r]^2 \approx r^2 + 0{,}38 * r^2 \approx 1{,}38 * r^2$ e
$EC \approx \sqrt{1{,}38} * r \approx 1{,}1755 * r$.

Con il metodo approssimato della divisione dei raggi OA e oc in *otto* parti, la lunghezza dei lati del pentagono – 1,179 * r – è leggermente maggiore di quella corretta, 1,1755 * r: la differenza è minima.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Lo schema che segue descrive la costruzione di un pentagono approssimato, quasi regolare, basata sul rapporto 13:8:



AB e CD sono i diametri perpendicolari di un cerchio di centro O e raggio OA = r.

Dividere il raggio OC in *tredici* parti uguali.

Il segmento O-8 è lungo gli 8/13 di OC.

Fare centro in O e con raggio O-8 tracciare un arco dal punto 8 fino a incontrare OA nel punto E.

ECO è un triangolo rettangolo e la sua ipotenusa EC è lunga quanto i lati del pentagono inscritto.

Con centro in C e raggio CE disegnare due archi che tagliano la circonferenza nei punti F e G, vertici del pentagono.

A partire da F e da G riportare sulla circonferenza la lunghezza di CE: sono stabiliti i punti H e I.

CGIHF è il pentagono approssimato inscritto.

La lunghezza di EC è:

$EC^2 = OC^2 + OE^2 = r^2 + (8/13 * r)^2 = r^2 * (1 + 64/169) = r^2 * 233/169$ e

$EC = r * \sqrt{}(233/169) = r * (\sqrt{}233)/13 \approx r * 1{,}174$.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

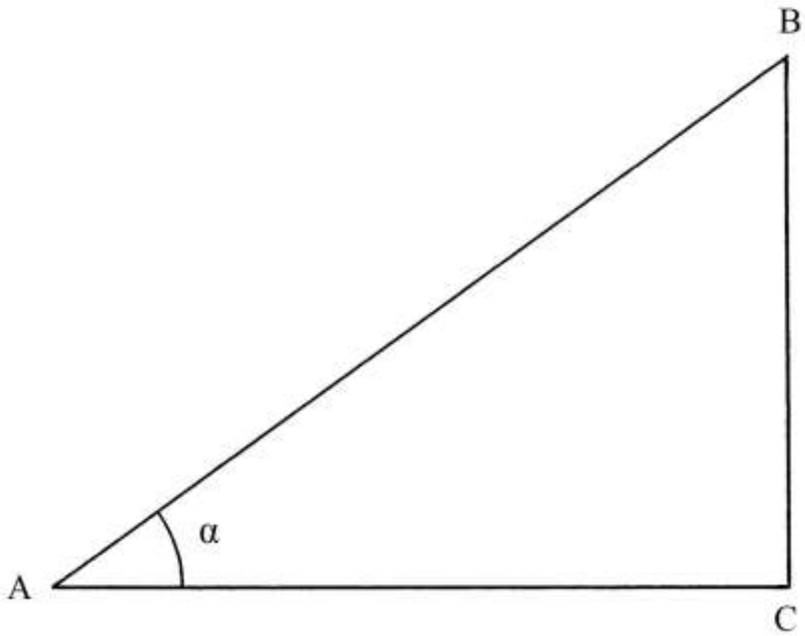
Le coppie 8:5 e 13:8 sono formate da numeri che fanno parte della successione di Fibonacci:

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, …

È probabile che impiegando coppie della successione con numeri più alti, la costruzione del pentagono possa risultare sempre più precisa.

La costruzione del pentagono con il triangolo 10-17

La costruzione è approssimata ed è basata su di un triangolo rettangolo che ha ipotenusa AB lunga 17 e il cateto minore BC lungo 10.



Questo triangolo è facilmente realizzabile: tracciare una retta orizzontale e fissarvi il punto C. Da questo elevare il segmento perpendicolare CB lungo 10.

Dal punto B misurare la lunghezza di 17 fino a intersecare la retta orizzontale nel punto A.

L'angolo BAC è ampio:

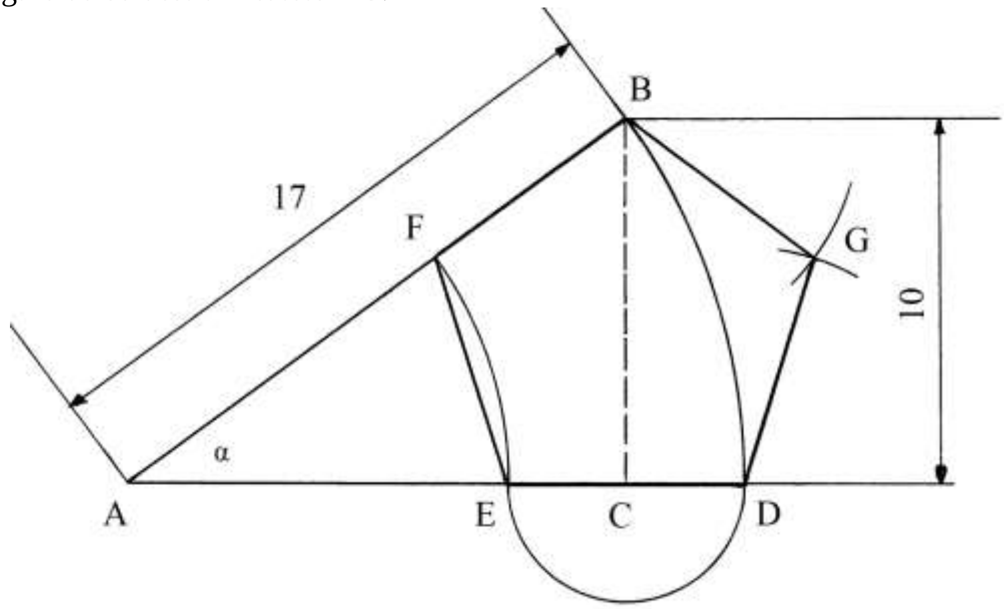
sen α = BC/AB = 10/17 $\approx$ 0,588.

Ad esso corrisponde un angolo $\alpha \approx 36{,}03°$, angolo assai vicino all'angolo di 36° che con il sottomultiplo 18° e con i suoi multipli 72°, 108° e 144° è tipico del pentagono regolare.

È da ricordare l'equivalenza:

sen 36° = cos (90 – 36)° = cos 54°.

Prolungare verso destra il cateto AC:



Fare centro in A e con raggio AB disegnare un arco da B fino a incontrare il prolungamento di AC nel punto D.

Il segmento CD è lungo *metà* del lato del pentagono da costruire; fare centro in C e con raggio CD tracciare una semicirconferenza da D al nuovo punto E.

ED è il primo lato del pentagono.

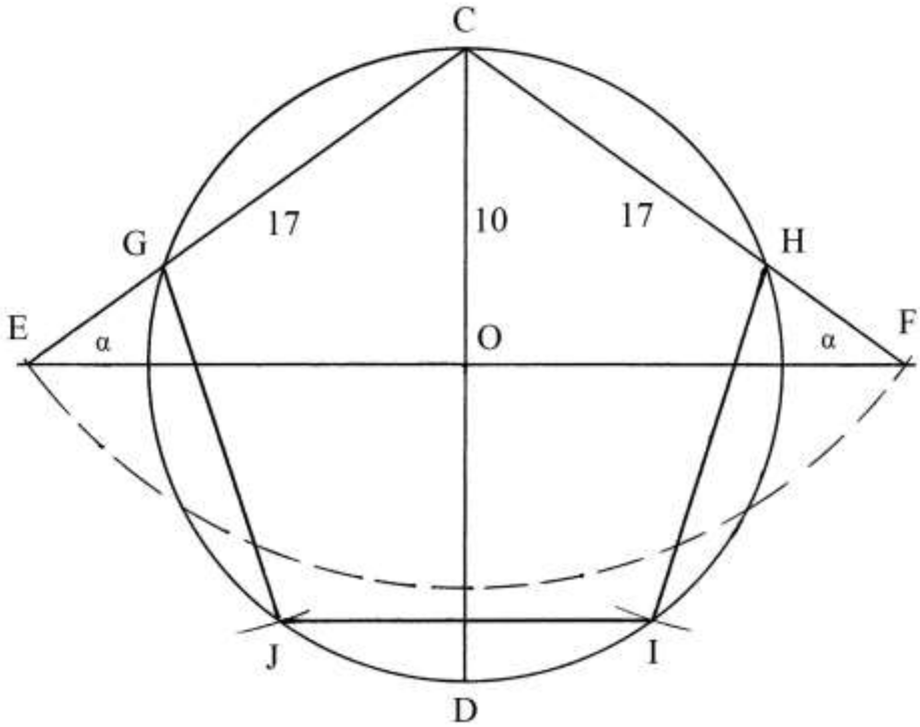
Fare centro in A e con raggio AE disegnare un arco da E fino a stabilire il punto F: EF e FB sono altri due lati del pentagono.

Con apertura BF fare centro in B e in D e tracciare due archi che si incrociano in G.

EFBGD è il pentagono.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Una variante della costruzione basata sul triangolo 10-17 è presentata nello schema che segue:



AB e CD sono due diametri perpendicolari del cerchio di centro O e raggio OA = 10.

Fare centro in C e con raggio 17 unità tracciare un arco che taglia i prolungamenti di AB in E e in F.

COE e COF sono due triangoli rettangoli che hanno in comune il cateto CO. Per costruzione, le due ipotenuse, CE e CF, sono lunghe 17.

Gli angoli CEO e CFO hanno ampiezza:

$\alpha \approx 36{,}03°$.

Le due ipotenuse intersecano la circonferenza nei punti G e H: le corde CG e CH sono i primi due lati del pentagono inscritto.

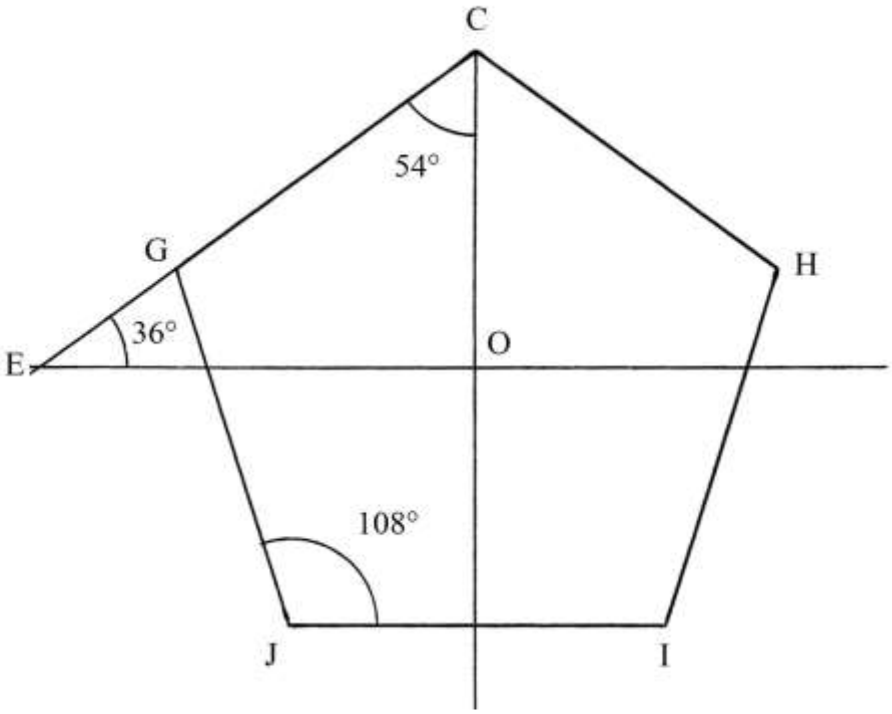
A partire da G e da H riportare sulla circonferenza la lunghezza di CG.

CHIJG è il pentagono inscritto nel cerchio di raggio 10.

- APPROFONDIMENTO -

L'origine del metodo del triangolo 10-17

Il grafico che segue contiene il pentagono *regolare* CHIJG:



Prolungare verso sinistra il diametro orizzontale e verso il basso il lato CG: le due linee si incontrano nel punto E.

COE è un triangolo rettangolo.

Gli angoli interni di un pentagono regolare hanno ampiezza uguale a 108°: l'angolo ECO è metà di ECH (o GCH) e cioè 108°/2 = 54°.

Nel triangolo COE l'angolo CEO è *complementare* rispetto a quello ECO:

CEO = 90° – ECO = 90° – 54° = 36°.

Le due costruzioni che hanno usato il triangolo 10-17 hanno utilizzato l'angolo

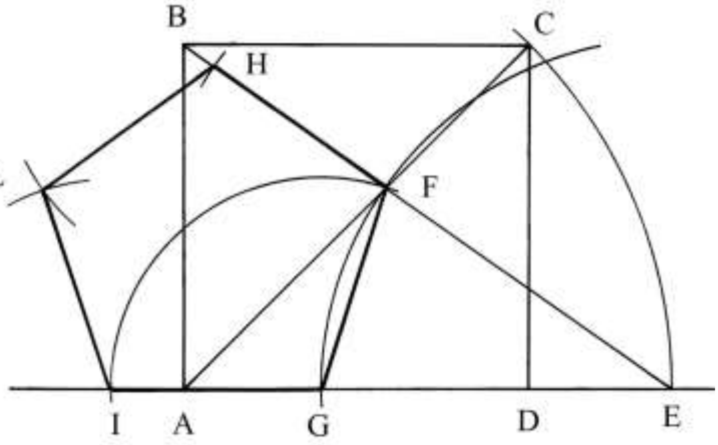
$\alpha \approx 36{,}03°$ e cioè pressoché uguale a quello di 36° creato nel pentagono regolare.

- -

Pentagono dato un quadrato

Ignoriamo l'origine di questa costruzione.

Disegnare un quadrato (ABCD) e la diagonale AC:



Prolungare il lato AD verso sinistra e verso destra.

Fare centro in A e, con raggio AC, tracciare un arco da C fino a tagliare in un punto, E, il prolungamento di AD.

Disegnare il segmento BE: esso incontra la diagonale AC in un punto, F, che è un vertice del pentagono.

Fare centro in E e, con raggio EF, tracciare un arco che taglia AD in un nuovo punto, G. Il segmento FG è il primo lato del pentagono.

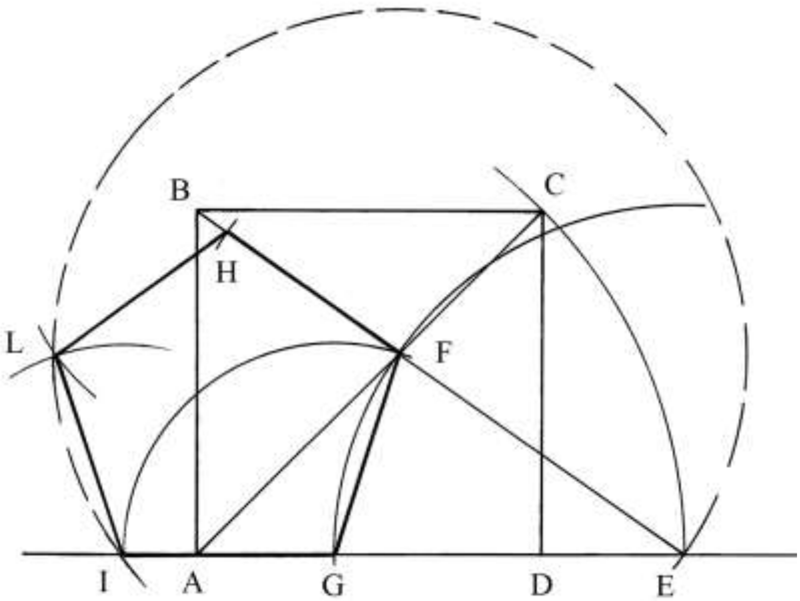
Con raggio FG, fare centro in F e disegnare un arco da G fino a tagliare BE in un altro punto, H.

Con la stessa apertura FG fare centro in G e tracciare un arco da F fino a incontrare il prolungamento di AD in I.

Infine, sempre con apertura FG, fare centro in H e in I e disegnare due archi che si intersecano nel punto L.

HFGIL è il pentagono.

I raggi EF e EG sono lunghi quanto le diagonali del pentagono:



L'arco di circonferenza tratteggiato passa per i punti E, L e I: esso ha centro in F e raggio FE.

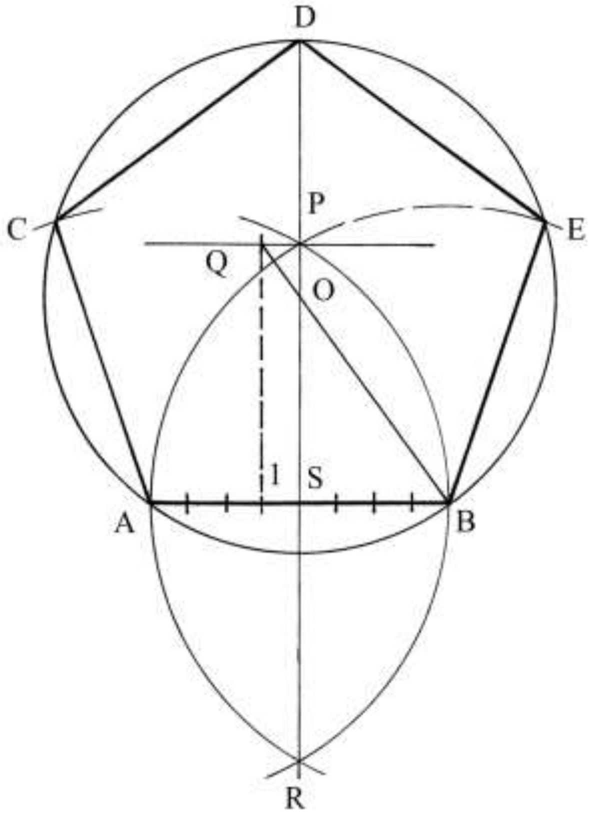
La costruzione è approssimata.

Costruzione del pentagono dato il lato (metodo di Leonardo da Vinci)

Leonardo da Vinci ha elaborato diversi metodi approssimati per disegnare un pentagono approssimato. Ulteriori informazioni sono contenute nel mio articolo sul “De Ludo geometrico”, citato in bibliografia.

Questo metodo fornisce una costruzione *approssimata*: è contenuto nel foglio 13 *verso* del Codice B di Parigi.

AB è il lato del pentagono: disegnare due archi di raggio AB e centro in A e in B:



Per i punti P e R tracciare l’asse del segmento AB, che lo interseca nel punto S.

Dividere il segmento AB in *otto* parti uguali e fissare il punto 1.

A partire dal punto P disegnare una linea parallela al lato AB; dal punto 1 innalzare una parallela a PR fino a fissare il punto Q.

Collegare Q a B: il segmento QB taglia l’asse verticale nel punto O, centro del cerchio in cui va inscritto il pentagono.

Con apertura AB, fare centro in A e in B per determinare i punti C, D e E.

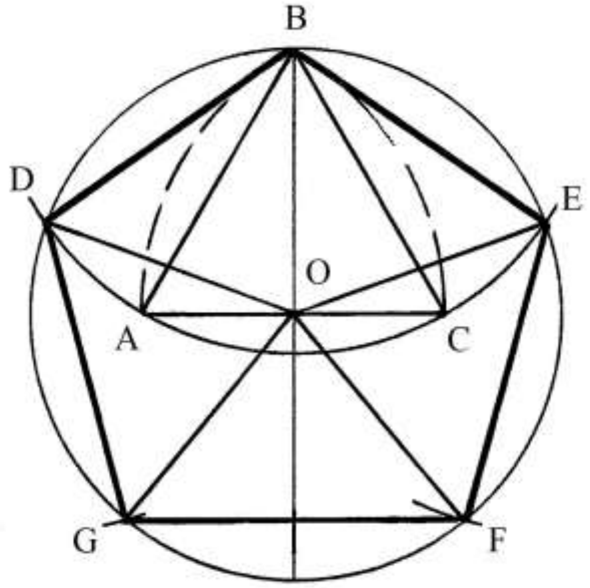
ACDEB è il pentagono inscritto.

La costruzione ha richiesto *due* diverse aperture del compasso.

Altri pentagoni approssimati secondo Leonardo da Vinci

Nel manoscritto A, sempre conservato a Parigi, sono contenute due costruzioni proposte da Leonardo da Vinci per tracciare il pentagono approssimato, rispettivamente al foglio 13 *verso* e al foglio 17 *verso*.

La prima costruzione procede da un triangolo equilatero che ha lato lungo quanto quello del pentagono:



ABC è il triangolo equilatero e O è il punto medio del lato AC. Tracciare l'altezza BO.

Fare centro in O e con raggio OB disegnare una circonferenza.

Con raggio BA (= BC) fare centro in B e tracciare un arco che taglia la precedente circonferenza nei punti D e E.

Con la stessa apertura fare centro in D e E e determinare i punti F e G.

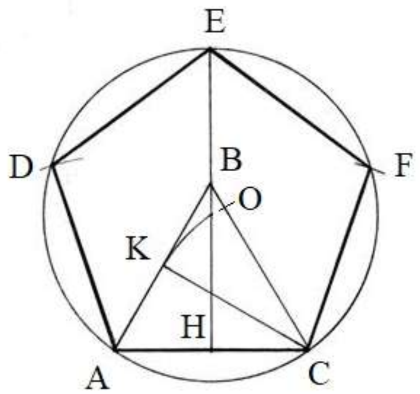
BEFGD è il pentagono approssimato inscritto.

I lati BD, BE, DF e EG hanno la stessa lunghezza, mentre il quinto lato – GF – è più lungo degli altri: l'errore è notevole perché ammonta al 14,29%.

La costruzione non può essere ottenuta con il compasso a apertura fissa.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Il secondo metodo prende sempre l'avvio da un triangolo equilatero (ABC nella figura che segue) che ha il lato AC comune con il pentagono da costruire:



H è il punto medio di AC e K lo è del lato AB.

BH e CK sono due altezze del triangolo equilatero.

Prolungare verso l'alto l'altezza HB.

Fare centro nel punto C e, con raggio CK, tracciare un arco da K fino a intersecare l'altezza BH in un nuovo punto, O: questo è il centro di una circonferenza sulla quale si troveranno i vertici del pentagono.

Fare centro in O e, con raggio OA (= OC), disegnare una circonferenza.

A partire da A riportare lungo la circonferenza la lunghezza di AC.

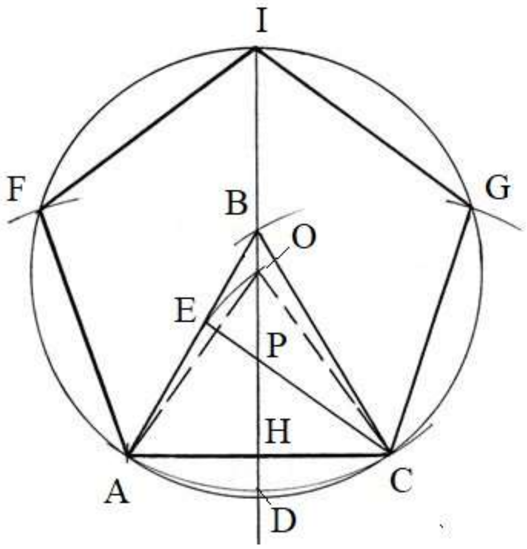
ADEFC è il pentagono approssimato.

La costruzione è più precisa della precedente: i lati AC, AD e FC hanno la stessa lunghezza. I lati DE e EF sono leggermente più lunghi degli altri tre: l'errore non supera il 2%.

Questa costruzione non è ricavabile con un compasso a apertura fissa.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Una variante del secondo metodo è spiegata con la costruzione che segue:



ABC è il triangolo equilatero di partenza e BH è l'altezza relativa al lato AC. Prolungare BH verso l'alto e verso il basso.

Fare centro nel punto B e, con raggio BA = BC, tracciare un arco che taglia il prolungamento di BH in un punto, D.

Determinare il punto medio di DB: è P.

Disegnare il segmento CP e prolungarlo fino a intersecare il lato AB nel punto E.

Fare centro nel punto C e, con raggio CE, tracciare un arco da E fino a tagliare BH nel punto O.

Con raggio OA = OC, fare centro nel punto O e disegnare una circonferenza. Su questa ultima riportare la lunghezza di AC.

AFIGC è il pentagono inscritto *approssimato*.

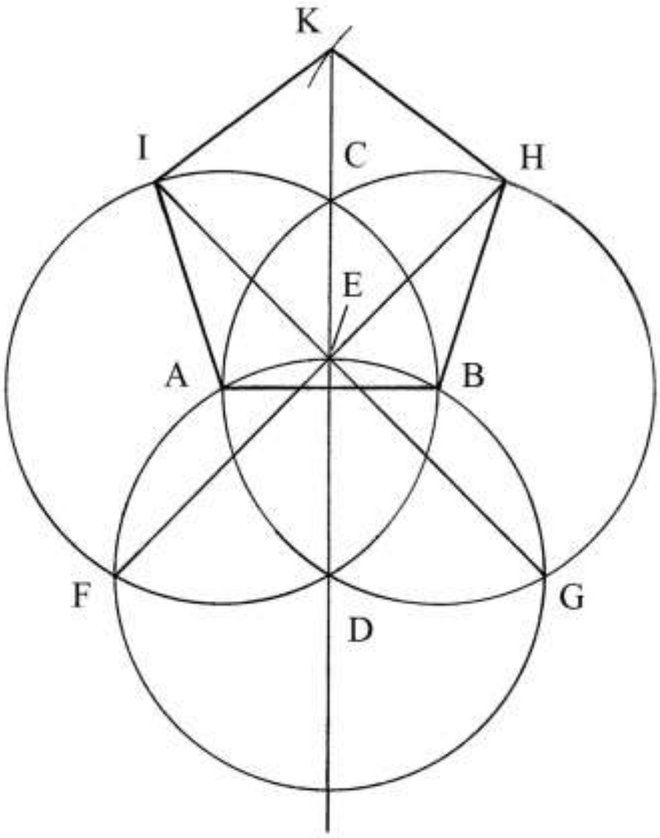
Tre lati hanno uguale lunghezza: AC = AF = CG.

I lati FI e IG hanno uguale lunghezza, che però è maggiore di quella degli altri lati con un errore dell'1,66%.

Questa costruzione usa una pluralità di aperture di compasso.

Costruzione approssimata di un pentagono (metodo di Dürer)

Il segmento AB è il lato orizzontale del pentagono. Disegnare due circonferenze di raggio AB con centro in A e in B:



Esse si intersecano nei punti C e D. Tracciare l'asse passante per i punti C e D e prolungarlo verso l'alto, oltre il punto C.

Con centro in D e apertura AB, disegnare un'altra circonferenza che taglia l'asse del segmento in E e le due prime circonferenze in F e G.

Per le coppie di punti (F e E) e (G e E) tracciare i segmenti che intersecano le prime due circonferenze nei punti H e I: essi sono due dei vertici cercati del pentagono.

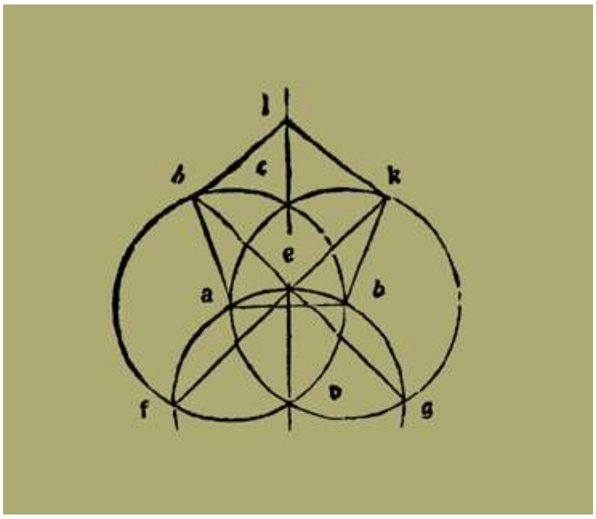
Con raggio AB e centro in H si determina il punto K, ultimo vertice, posto sull'asse del segmento AB.

Il matematico italiano Giovanni Battista Benedetti (1530-1590) e il matematico gesuita tedesco Cristoforo Clavio (1538-1612) dimostrarono che la costruzione è *approssimata*: i lati hanno tutti la stessa lunghezza, ma gli angoli non sono della stessa ampiezza: il pentagono non è equiangolo e quindi non è regolare.

Nel suo trattato "*Geometria practica*" pubblicato in latino nel 1606, Clavio calcolò l'esatta ampiezza dei cinque angoli del pentagono di Dürer, misurandoli in *gradi* (°) e in *minuti* ('):

Angoli nei vertici	Gradi (°)	Minuti (')
A	108	22
B	108	22
H	107	2
I	107	2
K	109	12
Totali	539	60' = 1 °
Gradi totali	539° + 1° = 540°	0

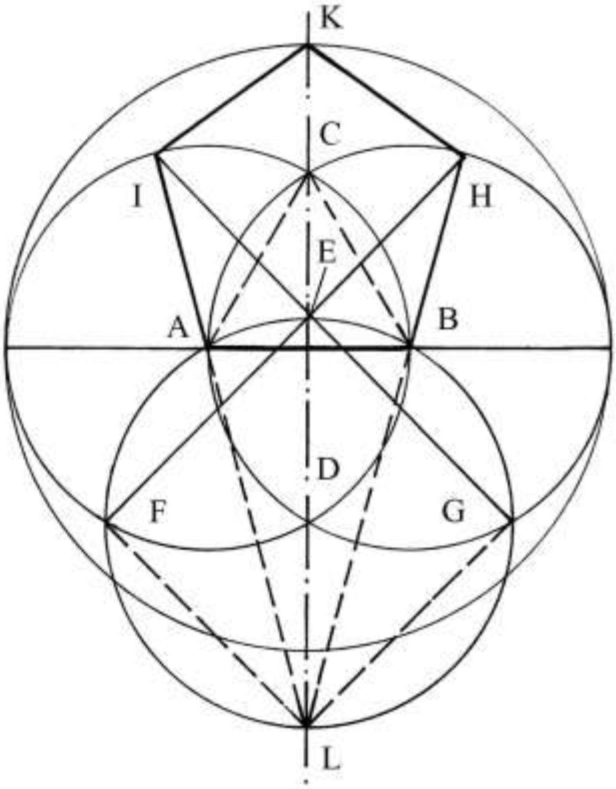
Il metodo non è originale di Albrecht Dürer (1471-1528) : egli lo ricavò da un piccolo trattato geometrico, scritto in tedesco dall'architetto Matthäus Roriczer (circa 1435-1495), costruttore di cattedrali, "*Geometria deutsch*", come mostra la figura che segue:



Nella costruzione di Roriczer e di Dürer è usata la regola del *raggio fisso*, perché tutti gli archi sono realizzati con un'unica apertura di compasso, uguale alla lunghezza del lato del pentagono da costruire.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

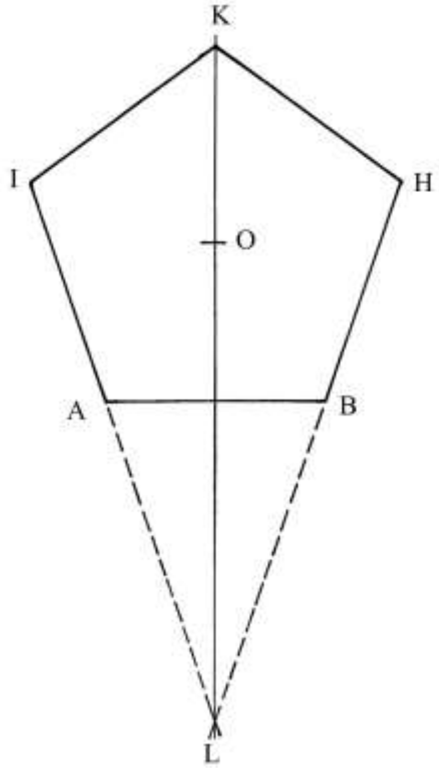
La costruzione di Roriczer può essere completata tracciando due poligoni regolari nel modo presentato nello schema che segue:



ACB è un triangolo equilatero e EFLG è un quadrato inscritto nel cerchio di centro D e che ha lati lunghi quanto EF.

I prolungamenti verso il basso dei lati IA e HB si incontrano nel punto L, vertice del quadrato EFLG.

La costruzione di Roriczer è approssimata. AIKHB è invece un pentagono regolare:



I suoi angoli interni hanno ampiezza uguale a 108°.

I prolungamenti dei lati IA e HB si incontrano nel punto L che giace sull'asse di simmetria passante per K, per il centro O e per L.

Il triangolo ABL è isoscele. Approfondiamo la conoscenza delle sue proprietà.

Gli angoli BAL e ABL sono *supplementari* rispettivamente dei due angoli IAB e ABH; essi hanno ampiezza data da:

BAL = ABL = IAL – IAB = 108° – 72°.

L'angolo ALB è ampio:

ALB = 180° – BAL – ABL = 180° – 72° – 72° = 36°.

ABL è un *triangolo aureo*.

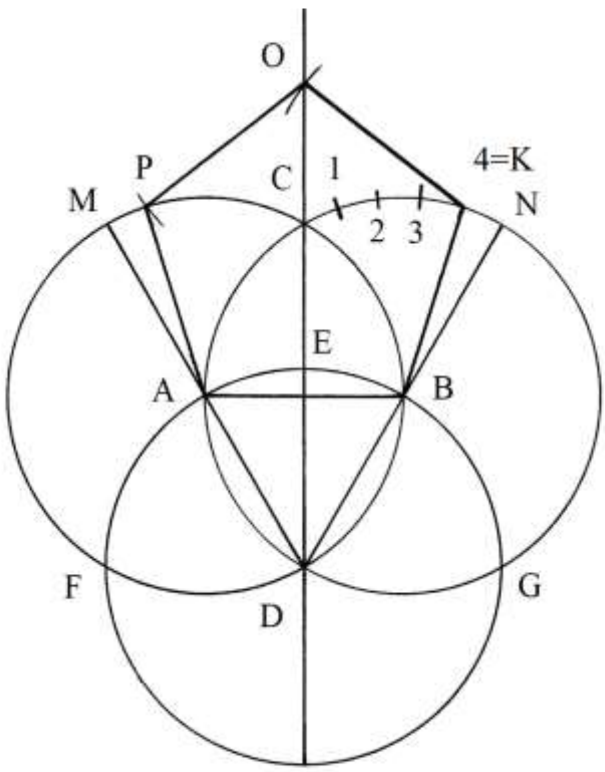
La probabile origine del metodo di Roriczer

La figura che segue descrive la probabile origine della costruzione del pentagono secondo Roriczer.

Disegnare un triangolo equilatero con il vertice in basso: è ABD. Il lato AB è anche il lato orizzontale del pentagono da costruire.

È importante notare che tutti gli archi di circonferenza hanno la stessa apertura: questa regola era imposta dalla scarsa qualità dei compassi dell'epoca, difficilmente regolabili.

Con apertura di compasso AB fare centro in A, in B e in D e disegnare tre circonferenze:



Esse si tagliano nei punti A, B, C, D, F e G.

Tracciare la retta verticale passante per C e D.

Prolungare i lati DA (fino a determinare il punto M) e DB (fino a fissare il punto N).

Probabilmente, Rorizcer divise in 5 parti uguali (con una certa approssimazione) l'arco CN: i punti C, 1, 2, 3, 4 e N sono i vertici dei singoli archetti.

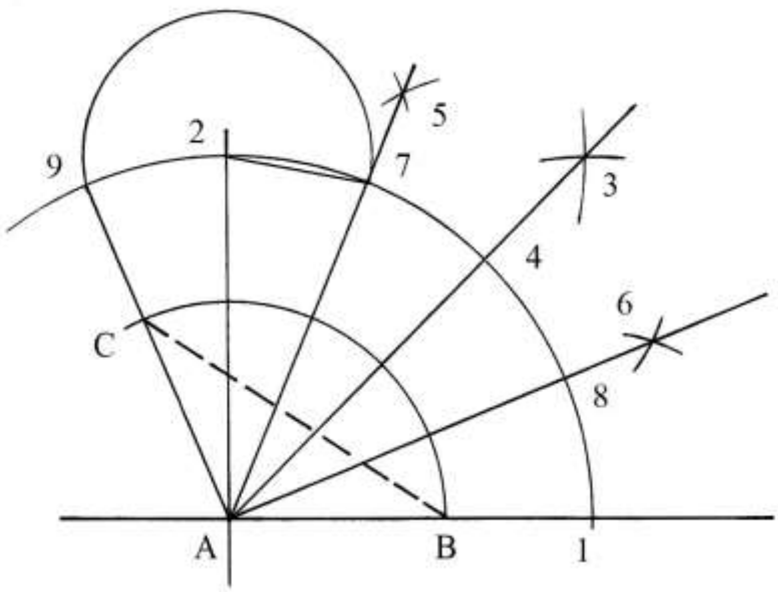
Per il punto 4, poi indicato con K, tracciò il segmento BK, secondo lato del pentagono e di lunghezza uguale a quella di AB. Con apertura AB fece centro in K e tagliò in O la retta verticale. Con la stessa apertura fece centro in O e sulla circonferenza di centro A intercettò il punto P.

Il poligono ABKOP è il pentagono costruito con il metodo di Roriczer.

Una variante della costruzione di Roriczer

La costruzione che è segue *non* è dovuta a Roriczer, ma ne è una variante semplificata e più precisa.

Inizialmente serve una costruzione ausiliaria. Tracciare una retta e su di essa fissare due punti, A e B, a distanza uguale a quella della lunghezza del lato del pentagono da costruire:



Elevare la perpendicolare alla retta nel punto A.

Scegliere un punto alla destra di B: è 1. Più esso è lontano più la costruzione risulterà precisa.

Fare centro in A e, con raggio A-1, disegnare un arco dal punto 1per fissare un punto, 2, sulla perpendicolare. L'angolo 2-A-1 è chiaramente *retto*.

Di nuovo, fare centro in A e, con raggio AB tracciare un arco da B fino a superare a sinistra la perpendicolare A-2.

Dobbiamo procedere alla divisione dell'angolo retto 2-A-1 in quattro parti uguali e alla conseguente divisione in quattro archi uguali dell'arco 2-A-1.

Con centro in 1 e 2, disegnare due archi che si intersecano nel punto 3: connettere questo punto ad A e fissare il punto 4.

L'angolo 2-A-1 è diviso in due angoli uguali: 2-A-4 e 4-A-1.

Con altra apertura di compasso, fare centro nei punti 2, 4 e 1 e tracciare gli archi che si intersecano nei punti 5 e 6. Per questi punti condurre le bisettrici uscenti dal punto A. Esse tagliano l'arco di circonferenza esterno nei punti 7 e 8.

L'arco 2-A-1 è ora diviso in *quattro* archi uguali, che sottendono angoli di ampiezza uguale a 22,5°.

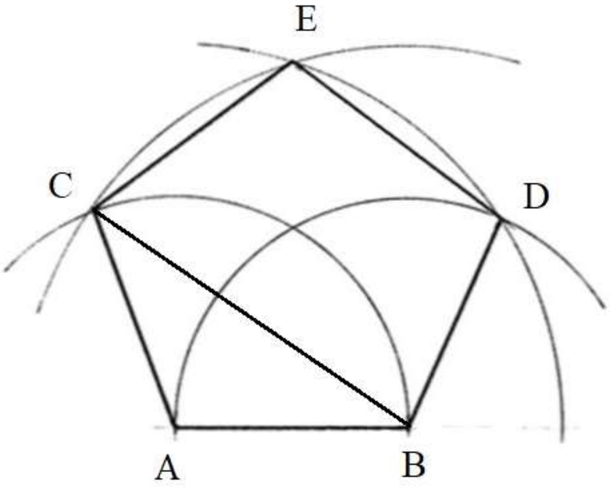
Fare centro in 2 e, con raggio uguale alla lunghezza della corda 2-7, disegnare un arco di circonferenza fino a tagliare l'arco esterno in un nuovo punto, 9.

Tracciare il raggio 9-A: esso interseca l'arco di circonferenza interno in un punto, C, che è il *terzo vertice* del pentagono da costruire.

Gli archi concentrici 9-2-7-4-8-1 e CB sono divisi in *cinque* parti uguali.

La corda CB, *tratteggiata* in figura, è una diagonale del pentagono da costruire.

Procedere alla costruzione del pentagono:

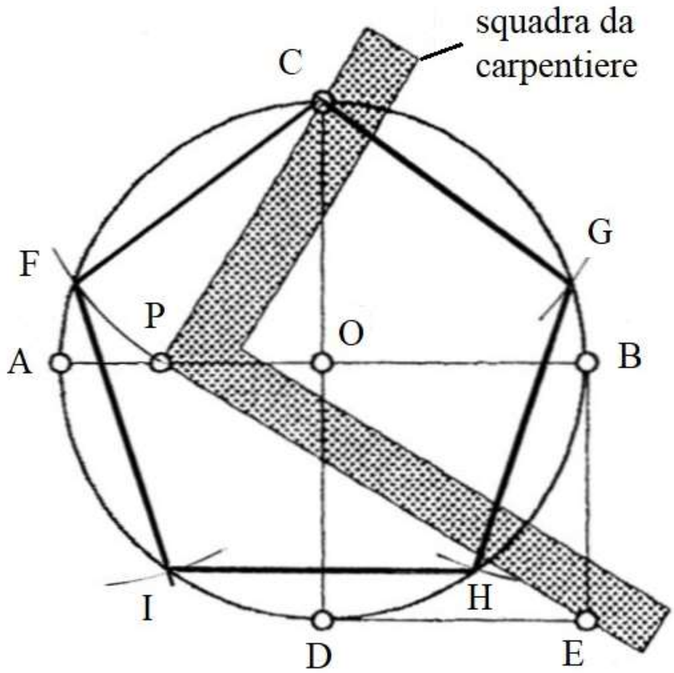


Tracciare una retta orizzontale e fissarvi il lato AB: fare centro in A e in B e disegnare due archi con raggio AB.

Con il compasso, misurare la lunghezza della diagonale BC e riportarla nella seconda costruzione, facendo centro nei punti A e B: sono così determinati i punti C, D e E e il pentagono è costruito.

<u>Il pentagono costruito con la squadra del carpentiere</u>

Un metodo semplificato per disegnare un pentagono inscritto richiede l'uso della *squadra da carpentiere*, strumento usato da secoli nei cantieri edili:



Disegnare la circonferenza con centro in O e tracciare i due diametri AB e CD, fra loro perpendicolari.

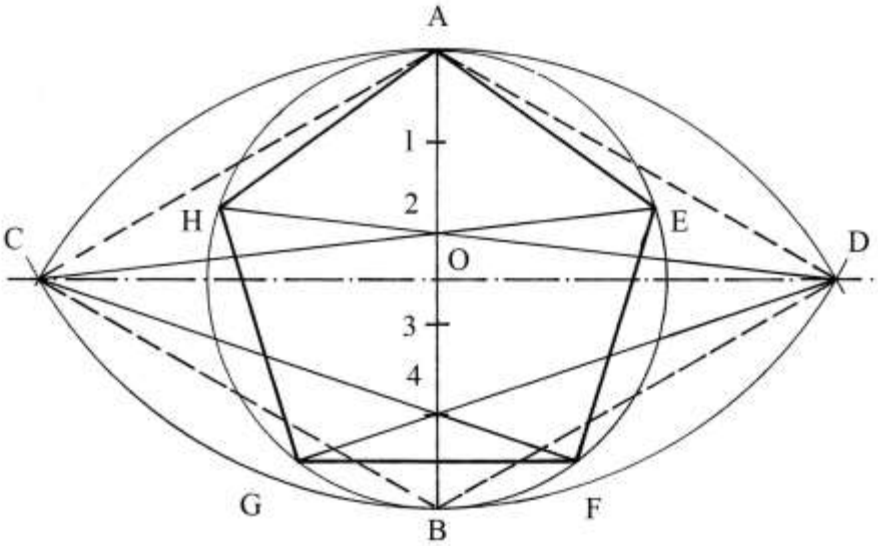
Condurre le tangenti alla circonferenza nei punti B e D (parallele rispettivamente ai diametri CD e AB): esse si intersecano nel punto E, vertice di un quadrato con il lato lungo quanto il raggio della circonferenza.

Disponendo la squadra come in figura, il suo vertice P viene a giacere sul diametro AB: il segmento CP è la lunghezza del lato del pentagono inscritto CGHIF.

Le costruzioni approssimate di Carlo Renaldini

Carlo Renaldini (1615-1679) è stato un matematico e geometra italiano. A lui si deve una costruzione geometrica *approssimata* per i poligoni non ricavabili con riga non graduata e compasso ad apertura fissa: essa è descritta nel suo trattato "*Geometra promotus*" pubblicato a Padova nel 1670.

Disegnare la circonferenza di centro O e tracciare il diametro verticale AB:



Dividere il diametro AB in *cinque* parti uguali: i punti 1, 2, 3 e 4 sono i divisori. Il numero delle parti in cui viene diviso è uguale al numero dei lati del poligono da inscrivere: il metodo può essere impiegato per costruire poligoni con un maggiore numero di lati.

Con centro in A e in B e raggio AB tracciare due archi da A e da B che si intersecano nei punti C e D: le corde AB, AC, BC, AD e BD sono i lati di due triangoli equilateri simmetrici uniti lungo AB.

Dai punti C e D disegnare quattro linee passanti per i punti 2 e 4: esse tagliano la circonferenza di centro O nei punti E, F, G e H: AEFGH è un pentagono approssimato inscritto nel cerchio. Se fossero usati i punti 1 e 3, il pentagono risulterebbe rovesciato rispetto a quello AEFGH, con un vertice nel punto B.

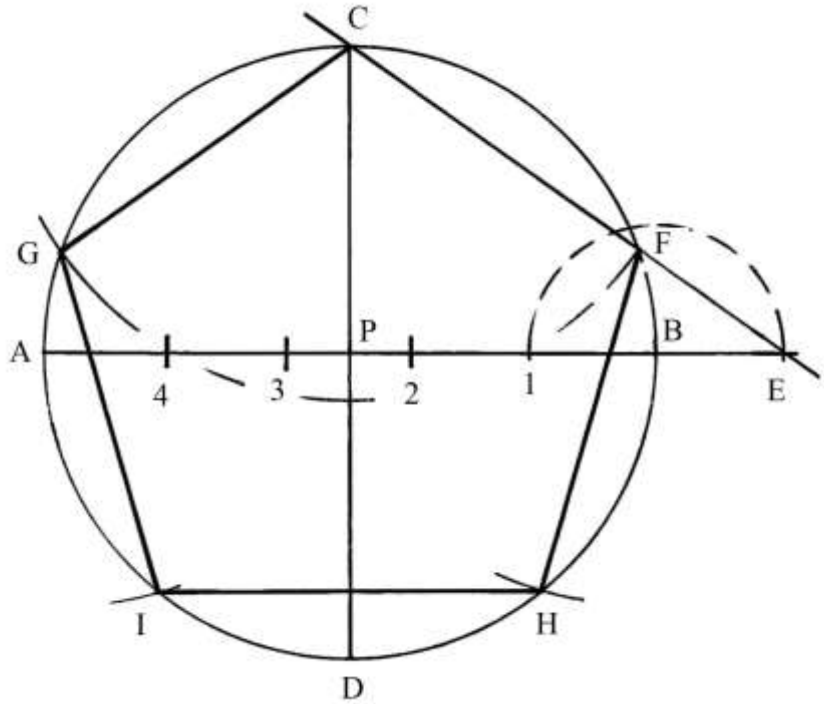
Tracciando le linee uscenti da C e da D e passanti per tutti punti (1, 2, 3 e 4) la costruzione fornirebbe un *decagono* approssimato inscritto.

Poligoni inscritti – metodo di Bardin

Libre-Irmond Bardin (o Bardin de la Moselle, 1794-1867) è stato un topografo francese, autore di alcuni trattati di geometria descrittiva. La sua conoscenza in Italia si deve a Italo Ghersi.

La sua è una costruzione approssimata che può essere usata solo per poligoni con *numero minimo di lati uguale a 5*: la costruzione che segue è basata su quella di Bardin, ma introduce una modifica.

Disegnare una circonferenza con centro in P e i due diametri AB e CD fra loro perpendicolari; prolungare AB verso destra.



Dividere il diametro AB in un numero di parti uguali, numero uguale a quello dei lati del poligono da inscrivere: nell'esempio della figura, il diametro è diviso in 5 parti uguali, perché deve essere inscritto un poligono di 5 lati e cioè un *pentagono*.

Fare centro in B e con raggio B-1 tracciare una semicirconferenza dal punto 1 fino a incontrare il prolungamento di AB in E.

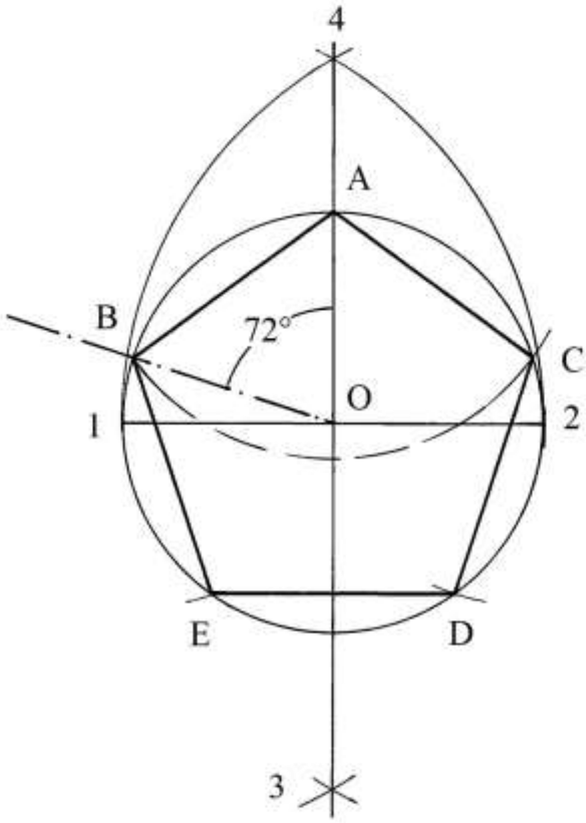
Tracciare il segmento CE: esso interseca la circonferenza nel punto F: la corda CF è la lunghezza del lato del pentagono approssimato inscritto e riportandola lungo la circonferenza si ottiene il poligono CFHIG.

<u>Metodo di Richmond per disegnare il pentagono inscritto</u>

Il geometra inglese Herbert William Richmond (1863-1948) presentò nel 1893 un metodo semplice per disegnare un pentagono inscritto in un cerchio dato.

La costruzione richiede l'uso di un *goniometro* di precisione, ma è assai rapida.

Per prima cosa va disegnata una retta orizzontale. Su di essa fissiamo il centro della circonferenza, O:



Con il raggio dato, disegnare la circonferenza che taglia la retta nei punti 1 e 2. Facendo centro in questi due ultimi, con raggio a piacere più grande, tracciare i quattro archi che si intersecano nei punti 3 e 4.

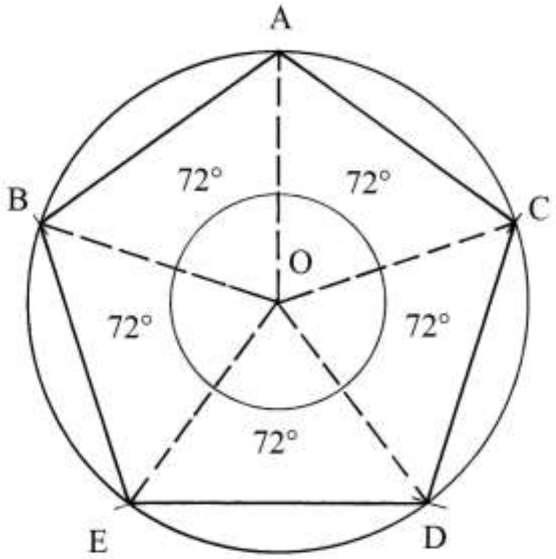
Disegnare la retta verticale passante per i punti 3 e 4: essa interseca la circonferenza nel punto A, che è il vertice superiore del pentagono.

Con il goniometro determinare un angolo di 72° (AÔB) e tracciare la semiretta uscente da O: essa taglia la circonferenza nel punto B.

La corda AB è la lunghezza del lato del pentagono; riportare la sua lunghezza sulla circonferenza: ABEDC è il pentagono inscritto.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

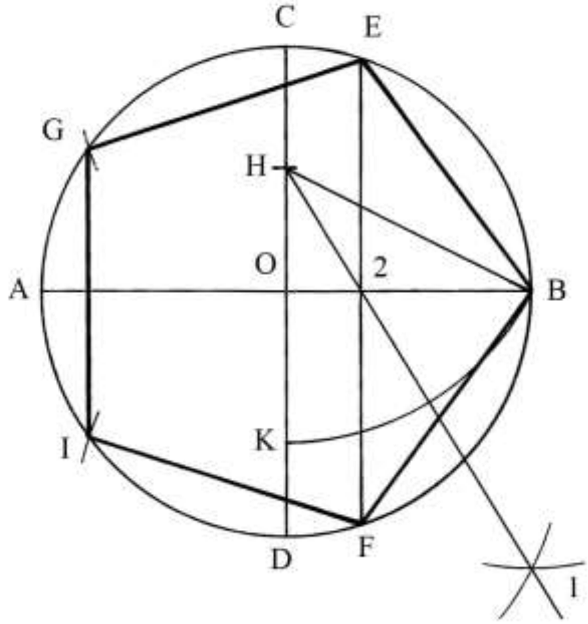
In un pentagono regolare inscritto in un cerchio di centro O e raggio OA, l’angolo al centro è diviso in cinque angoli di uguale ampiezza: essi sono delimitati dai cinque raggi che collegano i vertici di ABEDC con il centro O:



Pentagono inscritto (altro metodo di Richmond)

Al citato geometra inglese Richmond si deve una costruzione del pentagono più precisa della precedente.

Disegnare una circonferenza con centro in O e due diametri fra loro perpendicolari, AB e CD:



Dividere in due parti uguali il raggio OC: H è il suo punto medio.

Disegnare la semiretta passante per H e B. Fare centro in H e con raggio HB tracciare l'arco BK. Costruire la bisettrice dell'angolo BHK: essa passa per il punto 1.

La bisettrice interseca il diametro AB nel punto 2.

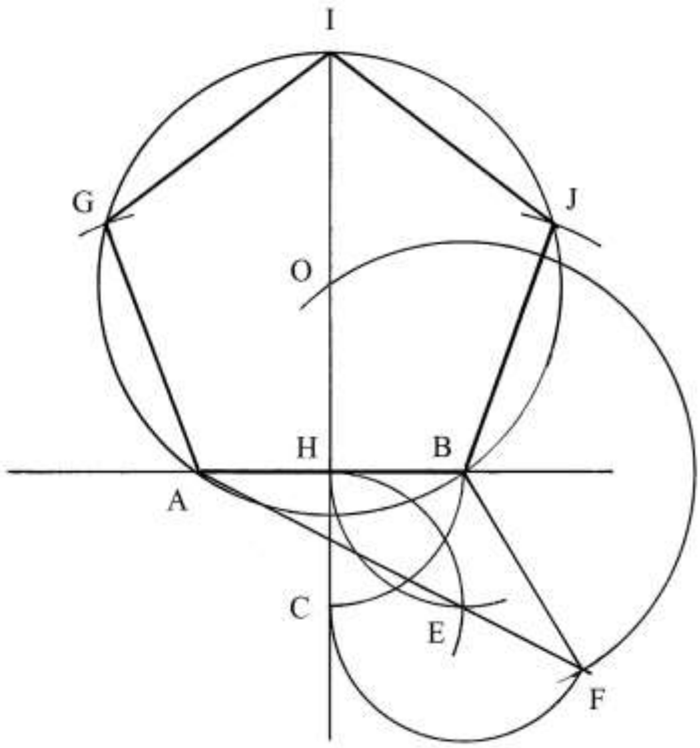
Per il punto 2 tracciare la *corda* parallela al diametro verticale CD: essa taglia la circonferenza nei punti E e F.

I punti B, E e F sono tre vertici del pentagono. Con raggio BF fare centro in E e in F per determinare i punti G e I. Disegnare il pentagono BFIGE: la costruzione è approssimata.

Pentagono dato il lato – metodo di Adams

La costruzione del pentagono dato il lato, che di seguito viene spiegata, è dovuta all'americano Charles L. Adams, professore di geometria descrittiva al Massachusetts Institute of Technology. Adams la descrisse nel suo trattato "*Mechanichal drawing. Technique and working methods*", pubblicato a Boston nel 1905.

Disegnare il lato AB e determinare il suo punto medio H:



Con centro in H e raggio HB tracciare un arco da B fino a intersecare l'asse del segmento AB nel punto C.

Sempre con raggio HB fare centro in B e in C: i due archi determinano il punto E.

Disegnare un segmento passante per A e per E.

Con lo stesso raggio (HB) fare centro in E e tracciare una semicirconferenza da C fino a tagliare in F il segmento passante per A e per E.

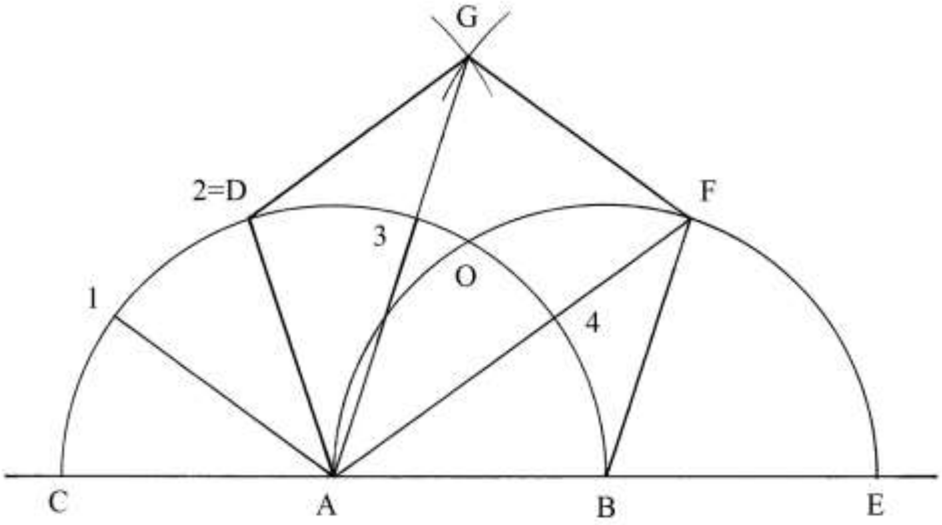
Disegnare il segmento BF.

Con centro in B e raggio BF tracciare un arco di circonferenza che taglia in O l'asse del segmento: il punto O è il centro della circonferenza circoscritta al pentagono.

A partire da A e da B riportare, lungo la circonferenza, con il compasso la lunghezza di AB: ABJIG è il pentagono inscritto approssimato.

Costruzione semplificata del pentagono dato il lato

Il segmento AB è il lato del pentagono:



Con raggio AB fare centro in A e in B e disegnare due semicirconferenze che si intersecano nel punto O, centro del pentagono da costruire.

Con l'aiuto di un *goniometro* fissare i punti 1, 2, 3 e 4 sulla semicirconferenza con centro in A. L'ampiezza degli angoli CA1, 1A2, 2A3, 3A4 e 4AB è di 180/5° e cioè di 36°.

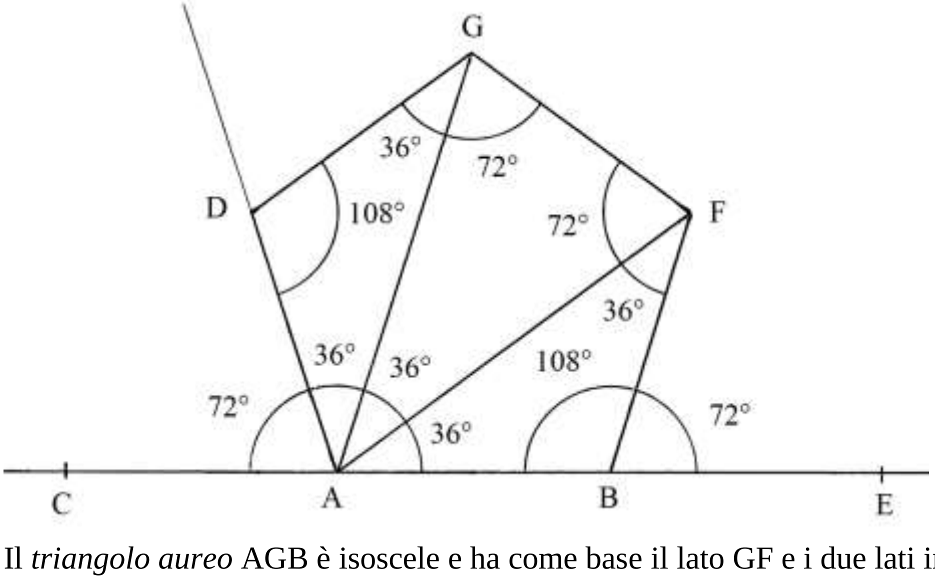
Disegnare i segmenti uscenti da A e passanti per i punti 1, 2, 3 e 4: i punti D e F sono due vertici del pentagono.

Con raggio AB fare centro in D e in F: la loro intersezione è il punto G, che si trova sul segmento passante per A e per 3.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

La costruzione è teoricamente esatta, ma il risultato è condizionato dalla precisione del goniometro.

Il metodo è basato sulla scomposizione del pentagono regolare in tre triangoli isosceli:



Il *triangolo aureo* AGB è isoscele e ha come base il lato GF e i due lati inclinati AG e AF sono costituiti da due diagonali del poligono.

Gli *gnomoni aurei* ADG e AFB son triangoli isosceli e hanno identiche dimensioni: le loro basi sono rappresentate da due diagonali del pentagono, AG e AF. I loro lati più corti (AD-DG) e (AB-BF) sono costituiti da lati del pentagono.

Gli angoli DAC e FBE hanno ampiezza uguale a 72°: essi sono *angoli supplementari* rispettivamente degli angoli DAB A ABF.

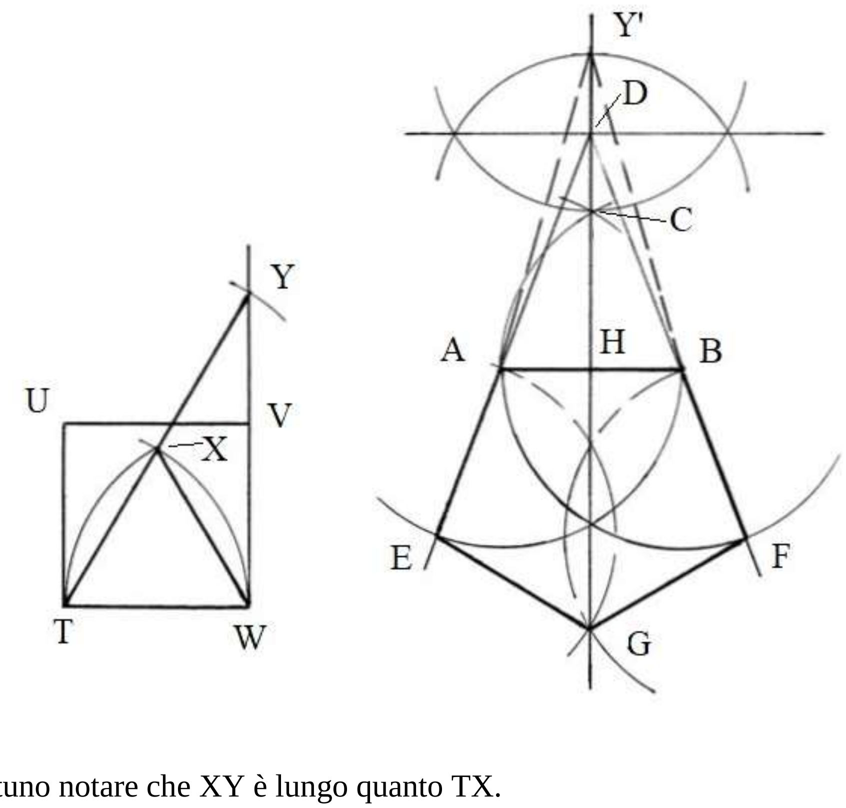
Un'altra costruzione approssimata del pentagono

La costruzione che segue genera un pentagono approssimato *equilatero* (perché ha i lati di uguale lunghezza) ma non equiangolo.

A sinistra, costruire il quadrato TUVW con lato TW lungo quanto quello del pentagono da disegnare.

Prolungare verso l'alto il lato WV. Tracciare il triangolo equilatero TXW e prolungare verso l'alto il lato TX: il prolungamento fissa il punto Y.

TYW è un triangolo rettangolo che è metà di un triangolo equilatero di lati lunghi quanto TY = 2 * TW.



È opportuno notare che XY è lungo quanto TX.

A destra, disegnare il primo lato del pentagono, AB = TW.

Costruire l'asse del segmento AB che lo interseca nel suo punto medio, H.

Con il compasso, misurare la lunghezza di WY e riportarla da H sull'asse per stabilire il punto Y':

WY = AY' = BY'.

Fare centro nei punti A e B e tracciare due archi con raggio AB: viene fissato il punto C.

Costruire l'asse del segmento CY': esso stabilisce il punto D.

Dal punto D condurre due semirette passanti per i punti A e B: esse determinano i punti E e F.

Con raggio AB = AE, fare centro nei punti E e F e fissare il punto G.

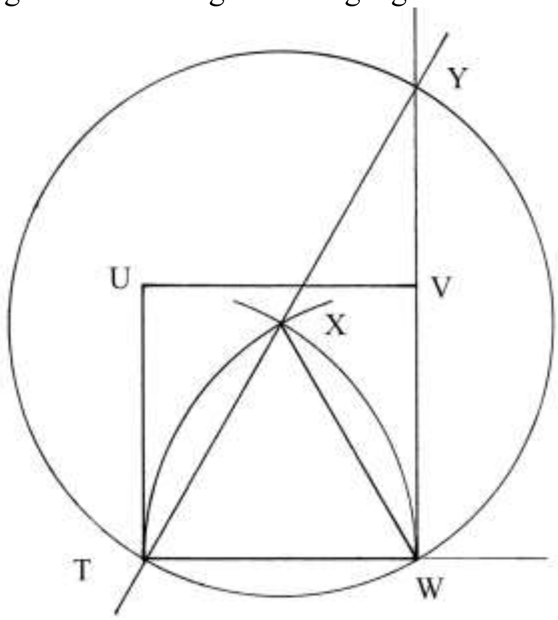
ABFGE è il pentagono approssimato equilatero.

L'angolo EGF è più ampio degli altri quattro angoli interni del pentagono; le ampiezze, arrotondate all'intero più vicino, sono le seguenti:

* EAB = ABF ≈ 113°.
* AEG = BFG ≈ 98°.
* EGF ≈ 118°.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Lo schema che segue mostra l'origine dell'eguaglianza fra le lunghezze di AB e di TW:



TUVW è il quadrato e TXW è il triangolo equilatero: i due poligoni regolari hanno lati di lunghezza uguale.

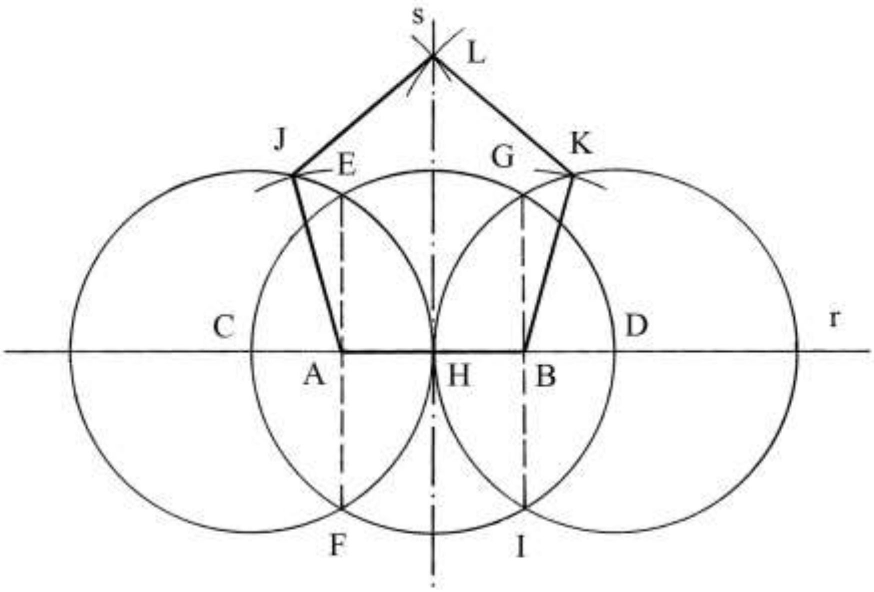
Fare centro in X e con raggio XT = XW disegnare una circonferenza che passa per i punti T, W e Y: XY è un raggio ed ha la stessa lunghezza di XT.

Pentagono approssimato – metodo di Stephen

Il ricercatore nigeriano Ohochuku N. Stephen nell'articolo citato in bibliografia propone una serie di costruzioni, esatte o approssimate di poligoni regolari dal triangolo equilatero all'ennagono, cioè con numero di lati compreso fra 3 e 9.

Riguardo al pentagono sono presentate due diverse soluzioni che nell'articolo non sono attribuite ad alcun Autore: la prima non è qui riprodotta perché è la costruzione approssimata dovuta a Albrecht Dürer. La seconda è descritta qui di seguito.

Tracciare una retta orizzontale, *r*, e fissarvi il primo lato del pentagono, AB:



Determinare il punto medio di AB: è H. Per questo punto tracciare la retta perpendicolare alla *r*: è la *s*.

Con raggio AB fare centro in A e disegnare una circonferenza che taglia la retta *r* in due punti, C e D.

Sempre con raggio AB fare centro in C e in D e tracciare due circonferenze fra loro tangenti nel punto H.

Le intersezioni fra le tre circonferenze fissano i punti E, F, G e I: EF e GI sono le corde comuni al sistema delle tre circonferenze.

Ancora con raggio AB fare centro nei punti A e B e disegnare due archi che tagliano le circonferenze di centri in C e in D nei punti J e K.

Infine, con la stessa apertura, fare centro in J e in K e tracciare due archi che si incrociano sulla retta *s* nel punto L.

AJLKB è il pentagono equilatero, ma non equiangolo: il poligono non è regolare.

Le ampiezze, approssimate all'intero più vicino, dei cinque angoli sono:

* JAB = ABG ≈ 105°.
* LJA = LGB ≈ 115°.
* JLK ≈ 100°.

Le deviazioni dall'ampiezza degli angoli interni di un pentagono regolare, 108°, sono notevoli.

La costruzione presenta una caratteristica: è realizzata con un'*unica* apertura di compasso, quasi che esso fosse bloccato: lo strumento è un *rusty compass*, un compasso arrugginito (*rusty*).

Bibliografia

1. Bartoli Maria Teresa, “Le ragioni geometriche del segno architettonico”, Firenze, Alinea Editrice, 1997, pp. 117.
2. Bartoli Maria Teresa, “Il teorema degli anfiteatri: un’ipotesi”, in AA. VV., “Matematica e architettura”. Metodi analitici, metodi geometrici e rappresentazione in Architettura, Firenze, Alinea Editrice, 2001, pp. 25-32.
3. Calzolani Sergio, “Ludo-geometrico-Leonardo.pdf”, in www.geometriapratica.it.
4. Cundy H. M. e Rollett A. P., “I modelli matematici”, trad. it., Milano, Feltrinelli, 1974, pp. 292.
5. Dedò Maria, “Forme simmetria e topologia”, Padova, Decibel Editrice, 1999, pp. 408.
6. Euclide, “Gli Elementi”, a cura di Attilio Frajese e Lamberto Maccioni, Torino, UTET, 1970, pp. 1046.
7. Fehér Krisztina – Szilágyi – Bölcskei Attila – Halmos Balázs, “Pentagons in Medieval Sources and Architecture”, in “Nexus Network Journal”, 2019, vol. 21, pp. 681-703.
8. Fletcher Rachel, “Infinite Measure”, Staunton, George F. Thompson Publishing, 2013, pp. 399.
9. Gardner Martin “Una straordinaria tassellatura non periodica che arricchisce la teoria delle tassellature”, “Le Scienze”, maggio 1977, n. 105, pp. 118 – 129.
10. Ghersi Italo, “Matematica dilettevole e curiosa”, Milano, Hoepli, 5.a ed., 1988, pp. VIII-778.
11. Herz – Fischler Roger, “A Mathematical History of the Golden Number”, Mineola (New York), Dover Publications, 1998, pp. xiv – 193.
12. Hogendijk Jan P., “Mathematics and Geometric ornamentation in the medieval Islamic world”, 2010, (reperibile come neugebauer-written.pdf, pp. 15).
13. Livio Mario, “La sezione aurea”, trad. it., Milano, Rizzoli, 2003, pp. 416.
14. Livio Mario, “L’equazione impossibile”, trad. it., Milano, Rizzoli, 2005, pp. 414.
15. Maor Eli – Jost Eugen, “L’arte della geometria”, trad. it., Torino, Codice Edizioni, 2020, pp. 193.
16. Richeson David S., “Tales of Impossibility. The 2000-Year Quest to Solve the Mathematical Problems of Antiquity”, Princeton and Oxford, Princeton University Press, 2019, pp. xii+436.
17. Stephen Ohochuku N., “Methods of Constructing Regular Polygons Suitable for Introductory Lessons”, “American Journal of Mathematics and Statistics”, 2016, 6(6), pp. 242-250.
18. Sutton Andrew, “Ruler & Compass. Practical geometric constructions”, Glastonbury, Wooden Book Ltd, 2009, pp. 58.