sergio(punto)calzolani(at)outlook(punto)it

Parole chiave: ragioni; braccio fiorentino da panno; braccio da terra; scudo quale triangolo isoscele o equilatero; uso della costante 22/7 quale approssimazione di π; aree figure piane; quadratura del cerchio; divisione di un cerchio in parti uguali di forma circolare; quadrati e rettangoli inscritti in un cerchio; urbanistica medievale di Firenze

I PROBLEMI DI GEOMETRIA PIANA CONTENUTI NEL "TRATTATO D'ARITMETICA" DI PAOLO DELL'ABBACO

Il benemerito storico della matematica medievale Gino Arrighi (1906 – 2001) pubblicò nel 1964 la trascrizione del *Trattato d'Aritmetica* di Paolo Dell'Abbaco, contenuto nel Codice Magliabechiano XI, 86, della Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze.

Paolo Dell'Abbaco (o Paolo Dagomari, 1282 – 1374) è stato probabilmente il più importante abacista fiorentino.

Come in altri trattati dello stesso argomento, alcune *ragioni* (nome attribuito ai problemi) sono riservati alla soluzione di quesiti di natura geometrica.

In questo articolo sono considerati solo i problemi di *geometria piana*.

Sono pochissimi i trattati medievali e rinascimentali italiani dedicati ai soli problemi geometrici e fra di essi i più importanti sono

* Anonimo Fiorentino, "Trattato di geometria pratica", dal codice L. IV. 28 della Biblioteca Comunale di Siena (metà del XV secolo);
* Orbetano da Montepulciano, "Regole di geometria pratica", dal manoscritto Moreni 130 della Biblioteca Riccardiana di Firenze (metà del XV secolo).

Entrambi sono stati trascritti e pubblicati a cura di Annalisa Simi.

Il testo di Paolo Dell'Abbaco risale al XIV secolo ed è scritto in *fiorentino*: è tuttora perfettamente leggibile e comprensibile.

Nota: per facilitare la comprensione deli problemi e delle figure riprodotte dal Trattato sono state qui aggiunte le lettere, maiuscole, ai vertici: esse sono assenti nell'originale. Le uniche scritte che compaiono nel manoscritto sono quelle relative alle dimensioni in braccia o braccia quadrate. Alcune figure sono riprodotte senza modifiche dal testo di Gino Arrighi.

I problemi o *ragioni* sono contrassegnati con la numerazione attribuita da Gino Arrighi nella sua trascrizione, citata in bibliografia.

La numerazione è racchiusa fra parentesi quadre [   ] collocate sulla stessa riga del titolo, a sinistra.

- APPROFONDIMENTO -

Le unità di misura lineari

Paolo Dell'Abbaco usa come unità di misura il braccio e il braccio quadrato.

Nel Medioevo, a Firenze erano usate due unità di misura della lunghezza:

* il braccio *da panno* ("braccio di Calimala", dal nome della strada fiorentina che ospitava molte botteghe di artigiani tessili): esso era lungo l'equivalente di 58,3626 cm;
* al suo fianco, per alcune attività edilizie era usato il *braccio da terra*.

Le due unità di misura lineare erano legate da un rapporto fisso:

$$1 \text{ braccio da terra} = (17/18) * \text{braccio da panno} \approx$$
$$\approx 58{,}3626 * (17/18) \approx 55{,}1202 \text{ cm} .$$

Molte grandi opere edilizie furono progettate con misure espresse in *braccia da panno* e suoi multipli e sottomultipli.

Il *braccio da terra* ebbe limitata importanza.

Come il fiorino, il *braccio da panno* fiorentino era diviso in 20 *soldi* e ciascun soldo era ripartito in 12 denari: furono usati gli stessi termini e uguali rapporti, sempre secondo la doppia base 20 e 12.

La tabella che segue elenca i multipli (il miglio) e molti sottomultipli del braccio da panno:

LUNGHEZZE

RAGGUAGLIO DEL BRACCIO FIORENTINO A PANNO E DELLE SUE FRAZIONI PIU' CITATE DAGLI ACCADEMICI			
Miglio	braccia 2833 1/3		m1653,607
braccio	20 soldi		cm 58,3626
soldo	12 denari	6 piccioli	cm 2,9181
quattrino	4 denari		cm 0,9727
denaro	12 punti		cm 0,2432
punto			cm 0,0203
un braccio e 1/4			cm 72,9532
2/3 di braccio			cm 38,9084
16 soldi			cm 46,69008
3/10 di braccio	18 quattrini		cm 17,50778
3/4 di braccio	15 soldi		cm 43,7718
8 quattrini	1/15 di braccio		cm 7,7816

La tabella è tratta dal sito del Museo Galileo (http://www.museogalileo.it/).

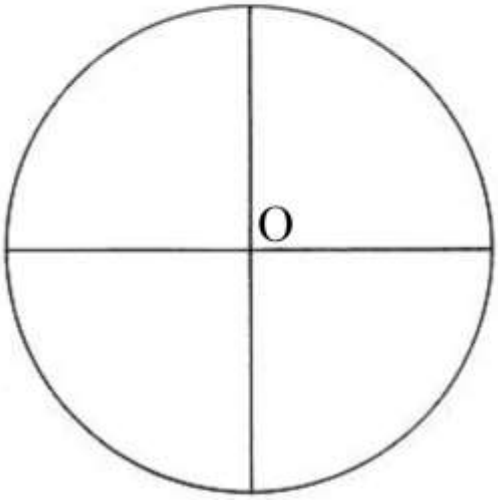
- -

[29] Circonferenza di un cerchio

Un cerchio ha diametro 12 braccia: deve essere calcolata la sua circonferenza.

L'Autore adotta per π il valore approssimato di (3 + 1/7) risalente a Archimede: Paolo Dell'Abbaco usa questa espressione invece di semplificare a 22/7.

La circonferenza è lunga 12 * (3 + 1/7) = 37 + 5/7 braccia.



Nota: Paolo Dell'Abbaco usa una notazione particolare per scrivere i numeri con parti frazionarie: egli scrive "3 1/7" e "3 e 1/7" invece di "3 + 1/7", omettendo il simbolo dell'addizione (+).

Questi sono *numeri misti*.

Per semplificare l'esposizione, in questo articolo i *numeri misti* (come 3 1/2) usati da Paolo sono talvolta convertiti negli equivalenti *numeri razionali* (3,5).

[42] <u>Piante in un campo</u>

Un campo è lungo 60 braccia ed è largo 40 braccia.

Il problema chiede di calcolare il numero di piante che possono esservi messe a dimora a distanza di 2 braccia.

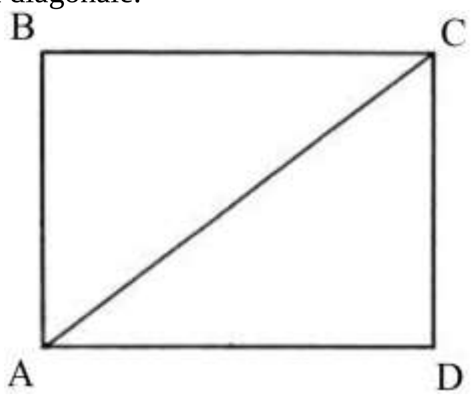
Nel senso della lunghezza ne entrano 31 perché esse sono piantate anche lungo i confini.

Per la stessa ragione, nel senso della larghezza sono 21.

Il totale è dato dal prodotto dei due numeri: 31 * 21 = 651 piante.

[53] <u>Diagonale di un rettangolo</u>

Uno rettangolo (*uno quadro*) ha lati (che Paolo chiama *facce*) lunghi 16 e 12 braccia. È richiesta la lunghezza della diagonale.



La procedura impiegata è la seguente:

*	moltiplicare 16 per sé stesso:	16*16 = 256 ;
*	moltiplicare 12 per sé stesso:	12*12 = 144 ;
*	sommare i due quadrati:	256 + 144 = 400 ;

*	estrarre la radice quadrata: $\sqrt{400} = 20$ braccia, lunghezza della diagonale.

[54] <u>Rettangolo</u>

Il problema è l'inverso del precedente.

Un rettangolo ha la diagonale lunga 20 braccia e la sua larghezza è 12 braccia.

È richiesta la lunghezza dell'altro lato.

La soluzione è data da un'applicazione del teorema di Pitagora (senza che venga citato); rifacendosi alla figura contenuta nel precedente paragrafo, la lunghezza di AD è ricavata da:

$$AD = \sqrt{(AC^2 - CD^2)} = \sqrt{(20^2 - 12^2)} = \sqrt{256} = 16 \text{ braccia .}$$

[55] <u>Lato incognito di un rettangolo</u>

Un rettangolo ha un lato lungo 16 braccia e una diagonale 20 braccia (riferirsi alla figura del problema [53]).

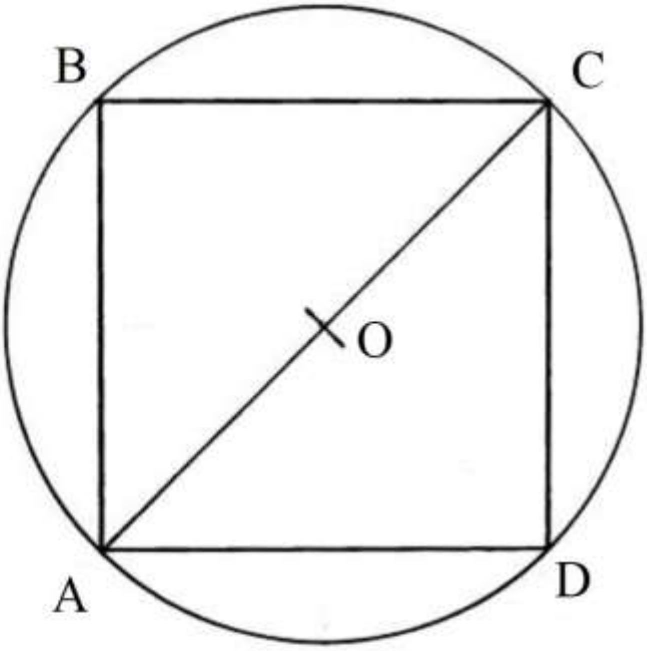
Il lato CD è lungo:

$$CD = \sqrt{(AC^2 - AD^2)} = \sqrt{(20^2 - 16^2)} = \sqrt{144} = 12 \text{ braccia .}$$

Nota: i problemi [53], [54] e [55] si riferiscono allo stesso rettangolo.

[56] <u>Quadratura di un cerchio</u>

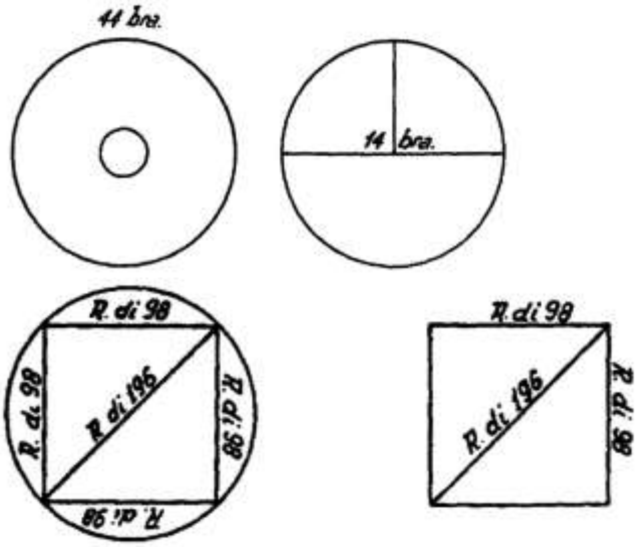
Un cerchio ha circonferenza lunga 44 braccia: il problema chiede di calcolare la lunghezza del lato del quadrato inscritto.



La procedura impiegata è la seguente:

* dividere la lunghezza della circonferenza per (3 + 1/7): 44 : (3 + 1/7) = 14 braccia, lunghezza del diametro ;
* disegnare il quadrato inscritto ABCD ;
* dato che il diametro AC è anche una diagonale del quadrato, occorre procedere a calcolare la lunghezza del lato AD con i seguenti passi:
* moltiplicare la lunghezza del diametro per sé stessa: 14 * 14 = 196 ;
* dividere per 2: 196 : 2 = 98 ;
* estrarre la radice quadrata: √98 in braccia è la lunghezza del lato del quadrato.

Paolo Dell'Abbaco scrisse le lunghezze sugli schemi:



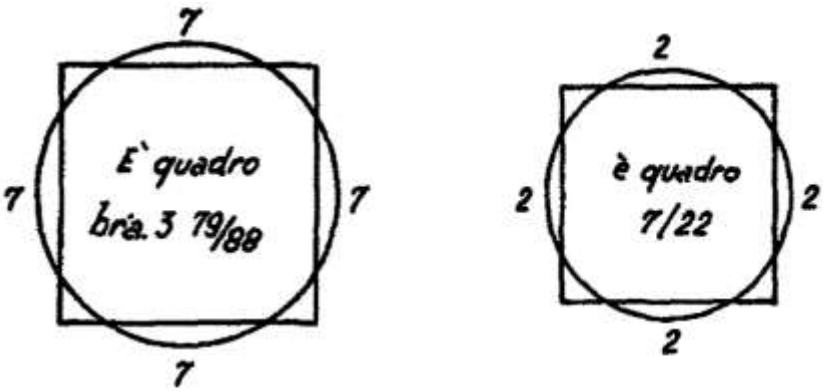
[63] Confronto fra le aree di Firenze e di Città di Castello

Il perimetro delle mura di Firenze era lungo 7 *miglia* e quello di Città di Castello 2 *miglia*: il problema chiede di conoscere quante volte Città di Castello entri nelle mura di Firenze.

Il *miglio* era un'unità di misura della lunghezza equivalente a (2833 + 1/3) braccia da panno e cioè 8500/3.

Ecco la procedura usata:

* moltiplicare 7 per sé stesso: 7 * 7 = 49 ;
* moltiplicare 2 per sé stesso: 2 * 2 = 4 ;
* dividere il primo quadrato per il secondo: 49 : 4 = 12 + ¼ [= 12,25] che è il numero di volte che Città di Castello entra nell'area occupata da Firenze.



Paolo approfondisce la spiegazione con l'aiuto delle due figure riprodotte qui sopra.

All'interno della figura di sinistra è scritto *braccia* (*bra*) invece di *miglia* e lo stesso accade nella parte finale della soluzione del problema.

Per chiarire meglio il metodo, Paolo Dell'Abbaco opera in scala ridotta (1 braccio rappresenta 1 miglio e 1 braccio^2 sta per 1 miglio^2) per rappresentare le aree occupate da Firenze e da Città di Castello.

Il cerchio a sinistra è relativo a Firenze e ha circonferenza lunga 7 braccia. Paolo calcola la sua area nel modo che segue:

* dividere la circonferenza di 7 braccia per (3 + 1/7): 7 : (3 + 1/7) = 2 + 5/22 braccia, diametro in scala di Firenze;
* dividere per 2: (2 + 5/22) : 2 = 1 + 5/44 , che è il raggio;
* moltiplicare la lunghezza del raggio per quella della semicirconferenza: (1 + 5/44) * 3,5 = 3 + 79/88 braccia^2 che è l'area del cerchio di sinistra corrispondenti a (3 + 79/88) miglia^2.

Passiamo al cerchio di destra (che rappresenta in scala l'area occupata da Città di Castello):

* dividere la lunghezza della circonferenza per (3 +1/7): 2 : (3 +1/7) = 7/11 braccia, diametro del cerchio di destra;
* dividere per 2: 7/11 : 2 = 7/22 che è il raggio;
* moltiplicare il raggio per la semicirconferenza: 7/22 * 1 = 7/22 braccia^2 , è l'area del cerchio di destra.

A questo punto occorre dividere l'area del cerchio di destra per quella del cerchio di sinistra, entrambe espresse in braccia^2:

(3 + 79/88) : 7/22 = (264 + 79)/88 * 22/7 = (343 * 22)/(88 * 7) = 343/28 = 12 + ¼

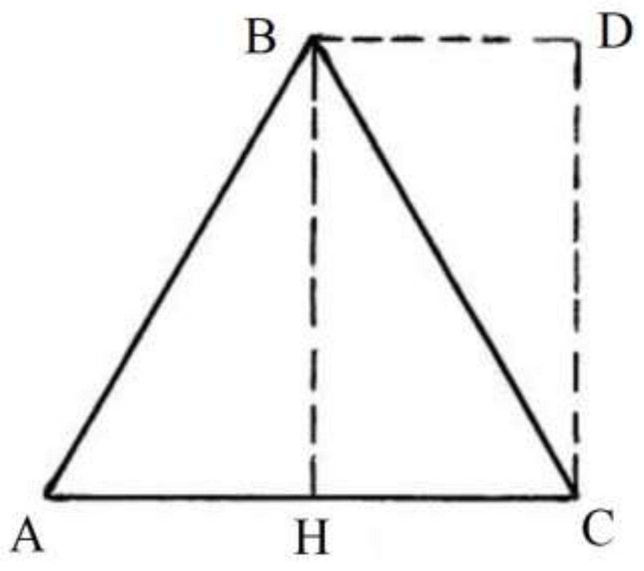
che è il rapporto già trovato fra le aree delle due città.

[67] Triangolo equilatero

Un triangolo equilatero ha lato (*faccia* secondo Paolo Dell'Abbaco) lungo 6 braccia.

Deve essere calcolata la sua area.

L'Autore chiama il triangolo equilatero *scudo* e lo stesso termine si ritrova nel posteriore trattato geometrico di Orbetano da Montepulciano.



L'altezza BH divide il triangolo in due triangoli rettangoli di uguali dimensioni: ABH e BHC.

Il rettangolo HBDC è costruito sul segmento HC (lungo 6 : 2 = 3 braccia) e sull'altezza BH: la diagonale BC (*da canto*, secondo l'Autore) è anche un lato del triangolo equilatero.

Senza citarlo, Paolo applica il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo BHC con i passi che seguono:

* moltiplicare la lunghezza di HC per sé stessa: $3 * 3 = 9$;
* moltiplicare la lunghezza di BC per sé stessa: $6 * 6 = 36$;
* sottrarre il primo quadrato dal secondo: $36 - 9 = 27$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{27}$ braccia, lunghezza (BH) del rettangolo HBDC e cioè l'altezza del triangolo equilatero.

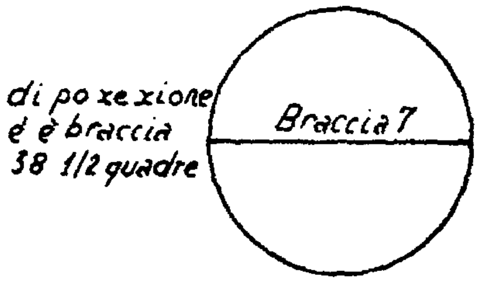
L'area del rettangolo HBDC è equivalente a quella dell'intero triangolo equilatero per cui l'area di questo ultimo è data da:

$$\text{Area}_{\text{ABC}} = \text{HC} * \text{BH} = 3 * \sqrt{27} = \sqrt{(9 * 27)} = 9 * \sqrt{3} \text{ braccia}^2.$$

[72] <u>Area di un cerchio</u>

Un cerchio ha circonferenza lunga 22 braccia e il suo diametro è 7 braccia.

Il problema chiede di calcolare la sua area o *poxexione*, termine che si ritrova anche nel citato trattato di Orbetano da Montepulciano.



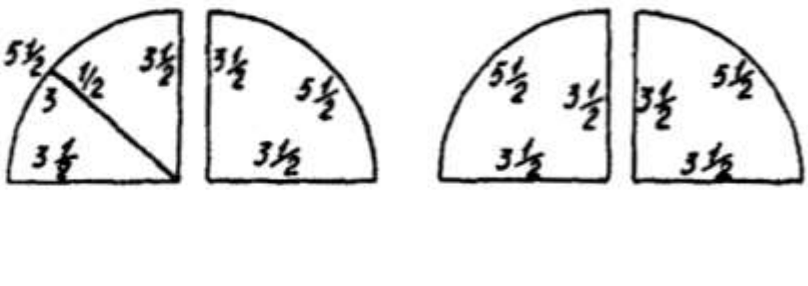
Ecco i passi occorrenti:

* dividere per 4 la lunghezza della circonferenza: $22 : 4 = 5{,}5$;
* moltiplicare per la lunghezza del diametro: $5{,}5 * 7 = 38{,}5$ [38 + ½] braccia^2, area del cerchio.

Una seconda procedura per risolvere il problema è la seguente:

* moltiplicare la lunghezza del diametro per sé stessa: $7 * 7 = 49$;
* moltiplicare per 11: $49 * 11 = 539$;
* dividere per 14: $539 : 14 = 38 + 7/14 = 38 + ½$ [= 38,5] braccia^2.

Una terza procedura è proposta da Paolo con la divisione del cerchio in quattro parti uguali, ciascuna delle quali egli chiama *schudo*:



Ciascuna di queste figure (sono dei *settori circolari*) è *alta* 3,5 braccia (metà del diametro) e *larga* (5 + ½) braccia perché (5 + ½) è la quarta parte della lunghezza della circonferenza.

Paolo propone di *quadrare* una delle quattro parti e cioè di calcolare la sua area moltiplicando metà dell'*altezza* per la lunghezza dell'arco di circonferenza:

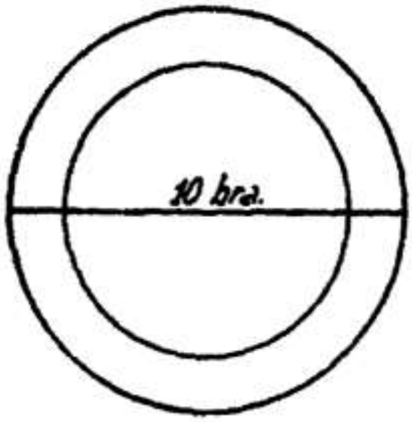
$$(3 + ½)/2 * (5 + ½) = 1,75 * 5,5 = 9 + 5/8 \text{ [= 9,625] braccia}^2.$$

Per ricavare l'area complessiva dei quattro *schudi* Paolo moltiplica l'area di uno di essi per 4: 9,625 * 4 = 38,5 braccia^2, area dell'intero cerchio.

[130] Divisione di una ruota in due parti uguali

Due uomini possiedono una ruota che ha diametro 10 braccia. Uno dei due vuole lavorare la sua parte che è *metà* dell'intera superficie: deve essere conservata la forma circolare.

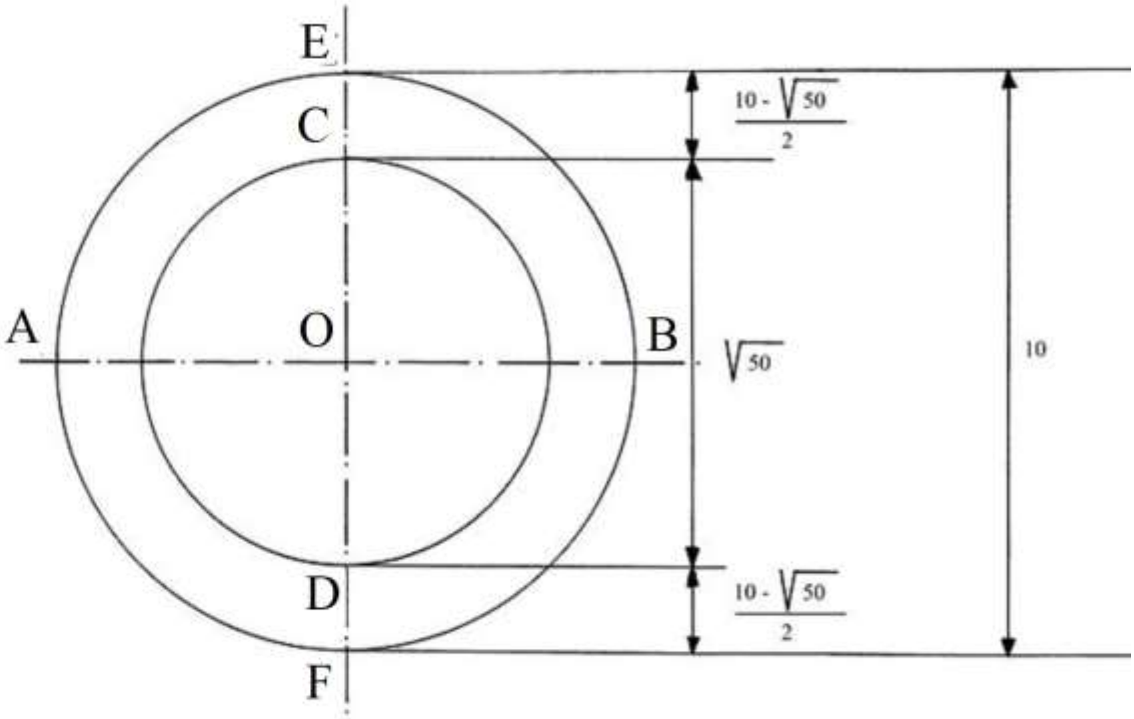
Il problema chiede di conoscere di quanto diminuirà il diametro.



Ecco i passi della procedura impiegata:

* moltiplicare la lunghezza del diametro per sé stessa: 10 * 10 = 100 ;
* dividere per 2: 100 : 2 = 50 ;
* estrarre la radice quadrata: √50 braccia, è il diametro cercato.

Il diametro diminuirà di (10 – √50) braccia.



le dimensioni sono in *braccia*

La soluzione di Paolo è corretta perché l’area di un cerchio è proporzionale al quadrato della lunghezza del suo diametro (e del suo raggio):

Area cerchio AB : Area cerchio CD = $10^2 : (\sqrt{50})^2 = 100 : 50 = 2 : 1$.

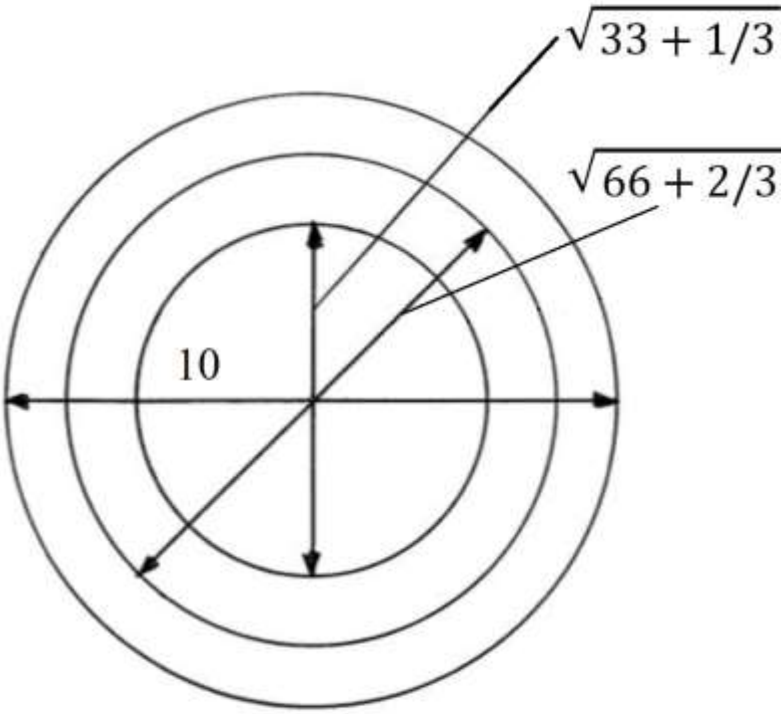
L’area del cerchio di diametro CD è uguale a metà di quella dell’intero cerchio ed è uguale a quella della corona circolare delimitata dalle due circonferenze concentriche.

Nel *Libro di ragioni* dell’abacista fiorentino Paolo Gherardi è presentata una ragione simile: si trattava di dividere un *pane di cera* di forma circolare e con diametro di *10 unità* fra due soci: evidentemente questo ipotetico bene era puramente fantastico, ma l’esercizio aveva un suo fine pratico.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Lo stesso problema propone una variante: la ruota di diametro uguale a 10 braccia deve essere divisa in parti uguali fra tre *chonpangnj* e cioè tre soci.

Il problema chiede di calcolare quanto tocca al primo, al secondo e al terzo socio, sempre misurando lungo il diametro di 10 braccia.



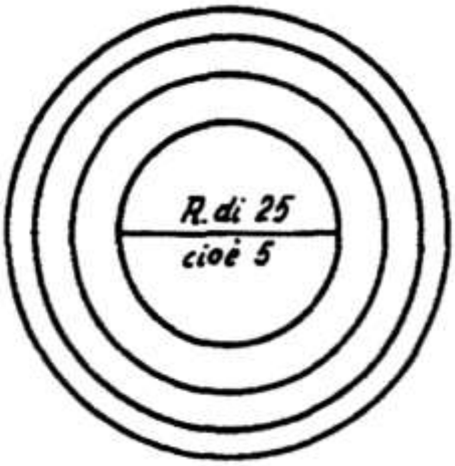
Ecco la procedura impiegata:

* moltiplicare il diametro esterno per sé stesso: 10 * 10 = 100 ;
* dividere per 3: 100 : 3 = 33 + 1/3 ;
* sottrarre l’ultimo quoziente da 100: 100 – (33 + 1/3 = 66 + 2/3 ;
* estrarre la radice quadrata: √(66 + 2/3) braccia, diametro interno della prima corona circolare;
* dividere (66 + 2/3) per 2: (66 + 2/3) : 2 = 33 + 1/3 ;
* estrarre la radice quadrata: √(33 + 1/3) braccia, diametro del cerchio interno.

Il primo socio sfrutterà l’area compresa nella corona circolare più esterna, il secondo userà l’area contenuta nella successiva corona circolare e al terzo resterà il cerchio interno, più piccolo.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

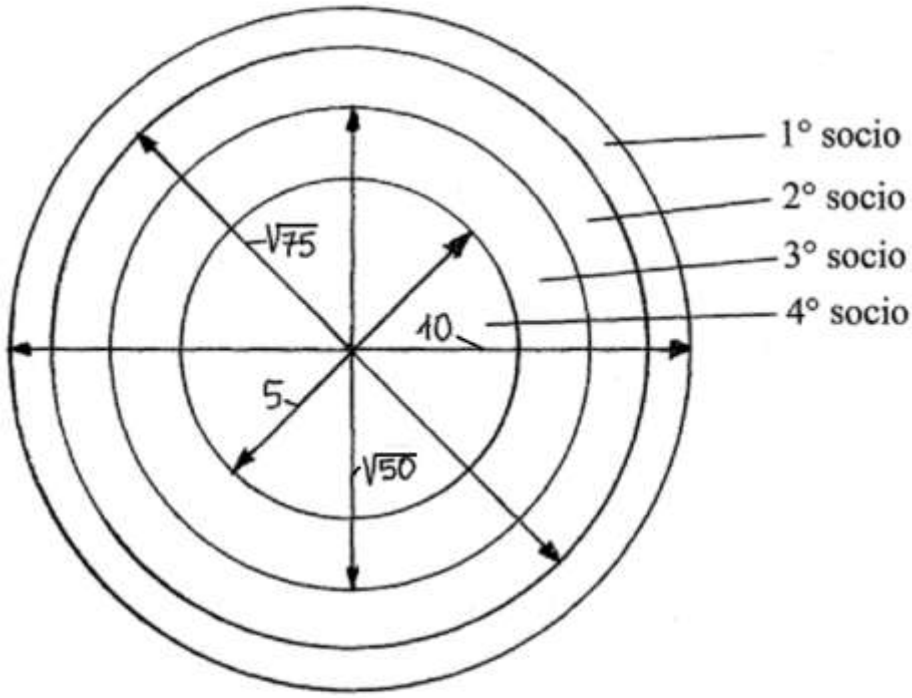
Infine, Paolo Dell’Abbaco descrive la soluzione di un terzo caso: la stessa ruota deve essere divisa fra *quattro* soci:



La procedura impiegata è la seguente:

* moltiplicare la lunghezza del diametro della ruota per sé stesso: $10 * 10 = 100$;
* dividere per 4: $100 : 4 = 25$;
* sottrarre 25 da 100: $100 – 25 = 75$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{75}$ braccia, diametro della seconda circonferenza (a partire dall'esterno); [L'area di questa più esterna corona circolare è uguale a ¼ di quella dell'intero cerchio.];
* dividere 75 per 3: $75 : 3 = 25$;
* sottrarre 25 da 75: $75 – 25 = 50$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{50}$ braccia, diametro della terza circonferenza;
* dividere 50 per 2: $50 : 2 = 25$:
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{25}$ braccia, diametro del cerchio interno.

La procedura usata dall'Autore è corretta. La figura che segue mostra la ripartizione della ruota fra i quattro soci:

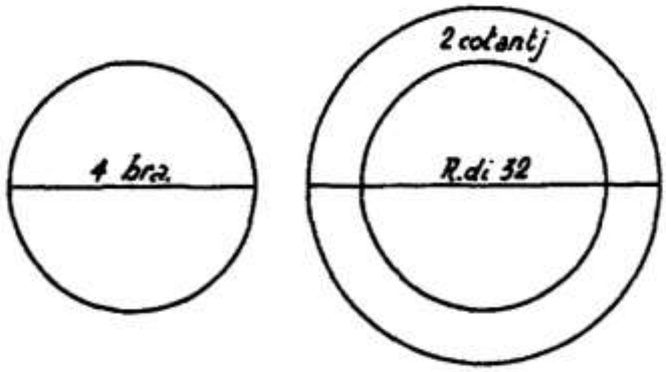


La figura riporta anche i diametri in braccia delle quattro ripartizioni.

Nota: una ruota del diametro di 10 braccia (con 1 braccio da panno equivalente a 0,583626 metri) è un po' difficile da immaginare. È quindi probabile che Paolo Dell'Abbaco abbia voluto proporre problemi geometrici di questo genere per insegnare un metodo per la divisione di una più grande superficie circolare in un certo numero di parti di uguale superficie, come è il caso del problema presentato nell'APPENDICE.

[131] Cerchi multipli di uno dato

L'Autore propone una serie di problemi relativi alla costruzione di cerchi multipli di uno dato di diametro 4 braccia.

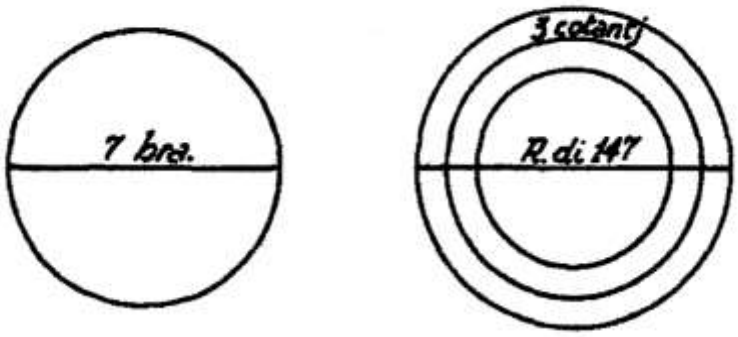


Per ottenere un cerchio di superficie doppia, la procedura è la seguente:

* moltiplicare la lunghezza del diametro per sé stessa: $4 * 4 = 16$;
* moltiplicare per 2: $16 * 2 = 32$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{32}$ braccia, diametro del cerchio doppio.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Il caso successivo chiede di calcolare il diametro di un cerchio di superficie *tripla* di uno che ha diametro lungo 7 braccia:

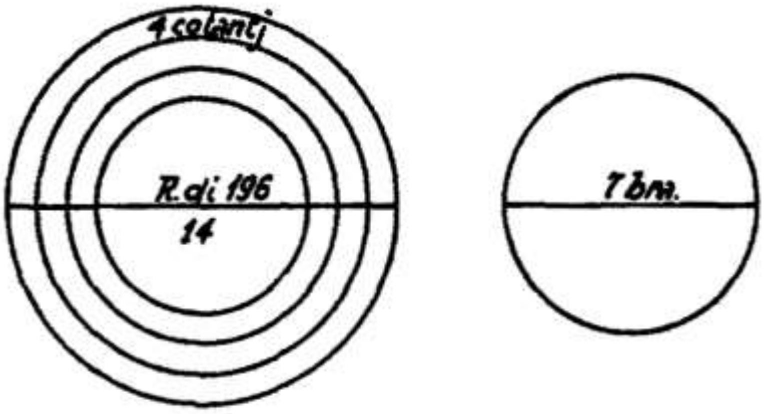


Ecco la procedura:

* moltiplicare la lunghezza del diametro per sé stessa: $7 * 7 = 49$;
* moltiplicare per 3: $49 * 3 = 147$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{147}$ braccia, diametro del cerchio *tre* volte più grande.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Un ultimo caso propone la costruzione di un cerchio di superficie *quadrupla* di uno di diametro 7 braccia.

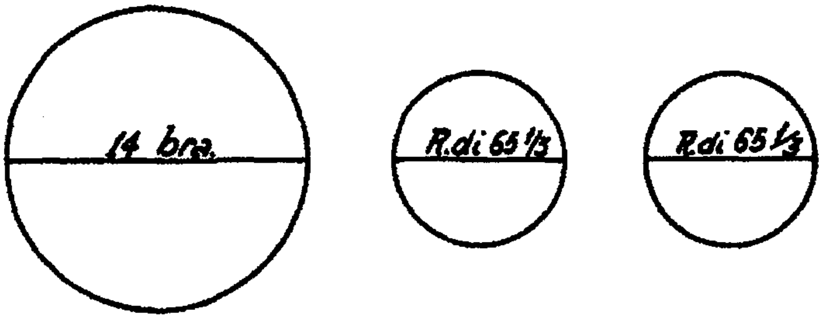


La procedura applicata è la seguente:

* moltiplicare la lunghezza del diametro per sé stessa: 7 * 7 = 49 ;
* moltiplicare per 4: 49 * 4 = 196 ;
* estrarre la radice quadrata: √196 = 14 braccia, diametro del cerchio *quadruplo*.

[132] <u>Divisione di un cerchio in più cerchi uguali</u>

Un cerchio ha diametro lungo 14 braccia: deve essere diviso in *tre* cerchi di uguali dimensioni la cui superficie complessiva sia identica a quella del primo cerchio. Occorre determinare il diametro dei tre cerchi.

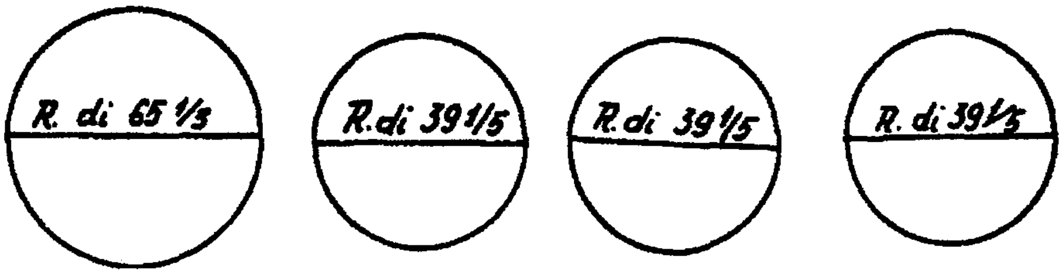


La procedura impiegata è:

* moltiplicare la lunghezza del diametro per sé stessa: 14 * 14 = 196 ;
* dividere per 3: 196 : 3 = (65 + 1/3) ;
* estrarre la radice quadrata: √(65 + 1/3) braccia, diametro dei tre cerchi più piccoli.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

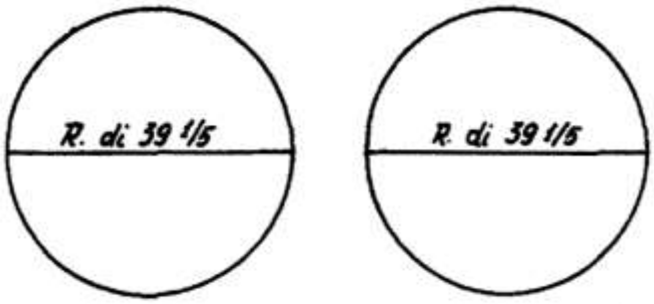
Il caso successivo prevede la divisione del solito cerchio in *cinque* cerchi di uguali dimensioni:



La procedura usata è la seguente:

* moltiplicare la lunghezza del diametro per sé stessa: 14 * 14 = 196 ;
* dividere per 5: 196 : 5 = (39 + 1/5) ;
* estrarre la radice quadrata: √(39 + 1/5) braccia, diametro dei cinque cerchi più piccoli.

Nella figura qui sopra, l'Autore ha messo a confronto le dimensioni del cerchio uguale a 1/3 (a sinistra) e quelle di tre cerchi di superficie uguale a 1/5.

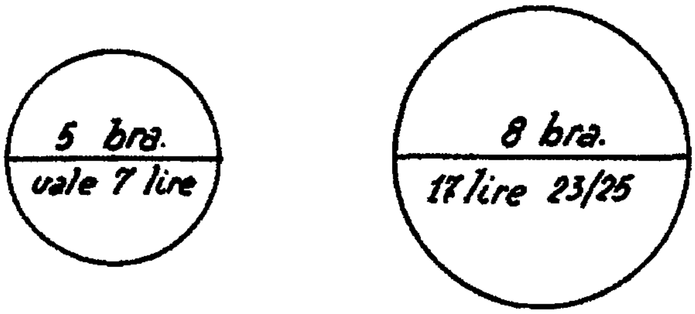


[133] <u>Valore dei cerchi</u>

Un cerchio disegnato con il *compasso* (*xxesta* per *seste*) ha diametro d = 5 braccia e vale 7 lire.

Un secondo cerchio ha diametro D = 8 braccia ed è, evidentemente, realizzato con lo stesso materiale del primo.

Il problema domanda il valore in lire del secondo.



Il problema è risolto con la seguente procedura:

* moltiplicare la lunghezza del diametro del primo cerchio per sé stessa: 5 * 5 = 25 ;
* moltiplicare la lunghezza del diametro del secondo cerchio per sé stessa: 8 * 8 = 64 ;
* moltiplicare 7 per 64: 7 * 64 = 448 ;
* dividere per 25: 448 : 25 = 17 + 23/25 lire che sono il valore del secondo cerchio.

Di fatto, l'Autore ha utilizzato la proporzione:

Area 2° cerchio : Area 1° cerchio = valore 2° cerchio : valore 1° cerchio,

proporzione che può essere scritta nella forma:

$D^2 : d^2$ = valore 2° cerchio : valore 1° cerchio

Il valore del 2° cerchio è l'incognita e sostituendo i valori noti nella precedente proporzione si ha:

$$\text{valore 2° cerchio} = D^2 * (\text{valore 1° cerchio})/d^2 = (8^2 * 7)/5^2 = 64 * 7/25 =$$
$$= 17 + 23/25 \text{ lire } [=17{,}92 \text{ lire}].$$

- APPROFONDIMENTO -

Paolo Dell'Abbaco usò come moneta la *lira*: all'epoca in cui visse a Firenze la moneta base era il *fiorino* d'oro, coniato a partire dal 1252.

La lira era un'unità di conto, inizialmente equivalente al fiorino: in origine un fiorino valeva 240 denari d'argento.

L'origine della lira risale alla riforma monetaria di Carlo Magno: la lira era una moneta di conto corrispondente al peso di *1 libbra* di circa 410 grammi (o forse più) e per il suo alto valore era divisa in *240 denari* d'argento. La libbra era anche divisa in 20 *soldi*, ciascuno dei quali valeva 12 *denari*. Solo il *denaro* circolava quale moneta fisica, coniata nelle Zecche, mentre la libbra (poi *lira*) e il soldo erano soltanto *unità di conto*.

In origine, la libbra era sia un'unità di peso che un'unità monetaria di conto, perché essa non fu mai coniata: il valore dell'argento del peso di una libbra era enorme rispetto alle necessità dei piccoli commerci e delle transazioni ordinarie.

Una moneta o *unità di conto* è uno strumento usato soltanto nella contabilità.

L'origine della parola lira sembra sia derivata dall'uso di dire "libbra" e poi "lira" invece di indicare "240 denari". La libbra e poi la lira erano impiegate nei conteggi di grosse somme espresse in *denari d'argento*. Talvolta, entrambe le unità erano abbreviate con le sigl "lb".

Ne conseguì l'uso di dire e di scrivere, ad esempio, invece di 600 denari, "2 lire e 120 denari".

Per quanto riguarda Firenze, il sistema monetario introdotto a partire dal 1252 era *bimetallico*: il fiorino era coniato in oro e il denaro in argento. All'epoca il rapporto fra il valore dei due metalli era di 10 : 1. I sistemi monetari bimetallici (basati sull'argento e sull'oro) hanno quasi sempre originato gravi instabilità finanziarie a causa dell'impossibile di mantenere costante il rapporto di valore fra i due metalli.

Le tabelle che seguono sono tratte dal testo di Cipolla (*Storia economica dell'Europa pre – industriale*, p. 247, citato in bibliografia):

TAB. 40a. ***Equivalente della lira locale in grammi di argento puro in taluni Stati d'Europa: 800-1700.***

Anni	Inghilterra	Francia	Milano	Venezia	Firenze	Unità d'argento per 1 unità di oro
ca. 800	330	390	390	390		10-12
ca. 1250	324	80	70	20	35	10
ca. 1500	172	22	8,6	6,2	5,7	11
ca. 1600	112	11	4,9	3,5	4,5	13
ca. 1700	112	6	3,9	3,0	3,9	15

TAB. 40b. ***Equivalente della lira locale in grammi d'argento puro in vari Stati italiani: 1252-1700.***

Anni	Milano	Genova	Venezia	Firenze	Unità di argento per 1 unità d'oro
1252	70,0	70,0	20,0	35,0	10
1315-25	31,5	39,4	14,8	15,2	13,5
1390-1400	20,6	29,2	7,6	9,2	10
1490-1500	8,6	12,8	6,2	5,7	11
1545-55	5,9	9,7	5,0	4,5	11
1615-25	4,9	7,1	3,5	4,5	13
1690-1700	3,9	4,9	3,0	3,9	15

I dati mostrano una secolare svalutazione del prezzo dell'argento rispetto a quello dell'oro.

Il sistema monetario bimetallico creò svariati problemi alla finanza della Repubblica fiorentina, come è ben documentato negli studi del Cipolla, citati in bibliografia.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Un manufatto prodotto da un artigiano orafo del XIII secolo in oro, argento, loro leghe e altri materiali preziosi non poteva avere grandi dimensioni, misurabili in *braccia*: questa unità di misura era troppo grande per questa classe di prodotti.

Sarebbe stato più logico misurare con il sottomultiplo *soldo*, uguale a 1/20 di braccio e corrispondente a 2,9181 cm: Paolo Dell'Abbaco misurò sempre in braccia.

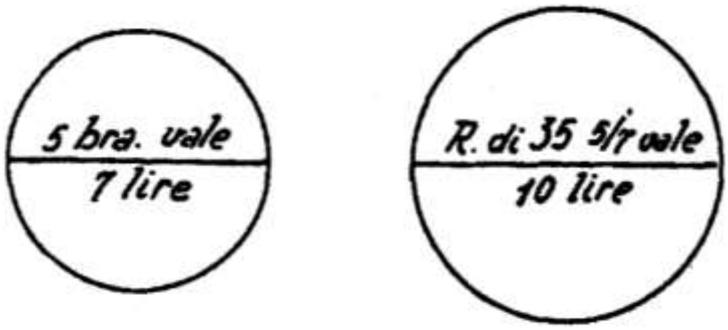
L'arte del *battiloro* raggiunse a Firenze il suo massimo sviluppo nei decenni successivi: gli artigiani realizzavano foglie d'oro e d'argento e fili che venivano tessuti insieme alla seta per realizzare preziosissime stoffe ricercate nei Paesi del Medio Oriente e dell'Europa.

In conclusione, si può ragionevolmente pensare che questi problemi del *Trattato d'aritmetica* fossero collegati a problemi astratti.

- -

[134] Altri valori di cerchi

Il problema deriva dal precedente, quello [133]:



È dato il solito cerchio di diametro 5 braccia e valore 7 lire. Deve essere calcolato il diametro di un cerchio, fatto con lo stesso materiale, che abbia valore 10 lire.

La procedura utilizzata è la seguente:

* moltiplicare la lunghezza del diametro del primo cerchio per sé stessa: $5 * 5 = 25$;
* moltiplicare 10 per 25: $10 * 25 = 250$;
* dividere per 7: $250 : 7 = 35 + 5/7$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{(35 + 5/7)}$ braccia, diametro del secondo cerchio.

Di nuovo, l'Autore ha applicato una proporzione simile a quella impiegata per risolvere il precedente problema:

diametro^2 2° cerchio : diametro^2 1° cerchio = valore 2° cerchio : valore 1° cerchio .

Il diametro del 2° cerchio è l'incognita X per cui la precedente proporzione diviene

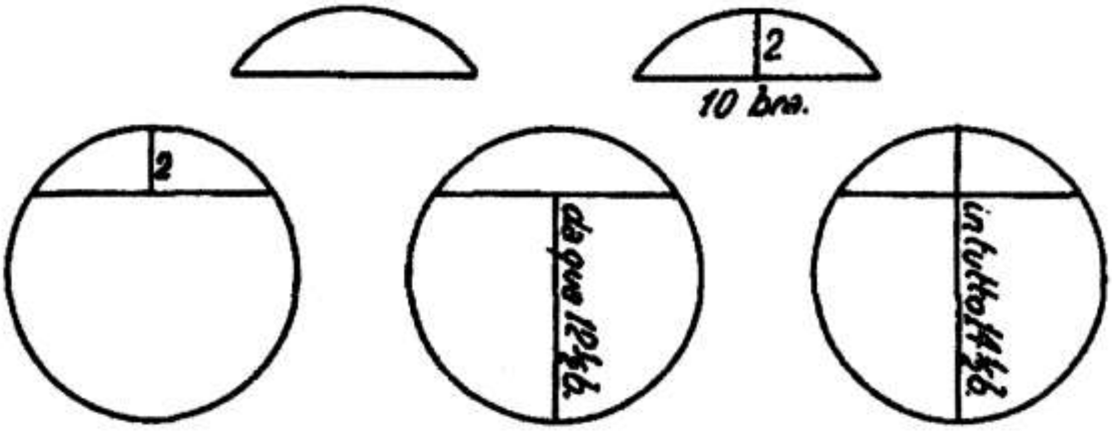
$X^2 : 5^2 = 10 : 7$ da cui

$X^2 = 25 * 10/7 = 250/7$ e

$X = \sqrt{(250/7)} = \sqrt{(35 + 5/7)}$ braccia.

[135] Segmento circolare

È dato un *segmento circolare* che ha la *corda* lunga 10 braccia e la *freccia* (o saetta o *polsa*) lunga 2 braccia.

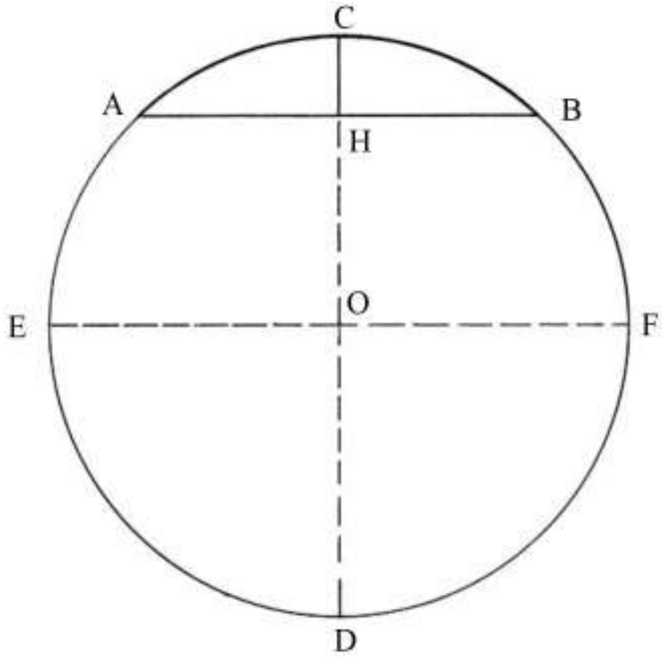


L'Autore chiede di calcolare il diametro del cerchio da cui è stato ricavato il segmento circolare.

La procedura impiegata contiene i seguenti passi:

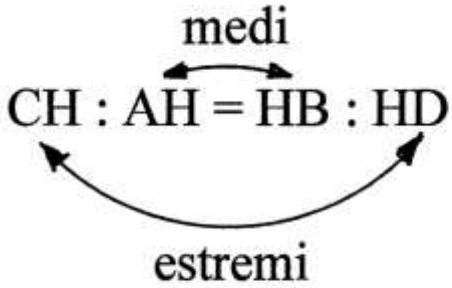
* dividere per 2 la lunghezza della corda: 10 : 2 = 5 ;
* moltiplicare 5 per sé stesso: 5 * 5 = 25 ;
* dividere per la lunghezza della freccia: 25 : 2 = 12,5 ;
* sommare la lunghezza della freccia e l'ultimo quoziente: 2 + 12,5 = 14,5 braccia, diametro del cerchio.

Paolo Dell'Abbaco applicò alla soluzione del problema il *teorema delle corde*:



Le corde AB e CD sono entrambe inscritte nella stessa circonferenza e si intersecano ad angolo retto nel punto H, tagliando in due parti uguali la corda AB.

I due segmenti che formano una corda (ad esempio AH e HB) sono i *medi* e i due segmenti dell'altra corda (CH e HD) sono gli *estremi* di una proporzione:



da cui:

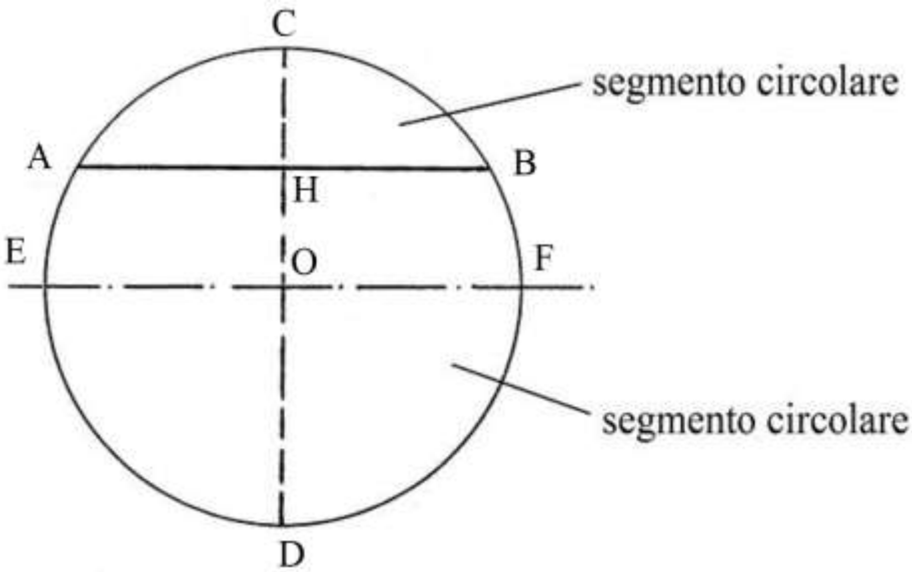
HD = (AH * HB)/CH = (5 * 5)/2 = 12,5 braccia.

Aggiungere la lunghezza della freccia CH a quella del segmento HD per ottenere la lunghezza del diametro CD:

CD = CH + HD = 2 + 12,5 = 14,5 braccia.

La soluzione di Paolo Dell’Abbaco è corretta.

Nota: una corda divide un cerchio in *due* segmenti circolari:



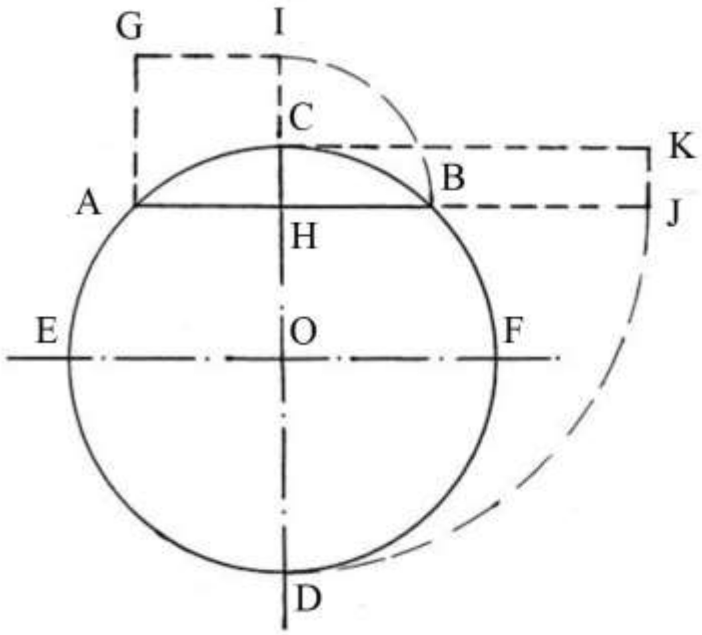
- APPROFONDIMENTO -

<u>Il teorema delle corde</u>

Dalla proposizione CH : AH = HB : HD deriva

CH * HD = AH * HB .

Costruire i due rettangoli basati sulle lunghezze dei quattro segmenti che formano le due corde:

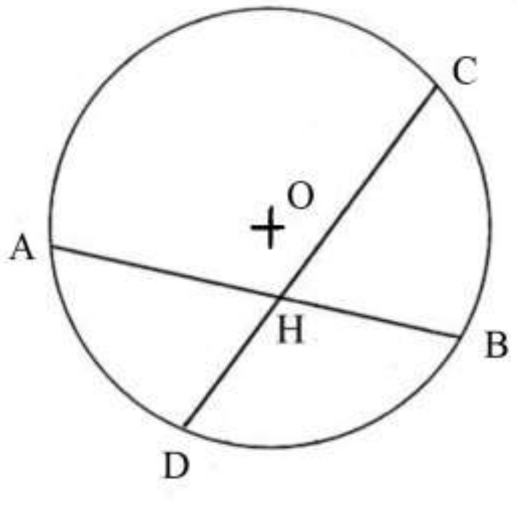


* il rettangolo [ma in questo caso è un *quadrato* perché AH = HB] AGIH ha dimensioni AH * HB ;
* il rettangolo HCKJ che ha dimensioni CH * HD.

I due poligoni hanno *uguale superficie*.

La figura è un caso particolare del *teorema delle corde*: infatti le due corde, AB e CD, si intersecano ad angolo retto.

In generale, il teorema vale per qualunque coppia di corde che si incrociano all'interno di un cerchio, senza formare angoli particolari e senza che almeno una delle due sia un diametro, come è il caso della figura che segue:

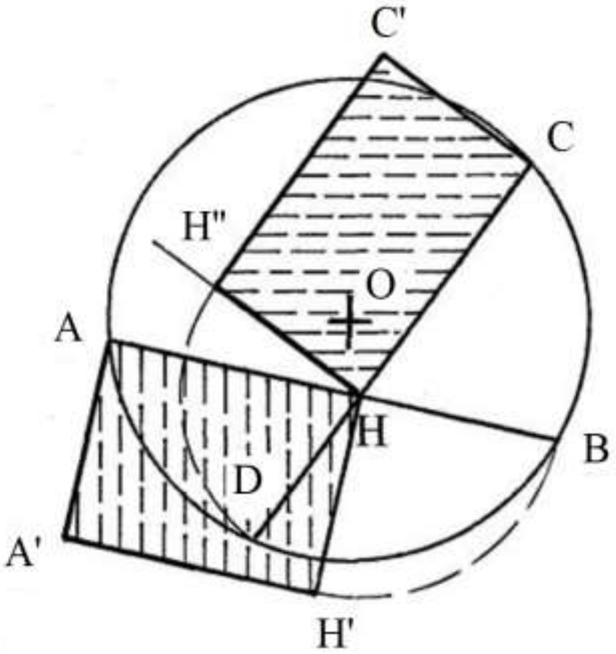


Anche in questo caso vale la relazione

AH : DH = HC : HB da cui

AH * HB = DH * HC .

Lo schema che segue mostra i due rettangoli di area uguale con lati lunghi quanto i segmenti generati sulle corde dalla loro intersezione:



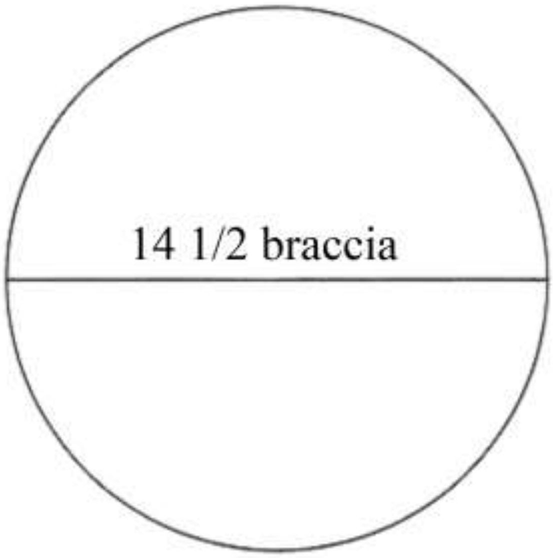
I rettangoli AHH'A' e HH''C'C hanno uguale superficie.

Il teorema delle corde afferma: *nel caso di due corde generiche interne a un cerchio e intersecantesi, il rettangolo costruito sui due segmenti di una corda ha la stessa superficie del rettangolo costruito sui segmenti dell'altra corda*.

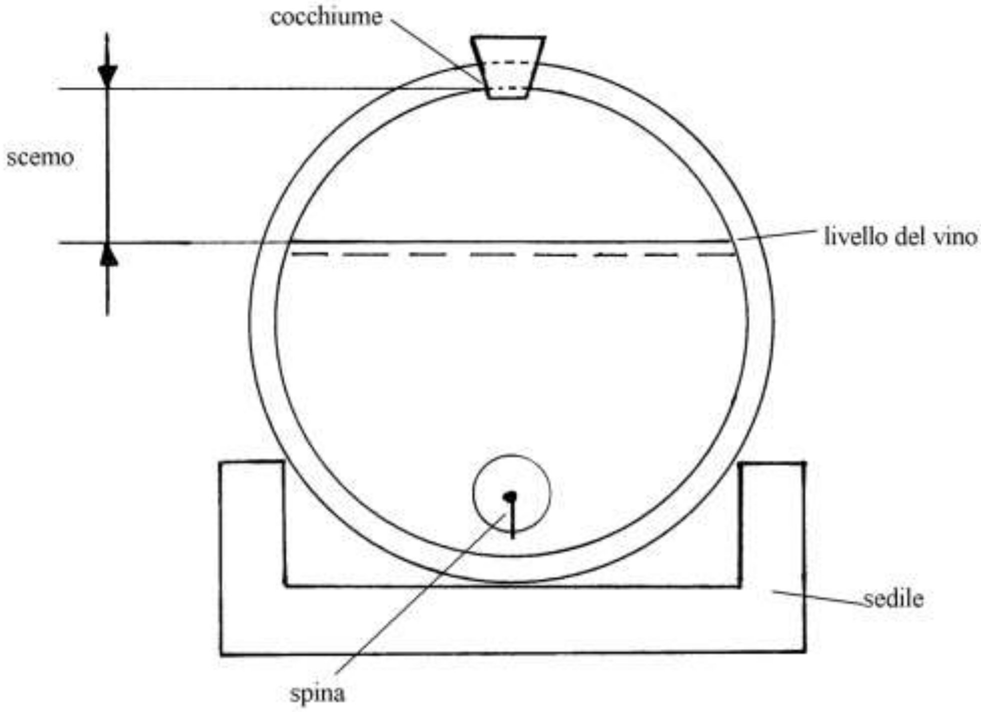
- -

[136] <u>Area del segmento circolare</u>

Il problema è legato a quello precedente.



Paolo presenta l'esempio di una *botte* che vista in sezione verticale ha *altezza*, e cioè diametro, di 14,5 braccia; essa è lunga 8 braccia e ha uno *sciemo* (termine che indica l'altezza della colonna d'aria sovrastante il pelo libero del vino) o scemo:

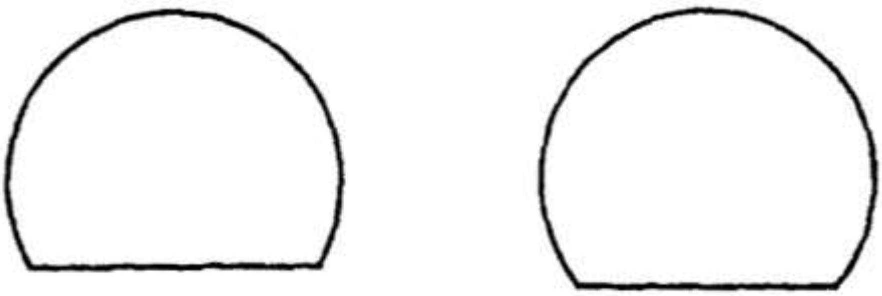


Nota: Paolo Dell'Abbaco è stato fra i primi abacisti a studiare i problemi relativi alla misurazione del contenuto delle botti.

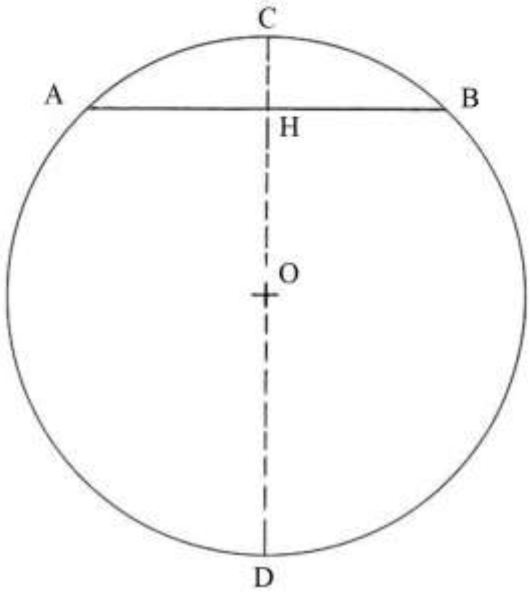
Lo *scemo* equivale alla freccia di un segmento circolare.

I numerosi problemi dedicati ai segmenti circolari nel *Trattato d'Aritmetica* possono essere un indizio dell'importanza della misura del contenuto delle botti presso gli Abacisti medievali?

Nel *Trattato* il profilo della botte è disegnato rovesciato:



Nella figura che segue, il segmento CH è lo *scemo* della botte ed è lungo 2 braccia:



Il diametro CD è lungo 14,5 braccia, la corda AB è 10 e l'arco ACB 16 braccia.

La botte è lunga 8 braccia.

Riguardo alla lunghezza dell'arco ACB è ragionevole avanzare qualche dubbio sull'esattezza del valore indicato nel *Trattato*: esso dovrebbe essere lungo poco più di 11 braccia anziché 16.

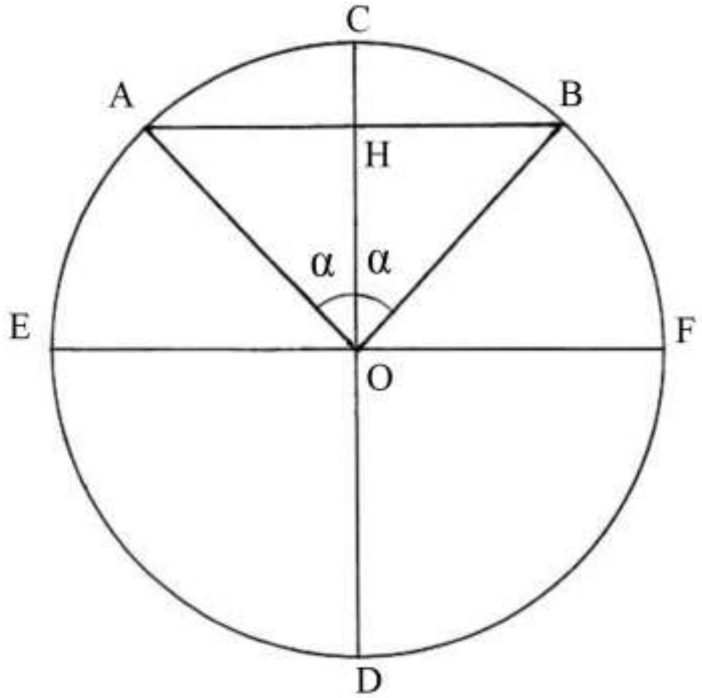
Il problema chiede di calcolare l'area dello scemo (più correttamente l'area del segmento circolare che ha per freccia lo scemo) in braccia quadrate.

La procedura impiegata contiene i seguenti passi:

* dividere per 2 la lunghezza del diametro: 14,5 : 2 = 7,25 ;
* dividere per 2 la lunghezza dell'arco [ACB]: 16 : 2 = 8 ;
* moltiplicare i due quozienti: 7,25 * 8 = 58 ;
* sottrarre lo scemo [la freccia CH] dalla metà del diametro: 7,25 – 2 = 5,25 [che è la lunghezza di HO] ;
* dividere per 2 la lunghezza della corda [AB]: 10 : 2 = 5 ;
* moltiplicare i due ultimi quozienti: 5,25 * 5 = 26,25 ;
* sottrarre questo prodotto da 58: 58 – 26,25 = 31,75 braccia^2 che è l'area dello scemo (e cioè del segmento circolare ACBH) ;
* moltiplicare 31,75 per la lunghezza della botte: 31,75 * 8 = 254 braccia cubiche, volume dello scemo lungo tutta la botte.

\- APPROFONDIMENTO -

Come già detto, Paolo Dell'Abbaco fissò in 16 braccia la lunghezza dell'arco di circonferenza ACB.



Verifichiamo il dato con l'aiuto di un po' di trigonometria.

Riportiamo le lunghezze dei segmenti presenti nella figura qui sopra che sono le seguenti:

* CH = 2 braccia ;

* AB = 10 braccia ;

* AH = HB = 5 braccia ;

* HO = 5,25 braccia ;

* CD = 14,5 braccia.

L'angolo HOB è α ed ha la stessa ampiezza dell'angolo HOA.

La tangente dell'angolo α è data da:

$$\text{tg}\ \alpha = HB/HO = 5/5{,}25 \approx 0{,}9523\ .$$

Ad essa corrisponde un angolo α ≈ 43° 35'.

L'angolo AOB è ampio il doppio e quindi è ≈ 87° 10'.

L'arco ACB ha lunghezza proporzionale all'ampiezza dell'angolo 2*α.

Possiamo ricavare la lunghezza dell'arco ACB con la seguente proporzione:

$$ACB : \text{circonferenza} = 2*\alpha : 360°$$

$$ACB \approx \text{circonferenza} * 2*\alpha/360 \approx [(22/7) * 14{,}5 * (87°\ 10')/360] \approx$$

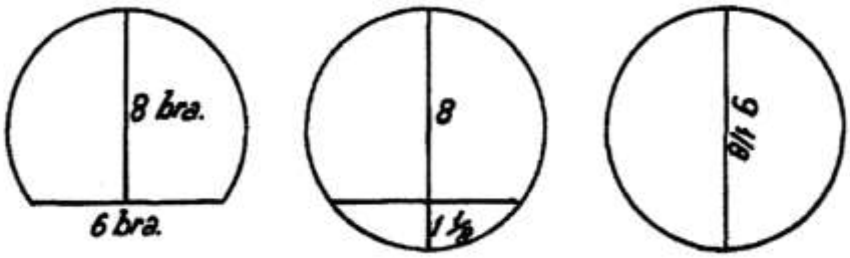
$$\approx 11{,}0341 \text{ braccia .}$$

Il valore di 16 braccia indicato da Paolo Dell'Abbaco è grandemente errato *per eccesso*.

\- -

[137] Segmento circolare

Un segmento circolare è più grande di mezzo cerchio:

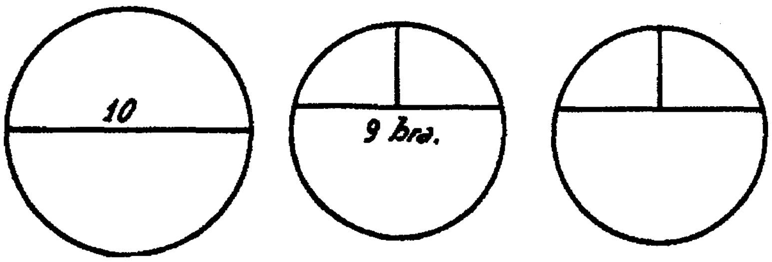


La corda è lunga 6 braccia e la freccia è 8 braccia.
Il problema chiede il diametro del cerchio originario.
La procedura impiegata è la seguente:

* dividere per 2 la lunghezza della corda: 6 : 2 = 3 ;
* moltiplicare per sé stesso: 3 * 3 = 9 ;
* dividere per la lunghezza della freccia: 9 : 8 = 1 + 1/8 ;
* sommare alla lunghezza della freccia: (1 + 1/8) + 8 = 9 + 1/8 braccia, diametro del cerchio di origine.

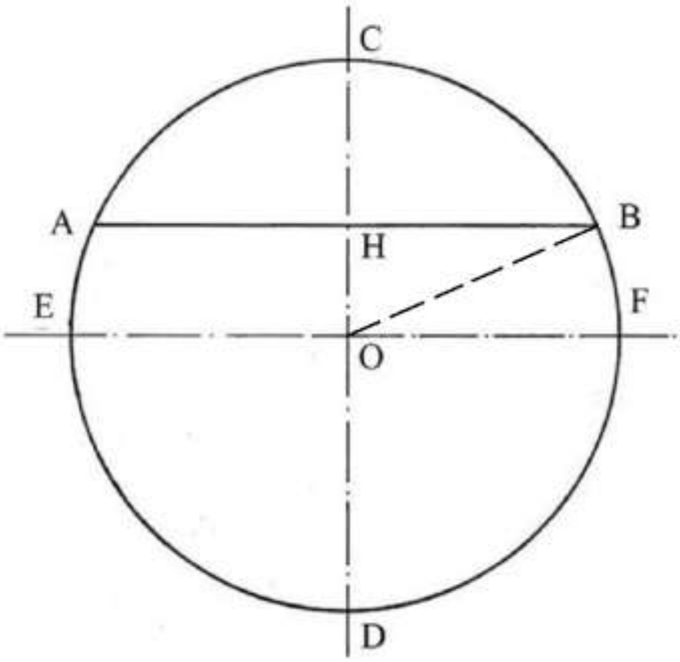
[138] Freccia di un segmento circolare

Un cerchio ha diametro 10 braccia. Al suo interno è tracciata una corda lunga 9 braccia: il problema chiede di calcolare la lunghezza della freccia:



La procedura impiegata è la seguente:

* dividere per 2 la lunghezza del diametro: 10 :2 = 5 ;
* moltiplicare per sé stessa: 5 * 5 = 25 ;
* dividere per 2 la lunghezza della corda: 9 : 2 = 4,5 ;
* moltiplicare per sé stessa: 4,5 * 4,5 = 20,25 ;
* sottrarre l'ultimo prodotto da 25: 25 – 20,25 = 4,75 ;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{4,75}$ braccia, lunghezza di HO;
* sottrarre questo ultimo dato dal raggio 5: $(5 - \sqrt{4,75})$ braccia, lunghezza della freccia CH.



La procedura può essere riassunta nella seguente formula:

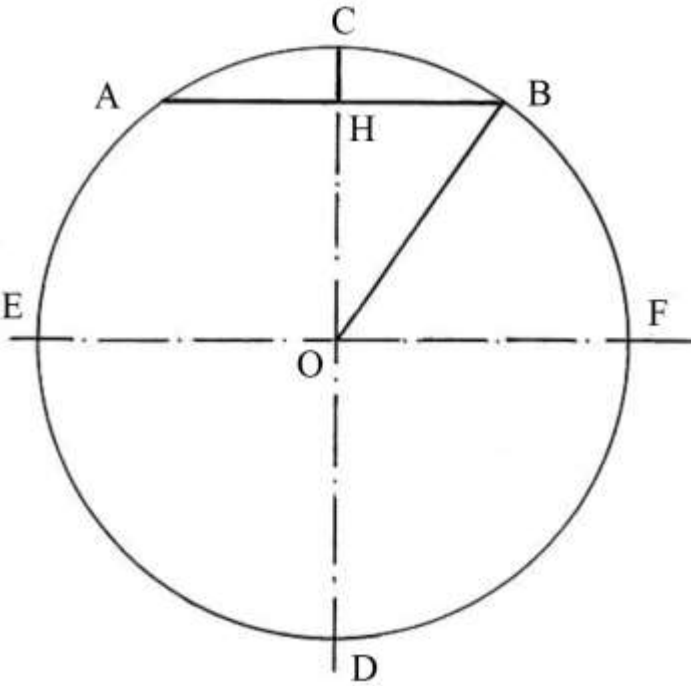
$HO = \sqrt{[(d/2)^2 - (corda/2)^2]}$ e

$CH = CO - HO = d/2 - \sqrt{[(d/2)^2 - (corda/2)^2]}$.

Il segmento HO è un cateto del triangolo rettangolo OHB: l'Autore ha applicato il teorema di Pitagora a questo triangolo.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Una variante del problema chiede di calcolare la lunghezza della corda [AB] data una freccia [CH] lunga 1 braccio:



La procedura impiegata è simile a quella del caso precedente:

* moltiplicare la lunghezza del diametro per sé stessa: 10 * 10 = 100 ;
* moltiplicare per 2 la lunghezza della freccia: 1 * 2 = 2 ;
* sottrarre 2 dalla lunghezza del diametro: 10 – 2 = 8 ;
* moltiplicare per sé stesso: 8 * 8 = 64 ;
* sottrarre l'ultimo prodotto da $d^2 = 100$: 100 – 64 = 36 ;
* estrarre la radice quadrata: √36 = 6 braccia, lunghezza della corda AB.

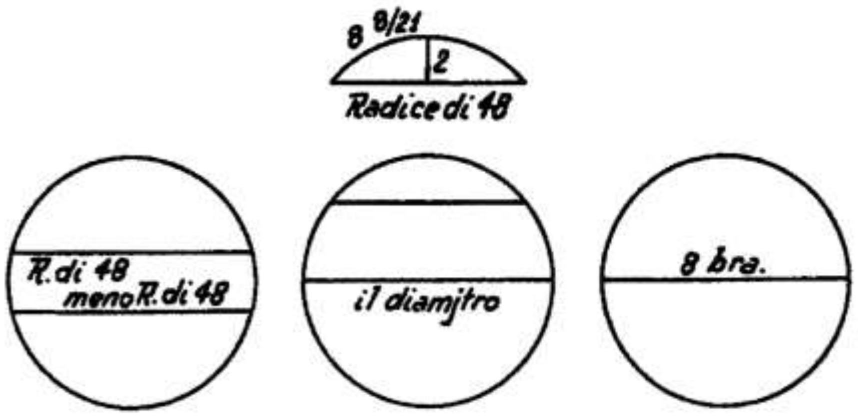
La procedura è riassunta dalla formula

$$AB = \sqrt{[d^2 - (d - 2*f)^2]}$$, nella quale *d* è il diametro e *f* la freccia.

[139] Area di un segmento circolare

Il problema collega chiaramente l'area di un segmento circolare alla misura degli scemi, con queste espressioni:

"*Diciamo deglj sciemj de tondi, e diciamo quando glj volexximo rechare a braccia quadre volendo sapere quanto foxxe la sua poxxexxione e pongnamo che xia uno tondo sciemo, cioè uno pezzo di tondo, che xia lo xuo archo 8 braccia e 8/21 di braccio e lla sua corda sia radicie di 48, sì chome dee, e lla sua saetta sia 2 braccia. E io voglo sapere quanto sarae la sua poxxexxione …*"



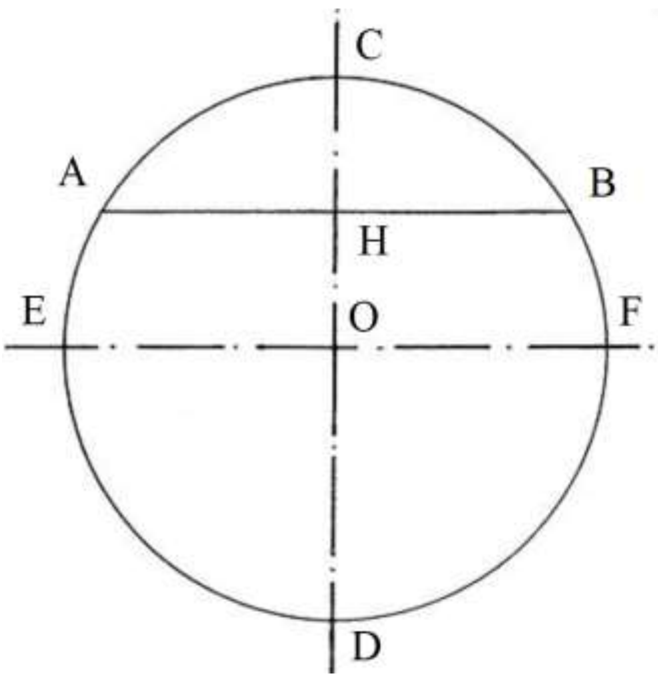
Il termine *poxxexxione* sta per *possessione* e cioè *area.*

Il segmento circolare è delimitato da un arco lungo (8 + 8/21) braccia, ha freccia di 2 braccia e corda lunga √48 braccia.

Il problema chiede di calcolare l'area del segmento.

La procedura impiegata muove dalla ricerca della lunghezza incognita del diametro del cerchio da cui è stato ritagliato il segmento circolare: il metodo è già stato applicato nella soluzione del precedente problema [135]:

* dividere per 2 la lunghezza della corda: (√48)/2 ;
* moltiplicare per sé stessa: $[(\sqrt{48})/2]^2 = 48/4 = 12$;
* dividere il risultato per la lunghezza della freccia: 12 : 2 = 6 ;
* sommare la lunghezza della freccia con l'ultimo quoziente: 6 + 2 = 8 braccia, diametro del cerchio.



La procedura per risolvere questo nuovo problema contiene i seguenti passi:

* dividere per 2 la lunghezza del diametro: $8 : 2 = 4$;
* dividere per 2 la lunghezza dell'arco di circonferenza: $(8 + 8/21) : 2 = (4 + 4/21)$;
* moltiplicare i due ultimi quozienti: $4 * (4 + 4/21) = 16 + 16/21$;
* sottrarre la lunghezza della freccia dalla metà della lunghezza del diametro: $4 – 2 = 2$ braccia [che è la lunghezza di HO] ;
* dividere per 2 la lunghezza della corda: $(\sqrt{48})/2 = (\sqrt{48/4}) = \sqrt{12}$;
* moltiplicare l'ultimo quoziente per la lunghezza di [HO]: $(\sqrt{12}) * 2 = \sqrt{48}$;
* sottrarre l'ultimo prodotto da (16 + 16/21): $(16 + 16/21 – \sqrt{48})$ braccia^2 , area del segmento circolare.

La procedura è sintetizzata nella formula che segue:

$$\text{Area}_{\text{SEGMENTO CIRCOLARE}} = (\text{diametro}/2)*(\text{arco}/2) – (\text{diametro}/2 – \text{freccia})*\text{corda}/2 .$$

Nota: il disegno contenuto nel *Trattato* è fuori scala, come spiega il confronto fra gli schemi di Paolo Dell'Abbaco e l'ultima figura qui sopra.

- APPROFONDIMENTO -

La formula per calcolare l'area di un segmento circolare è:

$$\text{Area}_{\text{SEGMENTO CIRCOLARE}} = [\text{raggio} * (\text{arco} – \text{corda}) + \text{corda} * \text{freccia}]/2$$

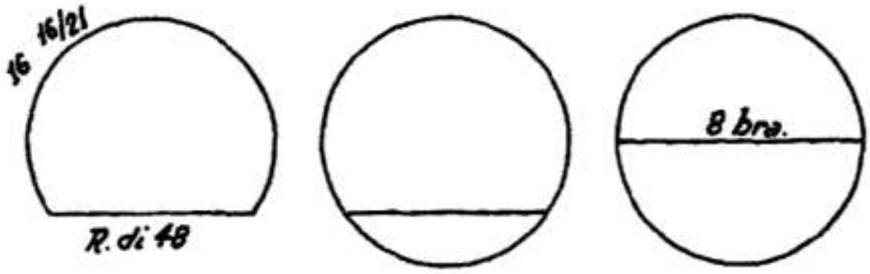
In questo caso l'Area vale:

$$\text{Area}_{\text{SEGMENTO CIRCOLARE}} = [4 * (8 + 8/21 – \sqrt{48}) + (\sqrt{48}) * 2]/2 =$$
$$= 2 * (8 + 8/21 – \sqrt{48}) + \sqrt{48} = 16 + 16/21 – \sqrt{48} \text{ braccia}^2 .$$

- -

[140] Area di un segmento circolare

Il problema è strettamente collegato con il precedente: esso considera il settore complementare a quello di area minore di mezzo cerchio e quindi di area maggiore.



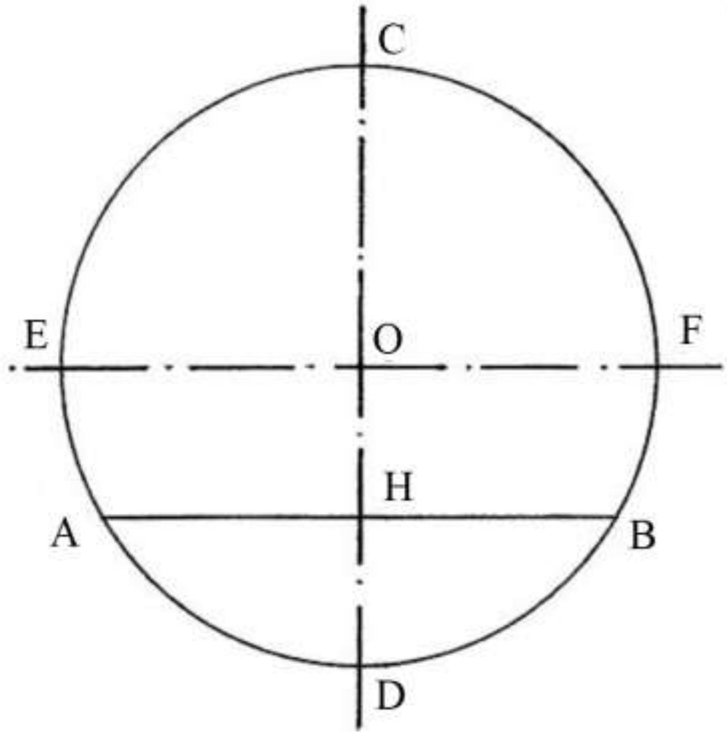
L'arco di circonferenza AECFB è lungo (16 + 16/21) braccia. Verifichiamo la correttezza del dato.

Il diametro del cerchio è 8 braccia e la circonferenza è lunga:

(22/7) * 8 = 25 + 1/7 braccia.

Sottraendo dalla lunghezza della circonferenza quella dell'arco AECFB si ha:

(25 + 1/7) – (16 + 16/21) = 8 + 8/21 braccia, lunghezza dell'arco ADB che è uguale a quella dell'arco del settore considerato nel precedente problema.



La freccia CH è lunga 6 braccia.

Il problema chiede l'area del segmento circolare.

La procedura applicata per calcolarla è la seguente:

* determinare l'area del cerchio da cui il segmento circolare è ricavato:

Area = (22/7) * raggio^2 = (22/7) * 4^2 = 50 + 2/7 braccia^2 ;

* sottrarre l'area dello *scemo* ricavata al termine della soluzione del precedente problema:

(50 + 2/7) – (16 + 16/21 - √(48)) = (1050 + 6)/21 – (331 + 16)/21 + √(48) =
= 33 + 11/21 + √(48) braccia^2, area del segmento circolare.

- APPROFONDIMENTO -

Applichiamo di nuovo la formula vista in precedenza per calcolare l'area di questo segmento circolare.

L'arco è lungo (16 + 16/21) braccia, la corda è √48 e la freccia è 6 braccia. Il raggio R del cerchio è 4 braccia.

Ecco il risultato:

Area SEGMENTO CIRCOLARE = [4 * (16 + 16/21 – √(48)) + √(48) * 6]/2 =
2 * (16 + 16/21 – √(48)) + 3 * √(48) = 32 + 32/11 – 2 * √(48) + 3 * √(48) =
= 33 + 11/21 + √(48) braccia^2.

L'area del cerchio è:

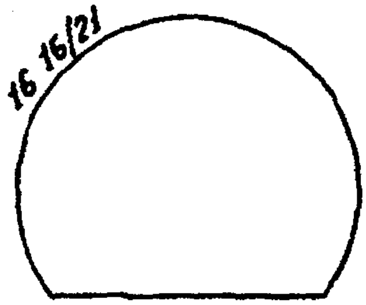
Area cerchio = (22/7) + raggio^2 = (22/7) * 4^2 = (22/7) * 16 = 50 + 2/7 braccia^2.

La riprova dell'esattezza dei calcoli di Paolo Dell'Abbaco riguardo alla soluzione dei problemi [139] e [140] è:

Area cerchio = area segmento 1 + area segmento 2 =
(16 + 16/21 – √48) + (33 + 11/21 + √48) = 49 + 27/21 = 49 + 9/7 = 50 + 2/7 braccia^2.

- -

[141] Area di un segmento circolare

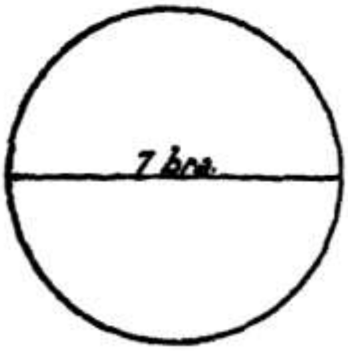


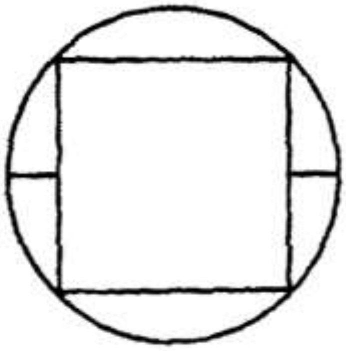
L'area del segmento circolare è calcolata con una procedura differente da quella fino a qui impiegata da Paolo Dell'Abbaco:

* dividere per 2 la lunghezza dell'arco di circonferenza: (16 + 16/21) : 2 = 8 + 8/21 ;
* moltiplicare per metà della lunghezza del diametro (che come nel caso precedente è lungo 8 braccia): 4 * (8 + 8/21) = 33 + 11/21 braccia^2 ;
* aggiungere √48: (33 + 11/21) + √48 braccia^2 , area di questo segmento circolare.

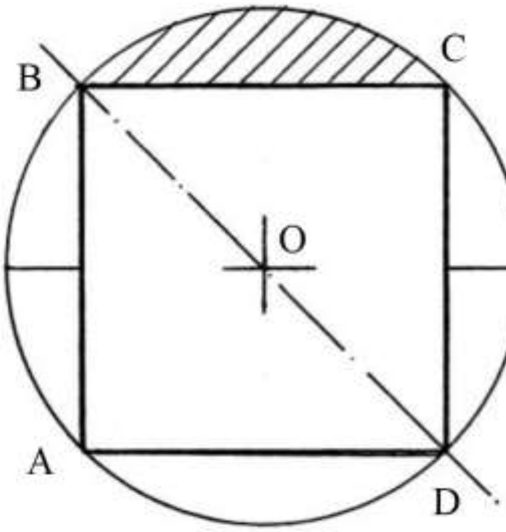
[146] Quadrato inscritto in un cerchio

Un cerchio ha diametro di 7 braccia e deve esservi inscritto il quadrato più grande possibile.





La diagonale BD è un diametro del cerchio:



Il problema chiede di calcolare la lunghezza del lato del quadrato, la sua area e la differenza fra le aree delle due figure.

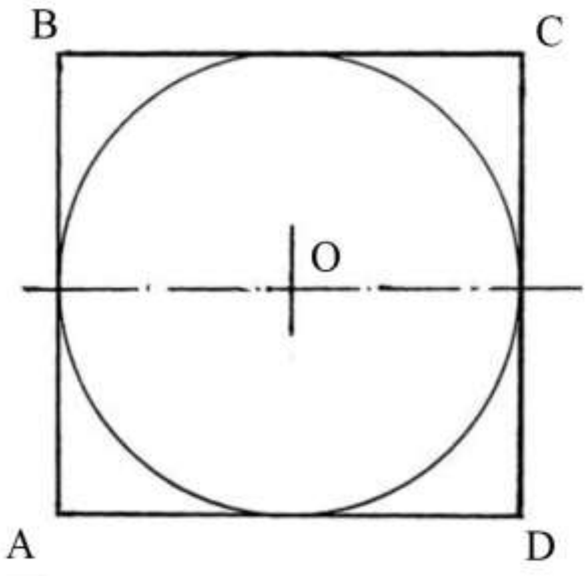
La procedura impiegata è la seguente:

* moltiplicare la lunghezza della diagonale per sé stessa: 7 * 7 = 49 ;
* dividere per 2: 49 : 2 = 24,5 ;
* estrarre la radice quadrata: √24,5 braccia, lunghezza del lato del quadrato [ABCD] ;
* moltiplicare l'ultima radice per sé stessa: (√24,5) * (√24,5) = 24,5 braccia^2, area del quadrato inscritto ;
* calcolare l'area del cerchio: (22/7) * (7/2)^2 = (22/7) * 3,5^2 = 38,5 braccia^2 ;
* sottrarre l'area del quadrato da quella del cerchio: 38,5 – 24,5 = 14 braccia^2, area della differenza fra le due figure;
* calcolare il rapporto fra le aree del quadrato e del cerchio: 24,5 : 38,5 = 7/11 ;
* per differenza, l'area occupata dai quattro segmenti circolari (uno dei quali è *tratteggiato* nella figura precedente) è uguale a 4/11 di quella del cerchio e ciascuno di essi ne occupa 1/11.

Nota: il calcolo della differenza fra l'area del cerchio e quella del quadrato inscritto serviva a calcolare con maggiore precisione il valore degli scarti di un materiale pregiato?

[147] Quadrato circoscritto a un cerchio

Un cerchio ha diametro 7 braccia e deve essere inscritto in un quadrato [ABCD]:



Il problema chiede di calcolare l'area del quadrato.

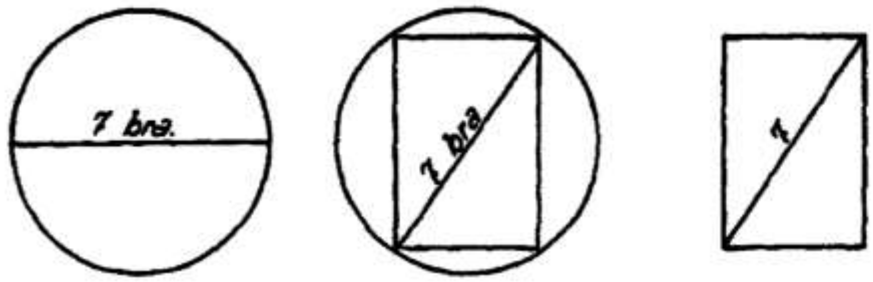
La soluzione è molto semplice, dato che il lato del quadrato è lungo quanto il diametro del cerchio e l'area è data da:

Area quadrato = diametro^2 = 7^2 = 49 braccia^2.

[148] Rettangolo inscritto in un cerchio

È dato un cerchio che ha diametro lungo 7 braccia. Deve esservi inscritto un *bislungo* (*bislungho*) e cioè un doppio quadrato che forma un rettangolo i cui lati hanno lunghezze nel rapporto 2 : 1.

Il problema del *bislungo* si ritrova nel trattato geometrico di Orbetano da Montepulciano, Autore che cita espressamente Paolo Dell'Abbaco.



La diagonale del rettangolo è lunga quanto il diametro del cerchio e cioè 7 braccia.

Il problema chiede di calcolare le lunghezze dei lati del bislungo.

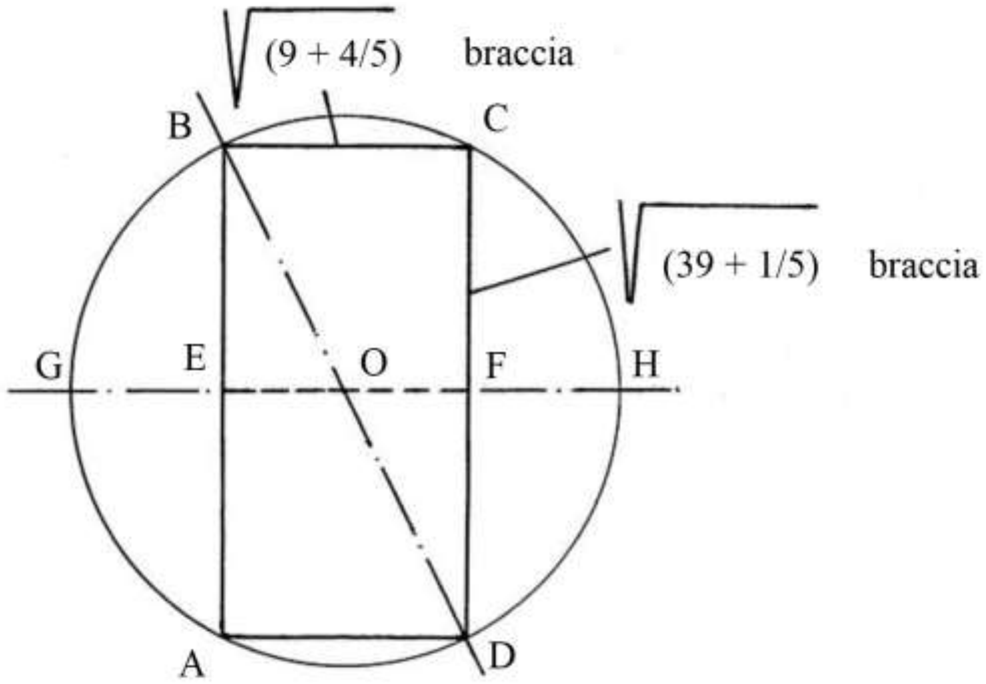
La procedura usata è la seguente:

* moltiplicare la lunghezza della diagonale per sé stessa: $7 * 7 = 49$;
* dato che le lunghezze dei lati del rettangolo devono essere in proporzione 2 : 1, elevare al quadrato 2 e 1: $2^2 = 4$ e $1^2 = 1$;
* sommare i due quadrati: $4 + 1 = 5$;
* dividere 49 per 5: $49 : 5 = 9 + 4/5$;

* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{(9 + 4/5)}$ braccia, lunghezza del lato più corto del bislungo;
* essendo il lato più lungo il doppio di quello più corto, moltiplicare per 2 il precedente dato:

$$2 * \sqrt{(9 + 4/5)} = \sqrt{[4 * (9 + 4/5)]} = \sqrt{(39 + 1/5)} \text{ braccia.}$$

La figura che segue riassume i dati:



- APPROFONDIMENTO -

Il problema può essere risolto facendo ricorso all'algebra elementare: chiamando x la lunghezza incognita del lato corto AD, quella del lato AB è 2*x.

L'area è:

$$\text{Area ABCD} = AD * AB = x * 2*x = 2*x^2.$$

Applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo ABD, risulta:

$$AD^2 + AB^2 = 7^2 \quad \text{da cui} \quad x^2 + 4*x^2 = 49 \quad \text{e}$$
$$5*x^2 = 49 \quad \text{e } x^2 = 49/5.$$

L'area vale: $2*x^2 = 2 *(49/5) = 98/5 = 19{,}6$ braccia^2.

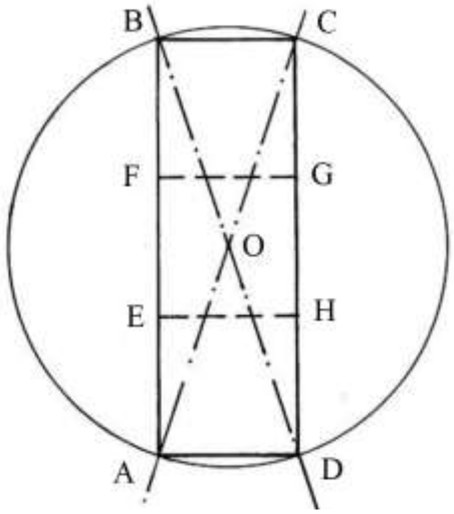
Il prodotto delle lunghezze dei due lati calcolate da Paolo Dell'Abbaco fornisce lo stesso risultato:

$$\text{Area}_{ABCD} = AD * AB = \sqrt{(9 + 4/5)} * \sqrt{(39 + 1/5)} =$$
$$= \sqrt{(9 + 4/5)} * \sqrt{(4 * (9 + 4/5))} = \sqrt{(49/5)} * \sqrt{(4 * 49/5)} = 2 * 49/5 = 19{,}6 \text{ braccia}^2.$$

- -

[149] Rettangolo inscritto in un cerchio

Nel solito cerchio di diametro 7 braccia deve essere inscritto un rettangolo i cui lati hanno lunghezze nel rapporto 3 : 1 :



La procedura è simile a quella impiegata nel caso precedente:

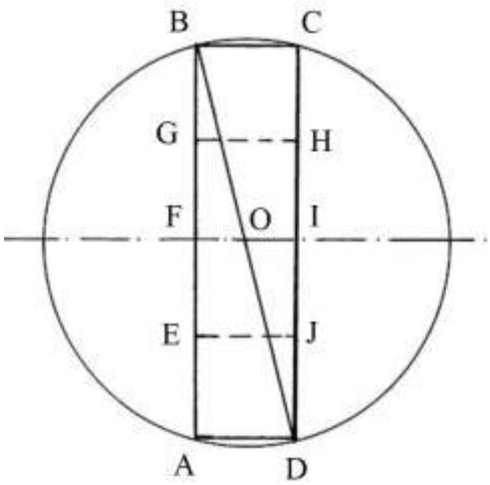
* moltiplicare 3 per sé stesso: $3 * 3 = 9$;
* moltiplicare 1 per sé stesso: $1 * 1 = 1$;
* sommare i due quadrati: $9 + 1 = 10$;
* dividere il quadrato del diametro (7) per l'ultimo dato: $7^2 : 10 = 49 : 10 = 4{,}9$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{4{,}9}$ braccia, lunghezza del lato più corto del rettangolo [AD] ;
* sottrarre 4,9 da 49: $49 – 4{,}9 = 44{,}1$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{44{,}1}$ braccia che è la lunghezza del lato maggiore [AB].

La verifica è facile: dato che la lunghezza di AB è *tre* volte quella di AD, moltiplichiamo per 3 la lunghezza di questo ultimo:

$3 * \sqrt{4{,}9} = \sqrt{(9 * 4{,}9)} = \sqrt{(44{,}1)}$ braccia che è la lunghezza di AB.

[150] Rettangolo inscritto

In un cerchio di diametro 7 braccia deve essere inscritto un rettangolo che ha i lati lunghi nel rapporto 4 : 1.



Il problema chiede di conoscere le lunghezze dei lati del rettangolo.

La diagonale – *apuntemuxa* nella terminologia di Paolo Dell’Abbaco – è lunga quanto il diametro del cerchio.

Devono essere calcolati due numeri i cui quadrati sommati diano il risultato 49 [braccia^2].

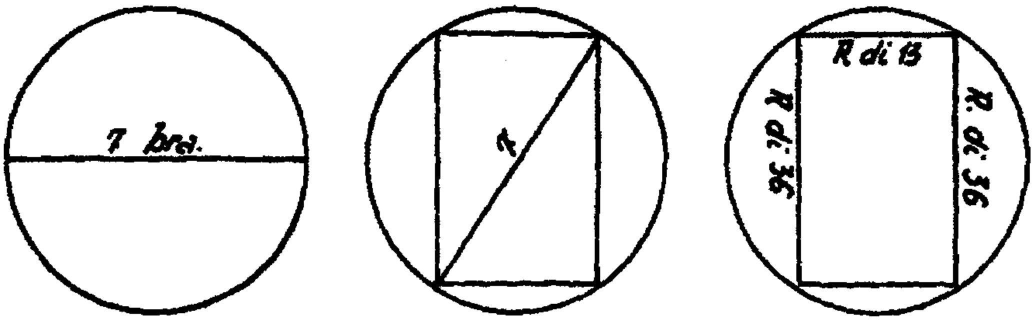
Va applicato il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo ABD.

La procedura utilizzata è la seguente:

* moltiplicare 1 per sé stesso: 1 * 1 = 1 ;
* moltiplicare 4 per sé stesso: 4 * 4 = 16 ;
* sommare i due quadrati: 1 + 16 = 17 ;
* dividere 49 per 17: 49 : 17 = 2 + 15/17 ;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{(2 + 15/17)}$ braccia, lunghezza del lato più corto [AD] ;
* calcolare i 16/17 di 49: 49 * (16/17) = 44 + 2/17 ;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{(44 + 2/17)}$ braccia, lunghezza del lato maggiore [AB].

[151] Rettangolo inscritto in un cerchio

È dato il solito cerchio con diametro lungo 7 braccia: deve esservi inscritto un rettangolo di cui è nota la lunghezza del lato maggiore, 6 braccia.



Il problema chiede di calcolare la lunghezza del lato più corto del rettangolo.

La diagonale di questo ultimo è un diametro del cerchio.

L’Autore applica di nuovo il teorema di Pitagora a uno dei due triangoli rettangoli nei quali la diagonale divide il rettangolo con la seguente procedura:

* moltiplicare per sé stessa la lunghezza del diametro: 7 * 7 = 49 ;
* moltiplicare per sé stessa la lunghezza del lato maggiore: 6 * 6 = 36 ;
* sottrarre il secondo quadrato dal primo: 49 – 36 = 13 ;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{13}$ braccia, lunghezza del lato più corto del rettangolo.

- APPROFONDIMENTO -

Due importanti abacisti fiorentini operarono a Montpellier, nella Francia meridionale, nel corso del XIII e del XIV secolo.

Jacopo da Firenze scrisse il suo *Tractatus Algorismi* nel 1307 che, a parte il titolo, è in fiorentino. Di esso sopravvivono tre copie manoscritte che sono conservate nel Codice 2236 della Biblioteca Riccardiana di Firenze, nel Codice MS90 della Trivulziana di Milano e nel manoscritto Vaticano Latino 4826 a Roma.

Lo storico della matematica danese Jens Høyrup ha pubblicato un approfondito studio sull'argomento basandosi sul manoscritto Vaticano, ritenuto il più completo dei tre, e poi ha collazionato i testi degli altri due manoscritti.

Il trattato è dedicato prevalentemente a problemi di natura aritmetica e alla descrizione delle caratteristiche delle monete correnti nei mercati dell'Europa e del Mediterraneo.

Inoltre, secondo Jens Høyrup il trattato è una delle prime esposizioni dell'algebra in italiano e, forse, sarebbe la prima in assoluto. A giudizio dello storico danese, da quest'opera deriverebbero altri successivi testi algebrici in italiano risalenti alla prima metà del Trecento.

Infine, alcuni problemi sono di natura geometrica nelle quali le dimensioni sono sempre espresse in braccia (lineari) e in braccia quadrate.

Nel sommario in italiano di un suo importante articolo Jens Høyrup [in bibliografia, 6] così riassume le sue opinioni su questo trattato:

> Nel 1307, un certo Jacopo da Firenze scrisse a Montpellier un *Tractatus algorismi* che contiene la prima presentazione sopravvissuta dell'algebra in un volgare europeo – probabilmente la prima presentazione in volgare italiano in assoluto. L'analisi del testo dimostra che l'algebra di Jacopo non è basata su nessuno dagli scritti algebrici latini, e neanche su un trattato arabo pubblicato; è dunque una testimonianza di un livello finora inesplorato dell'algebra araba. D'altra parte, Jacopo non utilizza un solo arabismo, e deve dunque aver preso la sua ispirazione da un ambiente di lingua romanza. Un'ispezione attenta di altri scritti algebrici italiani risalenti alla prima metà del Trecento svela che tutti sono legati a Jacopo o a questo ambiente (possibilmente catalano) e che nessuno ha legami con il *Liber abbaci* di Leonardo Fibonacci.

Le tesi di Jens Høyrup riguardo alle fonti di Jacopo da Firenze sono al centro di ampie discussioni fra gli storici della matematica.

Il secondo abacista è Paolo Gherardi (o Gerardi). Gino Arrighi ha studiato e pubblicato due suoi trattati matematici. Essi sono intitolati "*Libro di ragioni*" e "*Liber habaci*" e sono scritti in fiorentino. Sono contenuti nei Codici Magliabechiani, Classe XI, nn. 87 e 88 (secolo XIV) della Biblioteca Nazionale di Firenze.

Paolo Gherardi era un mercante e un maestro di abaco, vissuto fra Firenze e Montpellier. Il "*Libro di ragioni*" è stato composto a Montpellier nel 1328 e impiega le cifre indo-arabiche.

Secondo Gino Arrighi, il "*Liber habaci*" sarebbe anteriore al "*Libro di ragioni*": infatti esso usa ancora i *numeri romani*.

Entrambi i trattati contengono problemi aritmetici, alcuni algebrici, baratti di monete e dei problemi di geometria piana e di geometria solida.

Un terzo autore toscano (in seguito indicato come "Anonimo") che sembra essere vissuto per qualche tempo a Avignone, la sede papale assai vicina a Montpellier (città rinomata nel Medioevo per la sua Università e in particolare per la Facoltà di Medicina), ha lasciato un manoscritto conservato in *tre* copie:

* Il codice II.IX.57 della Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze.
* Il manoscritto 2511 della Biblioteca Riccardiana di Firenze.
* Il manoscritto Corsica 1875 dell'Accademia dei Lincei a Roma.

I tre manoscritti non contengono indicazioni sull'Autore né sull'anno di compilazione: il manoscritto della Riccardiana, risalente al quindicesimo secolo, contiene in una *carta di guardia* l'attribuzione da parte del possessore a Paolo Dell'Abbaco, forse perché nel manoscritto è anche copiato il testo delle *Regoluzze*.

Alcuni indizi portano ad affermare che il trattato sia stato compilato fra il 1329 e il 1339 e forse intorno al 1334.

Il testo è scritto in toscano, come mostrano i termini usati per la titolazione di alcuni problemi di geometria pratica:

- Chome si porta di misura roma chon ghostantinopoli [*Costantinopoli*] che roma e quadrata e ghonstantinopoli e a modo di scudo
- Due uomini luno e a monpolieri [*Montpellier*] e vole andare a parigi laltro a parigi e vole andare a monpolieri dove si trovaranno
- Un quadro quanta dall'uno canto all'altro isquadratto
- Una nave che vae in viaggio chon due vele
- Una choppa di tre metalli partita
- Una torre chon grandi fossi e molti simili
- Chome si misura una torre overo uno albero qualunche altessa fosse per la spera del sole oppesare chotante libre chotante pietre
- Recchare tutti tortoni a quadri ossimiglianti
- Molte misure di terre dogni qualita lequali sono recchate a quadro e tutte sono provate per geometria
- Due amici chelluno prestae allaltro terreno di chotanata misura chome glilo rendeno
- Rechare aquadro una aghugli di torre 3
- Misura generale dammisurare generalmente tutte maniere di terre errecharlo a quadro per qualunche modo e dove fossono poste emmostransi per forma emmisura di geometria
- Chome si mostra per lo diamitro sapere la ruota quanto gira dintorno e per la ruota mostra assapere lo diamitro delle ruota
- Recchare lo tondo aquadro per ragione dritta
- Uno tondo accompasso quanto fara lo quadro daltrettanto per possione quanto per faccia
- Una ruota gira chotanto dintorno ennoi netagliamo chotanto quanto rimarra quadrata
- Una sala overo chiesa quanto latroni venterranno affarla tutta compiuta appunto
- Uno muro overo parete chae chotanto di lungho ottanto di largho ettanto grosso di sapere quante pietre venterranno chosi fatte
- Uno albero e alto chotanto e da fitto in terra e ongni die chino chotanto in quanti die sarae la cima in terra emmostrasi per geometria
- Una torre e tanto alta quanto sara ampio il fosso che appiede della torre
- Mettere un tondo in uno quadro per ragione
- Recchare aquadro lo triangolo eddisquadrare un terreno per pino e oscremare deltondo
- Uno drappo di tanta anpiezza e lunghezza chosia chotante quanto chosterae un ltro drappo
- Lo pentagono di cinque faccie iguale per faccia

Alcuni studiosi italiani, fra i quali Elisabetta Ulivi [14] (storica della matematica all'Università di Firenze) attribuiscono il trattato a Paolo Dell'Abbaco, mentre altri fra i quali Jens Høyrup negano tale paternità.

Nella sua lunga vita (nato nel 1282 e morto nel 1374) Paolo Dell'Abbaco avrebbe potuto raggiungere Avignone, Montpellier o la vicina Arles per insegnarvi l'abaco.

Nel suo articolo citato in bibliografia, Maryvonne Spiesser descrive la importante presenza toscana nelle località del Meridione francese:

"…*È certo che la vicina Italia ha svolto un ruolo nello sviluppo dei trattati commerciali francesi, almeno su quelli che sono originari del Midi. Sono noti due maestri fiorentini, venuti a insegnare la loro arte a Montpellier (Jacopo da Firenze – intorno al 1307 – e Paolo Gherardi – intorno al 1327). La sede del Papato a Avignone nel corso di buona parte del XIV secolo aveva favorito la circolazione degli uomini e incrementato le comunicazioni fra l'Italia e la Francia. A questa epoca, circa il 25% della popolazione di Avignone e dal 10 al 15% di quella di Montpellier era di origine toscana. Un'altra testimonianza dei legami con l'Italia nell'ambito matematico è data da un'aritmetica anonima, l'*Arte dell'Abbaco*, conservata nella Biblioteca Ricardiana di Firenze (manoscritto 2511), che è stata scritta nella regione di Avignone intorno al 1330…*".

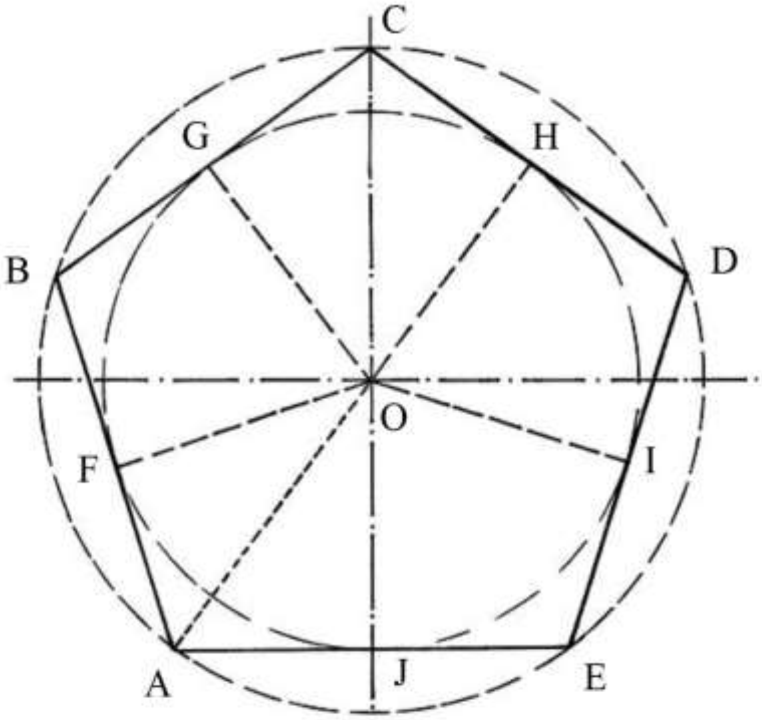
Questa nutrita presenza di Toscani spiega la presenza di più maestri d'abaco a Montpellier, a Avignone e in altre località occitane o provenzali, a supporto di mercanti, banchieri e mediatori Italiani.

Oltre ai citati problemi di geometria, il trattato affronta numerosi problemi di aritmetica, compagnie e monete.

- -

Area di un pentagono regolare

Fra i problemi geometrici che l'Anonimo presenta è il caso di un pentagono che ha lati lunghi 8 unità:



Egli calcola l'area con la seguente formula:

Area $_{\text{PENTAGONO}}$ = 3 * lato^2 – lato^2 che è semplificabile in

Area $_{\text{PENTAGONO}}$ = 2 * lato^2 = 2 * 8^2 = 128 .

Inoltre, giustifica il suo calcolo con l'applicazione di un'altra formula:

Area $_{\text{PENTAGONO}}$ = 5 * lato * apotema/2.

In teoria, questa seconda formula è corretta perché il pentagono regolare è scomposto in *cinque* triangoli isosceli di uguali dimensioni.

Nella figura, OJ è un *apotema* del pentagono ed è anche l'altezza del triangolo isoscele AOE rispetto al lato AE. Infine, OJ è il raggio del cerchio *inscritto* nel pentagono mentre OA è il raggio del cerchio *circoscritto* al poligono.

Nel caso di questo pentagono, l'Anonimo stima la lunghezza dell'apotema OJ uguale a (6 + 9/22), espressione che equivale a 141/22.

Impiegando questo valore, l'area del pentagono è:

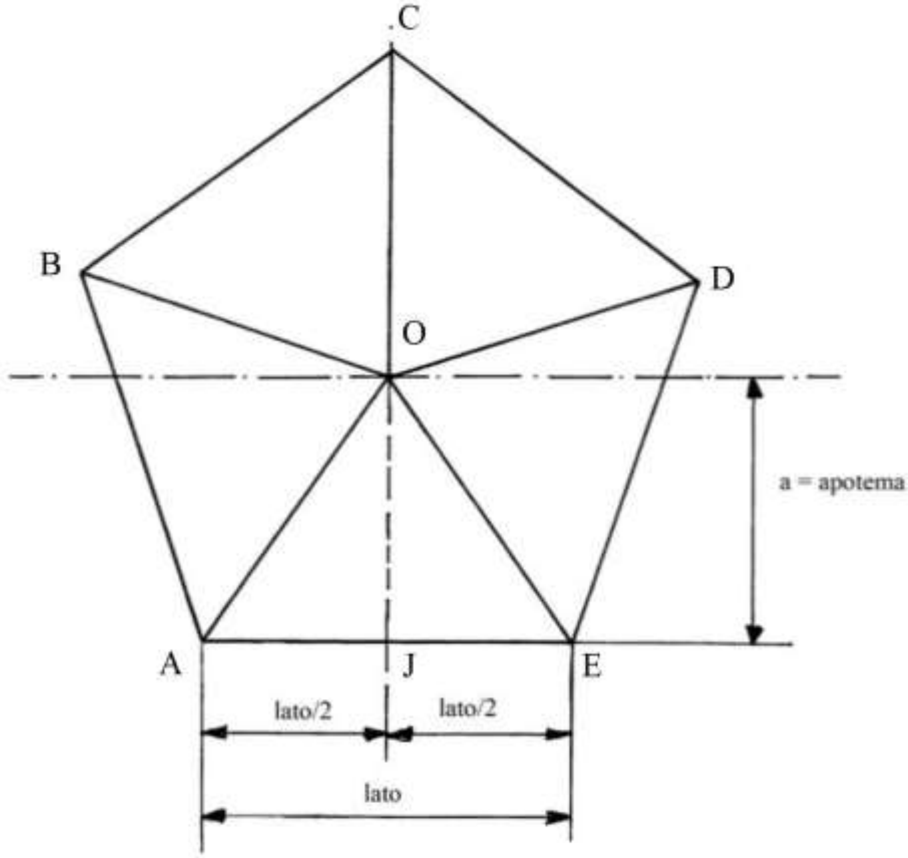
Area $_{\text{PENTAGONO}}$ = 5 * 8 * (141/22)/2 ≈ 128,18 .

Il risultato è quasi uguale a quello ricavato con la prima formula.

I poligoni regolari e i numeri fissi

Nella geometria pratica accade spesso di dover effettuare calcoli relativi alle lunghezze e alle superfici di poligoni regolari.

In un generico poligono regolare si chiama *apotema* – a –l'altezza del triangolo isoscele che ha per base un lato e per vertice il centro O, centro del poligono e delle due circonferenze, circoscritta e inscritta (il centro di questa ultima si chiama *incentro*). Come anticipato sopra, l'apotema OJ è il raggio della circonferenza inscritta e i lati OA e OE sono i raggi, *r*, della circonferenza circoscritta al pentagono del nostro caso:



La lunghezza dell'apotema è calcolabile con il teorema di Pitagora applicato ai triangoli rettangoli OAJ e OJE:

$$a = \sqrt{[r^2 – (lato/2)^2]} \text{ dove:}$$

* *r* è il raggio (OA = OE).
* *a* è l'apotema;
* *lato/2* è la lunghezza dei segmenti AJ e JE che sono lunghi metà del lato.

In un poligono regolare la lunghezza del lato AE e quella del raggio *r* sono direttamente proporzionali.

Il rapporto fra la lunghezza dell'apotema e quella del lato è un *numero fisso* f:

$$f = a/lato .$$

f è una costante per un qualsiasi poligono regolare con un certo numero di lati.

La tabella che segue fornisce i *numeri fissi* per i più comuni poligoni, in grado di calcolare rapidamente il valore di *a* con la formula:

$$a = f * \text{lato} .$$

poligono regolare	numero fisso *f*
triangolo equilatero	0,289
quadrato	0,5
pentagono	0,688
esagono	0,866
ettagono	1.038
ottagono	1,207
ennagono	1,374
decagono	1,539
endecagono	1,703
dodecagono	1,866

Con l'impiego del numero fisso *f* calcoliamo l'area del pentagono:

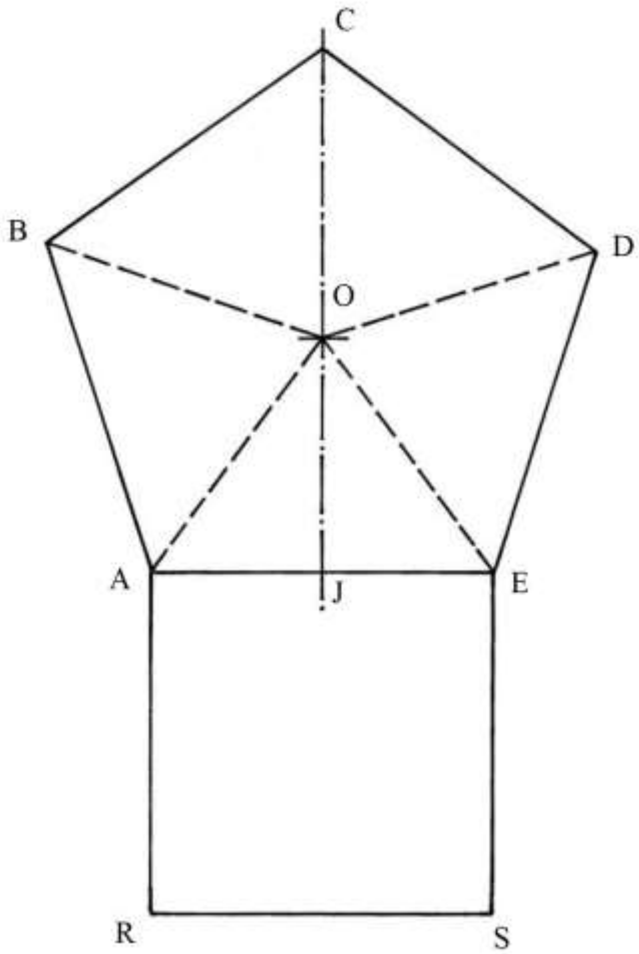
$$\text{Area}_{\text{PENTAGONO}} = 5 * (\text{lato} * a)/2 \approx 5 * \text{lato} * f * \text{lato}/2 \approx 5 * \text{lato}^2 * a/2 \ .$$

Applichiamo questa al caso del pentagono dell'esempio:

$$\text{Area}_{\text{ABCDE}} \approx 5 * 8^2 * 0{,}688 /2 \approx 110{,}08 \ .$$

In un qualsiasi poligono regolare il rapporto fra la sua area e quella del quadrato costruito su un suo lato è costante ed è un altro *numero fisso*, indicato con la lettera *F* (maiuscola), per distinguerla dal numero fisso *f* relativo all'apotema:

$$\text{Area}_{\text{POLIGONO}} = F * \text{lato}^2 \ .$$



Il numero F è un numero fisso caratteristico di ciascun poligono regolare: esso indica quante volte il quadrato RAES è contenuto nel pentagono regolare ABCDE.

Il principio vale per tutti i poligoni regolari.

La tabella che segue riporta i valori di F per i più comuni poligoni:

poligono regolare	numero fisso F
triangolo equilatero	0,433
quadrato	1
pentagono	1,72
esagono	2,598
ettagono	3,634
ottagono	4,828
ennagono	6,182
decagono	7,694
endecagono	9,366
dodecagono	11,196

Applicando la formula al caso concreto si ha:

$$\text{Area}_{\text{PENTAGONO}} \approx 1{,}72 * 8^2 \approx 1{,}72 * 64 \approx 110{,}08 .$$

Il risultato è uguale a quello ottenuto con l'impiego del numero fisso *f* relativo all'apotema.

L'Anonimo era a conoscenza della formula semplificata proposta da Erone per calcolare l'area del pentagono? Eccola:

$\text{Area}_{\text{PENTAGONO}} \approx 5/3 * \text{lato}^2 \approx 5/3 * 8^2 \approx 106,(66)$, valore che si discosta poco da quello corretto.

Nei trattati di Jacopo da Firenze e di Paolo Gherardi sono usate altre formule, diverse da quelle utilizzate dall'Anonimo, che danno risultati molto errati. Su questi argomenti può essere consultare i documenti presenti su questo stesso sito (www.geometriapratica.it) e relativi ai lavori dei due abacisti.

Nel trattato dell'Anonimo, le due formule da lui impiegate per calcolare l'area del pentagono forniscono un risultato, 128,18, grandemente errato per eccesso. Poteva Paolo Dell'Abbaco commettere un così grave errore?

- -

APPENDICE

L’URBANISTICA DI FIRENZE

Maria Teresa Bartoli ha condotto approfonditi studi sull’urbanistica medievale di Firenze e su alcuni suoi importanti edifici. Nel volume citato in bibliografia è sviluppata la materia dalla quale sono stati ricavati gli spunti per questa Appendice.

Nel 1265 il Papa Clemente IV pubblicò una bolla per disciplinare i rapporti confinari fra gli edifici degli ordini religiosi *mendicanti* (Francescani, Domenicani e altri) all’interno delle città. Il suo scopo era quello di garantire risorse sufficienti a frati e monaci che vivevano delle offerte dei fedeli.

La bolla di Clemente IV non aveva valore retroattivo, né poteva averlo per ovvie ragioni di opportunità. Essa prevedeva una distanza minima reciproca di almeno 300 *canne di Roma* fra i prospetti dei conventi: questa canna era divisa in *8 palmi* e aveva una lunghezza equivalente a 1,991897 metri.

Le 300 canne valevano:

$$1{,}991897 * 300 \approx 597{,}5691 \text{ metri.}$$

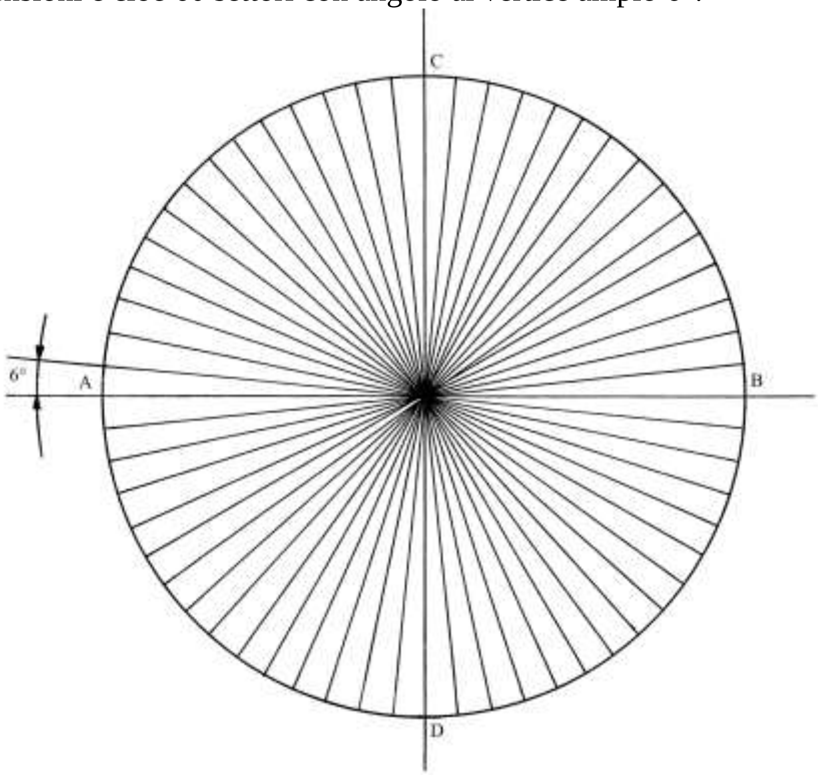
La misura che a Firenze rispettava le distanze previste dalla bolla papale era la lunghezza di 1000 braccia da panno e cioè:

$$1000 * 0{,}583626 \approx 583{,}626 \text{ metri.}$$

A Firenze questa lunghezza era coperta con 200 canne agrimensorie (da 5 braccia) o da 250 canne mercantili (da 4 braccia).

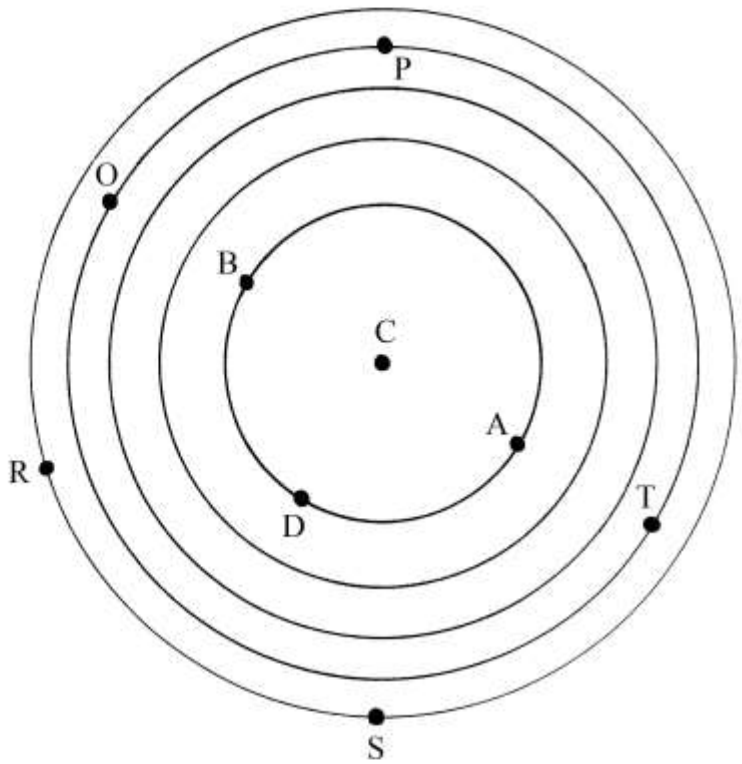
Nelle città le numerose costruzioni esistenti impedivano una misura diretta per mezzo di pertiche, funi o catene: le distanze erano determinate con semplici strumenti basati sull’ottica, probabilmente il quadrato geometrico e il bastone di Giacobbe.

Gli studi della Bartoli sembrano confermare la suddivisione dello spazio urbanistico di Firenze, decisa dalle autorità del Comune, nel corso del XIII. La città sarebbe stata assimilata a un cerchio suddiviso in cinque parti di uguale superficie. Una seconda ripartizione era basata su settori circolari di uguali dimensioni e cioè 60 settori con angolo al vertice ampio 6°:



Approfondiamo la divisione in *cinque* aree circolari.

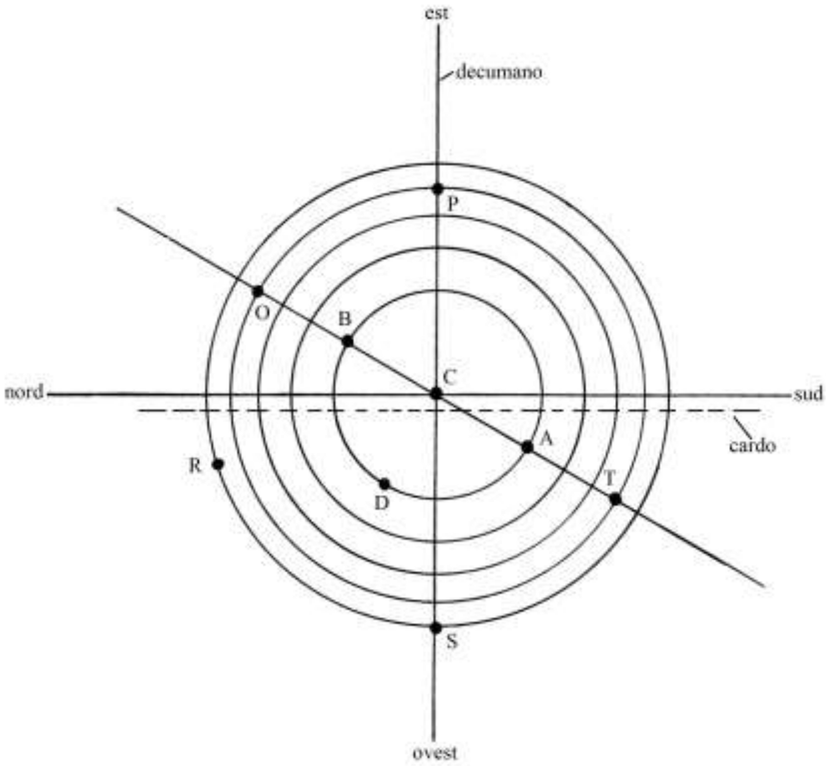
Lo schema che segue è ricavato dagli studi della Bartoli:



Nel grafico sono presenti un cerchio e quattro corone circolari.
Le lettere indicano i seguenti riferimenti:
A – Santa Croce (Francescani)
B – Santa Maria Novella (Domenicani)
C – Corso
D – Chiesa di Santa Felicita
T – Torre della Zecca
O – Convento delle Domenicane (Via della Scala)
P – Concento di Santa Caterina d’Alessandria
R – Convento dei Camaldolesi
S – Chiesa di San Leonardo (in Arcetri).

Il centro della struttura urbanistica, C, è individuato in un punto del *Corso* [a Firenze spesso erroneamente chiamato *Via del Corso*], strada che ricalca l’antico *decumano* della centuriazione romana della città fondata nel 59 a.C.: il luogo è oggi conosciuto come Canto alla Croce Rossa.

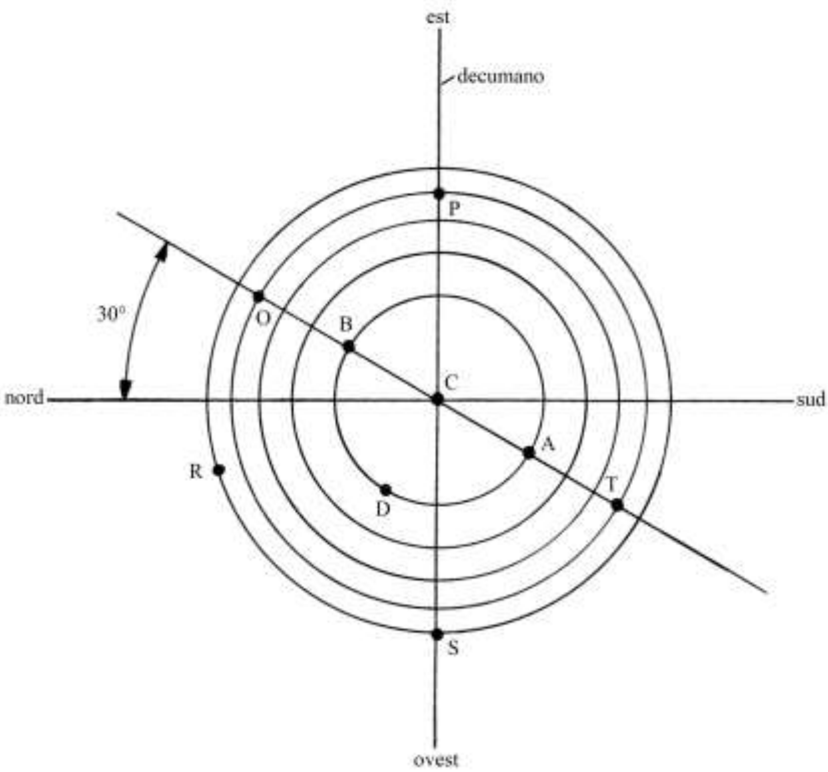
Il *cardo* della centuriazione era orientato quasi esattamente verso Nord, con una leggera deviazione di 1° verso Est:



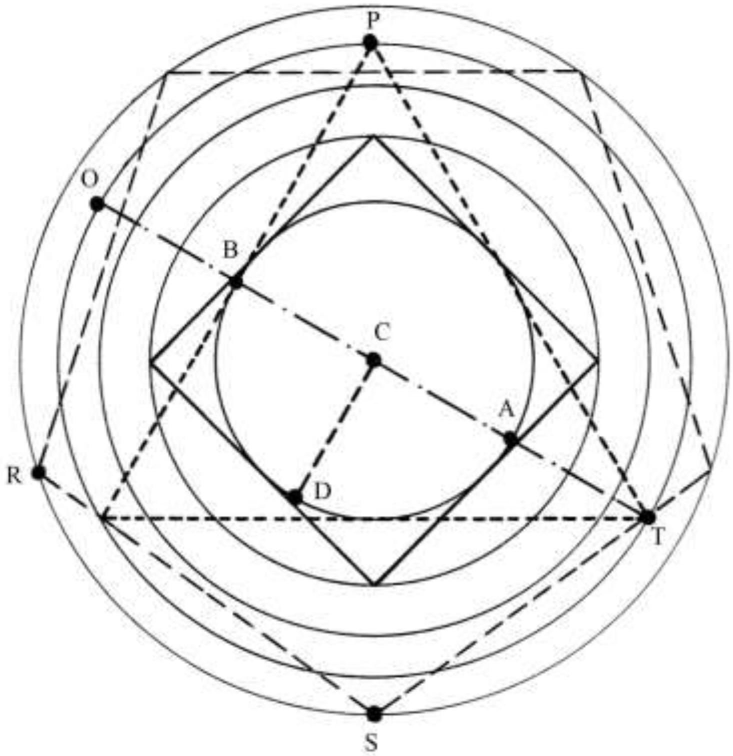
Il cardo qui disegnato tratteggiato non passava per il centro C ma era leggermente spostato verso Ovest, come lo è in figura.

La retta che passa per i vertici B (Santa Maria Novella) e T (Torre della Zecca) passa per il centro C e incontra A (Santa Croce).

La linea che congiunge i prospetti di B e di A è lunga 2000 braccia ed è inclinata di 30° rispetto all'asse Nord-Sud; BA è un diametro del cerchio di centro C che ha raggio lungo 1000 braccia:



All’interno della struttura circolare, la Bartoli ha individuato la presenza di tre poligoni regolari inscritti e concentrici; dall’interno verso l’esterno sono:

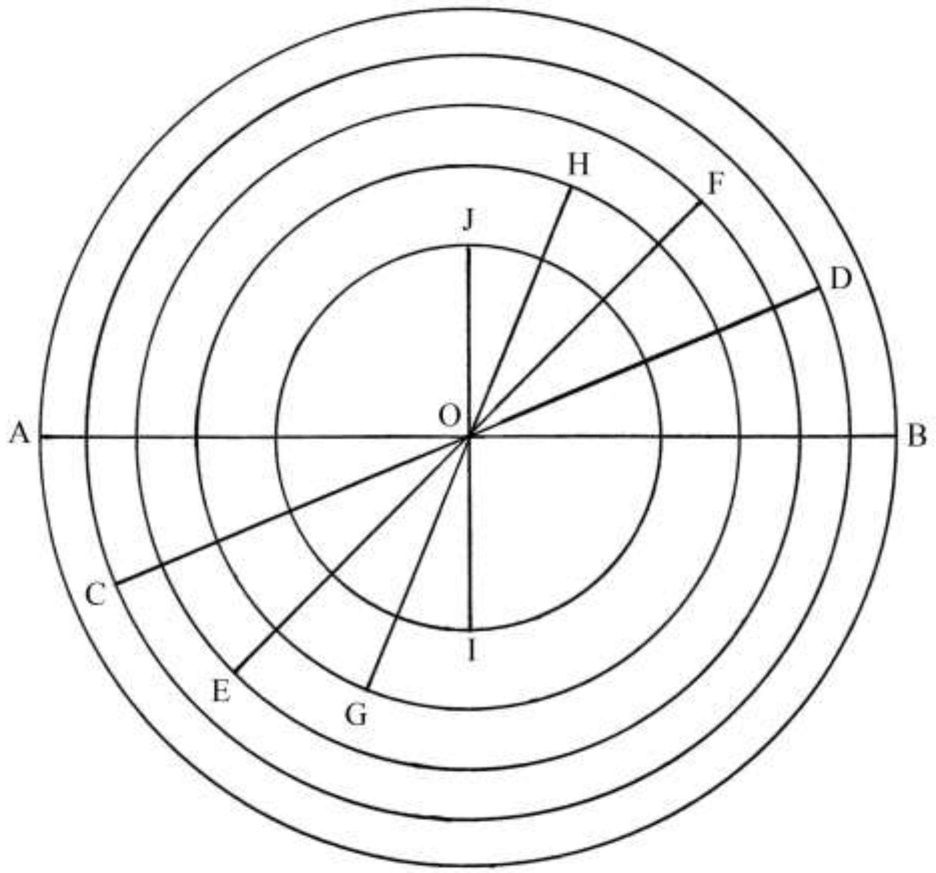


* un quadrato tangente al cerchio centrale nei punti B, A e D e inscritto nel successivo cerchio.
* Un triangolo equilatero tangente al primo cerchio (in B e in altri due punti non definiti) inscritto nel penultimo cerchio nei punti P e T.
* Un pentagono capovolto inscritto nel cerchio più esterno e con due vertici nei punti R e S.

<u>Divisione di un cerchio in cinque aree uguali</u>

Un cerchio deve essere diviso in cinque aree concentriche e di uguali superfici, ciascuna pari a *un quinto* di quella dell’intero cerchio.
L’area centrale mantiene la forma di un cerchio e le altre quattro aree sono costituite da *corone circolari*.

AB è il diametro *d* del cerchio da suddividere:



La procedura che segue è basata su quella proposta da Paolo Dell'Abbaco per la soluzione della *ragione 130*.

- * Moltiplicare il diametro *d* per sé stesso: $d*d = d^2$.
- * Dividere (d^2) per 5: $d^2/5$.
- * Sottrarre da d^2: $d^2 – d^2/5 = 4/5 * d^2$.
- * Estrarre la radice quadrata: $\sqrt{(4/5 * d^2)} = 2 * d/\sqrt{5} = 2* \sqrt{5} * d/5 = d_1 =$ CD .
- * Dividere ($4/5 * d^2$) per 4: $(4/5 * d^2)/4 = d^2/5$.
- * Sottrarre l'ultimo quoziente da $4/5 * d^2$: $4/5 * d^2 – d^2/5 = 3/5 * d^2$.
- * Estrarre la radice quadrata: $\sqrt{(3/5 * d^2)} = d * \sqrt{(3/5)} = d_2 =$ EF .
- * Dividere ($3/5 * d^2$) per 3: $3/5 * d^2/3 = d^2/5$.
- * Sottrarre l'ultimo quoziente da ($3/5 * d^2$): $3/5 * d^2 – d^2/5 = 2*d^2/5$.
- * Estrarre la radice quadrata: $\sqrt{(2*d^2/5)} = d * \sqrt{(2/5)} = d_3 =$ GH .
- * Dividere ($2*d^2/5$) per 2: $(2*d^2/5)/2 = d^2/5$.
- * Estrarre la radice quadrata: $\sqrt{(d^2/5)} = d /(\sqrt{5}) = d_4 =$ IJ.

L'elenco che segue riassume i valori dei diversi coefficienti:

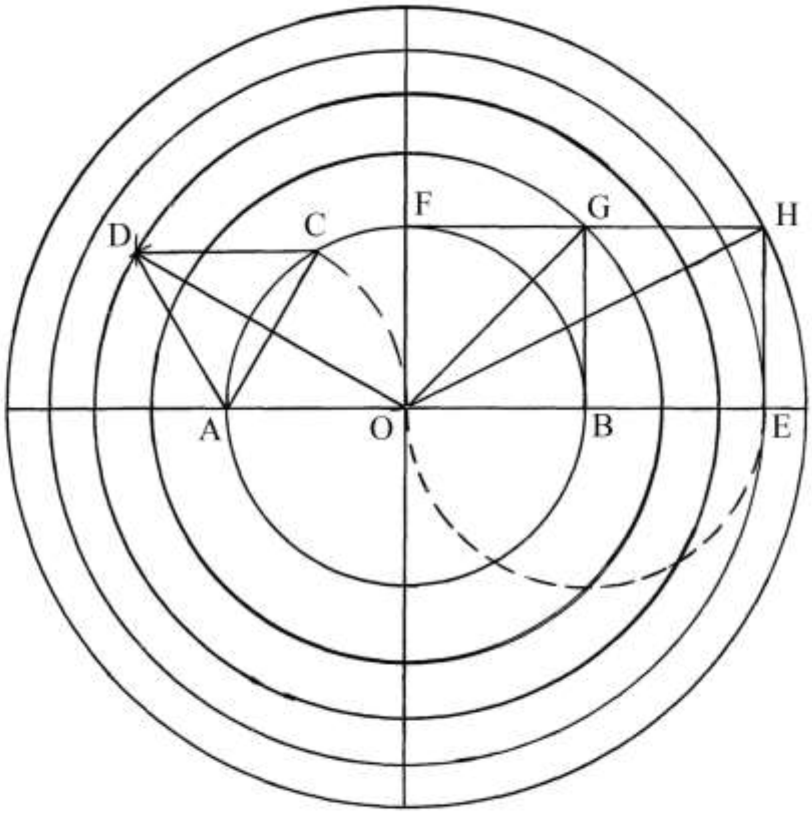
- * $d = d*1$;
- * $d_1 = (2* \sqrt{5}/5) * d \approx 0{,}8944 * d$;
- * $d_2 = \sqrt{(3/5)} * d \approx 0{,}7746 * d$;
- * $d_3 = \sqrt{(2/5)} * d \approx 0{,}6325 * d$;
- * $d_4 = (1/\sqrt{5}) * d \approx 0{,}4472 * d$.

L’ingrandimento di un cerchio

Procediamo per via geometrica all’ingrandimento di un cerchio.

AB è il diametro del cerchio di lunghezza nota, intorno al quale devono essere costruite delle corone circolari concentriche che abbiamo tutte area uguale a quella del cerchio centrale.

O è il centro:



Per semplificare le operazioni useremo il *raggio* invece del *diametro*.

Prolungare AB e tracciare il diametro ad esso perpendicolare.

Fare centro in A e con raggio AO = r disegnare un arco da O fino a tagliare la circonferenza in C. Con la stessa apertura fare centro in A e in C e tracciare due archi che si incontrano nel punto D.

Disegnare i segmenti AC, AD, CD e OD.

Sempre con apertura OA fare centro in B e tracciare una semicirconferenza da O a E.

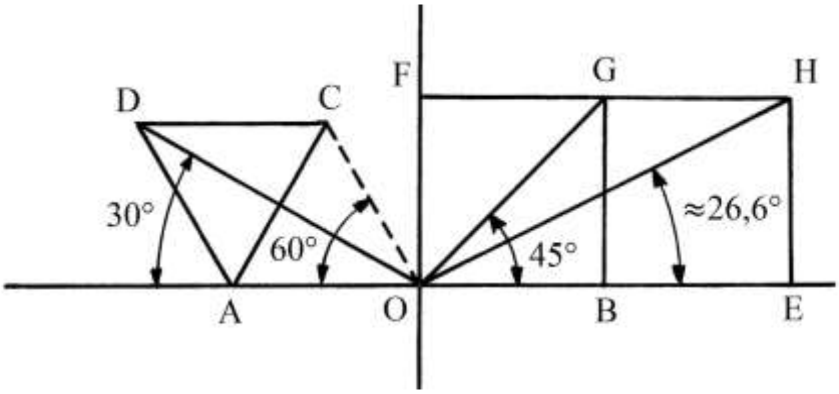
Dai punti B e F condurre le parallele ai diametri: esse si intersecano nel punto G.

Dal punto E elevare la perpendicolare al diametro orizzontale fino a incontrare il prolungamento di FG nel punto H.

Collegare H con O.

Facendo centro in O disegnare le circonferenze di raggi OG, OD, OE e OH.

Verifichiamo le lunghezze dei raggi delle corone circolari:



OG è lungo quanto la diagonale del quadrato OFGB, con lati lunghi *r*:

$OG = \sqrt{2} * r$.

OD è la *doppia altezza* di un triangolo equilatero che ha lati lunghi OA = r:

$OD = 2 * (\sqrt{3}/2) * OA = \sqrt{3} * r$.

OE è lungo:

$OE = OB + BE = 2 * OB = 2 * r = \sqrt{4} * r$.

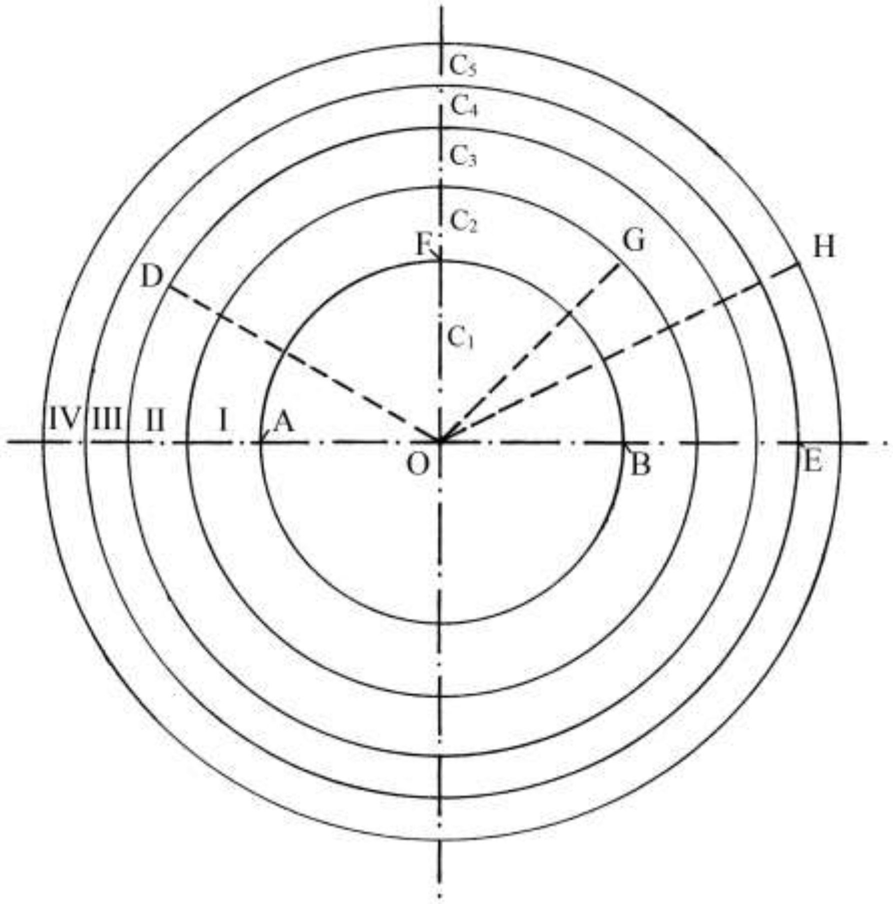
OH è la diagonale di un rettangolo, OFHE, che ha forma di doppio quadrato:

$OH = \sqrt{(OE^2 + OH^2)} = \sqrt{(2*OB^2 + OB^2)} = \sqrt{5} * OB = \sqrt{5} * r$.

Per chiarezza, la tabella che segue riassume le proporzioni delle lunghezze dei cinque raggi rispetto a quello del cerchio interno, *r*:

Raggi	Rapporti con OA = *r*
OA	1
OG	$\sqrt{2}$
OD	$\sqrt{3}$
OE	$\sqrt{4} = 2$
OH	$\sqrt{5}$

Le aree dei *cinque* cerchi concentrici di centro O sono indicate con le sigle C_1, C_2, C_3, C_4 e C_5:



La tabella che segue fornisce le aree dei cinque cerchi:

Raggi	Aree
OA	$C_1 = \pi * OA^2$
OG	$C_2 = \pi * (OA * \sqrt{2})^2 = 2 * \pi * OA^2$
OD	$C_3 = \pi * (OA * \sqrt{3})^2 = 3 * \pi * OA^2$
OE	$C_4 = \pi * (OA * 2)^2 = 4 * \pi * OA^2$
OH	$C_5 = \pi * (OA * \sqrt{5})^2 = 5 * \pi * OA^2$

Nella figura le quattro corone circolari sono contrassegnate dall'interno verso l'esterno con le cifre romane I, II, III e IV.

Le aree delle quattro corone circolari sono ottenute per differenza fra le aree dei cerchi che le definiscono:

* Area I = $C_2 - C_1 = (2 * \pi * OA^2) - (\pi * OA^2) = (\pi * OA^2)$.
* Area II = $C_3 - C_2 = (3 * \pi * OA^2 - (2 * \pi * OA^2) = (\pi * OA^2)$.
* Area III = $C_4 - C_3 = (4 * \pi * OA^2) - (3 * \pi * OA^2) = (\pi * OA^2)$.
* Area IV = $C_5 - C_4 = (5 * \pi * OA^2) - (4 * \pi * OA^2)$.

Le aree delle quattro corone circolari sono fra loro uguali e hanno la stessa superficie del cerchio interno. *La costruzione geometrica è esatta e può essere applicata alla soluzione del problema urbanistico dei conventi di Firenze*.

Lo schema circolare proposto dalla Bartoli è perfettamente sovrapponibile a quello ricavato con la costruzione geometrica descritta in questo paragrafo.

A questo punto possiamo calcolare le lunghezze dei raggi dei cerchi della struttura urbanistica fiorentina:

Raggi	Lunghezze dei raggi in braccia da panno
OA	1000
OG	$1000 * \sqrt{2} \approx 1414$
OD	$1000 * \sqrt{3} \approx 1732$
OE	$1000 * 2 = 2000$
OH	$1000 * \sqrt{5} \approx 2236$

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Applichiamo al problema il metodo proposto da Paolo Dell'Abbaco nella soluzione della *ragione 131*, con una piccola modifica: consideriamo i *raggi* invece dei diametri. Ecco i passi della procedura:

1. Moltiplicare il raggio $OA = r$ per sé stesso: $r * r = r^2$.
2. Moltiplicare il quadrato di r per 2: $2*r^2$.
3. Estrarre la radice quadrata: $\sqrt{(2*r^2)} = \sqrt{2} * r$ [raggio OG del cerchio C_2].
4. Moltiplicare il quadrato di r per 3: $3*r^2$.
5. Estrarre la radice quadrata: $\sqrt{(3*r^2)} = \sqrt{3} * r$ [raggio OD del cerchio C_3].
6. Moltiplicare il quadrato di r per 4: $4*r^2$.
7. Estrarre la radice quadrata: $\sqrt{(4*r^2)} = 2*r$ [raggio OE del cerchio C_4].
8. Moltiplicare il quadrato di r per 5: $5*r^2$.
9. Estrarre la radice quadrata: $\sqrt{(5*r^2)} = \sqrt{5} * r$ [raggio H del cerchio C_5] .

Ripetiamo i passi della procedura introducendo i soli dati numerici (con r = 1000 braccia da panno):

1. 1000 * 1000 = 1 000 000.
2. 1 000 000 * 2 = 2 000 000.
3. $\sqrt{(2\,000\,000)} \approx 1414$ braccia, raggio OG.
4. 1 000 000 * 3 = 3 000 000.
5. $\sqrt{(3\,000\,000)} \approx 1732$ braccia, raggio OD.
6. 1 000 000 * 4 = 4 000 000.
7. $\sqrt{(4\,000\,000)} = 2000$ braccia, raggio OE.
8. 1 000 000 * 5 = 5 000 000.
9. $\sqrt{(5\,000\,000)} \approx 2236$ braccia, raggio OH.

Bibliografia

1. Arrighi Gino (a cura e con introduzione di), “Trattato d’Aritmetica” di Paolo Dell’Abbaco, secondo la lezione del Codice Magliabechiano XI, 86 della Biblioteca Nazionale di Firenze, Pisa, Domus Galilæana, 1964, pp. 160.
2. Arrighi Gino, “Due trattati di Paolo Gherardi matematico fiorentino”, in “Accademia delle scienze di Torino. Atti. Classe di scienze morali storiche e filologiche”, Torino, v. 101 (1966-67), pp. 61-82 [ristampato in Gino Arrighi, “La matematica dell’età di mezzo”, Pisa, Edizioni ETS, 2004, pp. 81-98].
3. Bartoli Maria Teresa, “Santa Maria Novella a Firenze. Algoritmi della scolastica per l’architettura”, Firenze, Edifir, 2007, pp. 87.
4. Cassinet Jean, “Une arithmétique toscane en 1334 en Avignon dans la cité des papes et de leurs banquiers florentins”, in “Commerce et Mathématiques du Moyen Age à la Renaissance, autour de la Mediterranée”, Tolosa, Editions du C.I.H.S.O, pp. 105-128.
5. Cipolla Carlo M., “Le avventure della lira”, Milano, Edizioni di Comunità, 1958, pp. 133.
6. Cipolla Carlo M., “Storia economica dell’Europa pre – industriale”, Bologna, Il Mulino, 1974, pp. 383.
7. Cipolla Carlo M., “Il governo della moneta a Firenze e a Milano nei secoli XIV-XVI”, Bologna, Il Mulino, 1990, pp. 306.
8. Finiello Zervas Diane, “The Trattato dell’Abbaco and Andrea Pisano’s Design for the Florentine Baptistery Door”, “Renaissance Quarterly”, Vol. 28, No. 4, Studies in the Renaissance Issue (winter, 1975), pp. 483-503.
9. Gherardi Paolo, “Opera matematica. Libro di ragioni – Liber habaci”, Codici Magliabechiani Classe XI, nn. 87 e 88 (sec. XIV) della Biblioteca Nazionale di Firenze (a cura e con introduzione di Gino Arrighi), Lucca, Maria Pacini Fazzi Editore, 1987, pp. 173.
10. [Guasti Cesare], “Le Regoluzze di Maestro Paolo Dell’Abbaco, matematico del secolo XIV.”, Prato, Tipografia Guasti, MDCCCLX, pp. 16.
11. Høyrup Jens, “L’Algèbre de Jacopo de Florence: un défi a l’historiographie de l’algèbre presque-moderne”, 2000, pp. 18 (MARRAKECH_2002_Conference_contribution.pdf).
12. Høyrup Jens, “Jacopo da Firenze and the beginning of Italian vernacular algebra”, Historia Mathematica, 33 (2006), pp. 4 – 42.
13. Høyrup Jens, “Jacopo da Firenze‘s *Tractatus Algorismi* and Early Italian Abbacus Culture”, Basel – Boston – Berlin, Birkhäuser, 2007, pp. xii-482.
14. Spiesser Maryvonne, “Les manuels d’arithmétique pour les marchands dans la France du XV^{e} siècle”, in “Bulletin de l’APMEP”, n° 444, 2003, pp. 32-50.
15. Travaini Lucia, “Monete mercanti e matematica”, Roma, Jouvence, 2003, pp. 319 con tavole fuori testo.
16. Ulivi Elisabetta, “Fibonacci e la sua successione: le scuole d’abaco”, 2018, pp. 77, “Ulivi_La-successione-di-Fibonacci_-le-scuola[e]-di-abaco.pdf.
17. Van Egmond Warren, “Practical Mathematics in the Italian Renaissance: a Catalog of Italian Abbacus manuscripts and printed books to 1600”, Firenze, Istituto e Museo di Storia della Scienza [oggi *Museo Galileo*], Supplemento agli *Annali dell’Istituto e Museo di Storia della Scienza*, anno 1980 – fascicolo 1, pp. XLIV+442.