sergio(punto)calzolani(at)outlook(punto)it

Parole chiave: area triangoli; lunghezze cateti triangoli rettangoli; pertica; canna; terminologia entità geometriche; formula di Erone per i triangoli; problemi sul quadrato; area del rettangolo e dei quadrilateri; formula degli agrimensori; problemi su cerchi, circonferenze e segmenti circolari; area pentagono; area esagono; area ettagono; area ottagono; area ennagono; quadratura del cerchio.

ORBETANO DA MONTEPULCIANO

Il manoscritto Moreni 130 della Biblioteca Riccardiana di Firenze contiene un trattato – *Regole di geometria pratica* – attribuito a Orbetano da Montepulciano, un geometra e agrimensore, forse operante anche a Siena. Agrimensore lo deve essere stato perché la prima parte del manoscritto è dedicata a problemi di misurazioni e divisioni di terreni. Fu anche un *misuratore* perché si interessò ai calcoli relativi al contenuto delle botti e alla misurazione di edifici.

L'unità di misura che egli preferì è la *pertica* corrispondente alla *canna agrimensoria* lunga 5 braccia.

Il testo sarebbe stato composto intorno al 1464.

Secondo Annalisa Simi, la ricercatrice dell'Università di Siena che lo ha trascritto e pubblicato, la struttura del trattato ipotizzerebbe la sua composizione per un uso personale dell'autore. Infatti, i problemi affrontati sono descritti senza soluzione di continuità e il testo non mostra divisioni in capitoli e paragrafi.

Il contenuto è influenzato dai lavori degli abacisti delle scuole fiorentine: in particolare Orbetano invoca l'autorità di Paolo dell'Abbaco (1282 – 1374), il più famoso abacista fiorentino, autore di numerosi testi, fra i quali il "Trattato d'Aritmetica" dal quale Orbetano estrae numerosi problemi (o *ragioni* nel linguaggio degli abacisti toscani).

Fra i due Autori vi sono alcune differenze in materia di unità di misura: Paolo dell'Abbaco impiega il braccio mentre Orbetano usa il suo multiplo, la *pertica* lunga 5 braccia. Ciò dimostrerebbe che per Orbetano l'attività principale era quella di *agrimensore.*

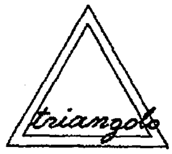
Particolarmente accurata è la parte dedicata al calcolo della quantità di vino contenuta nelle botti: ciò sta a significare l'importanza dell'attività vitivinicola nel circondario di Montepulciano e in tutta la Toscana.

Nota: in questo articolo sono descritti soltanto i problemi di *geometria piana*.

Le tavole iniziali

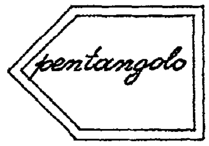
Le prime pagine (e cioè le carte 1 *verso*, 2 *recto*, 2 *verso*, 3 *recto* e 3 *verso*) del trattato sono dedicate alla classificazione delle figure geometriche: i poligoni da 3 a 10 lati e il cerchio. Tutte le figure sono state ridisegnate da Annalisa Simi con linea *doppia*:

Triangolo de 3 faccie



Quatrangolo de 4 faccie

Pentangolo de 5 faccie



Essangolo de 6 faccie \\

Septangolo de 7 faccie

Ottangolo de 8 faccie

Novangolo de 9 faccie \\

Deciangolo de 10 faccie

Sonno quatrangoli de 3 manieri:

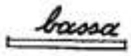
Lu primo si è quatratu.

Lu secondo quatralatero.\\

E 'l terzo si è trappero o ver rombo.

Ogne linea cadente ricta se chiama cattito.

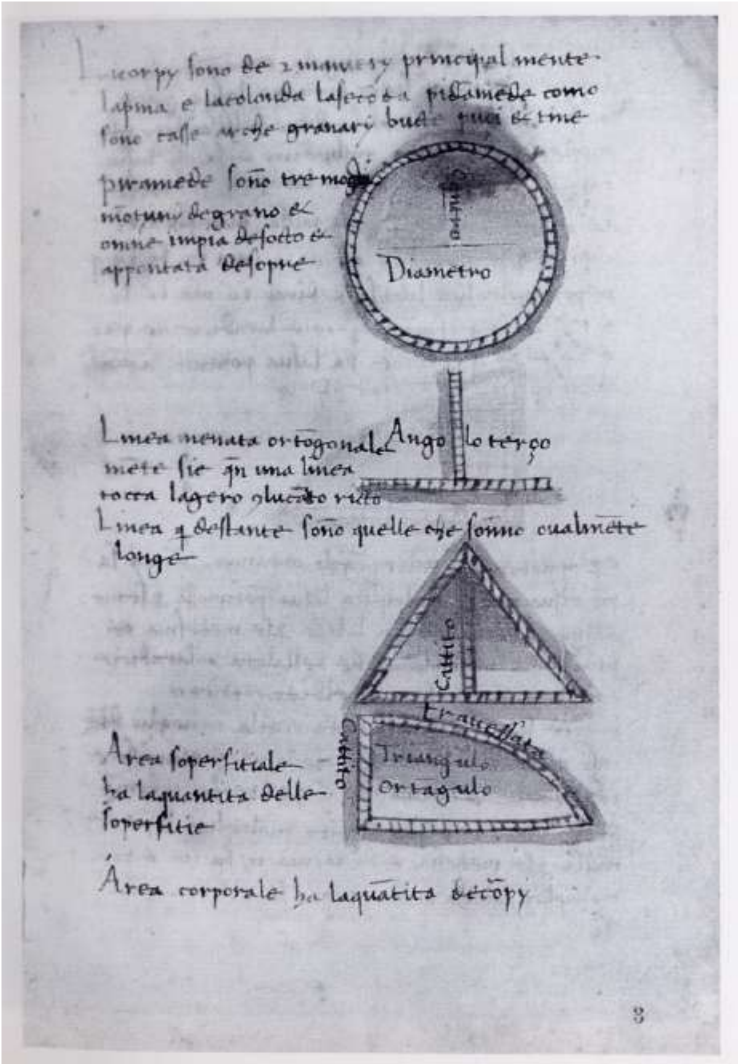
Ogne linea giacente se chiama bassa.



El tondo si è una figora terminata da una linea continua e chiamase circumferenzia. E la magior linea, ericta de cappia, diametro se chiama; e 'l punto oualmente è circunferenzia se chiama centro. \\

Le due tavole sono riprodotte dal testo di Annalisa Simi, citato in bibliografia.

Nel manoscritto le linee delle figure sono rappresentate da un cordoncino di colore rosso e sono colorate in verde: la figura che segue (da De Laurentiis, citata in bibliografia) è in bianco e nero e riproduce la carta 3 *recto*:



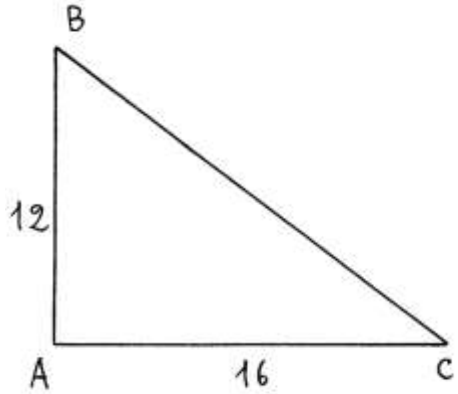
Nota: tutte le figure del manoscritto non contengono lettere per indicare i vertici: in questo articolo sono talvolta scritti per rendere più chiara la spiegazione.

Ciascun titolo dei paragrafi è preceduto da un numero racchiuso fra parentesi quadre […] che segue la numerazione progressiva introdotta da Annalisa Simi nel suo lavoro allo scopo di distinguere i problemi che Orbetano non ha in alcun modo contrassegnati.

Sempre fra parentesi quadre [...] sono aggiunti commenti dell’autore di questo articolo.

[1] <u>Triangolo rettangolo</u>

Un triangolo rettangolo ha cateti lunghi 12 e 16 *pertiche*:



Il problema chiede di calcolare la lunghezza dell'*ipotenusa*, conoscendo quelle dei due cateti.

La procedura usata da Orbetano contiene i seguenti passi:

* moltiplicare la lunghezza di AB per se stessa: 12*12 = 144 ;
* moltiplicare la lunghezza di AC per se stessa: 16*16 = 256 ;
* sommare i due quadrati: 144 + 256 = 400 ;
* estrarre la radice quadrata: √400 = 20 pertiche che è la lunghezza dell'ipotenusa BC.

La procedura è chiaramente basata sul teorema di Pitagora, anche se non viene espressamente citato.

Il triangolo ha dimensioni multiple, di un fattore 4, della terna pitagorica 3-4-5.

- APPROFONDIMENTO -

La *canna* usata a Firenze e a Montepulciano (e in altri Comuni della Toscana medievale) era di due lunghezze:

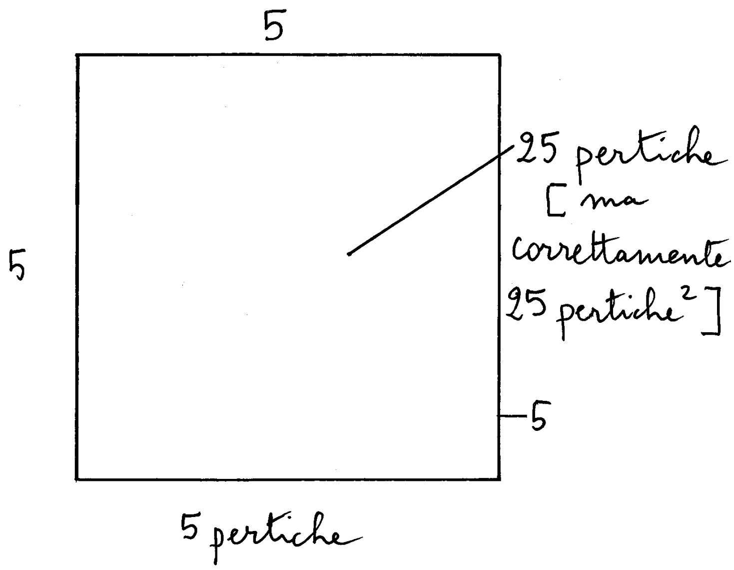
* canna mercantile: era lunga 4 braccia da panno;
* canna agrimensoria: era lunga 5 braccia da panno ed era chiamata *pertica*.

Il braccio da panno di Firenze era lungo 58,3626 cm e di conseguenza le due canne erano lunghe:

* la canna mercantile 233,45 cm;
* la canna agrimensoria o pertica 291, 813 cm.

Il braccio da panno usato a Siena era leggermente più lungo di quello fiorentino e cioè 60,1055 cm.

Orbetano usava sicuramente la canna agrimensoria lunga 5 braccia o una pertica, ma non sembra riuscisse o volesse distinguere la lunghezza lineare dalla superficie. La figura che segue mostra un quadrato con lati lunghi 5 pertiche:

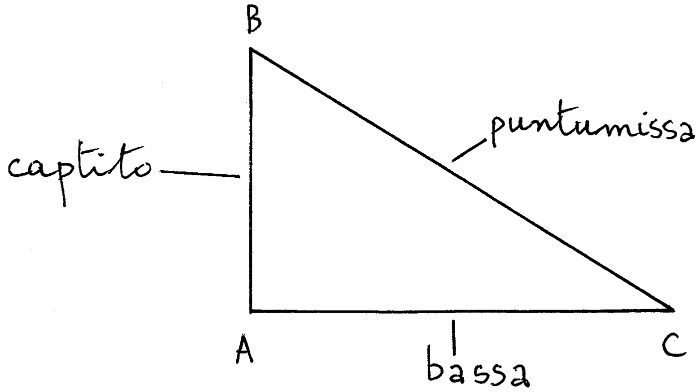


Egli scrive spesso le misure sui lati delle figure e l'area al loro interno: la superficie è di 25 pertiche^2 e non 25 pertiche *lineari*: per indicare la superficie, in questo articolo sarà usata l'unità pertiche^2.

- -

La terminologia usata nei triangoli rettangoli

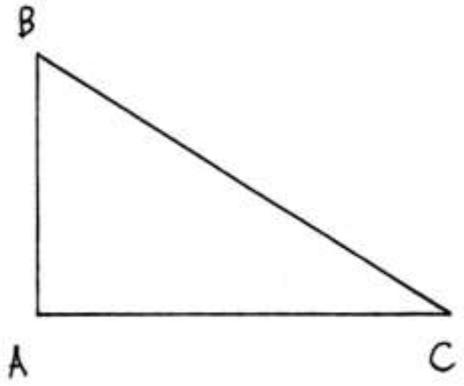
Orbetano usa una particolare terminologia per indicare i tre lati di un triangolo rettangolo:



Il cateto verticale AB è il *captito* (talvolta *cattito*), quello orizzontale AC è la *bassa* e l'ipotenusa AC è la *puntumissa*.

[2] Calcolo della lunghezza del cateto verticale

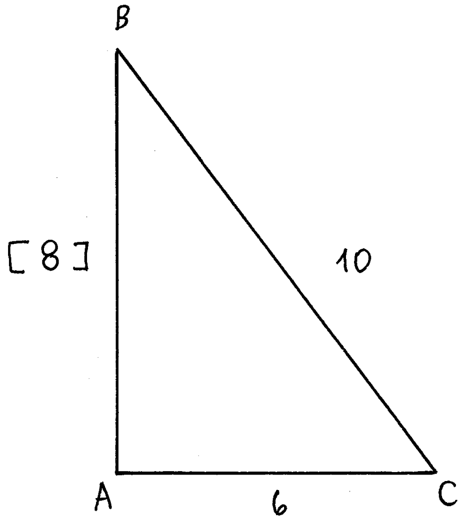
In un generico triangolo rettangolo sono note le lunghezze del cateto orizzontale AC e dell'ipotenusa BC: deve essere calcolata la lunghezza del cateto verticale AB.



Orbetano non fornisce dati numerici, ma propone una regola – anch'essa basata sul teorema di Pitagora – : sottrarre dal quadrato dell'ipotenusa il quadrato del cateto AC e estrarre la radice quadrata della differenza.

[3] Un altro triangolo rettangolo

Un triangolo rettangolo ha ipotenusa BC lunga 10 pertiche e il cateto orizzontale è 6 pertiche:



È chiesto il calcolo della lunghezza del *captito*, il cateto verticale AB.

La procedura contiene i seguenti passi:

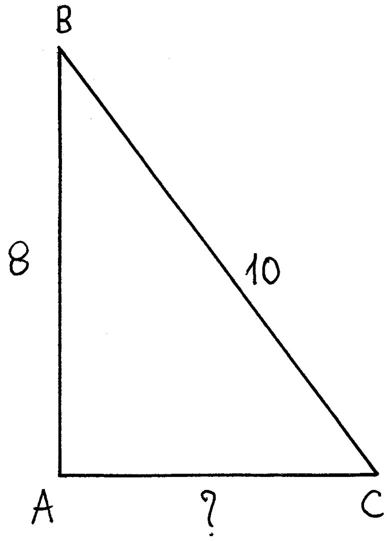
* calcolare il quadrato dell'ipotenusa: $10^2 = 100$;
* calcolare il quadrato del cateto AC: $6^2 = 36$;
* sottrarre il secondo quadrato dal primo: $100 – 36 = 64$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{64} = 8$ pertiche,

lunghezza del cateto verticale AB.

Questo triangolo è un multiplo di un fattore 2 del triangolo 3-4-5.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Il problema *inverso* fornisce la lunghezza dell'ipotenusa (BC = 10 pertiche) e quella del cateto verticale (AB = 8 pertiche) e chiede di calcolare la lunghezza del cateto orizzontale AC:

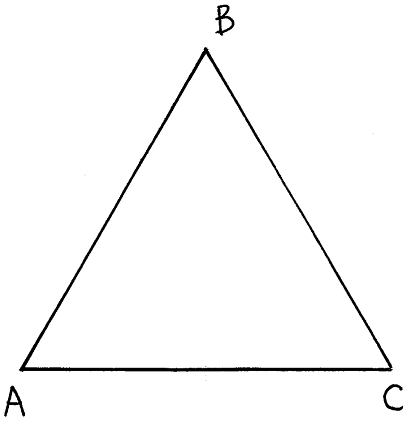


La procedura contiene i seguenti passi:

* calcolare il quadrato della lunghezza dell'ipotenusa: $10^2 = 100$;
* calcolare il quadrato della lunghezza del cateto AB: $8^2 = 64$;
* sottrarre il secondo quadrato dal primo: $100 - 64 = 36$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{36} = 6$ pertiche che è la lunghezza del cateto AC.

[4] <u>Triangolo equilatero</u>

Un triangolo equilatero ha area uguale a 10 pertiche^2:



Il problema chiede di calcolare la lunghezza del lato.

Orbetano introduce il coefficiente

$$5 + \frac{1}{3} = \frac{16}{3}$$

: vedremo successivamente l'origine di questo coefficiente.

Ecco i passi della procedura impiegata:

* elevare al quadrato l'area: $10*10 = 100$;
* moltiplicare per

$$5 + \frac{1}{3}:$$

$$100 \cdot \left(5 + \frac{1}{3}\right) = 533 + \frac{1}{3} \quad ;$$

* estrarre la radice quadrata:

$$\sqrt{533 + \frac{1}{3}} \cong 23,094 \; ;$$

* estrarre la radice quadrata della precedente radice: $\sqrt{23,094} \approx 4,805$ pertiche che è la lunghezza dei lati del triangolo equilatero.

L'area di un triangolo equilatero è data dalla formula

$$\text{Area} = \frac{\text{base} \cdot \text{altezza}}{2} = \frac{\text{lato} \cdot \text{altezza}}{2} =$$

$$= \frac{\text{lato} \cdot \text{lato}\sqrt{3}}{2 \cdot 2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \text{lato}^2$$

Da questa formula è ricavato il *lato*:

$$Area = \frac{base \cdot altezza}{2} = \frac{lato \cdot altezza}{2} =$$

$$= \frac{lato \cdot lato\sqrt{3}}{2 \cdot 2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot lato^2$$

Applicando questa ultima formula, la lunghezza del lato di questo triangolo equilatero è:

$$lato = \sqrt{\frac{4 \cdot \sqrt{3} \cdot 10}{3}} \cong 4,8056 \text{ pertiche}$$

Il risultato è identico a quello ricavato da Orbetano, la cui formula è quindi corretta.
Elevando al quadrato il coefficiente

$$\frac{4 \cdot \sqrt{3}}{3}$$

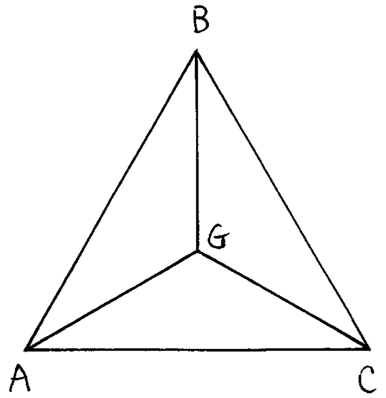
si ottiene:

$$\left(\frac{4 \cdot \sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{16 \cdot 3}{9} = \frac{48}{9} = \frac{16}{3} \cong 5 + \frac{1}{3}$$

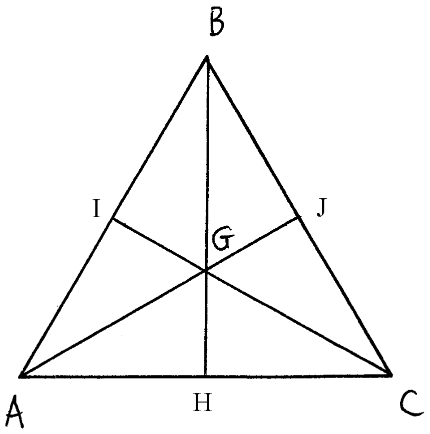
che è il coefficiente usato da Orbetano.

[5] Triangolo equilatero con le bisettrici

In un triangolo equilatero, le *mediane*, le *altezze*, le *bisettrici* e gli *assi dei lati* coincidono e si incontrano in un punto interno, G, che è *baricentro*, *incentro*, *ortocentro* e *circoncentro*:



Il problema presentato nel trattato chiede di calcolare la lunghezza dei tre segmenti uguali che collegano G con i tre vertici del triangolo: AG, BG e CG; è nota la lunghezza dei lati che è pari a 6 pertiche.



Ecco i passi della procedura:

* moltiplicare la lunghezza di un lato per se stessa: 6*6 = 36 :
* dividere per 3: 36 : 3 = 12 ;
* estrarre la radice quadrata: √12 ≈ 3,46 pertiche, che è la lunghezza di BG.

Oggi la soluzione sarebbe la seguente: le tre mediane e altezze (AJ, BH e CI) si intersecano nel punto G dividendosi in due parti proporzionali a 1/3 e a 2/3 e cioè:

GH : 1 = BG : 2 = BH : 3

L'altezza BH è data da

$$BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{36 - 9} = \sqrt{27} = 3 * \sqrt{3}$$

BG è lunga i 2/3 di BH e quindi

$$BG = \frac{2}{3} \cdot 3 \cdot \sqrt{3} = 2 \cdot \sqrt{3} \cong 3,46$$

pertiche, che è uguale al valore calcolato da Orbetano.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

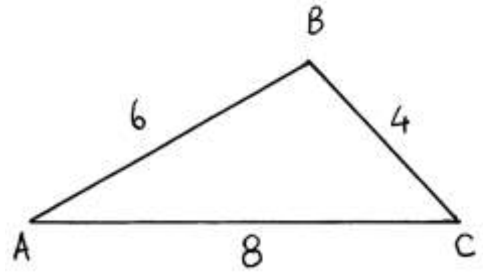
Il problema *inverso*, sempre riferito allo stesso triangolo, è: conoscendo la lunghezza di BG, calcolare la lunghezza del lato del triangolo.

Ecco i passi della procedura:

* moltiplicare la lunghezza di BG per se stessa: √12 * √12 = 12 ;
* moltiplicare per 3: 12*3 = 36 ;
* estrarre la radice quadrata: √36 = 6 pertiche che è la lunghezza di un lato del triangolo equilatero.

[6] <u>Uso della formula di Erone per i triangoli</u>

Senza citarlo espressamente, Orbetano applica la formula di Erone per calcolare l'area di un triangolo generico come quello della figura che segue:



Ecco i passi della procedura:

* sommare le lunghezze dei tre lati: $8 + 6 + 4 = 18$;
* dividere per 2: $18 : 2 = 9$;
* sottrarre la lunghezza di AC dal semiperimetro 9: $9 – 8 = 1$;
* moltiplicare 1 per il semiperimetro: $9*1 = 9$;
* sottrarre la lunghezza di BC dal semiperimetro: $9 – 4 = 5$:
* moltiplicare 5 per il semiperimetro: $9*5 = 45$;
* sottrarre la lunghezza di AB dal semiperimetro: $9 – 6 = 3$;
* moltiplicare 3 per il semiperimetro: $9*3 = 27$;
* sottrarre 6 dal semiperimetro: $9 – 6 = 3$;
* moltiplicare 3 per 45: $45*3 = 135$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{135} \approx 11{,}619$ pertiche^2 che è l’area del triangolo ABC.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Applicando direttamente la formula di Erone, indicando con *semip* il semiperimetro, il risultato è

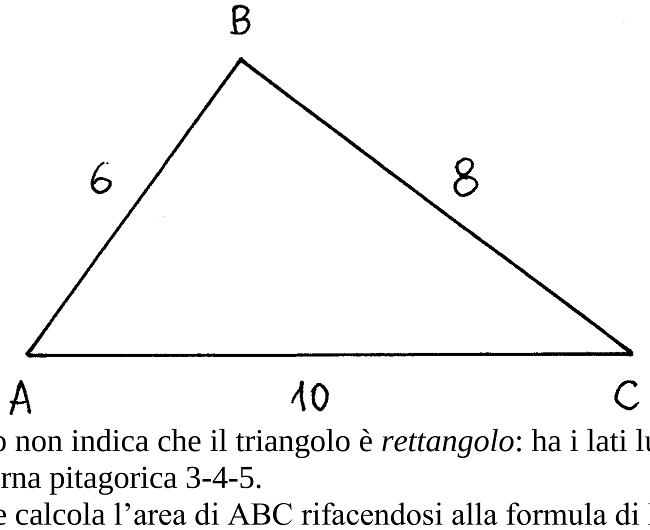
$$\text{Area} = \sqrt{semip \cdot (semip - AC) \cdot (semip - BC) \cdot (semip - AB)} =$$

$$= \sqrt{9 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 3} = \sqrt{135} \text{ pertiche}^2$$

Il risultato è identico a quello ottenuto da Orbetano, anche se la sua procedura è un po’ contorta.

<u>Il triangolo 6-8-10</u>

Un triangolo scaleno ha i lati lunghi 6, 8 e 10 pertiche:



Orbetano non indica che il triangolo è *rettangolo*: ha i lati lunghi secondo un multiplo (di 2) di quelli della terna pitagorica 3-4-5.

L’Autore calcola l’area di ABC rifacendosi alla formula di Erone, mentre la avrebbe più rapidamente ricavata moltiplicando i due cateti (AB e BC) e dividendo il risultato per 2:

$$\text{Area} = \frac{AB \cdot BC}{2} = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24 \text{ pertiche}^2$$

Ecco i passi della procedura di Orbetano:

* sommare le lunghezze dei tre lati: $6 + 8 + 10 = 24$;
* dividere per 2: $24 : 2 = 12$;

* sottrarre la lunghezza del lato AB dal semiperimetro: $12 – 6 = 6$;
* moltiplicare il semiperimetro per 6: $12*6 = 72$;
* sottrarre la lunghezza del lato BC dal semiperimetro: $12 – 8 = 4$;
* moltiplicare 4 per 72: $72*4 = 288$;
* sottrarre la lunghezza di AC dal semiperimetro: $12 – 10 = 2$;
* moltiplicare 2 per 288: $288*2 = 576$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{576} = 24$ pertiche^2 che è l’area del triangolo ABC.

Il risultato è identico a quello ottenuto con il semiprodotto dei cateti AB e BC.

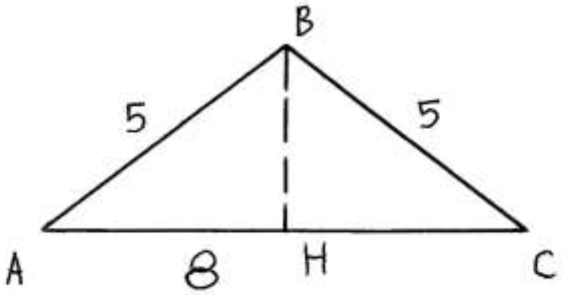
Orbetano sottrare le lunghezze dei lati dal semiperimetro in ordine crescente di lunghezza.

In termini moderni, chiamando *m* il *semiperimetro*, la procedura di Orbetano è sintetizzata con la formula che segue:

$$\text{Area}_{ABC} = \sqrt{m\cdot(m-AB)\cdot(m-BC)\cdot(m-AC)} =$$
$$= \sqrt{12\cdot(12-6)\cdot(12-8)\cdot(12-10)} =$$
$$= \sqrt{576} = 24 \text{ pertiche}^2$$

[8] <u>Triangolo isoscele</u>

Un triangolo isoscele ottusangolo ha lati lunghi come indicato nella figura che segue:



Il problema chiede di calcolarne l’area e per farlo ricerca la lunghezza dell’altezza BH.

La procedura contiene i seguenti passi:

* sommare le lunghezze dei due lati più corti: $5 + 5 = 10$;
* dividere per 2: $10 : 2 = 5$;
* moltiplicare per se stesso: $5*5 = 25$;
* dividere per 2 la lunghezza della base: $8 : 2 = 4$;
* moltiplicare 4 per se stesso: $4*4 = 16$;
* sottrarre 16 da 25: $25 – 16 = 9$;
* estrarre la radice quadrata di 9: $\sqrt{9} = 3$ pertiche che è la lunghezza di BH;
* moltiplicare la lunghezza di BH per metà della lunghezza di AC:

$$3\cdot\frac{8}{2} = 12 \text{ pertiche}^2$$ che è l’area del triangolo ABC.

\- APPROFONDIMENTO -

Il triangolo ABC della precedente figura è formato dall’unione di due triangoli rettangoli, ABH e BHC, che hanno uguali dimensioni e il cateto comune BH.

Le lunghezze dei lati di entrambi formano la terna pitagorica 3-4-5.

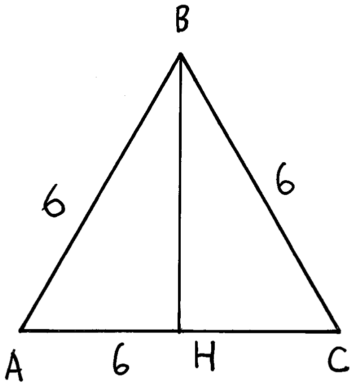
Pur usando una procedura un po’ contorta, Orbetano ha calcolato la lunghezza di BH con il teorema di Pitagora:

$$BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{25-16} =$$
$$= \sqrt{9} = 3 \text{ pertiche}$$

- -

[9] Area di un triangolo equilatero

Un triangolo equilatero ha lati lunghi 6 pertiche:



L’area è calcolata con la seguente procedura:

* moltiplicare la lunghezza di un lato per se stessa: 6*6 = 36 ;
* moltiplicare per se stessa la metà della lunghezza di un lato: 3*3 = 9 ;
* sottrarre 9 da 36: 36 – 9 = 27 ;
* estrarre la radice quadrata: √27 ≈ 5,196 ≈ 5 + 1/5 pertiche che è l’altezza BH;
* moltiplicare metà del lato di base per l’altezza:

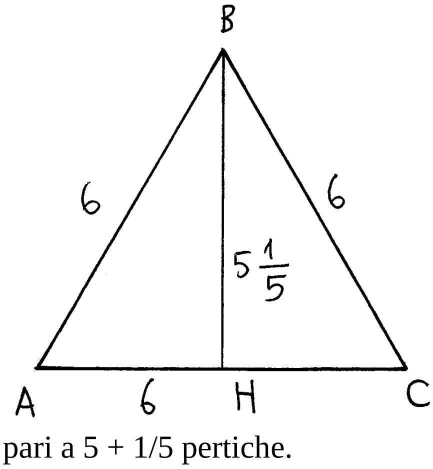
$$3 \cdot \left(5 + \frac{1}{5}\right) = 15 + \frac{3}{5} \text{ pertiche}^2$$

che è l’area del triangolo equilatero ABC.

Orbetano suggerì di misurare l’altezza BH con una squadra, ma forse intendeva una canna agrimensoria.

[10] Triangolo equilatero

Un nuovo problema basato sul precedente triangolo equilatero chiede di misurare l’altezza BH con la canna agrimensoria e da essa ricavare l’area del triangolo:



La lunghezza di BH è pari a 5 + 1/5 pertiche.

Ecco la procedura di Orbetano:

* misurare la lunghezza della metà di un lato: 3 pertiche ;

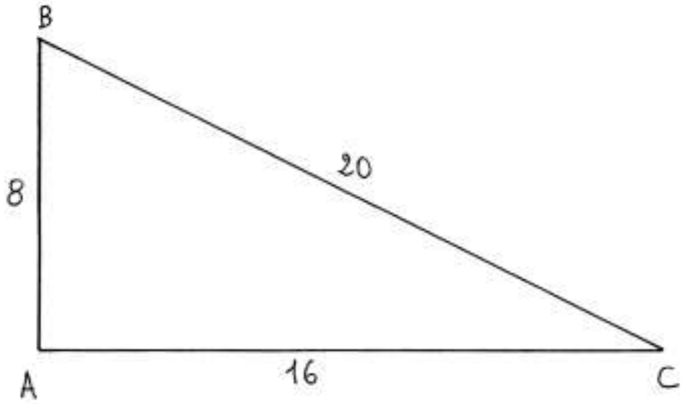
* moltiplicare 3 per (5 + 1/5):

$$3 \cdot \left(5 + \frac{1}{5}\right) = 15 + \frac{3}{5} \text{ pertiche}^2$$

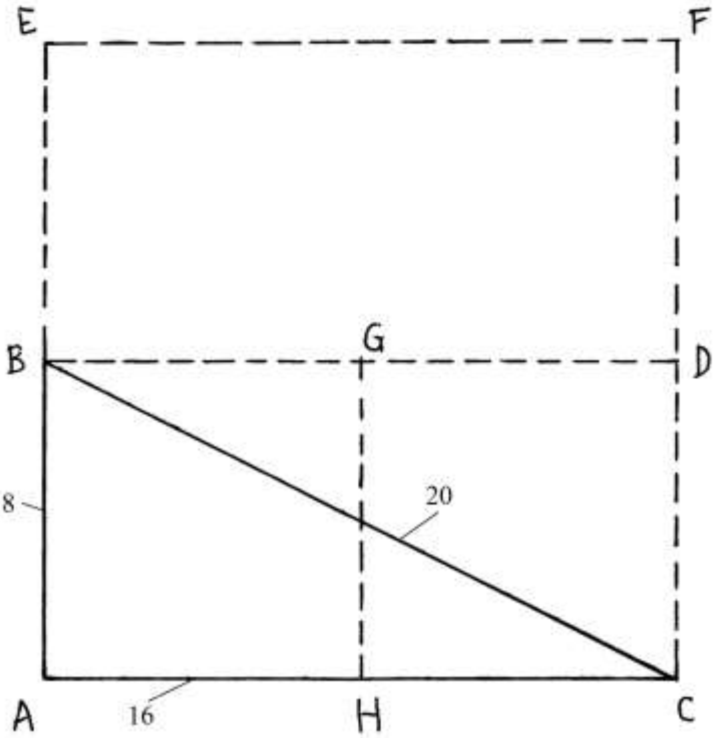
che è l’area del triangolo equilatero ABC.

[11] Triangolo rettangolo

Il triangolo mostrato in figura è da Orbetano chiamato *mezo quatro* forse perché le lunghezze dei suoi lati sono multiple di 4 e il cateto minore AB è lungo esattamente la metà di quello maggiore AC.



Un’altra spiegazione del significato di quella espressione di Orbetano può venire dall’esame della figura che segue:



Il triangolo ABC è metà del rettangolo ABDC che è un *doppio quadrato*, il quale è a sua volta metà del quadrato AEFC.

Il triangolo rettangolo ABC ha superficie uguale a ¼ di quella di AEFC.

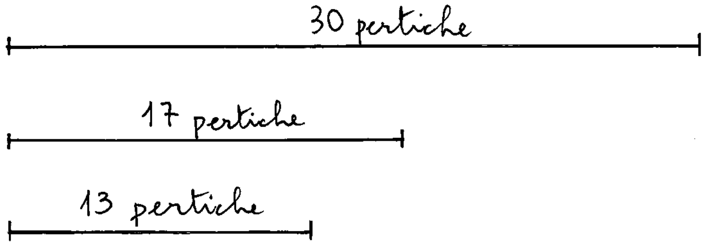
La procedura usata per calcolare l’area di ABC è la seguente:

* moltiplicare la lunghezza di uno dei due lati più corti (un cateto) per la metà

di quella dell’altro cateto: (AC*AB)/2 = 16*8/2 = 64 pertiche^2 che è l’area cercata.

[12] Triangolo impossibile

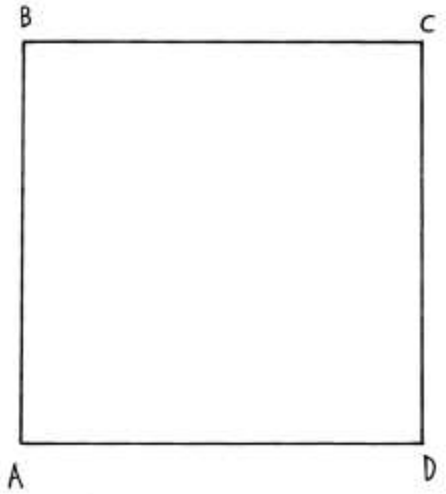
Un triangolo ha lati lunghi 30, 17 e 13 pertiche:



La somma dei lati più corti – 17 + 13 = 30 pertiche – è uguale alla lunghezza del lato maggiore e il triangolo è impossibile perché viola la regola fondamentale dei triangoli: la lunghezza del lato più lungo deve essere *minore* della somma delle lunghezze degli altri due lati.

[13] Area di un quadrato

Un terreno ha forma quadrata e ciascun lato è lungo 10 pertiche:



La procedura proposta da Orbetano per calcolarer l’area è la seguente:

* sommare le lunghezze di due lati [*opposti?*]: 10 + 10 = 20 ;
* dividere per 2: 20 : 2 = 10 ;
* sommare le lunghezze degli altri due lati: 10 + 10 = 20 ;
* dividere per 2: 20 : 2 = 10 ;
* moltiplicare i due *quozienti*: 10*10 = 100 pertiche^2 che equivalgono alla superficie di un *moggio* e sono l’area di ABCD.

La procedura può essere sintetizzata nella formula che segue:

$$\text{Area} = \frac{AB + CD}{2} \cdot \frac{AD + BC}{2} = \frac{10 + 10}{2} \cdot \frac{10 + 10}{2} = 10 \cdot 10 = 100 \text{ pertiche}^2$$

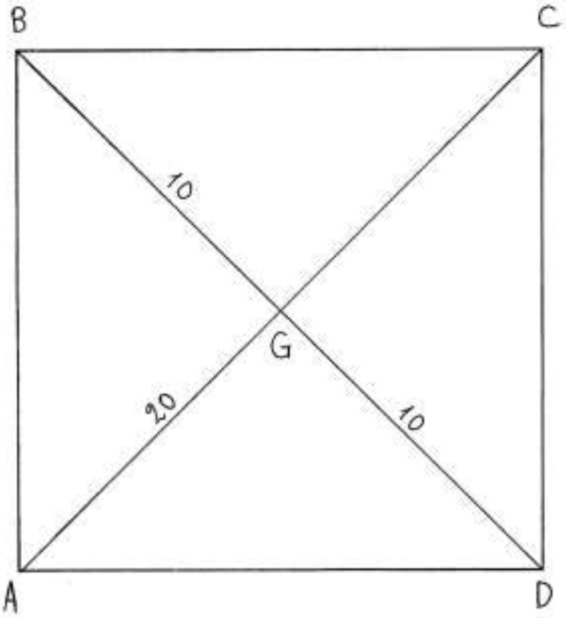
La formula fornisce un risultato è esatto, anche se il prodotto della lunghezza di un lato per se stessa è la via più semplice per calcolare l'area di un quadrato:

Area quadrato = $AB^2 = 10^2 = 100$ pertiche^2.

La procedura impiegata da Orbetano richiama la *formula degli agrimensori* che risaliva agli Egizi: essa forniva e fornisce risultati esatti solo nel caso di quadrilateri aventi tutti gli angoli retti, come è il caso dei rettangoli e dei quadrati.

[14] <u>Area di un quadrato</u>

Deve essere calcolata l'area di terreno di forma quadrata: Orbetano propose di misurare la lunghezza delle diagonali (AC e BD) e delle semidiagonali (AG, BG, CG e DG):



Egli misurò con la *squadra* (o con la canna agrimensoria) e ricavò le lunghezze scritte sulla figura: una diagonale lunga 20 pertiche e le semidiagonali 10 pertiche.

La procedura impiegata contiene i seguenti passi:

* sommare le lunghezze delle semidiagonali AG e GC: $10 + 10 = 20$;
* dividere 20 per 2: $20 : 2 = 10$;
* moltiplicare le lunghezze di AG e di BD: $10*20 = 200$ pertiche^2, area del terreno ABCD.

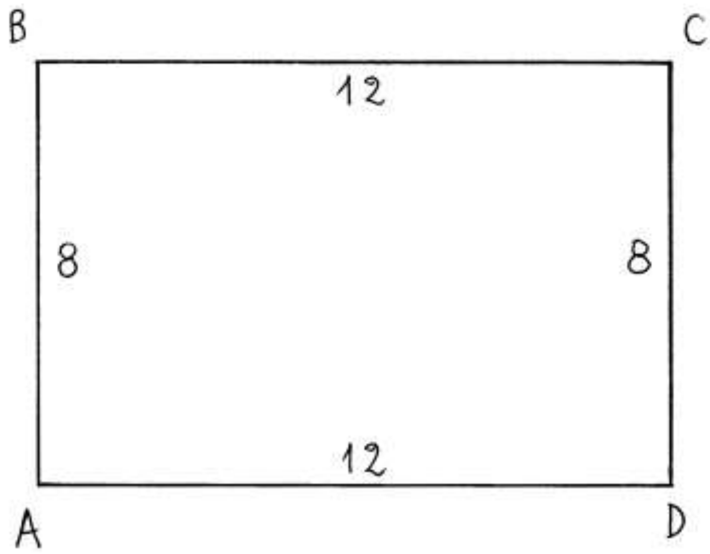
Il risultato è corretto.

La procedura consiste nell'applicazione della formula

$$\text{Area quadrato} = \frac{\text{diagonale}^2}{2}$$

[15] <u>Area di un terreno rettangolare</u>

Un terreno ha forma rettangolare e le dimensioni in pertiche scritta sulla figura:



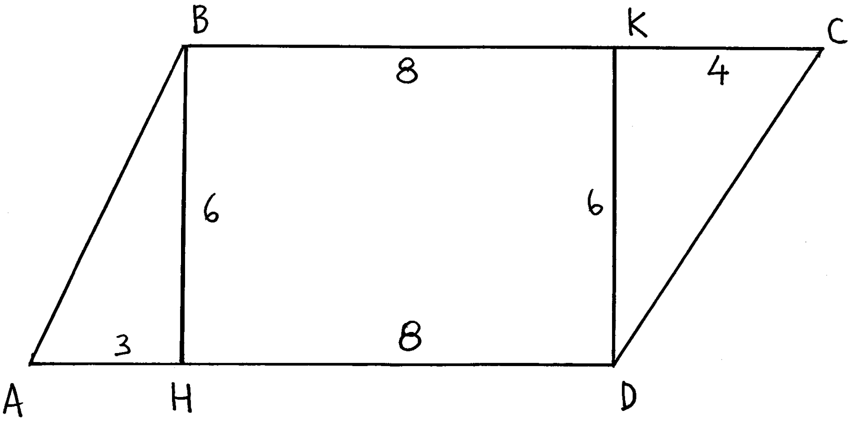
La procedura usata è la seguente:

* sommare le lunghezze dei lati opposti, AD e BC: 12 + 12 = 24 ;
* dividere per 2: 24 : 2 = 12 ;
* sommare le lunghezze degli altri due lati opposti: 8 + 8 = 16 ;
* dividere per 2: 16 : 2 = 8 ;
* moltiplicare i due quozienti: 12*8 = 96 pertiche^2 che è l'area del terreno rettangolare ABCD.

Anche in questo caso è riemersa la *formula degli agrimensori*: l'area è stata ricavata dal prodotto delle semisomme dei lati opposti.

[16] <u>Area di un quadrilatero</u>

Un quadrilatero ha soltanto *due* lati paralleli, AD e BC:



I lati obliqui, AB e DC, non sono paralleli e hanno lunghezze differenti.

Le due altezze, BH e KD, hanno uguale lunghezza, pari a 6 pertiche.

Orbetano chiama *mezo quatro* i triangoli rettangoli ABH e DKC.

Il calcolo dell'area del quadrilatero richiese la misura di tutte le lunghezze. La soluzione adottata è basata sulla *scomposizione* del poligono nei triangoli rettangoli ABH e DKC e nel rettangolo HBKD.

La procedura per il calcolo prevede i seguenti passi:

* dividere per 2 la lunghezza di KC: 4 : 2 = 2 ;

* moltiplicare per la lunghezza di KD: $2*6 = 12$ pertiche^2, area del triangolo rettangolo KDC;
* dividere per 2 la lunghezza di AH: $3 : 2 = 1{,}5$; [Orbetano rappresenta il numero 1,5 come 1.1/2]
* moltiplicare per la lunghezza di BH: $1{,}5*6 = 9$ pertiche^2, area di ABH;
* sommare le aree dei due triangoli rettangoli: $12 + 9 = 21$ pertiche^2 ;
* sommare le lunghezze dei due lati orizzontali di HBKD: $8 + 8 = 16$;
* dividere per 2: $16 : 2 = 8$;
* sommare le lunghezze delle due altezze (BH e KD): $6 + 6 = 12$;
* dividere per 2: $12 : 2 = 6$;
* moltiplicare le due semisomme: $8*6 = 48$ pertiche^2, area del rettangolo HBKD;
* sommare le aree dei due triangoli e quella del rettangolo: $21 + 48 = 69$ pertiche^2, area del quadrilatero ABCD.

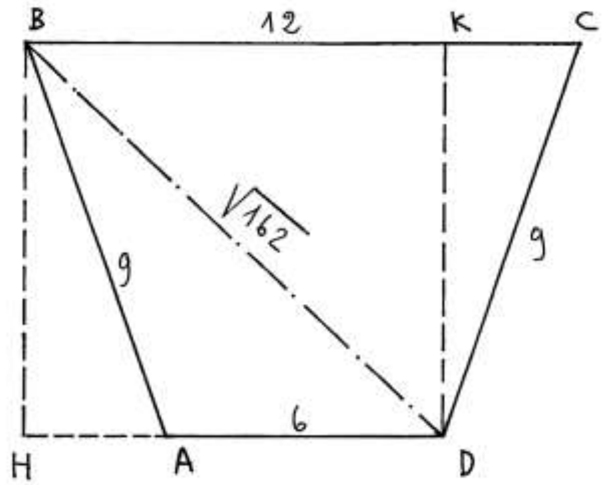
Orbetano applicò anche in questo caso la *formula degli agrimensori*:

$$\text{Area}_{HBKD} = \frac{HD + BK}{2} \cdot \frac{HB + KD}{2}$$

Evidentemente, questa antica formula era largamente usata fino almeno al XV secolo.

[17] <u>Area di un trapezio isoscele</u>

Un terreno a forma di trapezio isoscele ha le dimensioni scritte sulla figura:



La base maggiore BC è chiamata *il capo* e quella minore AD è *da piè*.
Il problema chiede di calcolare l'area del trapezio e la lunghezza della diagonale BD.
La soluzione è ottenuta con la seguente procedura:

* moltiplicare le lunghezze delle due basi: $12* 6 = 72$;
* moltiplicare le lunghezze dei due lati obliqui: $9*9 = 81$;
* moltiplicare i due prodotti: $72*81 = 5832$;
* estrarre la radice quadrata dell'ultimo prodotto:

$$\sqrt{5832} \cong 76{,}36 \cong 76 + \frac{4}{11} \text{ pertiche}^2$$;

* [la seconda parte della procedura calcola la lunghezza della diagonale BD chiamata *linea*] moltiplicare la lunghezza della base minore, AD, per la lunghezza di un lato obliquo (ad esempio AB): $6*9 = 54$;

*	moltiplicare la lunghezza dell'altro lato obliquo (CD) per quella della base maggiore (BC): 9*12 = 108 ;
*	sommare i due ultimi prodotti: 54 + 108 = 162 ;
*	estrarre la radice quadrata

$$\sqrt{162} = 9 \cdot \sqrt{2} \text{ pertiche}$$

che è la lunghezza della diagonale BD (e di quella AC).

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Per verificare la correttezza dei risultati prodotti dalla procedura di Orbetano, nella figura precedente sono stati disegnati, con linee a tratti, alcuni segmenti.

Il segmento HA è lungo:

$$HA = \frac{BC - AD}{2} = \frac{12-6}{2} = 3 ;$$

a sua volta il segmento BH è lungo quanto l'altezza KD ed è ricavato da:

$$BH = \sqrt{AB^2 - HA^2} = \sqrt{9^2 - 3^2} = \sqrt{81-9} =$$
$$= \sqrt{72} = 6\sqrt{2} = KD$$

.

L'area del trapezio è data da:

$$Area_{ABCD} = \frac{\text{somma delle basi}}{2} \cdot \text{altezza} =$$
$$= \frac{AD + BC}{2} \cdot KD = \frac{6+12}{2} \cdot 6\sqrt{2} =$$
$$= \frac{18}{2} \cdot 6 \cdot \sqrt{2} = 54 \cdot \sqrt{2} \cong 76,3675 \text{ pertiche}^2$$

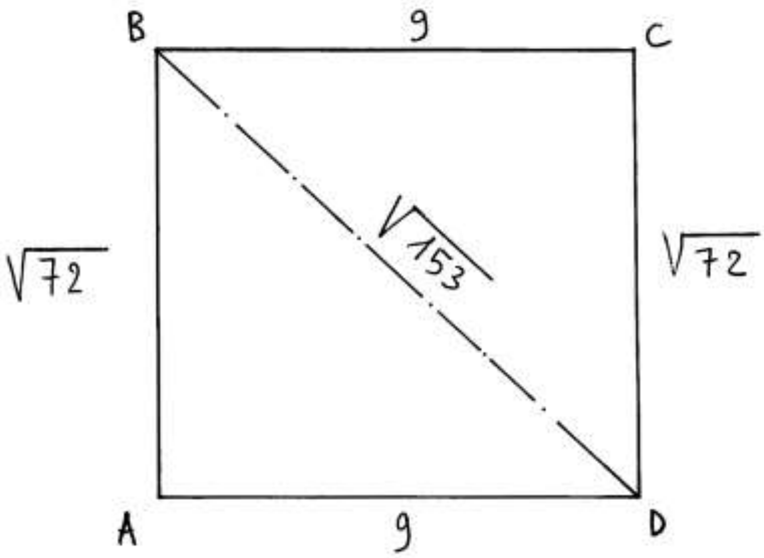
: il risultato è pressoché uguale a quello ottenuto da Orbetano.

La lunghezza della diagonale BD è data da

$$BD = \sqrt{BH^2 + HD^2} = \sqrt{BH^2 + (HA + AD)^2} =$$
$$= \sqrt{(6 \cdot \sqrt{2})^2 + (3+6)^2} = \sqrt{72 + 81} = \sqrt{153} \cong$$
$$\cong 12,37 \text{ pertiche.}$$

Il risultato calcolato da Orbetano, BD = √162, è errato per *eccesso*.

Il rettangolo della figura che segue è *equivalente* al trapezio della precedente figura:



I lati orizzontali AD e BC sono lunghi quanto il valore medio delle lunghezze delle due basi del trapezio e cioè AD = BC = (6 + 12)/2 = 9 pertiche.

I due lati verticali AB e Cd sono lunghi quanto l'altezza del trapezio e cioè √72 pertiche.

La lunghezza della diagonale BD è calcolabile con il teorema di Pitagora applicato al triangolo rettangolo ABD:

$$BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{(\sqrt{72})^2 + 9^2} = \sqrt{72 + 81} =$$

$$= \sqrt{153} \cong 12{,}369 \text{ pertiche}$$

La procedura usata da Orbetano per calcolare la lunghezza della diagonale, oltreché essere errata, è più lunga: sembra che, invece di applicare il teorema di Pitagora a un triangolo rettangolo per calcolare la lunghezza dell'ipotenusa (che è la diagonale del quadrilatero), egli abbia moltiplicato le lunghezze di due lati *adiacenti* e effettuato questa operazione due volte, per poi sommare i due prodotti e estrarne la radice quadrata.

Ma i lati obliqui del trapezio sono più lunghi delle altezze: 9 pertiche a fronte di √72 pertiche.

La soluzione corretta è:

BD^2 = AB*AD + CD*BC = 2*AB*AD = 2*√72*9.

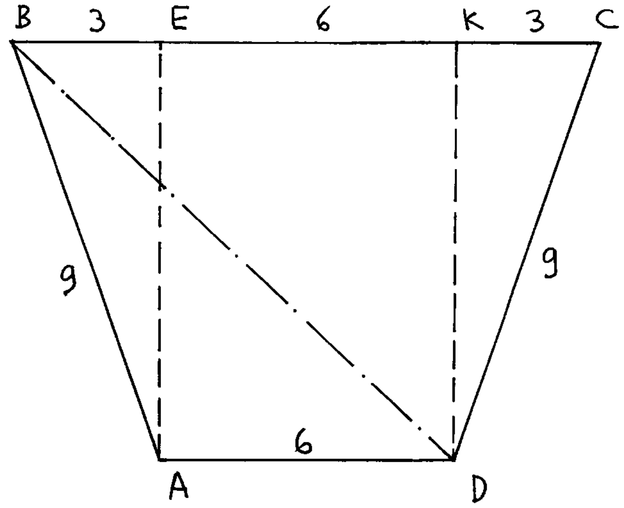
La formula deriva da una semplice considerazione: nei quadrati e nei rettangoli il quadrato della lunghezza di una diagonale è uguale al doppio dell'area del quadrilatero e cioè

diagonale^2 = (prodotto di due lati adiacenti) + (prodotto degli altri due lati adiacenti) =
= altezza*base + altezza*base = 2*altezza*base.

Nella procedura usata da Orbetano per calcolare la lunghezza della diagonale c'è un'altra traccia della *formula degli agrimensori*?

[18] Trapezio isoscele

Questo problema è basato sul trapezio descritto nel precedente paragrafo ([17]).



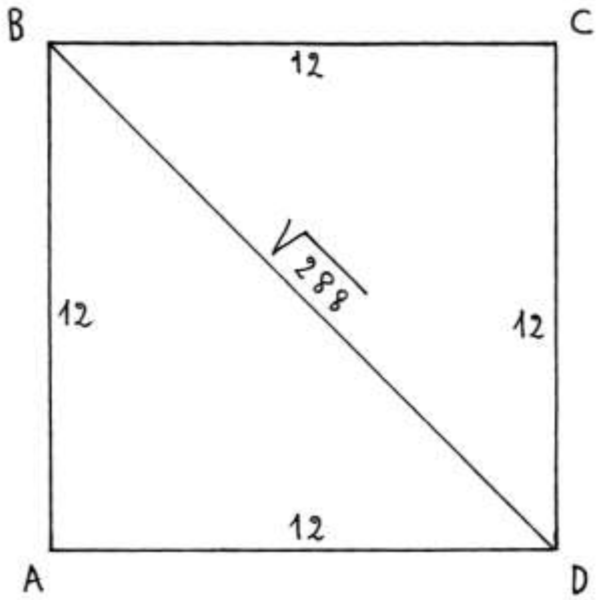
Esso si propone di calcolare l'altezza AE con la procedura che segue:

* sottarre la lunghezza della base minore da quella della maggiore: BC – AD = 12 – 6 = 6 ;
* dividere per 2: 6 : 2 = 3, che è la lunghezza dei segmenti BE e KC ;
* moltiplicare la lunghezza di AB per quella di CD: 9*9 = 81 [più correttamente, elevare al quadrato la lunghezza di AB per poter applicare il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo ABE] ;
* moltiplicare le lunghezze di BE e di KC: 3*3 = 9 ;
* sottrarre il secondo quadrato dal primo: 81 – 9 = 72 ;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{72} \approx 8{,}4853$ pertiche che è la lunghezza di AE e di DK.

Il risultato è esatto.

[19] Terreno quadrato

Un terreno quadrato ha lato lungo 12 pertiche:



Il problema chiede di di calcolare l'area e la lunghezza della diagonale (BD).

Come in altre figure riprodotte dal trattato, le dimensioni sono scritte sui segmenti o sui lati e, generalmente, al centro della linea alla quale si riferiscono.

La procedura applicata contiene i seguenti passi:

* "*addunare 12 da uno lato e 12 dall'altro*" [sommare le lunghezze di due lati opposti] : 12 + 12 = 24 ;
* dividere il risultato per 2: 24 : 2 = 12 ;
* sommare le lunghezze de "*l'altre faccie*": 12 + 12 = 24 ;
* dividere per 2: 24 : 2 = 12 ;
* moltiplicare i due quozienti: 12*12 = 144 pertiche^2 che è l'area del quadrato ABCD.

La procedura impiegata da Orbetano per calcolare l'area è riassumibile con la seguente formula:

$$Area_{ABCD} = \frac{AB + CD}{2} \cdot \frac{AD + BC}{2}$$

che è la *formula degli agrimensori*.

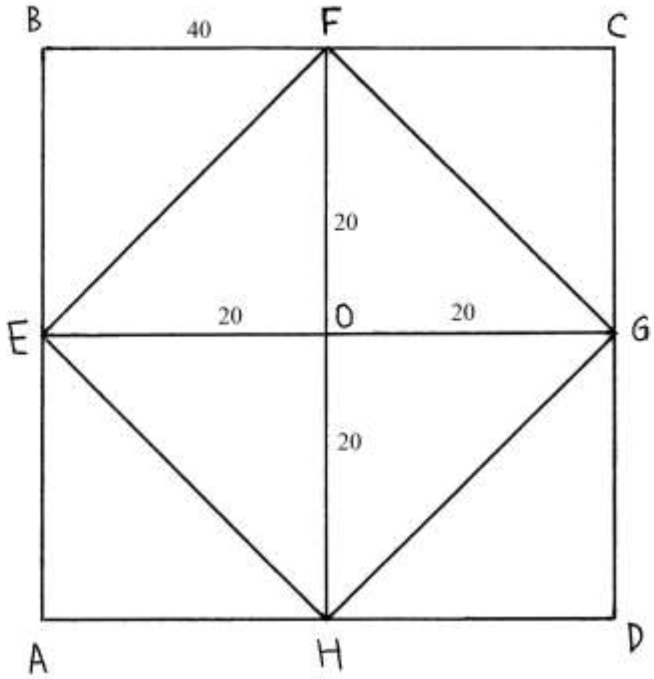
Per ricavare la lunghezza della diagonale AD, Orbetano usa i seguenti passi:

* moltiplicare la lunghezza di una delle "*faccie*" (e cioè un *lato*, ad esempio quello AB) per se stessa: 12*12 = 144 ;
* moltiplicare per se stessa la lunghezza di un altro lato (ad esempio AD): 12*12 = 144 ;
* sommare i due quadrati: 144 + 144 = 288 che è il quadrato della lunghezza della diagonale BD.

[20] Terreno quadrato da dividere

Un terreno ha forma quadrata con lati lunghi 40 pertiche.

Deve essere diviso in *quattro* quadrati più piccoli e uguali e ciascuno di essi deve essere sezionato con una "*traversa*" come quella EF della figura che segue:



Il problema chiede di determinare la lunghezze delle *traverse* e le aree dei quadrati.

Ecco i passi della procedura:

* dividere per 2 la lunghezza del lato: 40 : 2 = 20 ;
* moltiplicare 20 per se stesso: 20*20 = 400 ;
* estrarre la radice quadrata: √400 = 20 pertiche, lunghezza *errata* [l’errore è giustamente segnalato da Annalisa Simi] delle quattro *traverse* EF, FG, GH e EH;

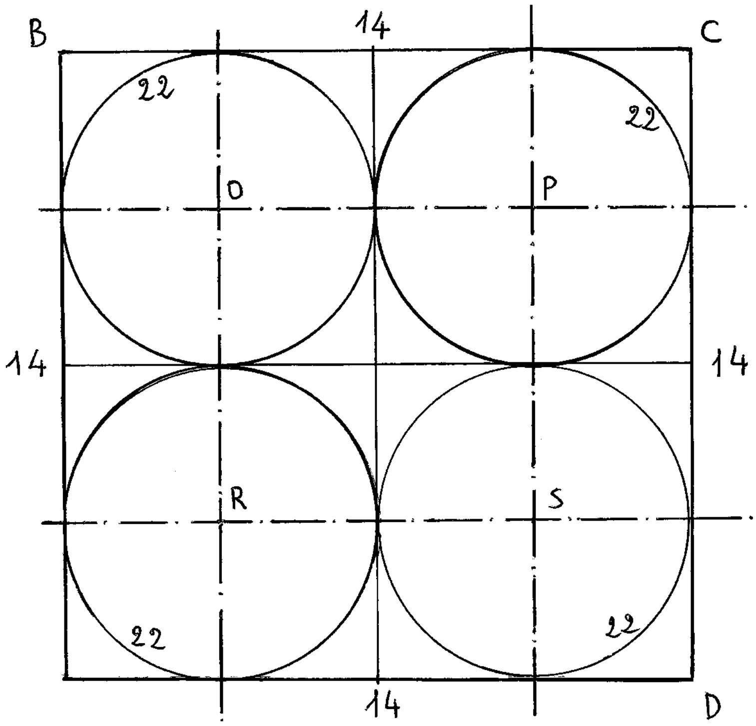
[La corretta lunghezza di EF è data da

$$EF = \sqrt{EO^2 + OF^2} = \sqrt{20^2 + 20^2} = \sqrt{800} =$$
$$= 20 \cdot \sqrt{2}$$ pertiche];

* moltiplicare la lunghezza del lato AE per se stessa: 20*20 = 400 pertiche^2 che è l’area di ciascuno dei quattro quadrati ;
* moltiplicare l’ultimo prodotto per 4: 400*4 = 1600 pertiche^2 che è l’area del terreno quadrato ABCD.

[21] <u>Cerchi inscritti in un quadrato</u>

Un terreno ha la forma di un quadrato con lati lunghi 14 *braccia* (equivalenti a 8,17 metri):



Il problema chiede di tracciarvi quattro cerchi con le dimensioni massime possibili e quindi fra loro uguali.

Il problema è noto con il nome di Malfatti (Gian Francesco Malfatti, 1731-1807), un matematico italiano che lo risolse.

Forse, il problema affrontato da Orbetano era quello di realizzare quattro aiuole circolari in un piccolo terreno quadrato: al centro di ciascuna di esse poteva essere piantato un albero da frutto.

La procedura impiegata contiene i seguenti passi:

* dividere per 2 la lunghezza del lato del quadrato ABCD: 14 : 2 = 7 braccia che è la lunghezza del diametro dei quattro cerchi;

* moltiplicare il diametro per la costante

$$3 + \frac{1}{7} \quad \left(o \ \frac{22}{7}\right)$$ che è il valore approssimato di π:

$$7 \cdot \left(3 + \frac{1}{7}\right) = 22 \text{ braccia}$$
.

Per calcolare l'area occupata da ciascun cerchio, Orbetano usa le due seguenti formule:

a)

$$\text{Area cerchio} = \frac{\text{diametro}}{2} \cdot \frac{\text{circonferenza}}{2} =$$
$$= \frac{7 \cdot 22}{4} = 38{,}5 \text{ braccia}^2$$

oppure

b)

- * calcolare la metà della circonferenza: 22 : 2 = 11 ;
- * calcolare la metà del diametro: 7 : 2 = 3,5 ;
- * moltiplicare i due quozienti: 11*3,5 = 38,5 braccia^2 , area di uno dei quattro piccoli cerchi.

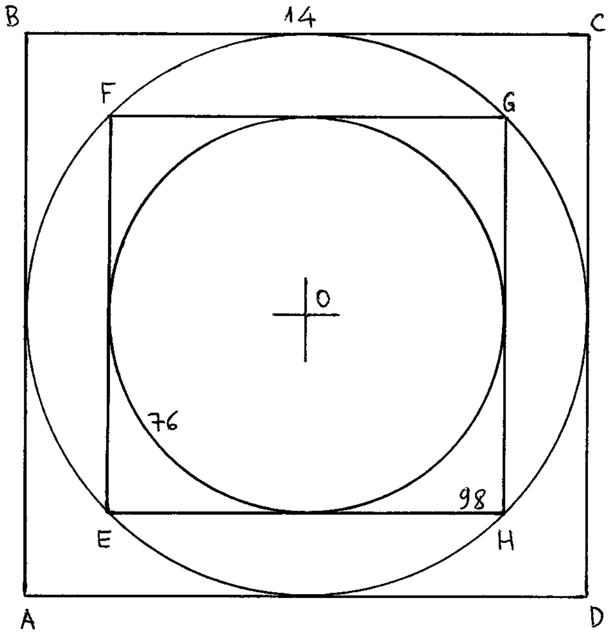
Infine, Orbetano calcola l'area del quadrato ABCD:

Area $_{ABCD}$ = lato*lato = 14^2 = 196 braccia^2.

In questo caso, Orbetano non usò la formula degli agrimensori ma la più semplice e corretta formula lato^2.

[22] <u>Quadrati e cerchi concentrici</u>

Un quadrato ha lati lunghi 14 *canne* (1 canna agrimensoria vale 5 braccia che corrispondono a 1 pertica).



All'interno del quadrato deve essere tracciato il cerchio più grande possibile; all'interno di questo ultimo deve essere inscritto un secondo quadrato; infine all'interno di questo va disegnato un secondo cerchio inscritto.

La circonferenza più grande è lunga:

$$\text{circonferenza grande} = \text{diametro} \cdot \left(3+\frac{1}{7}\right) = $$
$$= 14 \cdot \frac{22}{7} = 44 \text{ canne}$$

L'area del cerchio più grande è:

$$\text{area cerchio grande} = \frac{\text{diametro}}{2} \cdot \frac{\text{circonferenza}}{2} = $$
$$= \frac{14 \cdot 44}{4} = 154 \text{ canne}^2$$

Per calcolare le dimensioni del quadrato interno, Orbetano impiega i seguenti passi:

* dividere per 2 il diametro del cerchio maggiore: 14 : 2 = 7 ;
* moltiplicare 7 per se stesso: 7*7 = 49 ;
* moltiplicare, di nuovo, 7 per se stesso: 7*7 = 49 ;
* sommare i due prodotti: 49 + 49 = 98 canne^2 che è l'area del quadrato interno.

Il metodo di Orbetano corrisponde alla formula:

$$\text{Area}_{EFGH} = \left(\frac{EG}{2}\right)^2 + \left(\frac{FH}{2}\right)^2 = \left(\frac{14}{2}\right)^2 + \left(\frac{14}{2}\right)^2 = $$
$$= 49 + 49 = 98 \text{ canne}^2$$

Il calcolo delle dimensioni del cerchio più interno è così ottenuto:

* il diametro è lungo quanto il lato del quadrato interno: √98 ;
* la circonferenza è lunga

$$\sqrt{98} \cdot \left(3 + \frac{1}{7}\right) \cong 31{,}11 \text{ canne}$$

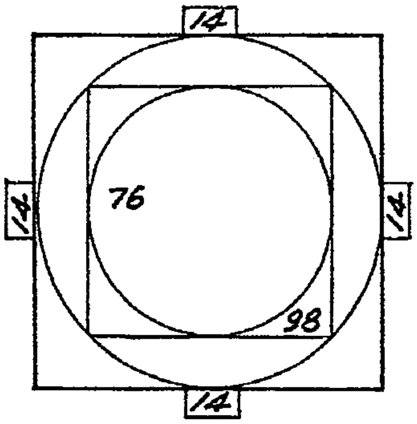
[Orbetano dà invece $30 + \frac{2}{5} = 30{,}4$ canne] ;

* l'area del cerchio interno è data da:

$$\frac{\text{diametro}}{2} \cdot \frac{\text{circonferenza}}{2} = \frac{\sqrt{98}}{2} \cdot \frac{\sqrt{98} \cdot \frac{22}{7}}{2} = $$
$$= \frac{98 \cdot 22}{28} = 77 \text{ canne}^2$$

[Orbetano calcola 76 canne^2].

La figura che segue è riprodotta dal testo di Annalisa Simi:

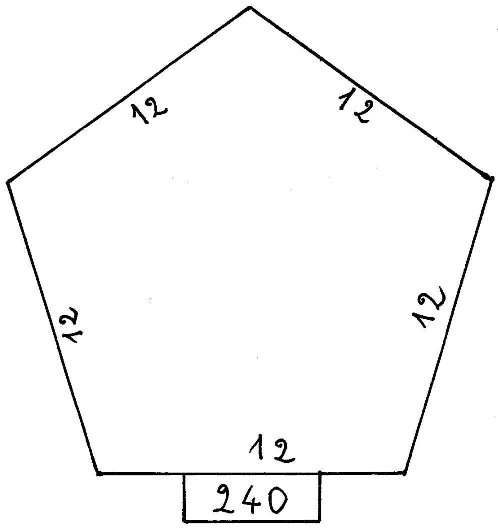


Orbetano scrive i valori delle lunghezze e delle superfici senza indicare le unità di misura e con ciò ingenerando confusione.

[23] Un terreno pentagonale

Un terreno ha la forma di un pentagono regolare con lati lunghi 12 *canne* [nel testo è scritto *cande*].

Il problema chiede di calcolare la sua area.



Orbetano impiegò la seguente procedura:

* moltiplicare il numero dei lati per la lunghezza di un lato: 5*12 = 60 ;
* sottrare un'unità dal numero dei lati: 5 – 1 = 4 ;
* moltiplicare i due ultimi numeri: 60*4 = 240 canne^2 area del pentagono regolare.

La procedura è sintetizzata con la formula seguente nella quale *n* è il numero dei lati del poligono regolare:

Area $_{pentagono}$ = (n – 1)*n*lato = n*(n – 1)*lato.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

L'area di un pentagono regolare è oggi calcolata usando il *numero fisso* F = 1,72:

Area $_{pentagono}$ = F*lato^2 = 1,72*12^2 = 247,68 canne^2.

Il dato calcolato da Orbetano è leggermente errato per difetto.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

[24] Orbetano suggerisce un secondo metodo per calcolare l'area del campo pentagonale:

* moltiplicare il numero dei lati per la lunghezza di un lato: 5*12 = 60 ;
* dividere per 3: 60 : 3 = 20 ;
* moltiplicare l'ultimo quoziente per la lunghezza di un lato: 20*12 = 240 canne^2 che è la stessa superficie calcolata con il metodo precedente.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Con questo secondo metodo Orbetano calcola l'area di un differente pentagono regolare che ha lato più lungo di quello precedente e cioè 14 canne:

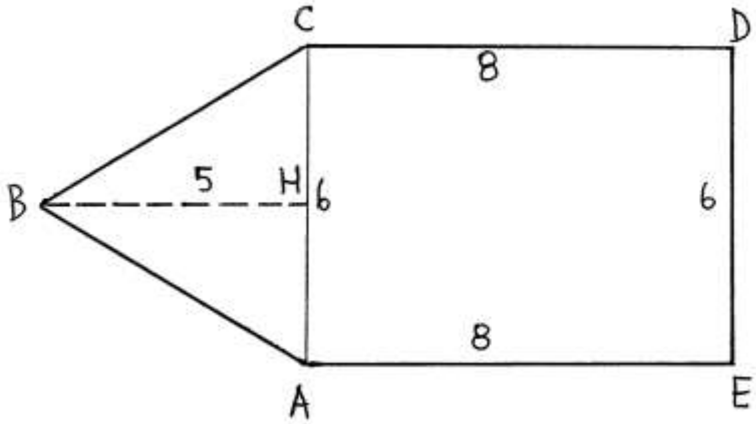
* moltiplicare il numero dei lati per la lunghezza di un lato: 5*14 = 70 ;
* dividere per 3: 70 : 3 = 23 + 1/3 ;
* moltiplicare l'ultimo quoziente per la lunghezza di un lato:

$$\left(23+\frac{1}{3}\right)\cdot 14 = 326+\frac{2}{3} \text{ canne}^2$$

che è l'area di questo pentagono.

[25] <u>Area di un pentagono non regolare</u>

Per facilitare la comprensione del metodo impiegato da Orbetano, alla sua figura sono aggiunte le lettere ai vertici:



Il poligono ha cinque lati ma non è un pentagono regolare. Per facilitarne la misurazione esso è scomposto in un triangolo isoscele, ABC, e in rettangolo ACDE.

Le dimensioni sono espresse in *pertiche* e sono scritte sui lati all'interno del poligono.

Orbetano misurò le lunghezze dei singoli lati con una *squadra*: ma dato che la pertica equivale a 2,91813 m non poteva avere a disposizione una squadra di grandi dimensioni. Probabilmente egli effettuò misurazioni plurime con l'aiuto di squadre, di *compassi da agrimensore* (con aste lunghe fino a 2 metri) e della *catena d'agrimensore* lunga anche un multiplo della pertica.

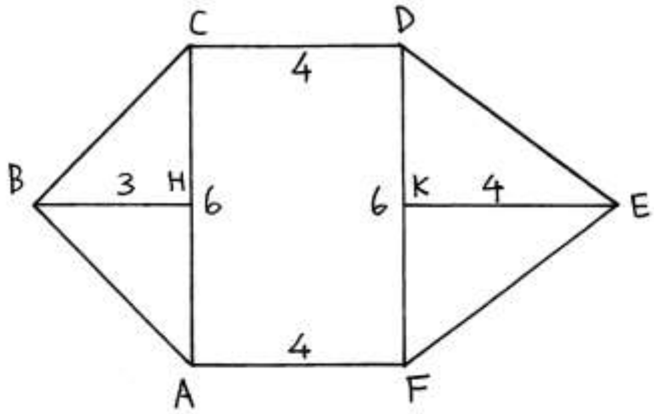
Per calcolare l'area dei due poligoni nei quali aveva scomposto il pentagono, Orbetano applicò al rettangolo ACDE la consueta *formula degli agrimensori*:

* sommare i due lati più corti (AC e DE): 6 + 6 = 12 :
* dividere per 2: 12 : 2 = 6 ;
* sommare i due lati più lunghi (AE e CD): 8 + 8 = 16 ;

* dividere per 2: 16 : 2 = 8 ;
* moltiplicare i due quozienti: 6*8 = 48 pertiche^2 , area di ACDE;
* misurare la lunghezza di BH: 5 pertiche ;
* dividere per 2 la lunghezza di AC: 6 : 2 = 3 ;
* moltiplicare 3 per BH: 3*5 = 15 pertiche^2, area del triangolo ABC;
* sommare le due aree: 48 + 15 = 63 pertiche^2, area del pentagono non regolare ABCDE.

[26] <u>Area di un esagono non regolare</u>

Un esagono non regolare ha le dimensioni scritte sulla figura:



Orbetano non indica alcuna unità di misura, forse sottindendo la pertica lineare.

Il poligono è scomposto nel rettangolo ACDF e nei triangoli isosceli ABC e DEF.

Per calcolare l'area di ACDF il trattato propone propone il metodo più semplice e più breve e cioè moltiplicare le lunghezze di due *lati adiacenti*:

Area $_{ACDF}$ = AF * AC = 4 * 6 = 24 .

L'area del triangolo ABC è data da BH*AH = 3*3 = 9.

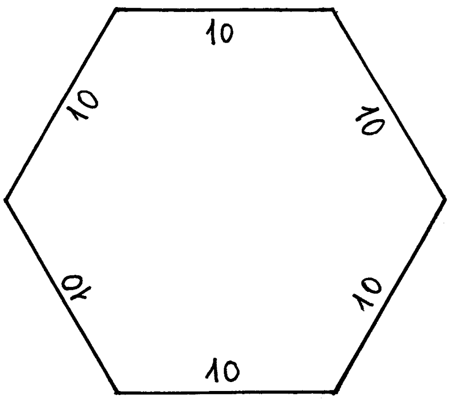
Infine l'area di FDE è: FK*KE = 3*4 = 12.

L'area totale è la somma delle tre aree parziali:

Area $_{ABCDEF}$ = 24 + 9 + 12 = 45 [pertiche^2 ?].

[27] <u>Area di un esagono regolare</u>

Un terreno ha forma esagonale e i suoi lati sono lunghi 10 pertiche.



La procedura seguita da Orbetano per calcolare l'area contiene i seguenti passi:

* moltiplicare la lunghezza di un lato per se stessa: 10*10 = 100 ;

* sottrarre 2 dal numero dei lati: 6 – 2 = 4 ;
* moltiplicare i due ultimi risultati: 100*4 = 400 ;
* moltiplicare il numero dei lati per la lunghezza di uno di essi: 6*10 = 60 ;
* dal precedente risultato 4 sottrarre 2: 4 – 2 = 2 ;
* moltiplicare 60 e 2: 60*2 = 120 ;
* sommare 400 e 120: 400 + 120 = 520 ;
* dividere per 2: 520 : 2 = 260 pertiche^2 che è l’area dell’esagono regolare.

Il risultato che oggi è ottenuto con il numero fisso specifico dell’esagono, F = 2,598, è il seguente:

Area $_{esagono}$ = 2,598*lato^2 = 2,598*10^2 = 259,8 pertiche^2.

Il risultato è pressoché uguale a quello ottenuto da Orbetano.

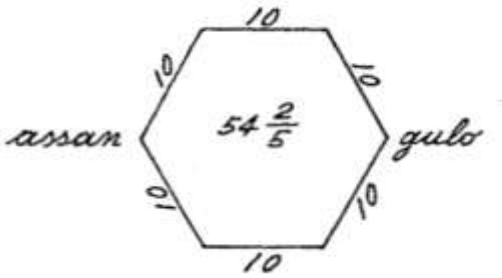
La procedura usata nel trattato è per calcolare l’area riassunta nella formula seguente nella quale n = 6 è il numero dei lati del poligono e lato = 10 pertiche è la sua lunghezza:

Area =

$$\frac{lato^2 \cdot (n-2) + n \cdot lato\,[(n-2)-2]}{2} = \frac{lato^2 \cdot (n-2) + 2 \cdot n \cdot lato}{2}$$

[28] <u>Altro esagono regolare</u>

Orbetano descrive un secondo terreno di forma esagonale (un *assangulo* nel suo volgare toscano) con lati lunghi 10 pertiche (come nel caso del problema precedente: in questo caso è richiesta l’area del cerchio massimo inscritto:



Il trattato fissa un dato di fatto di natura geometrica: l’esagono regolare è scomponibile in sei triangoli equilateri che hanno lati lunghi 10 pertiche.

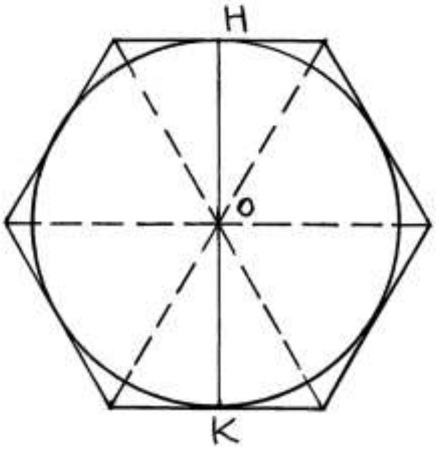
La procedura proposta è la seguente:

* moltiplicare per se stessa la lunghezza di un lato: 10*10 = 100 ;
* moltiplicare l’ultimo prodotto per il numero dei lati: 100*6 = 600 ;
* dividere per 2: 600 : 2 = 300 ;
* estrarre la radice quadrata: √300 ≈ 17,32 pertiche, diametro del cerchio inscritto

[Per quanto un po’ contorta, la procedura di Orbetano porta a un risultato fin qui corretto. Essa è sintetizzata nella formula

$$\text{diametro cerchio} = \sqrt{\frac{\text{lato}^2 \cdot n}{2}} = \sqrt{\frac{10^2 \cdot 6}{2}} = $$
$$= 10 \cdot \sqrt{3} \cong 17{,}32 \text{ pertiche}$$

In un qualsiasi poligono regolare, l’*apotema* è il raggio della circonferenza inscritta:



Nella figura, OH e PK sono due apotemi. H e K sono i punti medi dei lati e i due apotemi sono perpendicolari ai lati di riferimento.
Il rapporto fra la lunghezza dell’apotema e della del lato del poligono è costante ed è un *numero fisso,* caratteristico di ciascun tipo di poligoni e generalmente indicato con la lettera f:

$$\frac{\text{apotema}}{\text{lato}} = \text{numero fisso } f$$

Per l’esagono, f = 0,866 (che equivale a (√3) : 2).
Il doppio apotema HK è lungo: HK = 2 * f * lato = 2 * 0,866 * 10 ≈ 17,32 pertiche, dato identico a quello calcolato da Orbetano.
L’apotema di un esagono è l’altezza di un triangolo equilatero:

$$HK = \sqrt{\text{lato}^2 - \left(\frac{\text{lato}}{2}\right)^2} = \sqrt{10^2 - \frac{10^2}{4}} = 10\sqrt{\frac{3}{4}} =$$
$$= 5 \cdot \sqrt{3} \cong 8{,}66 \text{ pertiche}$$]

[riprende la procedura di orbetano]

* moltiplicare 300 per il valore approssimato di π:

$$300 \cdot \left(3 + \frac{1}{7}\right) = 2742 + \frac{6}{7}$$ [il risultato è *errato,* perché è 942 + 6/7 ≈ 942,857] ;

* estrarre la radice quadrata:

$$\sqrt{2742 + \frac{6}{7}} \cong 54 + \frac{2}{5} \text{ pertiche}^2$$ che sarebbe l'area *errata* del cerchio, come è scritto all'interno della figura contenuta nel Trattato.

Come notato anche dalla Simi, anche questo calcolo è errato perché

$$\sqrt{2742 + \frac{6}{7}} \cong 52{,}37 \text{ pertiche}^2 .$$

\- APPROFONDIMENTO -

Il problema appena descritto merita un approfondimento relativamente ai calcoli forniti da Orbetano.

Il raggio OH è lungo 8,66 pertiche ed è sia l'altezza del triangolo rettangolo che un apotema dell'esagono regolare.

L'area di un singolo triangolo equilatero è data da:

$$\text{Area triangolo} = \frac{\text{lato} \cdot \text{altezza}}{2} = \frac{\text{lato} \cdot \text{apotema}}{2} \cong$$
$$\cong \frac{10 \cdot 10 \cdot 0{,}866}{2} \cong 43{,}3 \text{ pertiche}^2$$

A sua volta, l'area dell'esagono è:

$\text{Area}_{\text{esagono}} = 6 * \text{Area}_{\text{triangolo}} = 6 * 43{,}3 = 259{,}8 \text{ pertiche}^2$.

La circonferenza del cerchio inscritto è lunga:

$$\text{circonferenza} = 2 \cdot \text{raggio} \cdot \left(3 + \frac{1}{7}\right) \cong$$
$$\cong 2 \cdot 8{,}66 \cdot \frac{22}{7} \cong 54{,}43 \text{ pertiche}$$

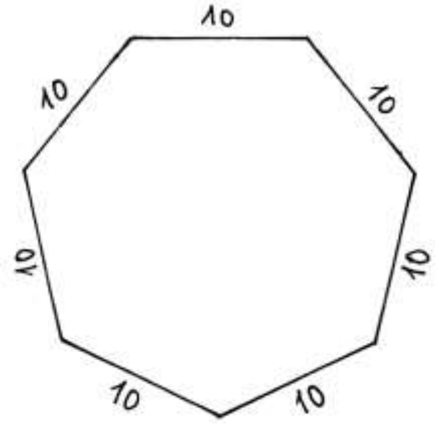
Infine, l'area del cerchio è:

$$\text{Area cerchio} = \frac{\text{diametro}}{2} \cdot \frac{\text{circonferenza}}{2} \cong$$
$$\cong \text{raggio} \cdot \frac{54{,}43}{2} \cong 8{,}66 \cdot 27{,}215 \cong$$
$$\cong 235{,}68 \text{ pertiche}^2$$

\- -

[29] Ettagono regolare

Un terreno ha la forma di un ettagono regolare con lati lunghi 10 pertiche:



Deve essere calcolata la sua superficie. Ecco i passi della procedura usata:

* moltiplicare la lunghezza di un lato per se stessa: 10*10 = 100 ;
* moltiplicare 100 per il numero dei lati: 100 * 7 = 700 ;
* moltiplicare (numero lati – 2) per il numero dei lati: 5*7 = 35 ;
* sommare gli ultimi due prodotti: 700 + 35 = 735 ;
* dividere per 2: 735 : 2 = 367,5 pertiche^2 che è l’area dell’ettagono.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Il *numero fisso* relativo all’ettagono per il calcolo della sua superficie è F = 3,634 e l’area vale:

$$\text{Area}_{\text{ETTAGONO}} = F * \text{lato}^2 = 3{,}634 * 10^2 = 363{,}4 \text{ pertiche}^2.$$

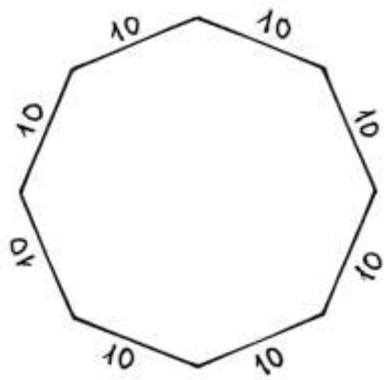
Il risultato ottenuto da Orbetano è quasi corretto.

La procedura sopra descritta può essere sintetizzata con la formula che segue (dove n è il numero dei lati):

$$\text{Area ettagono} = \frac{\text{lato}^2 \cdot n + (n-2) \cdot n}{2} = \frac{n \cdot (\text{lato}^2 + n - 2)}{2}$$

[30] Ottagono regolare

Un terreno ha la forma di un ottagono regolare con lati lunghi 10 pertiche:



La procedura applicata per calcolarne l'*area* è la seguente:

* moltiplicare la lunghezza di un lato per se stessa: 10*10 = 100 ;
* moltiplicare per il numero dei lati: 100*8 = 800 ;
* sottrarre 6 dal numero dei lati: 8 – 6 = 2 ;
* moltiplicare il numero dei lati per la lunghezza di un lato: 8*10 = 80 ;
* moltiplicare gli ultimi due numeri: 2*80 = 160 ;
* sommare 800 e 160: 800 + 160 = 960 ;
* dividere per 2: 960 : 2 = 480 pertiche^2 che è l'area dell'ottagono.

La procedura usata nel trattato è sintetizzata con la seguente formula:

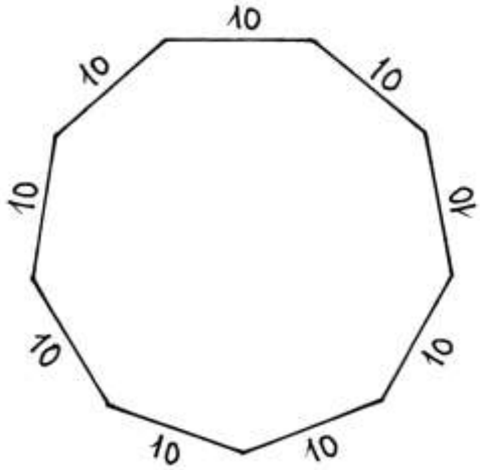
$$\text{Area}_{\text{ottagono}} = \frac{\text{lato}^2 \cdot n + (n-6) \cdot n \cdot \text{lato}}{2}$$

Con il numero fisso F = 4,828, l'area dell'ottagono è:

Area $_{\text{OTTAGONO}}$ = F+lato^2 = 4,828*10^2 = 482,8 pertiche^2, valore assai vicino a quello calcolato da Orbetano.

[31] Ennagono regolare

Un terreno ha la forma di un ennagono regolare con lati lunghi 10 pertiche; deve esserne calcolata la superficie:



La procedura impiegata è la seguente:

* moltiplicare la lunghezza di un lato per se stessa: 10*10 = 100 ;
* moltiplicare per il numero dei lati: 100*9 = 900 ;
* sottrarre 2 dal numero dei lati: 9 – 2 = 7 ;
* moltiplicare per la lunghezza dei lati: 7*10 = 70 ;
* sottrarre (2 + 2 = 4) dal numero dei lati: 9 – 4 = 5 ;
* moltiplicare per 70: 70*5 = 350 ;
* sommare 900 e 350: 900 + 350 = 1250 ;
* sottrarre 2 da 5: 5 – 2 = 3 ;
* moltiplicare 3 per la lunghezza di un lato: 3*10 = 30 ;
* sottrarre 30 da 1250: 1250 – 30 = 1220 ;
* dividere per 2: 1220 : 2 = 610 pertiche^2, area dell'ennagono.

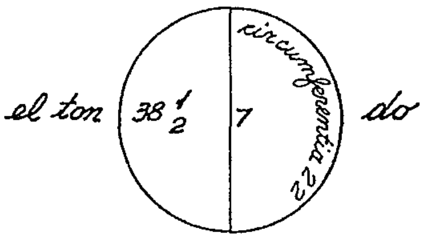
La procedura è sintetizzata con la formula seguente:

$$\text{Area ennagono} = \frac{n \cdot lato^2 + lato(n-2)(n-4) - lato[(n-4)-2]}{2}$$

Con il numero fisso F = 6,182, l’area dell’ennagono è:
Area ENNAGONO = F*lato^2 = 6,182*10^2 = 618,2 pertiche^2.
Il risultato di Orbetano è leggermente errato per *difetto*.

[50] Area di un cerchio

Un cerchio ha diametro 7 pertiche e la sua circonferenza è lunga 22 pertiche:



Deve essere calcolata la sua area.
Il rapporto fra le lunghezze del diametro e della circonferenza è

$$\frac{7}{22} = \frac{1}{3 + \frac{1}{7}}$$

L’area del cerchio è data da

$$\text{Area} = \frac{\text{diametro}}{2} \cdot \frac{\text{circonferenza}}{2} =$$
$$= \frac{7}{2} \cdot \frac{22}{2} = 3{,}5 \cdot 11 = 38{,}5 \text{ pertiche}^2$$

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Un altro cerchio ha diametro lungo 9 pertiche: deve esserne calcolata l’area.

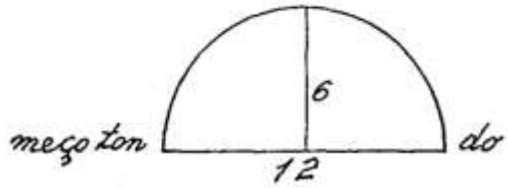
possede
perteche 9
$63 \frac{9}{14}$

Ecco i passi della procedura:

* moltiplicare il diametro per se stesso: 9*9 = 81 ;
* moltiplicare per 11: 81*11 = 891 ;
* dividere per 14: 891 : 14 = 63 + 9/14 ≈ 63,642 pertiche^2, area del cerchio.

[51] Area di un semicerchio

Un semicerchio ha la corda lunga 12 pertiche e la freccia (*polza*) è ovviamente lunga 6 pertiche:



La sua area è calcolata con la seguente procedura:

* moltiplicare la freccia per la corda: 6*12 = 72 ;
* moltiplicare il precedente prodotto per 11: 72*11 = 792 ;
* dividere per 14: 792 : 14 = 56 + 4/7 ≈ 56,571 pertiche^2, area del semicerchio.

Il termine *polza*, nella la sua variante *polsa*, è stato in precedenza usato da Paolo dell'Abbaco nel suo *Trattato d'Aritmetica*.

Nota: nella figura, la parola *meço* sta per *mezzo*: l'uso della cediglia sotto la lettera c era comune nei dialetti toscani dell'epoca per rappresentare il suono della 'z'.

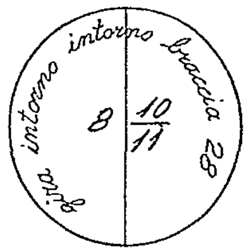
[52] <u>Circonferenza di un cerchio</u>

Un cerchio ha diametro 7 braccia: occorre calcolarne la circonferenza.

Per farlo, basta moltiplicare il diametro per il valore approssimato di π che è (3 + 1/7): circonferenza = 7 * (3 + 1/7) 7*22/7 = 22 braccia.

[53] <u>Calcolo del diametro</u>

Un cerchio ha circonferenza lungo 28 braccia e deve essere ricavata la lunghezza del suo diametro:



La soluzione più semplice sarebbe quella di dividere 28 per il valore approssimato di π:

$$\text{diametro} = \frac{\text{circonferenza}}{3+\frac{1}{7}} = \frac{28}{\frac{22}{7}} = \frac{28 \cdot 7}{22} = \frac{14 \cdot 7}{11} = 8 + \frac{10}{11} \cong 8{,}90 \text{ braccia}$$

A causa delle difficoltà legate all'uso delle frazioni, Orbetano suggerisce per i calcoli intermedi di impiegari *numeri interi* ("*sani*") moltiplicando per 7 il valore approssimato di π. per poi dividere un successivo risultato parziale per 7.

Ecco la procedura:

* moltiplicare (3 + 1/7) per 7: (3 + 1/7) * 7 = (22/7) * 7 = 22 ;
* moltiplicare 28 per 7: 28*7 = 196 ;
* dividere per 22 (invece che per 22/7): 196 : 22 = 8 + 10/11 braccia che è il diametro cercato.

La procedura impiegata da Orbetano è riassunta nella seguente formula:

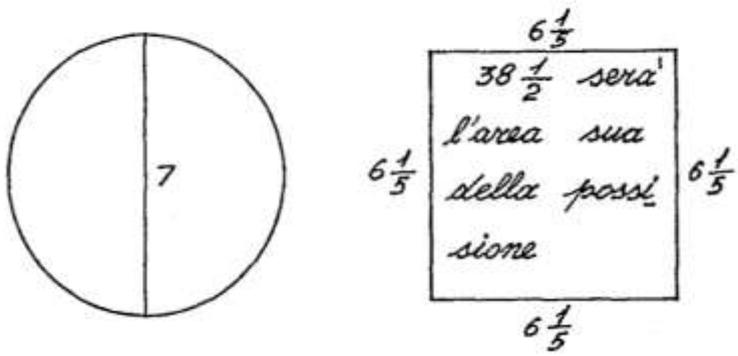
$$\text{diametro} = \frac{7}{7} \cdot \frac{\text{circonferenza}}{3 + \frac{1}{7}} = \frac{7 \cdot 28}{7 \cdot \frac{22}{7}} =$$

$$= \frac{7 \cdot 28}{22} = 8 + \frac{10}{11} \text{ braccia}$$

[54] Quadratura di un cerchio

Un cerchio deve essere trasformato in un quadrato di uguale superficie: Orbetano è consapevole dell'impossibilità di risolvere il problema e si limita a esporre un metodo approssimato per calcolare la lunghezza del lato del quadrato equivalente.

Il cerchio ha la circonferenza lunga 22 braccia:



Ecco la procedura:

* calcolare il diametro del cerchio:

$$\text{diametro} = \frac{\text{circonferenza}}{3 + \frac{1}{7}} = \frac{22}{\frac{22}{7}} = 7 \;;$$

* moltiplicare la circonferenza per il diametro: 22*7 = 154 ;
* dividere per 4: 154 : 4 = 38,5 braccia^2

che è l'area del cerchio.

Dato che il quadrato deve avere la stessa area del cerchio, il suo lato è dato da

$$\text{lato quadrato} = \sqrt{\text{area quadrato}} = \sqrt{38{,}5} \cong$$

$$\cong 6{,}20 \cong 6 + \frac{1}{5} \text{ braccia}$$

Non è possibile ottenere un risultato intero e Orbetano descrive una riprova : il quadrato di (6 + 1/5) è uguale a un valore assai vicino a 38,5:

$$\left(6 + \frac{1}{5}\right)^2 = \left(\frac{30+1}{5}\right)^2 = \left(\frac{31}{5}\right)^2 = \frac{961}{25} = 38{,}44 = 38 + \frac{44}{100}$$

che Orbetano indica erroneamente come (38 + 44/25): il denominatore della frazione (25) va moltiplicato per 4 (= 100).

- -

Note:

I problemi relativi al cerchio, al semicerchio e alla circonferenza sono sparsi all'interno del manoscritto e spesso sono ripetuti, senza mostrare un ordine logico.

Spesso, Orbetano usa nei problemi dimensioni multiple di 7 per le lunghezze di circonferenze e diametri e per il calcolo delle aree delle figure circolari: tutto ciò ha l'evidente scopo di semplificare i calcoli grazie all'uso del valore approssimato di π uguale a

(3 + 1/7) = 22/7.

- -

[67] Circonferenza di un cerchio

Un cerchio ha diametro lungo 7 braccia.

Orbetano ne calcola la circonferenza moltiplicando il diametro per 22/7:

circonferenza = diametro * 22/7 = 7 * 22/7 = 22 braccia.

[68] Diametro di un cerchio

Un cerchio ha circonferenza lunga 30 braccia: il diametro è dato da:

$$\text{diametro} = \frac{\text{circonferenza}}{\frac{22}{7}} = \frac{30}{\frac{22}{7}} = \frac{30 \cdot 7}{22} = 9 + \frac{6}{11} \text{ braccia}$$

[69] Area di un cerchio

Un cerchio ha diametro lungo 10 braccia: deve essere calcolata la sua area.

Orbetano descrive due metodi:

a) il primo, più breve, contiene i seguenti passi:

* moltiplicare la lunghezza del diametro per 22/7: 10*22/7 = 31 + 3/7 che è la lunghezza della circonferenza;
* moltiplicare il diametro per la circonferenza:

$$10 \cdot \left(31 + \frac{3}{7}\right) = 10 \cdot \frac{217+3}{7} = \frac{2200}{7} = 314 + \frac{2}{7} \; ;$$

* dividere per 4:

$$\frac{314 + \frac{2}{7}}{4} = \frac{2200}{28} = 78 + \frac{4}{7} \text{ braccia}^2$$ che è l'area del cerchio.

La procedura usata da Orbetano è riassunta dalla consueta formula

Area cerchio = circonferenza/2 * diametro/2 .

b) Il secondo metodo contiene i seguenti passi:

* moltiplicare la lunghezza del diametro per se stessa: 10*10 = 100 ;
* moltiplicare per 11: 100*11 = 1100 ;
* dividere per 14: 100 : 14 = 78 + 4/7 braccia^2 che è l'area del cerchio.

La formula implicitamente usata è

$$\text{Area cerchio} = \text{diametro}^2 \cdot \frac{11}{14}$$

[70] Cerchio

Un cerchio ha circonferenza lunga, in *valore assoluto*, quanto la superficie:

|circonferenza| = |superficie|.

La soluzione adottata da Orbetano implica l'impiego di un minimo di *algebra*.

Qui di seguito è fornita una descrizione della soluzione di Orbetano che è stata adattata ai tempi moderni.

Richiamiamo per l'area del cerchio l'ultima formula contenuta nel precedente paragrafo.

La circonferenza è lunga: circonferenza = diametro * 22/7.

Occorre fissare un'*incognita* (*cosa* nel linguaggio dei trattatisti dell'Abbaco cui si adegua Orbetano) e scegliamo il diametro: diametro = x.

La circonferenza è lunga: circonferenza = x * 22/7.

L'area diviene

$$\text{area} = \frac{11}{14} \cdot x^2.$$

Ma la circonferenza e l'area hanno lo stesso valore assoluto per cui è possibile eguagliare due espressioni:

$$\frac{22}{7} \cdot x = \frac{11}{14} \cdot x^2 \longrightarrow \frac{22}{7} = \frac{11}{14}\, x.$$

Da cui

$$x = \frac{22 \cdot 14}{7 \cdot 11} = 4$$ che è la lunghezza del diametro.

La circonferenza è lunga:

circonferenza = 4 * 22/7 = 88/7 = 12 + 4/7.

L'area è:

Area cerchio = 11/14 * 4^2 = 12 + 4/7.

I due valori (circonferenza e cerchio) sono uguali.

- APPROFONDIMENTO - - - - - - - - - - - - - - - - - -

I matematici italiani del Medioevo e del Rinascimento usarono l'*algebra* per risolvere problemi geometrici e di natura commerciale e chiamarono *cosa* l'incognita che oggi è indicata con la lettera *x*.

Il quadrato della *cosa* (x^2) era il *censo*.

La terza potenza della *cosa* (x^3) era chiamata *cubo*.

La quarta potenza della cosa (x^4) era detta *censo di censo* ($x^2 * x^2 = x^4$).

Anche Orbetano usò questa terminologia.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

La procedura realmente impiegata da Orbetano è la seguente:

- fissare il diametro come incognita o *cosa*;
- moltiplicare il diametro per se stesso: diametro * diametro = cosa * cosa = 1 censo ;
- moltiplicare per 11 e dividere per 14: 1 censo * 11/14 = 11/14 * censo ;

- moltiplicare il diametro per (3 + 1/7): diametro * (3 + 1/7) = cosa * 22/7, che è la lunghezza della circonferenza;
- dato che, in valore assoluto, l'area e la circonferenza sono uguali, egugliare le due precedenti espressioni: 11/14 * censo = 22/7 * cosa, da cui
  11/14 * cosa = 22/7 e cosa = 14/11 * 22/7 = 4, diametro del cerchio;

* moltiplicare il diametro per 22/7: 4 * 22/7 = 12 + 4/7 che è la lunghezza della circonferenza ;

* moltiplicare il diametro per stesso: 4 * 4 = 16 ;

* moltiplicare per 11/14: 16 * 11/14 = 12 + 4/7 che è l'area del cerchio, uguale in *valore assoluto* alla lunghezza della circonferenza.

- -

[71] Circonferenza di un cerchio

Un cerchio ha superficie uguale a 12 braccia^2. Deve essere calcolata la lunghezza della circonferenza.

La soluzione di questo problema richiama quella del precedente e riutilizza il *valore assoluto* (12 + 4/7), chiamandolo *moltiplicatore della superficie* (la *possexione*).

Ecco i passi della procedura usata da Orbetano:

* moltiplicare l'area per il moltiplicatore:

$$12 \cdot \left(12 + \frac{4}{7}\right) = 150 + \frac{6}{7}$$
;

* estrarre la radice quadrata:

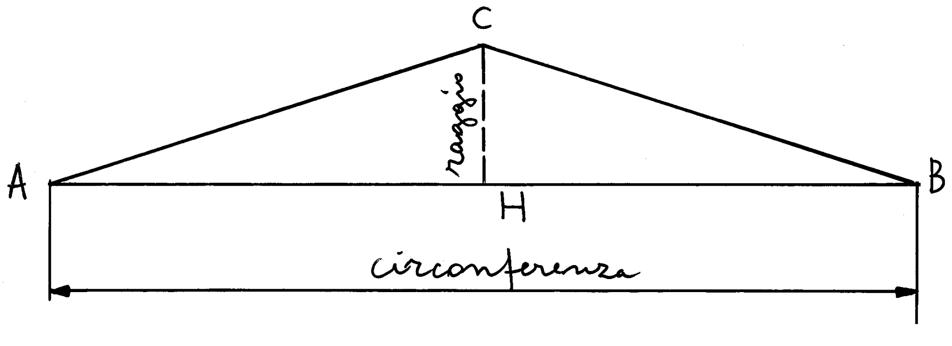
$$\sqrt{150 + \frac{6}{7}} \cong 12{,}28 \text{ braccia}$$
.

- APPROFONDIMENTO -

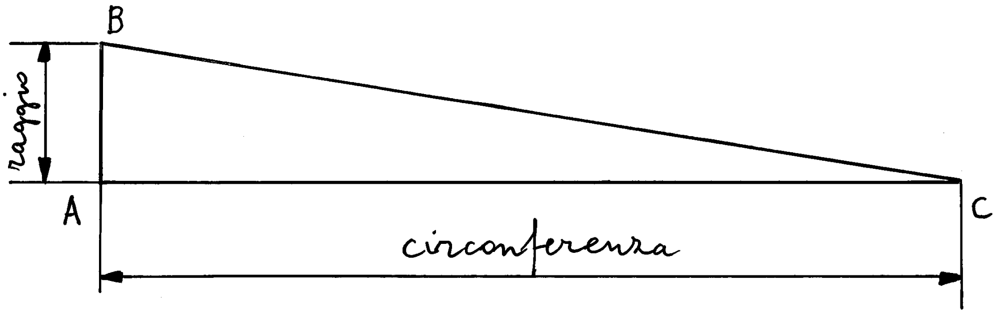
L'origine del moltiplicatore della superficie

Vediamo di approfondire l'origine del *moltiplicatore della superficie* (12 + 4/7).

L'area di un cerchio è assimilabile a quella di un triangolo isoscele che ha la base AB lunga quanto la circonferenza e altezza CH lunga quanto il raggio:



oppure a quella di un triangolo rettangolo con cateti lunghi quanto la circonferenza e il raggio:



Nel primo caso (triangolo isoscele) l'area è data da:

$$Area_{ACB} = \frac{AB \cdot CH}{2} = \frac{circonferenza \cdot raggio}{2}$$

Ma

$$circonferenza = diametro \cdot \frac{22}{7} = 2 \cdot raggio \cdot \frac{22}{7} = \frac{44}{7} raggio$$

Da cui

$$raggio = circonferenza \cdot \frac{7}{44}$$

Sostituendo il valore appena trovato del raggio nella formula dell'area del cerchio si ha

$$Area = circonferenza^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{44} = circonfeinza^2 \cdot \frac{7}{88}$$

La lunghezza della circonferenza è data da

$$circonferenza = \sqrt{area \cdot \frac{88}{7}}$$

La frazione 88/7 vale

$$\frac{88}{7} = 12 + \frac{4}{7}$$

ed è il *moltiplicatore della superficie* usato da Orbetano: esso corrisponde al rapporto fra il quadrato della circonferenza e l'area del cerchio e cioè:

circonferenza^2 = Area cerchio * 88/7.

Un'altra via permette di giungere allo stesso risultato: l'area di un cerchio di raggio r è data da: Area cerchio = π * r^2, mentre la circonferenza è lunga: circonferenza = 2 * π * r.
Ne consegue che:

$$\frac{circonferenza^2}{Area} = \frac{4\pi^2 r^2}{\pi r^2} = 4\pi$$

Sostituendo nell'ultima formula al valore di π quello approssimato di 22/7, risulta:

$$4 \cdot \frac{22}{7} = \frac{88}{7} = 12 + \frac{4}{7}$$

In conclusione, la frazione 88/7 è il valore approssimato di 4*π.

- -

[72] Area di un cerchio

Un cerchio ha la circonferenza lunga 30 braccia: è richiesta la sua area.

Ecco i passi della procedura impiegata:

* moltiplicare la lunghezza della circonferenza per se stessa: 30*30 = 900 ;
* dividere 900 per il *moltiplicatore della superficie*:
  900 : (12 + 4/7), ma per evitare calcoli frazionari troppo complessi, Orbetano sostituì (12 + 4/7) con il suo equivalente 88/7 effettuando due separati calcoli:
    * moltiplicare 900 per 7: 900*7 = 6300 ;
    * dividere per 88: 6300 : 88 = 71 + 13/22 braccia^2 che è l'area del cerchio.

La procedura applicata è inversa a quella del caso precedente.

[73] Area di un cerchio

Un cerchio ha la circonferenza √60: il problema domanda la sua superficie.

La procedura usata è la seguente:

* moltiplicare la lunghezza della circonferenza per se stessa: √60 * √60 = 60 ;
* dividere per il *moltiplicatore della superficie*:

$$60 : \left(12 + \frac{4}{7}\right) = 60 : \frac{88}{7} = \frac{30 \cdot 7}{44} = 4 + \frac{17}{22} \; ;$$

Orbetano fornisce un risultato errato: 4 + 13/22.

[74] Diametro di un cerchio

Come nel caso del problema precedente, Orbetanon non indica alcuna unità di misura di lunghezze e superfici.

È nota l'area di un cerchio, 20, e il problema chiede di calcolare la lunghezza del diametro.

Ecco i passi della procedura:

* moltiplicare l'area per 14: 20*14 = 280 ;
* dividere per 11: 280 : 11 = 25 + 5/11 ;
* estrarre la radice quadrata:

$$\sqrt{25 + \frac{5}{11}} \cong 5{,}045$$

che è il diametro del cerchio.

[75] Diametro del cerchio generatore di un segmento circolare

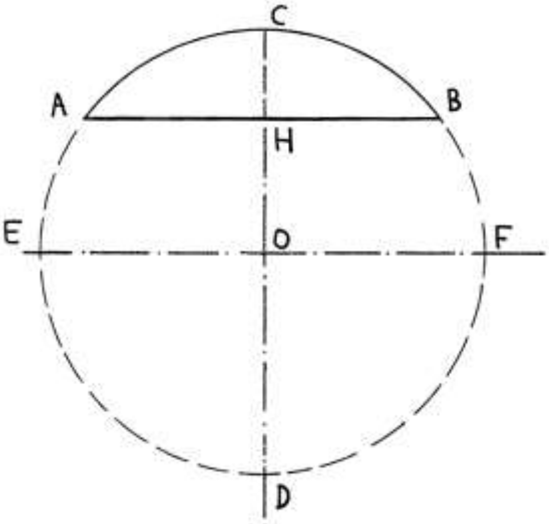
Un segmento circolare ha la corda lunga 8 e la freccia (*polza*) 2: non sono indicate unità di misura.

È richiesta la lunghezza del diametro del cerchio da cui è ritagliato il segmento circolare.

Il problema esposto da Orbetano deriva, pur con differenti dimensioni, da uno descritto da Paolo dell'Abbaco nel suo *Trattato d'Aritmetica* (problema n. 135).

La procedura impiegata da Orbetano impiega i seguenti passi:

* dividere per 2 la lunghezza della corda: 8 : 2 = 4 ;
* moltiplicare per se stesso: 4*4 = 16 ;
* dividere per la lunghezza della freccia: 16 : 2 = 8 che è la lunghezza del segmento HD:



Il diametro CD è lungo: CD = CH + HD = 2 + 8 = 10.

Come nel caso del problema analogo di Paolo dell’Abbaco, Orbetano ha applicato il *teorema delle corde*: le corde AB e CD sono entrambe inscritte nella stessa circonferenza e si tagliano ad angolo retto mel punto H, dividendo la corda AB in due segmenti di uguale lunghezza, AH e HB.

Per il teorema della corda, i due segmenti di una corda (ad esempio AH e HB) formano i *medi* e i due segmenti dell’altra corda (CH e HD) sono gli *estremi* di una proporzione:

$$\underbrace{CH : \underbrace{AH = HB}_{\text{medi}} : HD}_{\text{estremi}}$$

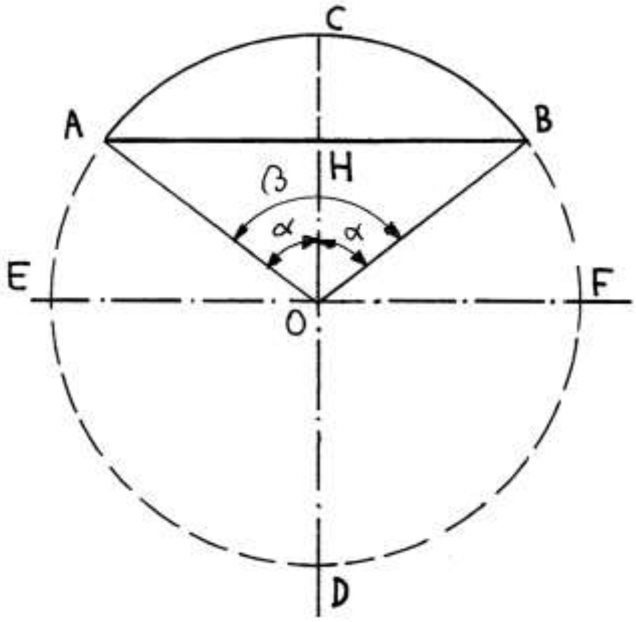
Dalla proporzione discende:

$$HD = \frac{AH \cdot HB}{CH} = \frac{4 \cdot 4}{2} = 8$$

, che è la lunghezza del diametro del cerchio.

[76] Segmento circolare

È dato un segmento circolare che ha l'arco ACB lungo 10 braccia e la freccia CH lunga 2 braccia:



Il problema domanda la lunghezza della corda AB.

La procedura impiegata da Orbetano ha i seguenti passi:

* sottrarre la lunghezza della freccia da quella dell'arco: 10 – 2 = 8 ;
* moltiplicare il precedente risultato per la lunghezza della freccia: 8*2 = 16 ;
* moltiplicare per 4: 16*4 = 64 ;
* estrarre la radice quadrata: √64 = 8 braccia che è la lunghezza della corda AB.

La procedura è riassunta con la formula che segue:

$$corda = \sqrt{(arco - freccia) \cdot freccia \cdot 4} =$$
$$= 2 \cdot \sqrt{(arco - freccia) \cdot freccia}$$

%%%

Verifichiamo la validità della procedura usata da Orbetano.

Per il *teorema delle corde* si ha:

$$CH : AH = HB : HD$$ da cui

$$HD = \frac{AH \cdot HB}{CH} = \frac{4 \cdot 4}{2} = 8 \text{ braccia}$$

Il diametro CD è lungo: CD = CH + HD = 2 + 8 = 10 braccia.

A sua volta, il segmento OH è lungo:

$$OH = OC - HC = \frac{CD}{2} - HC = \frac{10}{2} - 2 = 5 - 2 = 3 \text{ braccia}$$

.

Il triangolo OHA è rettangolo e i suoi lati sono lunghi: AH = 4 , OH = 3 e OA = 5 braccia e cioè le tre lunghezze formano la terna pitagorica 3-4-5.

Fissiamo alcune relazioni:

AH = HB = c/2 , dove c è la corda;

CH = f , freccia e

HD = diametro – freccia = d – f = 2*r – f.

La proporzione che descrive il teorema delle corde, scritta sopra, può essere spiegata come segue:

$$f : \frac{c}{2} = \frac{c}{2} : (2r - f)$$

Con i seguenti passaggi è ricavato il valore del raggio r in funzione della corda c e della freccia f:

$$\frac{c^2}{4} = f \cdot (2r - f)$$
$$\frac{c^2}{4} = 2fr - f^2$$
$$\frac{c^2}{4} + f^2 = 2fr$$
$$r = \frac{c^2}{8f} + \frac{f}{2}$$

La lunghezza dell'arco ACB è proporzionale all'angolo β:

$$\overset{\frown}{ACB} : \beta = circonferenza : 360°$$

A sua volta, l'angolo β è ampio il doppio di quello α: β = 2* α.

La tangente dell'angolo α è data da:

$$tg\,\alpha = \frac{AH}{OH} = \frac{\frac{c}{2}}{r-f} = \frac{c}{2(r-f)} = \frac{4}{3} \cong 1,\overline{33}$$

Ad essa corrisponde un angolo α ≈ 53,13°.

L'angolo β è ampio 2*α ≈ 2*53,13 ≈ 106,26°.

Sostituendo questo ultimo valore nella precedente proporzione otteniamo la lunghezza dell'arco ACB:

$$\overset{\frown}{ACB} = \frac{\beta \cdot circonferenza}{360} \cong \frac{106,26 \cdot \frac{22}{7} \cdot 10}{360} \cong$$
$$\cong \frac{106,26 \cdot 22 \cdot 10}{7 \cdot 360} \cong 9,276 \text{ braccia.}$$

Invece, usando per π il valore più corretto – e cioè 3,14 – , il risultato è

$$\overset{\frown}{ACB} = \frac{\beta \cdot circonferenza}{360} \cong \frac{106,26 \cdot 3,14 \cdot 10}{360} \cong$$
$$\cong 9,268 \text{ braccia.}$$

La lunghezza dell'arco ACB, fissata da Orbetano in 10 braccia, è *approssimata per eccesso*.

[77] Freccia incognita di un segmente circolare

Questo problema è inverso rispetto a quelli precedenti.

Un segmento circolare ha l'arco lungo 10 e la corda è lunga 8: Orbetano non indica alcuna unità di misura.

Il problema chiede la lunghezza incognita della freccia.

La procedura impiegata è la seguente:

* moltiplicare per se stessa la lunghezza dell'arco: 10*10 = 100 ;
* moltiplicare la lunghezza della corda per se stessa: 8*8 = 64 ;
* sottarre il secondo quadrato dal primo: 100 – 64 = 36 ;
* dividere per 4: 36 : 4 = 9 ;
* dividere per 2 la lunghezza dell'arco: 10 : 2 = 5 ;
* estrarre la radice quadrata di 9: √9 = 3 ;
* sottrarre 3 da 5: 5 – 3 = 2. che è la lunghezza della *freccia*.

Nota: I dati relativi a questo problema sono uguali a quelli del precedente ([76]): i risultati contengono entrambi gli errori evidenziati alla fine del precedente paragrafo e non sono qui ripetuti i calcoli occorrenti per dimostrarne la presenza.

[78] Area di un segmento circolare

Un segmento circolare ha la corda lunga 8 e la freccia 3.

Il problema chiede di calcolare la sua area.

Ecco i passi della procedura:

* moltiplicare le lunghezze della corda e della freccia: 8*3 = 24 ;
* moltiplicare per 11: 24*11 = 264 ;
* dividere per 14: 264 : 14 = 18 + 6/7, che è l'area del segmento circolare.

La procedura è riassunta con la seguente formula:

Area segmento circolare = corda * freccia * 11/14.

L'area di un segmento circolare è calcolabile con la formula che segue:

$$\text{Area} = \frac{r \cdot (\text{arco} - c) + c \cdot f}{2}.$$

Occorre determinare la lunghezza del raggio r e per farlo è necessario impiegare la formula già ricavata nella descrizione del problema [76]:

$$r = \frac{c^2}{8f} + \frac{f}{2}.$$

Inserendo i valori di c e di f, risulta quanto segue:

$$r = \frac{8^2}{8 \cdot 3} + \frac{3}{2} = \frac{8}{3} + \frac{3}{2} = \frac{16+9}{6} = \frac{25}{6}.$$

Sostituendo il valore appena calcolato di r nella formula dell'area si ottiene:

$$\text{Area} = \frac{\frac{25}{6} \cdot (10-8) + 8 \cdot 2}{2} =$$

$$= \frac{\frac{25}{3} + 16}{2} = \frac{25 + 48}{6} = \frac{73}{6} = 12 + \frac{1}{6}$$

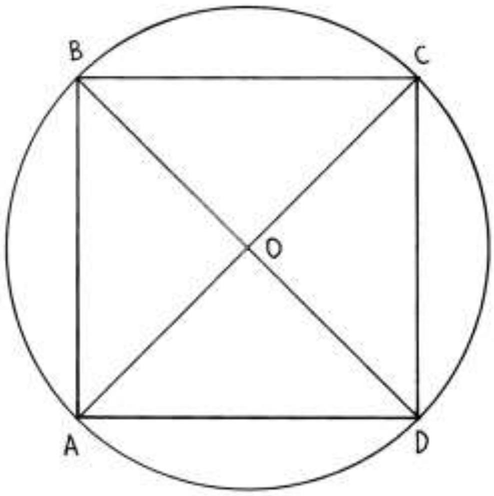
L’area calcolata da Orbetano – 18 + 6/7 – è assai maggiore di quella effettiva e la sua formula è quindi *errata*.

[79] Quadrato circoscritto a un cerchio

Un cerchio ha diametro lungo 12 braccia. Al suo interno deve essere inscritto un quadrato, ABCD.

Il problema chiede di conoscere:

- la lunghezza del lato del quadrato;
- l’area del quadrato stesso;
- la differenza fra l’area del cerchio e quella del quadrato.



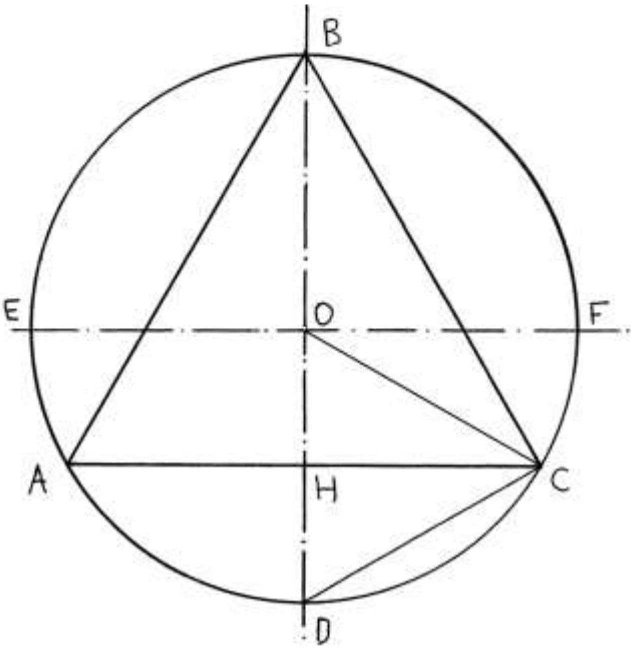
Le diagonali del quadrato, AC e BD, sono due diametri del cerchio.

La procedura usata per risolvere il problema contiene i seguenti passi:

* moltiplicare il diametro del cerchio per se stesso: 12*12 = 144 ;
* dividere per 2: 144 : 2 = 72 ;
* estrarre la radice quadrata di 72: √72, che è la lunghezza in braccia del lato del quadrato;
* moltiplicare la lunghezza del lato del quadrato per se stessa: √72 * √72 = 72 braccia^2, che è l’area del quadrato ABCD;
* calcolare l’area del cerchio:
  diametro^2 * 11/14 = 12^2 * 11/14 = 113 + 1/7 braccia^2 ;
* calcolare la differenza fra l’area del cerchio e quella del quadrato:
  (113 + 1/7) – 72 = 41 + 1/7 braccia^2.

[80] Scudo inscritto in un cerchio

Un cerchio ha diametro 12 e deve esservi inscritto il più grande *scudo* possibile: per *scudo* Orbetano intendeva un *triangolo equilatero*.



ABC è il triangolo equilatero e BH è una sua altezza, che Orbetano chiama *diametro dello scudo*.

Il problema chiede di calcolare l'altezza del triangolo e il suo lato.

Orbetano fissa correttamente il rapporto fra l'altezza BH e il diametro BD in ¾:

$BH = ¾ * BD = ¾ * 12 = 9$.

L'affermazione è esatta: il punto H è il medio del raggio OD e pertanto

$OH = HD = OD/2 = ½ * BD/2 = ¼ * BD = ¼ * 12 = 3$.

Ne consegue che il *diametro dello scudo*, l'altezza BH, ha lunghezza

$BH = BD – HD = 12 – 3 = 9$, ciò che conferma l'affermazione di Orbetano.

Per calcolare la lunghezza del lato del triangolo equilatero, l'Autore applica la seguente procedura:

* moltiplicare l'altezza del triangolo per se stessa: $9*9 = 81$;
* calcolare 1/3 di 81: $81 * 1/3 = 27$;
* sommare i due ultimi valori: $81 + 27 = 108$;
* estrarre la radice quadrata di 108: $\sqrt{108}$, che è la lunghezza del lato del triangolo equilatero.

Nella figura, OCD è un triangolo equilatero con lati lunghi quanto il raggio OD: il segmento HC divide il triangolo in due triangoli rettangoli (HCD e HCO).

Applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo HCD si ha:

$HC^2 = DC^2 – HD^2$.

Ma DC è il lato di un esagono regolare inscritto nello stesso cerchio ed è lungo quanto il raggio OD e HD è lungo quanto la metà dello stesso OD, per cui la precedente relazione diviene la seguente:

$HC^2 = OD^2 – (OD/2)^2 = ¾ * OD^2$.

La lunghezza di HC è: $HC = (\sqrt{3})/2 * OD$.

Il lato AC è lungo il doppio di HC:

$AC = 2*HC = \sqrt{3} * OD$.

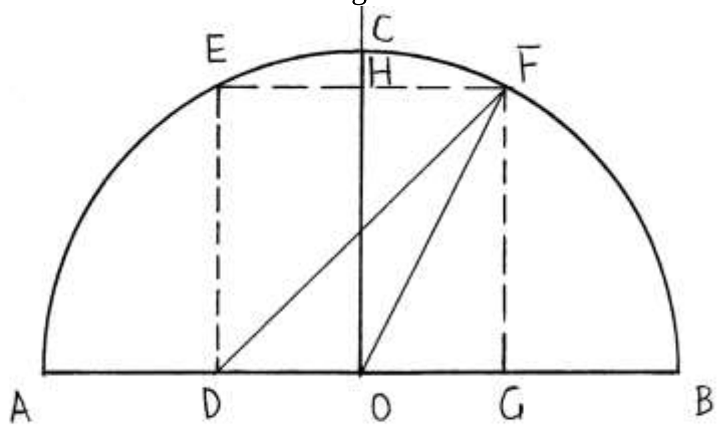
Sostituendo a OD la sua lunghezza $OD = BD/2 = 6$, risulta $AC = \sqrt{3} * 6$.

La precedente espressione può essere modificata lasciandone invariato il valore:

$AC = \sqrt{3} * 6 = \sqrt{3} * \sqrt{6^2} = \sqrt{3*36} = \sqrt{108}$, come calcolato da Orbetano.

[81] Quadrato inscritto in un semicerchio

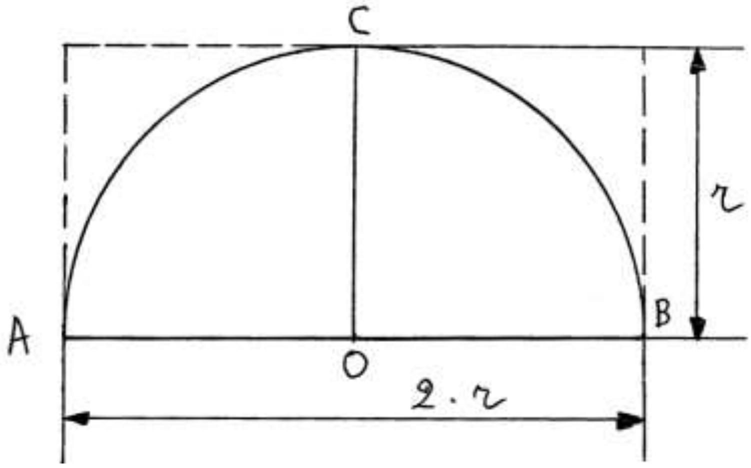
Un semicerchio ha la corda AB lunga 12 e la freccia OC 6:



Deve esservi inscritto il quadrato più grande possibile.

Il problema chiede di calcolare la lunghezza del lato del quadrato e quella di una sua diagonale (che Orbetano chiama *diametro*).

Il semicerchio è definito *bislungo* perché AB ha lunghezza doppia di quella di OC:



Per risolvere il problema, Orbetano ricorre all'algebra (*alzibra*) e fissa come incognita x la lunghezza del lato più corto del *bislungo* e cioè il raggio OC: OC = x .

Ne consegue che AB = 2 * OC = 2*x.

La procedura impiegata da Orbetano contiene i seguenti passi:

* moltiplicare il raggio OC per se stesso: $OC^2 = x^2$;
* elevare al quadrato la lunghezza del lato maggiore (AB) del *bislongo*: $AB^2 = (2*x)^2 = 4*x^2$;
* sommare i due quadrati: $OC^2 + AB^2 = x^2 + 4*x^2 = 5*x^2$.

A questo punto, Orbetano introduce l'uguaglianza

$AB^2 = 5*x^2$ da cui $12^2 = 5*x^2$ e

$$x^2 = \frac{12^2}{5} = \frac{144}{5} = 28 + \frac{4}{5}$$

Secondo Orbetano, l'incognita x corrisponderebbe alla lunghezza del lato minore del *bislongo* e cioè a OC. Dalla precedente espressione egli ricava il valore di OC:

$$OC = x = \sqrt{28 + \frac{4}{5}}$$

Senza fornire alcuna giustificazione, Orbetano afferma che l'ultima radice è la lunghezza del lato del quadrato DEFG inscritto e cioè DE.

La lunghezza della diagonale del quadrato, DF, è correttamente calcolata con la seguente procedura:

* moltiplicare

$$\sqrt{28+\frac{4}{5}}$$ per se stesso:

$$\sqrt{28+\frac{4}{5}} * \sqrt{28+\frac{4}{5}} = 28 + 4/5 ;$$

* ripetere la precedente operazione: = 28 + 4/5 ;
* sommare i due risultati: (28 + 4/5) + (28 + 4/5) = 57 + 3/5 ;
* estrarre la radice quadrata:

$$\sqrt{57+\frac{3}{5}}$$, che è la lunghezza della diagonale DF.

Senza citarlo espressamente, Orbetano ha applicato il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo DFG:

$$DF = \sqrt{DG^2 + FG^2} = \sqrt{2 \cdot DG^2} = \sqrt{2} \cdot DG .$$

- APPROFONDIMENTO -

Non avendo tracciata alcuna figura, Orbetano non ha potuto mettere in evidenza due particolari importanti per la successiva spiegazione della soluzione del problema:

a) Il raggio CO divide il quadrato DEFG in due rettangoli di uguali dimensioni: DEHO e OHFG. Essi sono due *bislunghi* perché le lunghezze dei loro lati stanno nella proporzione DE : DO = 2 : 1;
b) la diagonale OF, del rettangolo OHFG, è anche un raggio del semicerchio.

La lunghezza di OF è data

$$OF = \sqrt{OG^2 + GF^2} = \sqrt{\left(\frac{GF}{2}\right)^2 + GF^2} =$$

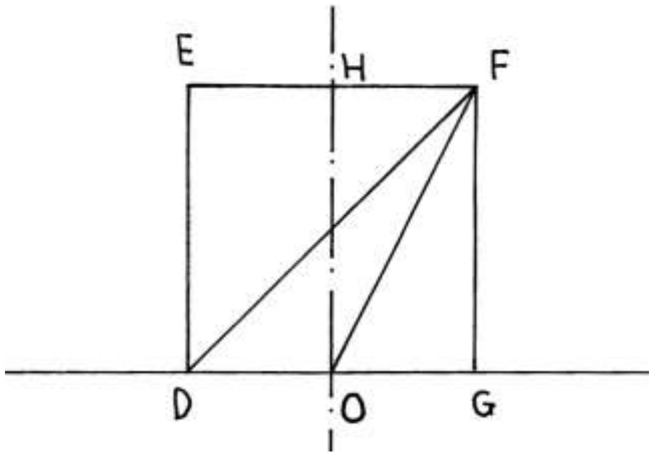
$$= \sqrt{\frac{5}{4} \cdot GF^2} = \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot GF$$

Ricompaiono i fattori 5 e la radice √5.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Il problema presentato da Orbetano può essere risolto in maniera differente da quella da lui impiegata.

Disegnare il quadrato DEFG con le stesse dimensioni dell'analogo quadrato della figura iniziale:

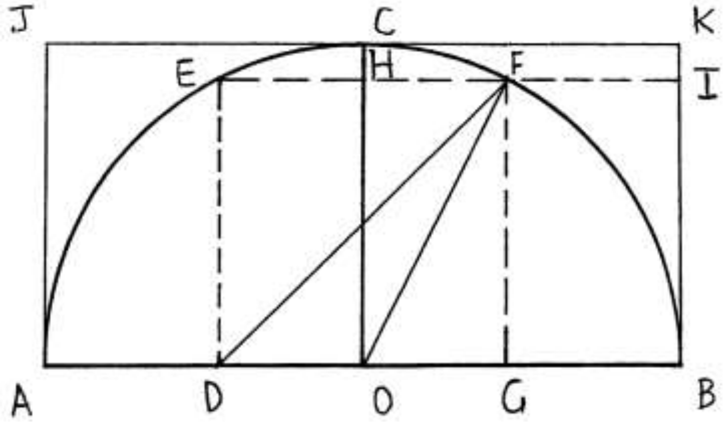


Il lato DG giace su una retta orizzontale.

Il segmento HO divide a metà il quadrato.

DF è la diagonale del quadrato e OF è la diagonale del rettangolo OHFG.

Prolungare verso destra EF:



Fare centro nel punto O e con raggio OF tracciare una semicirconferenza: AVB è un semicerchio.

Dai punti A e B elevare le perpendicolari a AB e per il punto C condurre una parallela a AB: la linea che sale da B fissa il punto I.

Il semicerchio è inscritto nel doppio quadrato (*bislungo*) AJKB.

Il segmento DB è lungo:

$$DB = DO + OB = \frac{GF}{2} + OF = \frac{GF}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot GF =$$
$$= \frac{\sqrt{5}+1}{2} \cdot GF$$

Ma

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2} \cong 1,618033 = \phi$$

: è comparsa la *sezione aurea*.

DG è la *sezione aurea* di DB e DEIB è un *rettangolo aureo*.

La costruzione geometrica appena descritta è usata per determinare la sezione aurea di un segmento (DB) conoscendo la sua *parte maggiore* (DG).

Orbetano non sembra aver utilizzato la costruzione della sezione aurea.

La sezione aurea è legata alla divisione di un segmento in due parti: per chiarire i concetti usiamo il segmento DB della figura precedente:

La *parte maggiore*, DG, sta all'*intero*, DB, come la *parte minore*, GB, sta alla *parte maggiore*, DG:

DG : DB = GB : DG.

Per semplificare la spiegazione, chiamiamo *lato* la *parte maggiore* DG (è un lato del quadrato DEFG).

Come già visto, la diagonale OF è lunga

OF = (√5)/2 * GF = (√5)/2 * lato .

Il segmento DB è lungo:

$$DB = DO + OB = DO + OF = \frac{lato}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot lato$$
$$= \frac{\sqrt{5}+1}{2} \cdot lato$$

Infine, il segmento GB è lungo:

$$GB = DB - DG = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \cdot lato - lato =$$
$$= \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot lato$$

Sostituendo questi valori nella precedente proporzione si ha:

$$lato : \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) \cdot lato = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) \cdot lato : lato$$

Semplificando risulta quanto segue:

$$1 : \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} : 1$$

$$\frac{\left(\sqrt{5}+1\right) \cdot \left(\sqrt{5}-1\right)}{4} = 1^2$$

$$\frac{5-\sqrt{5}+\sqrt{5}-1}{4} = 1$$

Infine:

$$\frac{4}{4} = 1 .$$

La proporzione è corretta.

I rapporti esistenti fra le lunghezze dei segmenti sono i seguenti:

$$\frac{DB}{DG} = \frac{\frac{\sqrt{5}+1}{2} \cdot lato}{lato} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \cong 1{,}618 = \phi$$

$$\frac{DG}{GB} = \frac{lato}{\frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot lato} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} =$$
$$= \frac{2 \cdot (\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1) \cdot (\sqrt{5}+1)} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{5+\sqrt{5}-5-1} =$$
$$= \frac{\sqrt{5}+1}{2} \cong 1,618 = \phi$$

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

La soluzione del problema di Orbetano è assai semplice: la diagonale OF è il raggio del semicerchio, ma essa è anche legata alla lunghezza del lato del quadrato DEFG da inscrivere.

Chiamiamo x la lunghezza del lato GF. In precedenza abbiamo già definita la relazione

$$OF = \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot GF$$

che diviene

$$OF = \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot X$$

da cui

$$X = \frac{2 \cdot OF}{\sqrt{5}}$$

Ma OF = 6, quindi

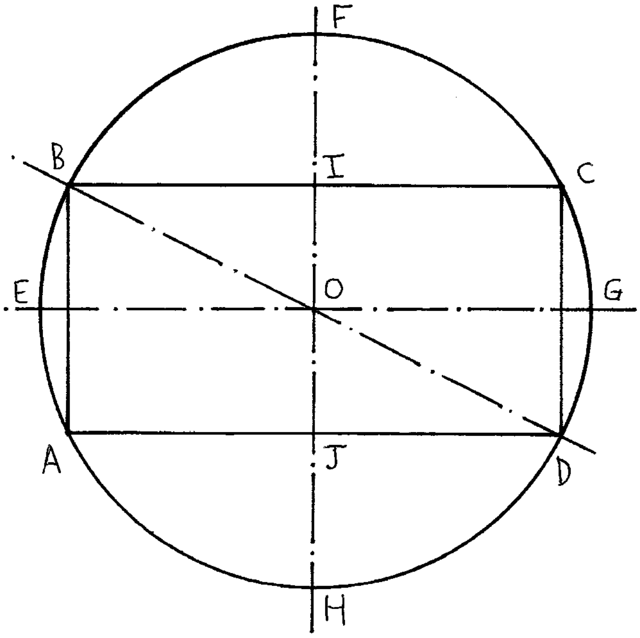
$$X = \frac{2 \cdot 6}{\sqrt{5}} = \frac{12 \cdot \sqrt{5}}{5} \cong 5,366 = GF$$

- -

[82] <u>Doppio quadrato inscritto in un cerchio</u>

Questo problema è sicuramente collegato al precedente, almeno considerando l'uguaglianza deille cifre.

È dato un cerchio di cui non viene fornita la lunghezza del diametro, che presumibilmente è 12 unità, come nel caso precedente:sia per il problema [81] che per questo Orbetano non indica alcuna unità di misura.



Nel cerchio deve essere inscritto il *bislongo* (un rettangolo, ABCD, a forma di doppio quadrato) il più grande possibile.

Orbetano afferma che il lato minore del rettangolo, AB, è lungo

$\sqrt{28+\frac{4}{5}}$, che è lo stesso dato calcolato per il precedente problema.

Il lato maggiore, AD, sarebbe lungo il *doppio* di AB:

$$AD = 2 \cdot AB = 2 \cdot \sqrt{28+\frac{4}{5}} =$$
$$= \sqrt{4 \cdot \left(28+\frac{4}{5}\right)} = \sqrt{115+\frac{1}{5}}$$

Orbetano conclude che l'area del rettangolo ABCD è uguale a

$\sqrt{331+\frac{4}{5}}$, ma il risultato è *errato*.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Il diametro BD è una delle due diagonali del rettangolo ABCD; indichiamo con x la larghezza AB: il lato AD è lungo AD = 2*AB = 2*x .

Applicando il teorema di Pitagora al triangolo ABD risulta:

$BD^2 = AB^2 + AD^2 = x^2 + (2*x)^2 = 5*x^2$.

Ne consegue

$$X^2 = \frac{BD^2}{5} = \frac{12^2}{5}$$
$$X = \frac{12}{\sqrt{5}} = \frac{12 \cdot \sqrt{5}}{5} \cong 5,366$$

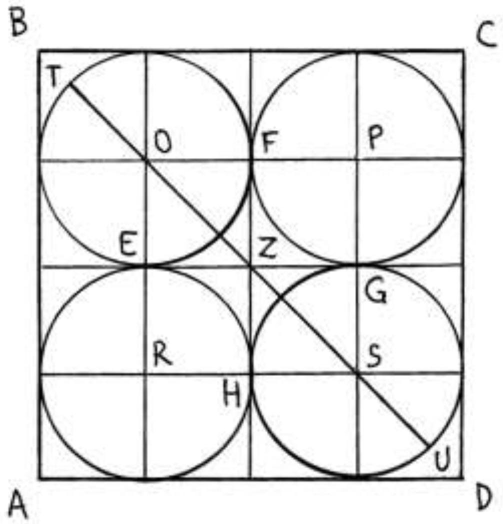
L'area *corretta* di ABCD è:

$$Area_{ABCD} = x \cdot 2x = 2x^2 = 2 \cdot \left(\frac{12 \cdot \sqrt{5}}{5}\right)^2 =$$

$$= \frac{2 \cdot 12^2 \cdot 5}{25} = 57,6$$

[92] <u>Cerchi tangenti</u>

Quattro cerchi di uguali dimensioni sono fra loro tangenti:



Essi hanno diametro d = 4.

Il problema chiede di calcolare la lunghezza della linea che congiunge i punti opposti di due cerchi non tangenti [T e U in figura] e l'area del poligono delimitato dai quattro cerchi.

La procedura impiegata da Orbetano è la seguente:

* dividere per 2 il diametro di un cerchio: 4 : 2 = 2 ;
* ripetere la stessa operazione: 4 : 2 = 2 ;
* sommare i due quozienti: 2 + 2 = 4 che è la distanza fra i centri di due cerchi tangenti [OP nella figura] ;
* moltiplicare l'ultimo numero per se stesso: 4*4 = 16 ;
* moltiplicare per 2: 16*2 = 32 ;
* estrarre la radice quadrata: √32, che è la lunghezza del *diametro* [la diagonale OS in figura] ;
* sommare 4 e √32: 4 + √32 , che è la lunghezza del segmento TU in figura ;
* moltiplicare il diametro di un cerchio per se stesso: 4*4 = 16 ;
* moltiplicare per 11: 16*11 = 176 ;
* dividere per 14: 176 : 14 = 12 + 4/7, che è l'area di ciascun cerchio;
* moltiplicare per se stessa la lunghezza del lato [OP] del quadrato [OPSR] costruito sui quattro centri: 4*4 = 16, che è l'area del quadrato [OPSR] ;
* sottrarre l'area di un cerchio da quella del quadrato [OPSR]: 16 – (12 + 4/7) = 3 + 3/7 che è l'area del poligono curvilineo [EFGH] racchiuso fra i quattro cerchi ;
* sottrarre dalla lunghezza di [OS] le lunghezze dei raggi [0-2] e [4-S]: √32 – 2 – 2 = √32 – 4, che è la lunghezza della diagonale [2-4] del quadrato piccolo.

A questo punto Orbetano introduce, senza alcuna giustificazione due numeri molto grandi: ($222 - \sqrt{73728}$): la sottrazione fornisce un *numero negativo*: $\approx -49{,}529$ che non ha alcun significato: lo scopo sembrerebbe quello di calcolare la lunghezza dei lati del quadrato 1-2-3-4 che invece è data da:

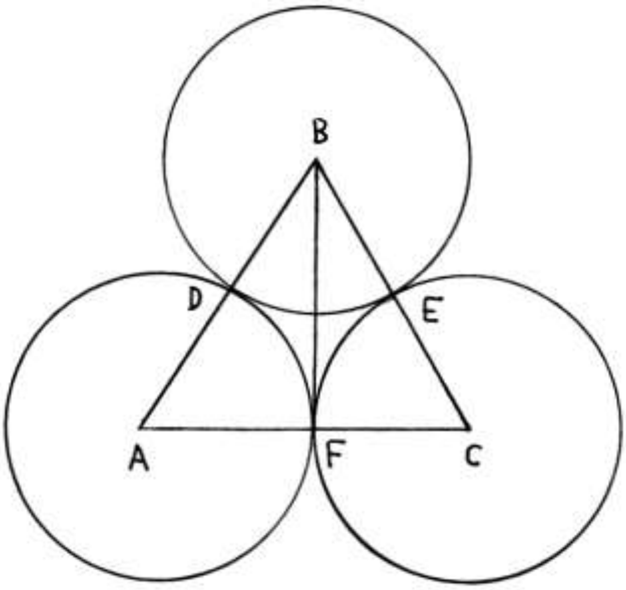
$(1\text{-}2)^2 = (2\text{-}4)^2 - (1\text{-}4)^2$
$(1\text{-}2)^2 = (2\text{-}4)^2 - (1\text{-}2)^2$
$2*(1\text{-}2)^2 = (2\text{-}4)^2$
$(1\text{-}2)^2 = (\sqrt{32} - 4)^2/2 \approx 1{,}3725$ che è l'area del quadrato 1-2-3-4 e
$\sqrt{1{,}3725} \approx 1{,}1716$ che è la lunghezza del lato di questo quadrato.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Il problema appena descritto rientra fra quelli di ottimizzazione: ad esempio, dato un blocco di pietra diforma quadrata (come ABCD della precedente figura) ricavarne quattro colonne cilindriche uguali del diametro più grande possibile, per ridurre al minimo lo spreco di materiale.

[93] Tre cerchi collegati da un triangolo equilatero

Tre cerchi di diametro 6 sono accostati in modo che i loro tre centri A, B e C siano i vertici di un triangolo equilatero (uno *scudo* secondo Orbetano):



I tre cerchi sono tangenti due a due nei punti D, E e F.

Orbetano chiede di calcolare la lunghezza del lato del triangolo equilatero e quella del *diametro* (e cioè l'altezza BF) dello stesso triangolo.

Il lato AB è dato da: AB = AD + DB, che sono due raggi di due cerchi tangenti. Ne consegue che AB è lungo quanto il diametro di un cerchio e cioè 6.

La procedura impiegata da Orbetano per calcolare l'altezza BF è la seguente:

* moltiplicare la lunghezza del lato del triangolo per se stessa: $6*6 = 36$;
* dividere per 2 la lunghezza del lato: $6 : 2 = 3$;
* moltiplicare 3 per se stesso: $3*3 = 9$;
* sottrarre 9 da 36: $36 - 9 = 27$;
* estrarre la radice quadrata di 27: $\sqrt{27} = [3*\sqrt{3}]$, che è la lunghezza dell'altezza BH.

Orbetano ha semplicemente applicato il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo ABF:

$$BF^2 = AB^2 - AF^2 = AB^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} \cdot 6^2 = 27$$

Da cui consegue BF = √27.

Infine, Orbetano calcola l'area del triangolo ABC con la seguente procedura:

* moltiplicare la metà del lato per se stessa: 3*3 = 9 ;
* moltiplicare 9 per il quadrato dell'altezza: 9*27 = 243 ;
* estrarre la radice quadrata: √243, che è l'area di ABC.

La procedura di Orbetano è riassunta nella formula che segue:
$Area^2_{ABC} = AF^2 * BF^2$, da cui

$$Area_{ABC} = 3 \cdot \sqrt{27} = \sqrt{9 \cdot 27} = \sqrt{243} \left[= 9 \cdot \sqrt{3}\right]$$

[95] Da quadrato a cerchio

Un terreno ha forma quadrata e ha area 20. Deve essere disegnato un cerchio che abbia la stessa suuperficie di 20.

Anche in questo caso, Orbetano non indica alcuna unità di misura.

Il problema chiede di calcolare il diametro del cerchio equivalente.

La procedura impiegata è la seguente:

* calcolare i 3/11 della superficie del quadrato: 3/11 * 20 = 60/11 ;
* aggiungere 60/11 all'area del quadrato:

$$\frac{60}{11} + 20 = \frac{60 + 220}{11} = \frac{280}{11} \quad ;$$

* estrarre la radice quadrata:

$$\sqrt{\frac{280}{11}}$$

che è il diametro del cerchio equivalente che è 5,045, mentre la lunghezza del lato del quadrato è √20 ≈ 4,472.

La formula approssimata che fornisce l'area di un conoscendone il diametro è:

$Area_{CERCHIO} = 11/14 * diametro^2$.

Da questa formula possiamo ricavare il diametro d incognito:

$$d = \sqrt{\frac{14}{11} \cdot Area} = \sqrt{\frac{14}{11} \cdot 20} = \sqrt{\frac{280}{11}}$$

, che è la formula inversa impiegata da Orbetano.

[96] Divisione di un cerchio in tre parti uguali

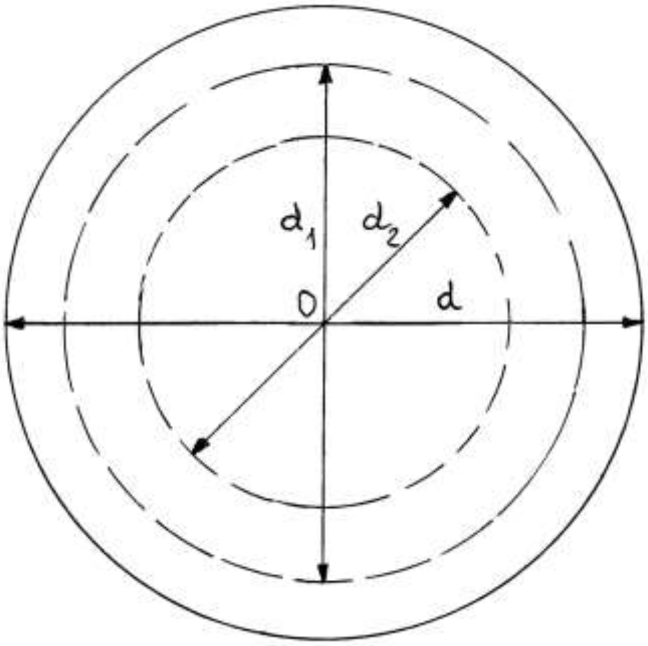
Il problema è riproposto nella successiva *ragione* [136] con una modifica della lunghezza del diametro.

Tre fratelli devono dividersi in tre parti di uguale superficie una mola per arrotare di forma circolare.

Il diametro della ruota è di 6 piedi.

La procedura impiegata da Orbetano ha i seguenti passi:

* moltiplicare il diametro per se stesso: $6*6 = 36$;
* dividere per 3: $36 : 3 = 12$;
* sommare 12 e 12: $12 + 12 = 24$;
* il primo fratello arroterà per: $6 - \sqrt{24}$ piedi ;
* il secondo fratello arroterà per: $\sqrt{24} - \sqrt{12}$ piedi ;
* infine al terzo fratello resterà la lunghezza radiale rimanente e cioè: $\sqrt{12}$ piedi.



La somma delle tre lunghezze calcolate da Orbetano è:

$$(6 - \sqrt{24}) + (\sqrt{24} - \sqrt{12}) + \sqrt{12} = 6$$ piedi che è il diametro della mola da suddividere.

Il primo e il secondo fratello useranno la mola con una corona circolare a testa e al terzo fratello resterà il cerchio centrale.

L'area di una *corona circolare* è data da:

$$\text{Area corona} = \pi * (R^2 - r^2) = \pi * (D^2/4 - d^2/4) .$$

Nella formula, R e D sono rispettivamente il raggio e il diametro della circonferenza esterna, mentre r e d lo sono della circonferenza interna.

L'area dell'intero cerchio è:

$$\text{Area} = \frac{22}{7} \cdot \left(\frac{6}{2}\right)^2 = \frac{22}{7} \cdot 9 = \frac{198}{7} \text{ piedi}^2.$$

L'area di ciascuna delle tre parti è uguale a 1/3 della precedente:

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{198}{7} = \frac{66}{7} \text{ piedi}^2$$

Il cerchio interno ha area data da

$$\text{Area} = d_2^2 \cdot \frac{11}{14}$$

Ne consegue:

$$\frac{11}{14} \cdot d_2^2 = \frac{66}{7}$$

$$d_2^2 = \frac{66}{7} \cdot \frac{14}{11} = 12$$

$$d_2 = \sqrt{12} \cong 3{,}464 \text{ piedi}$$

, ciò che conferma l'esattezza dei calcoli di Orbetano.

La corona circolare intermedia è racchiusa fra due circonferenze che hanno diametri d_1 e d_2.

L'area di questa corona è data da

$$A_{\text{corona intermedia}} = \pi \cdot \left(\frac{d_1^2}{4} - \frac{d_2^2}{4} \right)$$

Nella formula, d_1 è l'incognita: l'area di questa corona è uguale a 66/7 piedi^2.

La lunghezza di d_1 è data da

$$\frac{66}{7} = \frac{22}{7} \cdot \left(\frac{d_1^2}{4} - \frac{12}{4} \right)$$

$$\frac{22}{7} \cdot \frac{d_1^2}{4} - \frac{22}{7} \cdot \frac{12}{4} - \frac{66}{7} = 0$$

$$\frac{11}{14} d_1^2 = \frac{22}{7} \cdot 3 + \frac{66}{7}$$

$$\frac{11}{14} \cdot d_1^2 = \frac{132}{7}$$

$$d_1^2 = \frac{132}{7} \cdot \frac{14}{11} = 24$$

In conclusione:

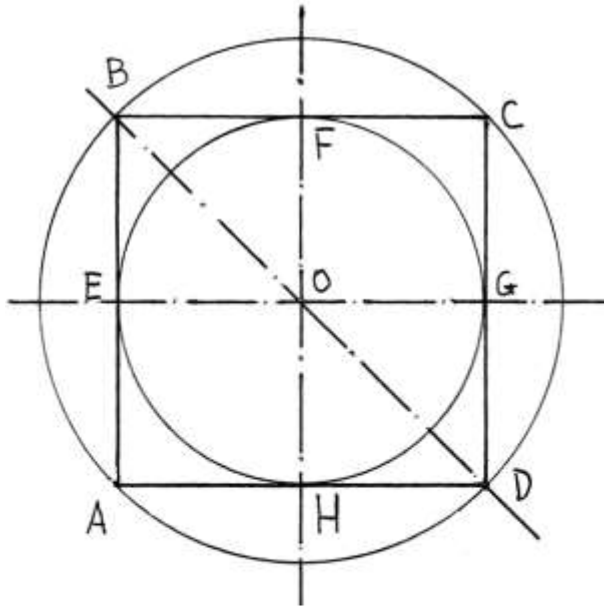
$$d_1 = \sqrt{24} \text{ piedi}$$

I calcoli di Orbetano sono tutti esatti.

[97] <u>Divisione di un cerchio in 2 parti</u>

Due persone possiedono un terreno di forma circolare e vogliono dividerlo in due parti di uguale superficie mantenendone la forma circolare: le due parti saranno un cerchio e una corona circolare concentrici.

Il diametro del terreno è 20.



Orbetano risolve il problema con il seguente metodo: inscrivere all'interno del cerchio il quadrato più grande possibile e all'interno di questo ultimo traccia il cerchio più grande, come spiega la figura qui sopra. La diagonale del quadrato inscritto [BD] è lunga quanto il diametro del terreno.

Ecco la procedura usata da Orbetano:

* moltiplicare il diametro BD per se stesso: 20*20 = 400 ;
* dividere per 2: 400 : 2 = 200 ;
* estrarre la radice quadrata: √200 , che è la lunghezza del lato [AB] del quadrato inscritto.

Fare centro in O e con raggio OE = ½ * AB, disegnare una circonferenza inscritta nel quadrato.

Il cerchio esterno ha area

$$\text{Area cerchio esterno} = \text{diametro}^2 \cdot \frac{11}{14} = 20^2 \cdot \frac{11}{14} = 314 + \frac{2}{7}$$

Il cerchio interno ha area

$$\text{Area cerchio interno} = \text{diametro}^2 \cdot \frac{11}{14} = \left(\sqrt{200}\right)^2 \cdot \frac{11}{14} = 200 \cdot \frac{11}{14} = 157 + \frac{1}{7}$$

Il cerchio esterno ha area uguale a metà di quello intero e la corona circolare ha la stessa superficie del cerchio interno.

La procedura di Orbetano è corretta.

[98] <u>Area di un quadrato</u>

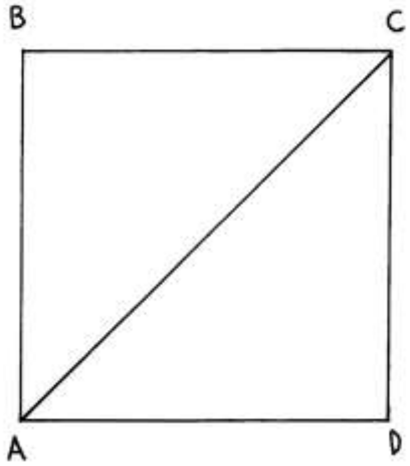
Un quadrato deve avere tutti gli angoli retti e i lati di uguale lunghezza.

Se il lato è lungo 10, la sua area è data dal prodotto della lunghezza di un lato per se stessa:

area = lato*lato = 10*10 = 100.

[99] Diagonale di un quadrato

Un quadrato ha lato lungo 12. Il problema chiede di calcolare la lunghezza del *diametro de mezio* e cioè la diagonale [AC].



La procedura impiegata è la seguente:

* moltiplicare il lato per se stesso: $12*12 = 144$;
* ripetere la stessa operazione: $12*12 = 144$;
* sommare i due prodotti: $144 + 144 = 288$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{288}$, che è la lunghezza della diagonale AC.

Orbetano ha correttamente applicato il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo ACD:

$AC^2 = AD^2 2+ CD^2 = 12^2 + 12^2 = 288$

Da cui $AC = \sqrt{288}$.

[100] Calcolo della lunghezza del lato di un quadrato

Un quadrato ha il *diametro de mezo* [nel problema precedente Orbetano ha usato *mezio* invece di *mezo*] lungo $\sqrt{200}$.

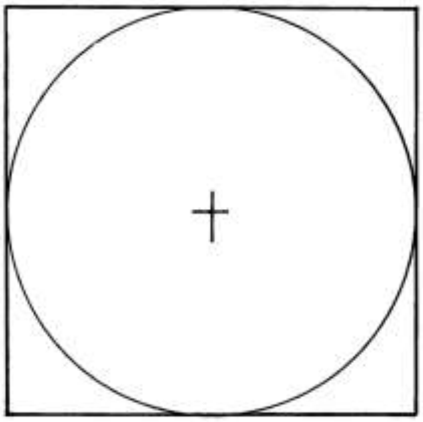
Per ricavare la lunghezza del lato Orbetano impiegò la seguente procedura:

* elevare al quadrato la lunghezza della diagonale: $(\sqrt{200})^2 = 200$;
* dividere per 2: $200 : 2 = 100$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{100} = 10$, che è la lunghezza del lato del quadrato.

[101] Inscrivere un cerchio in un quadrato

Un quadrato ha lati lunghi 10 (anche in questo caso Orbetano non indica alcuna unità di misura): deve esservi inscritto il cerchio più grande possibile.

Il problema domanda di calcolare l'area del quadrato, quella del cerchio e la differenza fra le due aree.



Il cerchio ha diametro uguale alla lunghezza del lato del quadrato.
La procedura impiegata contiene i seguenti passi:

* moltiplicare la lunghezza del lato del quadrato per se stessa: 10*10 = 100 ;
* moltiplicare il diametro, 10, per 22/7 (valore approssimato di π):

$$10 \cdot \frac{22}{7} = 31 + \frac{3}{7}$$

che è la lunghezza della circonferenza;
* moltiplicare il diametro per la circonferenza:

$$10 \cdot \left(31 + \frac{3}{7}\right) = 314 + \frac{2}{7}\ ;$$

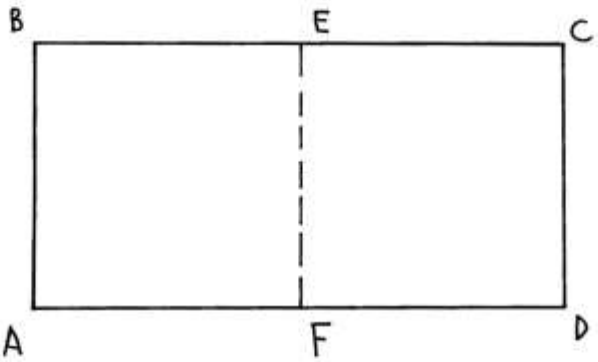
* dividere per 4: (314 + 2/7) : 4 = 78 + 4/7, che è l'area del cerchio;
* sottrarre l'area del cerchio da quella del quadrato: 100 – (78 + 4/7) = 21 + 3/7 che è l'area dei quattro *cantoni*;
* dividere per 4: (21 + 3/7) : $ = 5 + 5/14 che è l'area di ciascuno dei quattro *cantoni*.

[102] <u>Area di un quadrato</u>

Un quadrato ha area uguale a 20.
Il problema chiede di ricavare la lunghezza del lato.
La soluzione è data dalla radice quadrata di 20:
lato = √20 [= 2*√5].

[103] <u>Dimensioni di un doppio quadrato</u>

Un *bislongo* è un rettangolo che ha lati lunghi l'uno il doppio dell'altro: AD = 2 * AB.
La sua superficie è 36.



Il rettangolo ABCD è divisibile in due quadrati di uguali dimensioni: ABEF e FECD.
Il problema chiede le lunghezze dei due lati.
La procedura usata è la seguente:

* dividere la proprietà in due parti uguali: sono ABEF e FECD ;
* dividere per 2 la superficie: 36 : 2 = 18, che è l’area di entrambi i quadrati;
* estrarre la radice quadrata di 18: √18 , che è la lunghezza del lato AB;
* moltiplicare √18 per 2:

$$2 \cdot \sqrt{18} = \sqrt{4 \cdot 18} = \sqrt{72}$$

che è la lunghezza del lato AD;

* moltiplicare le lunghezze dei due lati di ABCD:

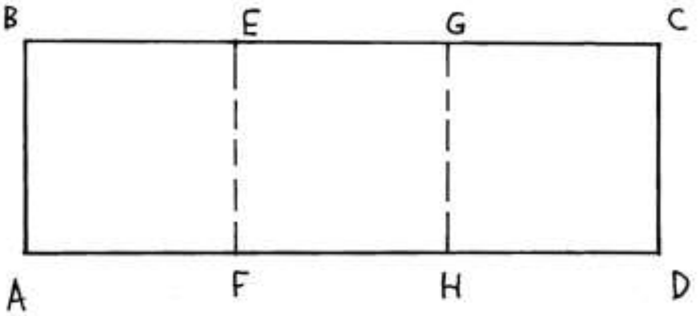
$$\sqrt{18} \cdot \sqrt{72} = \sqrt{18 \cdot 72} = \sqrt{1296} = 36$$

che è l’area nota del rettangolo o *bislungo*.

[104] <u>Rettangolo lungo 3 : 1</u>

Un altro *bislongo*, cioè un altro rettangolo, ha i lati lunghi secondo la proporzione 3 : 1 ed ha area uguale a 40.

Il problema chiede di calcolare la lunghezza dei due lati:



La procedura impiegata è la seguente:

* dividere in *tre* parti uguali il rettangolo: sono creati i quadrati ABEF, FEGH e HGCD ;
* dibidere l’area per 3: 40 : 3 = 13 + 1/3, che è l’area di ciascuno dei tre quadrati;
* estrarre la radice quadrata:

$$\sqrt{13 + \frac{1}{3}}$$

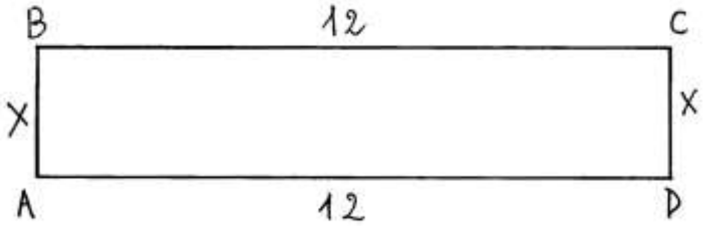
, che è la lunghezza del lato di uno dei tre quadrati e quindi anche di quella di AB;

* moltiplicare per 3:

$$3\cdot\sqrt{13+\frac{1}{3}} = \sqrt{9\cdot\left(13+\frac{1}{3}\right)} = \sqrt{9\cdot\frac{40}{3}} = \sqrt{120}$$, che è la lunghezza del lato maggiore, AD, del rettangolo ABCD.

[105] <u>Lati e area di un rettangolo</u>

Un rettangolo ha i due lati maggiori lunghi 12 e l'area uguale in valore assoluto al perimetro. Il problema domanda di calcolare la lunghezza dei lati corti e l'area.



La procedura impiegata da Orbetano è la seguente:

* dividere per 2 la lunghezza di un lato maggiore: 12 : 2 = 6 ;
* sottrarre 1: 6 – 1 = 5 ;
* dividere il perimetro per 5: 12 : 5 = 2, 4 [2 + 2/5 nella notazione di Orbetano] che è la lunghezza dei due lati più corti;
* sommare le lunghezze di tutti i lati: perimetro = 12 + 12 + 2,4 + 2,4 = 28,8 [28 + 4/5] ;
* moltiplicare le lunghezze di due lati (maggiore e minore): 12 * 2,4 = 28,8 [=28 + 4/5] che è l'area del rettangolo.

La soluzione può essere ricavata usando l'algebra: indichiamo con x la lunghezza incognita del lato più corto, AB.

Il perimetro è dato da:

perimetro = 2 * AD + 2 * AB = 2*12 + 2*x = 24 + 2*x .

L'area è: Area $_{ABCD}$ = AD * AB = 12*x .

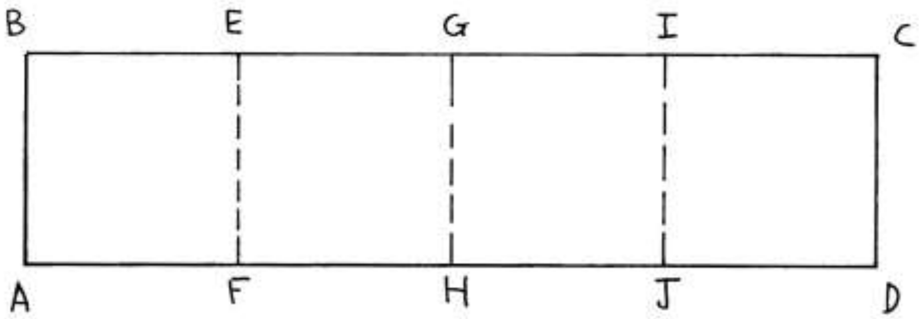
Dato che, in valore assoluto, il perimetro è uguale all'area ne consegue:

24 + 2*x = 12*x da cui 10*x = 24 e x = 24/10 = 2,4 .

La procedura di Orbetano è corretta, anche se egli non ne spiega il secondo passaggio ("sottrarre 1").

[106] <u>Altro problema sui rettangoli</u>

Un rettangolo ha lati lunghi nel rapporto 4 : 1 e area uguale a 60:



La procedura usata contiene i seguenti passi:

* dividere per 4 l'area: 60 : 4 = 15 che è l'area di ciascuno dei quattro quadrati di uguali dimensioni nei quali è scomponibile il rettangolo ABCD;

* estrarre la radice quadrata di 15: $\sqrt{15}$, che è la lunghezza del lato AB;
* moltiplicare per 4:

$$4 \cdot \sqrt{15} = \sqrt{16 \cdot 15} = \sqrt{240}$$

, che è la lunghezza del lato maggiore AD;
* l'area del rettangolo ABCD è:

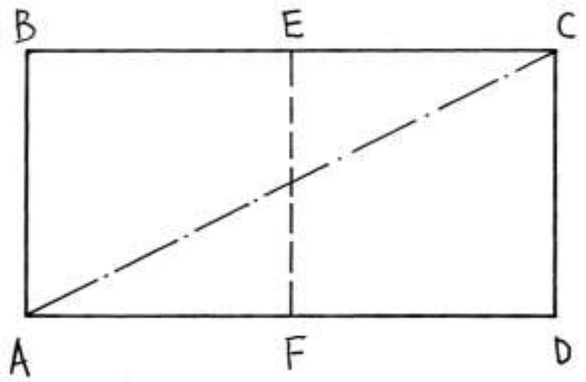
$$Area_{ABCD} = AB \cdot AD = \sqrt{15} \cdot \sqrt{240} = \sqrt{3600} = 60$$

che è l'area nota del rettangolo.

[107] <u>Un rettangolo a bislongo</u>

Un rettangolo ha lati lunghi nel rapporto 2 : 1 e area uguale a 48.

Il problema chiede di calcolare la lunghezza dei due lati e della *diagonale* (che Orbetano chiama *diametro*).



La soluzione richiede la scomposizione del rettangolo in due quadrati di uguali dimensioni, ABEF e FECD.

Ecco i passi della procedura:
* dividere per 2 l'area: 48 : 2 = 24, che è l'area di ciascuno dei due quadrati;
* estrarre la radice quadrata di 24: $\sqrt{24}$, lunghezza del lato minore AB;
* moltiplicare per 2 la lunghezza di AB:

$$2 \cdot \sqrt{24} = \sqrt{4 \cdot 24} = \sqrt{96}$$

, che è la lunghezza del lato maggiore AD;
* moltiplicare $\sqrt{24}$ per se stesso: $\sqrt{24} * \sqrt{24} = 24$;
* moltiplicare $\sqrt{96}$ per se stesso: $\sqrt{96} * \sqrt{96} = 96$;
* sommare gli ultimi due quadrati: 24 + 96 = 120 ;
* estrarre la radi quadrata di 120: $\sqrt{120}$, che è la lunghezza della diagonale AC.

[108] <u>Rettangolo a forma di bislongo</u>

Il problema è inverso a quello precedente: il rettangolo ha le lunghezze dei lati nello stesso rapporto 2 : 1 ed è nota la lunghezza di una diagonale, $\sqrt{120}$.

Come è evidente i dati sono uguali a quelli del precedente problema.

Occorre riferirsi alla figura contenuta nel precedente paragrafo.

Il problema chiede di calcolare le lunghezze dei due lati.

Orbetano impiegò l'algebra per risolvere il problema. Egli chiamò la lunghezza del lato più corto (AB) *cosa* e cioè, in termini moderni, l'incognita x.

L'area di un quadrato (ABEF o FECD) è data da *cosa*^{2} *= 1 censo* e cioè x^2.
[rivedere l'APPROFONDIMENTO inserito nella descrizione del precedente problema [70]]

La lunghezza del lato maggiore, AD, è

AD = 2*cose = 2*x e il suo quadrato è $(2*cose)^2$ = 4 censi = $4*x^2$.

Applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo ACD si ha:

$$AC = \sqrt{CD^2 + AD^2} = \sqrt{x^2 + 4 \cdot x^2} = \sqrt{5 \cdot x^2} =$$

$$= \sqrt{5 \cdot cose^2} = \sqrt{5} \cdot cosa = \sqrt{5} \cdot x$$

Conoscendo la lunghezza di AC è facile ricavare il valore di x:

$$\sqrt{120} = \sqrt{5} \cdot x$$ da cui

$$x = \frac{\sqrt{120}}{\sqrt{5}} = \sqrt{24}$$

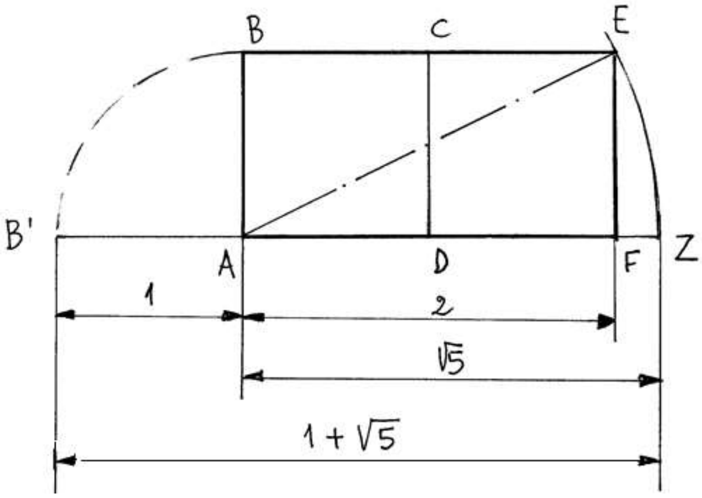
La lunghezza di AD è il doppio di quella di AB e cioè AD = 2*AB = 2*√24 .

\- APPROFONDIMENTO -

La sezione aurea nel bislongo

Nei rettangoli a forma di *bislongo*, con lunghezze dei lati nel rapporto 2 : 1, è facilmente individuabile la presenza della *sezione aurea*.

Tracciare il *doppio quadrato* ABCEFD con lato AB lungo *convenzionalmente* 1. La diagonale AE è lunga √5:



Prolungare verso destra e verso sinistra il segmento AF. Fare centro in A e, con raggio AB, tracciare un arco da B fino a tagliare il prolungamento nel punto B'.

Fare di nuovo centro nel punto A e, con raggio AE, disegnare un arco da E fino a determinare il punto Z.

I segmenti evidenziati nella costruzione hanno le seguenti lunghezze *convenzionali*:

- AB = AB' = 1

- AF = 2
- AE = AZ = $\sqrt{5}$
- B'Z = B'A + AZ = 1 + $\sqrt{5}$ = 2* Φ

Orbetano era consapevole della presenza della sezione aurea?

- -

[109] <u>Divisione di un cerchio</u>

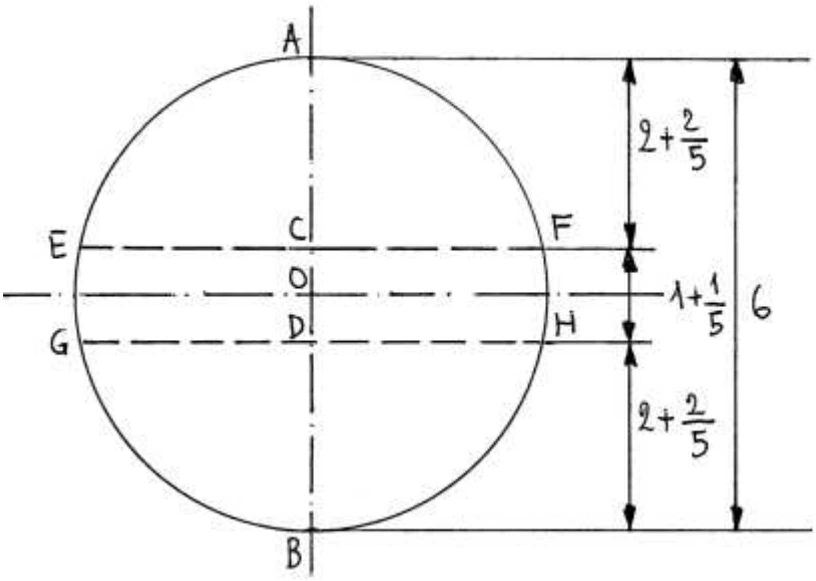
Il problema è di difficile comprensione in mancanza di un disegno esplicativo nel testo pubblicato (e forse assente pure nel manoscritto originale).

Un cerchio ha diametro 6 e deve essere diviso in tre parti uguali.

Per chiarire meglio la situazione viene qui riprodotto da pagina 76 del lavoro della Simi il testo:

"*[109] [I]ll'è uno tondo che lu suo diametro è 6, voglione fare 3 parte oguale. Addimandote que parte serà l'una del dicto diametro. Farai in quisto modo: sempre trova uno numaro che la parte de sopra e quella de socto, ciascheduna delle dicte parte sieno 2 per sè tante per sè che quella de mezo è. Pongote lu semplo che lu dicto numero fosse 60 e la parte de socto fosse 24 e quella de sopre pure 24 e quella de mezo fosse 12; li dicte parte sonno. [u]guale, cioè 24 e 24, farà 48 e 12, che d'ène la parte de mezo, farà 60, adgionte inseme. Quando lu diametro fosse 60, la dicta rascione staria bene, ma tu sai che la quistione dicie che llu diametro fosse 6, mo divi addovagliare le dicte parte in quisto modo e dire: 60 me fa 24, que me farà 6 ? E dire 6 via 24 farà 144, parti per 60, che ne vene 2.2/5 e 2.2/5 per ono serranno la parte da capo e quella da piei e quella de mezo serà 1.1/5. Mo sai che, partito lu dicto tondo in 3 parte, la parte de sopra è 2.2/5 e quella de mezo è 1.1/5 e quella de socto, serà 2.2/5. Ed è facta e così farai tucte simigliante rascioni.*"

La figura che segue tenta un'interpretazione del problema di Orbetano:



Le corde EF e GH dividono il diametro secondo i rapporti indicati nel testo: AC è lungo (2 + 2/5) = 2,4 e lo stesso vale per DB. Il segmento CD è lungo (1 + 1/5) e cioè 1,2 .

È difficile capire come le due corde, EF e GH, possano dividere in tre parti uguali il cerchio.

In realtà, il diametro AD è ripartito in parti che sono multipli di 1/5:

AC = CD = (2 + 2/5) = 12/5 CD = (1 + 1/5) = 6/5 .

Esiste la seguente proporzione:

AC : 2 = CD : 1 = DB : 2 .

[113] <u>Diagonale di un quadrato</u>

Un quadrato ha lato lungo 5. Il problema chiede di calcolare la lunghezza "…*da uno cantone all'altro, per traverso*…) e cioè la diagonale.

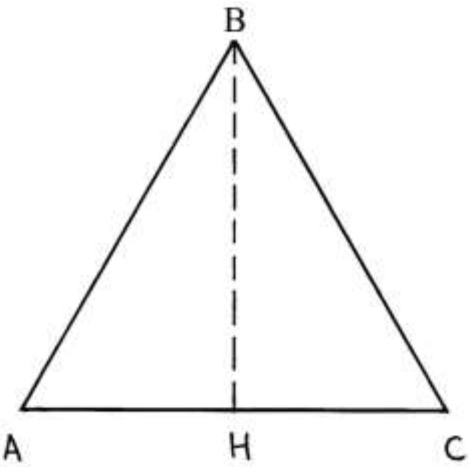
La procedura impiegata è la seguente:

* moltiplicare la lunghezza del lato per se stessa: 5*5 = 25 ;
* ripetere la precedente operazione: 5*5 = 25 ;
* sommare i due prodotti: 25 + 25 = 50 ;
* estrarre la radice quadrata di 50: √50 , che è la lunghezza della diagonale.

[115] <u>Area di uno scudo</u>

Uno *scudo* e cioè un triangolo equilatero ha lati lunghi 10: "… *10 per faccia* …" (Orbetano chiama *faccia* il lato di un poligono).

Il problema domanda l'area.



La procedura impiegata da Orbetano è la seguente:

* moltiplicare le lunghezze di due lati: 10*10 = 100 :
* sottrarre 4: 100 – 4 = 96 ;
* dividere per 2: 96 : 2 = 48 che è l'area del triangolo equilatero.

Per calcolare l'area del triangolo equilatero, Orbetano impiegò la formula

$$\text{Area} = \frac{\text{lato}^2 - 4}{2}$$

Essa è diversa da quella proposta da Erone:

$$A = \frac{13}{30} \cdot lato^2 \cong 0{,}4\overline{33} \cdot lato^2$$

e da quella meno corretta usata dai Gromatici romani:

$$A = \frac{l^2 + l}{2}$$

La tabella che segue riepiloga i risultati forniti dalle tre precedenti formule e da quella corretta (Area = numero fisso F * lato2). Con F = 0,433:

formula	area del triangolo equilatero
Erone	43,(33)
Gromatici romani	55
Orbetano	48
formula corretta, con F = 0,433	43,3

Il risultato ottenuto da Orbetano è errato *per eccesso*: un dubbio rimane riguardo alla fonte della sua formula.

[116] Altro triangolo equilatero

Un altro *scudo* ha lato lungo 7 (di nuovo, Orbetano non indica alcuna unità di misura).
Il problema chiede di calcolare l'area del triangolo equilatero.
La procedura usata è identica a quella del precedente problema:

* moltiplicare la lunghezza di un lato per se stessa: 7*7 = 49 ;
* sottrarre 4: 49 – 4 = 45 ;
* dividere per 2: 45 : 2 = 22,5 che è l'area del triangolo equilatero.

[117] Altezza di un triangolo equilatero

Il problema è basato sul triangolo equilatero del precente paragrafo: è richiesta la lunghezza *de mezo allu scudo* e cioè l'altezza BH.

Senza presentare alcuna dimostrazione, Orbetano stabilisce che l'altezza di un triangolo equilatero con lato lungo 7 è uguale a 6.

Per la precisione, l'altezza è data da:

$$BH = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot lato = \frac{\sqrt{3} \cdot 7}{2} \cong 6{,}062$$

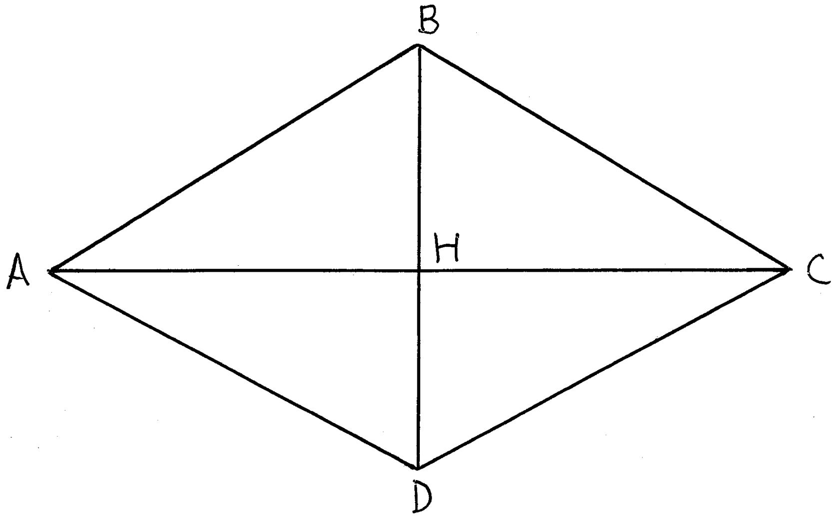
La soluzione approssimata di Orbetano risale a Gerberto: egli suggerì di fissare l'altezza *approssimata* del triangolo equilatero pari a 6/7 della lunghezza del lato.

Il rapporto 6/7 è uguale a 0,857, di poco più piccolo del valore esatto (√3)/2 = 0,866.

Gerberto e Orbetano hanno arrotondato il risultato per difetto all'intero più vicino: l'errore è minimo.

[119] Area di un rombo

Il problema chiede di calcolare l'area di un quadrilatero, che Orbetano chiama *trappero* e cioè *rombo*, come è spiegato nella seconda tavola al principio del trattato e riprodotta all'inizio di questo articolo.



Come vedremo in seguito, il quadrilatero non è esattamente un rombo.

Le dimensioni lineari sono indicate per la prima volta in *mezenge*: questa unità di misura sembra di origine umbra ed era usata a Foligno presso Perugia: era lunga 1/20 della *canna agrimensoria* (a sua volta equivalente a 5 braccia da panno) e valeva *mezzo piede*, da cui probabile origine dell'etimo.

Nel Medioevo e nel Rinascimento Montepulciano intratteneva relazioni con Perugia, con Arezzo, con Siena e con Firenze. Il dialetto di Montepulciano è un vernacolo toscano di transizione chiamato *chianino* e ha subito influenze dal senese, dall'aretino e dal perugino parlato nella zona del Lago Trasimeno.

In dialetto umbro questa unità era chiamata *mezzenga* ed era sia un'unità di misura lineare che di misura di capacità degli aridi, un qualcosa di simile a quanto accadeva al braccio: nei trattati di abaco spesso non erano distinti il braccio (lineare) e il braccio (quadrato, unità di superficie), per cui la distinzione fra le due omonime unità di misura emergeva dal contesto.

L'uso di questa unità di origine umbra può essere spiegato con la presenza per motivi di lavoro di Orbetano in quelle località e questa ipotesi potrebbe essere confermata dalla successione dei problemi che a partire da questo usano la mezenga o mezzenga.

Sembra ragionevole stabilire la seguente relazione:

1 mezzenga = ½ braccio da panno = 1 piede ≈ 29,1813 cm.

Il quadrilatero ha la diagonale maggiore AC lunga 56 mezenge e la diagonale minore BD lunga 32 mezenge.

Come anticipato sopra, la figura non è propriamente un rombo perché la diagonale maggiore AC divide quella minore BD in due parti di diversa lunghezza: BH = 17 e HD = 15 mezenge.

Il quadrilatero è formato da due triangoli isosceli, ABC e ADC, uniti lungo la diagonale AC che è il loro comuna lato più lungo.

Orbetano risolse il problema con la seguente procedura:

* sommare i due segmenti che formano la base minore BD: BH + HD = 17 + 15 = 32 ;

*	dividere per 2:	32 : 2 = 16 mezenge ;
*	moltiplicare per la lunghezza della diagonale maggiore:	16*56 = 896 mezenge^2, che è l'area del quadrilatero.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Verifichiamo la correttezza della procedura e del risultato di Orbetano.

L'area del triangolo isoscele ABC è:

$$\text{Area}_{ABC} = \frac{AC \cdot BH}{2} = \frac{56 \cdot 17}{2} = 476 \text{ mezenghe}^2$$

L'area del triangolo isoscele ADC è:

$$\text{Area}_{ADC} = \frac{AC \cdot HD}{2} = \frac{56 \cdot 15}{2} = 420 \text{ mezenghe}^2$$

L'area di ABCD è data dalla somma delle aree dei due triangoli:

Area $_{ABCD}$ = Area $_{ABC}$ + Area $_{ADC}$ = 476 + 420 = 896 mezenghe^2.

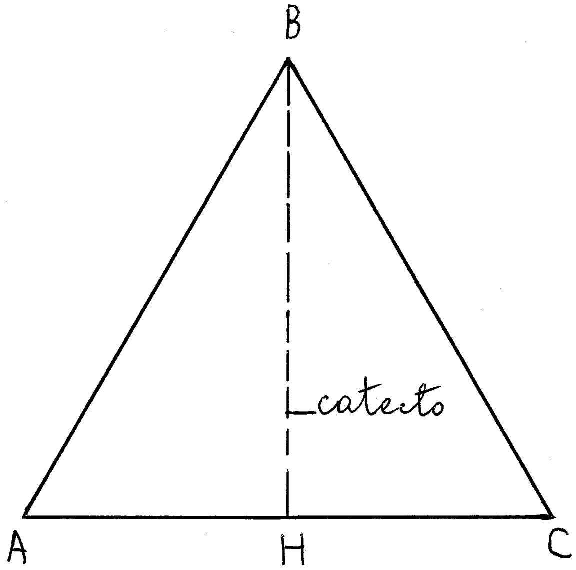
Il calcolo di Orbetano è esatto.

Dato che 1 mezenga^2 = ¼ braccio^2, l'area del quadrilatero è 896 mezenghe^2, equivalenti a 224 braccia^2.

[122]	Altezza di un triangolo equilatero

Un triangolo equilatero ha lati lunghi 10 mezenghe.

Il problema chiede la lunghezza del *catecto* e cioè quella dell'altezza.



La procedura usata da Orbetano è la seguente:

*	moltiplicare la lunghezza di un lato per se stessa:	10*10 = 100 ;
*	moltiplicare per 3/4:	100*3/4 = 75 ;
*	estrarre la radice quadrata di 75:	√75, che in mezenge è la lunghezza dell'altezza BH.

Il metodo è corretto, al contrario di quello applicato per risolvere il precedente problema [117].

[123] Triangolo equilatero data l'altezza

Un triangolo equilatero ha il *catecto* e cioè l'altezza di 10 mezenge.

Il problema chiede di conoscere la lunghezza del lato: esso è l'inverso del precedente, a parte le differenti dimensioni.

La procedura seguita da Orbetano è:

* moltiplicare l'altezza per se stessa: 10*10 = 100 ;
* moltiplicare per 1/3: 100*1/3 = 33 + 1/3 ;
* sommare i due ultimi prodotti: 100 + (33 + 1/3) = 133 + 1/3 ;
* estrarre la radice quadrata:

$$\sqrt{133+\frac{1}{3}}$$

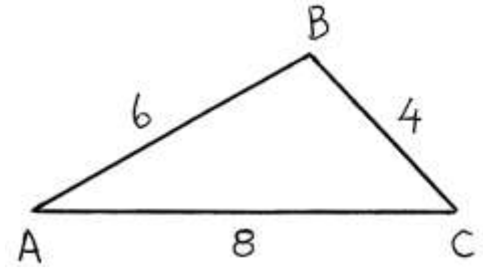
, che è la lunghezza in mezenge del lato del triangolo equilatero.

La soluzione è corretta.

[124] Triangolo scaleno

Un triangolo scaleno ha lati lunghi 8, 6 e 4 mezenge.

Il problema domanda la sua area.



La procedura impiegata è la seguente:

* sommare le lunghezze dei tre lati: 8 + 6 + 4 = 18 che è il perimetro;
* dividere per 2: 18 : 2 = 9 ;
* sottrarre da 9 la lunghezza del lato maggiore: 9 – 8 = 1 ;
* sottrarre da 9 la lunghezza del lato più corto: 9 – 4 = 5 ;
* moltiplicare 9, 1 e 5: 9*1*5 = 45 ;
* sottrarre la lunghezza del lato intermedio da 9: 9 – 6 = 3 ;
* moltiplicare 3 per 45: 3*45 = 135 ;
* estrarre la radice quadrata di 135:

$$\sqrt{135}$$

, che è l'area in mezenga^2.

La soluzione è esatta: Orbetano ha applicato, senza citarla, la formula di Erone per il calcolo dell'area di un triangolo generico.

[125] Area di un triangolo equilatero

Un triangolo equilatero ha area di 10 mezenge^2. Il problema chiede di calcolare la lunghezza dei lati.

La procedura impiegata è la seguente:

* moltiplicare l'area per se stessa: 10*10 = 100 ;
* moltiplicare per (5 + 1/3): 100 * (5 + 1/3) = 533 + 1/3 ;

* estrarre la radice della radice di (533 + 1/3):

$$\sqrt{\sqrt{533+\frac{1}{3}}}$$

, che vale ≈ 4,80 mezenghe.

Il risultato è corretto.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Spieghiamo la probabile origine del coefficiente (5 + 1/3).

La formula corretta per calcolare l'area di un triangolo equilatero con il relativo *numero fisso* F = 0,433 è:

Area = F * lato^2 = 0,433 * lato^2 da cui:

$$lato^2 = \frac{Area}{0{,}433}$$

Il coefficiente (5 + 1/3) usato da Orbetano è ricavabile da

$$\left(\frac{1}{F}\right)^2 = \frac{1}{0{,}433^2} \cong 5+\frac{1}{3}$$

L'origine del numero fisso per il triangolo equilatero, F = 0,433, è così spiegata a partire dal calcolo dell'altezza h in funzione della lunghezza del lato l:

$$h = \sqrt{\ell^2 - \left(\frac{\ell}{2}\right)^2} = \frac{3}{4}\ell^2 = \frac{\ell}{2}\cdot\sqrt{3}$$

L'area è data da

$$Area = \frac{base}{2}\ h = \frac{\ell}{2}\cdot\frac{\ell}{2}\cdot\sqrt{3} =$$

$$= \frac{\ell^2}{4}\cdot\sqrt{3} \cong 0{,}433\cdot\ell^2$$

Il coefficiente (5 + 1/3) è forse il frutto di un'elevazione al quadrato usata da Orbetano per semplificare i calcoli?

[136] <u>Divisione di una ruota in tre parti uguali</u>

Il problema è simile a quello contenuto nella precedente ragione [96], con una differenza: questa volta la pietra da dividere in 3 parti di uguale superficie, fra tre fratelli, ha diametro 5 piedi invece dei 6 piedi del caso precedente.

La procedura impiegata da Orbetano contiene i seguenti passi:

* elevare al quadrato il diametro: $5^2 = 25$;

* moltiplicare per 11: 25*11 = 275 ;

* dividere per 14: 275 : 14 = 19 + 9/14 che è l'area del cerchio in piedi^2 ;

[Questi primi tre passi servono solo a calcolare l'area della pietra circolare da dividere].

* dividere l'area per 3: (19 + 9/14) : 3 = 6 + 23/42, è la superficie in piedi^2 che spetta a ciascuno dei tre fratelli;

* moltiplicare l'ultimo quoziente per 3/11:

$$\left(6+\frac{23}{42}\right)\cdot\frac{3}{11}=\frac{1353}{462};$$

* sommare l'ultimo prodotto all'area di 1/3 del cerchio:

$$\frac{1353}{462}+\left(6+\frac{23}{42}\right)=8+\frac{24}{77}$$

[Il risultato è *errato*: quello corretto è 9 + 10/21].

* estrarre la radice quadrata:

$$\sqrt{8+\frac{24}{77}}$$ è il diametro d_1 della figura allegata al problema [96];

* moltiplicare per 2 il terzo dell'area della ruota: 2*(6 + 23/42) = 13 + 2/21 ;

* moltiplicare per 3/11: (13 + 2/21) * 3/11 = 3 + 4/7 ;

* sommare gli ultimi due numeri: (13 + 2/21) + (3 + 4/7) = 16 + 2/3 ;

* sottrarre

$$\sqrt{16+\frac{2}{3}}-\sqrt{8+\frac{24}{77}}$$, è il diametro interno d_2 della figura citata.

Il corretto valore del diametro d_2 è dato, in piedi, dalla seguente formula:

$$\sqrt{16+\frac{2}{3}}-\sqrt{9+\frac{10}{21}}$$

<u>Bibliografia</u>

1. De Laurentiis Elena, "Il disegno geometrico nei trattati d'abaco del Quattrocento a Firenze", in Atti Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali, Venezia, Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, 1995, n. 153-1, pp. 95-125.
2. Dell'Abbaco Paolo, "Trattato d'Aritmetica", a cura e con introduzione di Gino Arrighi, Pisa, Domus Galilæana, 1964, pp. 160.
3. Martini Angelo, "Manuale di Metrologia: ossia misure, pesi e monete in uso attualmente e anticamente presso tutti i popoli", Torino, Loescher, 1883, pp. VIII-904.
4. Orbetano da Montepulciano, "Regole di geometria pratica" [dal manoscritto Moreni 130 (sec. XV) della Biblioteca Riccardiana di Firenze], a cura e con introduzione di Annalisa Simi, Quaderni del Centro Studi della Matematica Medioevale, n. 19, Siena, 1991, pp. 95.
5. Zupko Ronald Edward, "Italian weights and measures from the Middle Ages to Nineteenth century", Filadelfia, American Philosophical Society", pp. lxxxiv-339.