

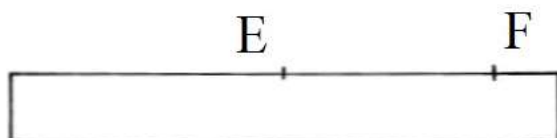
Il materiale contenuto in questo documento può essere riprodotto, in tutto o in parte, a scopi *non commerciali*, purché siano citati l'Autore e la fonte

**Parole chiave:** metodo neusis, Ippocrate di Chio, poligoni costruibili, pentagono, decagono, pentadecagono, OEIS, radici cubiche, trisezione di un angolo, pentagono neusis, ettagono approssimato, Erone di Alessandria, Archimede, ettagono neusis, Crockett Johnson, ennagono neusis, geometria tomahawk, trisezione angolo tomahawk, ettagono tomahawk, ennagono tomahawk, tridecagono tomahawk

### IL METODO “NEUSIS”

Il termine *neusis* viene dal greco e, grosso modo, significa “nella direzione di”.

Il metodo risale agli antichi geometri greci e in particolare a Archimede (287-212 a.C.); richiede l'uso del compasso e di un righello *graduato recante due sole tacche distanziate*, come quello rappresentato nella figura che segue:



I righelli usati dai tecnici e dagli artigiani sono quasi tutti graduati in cm, mm e talvolta in pollici.

Il righello usato con il metodo *neusis* può scorrere e ruotare. Esso era impiegato nei casi nei quali era impossibile usare la riga non graduata e il compasso: la costruzione dell'ettagono, dell'ennagono, del tridecagono, la trisezione di un angolo qualsiasi e la duplicazione del cubo.

Il righello scorre e ruota intorno a un polo posto in corrispondenza di un punto scelto, ad esempio, a sinistra di E.

### ----- APPROFONDIMENTO -----

#### Ippocrate di Chio

Ippocrate di Chio (470-410 a.C.) è stato un importante matematico e astronomo greco.

Si interessò alla geometria e studio due dei problemi classici: la quadratura del cerchio e la duplicazione del cubo.

Le sue ricerche sulla quadratura lo condussero a calcolare l'area delle *lunule*.

Ippocrate sembra essere stato il primo geometra ad usare il metodo *neusis*.

Scrisse un trattato geometrico intitolato *Elementi* che però non è pervenuto.

-----

### I poligoni costruibili

Sono costruibili con riga e compasso i poligoni regolari che hanno numeri di lati dispari e che siano numeri di Fermat (dal nome del matematico francese Pierre de Fermat, 1601-1665):

3, 5, 17, 257, 65537, ...

Un numero di Fermat è dato dalla formula:

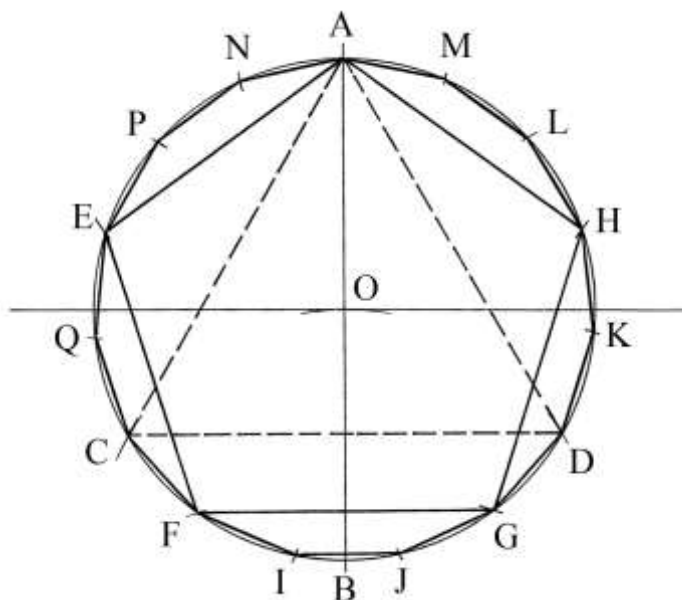
$$F_n = (2^2)^n, \text{ con } n \text{ intero non negativo.}$$

Per le costruzioni geometriche i matematici Greci imponevano soltanto l'uso di una riga non graduata e di un compasso collassabile, che una volta usato non conservava l'apertura impiegata: tutto ciò è l'opposto delle righe graduate e dei balaustrini e dei balastroni che oggi impieghiamo. Come è noto a tutti, questi modelli di compassi conservano l'apertura.

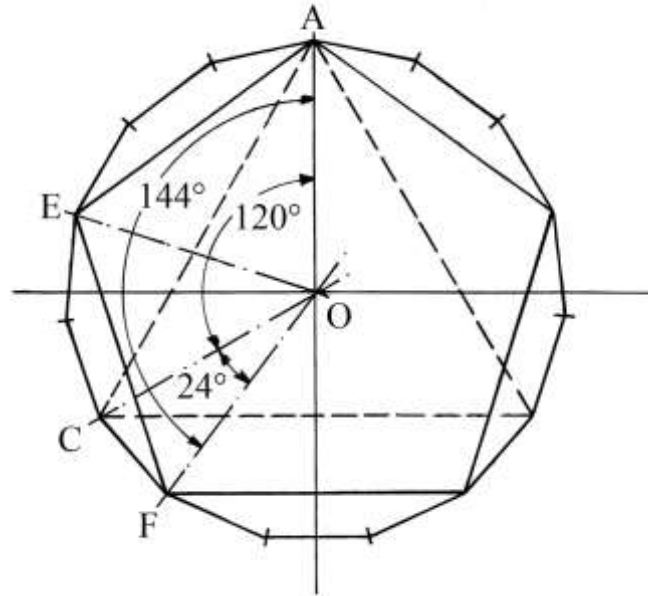
Nei poligoni regolari è facile dividere per *due* gli archi sottesi dai lati per cui da quei poligoni costruibili è possibile ricavare altri poligoni con un numero di lati multiplo di 2, come indicato nella tabella che segue:

Numero lati poligoni	Multipli di 2	Multipli di 4	Multipli di 8	Multipli di 16
3	6	12	24	48
4	8	16	32	64
5	10	20	40	80
17	34	68	136	272

Dato che sono costruibili i poligoni inscritti di 3 (triangolo equilatero) e di 5 lati (pentagono regolare) è pure tracciabile il poligono di 15 lati (pentadecagono) che è disegnabile per via *indiretta*, dopo aver inscritto nello stesso cerchio i due poligoni più semplici, il triangolo ADC e il pentagono AHGFE, con il vincolo di un vertice in comune, che è A:



Due lati consecutivi del pentagono delimitano un angolo di  $144^\circ$ , come è quello AOF:



L'angolo AOC è relativo a un lato del triangolo equilatero ed è ampio  $120^\circ$ .

L'angolo OCF è originato dalla differenza fra gli angoli AOF e AOC:

$$OCF = AOF - AOC = 144^\circ - 120^\circ = 24^\circ.$$

Il pentadecagono ha 15 lati e ciascuno di essi sottende un angolo al centro O di ampiezza uguale a:

$$COF = 360^\circ/15 = 24^\circ.$$

La corda CF è un lato del pentadecagono regolare AMLHKDGIJFCQEPN.

Ne consegue che il pentadecagono inscritto è costruibile per via *indiretta* e lo sono pure i poligoni con numeri di lati multipli pari di 15 e cioè:

$$15 \cdot 2 = 30, 15 \cdot 4 = 60, 15 \cdot 8 = 120 \text{ e così via.}$$

Secondo il documento A122254 della OEIS Foundation sono costruibili con il metodo *neusis* i poligoni con i seguenti numeri di lati:

3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,  
 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19,  
 20, 21, 22, 24, 26, 27, 28,  
 30, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39,  
 40, 42, 44, 45, 48,  
 51, 52, 54, 55, 56, 57,  
 60, 63, 64, 65, 66, 68,  
 70, 72, 73, 74, 76, 77, 78,  
 80, 81, 84, 85, 88,  
 90, 91, 95, 96, 97, 99,  
 102, 104, 105, 108, 109,  
 110, 111, 112, 114, 117, 119,  
 120, 126, 128 ...

Per il documento A048136 OEIS non sono costruibili neanche con il metodo *neusis* i poligoni con i seguenti numeri di lati:

23, 29, 43, 46, 47, 49, 53, 58, 59, 67, 69, 71, 79, 83, 86, 87, 89, 92, 94, 98, 103, 106,  
 107, 113, 115, 116, 118, 121, 127 ...

Per i poligoni con i seguenti numeri di lati è ancora incerta la possibilità che siano costruibili con il metodo *neusis*:

25, 31, 41, 50, 61, 62, 75, 82, 93, 100, 101, 122, 123, 124, 125, ...

Nei paragrafi che seguono sono descritti alcuni casi di impiego del metodo *neusis*.

----- APPROFONDIMENTO -----

Che cosa è OEIS

OEIS è una sigla che sta per *On-Line Encyclopedia of Integer Sequences* (“Enciclopedia in rete delle successioni di [numeri] interi”).

Il suo sito Internet è ad accesso gratuito: <https://oeis.org>.

Il suo creatore è il matematico americano Neil Sloane.

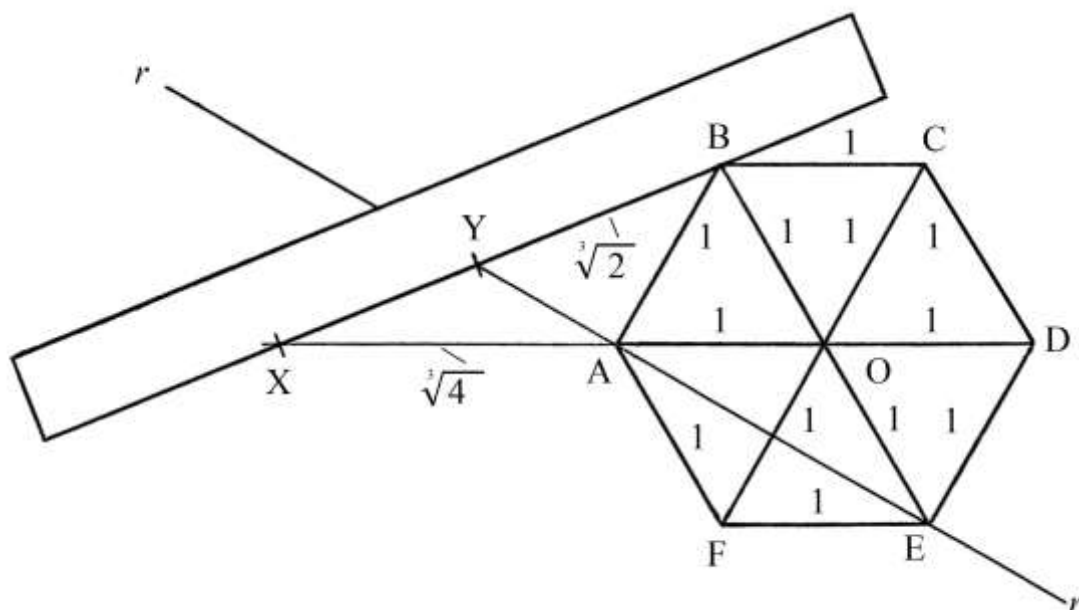
Al 23 giugno 2020 erano disponibili 335221 successioni che crescono al ritmo di circa 10000 l’anno.

Tutti i ricercatori possono contribuire ad accrescere l’Enciclopedia.

-----

Estrazione di radici cubiche

Disegnare un esagono regolare con lati lunghi convenzionalmente *uno*: è ABCDEF, con centro in O (da Conway – Guy):



Dividere il poligono in sei triangoli equilateri. Tracciare una retta passante per i vertici A e E: è *r*.

Su di una riga fissare la lunghezza convenzionale  $XY = 1$ , cioè quanto quella dei lati dell’esagono.

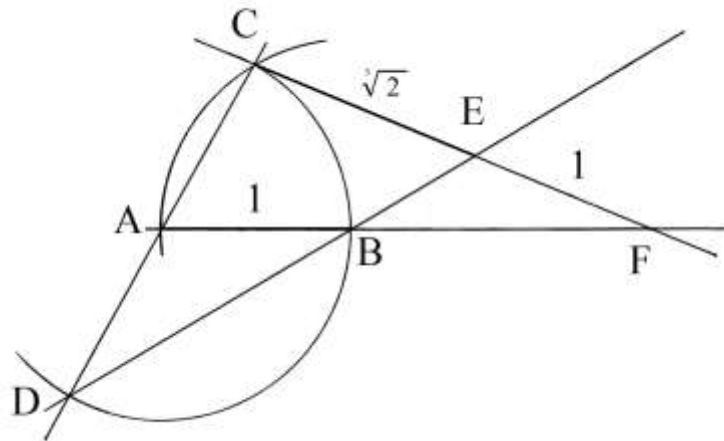
Posizionare la riga sul vertice B e muoverla fino a far sì che il punto Y si trovi sulla retta *r*. La riga deve essere ruotata fino a far coincidere il suo punto X con un punto, X, sul prolungamento di DA.

Il YB è lungo  $\sqrt[3]{2}$  e quello XA vale  $\sqrt[3]{4}$ .

La costruzione serve a ricavare le radici cubiche.  
 La radice cubica di 2 è 1,2599 e la radice cubica di 4 vale 1,5874.

### Radice cubica di 2

La costruzione è seguita è ripresa dal testo di Sutton e applica il metodo *neusis*.



AB è convenzionalmente lungo *uno* e deve essere ricavata la radice cubica di 2, il doppio della lunghezza di AB.

Fare centro in A e in B con raggio AB e disegnare due archi che si incontrano in C. Per questo ultimo punto tracciare il diametro CD.

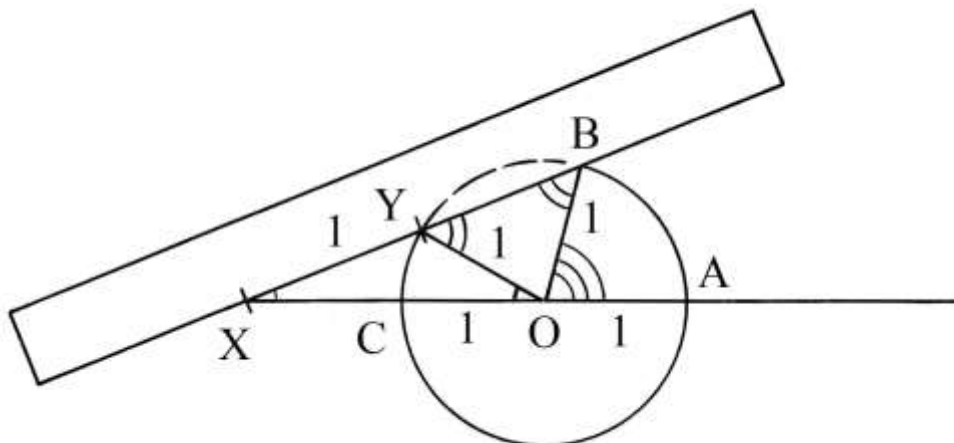
Per D e per B condurre una retta.

Su di una riga riportare la lunghezza di AB e posizionare lo strumento su C in modo da incontrare la retta nel punto E e il prolungamento di AB in F, purché sia rispettata la condizione  $EF = AB = 1$ .

Il segmento CE è lungo  $\sqrt[3]{2}$ .

### Trisezione di un angolo

L'angolo BOA deve essere diviso in tre parti uguali (da Conway – Guy): la costruzione è dovuta a Archimede.



Esso è parte dell'angolo giro di centro O e raggio  $OA=OB$ . Il raggio è convenzionalmente lungo *uno*.

Su di una riga fissare due punti, X e Y, a distanza convenzionale uguale a "1".

Posizionare la riga sul punto B e fare in modo che X tagli il prolungamento di OC e il punto Y si collochi sulla circonferenza.

I triangoli XYO e YOB sono isosceli.

Gli angoli originati dalla costruzione sono:

\*  $YOX = YXO = 1/3 * BOA$ ;

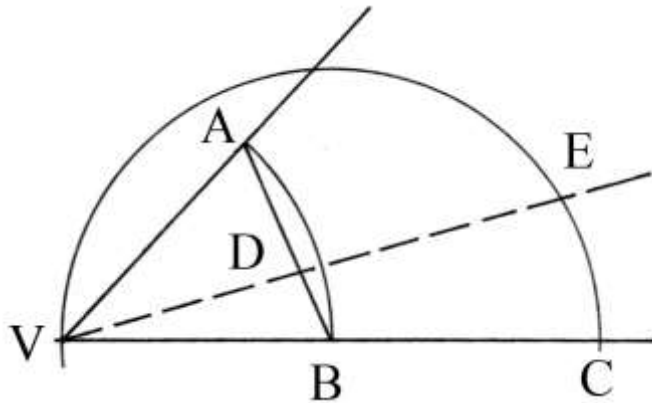
\*  $BYO = YBO = 2/3 * BOA$ .

È stata ottenuta la trisezione di BOA.

### Trisezione dell'angolo

La costruzione è dovuta a Sutton e impiega il metodo *neusis*.

AVB è un angolo che deve essere diviso in modo da ricavare un angolo ampio quanto un terzo del primo.



Con raggio a piacere fare centro in V e tracciare l'arco e la corda AB.

Con centro in B e raggio BV disegnare la semicirconferenza da V a C.

Con una riga disegnare una semiretta, VDE, che taglia AB e la semicirconferenza nei punti D e E: l'unico vincolo da rispettare è che il segmento DE sia lungo quanto VA e VB.

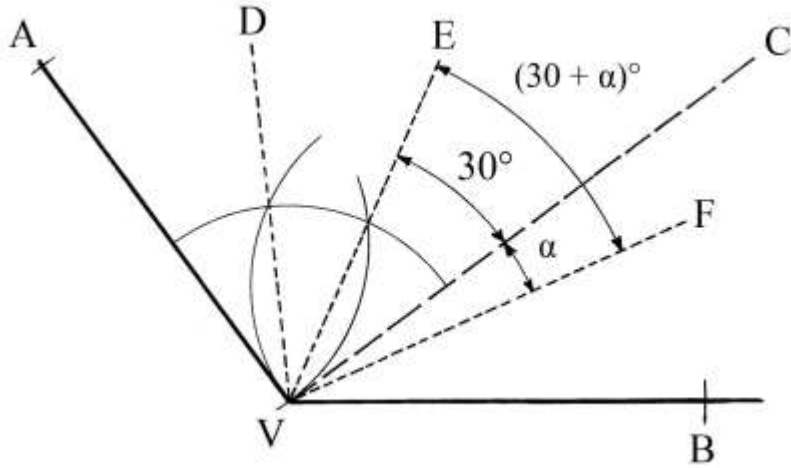
L'angolo DVB è ampio *un terzo* di quello AVB.

### ----- APPROFONDIMENTO -----

#### Trisezione di un angolo ottuso

Per semplicità, tutti gli esempi di trisezione si riferiscono sempre a angoli acuti. Le soluzioni proposte valgono anche per gli angoli ottusi e per quelli di ampiezza maggiore di  $180^\circ$ .

In questi casi è necessario scomporre l'angolo da trisezionare, come nell'esempio che segue:



AVB è un angolo ottuso. Occorre scomporlo in due angoli:

- \* AVC è retto;
- \* CVB è acuto.

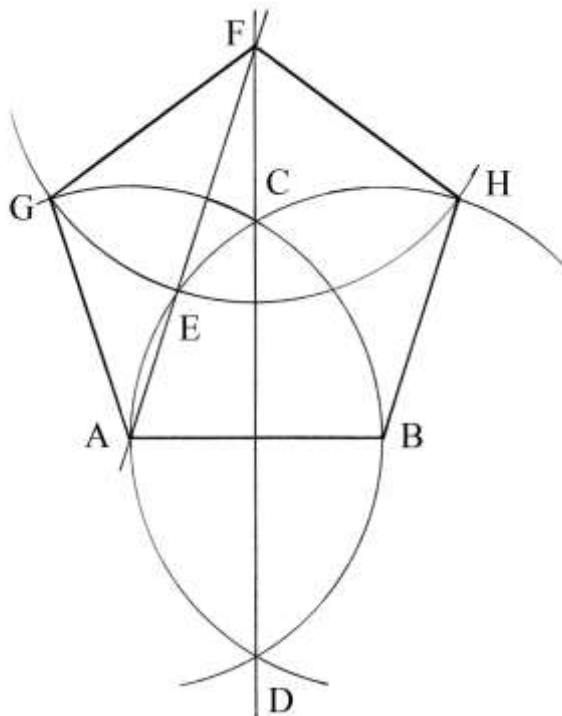
L'angolo retto è scomposto facilmente in tre angoli di uguale ampiezza e pari a  $30^\circ$ .

L'angolo CVF è ampio  $\alpha^\circ$  ed è *un terzo* dell'angolo CVB.

L'angolo EVC è ampio  $(30 + \alpha)^\circ$  e vale *un terzo* dell'ampiezza di AVB.

#### Pentagono con il metodo *neusis*

La costruzione è riprodotta da Richeson e da Sutton ed è dovuta al matematico Pappo di Alessandria (290-350 circa):



AB è il lato orizzontale del pentagono da ricavare.

Con raggio AB fare centro in A e in B e disegnare due archi che si incontrano nei punti C e D.

Tracciare l'asse passante per C e per D.

Su di una riga riportare la lunghezza di AB. Posizionare la riga sul punto A e disegnare una retta che taglia l'asse verticale nel punto F, a condizione che sia verificata l'uguaglianza

$$EF = AB.$$

Fare centro in F e con raggio FE tracciare un arco che incrocia i primi due archi nei punti G e H.

AGFHB è il pentagono costruito con il metodo *neusis*.

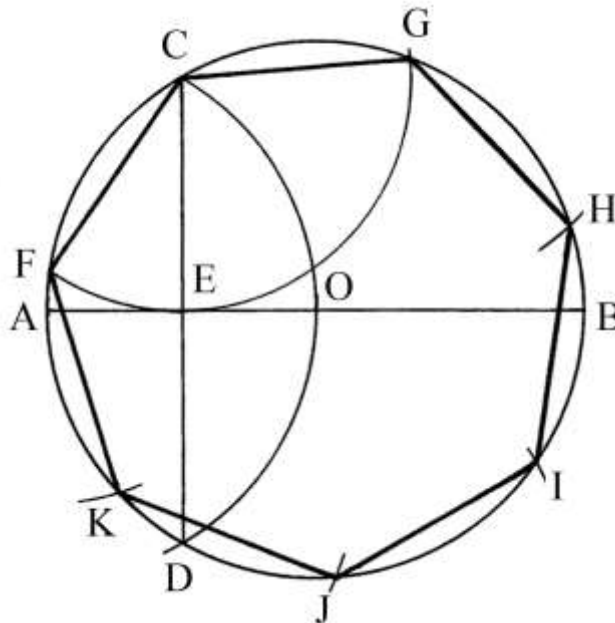
----- APPROFONDIMENTO -----

COSTRUZIONI APPROSSIMATE DI UN ETTAGONO

Costruzione di un ettagono inscritto

L'ettagono è il poligono che ha sette lati. La costruzione che segue è *approssimata*.

Tracciare una circonferenza con centro in O e disegnare il diametro orizzontale AB:



Con centro in A e sempre con raggio OA, tracciare un arco che taglia la circonferenza nei punti C e D. Disegnare il segmento CD: la sua metà, il segmento CE, è la lunghezza approssimata del lato dell'ettagono.

Fare centro nel punto C e, con apertura CE, disegnare l'arco FG.

Riportare sulla circonferenza la lunghezza di CF=CG.

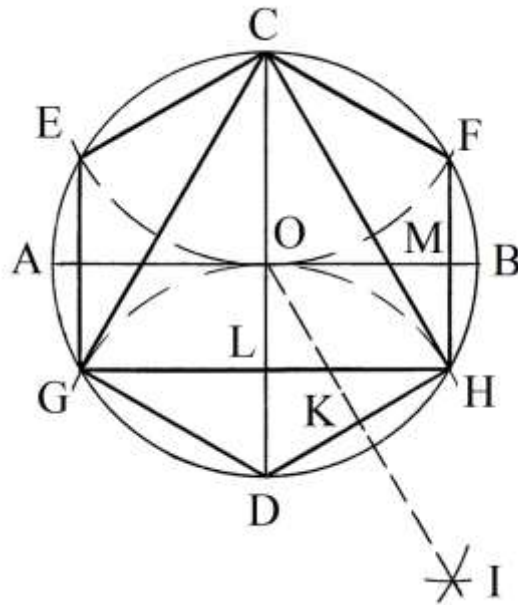
FCGHIJK è l'ettagono inscritto.

Questa costruzione approssimata dell'ettagono inscritto è dovuta al grande matematico e ingegnere Erone di Alessandria, vissuto nel I secolo d.C.

Le due figure che seguono descrivono in dettaglio il metodo usato da Erone.

La prima figura mostra la costruzione del triangolo equilatero (GCH) e dell'esagono regolare GECFHD) inscritti in una circonferenza di centro O e raggio OA:





AB e CD sono due diametri fra loro perpendicolari.

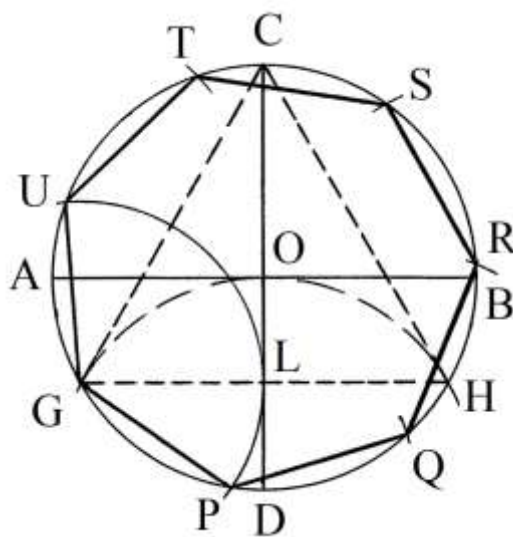
I raggi OF, OG e OH danno vita a due triangoli equilateri: rispettivamente OFH, OGD e OHD. Un esagono regolare può essere scomposto in sei triangoli equilateri uguali.

Costruire la bisettrice dell'angolo DOH: essa passa per il punto esterno I e taglia DH nel punto K.

La lunghezza del segmento OM è chiaramente uguale a quella del segmento LH: entrambi sono le *altezze* di due triangoli equilateri uguali (OFH e ODH). Entrambi sono anche l'*apotema* dell'esagono GECFHD. Inoltre, il segmento LH è la metà del lato del AH del triangolo equilatero GCH.

In conclusione, l'apotema dell'esagono è lungo la metà del lato del triangolo equilatero inscritto nella stessa circonferenza.

Erone usò la precedente figura per costruire l'ettagono approssimato inscritto: il suo lato è, con un'approssimazione di 0,2%, lungo quanto l'apotema dell'esagono:



Fare centro in G e, con raggio GL, tracciare un arco che taglia la circonferenza in P.

Riportando la stessa lunghezza sulla circonferenza, si ottiene l'ettagono approssimato GPQRSTU.

%%%%%%%%%

Una variante della precedente costruzione di Erone è spiegata nella figura che segue.

Il lato  $\ell$  è in relazione alla lunghezza del raggio  $r$ :

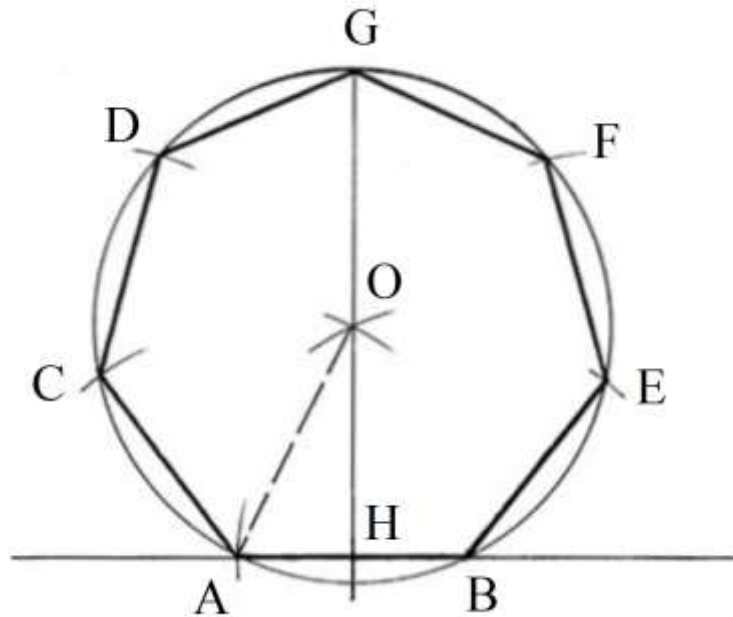
$$\ell = 7/8 * r \approx 1/2 * \sqrt{3} * r$$

La seconda parte della precedente espressione richiama la costruzione di Erone vista sopra.

I termini numerici appena scritti valgono:

$$7/8 = 0,875 \quad \text{e} \quad 1/2 * \sqrt{3} \approx 0,866$$

Il primo (0,875) è leggermente maggiore del secondo ( $\approx 0,866$ ).



Conoscendo la lunghezza del lato  $\ell$ , con le formule inverse delle precedenti calcoliamo i seguenti rapporti:

$$r = 8/7 * \ell \approx 1,1428 * \ell$$

$$r = 2 * \ell / (\sqrt{3}) = (2 * \sqrt{3})/3 * \ell \approx 1,1547 * \ell .$$

Tracciare una retta orizzontale e fissarvi il segmento AB, lungo quanto il lato.

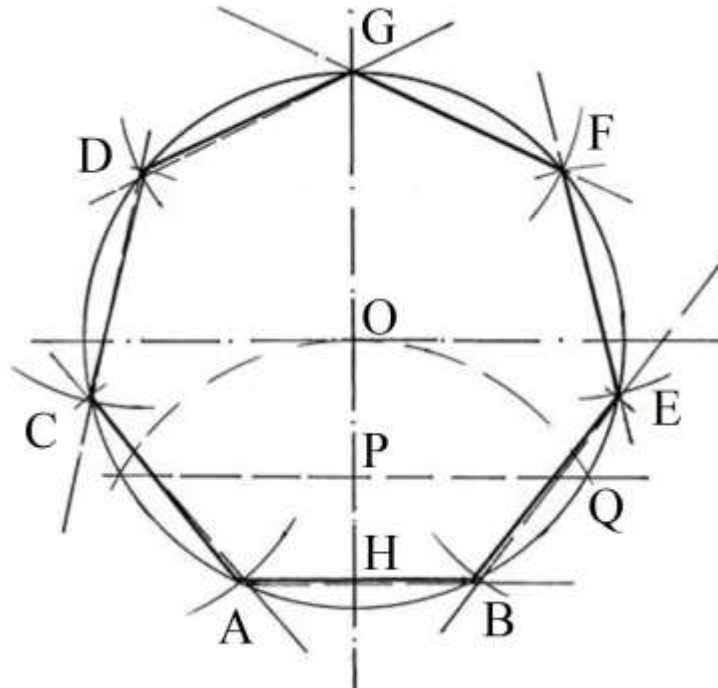
Fare centro nei punti A e B con raggio  $r$  e tracciare due archi che fissano il punto O, centro della circonferenza circoscritta all'ottagono.

Riportare sulla circonferenza la lunghezza del lato AB e fissare i punti C, D, E e F.

Il punto G si trova sull'asse del segmento AB (che è il diametro verticale della circonferenza).

I lati AB, AC, AD, BE e EF hanno la stessa lunghezza. Invece, i lati DG e GF sono leggermente più corti.

La figura che segue mette a confronto le due varianti della costruzione di Erone:



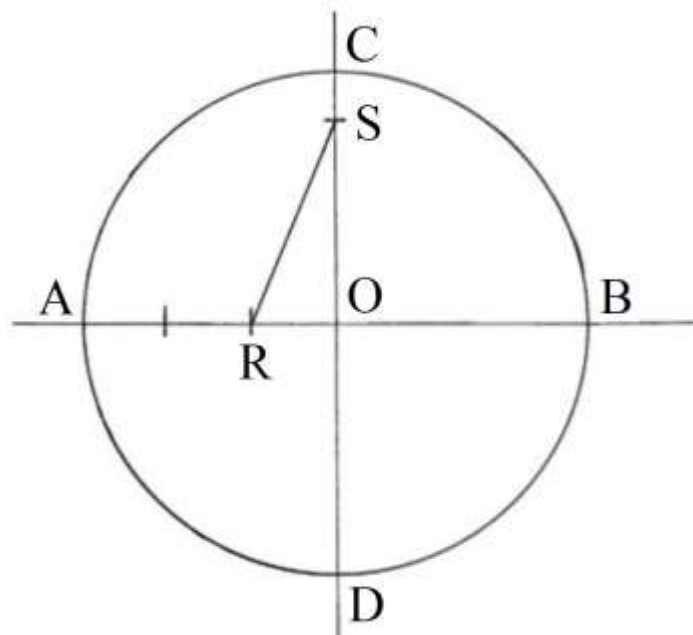
Con segno *continuo* è disegnata l'ultima costruzione (realizzata a partire dal lato AB) e con segno *tratteggiato* le è sovrapposta la prima: la differenza è minima. La costruzione tratteggiata ha lati dell'ettagono lunghi quanto il segmento OP, che è l'*apotema* dell'esagono regolare inscritto nella stessa circonferenza:

$$PQ = OA * (\sqrt{3})/2 = r * (\sqrt{3})/2 .$$

#### Una variante della costruzione dell'ettagono inscritto

Oltre ai due valori approssimati forniti dalle due costanti descritte nel precedente paragrafo, esiste un altro valore approssimato del rapporto fra la lunghezza del lato del poligono e quella del raggio della circonferenza.

Tracciare una circonferenza con centro nel punto O e i diametri perpendicolari AB e CD:



Dividere in *tre* parti uguali il raggio OA e in *cinque* parti uguali OC: fissare i punti R e S tali che le loro distanze da O siano:

$$RO = 1/3 * OA \quad \text{e} \quad OS = 4/5 * OC.$$

Disegnare il segmento RS: esso è l'ipotenusa del triangolo rettangolo RSO.

RS è la lunghezza *approssimata* del lato dell'ottagono da costruire in una circonferenza di raggio OA.

Le formule seguenti spiegano il risultato ( $OA = OC = r$ ):

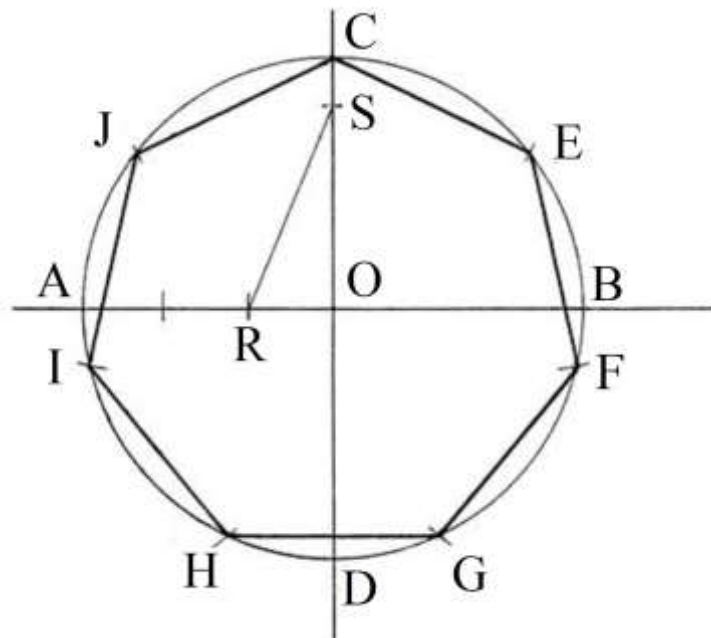
$$\begin{aligned} RS^2 &= RO^2 + OS^2 = (1/3 * OA)^2 + (4/5 * OC)^2 = 1/9 * r^2 + 16/25 * r^2 = \\ &= (25 + 144)/225 * r^2 = 169/225 r^2. \end{aligned}$$

$$RS = \sqrt{(169/225 * r^2)} = 13/15 * r.$$

Il rapporto frazionario contenuto nell'ultimo risultato vale:

$$13/15 \approx 0,866 \text{ e cioè equivale al rapporto } (0,866) \text{ usato da Erone.}$$

La figura che segue contiene l'ottagono costruito secondo il metodo appena descritto:

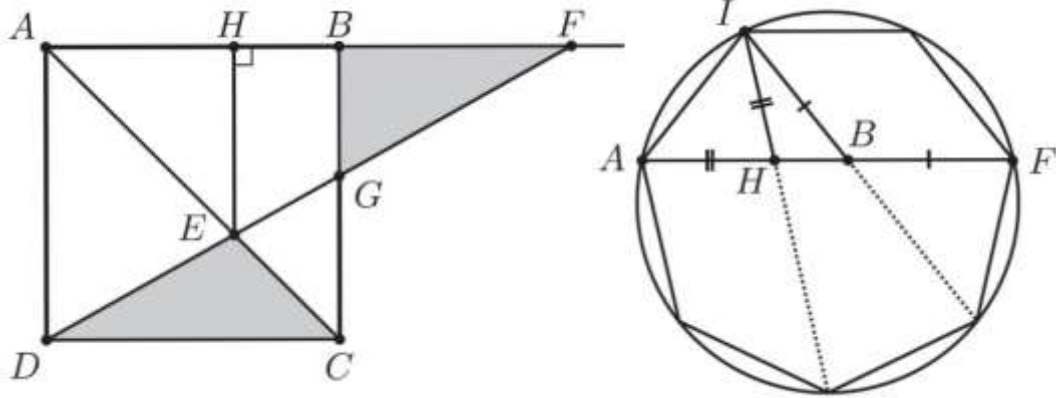


Con questo metodo, l'errore è soltanto dello 0,13%.

---

#### Costruzione dell'ottagono regolare secondo Archimede

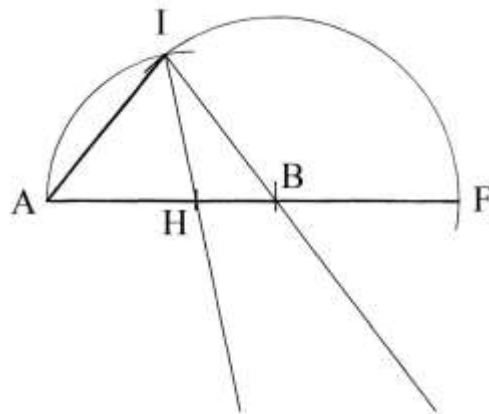
Nel bel libro di David S. Richeson (citato in bibliografia) alle pp. 142-143 è spiegato il metodo usato da Archimede per disegnare l'ottagono regolare a partire dalla lunghezza di un suo lato, AB:



Sul lato AB disegnare il quadrato ABCD e prolungare verso destra AB. Tracciare la diagonale AC.

Con l'impiego delle *coniche* – argomento qui non considerato data la natura puramente divulgativa di questo articolo – disegnare un segmento DF che soddisfi una condizione: esso interseca AC nel punto E e BC in G. Da E innalzare la perpendicolare a AF. Ecco la condizione: l'area del triangolo DEC deve essere *uguale* a quella del triangolo rettangolo BFG.

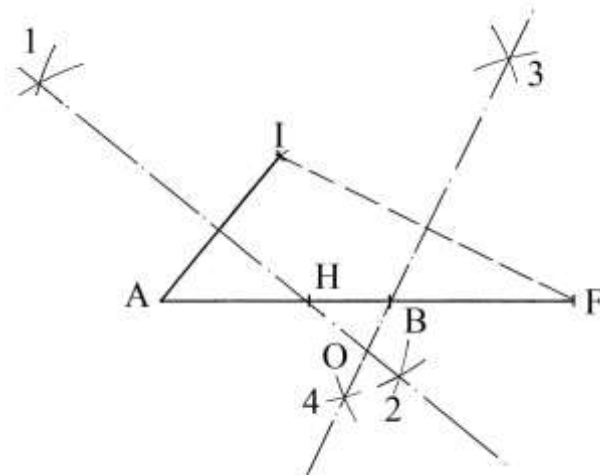
Su di una retta orizzontale riprodurre il segmento AHBF:



Fare centro in H e con raggio HB disegnare un arco a partire da A e con centro in B e raggio BF tracciare un secondo arco che taglia il primo nel punto I. AI è il primo lato dell'ettagono e F ne è un altro vertice.

Occorre determinare la posizione del centro O del cerchio in cui deve essere inscritto il poligono.

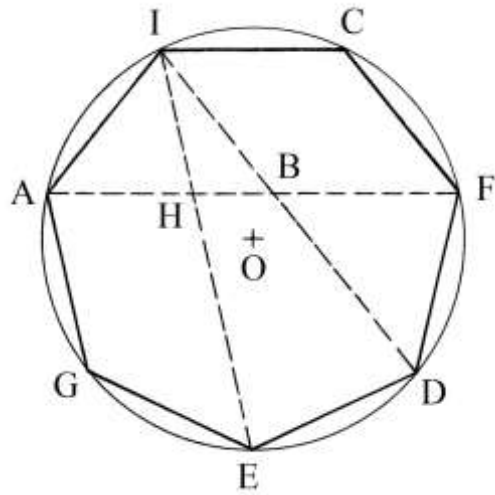
Collegare I con F. Per i punti A, I e F passa una sola circonferenza. Costruire gli assi delle corde AI e IF: essi passano rispettivamente per le coppie di punti 1-2 e 3-4:



Il punto  $O$  è posto nell'intersezione dei due assi.

Fare centro in  $O$  e con raggio  $OA = OI = OF$  disegnare una circonferenza sulla quale va riportata la lunghezza di  $AI$ .

$AICFDEG$  è l'ettagono regolare inscritto.



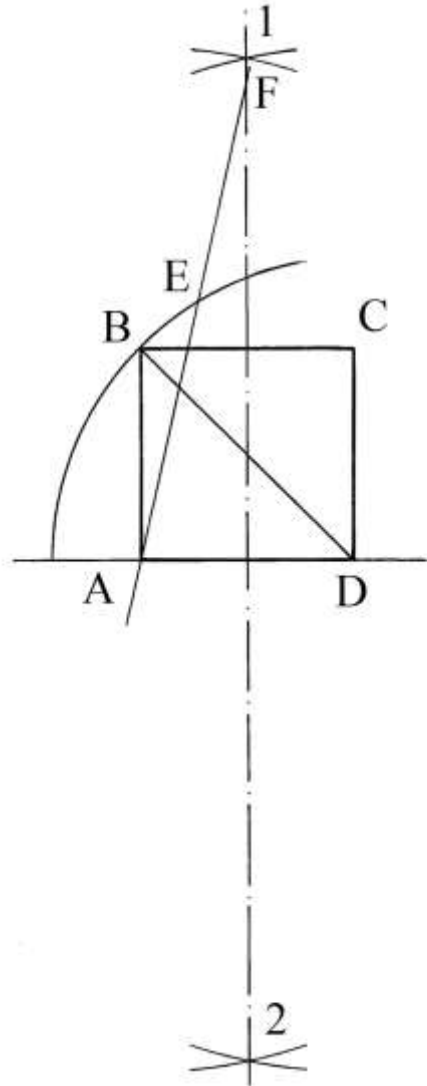
## COSTRUZIONI CON IL METODO *NEUSIS*

### L'ottagono con il metodo *neusis*

Presentiamo una prima costruzione per ricavare l'ottagono regolare a partire dal suo lato, applicando il metodo *neusis*.

Disegnare un quadrato ABCD, con lato AB uguale alla lunghezza del lato dell'ottagono da costruire.

Costruire l'asse del segmento AD che passa per i punti 1 e 2:



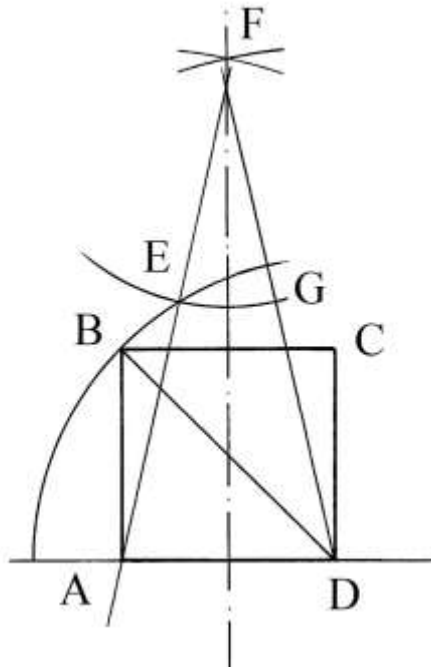
Con centro in D e raggio DB disegnare un arco di circonferenza.

Il segmento DB è la diagonale del quadrato ed è lungo  $\sqrt{2} \cdot AB$ .

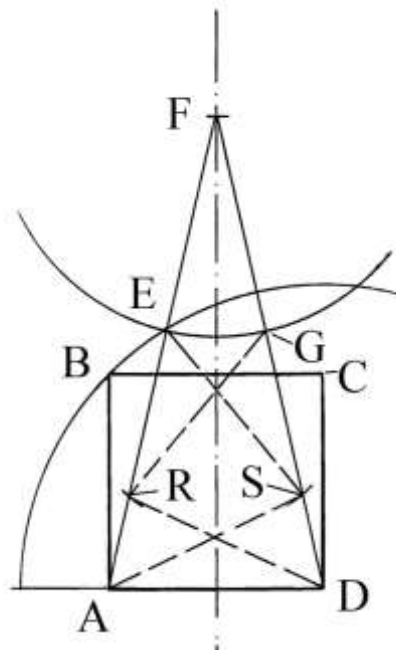
Su di una riga riportare la lunghezza di AB e posizionarla sul punto A fino ad intersecare l'asse del segmento AD.

Con la riga misurare una lunghezza uguale a quella di AB, dall'arco di circonferenza con centro in D, fino ad incontrare l'asse di AD in nuovo punto, F. Sono così fissati i due punti E e F, allineati con A: EF è lungo quanto AB.

Riprodurre la precedente figura e disegnarvi anche il segmento FD:



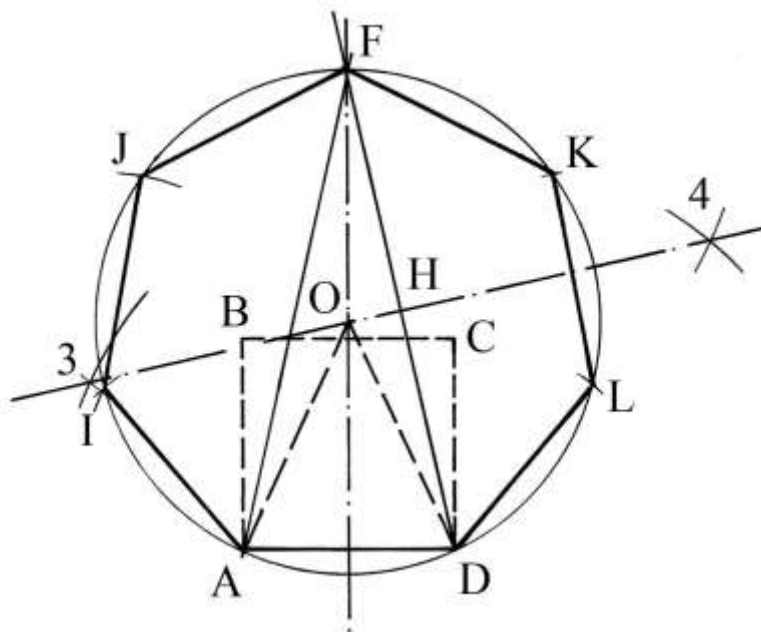
Fare centro in F e con raggio FE tracciare un arco che taglia FD in un nuovo punto, G. La costruzione presenta un'interessante proprietà, mostrata nello schema che segue:



Con apertura uguale a AB fare centro in A, B, E e G: i quattro archi si incontrano nei punti R e S che giacciono sui segmenti FA e FD.

La tracciatura dell'ottagono con il metodo *neusis* è mostrata nella figura che segue:





Costruire l'asse del segmento FD, 3-4, che lo taglia nel nuovo punto H. Questa linea incontra l'asse di simmetria di AD in un punto, O, che è il centro della circonferenza circoscritta all'ottagono da costruire.

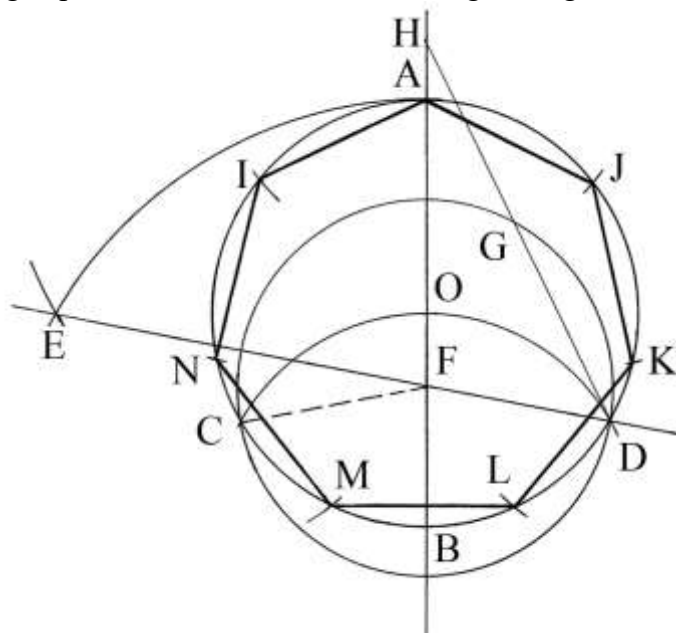
Con raggio  $OF = OA = OD$  disegnare una circonferenza: essa interseca l'asse di FD in un punto, I, che è un vertice dell'ottagono: altri tre vertici sono A, D e F.

A partire da F riportare sulla circonferenza la lunghezza di AD.

AIJFKLD è l'ottagono cercato, costruito con il metodo *neusis*.

#### Ettagono inscritto

Il grafico che segue presenta la costruzione dell'ottagono regolare inscritto.



Tracciare il diametro verticale e fissarvi il centro del cerchio, O.

Con il raggio scelto, OA, disegnare la circonferenza e con lo stesso raggio fare centro in B per tracciare un arco che passa da O e fissa i punti C e D.

Con apertura AB fare centro in A e in B e disegnare due archi che si incontrano nel punto E.

Collegare D con E: la linea retta taglia AB nel nuovo punto F.

Fare centro in F e con raggio  $FC = FD$  tracciare una circonferenza.

Sulla consueta riga riportare la lunghezza di FC e posizionarla sul punto D facendola ruotare intorno ad esso fino a disegnare una retta passante per D, G e H a condizione che sia soddisfatta la condizione

$$HG = FC.$$

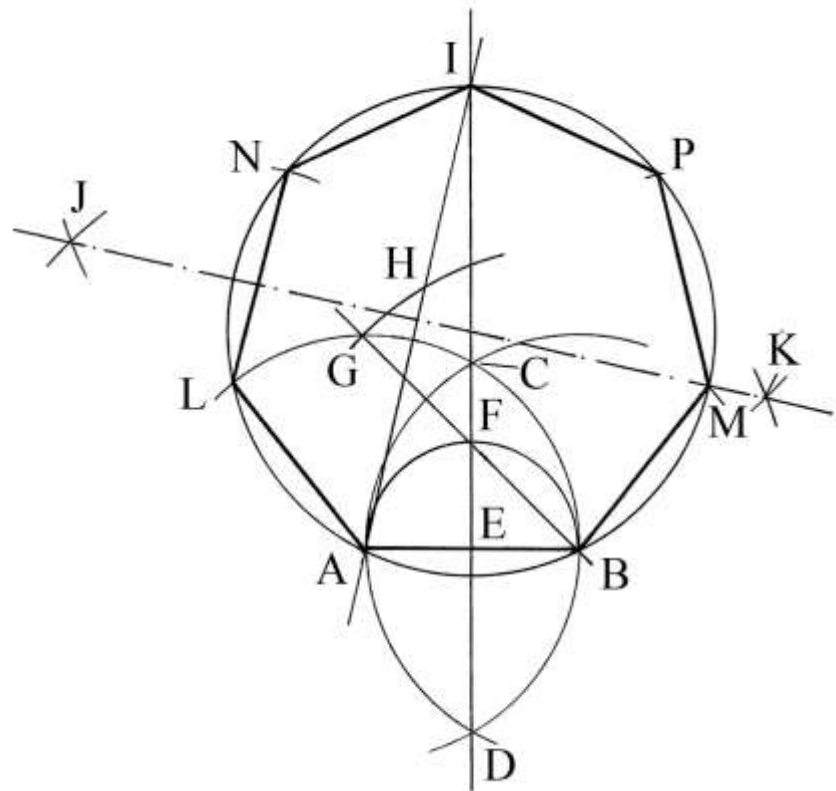
Con raggio OA fare centro in H e tracciare due archi che tagliano la prima circonferenza in I e in J: le corde AI e AJ sono due lati dell'ottagono inscritto.

Riportare la lunghezza di AJ sulla prima circonferenza.

Il poligono AJKLMNI è l'ottagono regolare inscritto con il metodo *neusis*. Anche questa costruzione è ripresa da Sutton.

### Ettagono dato il lato

È data la lunghezza di un lato di un ettagono: è AB.



Anche il metodo qui descritto è rielaborato da Sutton ed è *neusis*.

La costruzione è inversa alla precedente, quella dell'ottagono *inscritto*.

Fare centro in A e in B con raggio AB e tracciare due archi che si incontrano nei punti C e D, per i quali passa l'asse che divide in due AB nel punto E.

Fare centro in E e con raggio  $EA = EB$  disegnare una semicirconferenza che taglia l'asse verticale in F.

Per i punti B e F tracciare una retta che interseca l'arco di centro A in un nuovo punto, G.

Fare centro in B e con raggio BG disegnare un arco che taglia l'asse verticale.

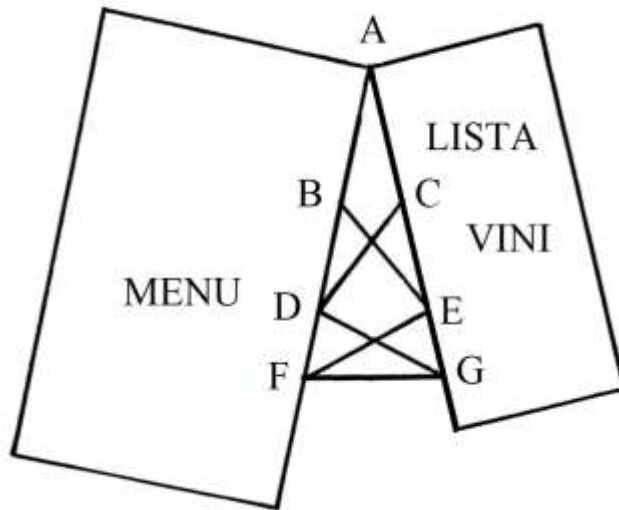


----- APPROFONDIMENTO -----

Il metodo di Crockett Johnson

Il disegnatore americano Crockett Johnson (pseudonimo di David Johnson Leisk, 1906-1975) studiò la costruzione sopra spiegata e la riprodusse in alcuni suoi quadri di stile geometrico.

In vacanza a Siracusa nel 1973, Johnson era seduto al tavolino di un caffè e la sua attenzione cadde su uno strano oggetto: il menu e la carta dei vini erano collegati da stuzzicadenti di uguale lunghezza: AB, AC, BE, CD, DG e EF:

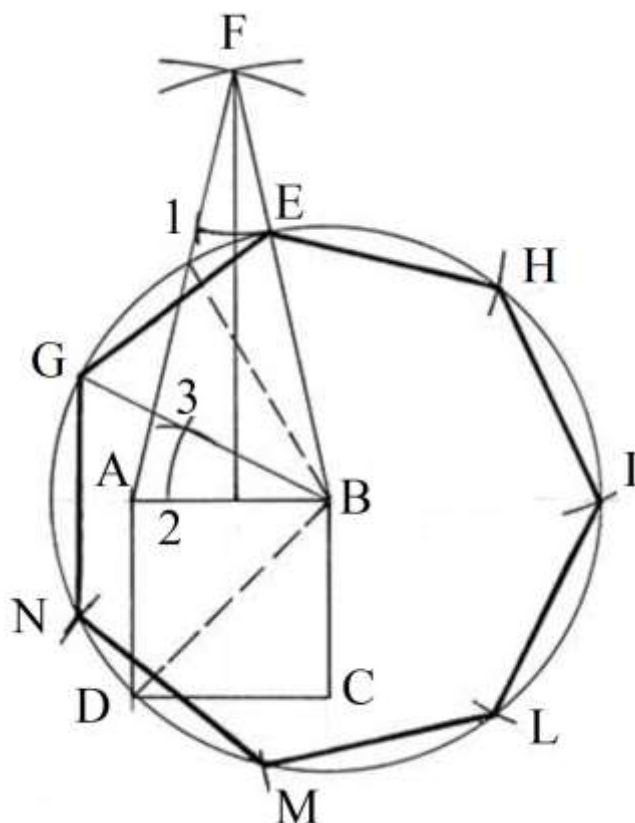


Il proprietario del caffè siciliano aveva, involontariamente, realizzato una struttura geometrica *neusis*.

La figura che segue è la descrizione del metodo usato da Crockett Johnson per costruire l'ettagono regolare.

Il triangolo ABF è lo stesso già usato nelle figure del precedente paragrafo.

Costruire il quadrato di lato AB: è ABCD.



Tracciare la diagonale BD e con centro in B e raggio BD, disegnare una circonferenza. Essa taglia il segmento BF in un punto, E, che è il primo vertice dell'ottagono inscritto.

Occorre riportare l'angolo in F nel punto B: con centro in F e raggio FE, tracciare un arco che taglia AF nel punto 1.

Con la stessa apertura FE, fare centro in B e disegnare un arco che determina il punto 2.

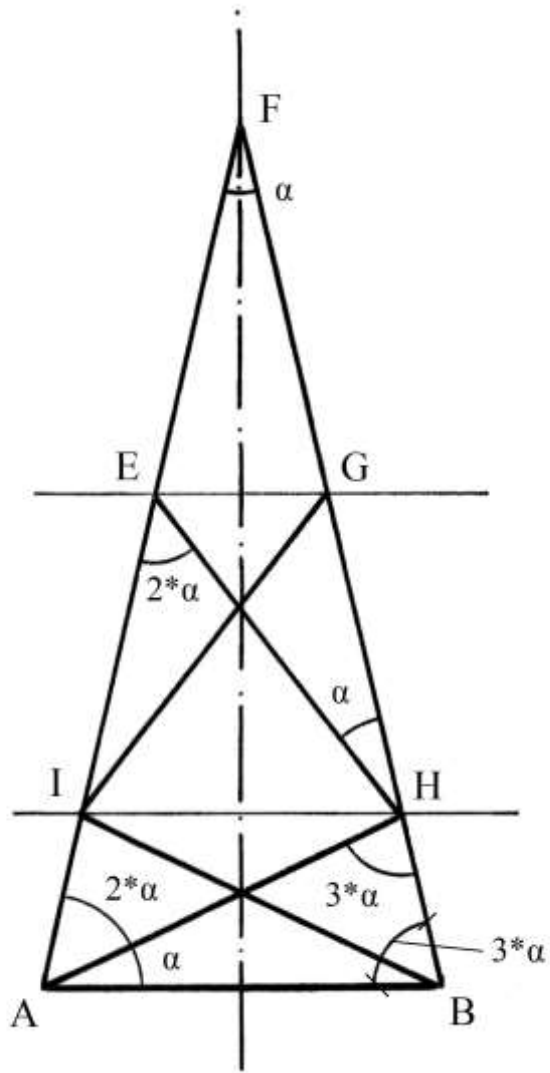
Con il compasso misurare la lunghezza della corda 1-E e riportare la misura facendo centro in 2: si ricava il punto 3.

Per il punto 3 tracciare il raggio: esso intercetta sulla circonferenza il punto G, secondo vertice dell'ottagono. GE è la lunghezza del lato dell'ottagono.

Il poligono GEHILMN è l'ottagono inscritto.

#### Ulteriori applicazioni del metodo neusis

Usiamo di nuovo la costruzione *neusis* dell'ottagono e scriviamo i valori degli angoli:

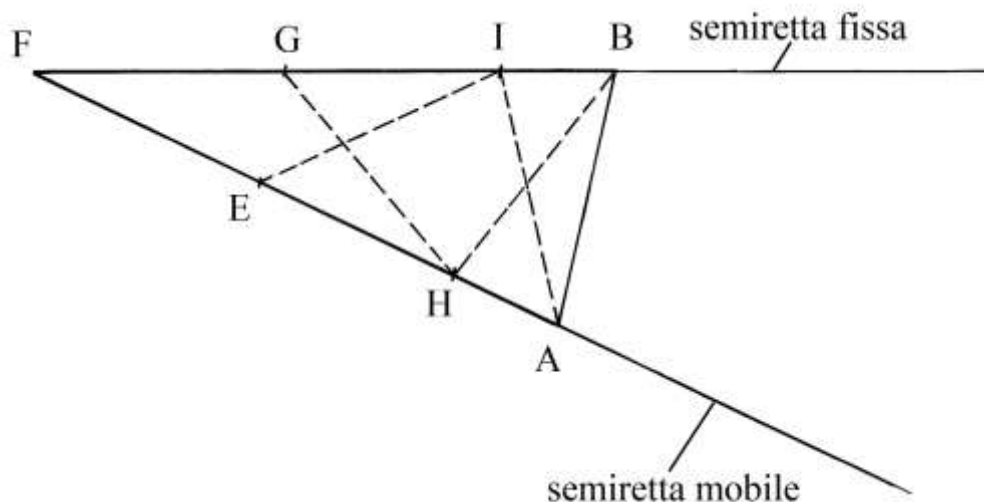


$$\alpha = \pi/7 = 180^\circ/7 \approx 25,71^\circ$$

$$2^* \alpha = 51,43^\circ$$

$$3^* \alpha = 77,14^\circ .$$

La costruzione può essere ruotata fino a disporre orizzontalmente la semiretta uscente da F e passante per B:



La semiretta orizzontale passante per F e per B è *fissa*. La semiretta FA è *mobile* e viene ruotata per far sì che i vertici delle aste siano posizionati sulle due semirette.

I triangoli formati da due segmenti consecutivi sono sempre isosceli perché i segmenti hanno la stessa lunghezza: un triangolo è sempre isoscele se ha due lati uguali (e due angoli di uguale ampiezza).

L'ultima asta – AB nel caso dell'ultima figura – deve essere perpendicolare alla bisettrice dell'angolo in F (BFA), così che il triangolo BFA che essa determina sia *isoscele*.

I quattro segmenti FE, EH, HI e AB hanno la stessa lunghezza e possono essere rappresentati come quattro aste articolate di un metro usati dai falegnami e dai muratori, come il modello in commercio:



I vertici di tutte le aste sono posti sulle due semirette uscenti dallo stesso vertice F e la prima asta è poggiata sulla semiretta fissa.

La semiretta mobile ruota intorno all'origine F.

Per semplificare la comprensione del metodo usiamo la rappresentazione offerta dalla figura che segue:

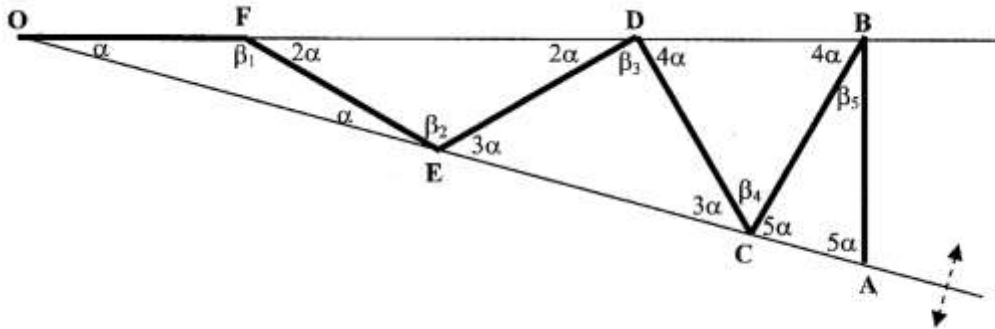




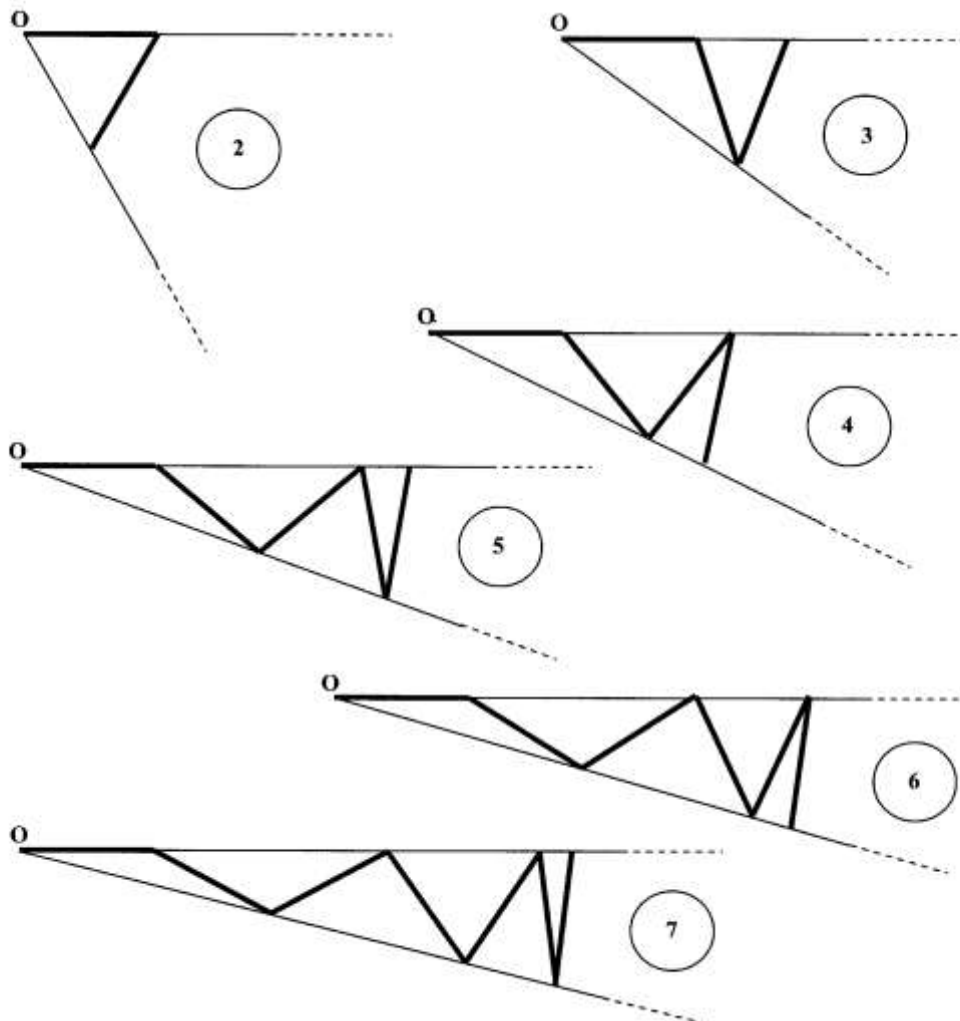
### Altre applicazioni del metodo neusis

Le due figure che seguono sono tratte da un bel saggio di Erman Di Rienzo, citato in bibliografia.

La figura seguente mostra sei aste articolate e gli angoli che formano i lati dei diversi triangoli isosceli che esse formano:



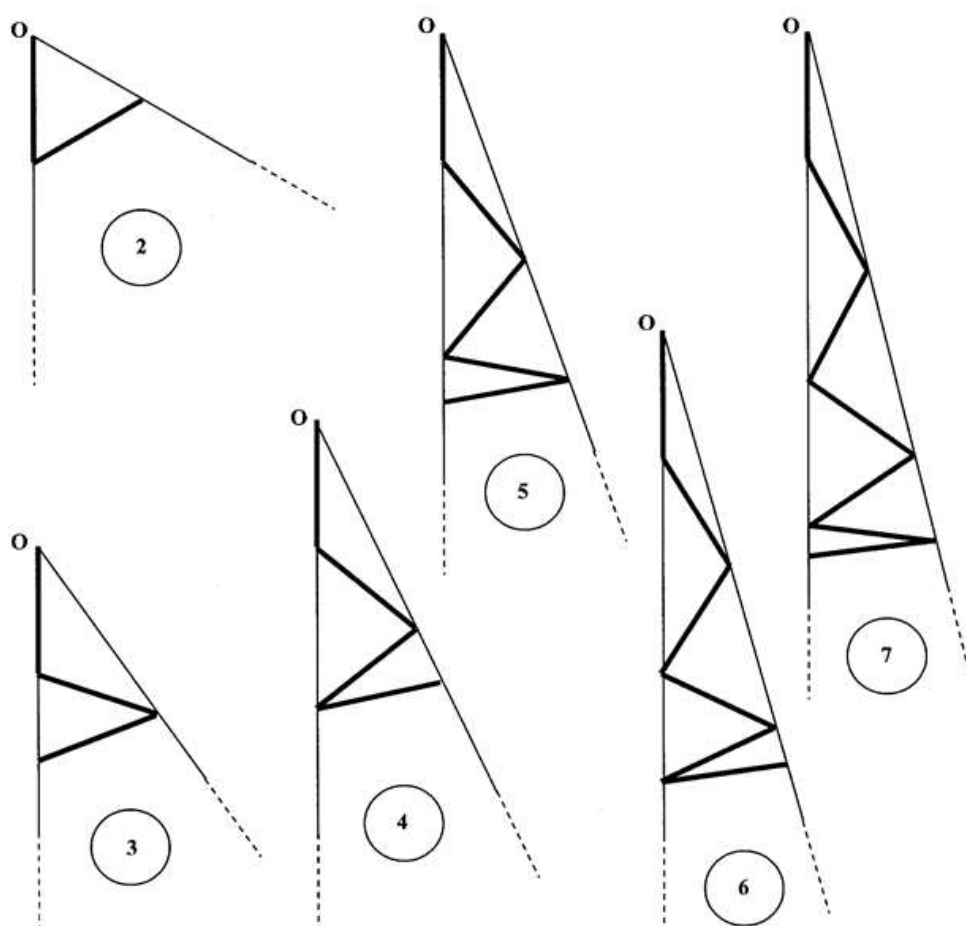
Con questo metodo può essere realizzata la costruzione di poligoni regolari con un ampio ventaglio di numeri di lati. La figura che segue descrive i casi con differenti numeri di aste, da 2 a 7:



La tabella riassume le relazioni fra il numero delle aste usate e i poligoni costruibili:

Numero aste	Numero lati poligoni costruibili
2	3 e 6
3	5 e 10
4	7 e 14
5	9 e 18
6	11 e 22
7	13 e 26
8	15 e 30
9	17 e 34
10	19 e 38

Per meglio comprendere la natura del metodo grafico, la precedente figura è ruotata come spiega il disegno che segue:



## LA GEOMETRIA CON IL TOMAHAWK

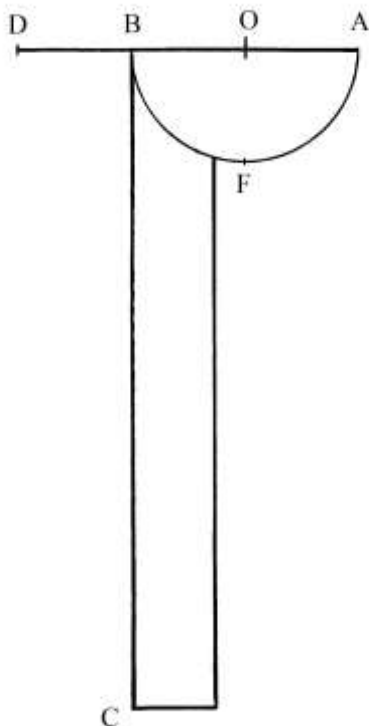
*Tomahawk* è il nome di un'ascia da guerra usata dai Nativi americani. In realtà quell'arma era un'accetta, perché la lama era perpendicolare al manico: un'ascia ha la lama parallela al manico.

Tomahawk è una parola inglese e proviene dalla lingua degli Algonchini della Virginia, negli Stati Uniti: deriva dai termini *tamahak*, *tamahakan* e *otomahuk*, con il significato di 'abbattere'.

Il tomahawk è uno strumento usato in geometria per ricavare alcune costruzioni fra le quali la trisezione di un angolo qualsiasi e la tracciatura di alcuni poligoni inscritti, non disegnabili con riga e compasso.

È tuttora ignota l'origine dell'uso del tomahawk: la sua apparizione risale a testi pubblicati in Europa nell'Ottocento, intorno al 1835.

Con ogni probabilità, la prima attestazione del trisettole è contenuta nell'articolo di Pierre-Joseph Glotin, risalente al 1861. Glotin descrisse il trisettole con lo schema che è riprodotto nella figura:

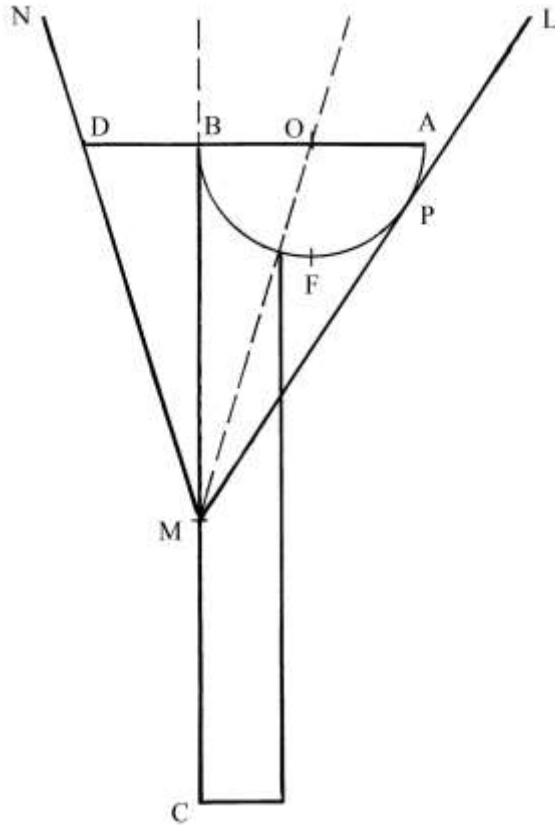


Esso era formato da un semicerchio di centro O e raggio OA e da due aste: BD era il prolungamento del diametro BA e lungo quanto il raggio OA.

Il punto F, giacente sulla semicirconferenza, corrispondeva al punto O.

Dal punto B si dipartiva l'impugnatura o manubrio con i lati perpendicolari a AD.

Lo schema che segue mostra l'uso di questo trisettole:



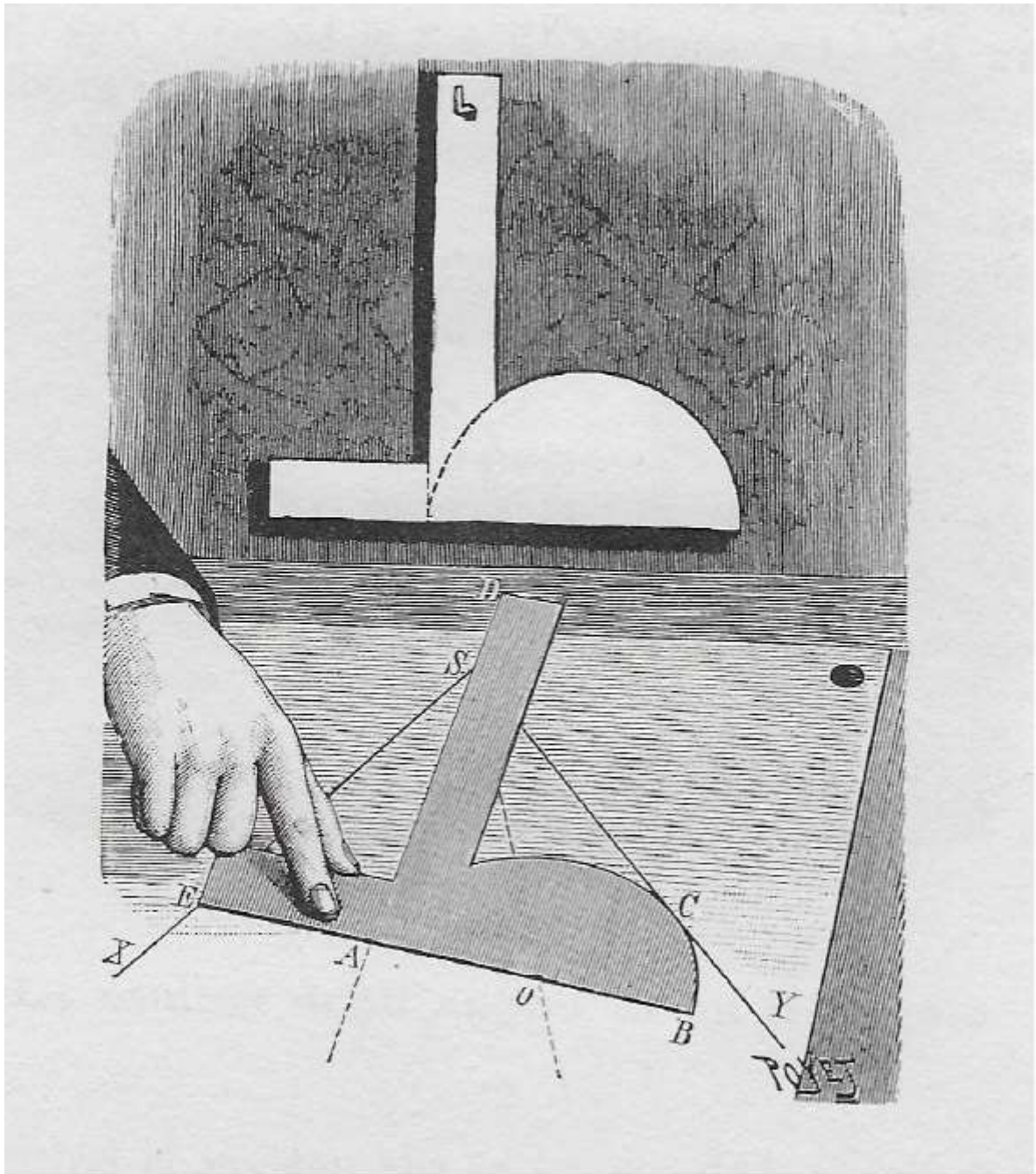
È dato l'angolo NML che deve essere tripartito. Lo strumento è posizionato in modo che il vertice M sia sullo spigolo BC del manubrio, il lato MN passi per D e il lato ML sia tangente al semicerchio in un punto, P.

L'angolo NML è diviso in tre angoli uguali:

$$NMB = BMO = OMP.$$

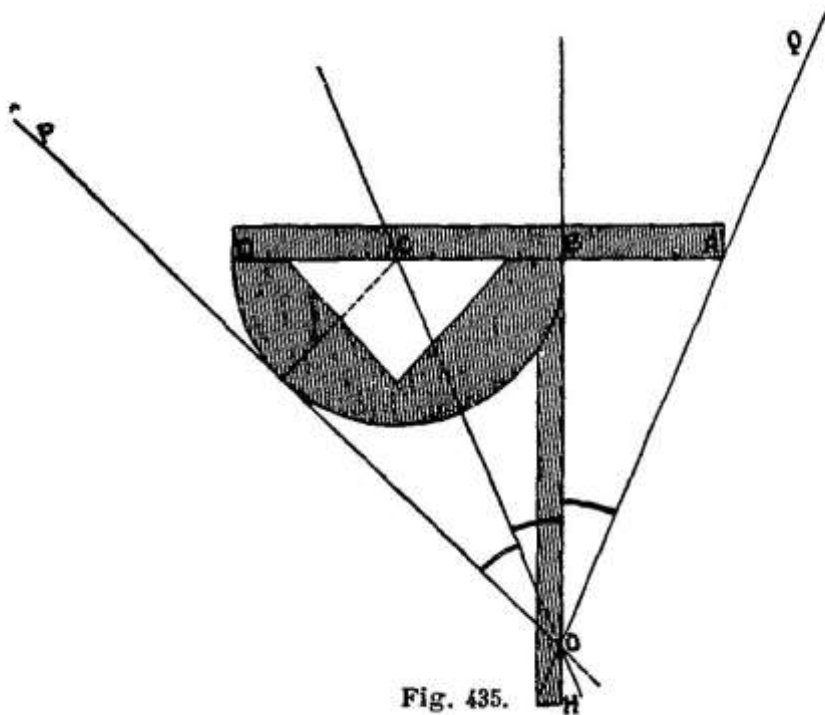
Arthur Good (1853-1928) è stato un ingegnere francese che si è occupato di divulgazione scientifica su alcuni periodici e ha pubblicato diversi libri su "La Science amusante", le cui prime edizioni sono apparse fra il 1890 e il 1894. Essi hanno avuto un notevole successo e sono stati tradotti in varie lingue, italiano e inglese compresi. L'Autore ha usato lo pseudonimo "Tom Tit".

Nei suoi libri ha descritto l'uso del *trisettore*. Lo schema che segue è riprodotto dalla p. 302 della traduzione italiana, *La Scienza dilettevole*, pubblicata nel 1892:

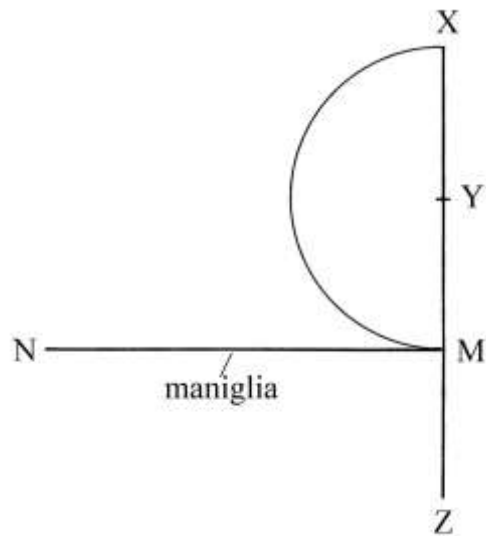


L'angolo da trisecare è XSY.

Sono pochissime le pubblicazioni in italiano che contengono riferimenti a questo strumento: l'articolo di Alberto Conti, pubblicato nel 1900 e un articolo del matematico gesuita Bellino Carrara (entrambi citati in bibliografia) che si riferiscono allo strumento di Arthur Good e il leggendario libro di Italo Ghersi, "Matematica dilettevole e curiosa", pubblicato per la prima volta nel 1913 dall'editore Hoepli e tuttora disponibile: l'ultima edizione è del 1988 ed è stato ristampato nel 2004. La figura che segue è la riproduzione dello strumento contenuta a pagina 486 della ristampa di questo testo.



Lo strumento è formato da un semicerchio di centro Y e raggio YX:



Il diametro XM è prolungato di una lunghezza MN uguale a quella del raggio YM.  
Dal vertice M si diparte una seconda asta perpendicolare a XZ: è MN, chiamata *maniglia*.

Sembra ragionevole avanzare un'ipotesi: questo trisettole è stato creato in Francia nel corso dell'Ottocento e il suo uso si è diffuso negli Stati Uniti nel Novecento: i geometri americani devono avergli attribuito il nome di *tomahawk* per la sua evidente somiglianza con lo strumento usato dai Nativi americani.

Cundy e Rollett assimilano il tomahawk a una *riga a T* (p. 230).

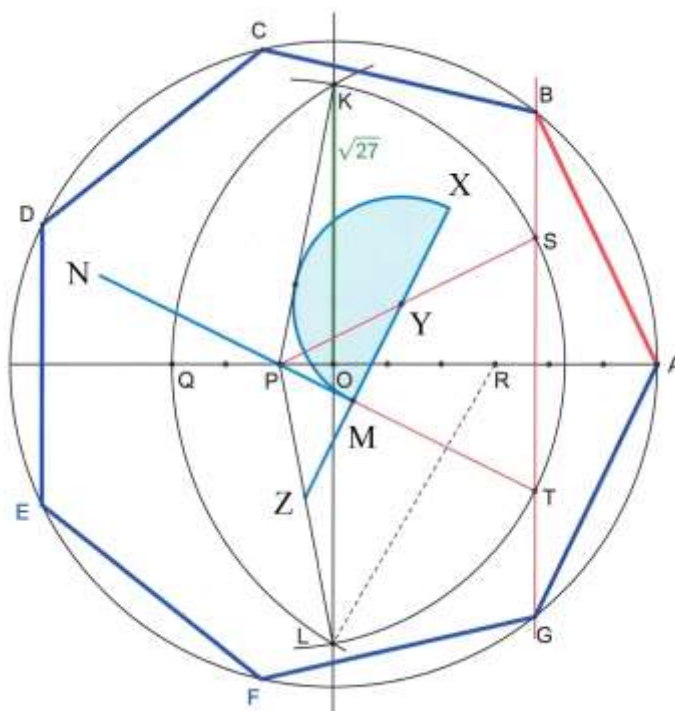
Il documento A048135 della *OEIS Foundation* contiene informazioni sui poligoni costruibili con il tomahawk: ecco i numeri dei lati dei primi poligoni:

3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,  
 10, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19,  
 20, 21, 24, 26, 27, 28,  
 30, 32, 34, 35, 36, 37, 38, 39,  
 40, 42, 45, 48,  
 51, 52, 54, 56, 57,  
 60, 63, 64, 65, 68,  
 70, 72, 73, 74, 76, 78,  
 80, 81, 84, 85,  
 90, 91, 95, 96, 97,  
 102, 104, 105, 108, 109,  
 111, 112.

Ovviamente, i poligoni con numeri di lati uguali a 3, 4, 5 e 17 e loro multipli pari sono costruiti preferibilmente con riga e compasso.

#### La costruzione dell'ettagono

Lo schema che segue, riprodotto da Wikipedia e qui rielaborato, presenta la costruzione di un ettagono inscritto in un cerchio di centro O:



Eccone la spiegazione. Disegnare una circonferenza di centro O e raggio OA lungo convenzionalmente *sei* e i due diametri perpendicolari che si intersecano in O.

Dividere OA in *sei* parti uguali, tutte di lunghezza convenzionale uguale a *uno* e fissare il suo punto medio: è R.

A sinistra di O, sul diametro orizzontale fissare altre tre divisioni di lunghezza uguale a 1/6 di quella di OA: fra gli altri sono individuati i punti P e Q.

Fare centro in R e con raggio RQ (uguale alla lunghezza di OA) tracciare un arco che taglia il diametro verticale nei punti K e L.

Disegnare i segmenti PK e PL. Fare centro in P e con raggio PK disegnare un arco da K a L. Il segmento OK è lungo  $\sqrt{27}$ . Spieghiamo l'origine di questo dato. La lunghezza convenzionale di OA è 6 e lo è pure quella di QR. QKR è un triangolo equilatero, peraltro non disegnato nella figura.

L'altezza del triangolo equilatero QKR, KO, è lunga:

$$KO = (\sqrt{3})/2 * QR = \sqrt{3}/2 * 6 = 3 * \sqrt{3} = \sqrt{9 * 3} = \sqrt{27}.$$

Posizionare il tomahawk sullo schema: il semicerchio deve risultare tangente al segmento PK, l'asta MN deve passare per il centro O e il punto Z deve collocarsi su PL.

Sul punto P deve essere posizionata la maniglia MN.

Per i punti P e Y passa una linea che interseca il secondo arco nel punto S e il prolungamento di PY in un punto sullo stesso arco, che è S.

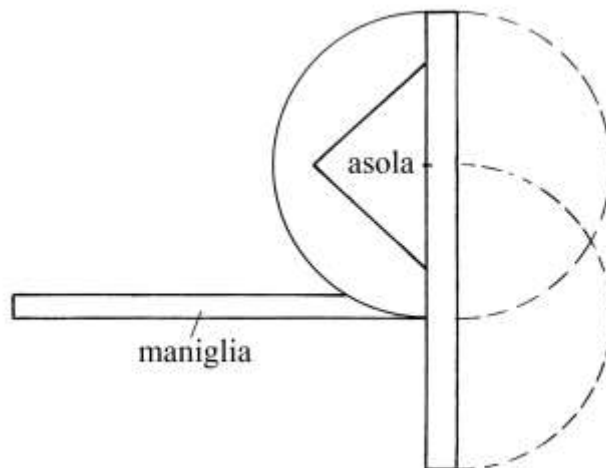
PST deve essere un *triangolo isoscele*, con PA che è una sua mediana: il tomahawk deve essere opportunamente posizionato per tentativi.

Per i punti S e T tracciare una corda che taglia la circonferenza nei punti B e G che risultano essere due vertici dell'ottagono.

Riportare la lunghezza di AB o di AG sulla circonferenza: ABCDEFG è l'ottagono inscritto.

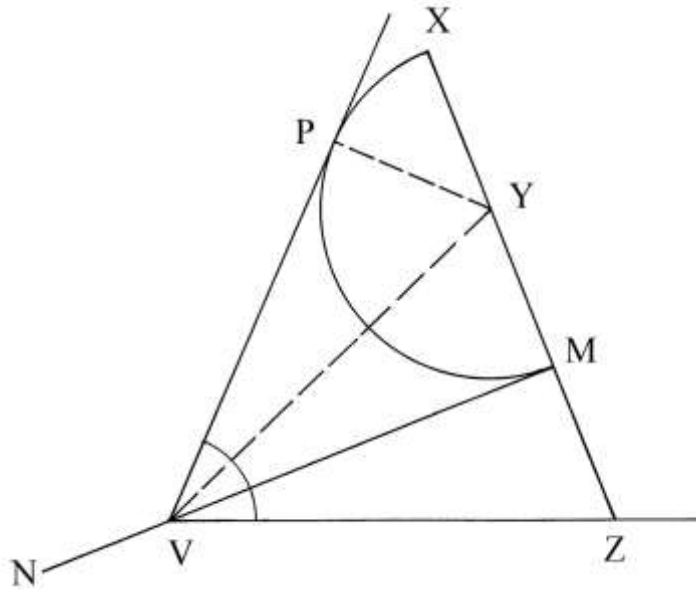
### La trisezione di un angolo

Il tomahawk è un *trisetto*, anche chiamato *trisetto a doppia squadra*, e serve a dividere in tre parti uguali un generico angolo. Lo strumento può essere costruito con un sottile lamierino o ricavato da un foglio di cartone robusto o di compensato o di materiale plastico, possibilmente trasparente. Il modello che segue, ricostruito sull'esempio contenuto nel citato libro di Italo Ghersi, è fornito di un'asola che ne facilita il posizionamento:



Dobbiamo trisecare un angolo con vertice in V:





Lo strumento deve essere posizionato sull'angolo in modo che il vertice Z giaccia sul lato orizzontale, il lato inclinato dell'angolo sia tangente nel punto P al semicerchio e la maniglia MN passi per il vertice V.

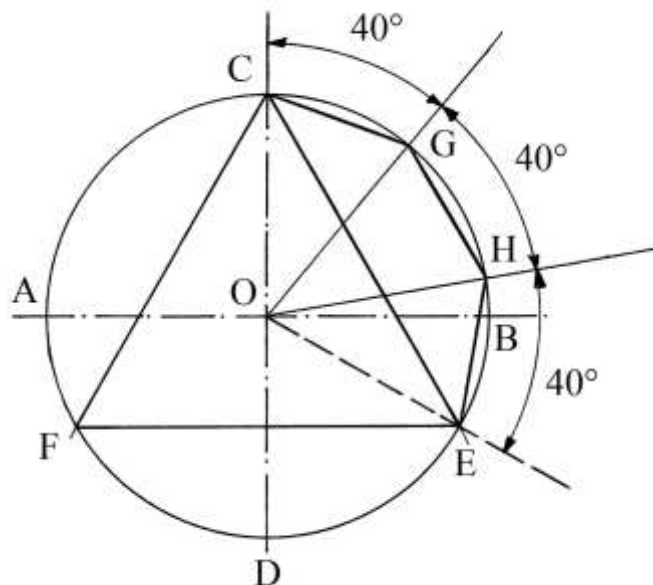
Le semirette uscenti da V e passanti per Y e per M dividono l'angolo PVZ in tre parti di uguale ampiezza:

$$PVY = YVM = MVZ = 1/3 * PVZ.$$

#### La costruzione dell'ennagono

La trisezione di un angolo è collegata alla costruzione dell'ennagono regolare inscritto.

Lo schema che segue presenta il triangolo equilatero CEF inscritto in un cerchio di centro O e raggio OA:



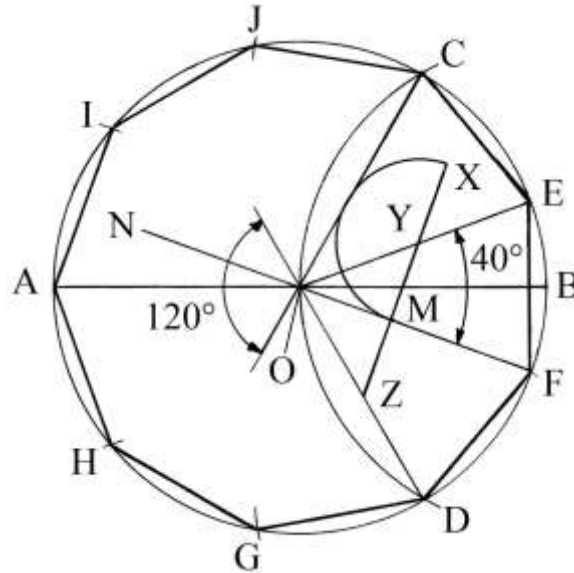
L'angolo COE è ampio  $120^\circ$ .

L'ennagono inscritto ha nove lati: a ciascun lato del triangolo equilatero corrispondono tre lati dell'ennagono.

Ciascun lato di questo ultimo poligono sottende al centro del cerchio un angolo ampio  $360^\circ/9 = 40^\circ$ .

Occorre dividere l'angolo COE in tre parti uguali:  $120^\circ/3 = 40^\circ$ , ma questo angolo non è costruibile con riga e compasso ed è soltanto ricavabile per via aritmetica.

Il metodo tomahawk è applicabile alla costruzione dell'ennagono regola inscritto:



Tracciare la circonferenza di centro O e raggio OA. Con la stessa apertura fare centro in B per disegnare un arco, che taglia la circonferenza in C e in D, e i raggi OC e OD.

Posizionare il tomahawk in modo che il suo semicerchio sia tangente a OC e con il suo asse MN passante per il centro O.

Per il punto M tracciare il raggio OMF.

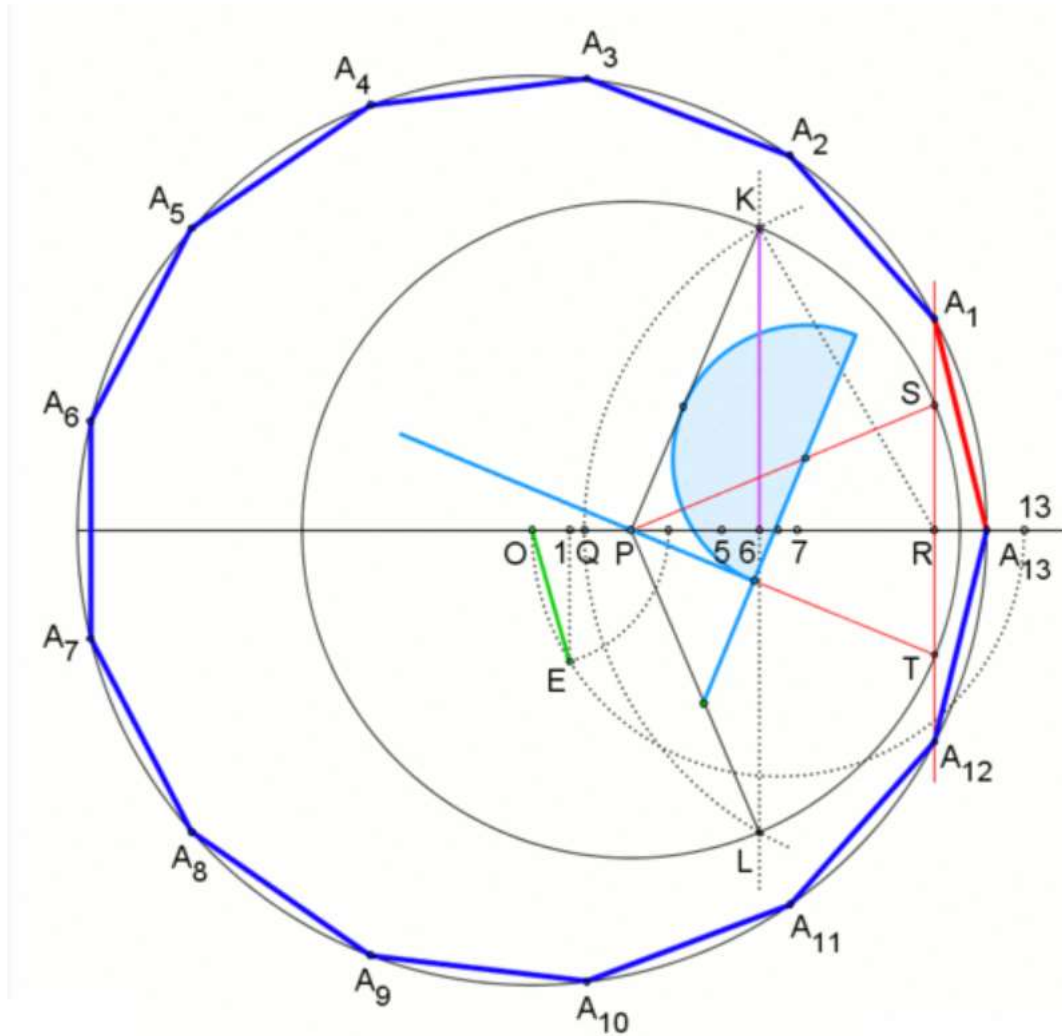
Disegnare il raggio OYE: la corda EF è il primo lato dell'ennagono regolare inscritto AIJCEFDGH.

#### Costruzione del tridecagono inscritto

Il tridecagono ha *tredici* lati e deve essere inscritto in un cerchio di cui è nota la lunghezza del raggio: la sua esatta costruzione non può essere ottenuta con riga e compasso ma è ottenibile con l'impiego del *tomahawk*.

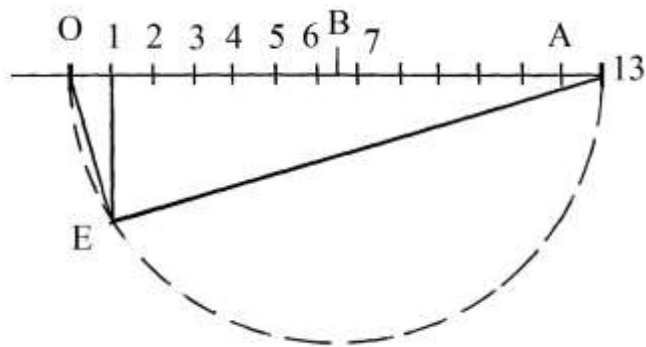
Per gli usi pratici sono impiegate diverse costruzioni *approssimate*.

Lo schema che segue è ripreso da un'animazione consultata il 14 febbraio 2021 su [en.wikipedia.org/wiki/Tridecagon](http://en.wikipedia.org/wiki/Tridecagon):



Spieghiamone la realizzazione.

Su di una retta orizzontale fissare il centro del cerchio, O, e il raggio OA lungo *convenzionalmente* 12. Dividere il raggio in *dodici* parti uguali e da A stabilire il punto 13 a distanza uguale a "1":



*Nota: Nello schema originale di Wikipedia il punto A è indicato con A<sub>13</sub>.*

Determinare il punto medio di O-13: è B. Fare centro in B e con raggio  $BO = B-13$  tracciare una semicirconfenza da O a 13.

Da punto 1 abbassare la perpendicolare a O-13 fino a tagliare la semicirconfenza nel punto E. Disegnare le corde OE e E-13: OE-13 è un triangolo rettangolo e OE e E-13 sono i suoi cateti.

Con il secondo teorema di Euclide sui triangoli rettangoli inscritti in un semicerchio calcoliamo le lunghezze di E-1 e, poi, di EO.

Per quel teorema si ha:

$$O-1 : E-1 = E-1 : 1-13 \text{ e in numeri}$$

$$1 : E-1 = E-1 : 12 \text{ da cui:}$$

$$(E-1)^2 = 1 * 12 \text{ e}$$

$$(E-1) = \sqrt{12}.$$

EO-1 è un triangolo rettangolo di cui conosciamo le lunghezze dei cateti O-1 e E-1. La lunghezza dell'ipotenusa EO è:

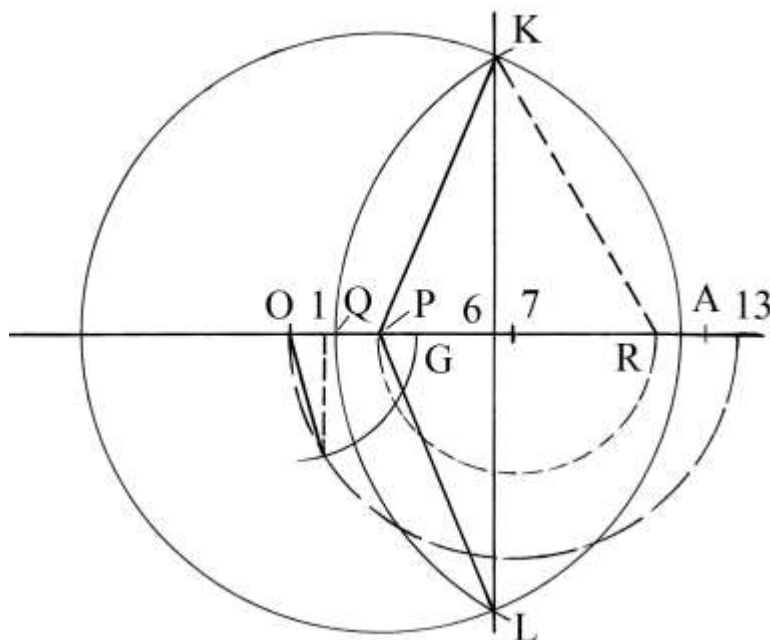
$$EO^2 = (O-1)^2 + (E-1)^2 \text{ e in numeri}$$

$$EO^2 = 1^2 + (\sqrt{12})^2 = 1 + 12 = 13 \text{ da cui}$$

$$EO = \sqrt{13}.$$

Fare centro in O e con raggio OE tracciare la semicirconferenza da E a G e fissare il punto P a distanza convenzionale "1" da G. Risulta:

$$OP = OG - 1 = OE - 1 = \sqrt{13} - 1.$$



Stabilire il punto Q a distanza dal punto 5 (non disegnato in figura) uguale a:

$$OQ = (O-5) - OE = 5 - \sqrt{13}.$$

A partire da G fissare un punto sul raggio OA, R, in modo che esso sia a distanza  $(7 + \sqrt{13})$  da O:

$$GR = OE - OG = (7 + \sqrt{13}) - (\sqrt{13} - 1) = 8.$$

Fare centro nel punto 7 e con raggio 7-P disegnare una semicirconferenza da P a R.

Fare centro in R e con raggio RQ tracciare un arco. Dal punto 6 condurre la perpendicolare a OA: essa taglia l'ultimo arco nei punti K e L.

Disegnare i segmenti PK, PL e KR.

Fare centro in P e con raggio PK = PL tracciare una circonferenza.

QKR è un triangolo equilatero e K-6 è una sua altezza: in calce all'immagine pubblicata su Wikipedia è indicata anche la sua lunghezza:

$$6-K = \sqrt{3} * (\sqrt{13} + 1).$$

Verifichiamo l'origine di questa espressione. Il lato QR è lungo:

$$QR = OR - OQ = (7 + \sqrt{13}) - (5 - \sqrt{13}) = 2 * \sqrt{13} + 2 = 2 * (\sqrt{13} + 1).$$

L'altezza  $h$  di un triangolo equilatero di lato  $\ell$  è data da:

$$h = (\sqrt{3})/2 * \ell.$$

Nel caso qui considerato si ha:

$$6-K = (\sqrt{3})/2 * [2 * (\sqrt{13} + 1)] = \sqrt{3} * (\sqrt{13} + 1).$$

L'espressione è corretta.

La parte iniziale della costruzione si conclude con la tracciatura della circonferenza di centro O e raggio OA.

Posizionare il *tomahawk*, come nella figura iniziale di questo paragrafo, con il semicerchio tangente a PK e il manubrio dello strumento passante per il punto P.

Una retta disegnata per il punto P e per il centro del semicerchio del *tomahawk* taglia la circonferenza interna in S e il prolungamento del manubrio la interseca in T.

Tracciare una retta passante per S, R e T che incontra la circonferenza esterna nei punti A<sub>1</sub> e A<sub>12</sub>, due vertici del tridecagono inscritto.

Sulla circonferenza esterna riportare la lunghezza di A<sub>1</sub>A<sub>13</sub> e disegnare il poligono: A<sub>1</sub>A<sub>2</sub>A<sub>3</sub>A<sub>4</sub>A<sub>5</sub>A<sub>6</sub>A<sub>7</sub>A<sub>8</sub>A<sub>9</sub>A<sub>10</sub>A<sub>11</sub>A<sub>12</sub>A<sub>13</sub> è il tridecagono regolare inscritto.

#### BIBLIOGRAFIA

1. Agostini Amedeo, "I problemi geometrici elementari e i problemi classici" in "Enciclopedia delle matematiche elementari e complementi", Milano, Hoepli, Volume II – parte 1<sup>a</sup>, 1937, ristampa anastatica 1964, pp. 483 – 539.
2. Carrara Bellino S.J, "I tre Problemi classici degli Antichi", in "Rivista di Fisica, Matematica e Scienze naturali", vol. IX, gennaio-giugno 1904, Pavia, "Società Cattolica Italiana per gli Studi scientifici", pp. 399-410.
3. Conti Alberto, "Problemi di 3.° grado: Duplicazione del cubo. Trisezione dell'angolo", in "Questioni riguardanti la Geometria elementare", a cura di Federigo Enriques, Bologna, Zanichelli, 1900, pp. 415-470.
4. Conway John H. – Guy Richard K., "Il libro dei Numeri", trad. italiana di Alessandro Zaccagnini, Milano, Hoepli, 1999, pp. IX-277.
5. Cundy H.M. – Rollett A.P., "I modelli matematici", trad. italiana, Milano, Feltrinelli, 1974, pp. 292.
6. Di Rienzo Erman, "I poligoni", 2002-2005, 32 pp. (un tempo reperibile sul sito [matematicamente.it](http://matematicamente.it)).
7. Gherzi Italo, "Matematica dilettevole e curiosa", Milano, Hoepli, 5.a ed., 1988, pp. VIII-778.
8. Glotin Pierre-Joseph, "De quelques moyens pratiques de diviser les angles en parties égales", in "Mémoires de la Société des Sciences Physiques et Naturelles de Bordeaux", Paris-Bordeaux, tome II, 1861, pp. 253-278.
9. Martin George E., "Geometric Constructions", New York, Springer, 1998, pp. xi+203.
10. Richeson David S., "Tales of Impossibility. The 2000-Year Quest to Solve the Mathematical Problems of Antiquity", Princeton and Oxford, Princeton University Press, 2019, pp. xii+436.
11. Sutton Andrew, "Ruler & Compass. Practical Geometric Constructions", Glastonbury, Wooden Books, 2009, pp. 58.
12. Yates Robert C., "The Trisection Problem", Washington, "National Council of Teachers of Mathematics", 1940, pp. 78.