sergio(punto)calzolani(at)outlook(punto)it

Versione rivista e corretta

Parole chiave: capacità di una botte; scemo; cocchiume; doghe; entasi; tronco di cono; sfera; costante 11/14; formule medievali capacità botti; regola del 60; Paolo dell'Abbaco; teorema delle corde; unità di misura Firenze e Siena; Tommaso della Gazzaia; Leonardo da Cremona; Piero della Francesca; plagi Luca Pacioli; Maestro Benedetto da Firenze; Filippo Calandri; Bastiano da Pisa; Giovanni Sfortunati; Cosimo Bartoli; Pietro Cataneo; formula di Keplero; Dionigi Veglia; Giuseppe Antonio Alberti; Baldassarre Orsini; formule di Malavasi; Selletti; Vittorio Niccoli; Italo Ghersi; Giovannetti.

Nota: questo articolo contiene una raccolta, senza alcuna pretesa di organicità, di materiali relativi ai metodi e alle formule utilizzate nel passato per il calcolo della capacità delle botti.

Per semplificare la composizione tipografica del testo sono stati usati alcuni simboli, fra i quali sono i seguenti:
- * : per la moltiplicazione;
- / : la barra è impiegata per rappresentare la divisione, in luogo della linea di frazione orizzontale;
- ≈ : il simbolo sta per *circa*: ad esempio $\pi \approx 3{,}14$:
- il *periodo* di un numero decimale periodico è compreso fra parentesi tonde, ad esempio $10/3 = 3{,}(3)$.

L'ORIGINE DELLE BOTTI

Recipienti di legno sembrano essere state usati da Egizi, Fenici, Cartaginesi, Greci, Etruschi e Romani: a causa della scarsa resistenza del materiale, sono sopravvissuti pochissimi esemplari. Una botte cilindrica con doghe di legno è conservata nel Museo Egizio del Cairo.

Furono i Galli a sviluppare l'impiego delle botti di legno.

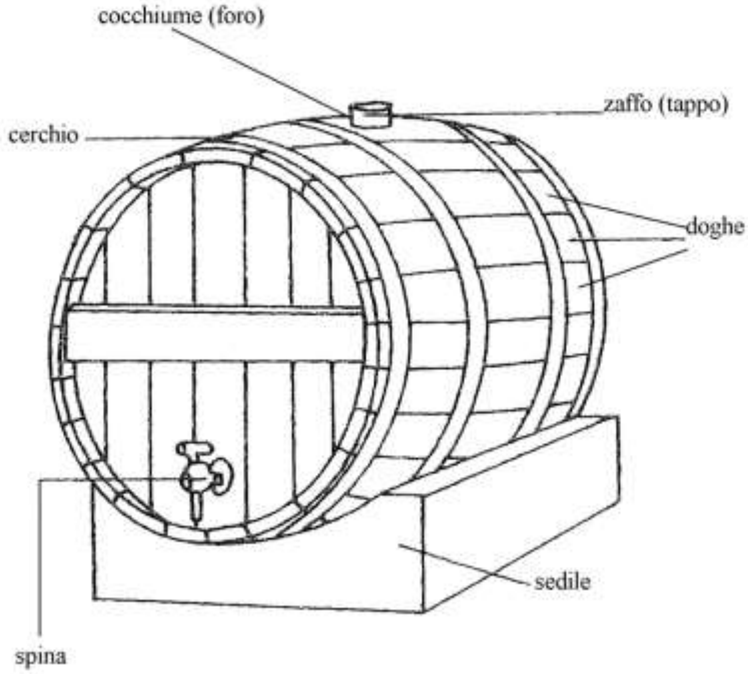
La produzione di una botte

Una botte era prodotta con *doghe* di legno opportunamente sagomate e unite per formare la *superficie laterale* di un recipiente di forma cilindrica o ovale.

Esse erano tenute assieme dai cerchioni metallici (di ferro o di acciaio) e dai due coperchi, superiore e inferiore, entrambi di legno.

La deformazione subita dalla lavorazione delle doghe attribuiva alle botti un profilo a tronco di cono, a doppio tronco di cono o curvilinea.

La figura che segue descrive una botte con basi circolari, vista in prospettiva (da Devoto – Oli, “*Dizionario illustrato della Lingua Italiana*”):

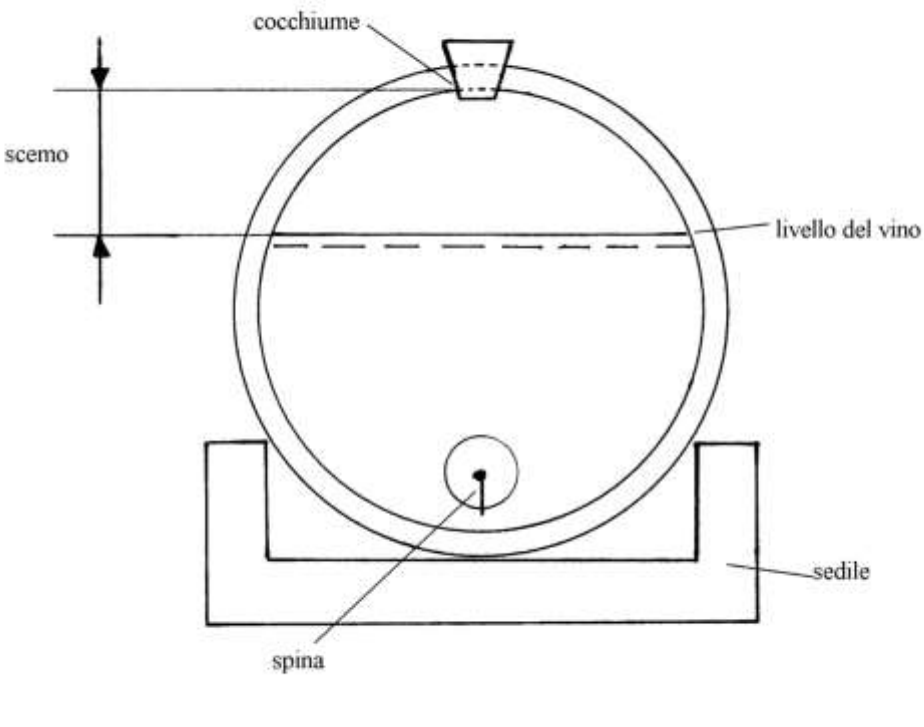


La botte è costruita con *doghe* di legno rigidamente connesse per mezzo di *cerchi* metallici. Nella parte superiore, nella zona di diametro maggiore (*entasi*) è praticato un foro su di un’unica doga: è il *cocchiume*, chiuso con un tappo di forma conica o tronco-conica, lo *zaffo*.

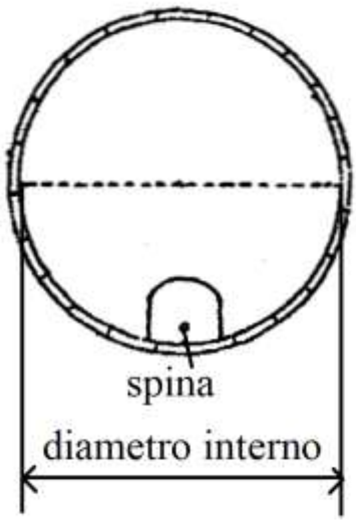
La base anteriore è forata per l’inserimento di un rubinetto, la *spina*, che è chiuso con un piccolo legno di forma appuntita, lo *zipolo*. Il rubinetto serve per spillare il vino dalla botte.

La botte non poggia direttamente sul pavimento ma su un apposito sostegno, il *sedile*.

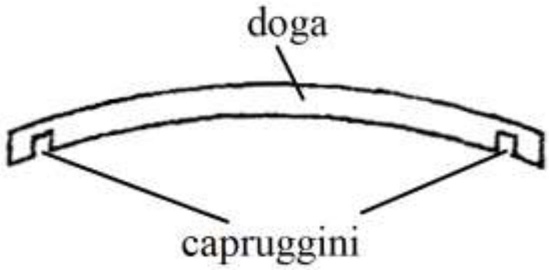
Per il caso più semplice, quello delle botti con basi circolari, gli abacisti e i geometri del Medioevo e del Rinascimento che studiarono la misura del loro contenuto approntarono formule semplificate e apposite tabelle. Negli stessi periodi storici furono usati degli strumenti, dei *calibri*, che servivano a misurare il livello del vino e la lunghezza degli *scemi*:



Lo *scemo* è l'altezza della colonna d'aria sovrastante il pelo libero del liquido.
La figura che segue mostra la vista frontale di una botte con in basso la spina:



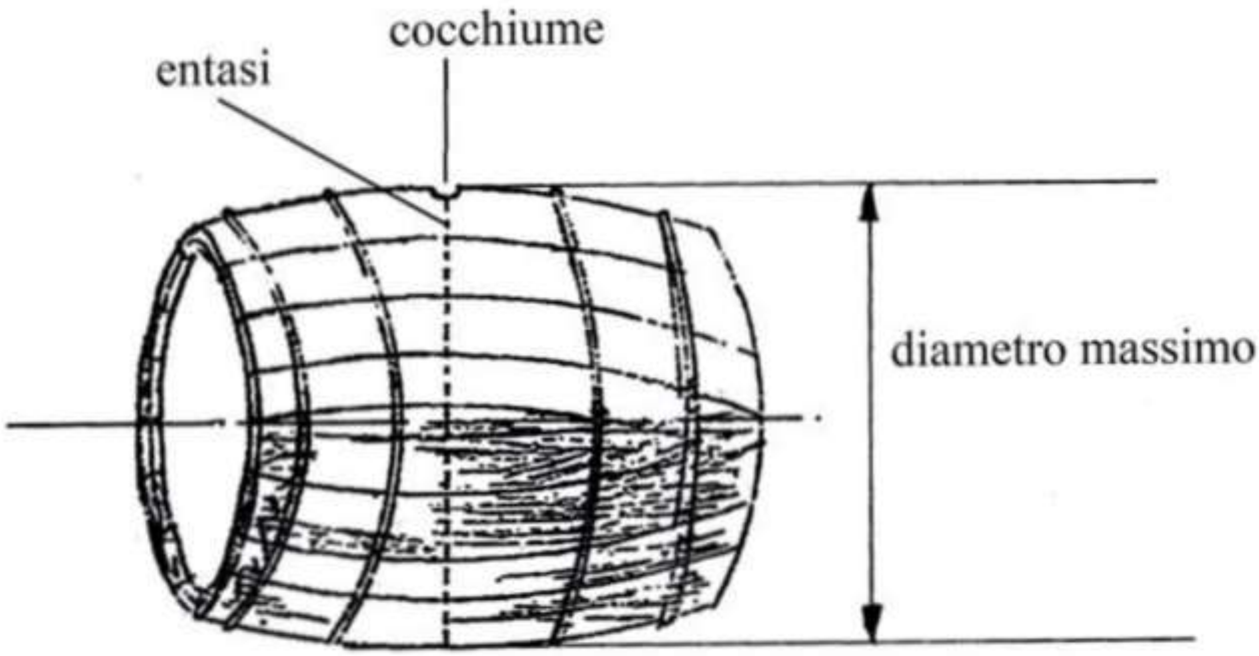
Alle loro estremità, le doghe recano due intagli: sono le *capruggini* che servono ad alloggiare la *testa* e il *fondo* della botte:



La forma delle botti presenta generalmente un rigonfiamento a metà altezza o lunghezza (a seconda che la botte sia verticale o orizzontale): si tratta di un'*entasi* (il rigonfiamento delle colonne usate in architettura). La presenza del rigonfiamento sembra dovuta allo scopo di facilitare il trasporto dei recipienti: esso ridurrebbe l'attrito fra più botti affiancate.

L'entasi è un rigonfiamento che tutte le botti possiedono a metà del loro corpo rotondo.

In corrispondenza dell'entasi la botte presenta i diametri, *esterno* e *interno* massimi:



La sua funzione è quella di facilitare lo spostamento delle botti vuote, per semplice rotolamento.

L'*attrito volvente* si manifesta quando un corpo rotondo rotola su di un piano: questa forma di attrito è minore di quella *radente*. Il rotolamento di una botte su di una superficie piana avviene lungo una o pochissime doghe che corrispondono all'entasi: essendo minore la superficie di contatto fra la botte e il piano si riduce l'attrito volvente.

- CURIOSITÀ -

A Montepulciano (Siena) ogni anno viene disputata una gara fra le otto contrade che formano il Comune. La sfida viene giocata l'ultima domenica di agosto, in onore del patrono San Giovanni Decollato.

La gara è conosciuta come il *Bravìo delle Botti*.

La corsa viene svolta lungo le strade principali del Comune, per un percorso di 1700 metri, in salita.

Per ciascuna delle otto contrade, una squadra formata da due uomini deve spingere una botte vuota del peso di 80 kg: grazie alla presenza dell'entasi il rotolamento delle botti diviene possibile.

Ecco la descrizione che Luca Stefanucci dà del Bravìo del 2018 nel quotidiano "La Nazione" – supplemento Estate del 26 agosto 2018:

"*MONTEPULCIANO si veste a festa per celebrare il suo evento più caratteristico: il Bravìo delle Botti. Nel tardo pomeriggio di oggi, otto contrade si daranno battaglia lungo un difficile percorso di quasi 1,8 chilometri. Ciascuna affiderà le proprie speranze di vittoria a due spingitori che faranno rotolare una botte di circa 80 kg tra salite e discese e con un pubblico caloroso pronto a incitare i loro beniamini per un giorno. Il Bravìo partirà alle ore 19 davanti alla Colonna del Marzocco ma il programma si aprirà sin dal mattino con la marchiatura a fuoco delle botti e l'estrazione di partenza. Alle ore 15 il corteo storico lungo le antiche vie del paese anticiperà il momento più atteso. La contrada che arriverà per prima sul Sagrato del Duomo vincerà il panno* *dipinto dall'artista Fabio Mazzieri e che rende omaggio ai cinquecento anni dalla posa della prima pietra del Tempio di San Biagio.*

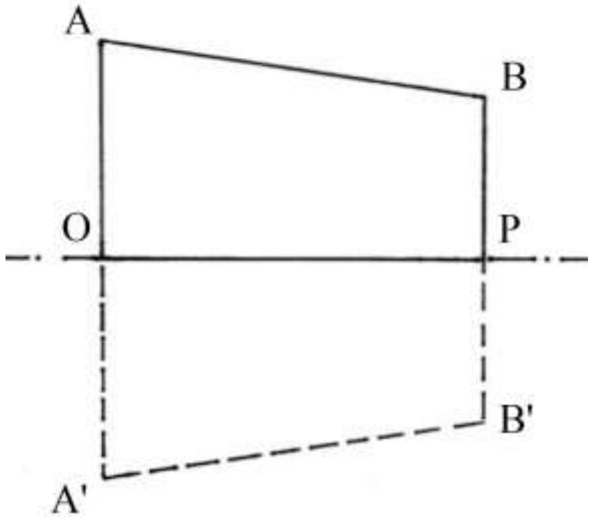
"*La manifestazione, che in origine vedeva gareggiare i cavalli sostituiti in seguito dalle botti, oggetto che richiama il prodotto simbolo della cittadina, il Vino Nobile di Montepulciano, è in onore del patrono San Giovanni Decollato. Attesa tanta gente nella «Perla del '500» ma anche ingenti misure di sicurezza per garantire l'ordine e la regolarità.*"

- -

- APPROFONDIMENTO -

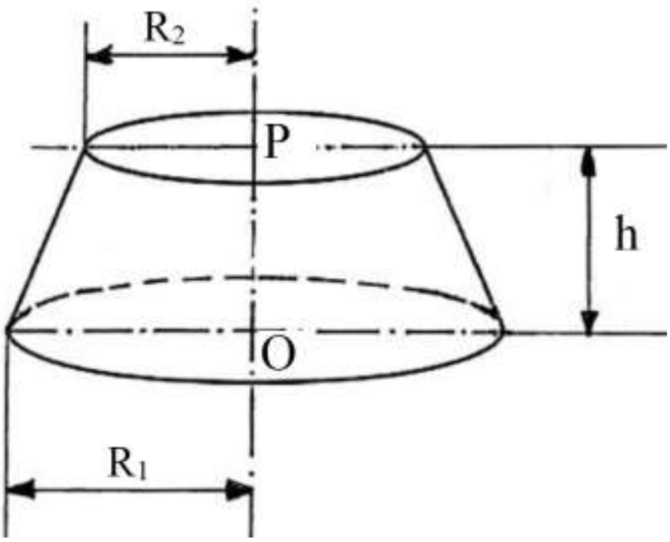
In generale una botte è assimilata a un solido generato dalla rotazione intorno ad un asse di una figura piana chiusa.

Nel caso del tronco di cono, esso è originato dalla rotazione di un angolo giro del trapezio rettangolo OABP intorno all'altezza OP:

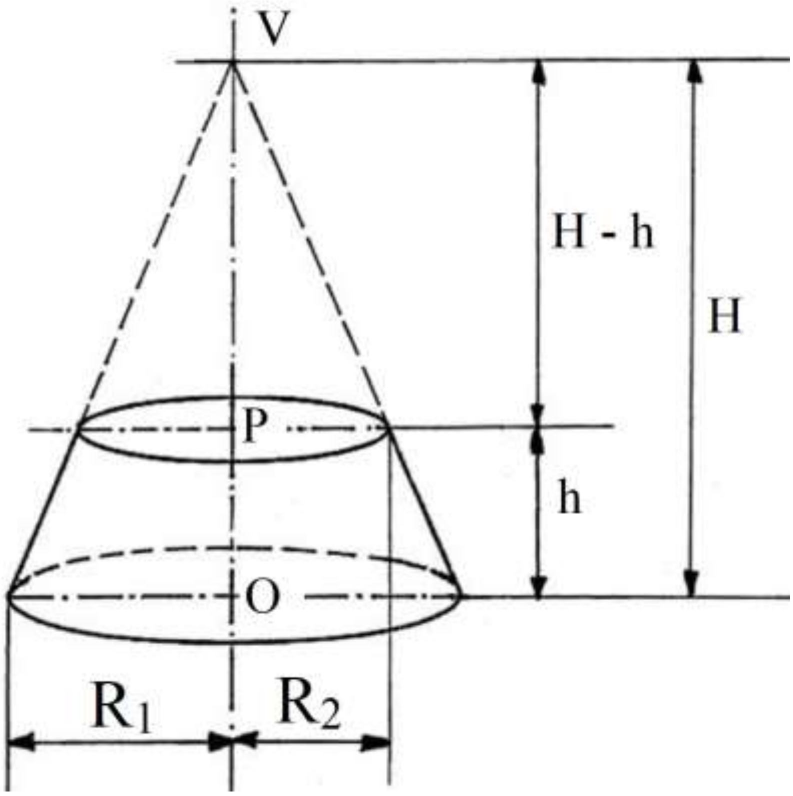


La botte assume il profilo ABB'A'.

Il tronco di cono è delimitato da due cerchi di raggio differente:



Questo solido è generato dal taglio di un cono retto con un piano parallelo al cerchio di base, ad altezza PO = h :

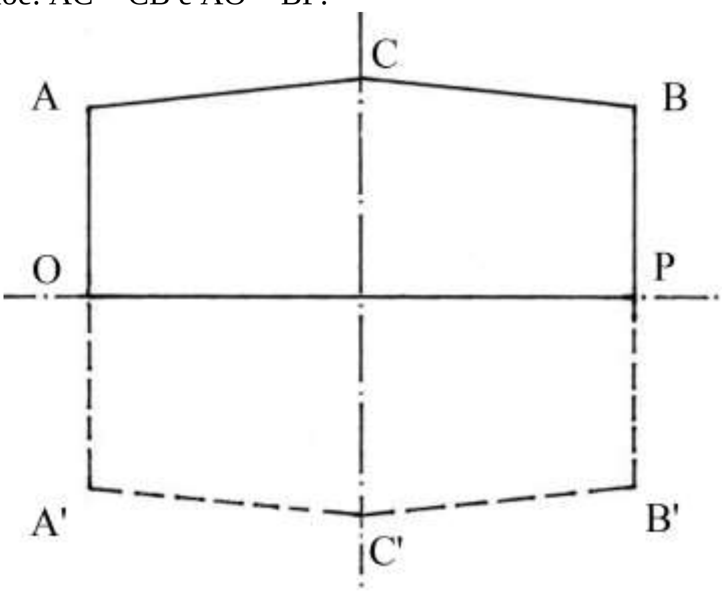


Il volume del tronco di cono è dato da:

$$V = 1/3 * \pi * h * [(R_1)^2 + R_1 * R_2 + (R_2)^2] .$$

Le botti più antiche avevano il profilo a doppio tronco di cono.

La botte a doppio tronco di cono è generata dalla rotazione di un angolo giro del pentagono non regolare OACBP intorno al lato OP; gli altri quattro lati del poligono hanno lunghezze due a due uguali e cioè: AC = CB e AO = BP:



I due tronchi di cono hanno le stesse dimensioni e sono uniti lungo le loro basi maggiori dando origine all'*entasi*.

Altri profili usati sono:

* arco di ovale;
* arco di ellisse;
* arco di parabola;
* arco di iperbole;
* arco di circonferenza;
* arco di circonferenza collegato con tratti rettilinei;
* arco di ovale rettificato con tratti rettilinei.

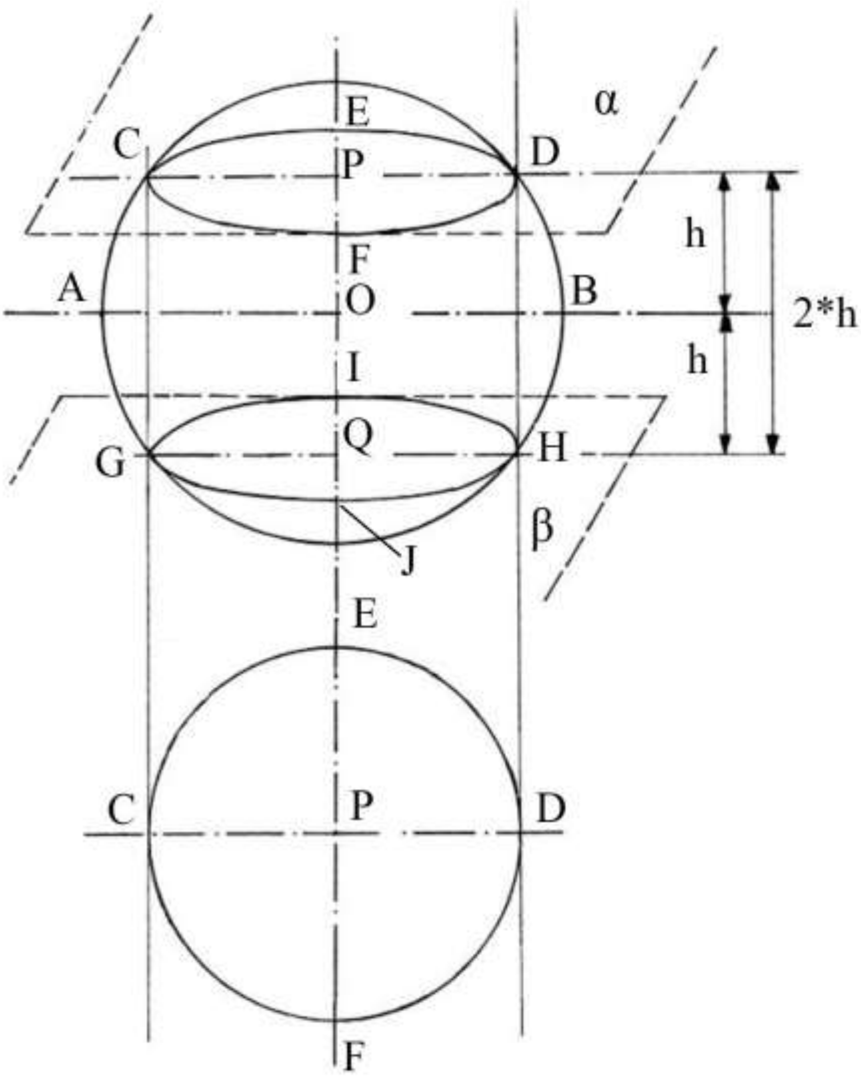
- -

ALCUNE DEFINIZIONI RELATIVE ALLA SFERA

Dato che il profilo di alcune botti potrebbe comprendere parti sferiche, qui di seguito sono descritte alcune definizioni relative alla geometria della sfera.

Segmento sferico a 2 basi

Due piani paralleli, α e β, tagliano una sfera:



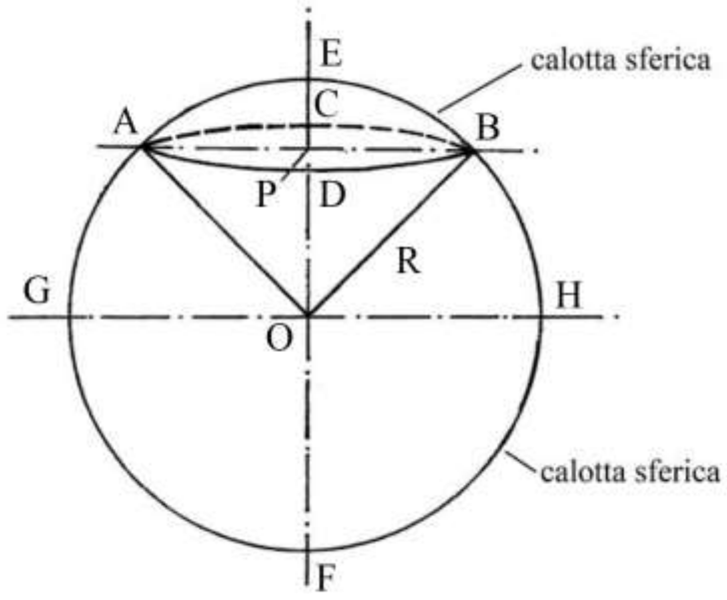
I punti P e Q sono equidistanti dal centro O e il segmento PQ è lungo 2*h .

Il solido delimitato dai cerchi di centri P e Q e dagli archi CAG e DBH è un *segmento sferico a due basi*.

Le due basi sono cerchi di raggio PC = QG.

Calotta sferica

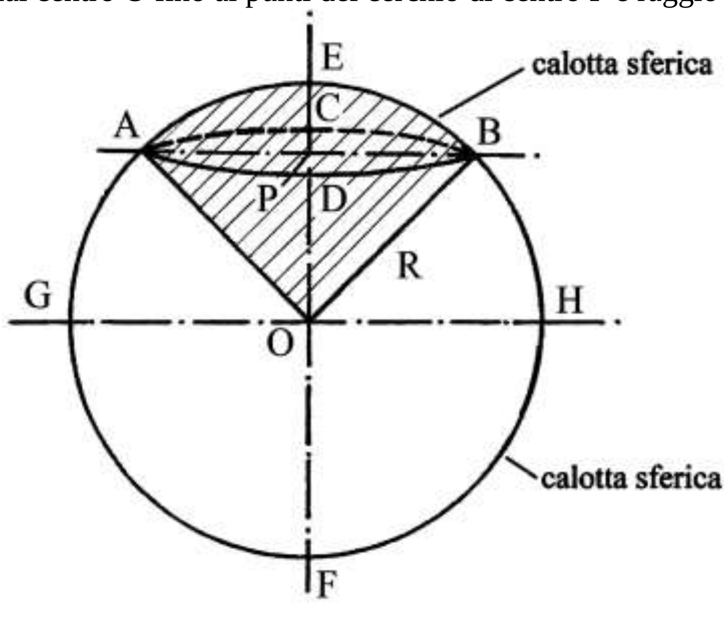
La sfera di centro O e raggio R = OA = OB è divisa in due parti da un piano passante per i punti A, B, C e D.



Il piano divide la *superficie* della sfera in due *calotte sferiche*.

Cono sferico

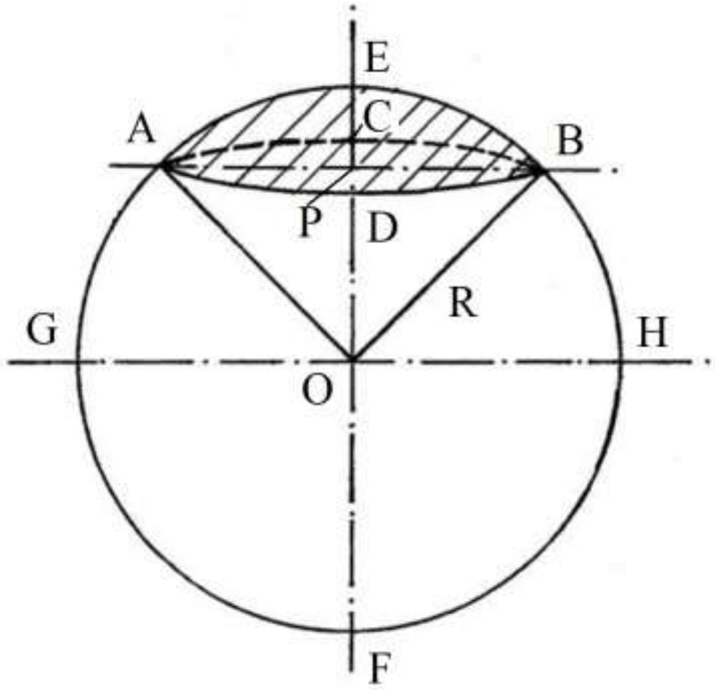
OAEB (che è tratteggiato nella figura che segue) è un *cono sferico*, delimitato dagli infiniti raggi che si dipartono dal centro O fino ai punti del cerchio di centro P e raggio PA.



Il cono è poi definito dalla calotta sferica passante per i punti A, B, C, D e E.

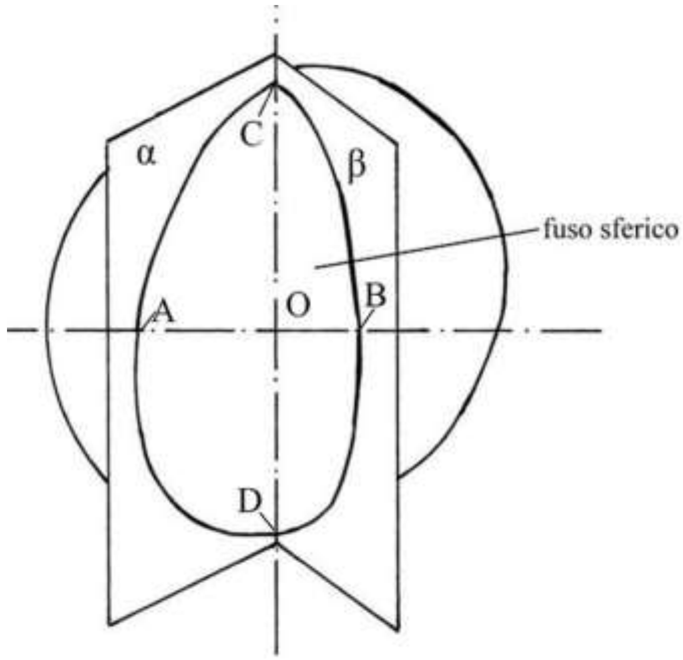
Settore sferico

Il piano passante per i punti A, B, C e D delimita un *settore sferico* (tratteggiato in figura), che è una parte del volume della sfera.



Fuso e spicchio sferici

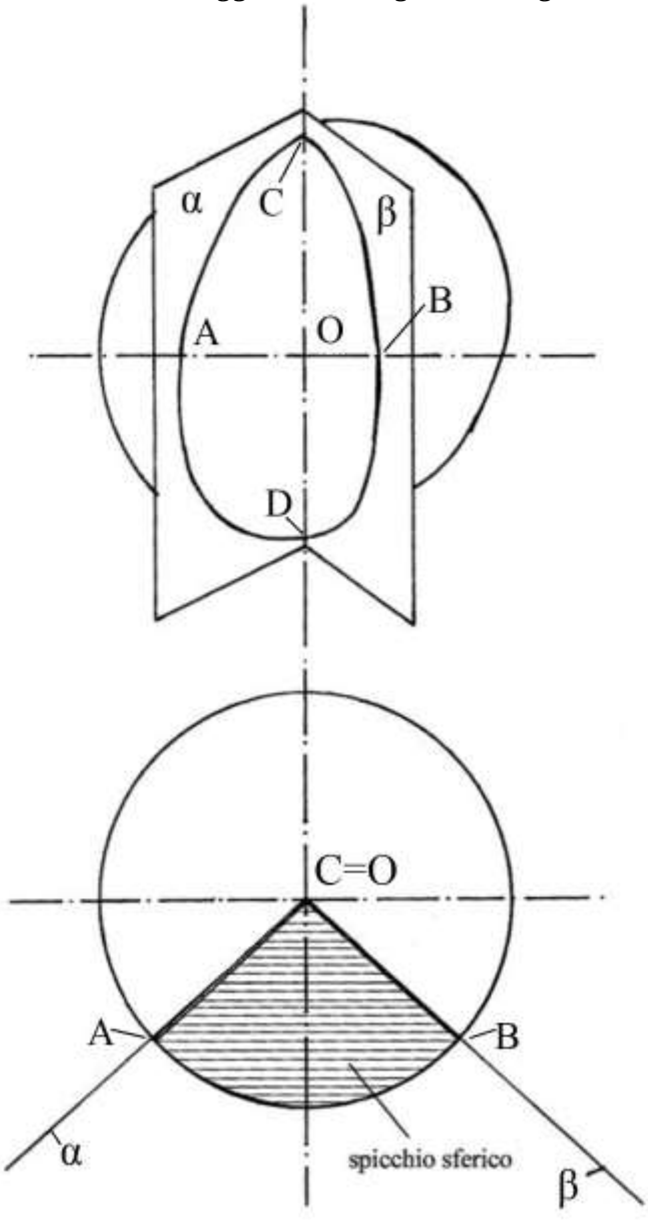
Due semipiani, α e β, formano un diedro che ha uno spigolo coincidente con il diametro CD della sfera:



Lo schema è disegnato in un'approssimativa sezione.

La superficie esterna del solido ritagliato dalla sfera è un *fuso sferico*, come la buccia di alcuni spicchi separati da un'arancia.

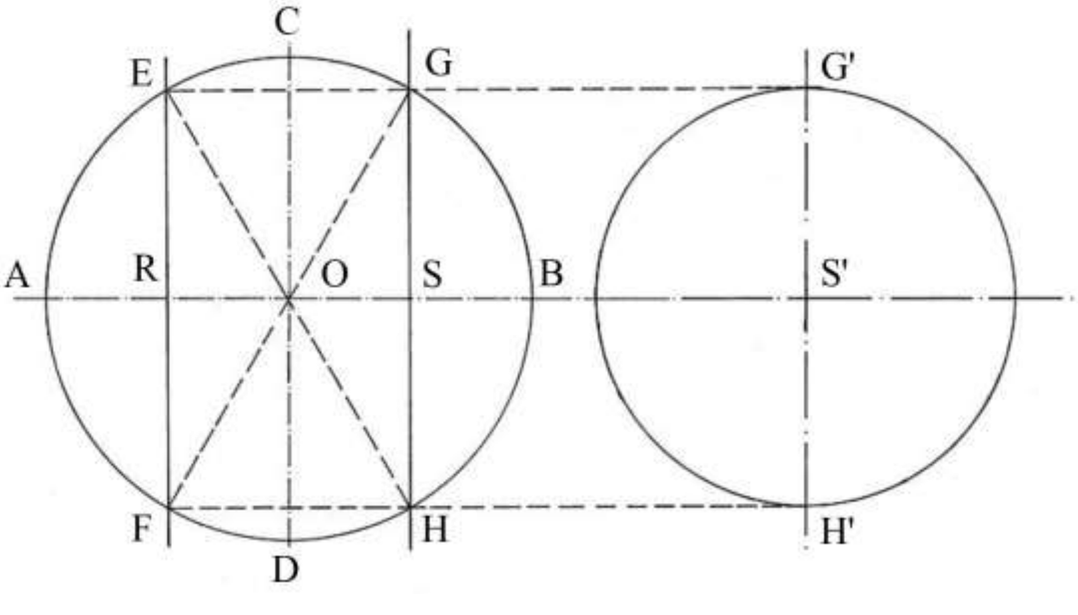
Vista dall'alto, la sfera sezionata dai semipiani α e β mostra due *spicchi sferici,* uno dei quali è separato dal resto della sfera ed è tratteggiato nella figura che segue:



Usando il paragone dell'arancia, lo spicchio sferico è il *volume* occupato da alcuni spicchi del frutto staccati tutti assieme dall'agrume.

<u>Alcuni profili legati alla sfera</u>

La sfera disegnata nella figura che segue ha centro in O ed è sezionata con due piani paralleli passanti per i punti E-R-F e G-S-H. Le due viste in proiezioni ortogonali sono rappresentate secondo le regole del *metodo del terzo diedro* o *metodo americano (ISO-A).*

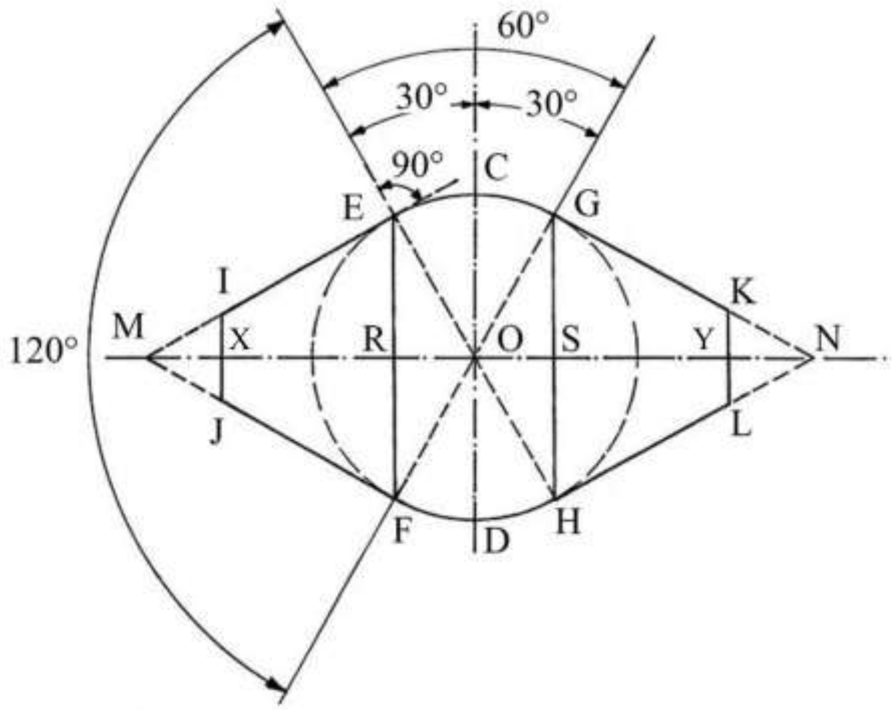


I due piani di sezione sono equidistanti dal *cerchio massimo* passante per i punti C, O e D.

Il solido delimitato dai due piani è un *segmento sferico a 2 basi*.

Le due basi hanno la forma e le dimensioni del cerchio di centro S e raggio GS, disegnato a destra.

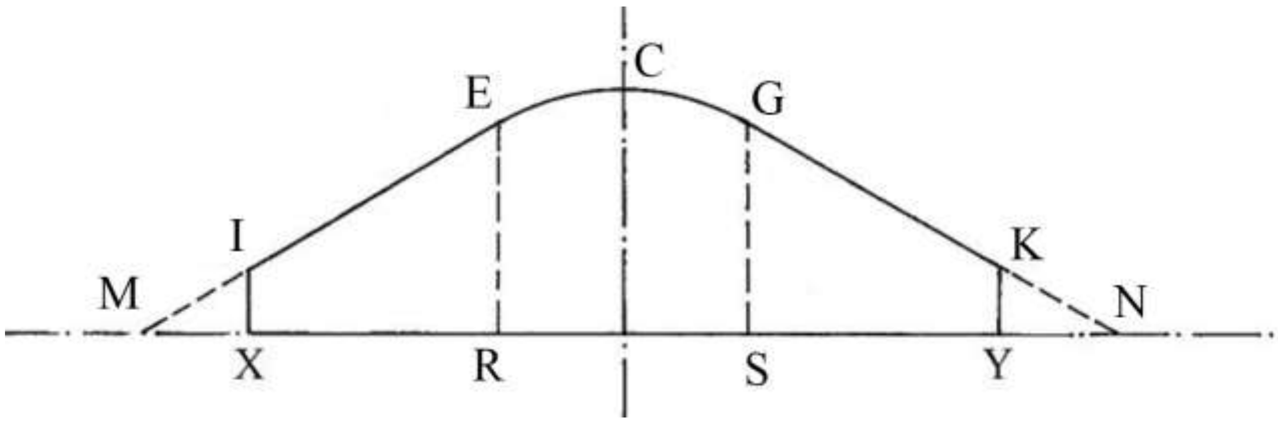
Gli archi EG e FH sono poi raccordati a tratti rettilinei come quelli ME, MF, NG e NH mostrati nella figura che segue:



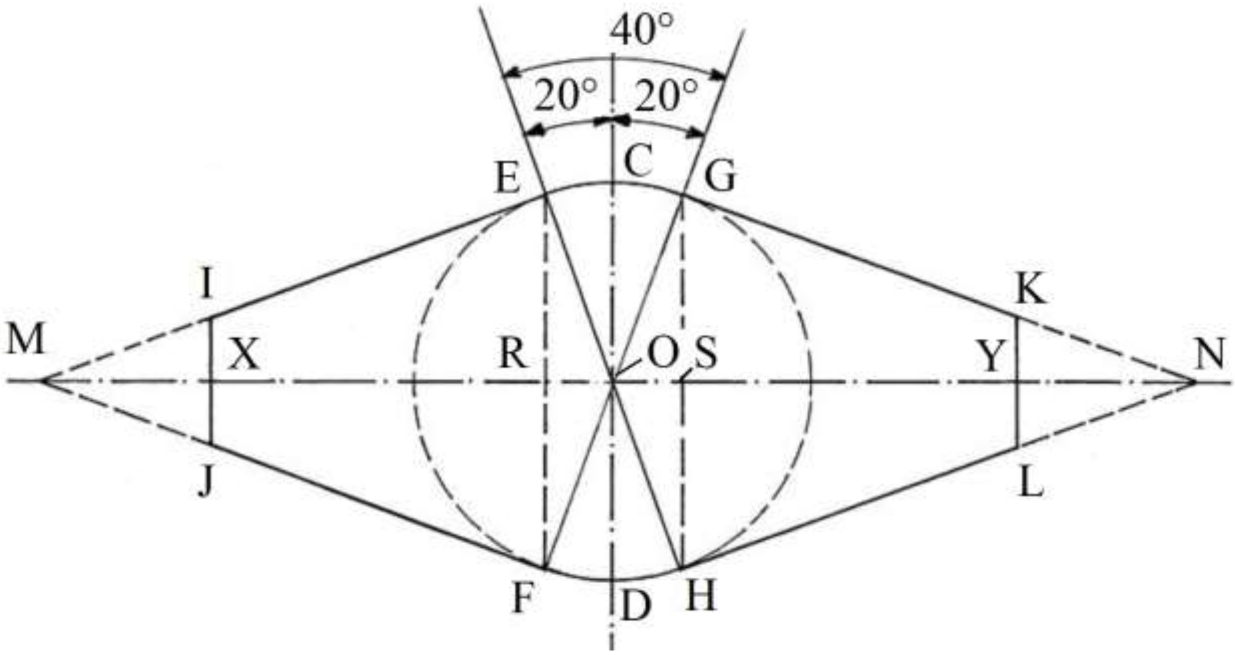
Dai punti E, F, G e H sono tracciati quattro segmenti che risultano perpendicolari ai raggi passanti per gli stessi punti. I quattro segmenti convergono a due a due in M e in N: la rotazione intorno all'asse MN dà vita a due solidi di forma conica che sono tagliati con due piani, I-J e K-L rispettivamente paralleli alle basi E-R-F e G-S-H.

I diametri EH e GF delimitano angoli nel vertice O di ampiezze di 60° e di 120°.

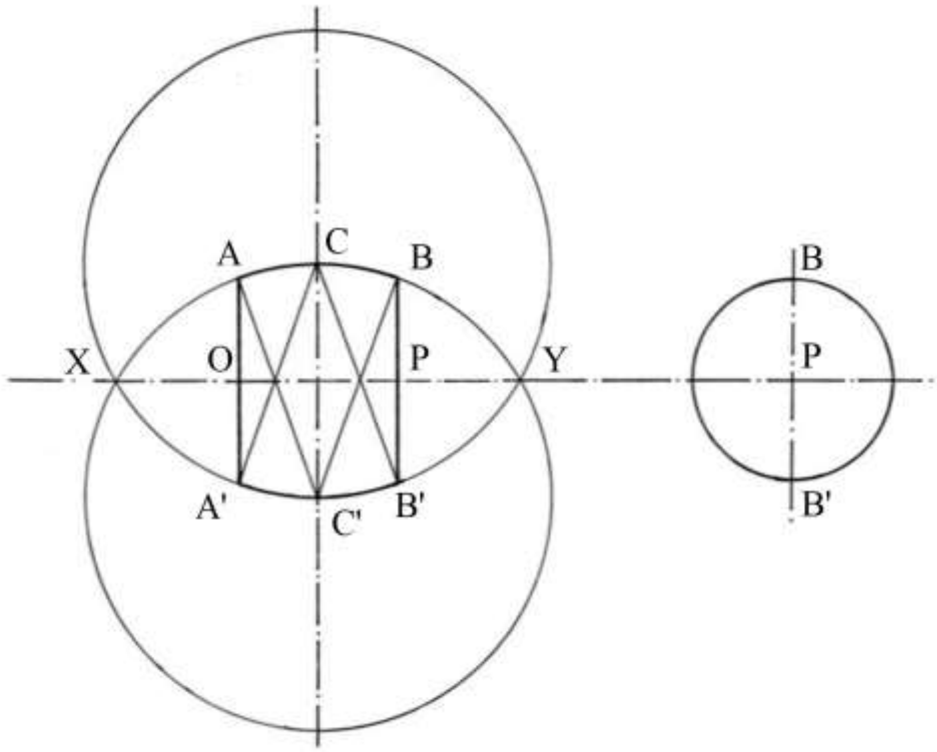
Il solido è generato dalla rotazione del poligono mistilineo XIECGKYSR intorno all'asse passante per M e per N:



La botte presentata nella figura che segue è costruita con lo stesso metodo, ma i due piani E-R-F e G-S-H che delimitano il segmento sferico a due basi sono fra loro più vicini rispetto al caso precedente:



Un più complesso profilo circolare è originato dall'intersezione di due sfere di raggio uguale: i due centri, C e C', giacciono entrambi sulla superficie dell'altra:



Il solido comune alle due sfere è generato dalla rotazione del segmento circolare XACBY intorno all'asse XY: l'asse XY è anche una *corda* comune ai due cerchi.

Le due viste sono disegnate secondo le regole del *metodo americano*.

Infine, il solido è sezionato con due piani paralleli A-O-A' e B-P-B' equidistanti dal cerchio massimo passante per C e per C'.

- APPROFONDIMENTO -

La costante 11/14

Per secoli nei trattati di *geometria pratica* per π è stata usata l'approssimazione

$\pi \approx (3 + 1/7) \approx 22/7$ che risale ad Archimede.

Il valore di π è 3,141592653589…, mentre quello di 22/7 è
22/7 ≈ 3,(142857)142857142857… e quindi questo secondo valore è leggermente approssimato per eccesso.

Inoltre, in questo ultimo numero si ripete all'infinito il blocco di *sei* cifre racchiuso fra parentesi tonde: (142857). Infatti 1/7 = 0,142857… Il numero è *periodico*.

L'area di un cerchio di raggio *r* e diametro *d = 2*r* è data da:

$\text{Area}_{\text{CERCHIO}} = \pi * r^2 = \pi * (d/2)^2 = \pi * d^2/4.$

Sostituendo a π il valore 22/7, la formula precedente diviene:

$\text{Area}_{\text{CERCHIO}} \approx (22/7) * d^2/4 \approx 22/28 * d^2 \approx 11/14 * d^2.$

Ecco spiegata l'origine della costante 11/14:

$$\pi/4 \approx 11/14 .$$

Inoltre, la formula dell'area di un cerchio può essere scritta nel modo che segue:

$\text{Area}_{\text{CERCHIO}} = \pi * d^2/4 = (\pi * d) * (d/4).$

Ma (π * d) è la lunghezza della *circonferenza*, *c*, per cui la formula diviene:

$$Area_{CERCHIO} = c * d/4.$$

Peraltro, la lunghezza della circonferenza è approssimabile a

$$c = \pi * d \approx (22/7) * d.$$

Sostituendo questo ultimo valore nella formula dell'area del cerchio si ottiene

$$Area_{CERCHIO} \approx (d * 22/7) * d/4 \approx (22/28) * d^2 \approx (11/14) * d^2.$$

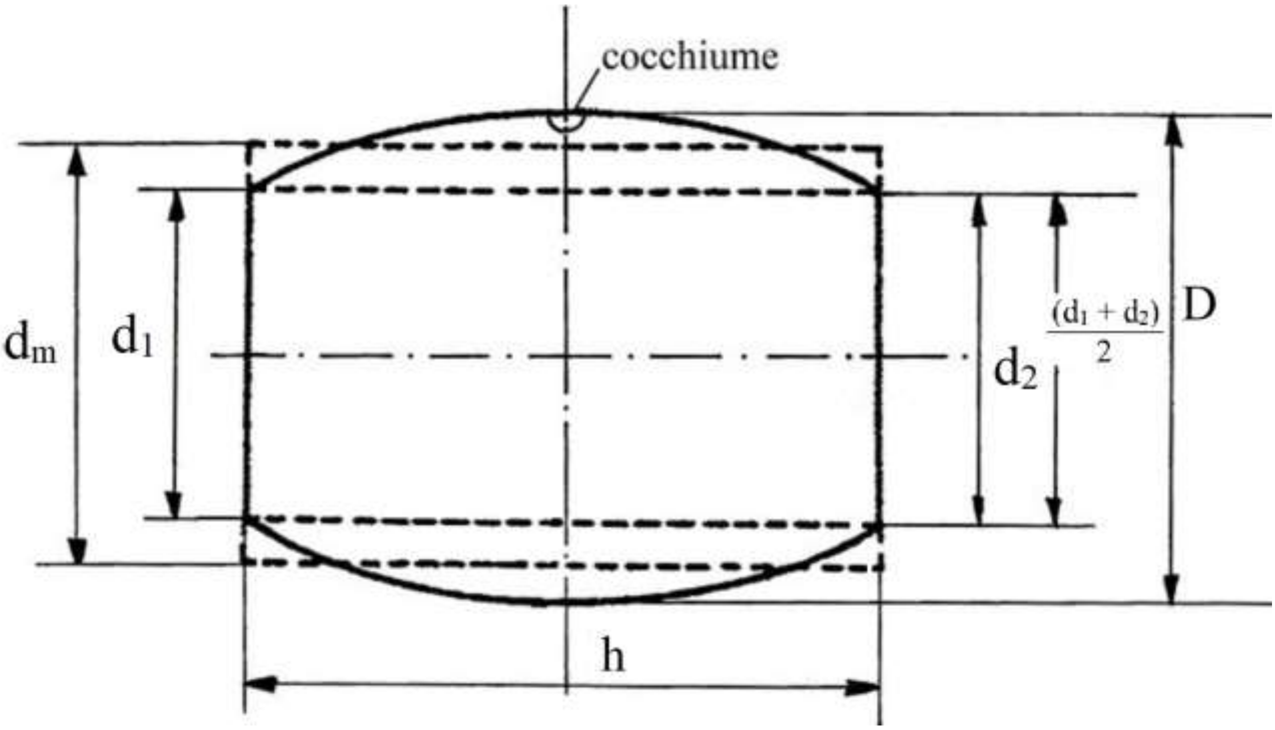
- -

ALCUNE FORMULE MEDIOEVALI PER IL CALCOLO DELLA CAPACITÀ DELLE BOTTI

Annalisa Simi (Università di Siena) ha confrontato *cinque* diverse formule relative al calcolo del volume, *V*, delle botti proposte da abacisti medievali e da trattatisti rinascimentali.

Fra le ragioni che premevano per mettere a punto metodi e formule il più approssimati possibili alla realtà vi era quella fiscale: nel Medioevo i dazi colpivano le merci in entrata e in uscita dai singoli Comuni e il vino era uno dei prodotti più tassati. Le autorità vigilavano pure sulla corretta misurazione del vino venduto nelle taverne (che erano soggette a ulteriori imposte).

Occorre fissare i valori di alcune costanti:



* d_1 e d_2 sono i diametri dei due fondi (*testa* e *fondo*) che nel caso siano uguali vale la relazione $d_1 = d_2$ e $(d_1 + d_2)/2 = d_1 = d_2$ (come è mostrato nella figura dall'eguaglianza delle quote $d_2 = (d_1 + d_2)/2$);
* *D* è il diametro al cocchiume;
* d_m è il *diametro medio* che è ricavato dalla formula

$$d_m = [(d_1 + d_2)/2 + D]/2 \;;$$

* *h* è l'altezza (lunghezza) della botte.

Le prime due formule citate dalla Simi sono le seguenti:

(1) $V = \pi * (d_m/2)^2 * h \approx 22/7 * (d_m/2)^2 * h \approx 11/14 * (d_m)^2 * h$

(2) $V = (d_m)^2 * h$.

Le altre tre formule sono dovute a Tommaso della Gazzaia:

(3) $V = 29/30 * [\pi * (d_m/2)^2 * h] \approx 29/30 * 22/7 * (d_m)^2/4 * h \approx 319/420 * (d_m)^2 * h$ con il coefficiente $319/420 \approx 0{,}75952$.

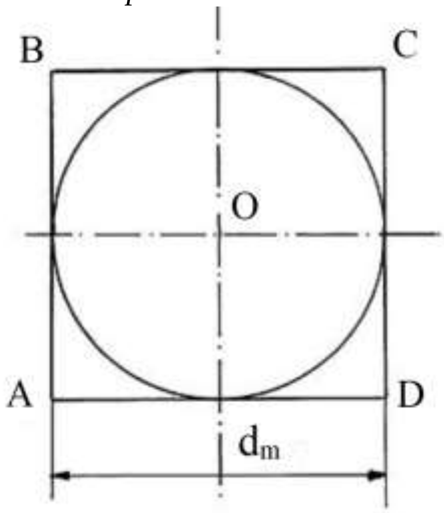
(4) $V = 157/160 * [\pi * (d_m/2)^2 * h] \approx 1727/2240 * (d_m)^2 * h$, con il coefficiente $1727/2240 \approx 0{,}77098$.

(5) $V = 79/80 * (d_m)^2 * h$, con il coefficiente $79/80 \approx 0{,}9875$.

Le formule (1), (3) e (4) approssimano la botte a un *cilindro* che ha altezza *h* uguale alla lunghezza della botte stessa e diametro uguale a quello medio d_m.

Invece, le formule (2) e (5) assimilano la botte a un *prisma* a base quadrata con lati lunghi quanto il diametro medio d_m e altezza *h*: la (5) introduce il correttivo 79/80.

Entrambe le formule sono errate *per eccesso*.



L'area del quadrato è:

$\text{Area}_{\text{QUADRATO}} = (d_m)^2$ mentre l'area del cerchio è:

$\text{Area}_{\text{CERCHIO}} = \pi * [(d_m)/2]^2 = \pi/4 * (d_m)^2$.

La costante π/4 vale:

$\pi/4 \approx 3{,}141592/4 \approx 0{,}785398$.

Impiegando per π l'approssimazione 22/7, la precedente costante può essere approssimata a:

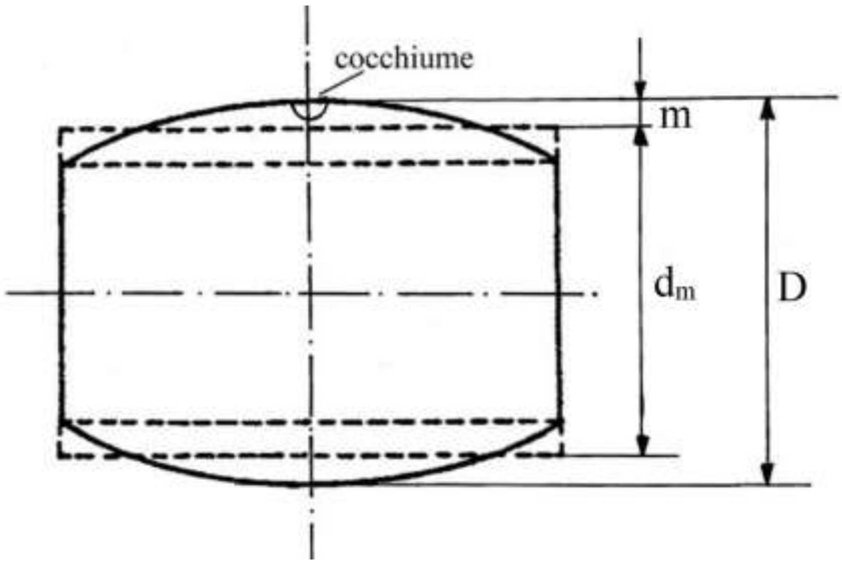
$\pi/4 \approx 11/14 \approx 0{,}7857$.

La formula (5) è anch'essa grandemente errata per eccesso perché invece della costante $\pi/4 \approx 11/14$ impiega il rapporto 79/80.

La misura del contenuto delle botti veniva effettuata con degli speciali regoli metrici (di legno o di metallo) chiamati *stagie* o *stazze*: da questi termini sono derivate le espressioni *stagiatura* e *stazzatura* di una botte per indicare l'operazione di misura della sua capacità.

Il metodo adottato dai misuratori per conoscere la quantità di vino mancante dopo i prelievi era quello di inserire attraverso il cocchiume una stagia: misurando una lunghezza – la variazione dello scemo – era possibile risalire alla misura della capacità con l'uso di un certo numero di calcoli basati su apposite tabelle empiriche.

Nello schema che segue è mostrata la base iniziale della misurazione:



L’origine delle misure degli scemi è l’estremo superiore del diametro medio d_m.
Lo scemo *s* è misurato con la stagia.
Nella figura, *m* è la lunghezza uguale a metà della differenza fra il diametro al cocchiume, *D*, e quello medio, d_m:

$$m = (D - d_m)/2 .$$

La Simi fornisce una formula per calcolare lo *scemo netto* s_n:

$$s_n = s - ¼ * [D - (d_1 + d_2)/2] = s - m .$$

La “Regola del 60” venne attribuita a Paolo dell’Abbaco sia da Tommaso della Gazzaia sia da Orbetano da Montepulciano.
La tabella che segue è basata sulla “Regola del 60” ed è riprodotta dal lavoro di Annalisa Simi citato al n. 38 della Bibliografia.

n	n_t	n	n_t
Per 1 piglia	14/60	Per 16 piglia	12 51/60
2 pi.	0 37/60	17 pi.	13 59/60
3 pi.	1 8/60	18 pi.	15 8/60
4 pi.	1 43/60	19 pi.	16 19/60
5 pi.	2 24/60	20 pi.	17 31/60
6 pi.	3 7/60	21 pi.	18 43/60
7 pi.	3 55/60	22 pi.	19 57/60
8 pi.	4 46/60	23 pi.	21 20/60
9 pi.	5 38/60	24 pi.	22 25/60
10 pi.	6 35/60	25 pi.	23 40/60
11 pi.	7 33/60	26 pi.	24 56/60
12 pi.	8 33/60	27 pi.	26 11/60
13 pi.	9 35/60	28 pi.	27 28/60
14 pi.	10 38/60	29 pi.	28 44/60
15 pi.	11 44/60	30 pi.	30

Le due seguenti formule semplificate sono basate sui coefficienti contenuti nella tabella:

* $n = s_n * d_m * 60$;
* $V_s = n_t * V/60$.

Nelle due formule compaiono le seguenti grandezze:

* n indica i numeri interi contenuti nella prima e nella terza colonna della tabella;
* n_t sono i corrispondenti numeri misti della seconda e della quarta colonna;
* s_n è lo scemo netto;
* d_m è il diametro medio;
* V è la capacità della botte:
* V_s è la quantità di vino mancante per via dei prelievi.

La tavola è costruita solo per valori interi di n compresi fra 1 e 30. Nel caso di valori di n intermedi fra due interi, deve essere effettuata un'interpolazione lineare.

Per motivi di simmetria, la tavola è limitata ai casi più comuni nei quali la botte è vuota per meno della metà della capacità; in questi casi risulta

$$0 \leq s_n \leq d_m/2.$$

Il rapporto s_n/d_m è compreso fra 0 e ½ e quindi

$$0 < n \leq 30 .$$

PROBLEMI DI GEOMETRIA PIANA CONTENUTI NEL "TRATTATO D'ARITMETICA" DI PAOLO DELL'ABBACO

Il benemerito storico della matematica medievale Gino Arrighi (1906 – 2001) pubblicò nel 1964 la trascrizione del *Trattato d'Aritmetica* di Paolo dell'Abbaco, contenuto nel Codice Magliabechiano XI, 86, della Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze.

Paolo dell'Abbaco (o Paolo Dagomari, 1282 – 1374) è stato probabilmente il più importante abacista fiorentino del XIV secolo.

Come in altri trattati dello stesso argomento, alcune *ragioni* (termine con il quale era chiamati i problemi) sono riservati alla soluzione di quesiti di natura geometrica. Questa caratteristica dei trattati d'abaco è spiegata da Gino Arrighi con queste affermazioni:

"Il Lettore voglia considerare che, in allora, il termine di *aritmetica* aveva un senso più esteso o, se si vuole, meno preciso di quello attuale. Oltre alla vera e propria aritmetica, vi si contemplavano la geometria ed i principi dell'algebra… " (pagina 11 del "Trattato di aritmetica" di Paolo dell'Abbaco, citato in bibliografia).

Il testo di Paolo dell'Abbaco risale al XIV secolo ed è scritto in *fiorentino*: è tuttora perfettamente leggibile e comprensibile.

Nota: per facilitare la comprensione dei problemi e delle figure riprodotte dal *Trattato* sono state qui aggiunte le lettere, maiuscole, ai vertici: esse sono assenti nell'originale. Le uniche scritte che compaiono nel manoscritto sono quelle relative alle dimensioni in braccia o in braccia quadrate. Alcune figure sono riprodotte senza modifiche dal testo di Gino Arrighi.

I problemi o *ragioni* sono contrassegnati con la numerazione attribuita da Gino Arrighi nella sua trascrizione, citata in bibliografia.

La numerazione è racchiusa fra parentesi quadre [ ] collocate sulla stessa riga del titolo, all'estrema sinistra.

In questo articolo sono descritti solo i problemi geometrici risolti da Paolo dell'Abbaco che calcolano le aree dei segmenti circolari e dei cerchi e che hanno qualche attinenza con la determinazione degli scemi delle botti.

- APPROFONDIMENTO -

Le unità di misura lineari

Paolo dell'Abbaco usa come unità di misura il braccio e il braccio quadrato.

Nel Medioevo, a Firenze erano usate due unità di misura della lunghezza:

* il braccio *da panno* ("braccio di Calimala", dal nome della strada fiorentina che ospitava molte botteghe di artigiani tessili): esso era lungo l'equivalente di 58,3626 cm;
* al suo fianco, per alcune attività edilizie era usato il *braccio da terra*.

Le due unità di misura lineare erano legate da un rapporto fisso:

$$1 \text{ braccio da terra} = (17/18) * \text{braccio da panno} \approx$$
$$\approx 58{,}3626 * (17/18) \approx 55{,}1202 \text{ cm} .$$

Molte grandi opere edilizie furono progettate con misure espresse in *braccia da panno* e suoi multipli e sottomultipli.

Il *braccio da terra* ebbe limitata importanza.

Come il fiorino, il *braccio da panno* fiorentino era diviso in 20 *soldi* e ciascun soldo era ripartito in 12 denari: furono usati gli stessi termini e uguali rapporti, sempre secondo la doppia base 20 e 12.

La tabella che segue elenca i multipli (il miglio) e molti sottomultipli del braccio da panno:

LUNGHEZZE

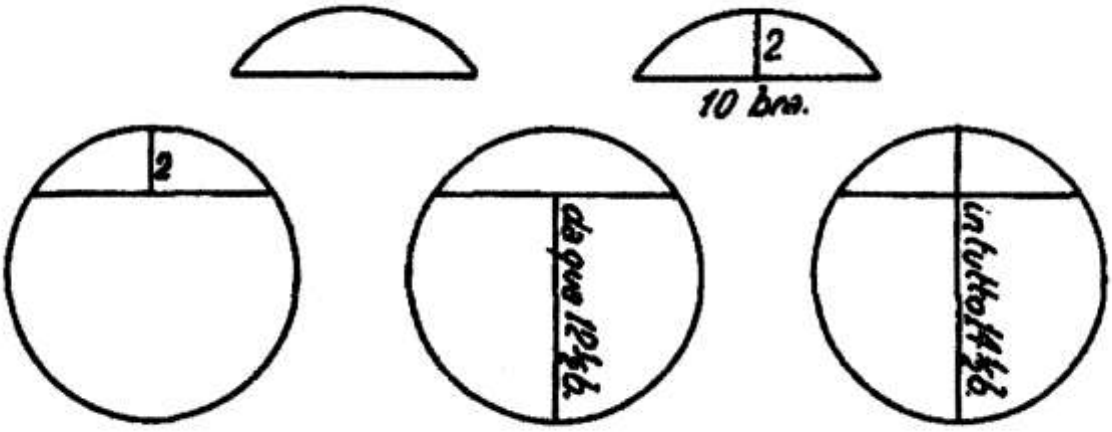
RAGGUAGLIO DEL BRACCIO FIORENTINO A PANNO E DELLE SUE FRAZIONI PIU' CITATE DAGLI ACCADEMICI			
Miglio	braccia 2833 1/3		m1653,607
braccio	20 soldi		cm 58,3626
soldo	12 denari	6 piccioli	cm 2,9181
quattrino	4 denari		cm 0,9727
denaro	12 punti		cm 0,2432
punto			cm 0,0203
un braccio e 1/4			cm 72,9532
2/3 di braccio			cm 38,9084
16 soldi			cm 46,69008
3/10 di braccio	18 quattrini		cm 17,50778
3/4 di braccio	15 soldi		cm 43,7718
8 quattrini	1/15 di braccio		cm 7,7816

La tabella è tratta dal sito del Museo Galileo (http://www.museogalileo.it/).

- -

[135] Segmento circolare

È dato un *segmento circolare* che ha la *corda* lunga 10 braccia e la *freccia* (o saetta o *polsa*) lunga 2 braccia.

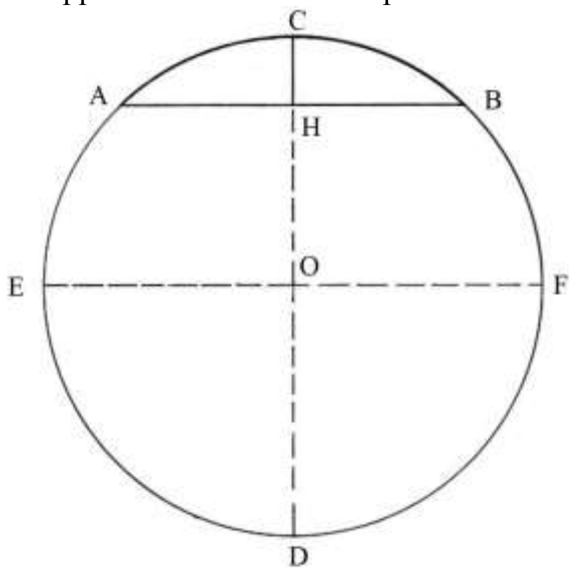


L'Autore chiede di calcolare il diametro del cerchio da cui è stato ricavato il segmento circolare.

La procedura impiegata contiene i seguenti passi:

* dividere per 2 la lunghezza della corda: 10 : 2 = 5 ;
* moltiplicare 5 per sé stesso: 5 * 5 = 25 ;
* dividere per la lunghezza della freccia: 25 : 2 = 12,5 ;
* sommare la lunghezza della freccia e l'ultimo quoziente: 2 + 12,5 = 14,5 braccia, diametro del cerchio.

Paolo dell’Abbaco applicò alla soluzione del problema il *teorema delle corde*:



Le corde AB e CD sono entrambe inscritte nella stessa circonferenza e si intersecano ad angolo retto nel punto H, tagliando in due parti uguali la corda AB.

I due segmenti che formano una corda (ad esempio AH e HB) sono i *medi* e i due segmenti dell’altra corda (CH e HD) sono gli *estremi* di una proporzione:

medi

$$CH : AH = HB : HD$$

estremi

Da cui

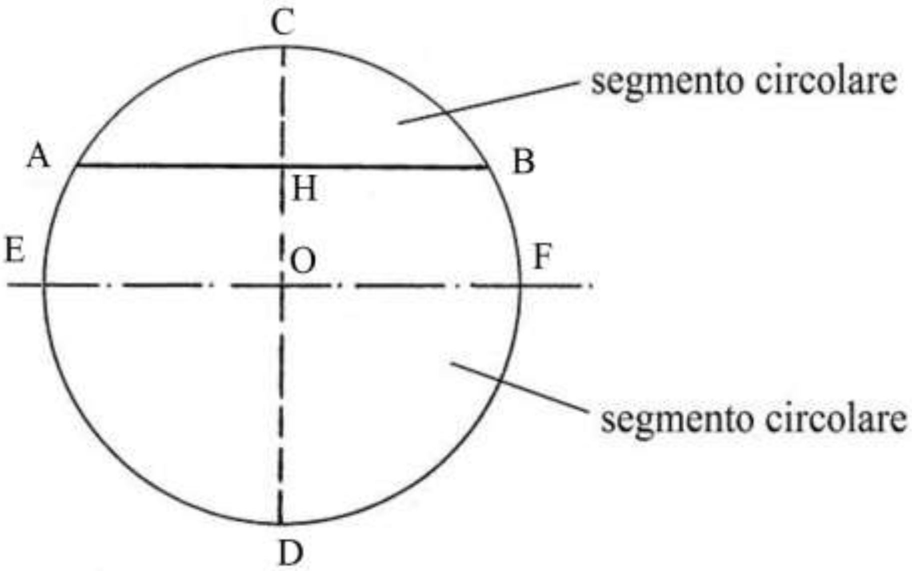
HD = (AH * HB)/CH = (5 * 5)/2 = 12,5 braccia .

Aggiungere la lunghezza della freccia CH a quella del segmento HD per ottenere la lunghezza del diametro CD:

CD = CH + HD = 2 + 12,5 = 14,5 braccia.

La soluzione di Paolo dell’Abbaco è corretta.

Nota: una corda divide un cerchio in *due* segmenti circolari:



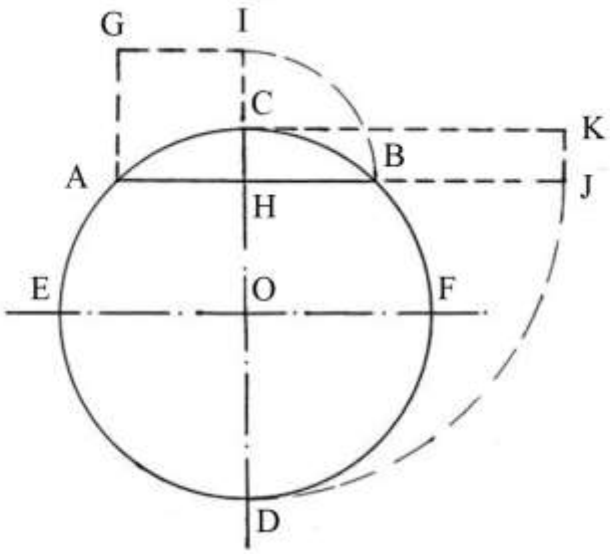
- APPROFONDIMENTO -

Il teorema delle corde

Dalla proposizione CH : AH = HB : HD deriva

CH * HD = AH * HB .

Costruire due quadrilateri con angoli retti, basati sulle lunghezze dei quattro segmenti che formano le due corde:

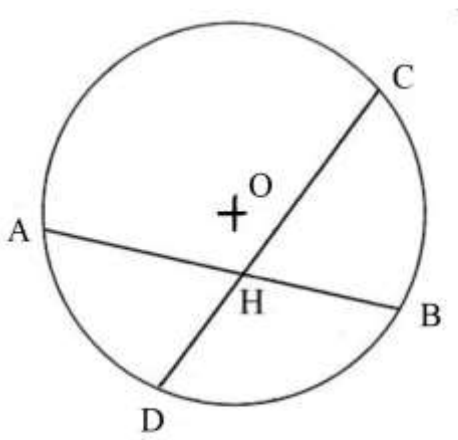


* il rettangolo [ma in questo caso è un quadrato perché AH = HB = HI] AGIH ha dimensioni AH x HB ;
* il rettangolo HCKJ che ha dimensioni CH x HD.

I due poligoni hanno *uguale superficie*.

La figura è un'applicazione del *teorema delle corde*: infatti le due corde, AB e CD, si intersecano ad angolo retto.

In generale, il teorema vale per qualunque coppia di corde che si incrociano all'interno di un cerchio, senza formare angoli particolari e senza che almeno una delle due sia un diametro, come è il caso della figura che segue:



Anche in questo caso vale la relazione

AH : DH = HC : HB da cui

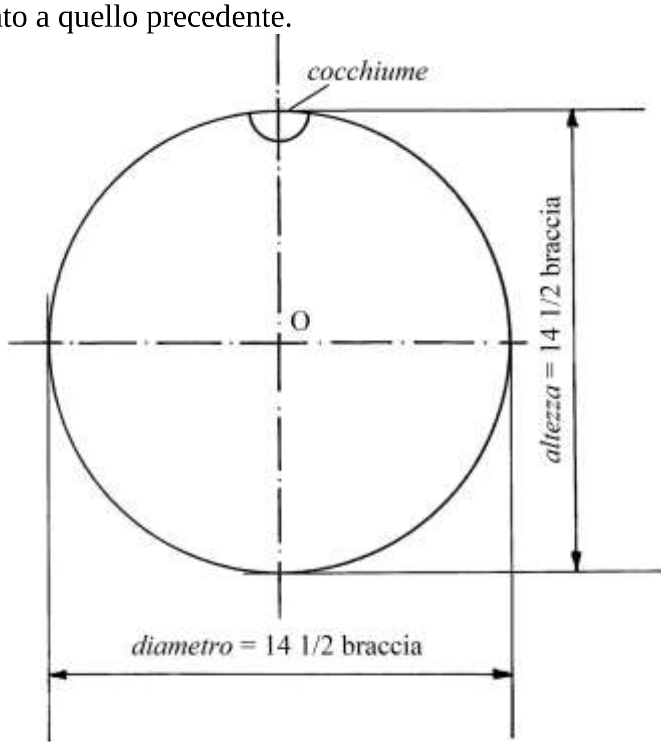
AH * HB = DH * HC .

Il teorema delle corde afferma: nel caso di due corde generiche interne a un cerchio e intersecantesi, il rettangolo costruito sui due segmenti di una corda ha la stessa superficie del rettangolo costruito sui segmenti dell'altra corda.

- -

[136] Area di un segmento circolare

Il problema è legato a quello precedente.



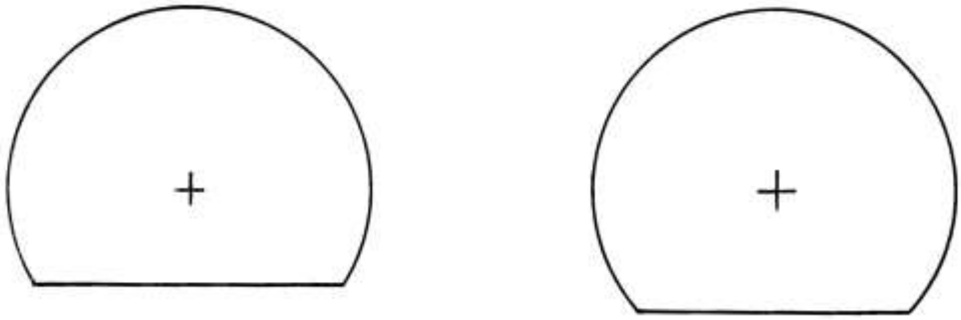
Paolo presenta l'esempio di una *botte* che vista in sezione verticale ha *altezza*, e cioè *diametro*, di 14,5 braccia; essa è lunga 8 braccia e ha uno *sciemo* [*scemo*].

Nota: Paolo dell'Abbaco è stato fra i primi abacisti a studiare i problemi relativi alla misurazione del contenuto delle botti.

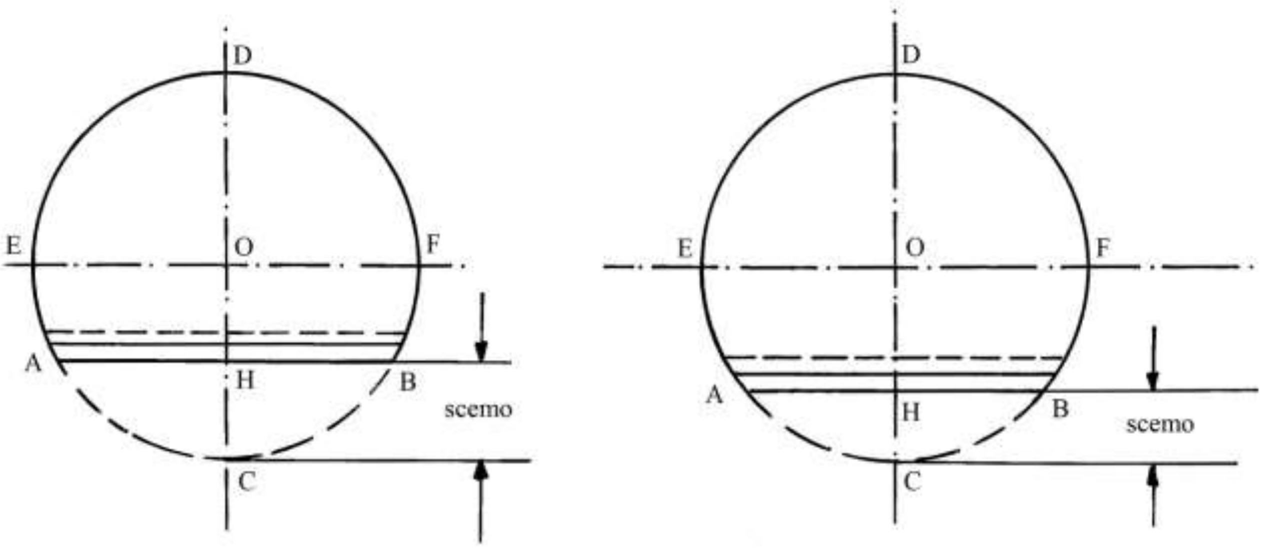
Lo *scemo* equivale alla freccia di un segmento circolare.

I numerosi problemi dedicati ai segmenti circolari nel *Trattato d'Aritmetica* possono essere un indizio dell'importanza della misura del contenuto delle botti presso gli Abacisti medievali? Paolo non fece alcun cenno al *cocchiume*: forse perché le botti avevano forma quasi cilindrica e il foro serviva soltanto per introdurre uno strumento per misurare il contenuto?

Nel *Trattato* il profilo della botte è disegnato rovesciato:

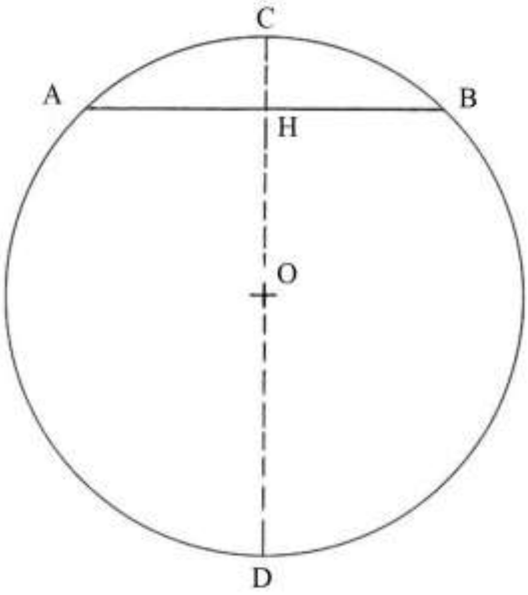


Lo schema che segue completa il precedente:



Questa particolare forma di rappresentazione è dovuta alla natura dei *calibri* graduati impiegati per misurare gli scemi?

Nella figura che segue (disegnata con lo scemo correttamente posizionato nella parte superiore del profilo), il segmento CH è lo *scemo* della botte che è lungo 2 braccia:



Il diametro CD è lungo 14,5 braccia, la corda AB è 10 e l'arco ACB 16 braccia. Infine, la botte è lunga 8 braccia.

Riguardo alla lunghezza di questo ultimo arco è ragionevole avanzare qualche dubbio sull'esattezza del valore indicato nel *Trattato*: ACB dovrebbe essere lungo poco più di 11 braccia anziché 16.

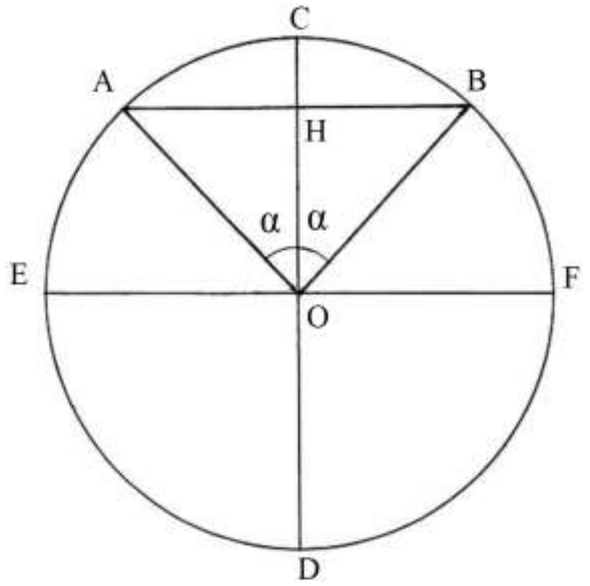
Il problema chiede di calcolare l'area dello scemo (più correttamente l'area del segmento circolare che ha per freccia lo scemo) in braccia quadrate.

La procedura impiegata contiene i seguenti passi:

* dividere per 2 la lunghezza del diametro: 14,5 : 2 = 7,25 ;
* dividere per 2 la lunghezza dell'arco [ACB]: 16 : 2 = 8 ;
* moltiplicare i due quozienti: 7,25 * 8 = 58 ;
* sottrarre lo scemo [la freccia CH] dalla metà del diametro: 7,25 – 2 = 5,25 [che è la lunghezza di HO] ;
* dividere per 2 la lunghezza della corda [AB]: 10 : 2 = 5 ;
* moltiplicare i due ultimi quozienti: 5,25 * 5 = 26,25 ;
* sottrarre questo prodotto da 58: 58 – 26,25 = 31,75 braccia^2 che è l'area dello scemo (e cioè del settore circolare ACBH) ;
* moltiplicare 31,75 per la lunghezza della botte: 31,75 * 8 = 254 braccia cubiche, volume dello scemo lungo tutta la botte.

- APPROFONDIMENTO -

Come già detto, Paolo dell'Abbaco fissò in 16 braccia la lunghezza dell'arco di circonferenza ACB.



Verifichiamo il dato con l'aiuto di un po' di trigonometria.
Le lunghezze dei segmenti presenti nella figura qui sopra sono le seguenti:

* CH = 2 braccia ;
* AB = 10 braccia ;
* AH = HB = 5 braccia ;
* HO = 5,25 braccia ;
* CD = 14,5 braccia.

L'angolo HOB è α ed ha la stessa ampiezza dell'angolo HOA.
La tangente dell'angolo α è data da:

$$\text{tg}\ \alpha = HB/HO = 5/5{,}25 \approx 0{,}9523\ .$$

Ad essa corrisponde un angolo α ≈ 43° 35'.
L'angolo AOB è ampio il doppio e quindi è ≈ 87° 10'.
L'arco ACB ha lunghezza proporzionale all'ampiezza dell'angolo 2*α.
Possiamo ricavare la lunghezza dell'arco ACB con la seguente proporzione:

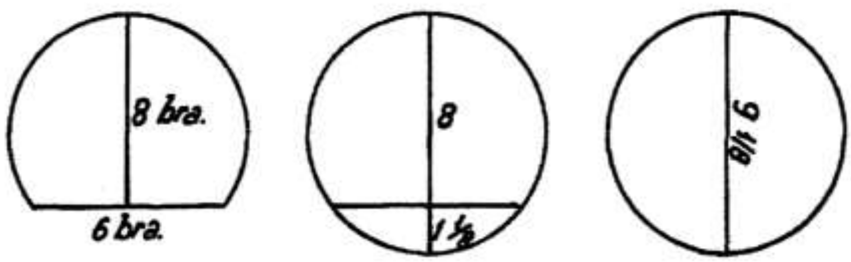
ACB : circonferenza = 2*α : 360°
ACB = circonferenza * (2*α)/360 ≈ [(22/7) * 14,5 * (87° 10')/360] ≈
≈ 11,0341 braccia .

Il valore di 16 braccia indicato da Paolo dell'Abbaco è grandemente errato *per eccesso*.

- -

[137] Segmento circolare

Un segmento circolare è più grande di mezzo cerchio:



La corda è lunga 6 braccia e la freccia è 8 braccia.

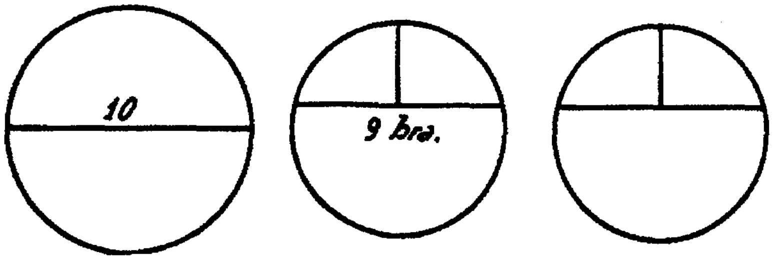
Il problema chiede il diametro del cerchio originario.

La procedura impiegata è la seguente:

* dividere per 2 la lunghezza della corda: $6 : 2 = 3$;
* moltiplicare per sé stessa: $3 * 3 = 9$;
* dividere per la lunghezza della freccia: $9 : 8 = 1 + 1/8$;
* sommare alla lunghezza della freccia: $(1 + 1/8) + 8 = 9 + 1/8$ braccia, diametro del cerchio di origine.

[138] Freccia di un settore circolare

Un cerchio ha diametro 10 braccia. Al suo interno è tracciata una corda lunga 9 braccia: il problema chiede di calcolare la lunghezza della freccia:



La procedura impiegata è la seguente:

* dividere per 2 il diametro: $10 :2 = 5$;
* moltiplicare per sé stesso: $5 * 5 = 25$;
* dividere per 2 la lunghezza della corda: $9 : 2 = 4,5$;
* moltiplicare per sé stessa: $4,5 * 4,5 = 20,25$;
* sottrarre l'ultimo prodotto da 25: $25 – 20,25 = 4,75$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{(4,75)}$ braccia, lunghezza di HO;
* sottrarre questo ultimo dato dal raggio 5: $[5 - \sqrt{(4,75)}]$ braccia, lunghezza della freccia CH.

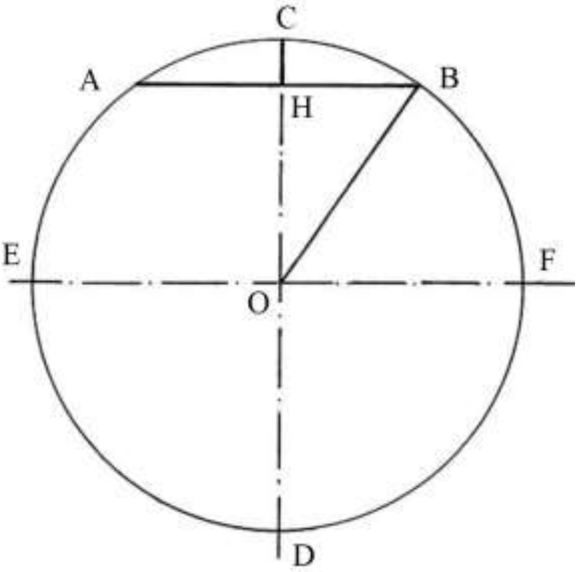
La procedura può essere riassunta nella seguente formula:

$$HO = \sqrt{[d/2)^2 – (corda/2)^2]} .$$

Il segmento HO è un cateto del triangolo rettangolo OHB: l'Autore ha applicato il teorema di Pitagora a questo triangolo.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Una variante del problema chiede di calcolare la lunghezza della corda [AB] conoscendo quella della freccia [CH], lunga 1 braccio:



La procedura impiegata è simile a quella del caso precedente:

* moltiplicare la lunghezza del diametro per sé stessa: $10 * 10 = 100$;
* moltiplicare per 2 la lunghezza della freccia: $1 * 2 = 2$;
* sottrarre 2 dalla lunghezza del diametro: $10 - 2 = 8$;
* moltiplicare per sé stesso: $8 * 8 = 64$;
* sottrarre l'ultimo prodotto da 100: $100 - 64 = 36$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{36} = 6$ braccia, lunghezza della corda AB.

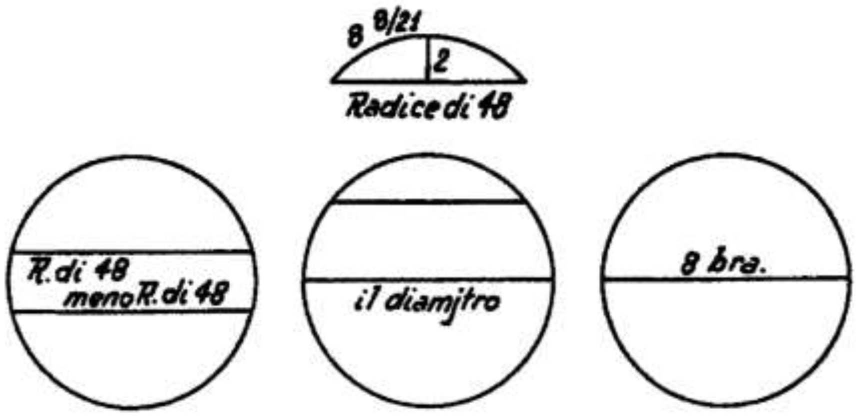
La procedura è riassunta dalla formula

$$AB = \sqrt{[d^2 - (d - 2*f)^2]}$$, nella quale *d* è il diametro e *f* la freccia.

[139] <u>Area di un segmento circolare</u>

Il problema collega chiaramente l'area di un segmento circolare alla misura degli scemi, con queste espressioni:

"*Diciamo deglj sciemj de tondi, e diciamo quando glj volexximo rechare a braccia quadre volendo sapere quanto foxxe la sua poxxexxione e pongnamo che xia uno tondo sciemo, cioè uno pezzo di tondo, che xia lo xuo archo 8 braccia e 8/21 di braccio e lla sua corda sia radicie di 48, sì chome dee, e lla sua saetta sia 2 braccia. E io voglo sapere quanto sarae la sua poxxexxione …*"



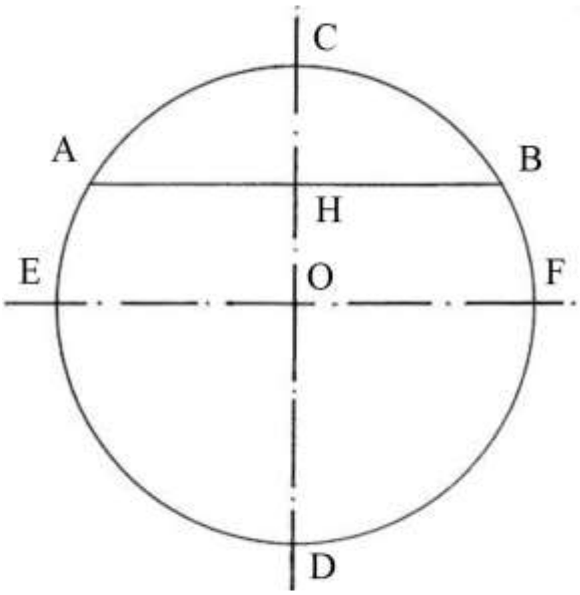
Il termine *poxxexxione* sta per *possessione* e cioè *area* di una figura piana.

Il segmento circolare è delimitato da un arco lungo (8 + 8/21) braccia, ha freccia di 2 braccia e corda lunga $\sqrt{(48)}$ braccia.

Il problema chiede di calcolare l'area del segmento.

La procedura impiegata muove dalla ricerca della lunghezza incognita del diametro del cerchio da cui è stato ritagliato il segmento circolare: il metodo è stato applicato nella soluzione del precedente problema [135]:

* dividere per 2 la lunghezza della corda: $\sqrt{(48)} : 2 = [\sqrt{(48)}]/2$;
* moltiplicare per sé stessa: $\{[\sqrt{(48)}]/2\}^2 = 48/4 = 12$;
* dividere il risultato per la lunghezza della freccia: $12 : 2 = 6$;
* sommare la lunghezza della freccia con l'ultimo quoziente: $2 + 6 = 8$ braccia, diametro del cerchio.



La procedura per risolvere questo nuovo problema contiene i seguenti passi:

* dividere per 2 la lunghezza del diametro: $8 : 2 = 4$;
* dividere per 2 la lunghezza dell'arco di circonferenza: $(8 + 8/21) : 2 = (4 + 4/21)$;
* moltiplicare i due ultimi quozienti: $4 * (4 + 4/21) = 16 + 16/21$;
* sottrarre la lunghezza della freccia dalla metà del diametro: $4 – 2 = 2$ braccia [che è la lunghezza di HO] ;
* dividere per 2 la lunghezza della corda: $[\sqrt{(48)}]/2 = \sqrt{(48/4)} = \sqrt{(12)}$;
* moltiplicare l'ultimo quoziente per la lunghezza di [HO]: $\sqrt{(12)} * 2 = \sqrt{(48)}$;

* sottrarre l’ultimo prodotto da (16 + 16/21): (16 + 16/21 – √48) braccia^2 , area del segmento circolare.

La procedura è sintetizzata nella formula che segue:

Area $_{\text{SEGMENTO CIRCOLARE}}$ = (d/2 * arco/2) – [(d/2 – freccia) * corda]/2 .

Nota: il disegno contenuto nel *Trattato* è fuori scala, come spiega l’ultima figura qui sopra.

- APPROFONDIMENTO -

La formula per calcolare l’area di un segmento circolare è:

Area $_{\text{SEGMENTO CIRCOLARE}}$ = [R * (arco – corda) + corda*freccia]/2 , con *R* raggio del cerchio.

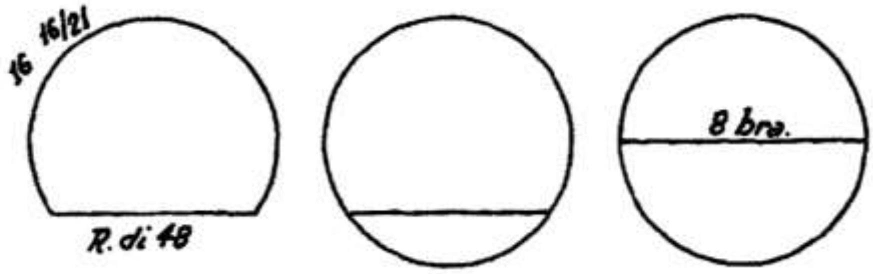
In questo caso Area $_{\text{SEGMENTO CIRCOLARE}}$ vale:

Area $_{\text{SEGMENTO CIRCOLARE}}$ = {4 * [8 + 8/21 – √(48)] + [√(48) * 2]}/2 =
= 2 * [8 + 8/21 – √(48)] + √(48) = 16 + 16/21 – 2 * √(48) + √(48) =
= [16 + 16/21 – √(48)] braccia^2.

- -

[140] Area di un segmento circolare

Il problema è strettamente collegato al precedente: questo considera il settore complementare a quello di area minore di mezzo cerchio e quindi di area maggiore.



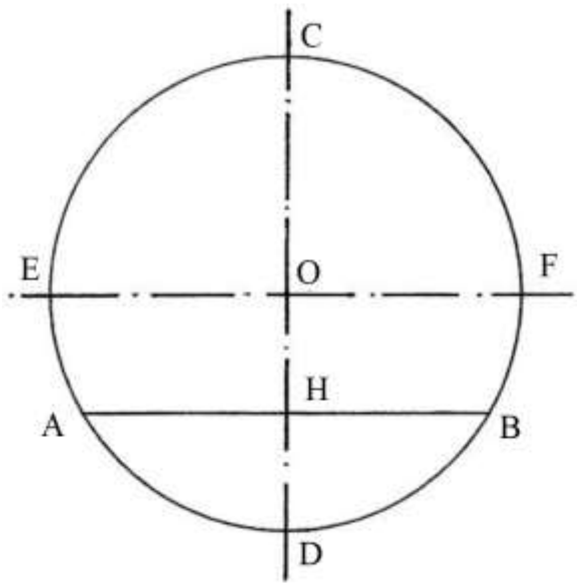
L’arco di circonferenza AECFB è lungo (16 + 16/21) braccia. Verifichiamo la correttezza del dato.

Il diametro del cerchio *d* è 8 braccia e la circonferenza *c* è lunga:

$c = \pi * d \approx (22/7) * 8 \approx 25 + 1/7$ braccia.

Sottraendo dalla lunghezza della circonferenza quella dell’arco AECFB si ha:

(25 + 1/7) – (16 + 16/21) = 8 + 8/21 braccia, lunghezza dell’arco ADB che corrisponde a quella del settore del precedente problema.



La freccia CH è lunga 6 braccia.
Il problema chiede l'area del segmento circolare.
La procedura applicata per calcolarla è la seguente:

* determinare l'area del cerchio da cui il segmento circolare è ricavato:
Area ≈ (22/7) * raggio^2 ≈ (22/7) * 4^2 ≈ (50 + 2/7) braccia^2 ;

* sottrarre l'area dello *scemo* ricavata con la procedura risolutiva del precedente problema:
(50 + 2/7) – [16 + 16/21 – √(48)] = (1050 + 6)/21 – (336 + 16)/21 + √(48) =
= (33 + 11/21 + √48) braccia^2, area del segmento circolare.

\- APPROFONDIMENTO -

Applichiamo di nuovo la formula vista in precedenza per calcolare l'area di questo segmento circolare.

L'arco è lungo (16 + 16/21) braccia, la corda è √48 e la freccia è 6 braccia. Il raggio *R* del cerchio è 4 braccia.

Ecco il risultato:

Area $_{\text{SEGMENTO CIRCOLARE}}$ = [4 * (16 + 16/21 – √48) + 6 * √48]/2 =
= 2 * (16 + 16/21 – √48) + 3 * √48) = 32 + 32/21 – 2 * √48 + 3 * √48 =
= (33 + 11/21 + √48) braccia^2.

L'area del cerchio è:

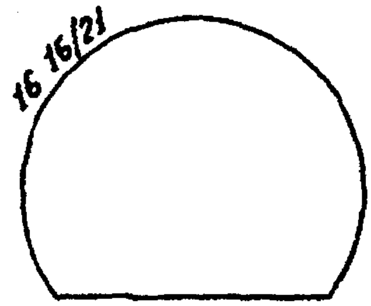
Area $_{\text{CERCHIO}}$ ≈ (22/7) * raggio^2 = (22/7) * 4^2 = (22/7) * 16 = 50 + 2/7 braccia^2.

La riprova dell'esattezza dei calcoli di Paolo dell'Abbaco riguardo alla soluzione dei problemi [139] e [140] è data da:

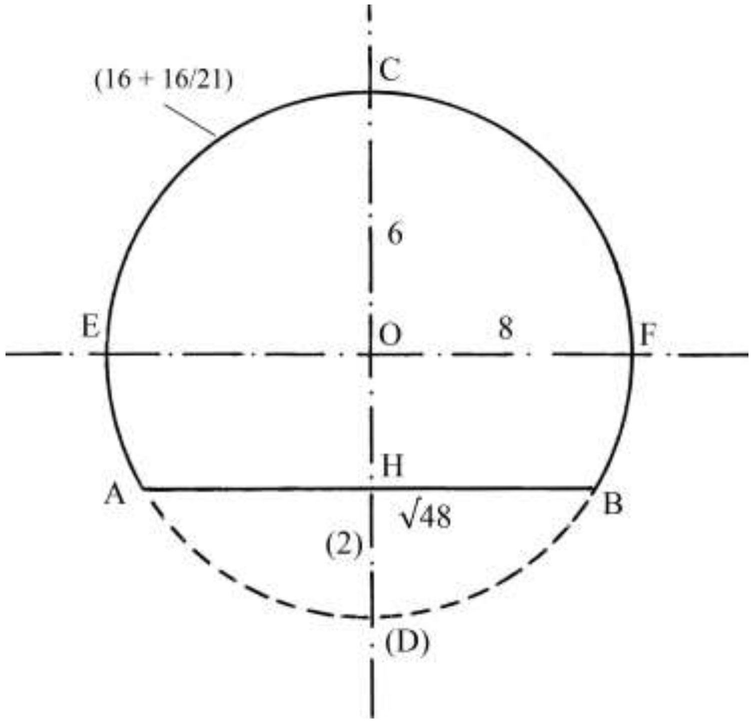
Area $_{\text{CERCHIO}}$ = area $_{\text{SEGMENTO CIRCOLARE}}$ 1 + area $_{\text{SEGMENTO CIRCOLARE}}$ 2 =
= (16 + 16/21 – √48) + (33 + 11/21 + √48) = 49 + 27/21 = 49 + 9/7 = 50 + 2/7 braccia^2.

\- -

[141] <u>Area di un segmento circolare</u>



L'area del segmento circolare di cui al problema [140] è calcolata con una diversa procedura. Prima di descriverne i passi, con l'aiuto dello schema che segue è utile riepilogare i dati del problema:



Il diametro del cerchio è 8 braccia, l'arco AECFB è lungo (16 + 6/21), la corda AB è √48, la freccia CH è lunga 6 e la freccia H(D) è 2 braccia.

I passi della nuova procedura sono:

* dividere per 2 la lunghezza dell'arco di circonferenza: (16 + 16/21) : 2 = (8 + 8/21) ;
* moltiplicare per metà della lunghezza del diametro: 4 * (8 + 8/21) = (33 + 11/21) braccia^2;
* dividere per 2 la lunghezza la lunghezza della corda: (√48)/2 ;
* moltiplicare per la lunghezza di HO [HO = CH – CO = 6 – 8/2 = 2]: (√48)/2 * 2 = √48 braccia^2 ;
* aggiungere √48: [(33 + 11/21) + √48] braccia^2, area di questo segmento circolare.

Le *Regoluzze* di Paolo dell'Abbaco

Le *Regoluzze* di Paolo dell'Abbaco sono state pubblicate in più occasioni: forse la prima è stata quella a cura di Guglielmo Libri:

> Da "*Regoluzze del maestro Pagholo astrolagho*", trascrizione da pagina 300 del tomo III dell'"*Histoire des sciences mathématiques en Italie*":
>
> "49. [XLIX] *Se vuolgli sapere la capacita della botte pilglia la sua alteza e lungheza chonuno ¼ di bra eppoi agiungni al alteza il 1/10 e mult. Per se medesimo eppoi nella lunghezza eppoi per 8. E parti in 13. Usceranne quanti quarti di vino tiene la botte e 10. qarti sono 1° barile.*"

Da questa descrizione è possibile ricavare una formula per calcolare il volume della botte, formula nella quale sono presenti le seguenti variabili:

* *D*, altezza (*diametro*) della botte, misurato in quarti di braccio da panno;
* *h*, lunghezza della botte, anche essa espressa in quarti di braccio.

La formula è:

$$V = [(D + 11/10 * h)]^2 * h * 8/13.$$

Come già detto, *D* e *h* sono misurati in *quarti di braccio da panno*, unità equivalente a *5 soldi* e corrispondente a 14,59065 cm.

Il volume V sarebbe espresso in *quarti* (ovviamente *cubici*), con l'indicazione che 10 quarti[3] sarebbero equivalenti a 1 *barile*.

È necessario un chiarimento.

Le antiche unità di misura usate a Firenze per la misura del vino erano le seguenti (fonte: Martini):

*	1 soma da vino	=	2 barili	≈ 91,168082 litri;
*	1 barile da vino	=	20 fiaschi	≈ 45,584041 litri;
*	1 fiasco	=	2 boccali	≈ 2,279204 litri;
*	1 boccale	=	2 mezzette	≈ 1,139602 litri;
*	1 mezzetta	=	2 quartucci	≈ 0,569801 litri;
*	1 quartuccio			≈ 0,284901 litri.

Ad esse va aggiunto il *quarto* citato da Paolo dell'Abbaco, del valore di:

1 quarto = 1/10 di barile ≈ 4,5584061 litri = 16 quartucci.

La *mezzetta* corrispondeva alla *metadella*.

Un barile valeva 80 mezzette o metadelle.

Dato che l'unità base della lunghezza lineare era il *braccio da panno*, l'unità di volume da essa derivata era il *braccio*^{3}; valeva l'uguaglianza:

$$1 \text{ braccio}^3 = 5 \text{ barili}.$$

Nel suo trattato "*Compendium de Agrorum corporumque dimensione*" l'abacista fiorentino Pier Maria Calandri (1457 – 1508) chiamò il *braccio da panno cubico* con l'espressione *braccio quadro corporeo*.

Per volumi maggiori di vino, a Firenze era usato un altro multiplo del barile: il *cogno fiorentino* (plurale cogni o cogna) che equivaleva a 10 barili (e cioè ≈ 455,804 litri). Nel *Tractato d'Abbacho* oggi attribuito a Maestro Benedetto da Firenze, l'unità al plurale è scritta *chognia*. Il cogno era pure la quantità di olio lasciata al proprietario di un frantoio per la spremitura delle olive.

Un cogno equivaleva a 2 braccia^3 e quindi a 10 barili.

Il cogno prevedeva due sottomultipli:

* 1 orcio = 1/12 di cogno;
* 1 sestario = 1/6 di cogno = 2 orci.

A Firenze, l'unità *orcio* era usata quale sinonimo di *barile d'olio*.

Il *Tractato d'Abbacho* di Maestro Benedetto contiene numerosi riferimenti al cogno e in particolare riguardo alla descrizione delle unità di misura impiegate a Firenze a metà del XV secolo.

La "regola del 60"

Paolo dell'Abbaco propose un'altra regola per il calcolo degli scemi. Essa è contenuta in un codice della Biblioteca di S. Pantaleo a Roma (attribuito al XV secolo) e nel codice C. III.23 della Biblioteca Comunale di Siena: entrambi gli estratti sono riportati alle pp. 383-384 del testo del principe Baldassarre Boncompagni citato in bibliografia.

Il metodo è conosciuto come "*Regola del 60*".

Nel primo codice sono contenuti la tabella e il testo che seguono:

» Questi sono gli sciemi del 60 fatti per maestro pagholo da firenze

» 1	0	14	Vuolsi prima uedere quanti ponti sia lo
» 2	0	37	isciemo poniano adunque cheldiamitro
» 3	1	8	di tutta Labotte sia 89 punti. ellasaetta
» 4	1	43	delloisciemo sia 8 punti vuolsone trar-
» 5	2	24	re Laquarta parte cheresta 6 , eque-
» 6	3	7	sto 6 moltipricha per 60, che fa 360 , que-
» 7	3	55	sto 360 siuole diuidere per la alteza deponti
» 8	4	46	di tutta Labotte, cioe per 89 che ildiamitro
» 9	5	38	cheneuienc 4 $\frac{2}{17}$, equesto 4 $\frac{2}{27}$ guarda
» 10	6	35	in questa tauola q , cioe a 4, inpero che
» 11	7	33	rotti nonsiqurono molto etrouarrai incon-
» 12	8	33	tro a .4.1. $\frac{43}{60}$ settiuenisse solamente
» 13	9	25	
» 14	10	38	4. 1. $\frac{43}{60}$ per che questo $\frac{43}{60}$ pui.dire 1 $\frac{2}{3}$ Mol-
» 15	11	44	
» 16	12	51	tipricha per leistaia chetiene Labotte eque-
» 17	13	59	llo che fa parti per 60, etantto é lo isciemo
» 18	15	8	chetucierchi disapere , maperche tiuiene
» 19	16	19	4 $\frac{2}{17}$ o , guarda Ladiferenzia inchontro a
» 20	17	31	
» 21	18	43	numeri cherispondono intral. 4; el. 5.
» 22	19	57	chesono $\frac{41}{60}$ il quale n.° diuidi per 2 settani,
» 23	21	10	
» 24	22	25	che viene quasi 12 ma perche 4 Rispon-
» 26	24	56	deua $\frac{43}{60}$ ragiugnj 12 , chesaranno 1 $\frac{55}{60}$
» 27	26	11	i quagli siuogliono moltiprichare perle istaia
» 28	27	28	che tiene Labotte , e poi quello che fanno
» 29	28	44	siuole partire per 60 , chearai Losciemo
» 30	30	0	che domandj. »

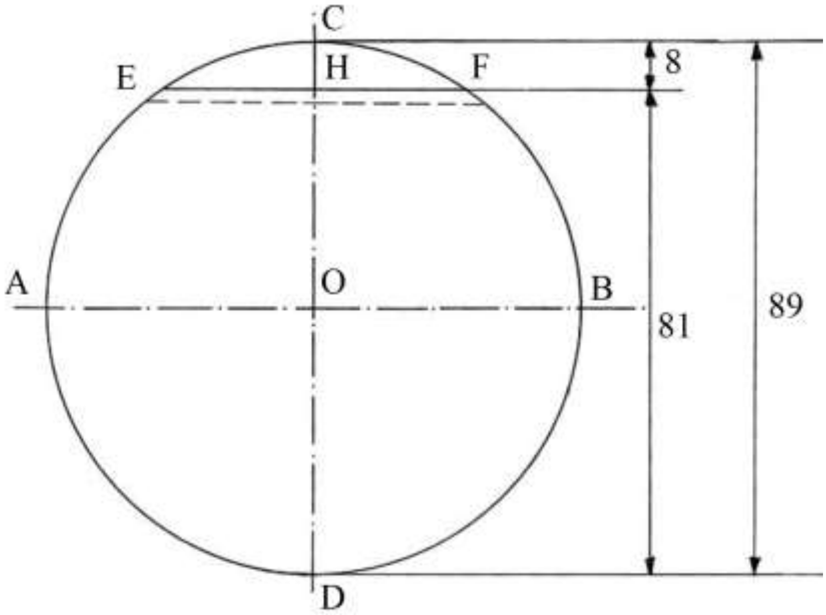
Per maggiore chiarezza la tabella è riprodotta qui di seguito:

1	0	14
2	0	37
3	1	8
4	1	43
5	2	24
6	3	7
7	3	55
8	4	46
9	5	38
10	6	35
11	7	33
12	8	33
13	9	25
14	10	38
15	11	44
16	12	51
17	13	59
18	15	8
19	16	19
20	17	31
21	18	43
22	19	57
23	21	10
24	22	25
25 (*)		
26	24	56
27	26	11
28	27	28
29	28	44
30	30	0

(*) Nel codice di S. Pantaleo, la linea 25 è omessa.

Sia i coefficienti contenuti in questa tabella che quelli presenti nella tabella attribuita a Tommaso della Gazzaia (vedere il prossimo capitolo) sono *numeri puri*, adimensionali e cioè non espressi in alcuna unità di misura.

L’esempio contenuto nel manoscritto è spiegato di seguito con l’aiuto di uno schema:



Una botte ha diametro CD lungo 89 *punti* (*ponti* nel testo) e la *saetta* (CH nella figura) è 8 punti: la *saetta* o *freccia* corrisponde allo *scemo*.

Ecco i passi della procedura attribuita a Paolo dell'Abbaco [*Maestro Pagholo da Firenze*]:

* dividere per 4 la lunghezza della saetta: 8 : 4 = 2 ;
* sottrarre dalla lunghezza della saetta: 8 – 2 = 6 ;
* moltiplicare per 60: v 6 * 60 = 360 ;
* dividere per il diametro: 360 : 89 = 4 + 4/89 [Paolo dà due risultati errati per eccesso: (4 + 2/17) e (4 + 2/27)] ;
* leggere sulla tabella i valori corrispondenti all'intero 4: il risultato è [4] "1 .43/60" ;
* approssimare per difetto l'espressione (1 + 43/60) a (1 + 40/60) e quindi semplificare a (1 + 2/3) ;
* effettuare un'interpolazione fra i valori contenuti nella tabella alle righe 4 e 5:

```
     [5]    2      24 –
     [4]    1      43 =
-----------------------------
            1      24 – 43 =
            0      60 + 24 – 43 =
-----------------------------
                   41 →  41/60 ;
```

* moltiplicare il *numeratore* dell'ultima frazione per *2 settani* [forse *settimi*?]: 41 * 2/7 ≈ 11,71 → 12 ;
* addizionare il precedente quoziente approssimato per eccesso, 12, al numeratore della frazione 43/60: (43 + 12)/60 = 55/60 ;
* aggiungere "1" al precedente risultato {recuperando la sottrazione fra le righe [5] e [4] della tabella}: 1 + 55/60 ;
* moltiplicare il numero misto (1 + 55/60) per la capacità V in *staia* della botte: V * (1 + 55/60) ;
* dividere per 60: S = [V * (1 + 55/60]/60, valore del volume dello scemo S in *staia* .

La procedura appena esposta è certamente assai ingarbugliata.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Nel codice C. III.23 della Biblioteca Comunale di Siena citato in precedenza, al *verso* della carta 277, è il problema che segue, anch'esso risolto con l'applicazione della *Regola del 60 fatta per Maestro Pavolo* [Paolo dell'Abbaco] *da Firenze*.

Nel rovescio della carta 277 di un Codice della Biblioteca Pubblica Comunale di Siena contrassegnato *C. III*. 23, cioè *Scaffale C., Gradino III, n.°* 23, si legge:

» Qui apresso sarà scritta la tavola e la regola da cogliare li » scemi per la regola del 60 fatta per Maestro Pavolo da Firenze.

» Lo scemo si piglia per questa tavola scritta qui dietro con » questa Regola. Poniamo che la botte sia alta per lo suo diame- » tro 72. ponti, e lo scemo sia 24. ponti trattone la diferentia. » Per tanto pigliaremo e detti ponti de lo scemo netti de la diferen- » tia, e diremo 24 via 60 fa 1440, e questo parte per lo diame- » tro de la botte, cioè per 72. che ne viene 20., mira la tavola » chetti da 20., che vedi ti da 17 $\frac{31}{60}$. Ora questo montiplica co » la tenuta de la botte che poniamo tenga staja 18, e di 18 via » 17 $\frac{31}{60}$ fa 315 $\frac{18}{60}$, e questo parte per 60 che ne viene, puoi » dire: staja 5. quartucci 16 e tanto è scema la botte; cioè staja » 5 $\frac{1}{4}$, e de fatta; e questa è la Regola del 60. »

Il suddetto Codice *C. III*. 23. della Biblioteca Pubblica Comunale di Siena è cartaceo in foglio, di 290 carte, e della fine del secolo decimosettimo, o del principio del secolo decimottavo (1).

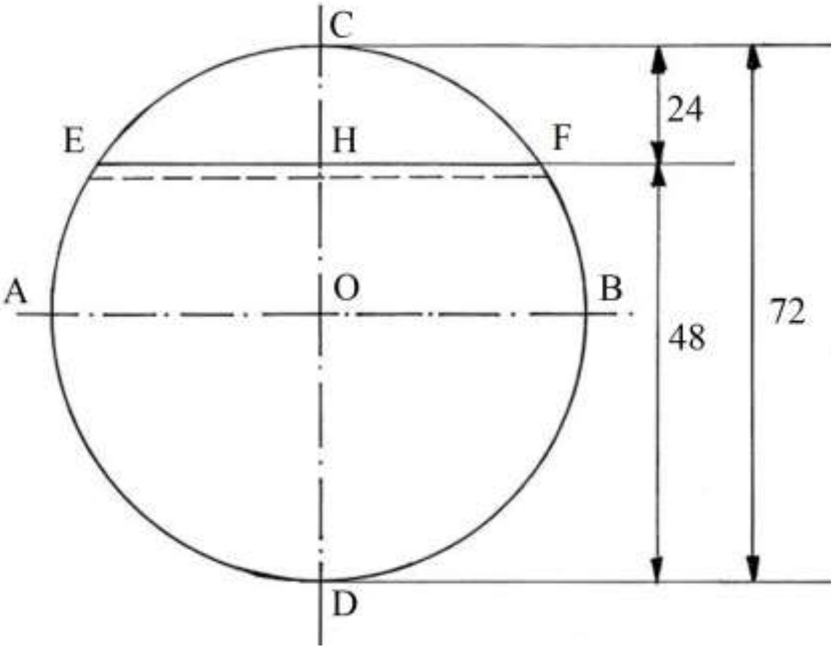
(1) Nel catalogo della Biblioteca Pubblica Comunale di Siena pubblicato dal Sig. Lorenzo Ilari si legge (*La Biblioteca Pubblica di Siena disposta secondo le materie da Lorenzo Ilari, Siena* 1844—1848. *Tipografia all'Insegna dell'Ancora Via delle Terme N.°* 976, 7 tomi, in 4°, t. III, pag. 6, col. 1)

„ * AGAZZARI, alias Misser TOMMASO de la Gazzaja, Trat- „ tato di aritmetica, algebra e geometria, ove si trova- „ no notati i pesi e misure, come pure le monete di „ varie piazze del mondo, ed i loro ragguagli, opera

Il manoscritto è attribuito a Tommaso della Gazzaia, autore sul quale torneremo nel capitolo successivo.

Ecco la descrizione del problema con l'ausilio di uno schema.

Una botte ha diametro CA lungo 72 *ponti* [punti] e lo scemo CH è 24:



La procedura impiegata contiene i seguenti passi:

* sottrarre lo scemo [CH] dal pieno [HD]: $48 - 24 = 24$;
* moltiplicare per 60: $24 * 60 = 1440$;
* dividere per il diametro CD: $1440 : 72 = 20$;
* consultare la tabella alla riga 20: i dati letti sono $17 + 31/60$;
* moltiplicare per la capacità della botte, 18 *staia*: $(17 + 31/60) * 18 =$
$= 315 + 3/10 = 315 + 18/60$;
* dividere per 60: $(315 + 18/60)/60 = 315/60 + 18/3600 = 5 + 15/60 + 18/3600 \approx$
$\approx 5 + 15/60 \approx 5$ staia $+ 15/60 *$ staia ≈ 5 staia $+ 16$ quartucci .

In questo esempio è usata l'unità di capacità *staio*, equivalente a *64 quartucci*:

1 staio ≈ 64 quartucci ≈ 64 * 0,284901 litri ≈ 18,233664 litri.

Le unità di misura appena utilizzate erano quelle impiegate a Siena: l'argomento è approfondito nel capitolo che segue.

\- APPROFONDIMENTO -

Il successo dei *punti*

La definizione dell'unità di lunghezza convenzionale *ponti* o *punti* introdotta per primo da Paolo dell'Abbaco per la misura delle botti ha riscosso un notevole successo: essa è stata usata da molti altri Autori che si sono occupati dello stesso argomento e in particolare dei metodi per la misura degli *scemi*.

Vanno ricordati:

* Giovanni de' Danti;
* Tommaso della Gazzaia;
* Orbetano da Montepulciano;
* Giovanni Sfortunati;
* Bastiano da Pisa;
* Antonio di Marchionne;

* Pier Dionigi Veglia;
* Baldassarre Orsini.

Attualmente, il *punto* è un'unità utilizzata per compilare graduatorie nei concorsi pubblici, nelle gare d'appalto, nelle gare sportive e nelle raccolte premi effettuate ad esempio dai Supermercati. Da tutto ciò è derivata la larga diffusione del sostantivo *punteggio*.

- -

<u>GIOVANNI DE' DANTI</u>

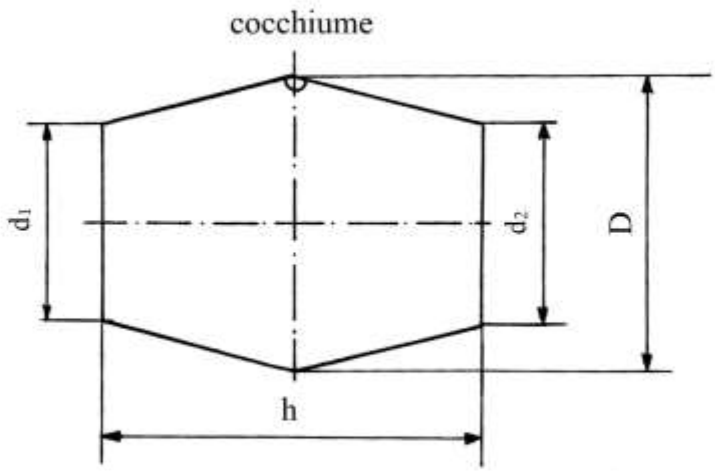
Gino Arrighi ha pubblicato la trascrizione di un "*Tractato de l'algorisimo*" attribuito all'aretino Giovanni de' Danti. Il manoscritto è conservato nella Biblioteca Medicea Laurenziana di Firenze e reca la data del 1370.

Nello stesso codice è contenuto anche un "*Tractato de l'arte de la geumetria*" dello stesso Autore: in esso è affrontato, fra l'altro, il tema della misura del contenuto delle botti.

In calce alla trascrizione del primo testo, Gino Arrighi ha pubblicato un piccolo estratto del secondo, contenente alcune indicazioni sulla misura delle botti.

La misura di una botte è fatta dal Danti ricavando il diametro del fondo anteriore, d_1, e quello del fondo posteriore, d_2, sommandoli e dividendo per 2: il risultato è il diametro medio, d_m:

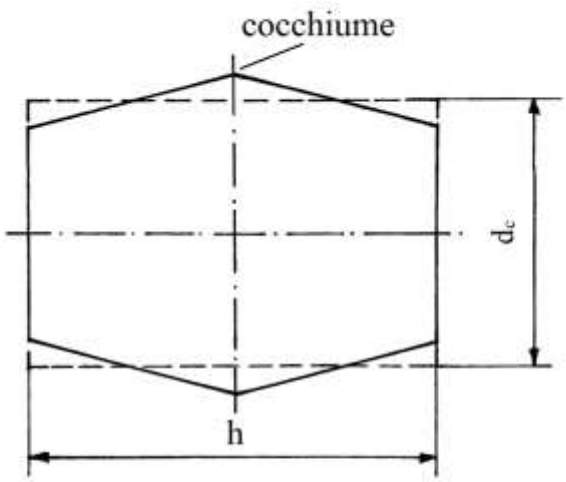
$$(d_1 + d_2)/2 = d_m.$$



Il passo successivo è la misura del diametro della botte al centro (in corrispondenza del cocchiume), D.

Il *diametro convenzionale d_c* della botte è:

$$(d_m + D)/2 = d_c.$$



Danti assimila la botte originaria, a forma di due tronchi di cono, a un cilindro che la stessa altezza, *h*, e diametro d_c.

Sia la botte originaria che il solido equivalente sono due solidi di rotazione.

L'area S_c convenzionale della sezione trasversale del cilindro è:

$$S_c = 11/14 * (d_c)^2.$$

Il volume convenzionale del cilindro (e della botte originaria) è:

$$V_c = S_c * h = 11/14 * (d_c)^2 * h.$$

Danti cita alcune unità di misura usate a Arezzo: braccio, metadella, atomo, punto, oncia, barile e cogno. L'*atomo* era un sottomultiplo del *punto*.

Egli descrive brevemente alcune unità di misura usate anche a Sansepolcro (all'epoca Borgo San Sepolcro), Perugia, Gubbio, Firenze, Siena, Montepulciano, Orvieto, Abbadia San Salvatore e Piancastagnaio. Il suo contributo è interessante per la conoscenza delle unità di misura impiegate in quei Comuni medievali.

È probabile che all'epoca in cui Danti scriveva le dimensioni geometriche delle botti fossero misurate in braccia (le lunghezze), in braccia quadre (le aree) e in braccia cubiche (i volumi).

Alla carta 57 *verso* del testo di "*geumetria*" Giovanni de' Danti *sembra* presentare una progressione dei rapporti fra le unità di misura volumetriche del vino per Arezzo che è qui suggerita a puro titolo di *ipotesi*:

* 1 tavola = 12 braccia^3 [*taula* nel testo originale];
* 1 braccio^3 = 12 once^3;
* 1 oncia^3 = 12 punti^3 [*ponti* nel testo originale];
* 1 punto^3 = 12 atomi^3 [*actimi* nel testo originale].

Al vertice della progressione sarebbe il barile:

1 barile = 12 tavole.

Sia consentito esprimere qualche perplessità sulla *taula* = tavola quale unità di misura del volume.

La consultazione delle pagine dedicate alle unità di misura di Arezzo contenute nelle "Tavole di Ragguaglio per la riduzione dei pesi e misure che si usano in diversi luoghi del Granducato di Toscana al peso e misura vegliante in Firenze", pubblicate nel 1782 serve a poco: esse furono approntate oltre *quattrocento* anni dopo la compilazione del trattato di Giovanni de' Danti.

L'altezza del vino contenuto in una botte (o la misura dello *scemo*) veniva misurata con l'aiuto di aste di legno o di "ferro" chiamate *staggioli*, *voli* o *ciuchollo* (a Firenze) [*ciccolo*?].

Danti preparò delle apposite tabelle grazie alle quali era possibile ricavare il volume del vino contenuto in una botte conoscendo le sue dimensioni e il valore dello scemo: forse egli subì l'influenza del lavoro di Paolo dell'Abbaco che Arrighi individua nel "Paulo" citato da Danti fra le sue fonti.

- APPROFONDIMENTO -

A p. 89 dell'edizione curata da Gino Arrighi è riprodotto dalla carta 59 recto il seguente passo (facente parte del "*Tractato de l'arte de la geumetria*"):

"La messura di Florença de le bocti se parte in 12 ed ài 1 barile e il loro barile si è 44 metadelle e la loro canna si è a muodo artino [*aretino*] e colla canna se mesura il loro terreno e il loro panoro si è 12 braccia per faccia e 12 panori fanno uno staiore a corda e sono in tutto lo staiore 1728 braccia quadre…".

Come scritto in precedenza, il codice è datato al 1370: il cenno alle unità di misura dei terreni usate a Firenze è fra i più antichi documenti al riguardo e dimostra che il braccio da terra era usato a Firenze accanto a quello da panno da molto tempo.

Danti cita il *panoro* come l'area di un quadrato con lati lunghi 12 braccia da terra:

* 1 panoro = 12 * 12 = 144 braccia^2 da terra;
* 12 panora = 1 *staio a corda* (o *stioro fiorentino*) = 12 * 144 = 1728 braccia^2 da terra.

L'Autore non cita il *pugnoro* che era un sottomultiplo del panoro:

* 1 pugnoro = 12 braccia^2 da terra e
* 1 panoro = 12 pugnora = 12 * 12 = 144 braccia^2 da terra.

Forse, il pugnoro è stato trascurato perché la superficie che esso esprimeva era piccola: il braccio da terra era lungo 0,551202 metri e il braccio^2 da terra valeva:

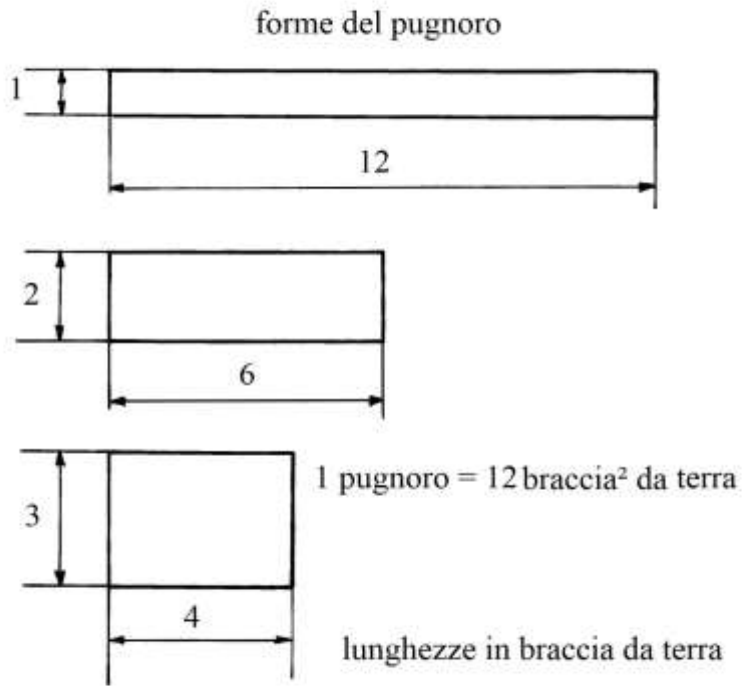
1 braccio^2 da terra = 0,303824 m^2.

Il pugnoro equivaleva a:

1 pugnoro = 12 braccia^2 da terra = 3,64588 m^2.

Il pugnoro era ottenuto con rettangoli lunghi:

* 1 per 12 braccia da terra;
* 2 * 6 braccia da terra;
* 3 * 4 braccia da terra.



Il *panoro* rappresentava l’area di un quadrato con lati lunghi 12 braccia da terra.

- -

TOMMASO DELLA GAZZAIA

Tommaso della Gazzaia (o dell'Agazzaia o degli Agazzari) visse a Siena fra la fine del Trecento e l'inizio del Quattrocento: morì nel 1433.

Egli apparteneva a una delle più influenti famiglie senesi, gli Agazzari.

Ricoprì numerose cariche pubbliche a Siena e fu suo ambasciatore presso altri Stati italiani.

Fu pure podestà a Bologna, Pisa, Lucca e Todi.

Il codice C. III. 23 della Biblioteca degl'Intronati di Siena contiene un trattato sicuramente attribuibile a Tommaso, in cui sono affrontati problemi di aritmetica e geometria e vi sono descritte le monete di molte città e Stati e i loro rapporti di cambio. Egli non era un *maestro d'abbaco* ma, oltre a ricoprire incarichi pubblici, probabilmente operava nel settore mercantile e bancario, come accadeva a molti esponenti delle più importanti famiglie senesi, specializzate nelle attività finanziarie. Egli infatti dichiara di occuparsi di questioni matematiche solo per *suo diletto*: le uniche regole delle quali si attribuisce il merito sono quelle relative ai numerosi metodi di calcolo della capacità delle botti.

A Siena nel Medioevo esistevano sicuramente delle importanti scuole di abbaco e di alcuni maestri sono noti i nomi e sono conservati alcuni trattati.

In generale, i trattati d'abbaco italiani che ci sono giunti non sono opera dei soli maestri che insegnavano nelle scuole (le *botteghe d'abaco*), ma furono compilati anche da mercanti, banchieri, artisti, artigiani e perfino da marinai. Quei testi contengono argomenti di natura matematica, calendari, pratiche di mercatura, portolani, regole astronomiche (e perfino astrologiche) e elenchi di monete e loro cambi.

Particolarmente interessanti sono le considerazioni di Tommaso sui metodi per il calcolo del contenuto delle botti, per le quali dichiara di essersi ispirato all'opera di Paolo dell'Abbaco: l'argomento può avere soddisfatto un interesse personale o culturale di Tommaso; egli può aver raccolto documenti e informazioni nelle varie città nelle quali esercitò funzioni pubbliche per conto di Siena.

Parti del codice C. III. 23 sono state analizzate da più studiosi: oltre alle opere citate in bibliografia, il capitolo sulle monete è stato esaminato da Raffaella Franci.

I paragrafi che seguono prendono in considerazione soltanto alcune costruzioni di geometria piana contenute nel Codice, e trascritte nell'edizione a stampa citata in bibliografia, che possono rivestire un certo interesse geometrico per il calcolo del volume delle botti e degli scemi.

Successivamente saranno illustrate le considerazioni pubblicate da Gino Arrighi sui *quattro* capitoli dedicati da Tommaso della Gazzaia ai problemi delle botti.

A – Alcuni problemi di geometria piana

Nota: tutte le figure del manoscritto di Tommaso non contengono lettere per indicare i vertici: in questo articolo sono talvolta scritte per rendere più chiara la spiegazione.

Ciascun titolo dei paragrafi è preceduto da un numero racchiuso fra parentesi quadre […] che segue la numerazione progressiva introdotta da Cinzia Nanni nella sua trascrizione del testo e ciò allo scopo di distinguere i problemi.

Sempre fra parentesi quadre [...] sono aggiunti commenti dell'autore di questo articolo.

- APPROFONDIMENTO -

La *canna* usata a Firenze e in altri Comuni della Toscana medievale poteva avere due lunghezze:

* canna mercantile: era lunga 4 braccia da panno;
* canna agrimensoria: era lunga 5 braccia da panno ed era chiamata *pertica*.

Il braccio da panno di Firenze era lungo 58,3626 cm e di conseguenza le due canne erano lunghe:

* la canna mercantile 233,45 cm;
* la canna agrimensoria o pertica 291, 813 cm.

Il braccio da panno usato a Siena era leggermente più lungo di quello fiorentino e cioè 60,1055 cm.

Tommaso dell'Agazzaia usava sicuramente la canna agrimensoria lunga 5 braccia o una pertica.

Oltre alla canna, egli usò altre due unità di misura: il *braccio* (di cui la canna era un multiplo) e il *palmo*. Anche le altre unità di misura da lui utilizzate erano *senesi*.

Stando allo Zupko (pp. 46 – 47), il braccio da panno usato fra gli altri a Arezzo, Firenze, Pistoia, San Miniato, Lucca, Pisa, Volterra, Siena e Montepulciano era diviso in *2 palmi*.

Il caos metrologico creato nel Medioevo dalla frammentazione politica in tanti piccoli Stati o Comuni portò all'uso di una miriade di unità di misura (lineari, di superficie e di volume), di pesi e di monete da costringere i grandi mercanti, particolarmente toscani e anche veneziani, a creare dei *libri di mercatura* contenenti informazioni sempre aggiornate sulle unità di misura e sulle monete delle piazze commerciali che si affacciavano sul mediterraneo. Quei libri contenevano le equivalenze fra le unità e le monete di piazze differenti: ad esempio, il *Libro che tracta de mercatantie et usanze de paesi* (attribuito al Chiarini) di cui si parla nel capitolo dedicato a Piero della Francesca, stimava con una certa approssimazione la proporzione fra il braccio da panno di Firenze e quello di Siena:

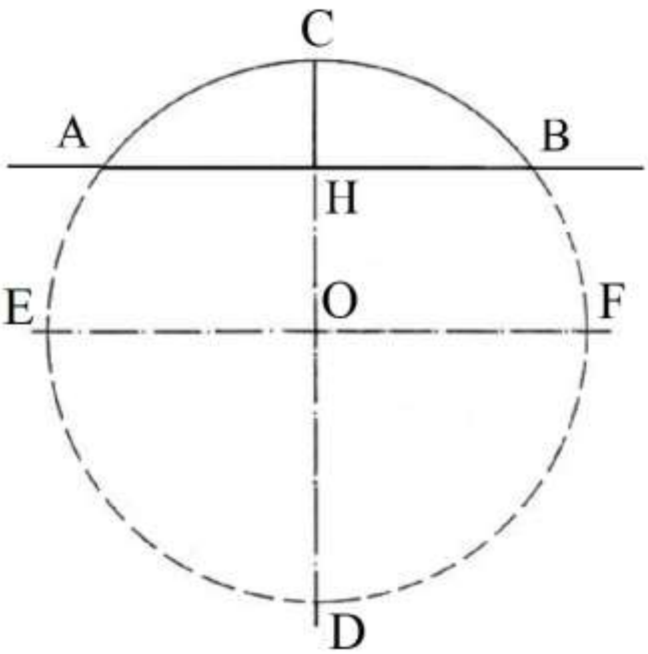
4 braccia da panno di Firenze = (3 + 7/8) di braccio di Siena.

- -

<u>Ruota conficcata nel terreno</u>

Il problema che segue è contrassegnato con il numero [40] secondo la numerazione introdotta da Cinzia Nanni nel suo studio.

Una ruota è conficcata verticalmente nel terreno e ne emerge solo un *segmento circolare*: la sua corda AB è lunga 12 braccia e la freccia (o *saetta*) CH 3 braccia.



Il problema domanda la lunghezza della circonferenza della ruota.

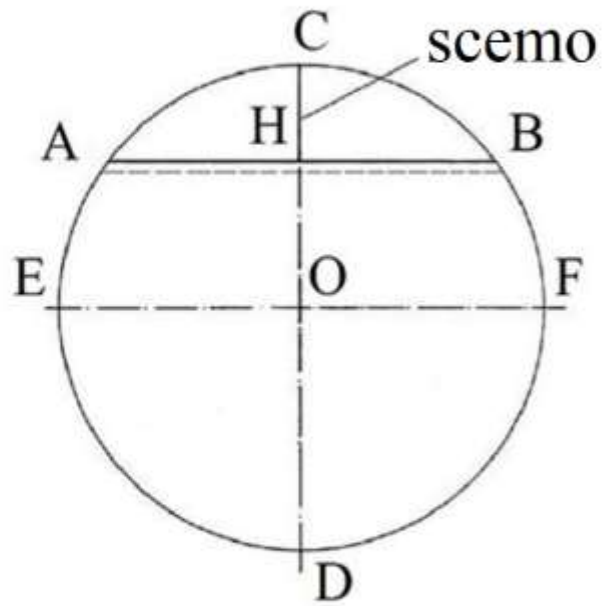
La procedura contiene i seguenti passi:

* dividere per 2 la lunghezza della corda: 12 : 2 = 6 ;
* moltiplicare per sé stesso: 6 * 6 = 36 ;
* dividere per la lunghezza della freccia: 36 : 3 = 12 ;
* sommare la lunghezza della freccia all'ultimo quoziente: 12 + 3 = 15 braccia che è il diametro della ruota;
* moltiplicare il diametro per la costante (3 + 1/7): 15 * (3 + 1/7) = 47 + 1/7 braccia, circonferenza della ruota.

La procedura impiegata da Tommaso è sintetizzabile con la formula

$$\text{diametro} = [(\text{corda}/2)^2/\text{freccia}] + \text{freccia}$$

Lo schema sopra mostrato è simile a quello della sezione trasversale di una botte parzialmente piena: CH ne è lo *scemo*.



- APPROFONDIMENTO -

In un precedente paragrafo abbiamo incontrato Paolo dell'Abbaco che nel suo *Trattato d'Aritmetica* aveva già studiato il problema del cerchio e del segmento circolare, risolvendolo con il *teorema delle corde*.

- -

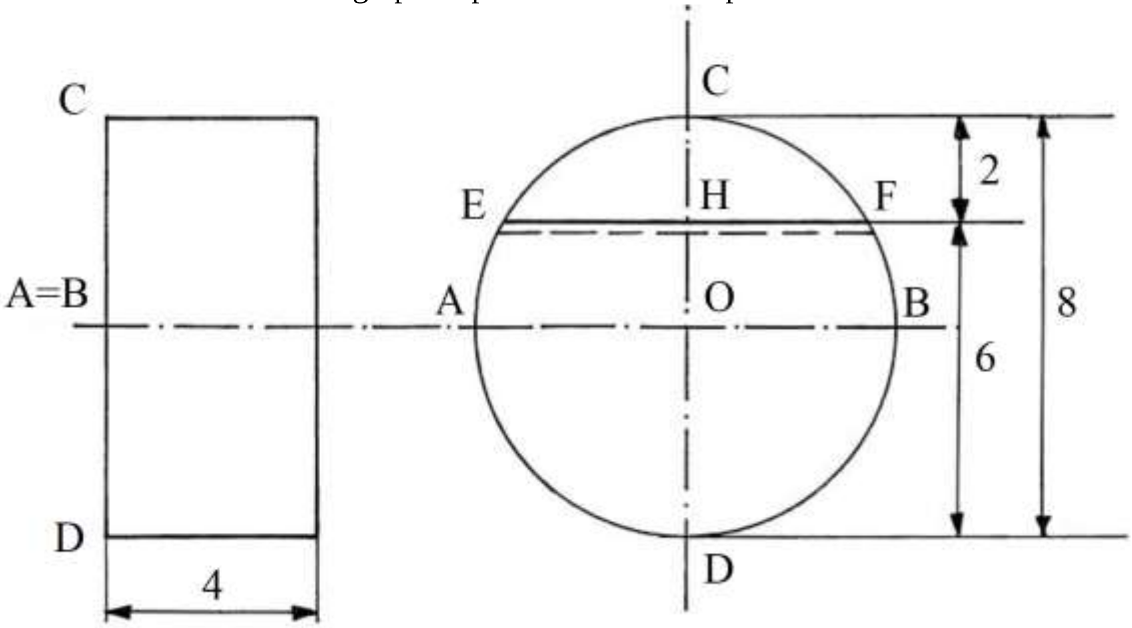
<u>B – Lo studio di Gino Arrighi</u>

Nell'articolo di Gino Arrighi [3] sono approfonditi i quattro capitoli del Codice C. III. 23 dedicati alla misura degli scemi delle botti e ai calcoli delle loro capacità. Essi sono degli appunti sparsi, raccolti dal Gazzaia per evidenti motivi personali, forse perché molto interessato alle concrete applicazioni della geometria pratica e alla produzione e al commercio del vino.

Arrighi cita la presenza nel manoscritto di disegni ma non li riproduce: gli schemi che seguono sono dell'autore di questo articolo.

In questo capitolo sono presentati solo *alcuni* degli esempi riprodotti da Arrighi.

L'esposizione di Tommaso inizia con la descrizione di una procedura – aritmetico-geometrica – basata sull'introduzione di una unità *convenzionale* di lunghezza, lo *zuccolo*, e dei suoi derivati *zuccolo*^{2} e *zuccolo*^{3}. Egli passa poi a calcolare la capacità di una ben definita botte:



La botte ha diametro CD uguale a 8 zuccoli, ha lunghezza di 4 zuccoli e lo scemo CH è 2 zuccoli.

La procedura contiene i seguenti passi:

* moltiplicare la lunghezza del diametro per sé stessa: $8 * 8 = 64$;
* moltiplicare per 11: $64 * 11 = 704$;
* dividere per 14: $704 : 14 \approx 50 + 4/14$ zuccoli^2, area del fondo circolare [Tommaso ha calcolato l'area del cerchio con la formula approssimata $A_{\text{CERCHIO}} = \pi/4 * \text{diametro}^2 \approx 11/14 * CD^2$];
* moltiplicare per la lunghezza della botte: $(50 + 4/14) * 4 = 201 + 2/14$ zuccoli^3 ;
* dividere per 5: $(201 + 2/14)/5 = 40 + 8/35$ staia ;
* moltiplicare per la costante 29/30: $(40 + 8/35)$ staia $* 29/30 = 38$ staia + 14 metadelle, *capacità della botte*;
* dividere lo scemo CH per il diametro CD: 2 zuccoli /8 zuccoli = ¼ :
* consultare la tabella in calce e verificare il coefficiente corrispondente al rapporto appena calcolato, ¼: "*per ¼ piglia 5*" : è 1/5 [terza riga della tabella] ;
* calcolare 1/5 della capacità della botte: (38 staia + 14 metadelle)/5 = 7 staia + 12 metadelle , volume occupato dallo scemo ;
* sottrarre il volume dello scemo dalla capacità della botte:
  (38 staia + 14 metadelle) – (7 staia + 12 metadelle) = 31 staia + 2 metadelle, volume del vino contenuto nella botte.

Sull'equivalenza dello *zuccolo*^{3} con lo *staio* consultare l'APPROFONDIMENTO qui sotto.

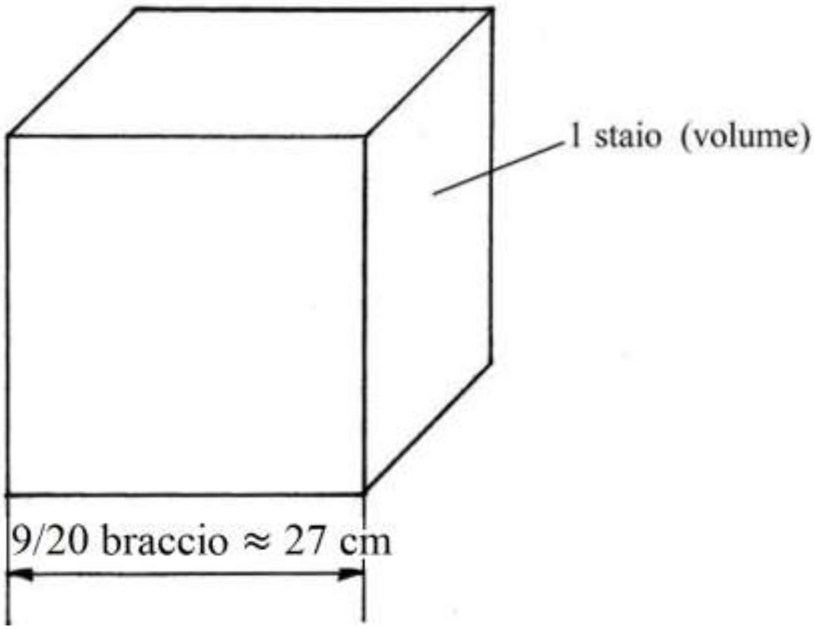
- APPROFONDIMENTO -

Nella procedura appena descritta sono usate tre unità di misura:

* lo *zuccolo*, unità di lunghezza, e i suoi derivati *zuccolo*^{2} (unità di superficie) e *zuccolo*^{3} (unità di volume);

*	lo *staio*, unità di capacità o volume: 1 staio = 5 zuccoli^3;
*	la *metadella* (o *boccale*), unità di misura della capacità: 1 staio = 16 metadelle e
1 metadella = 1/16 * staio.

Secondo Tommaso, lo staio senese è il volume di un cubo che ha lato lungo 9/20 di *braccia senesi* e cioè 9/20 * 60,1055 ≈ 27 cm [come visto in precedenza, il braccio senese da panno era lungo l'equivalente di 60,1055 cm].



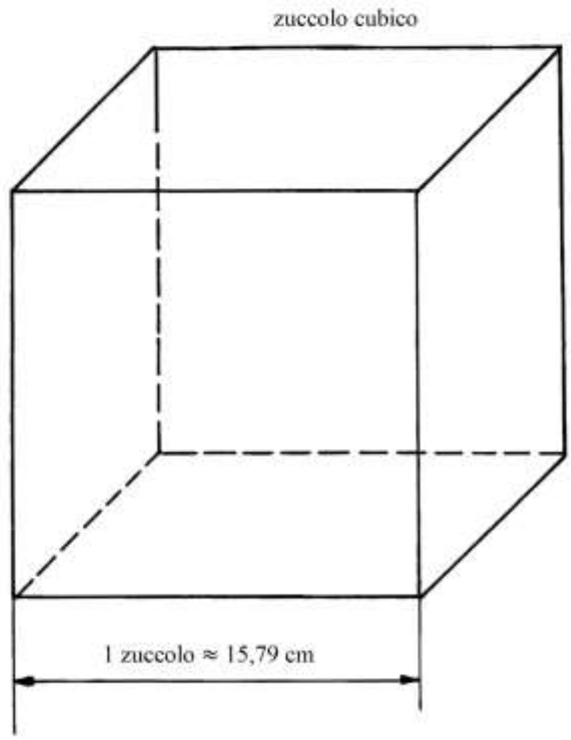
Quindi
1 staio = (9/20 braccio)^3 = $9^3/20^3$ * braccio^3 = 729/8000 * braccia^3 .
Convertendo il volume dello staio nel sistema metrico decimale si ha:
1 staio ≈ (0,27 m)^3 ≈ 0,019683 m^3 ≈ 19,683 dm^3 ≈ 19,683 litri.
Lo *zuccolo*^{3} equivale a:
1 zuccolo^3 = 1/5 staio ≈ 3,9366 dm^3 .
Riassumiamo: lo staio usato a Siena possedeva alcuni sottomultipli:
*	1 staio = 4 quarti;
*	1 staio = 5 zuccoli^3;
*	1 staio = 8 mezziquarti;
*	1 staio = 16 metadelle o *boccali*;
*	1 staio = 64 quartucci e l'inverso: 1 quartuccio = 1/64 staio.

È evidente che buona parte dei sottomultipli formano una successione geometrica di ragione ½, ¼, ecc.

Il *moggio* usato a Siena era un multiplo dello staio:
*	1 moggio = 24 staia.

Lo *zuccolo*^{3} poteva essere rappresentato come il volume di un cubo il cui spigolo era lungo

$$\sqrt[3]{(3{,}9366)} \approx 1{,}578969579 \text{ dm} \approx 15{,}79 \text{ cm}$$



A questo punto, sulla base dell'equivalenza già incontrata, si ha:
1 staio ≈ $(0{,}27\ m)^3$ ≈ 0,019683 m^3 ≈ 19,683 dm^3 ≈ 19,683 litri, tentiamo di costruire una tabella con i probabili valori delle unità di misura utilizzate per il volume a Siena, all'epoca di Tommaso della Gazzaia, ed espressi in un'unità del sistema metrico decimale, il decimetro cubico, dm^3, spesso chiamato *litro*:

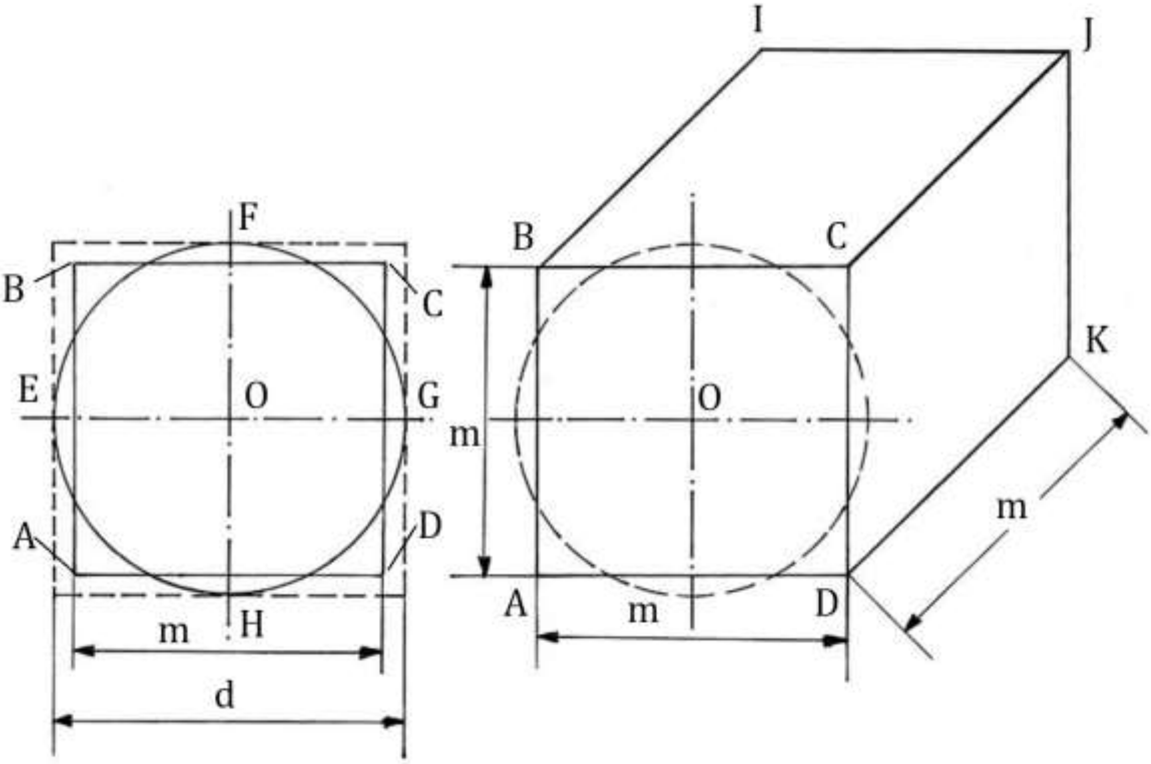
Unità di misura	Equivalenze in dm^3
1 *moggio* (= 6 some = 12 barili)	472,392
1 *soma* (= 2 barili = 4 staia)	78,732
1 *barile* (= 2 staia)	39,366
1 *staio* (= 4 quarti = 16 boccali)	19,683
1 *quarto* (= 4 boccali)	4,92075
1 *boccale* o *metadella* (= 4 quartucci)	1,2301875
1 *quartuccio*	0,307546

Questi valori erano differenti da quelli attribuiti alle contemporanee unità fiorentine e, *forse*, diversi da quelli delle stesse unità senesi portanti gli stessi nomi ed impiegate all'epoca di Giovanni Sfortunati e di Pietro Cataneo.

- -

Una botte lunga *m* volte l'*unità di misura lineare convenzionale* (uguale a 9/20 di braccio) e con una sezione circolare che è equivalente a un quadrato con lato lungo *m* volte (9/20 di braccio) ha capacità uguale a

$V = m^3$, valore espresso in *staia*.



Il cubo in *assonometria cavaliera isometrica* spiega la forma del solido equivalente alla botte.

La botte ha sezione circolare la cui area è equivalente a quella del quadrato ABCD che ha lati lunghi *m* e superficie m^2:

$\text{Area}_{\text{ABCD}} = m^2$.

L'area del cerchio di centro O e diametro EG = d è:

$\text{Area}_{\text{CERCHIO}} \approx m^2 \approx \pi * (d/2)^2 \approx 22/7 * d^2/4 \approx 11/14 * d^2$, da cui

$d^2 \approx 14/11 * m^2$ e $d \approx m * \sqrt{(14/11)}$ e viceversa

$m^2 \approx 11/14 * d^2$ e $m \approx d * \sqrt{(11/14)}$.

La botte è lunga *m* e il suo volume V, uguale a quello del cubo, è:

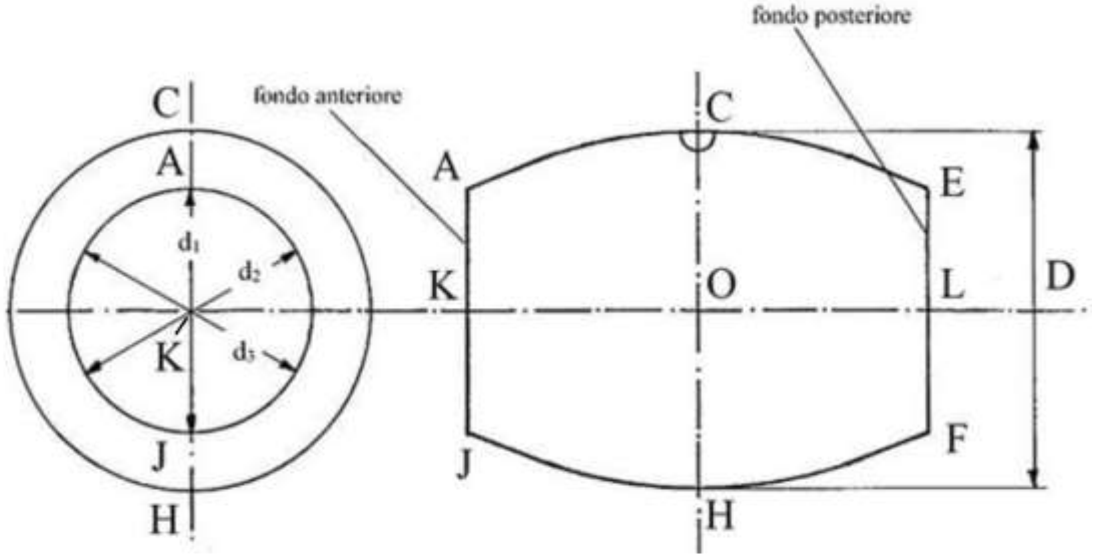
$\text{Volume}_{\text{BOTTE}} = \text{Volume}_{\text{CUBO}} = m^3$, valore espresso in *staia*.

Ne consegue che:

* per m = ½ * (9/20 braccio), la capacità è $(1/2)^3 = 1/8$ di staio o ½ quarto;
* per m = ¼ * (9/20 braccio), la capacità è $(1/4)^3 = 1/64$ di staio o 1 quartuccio.

<u>La misura di una botte</u>

Tommaso propone un metodo pratico per misurare una botte (della quale non fornisce lo schema).



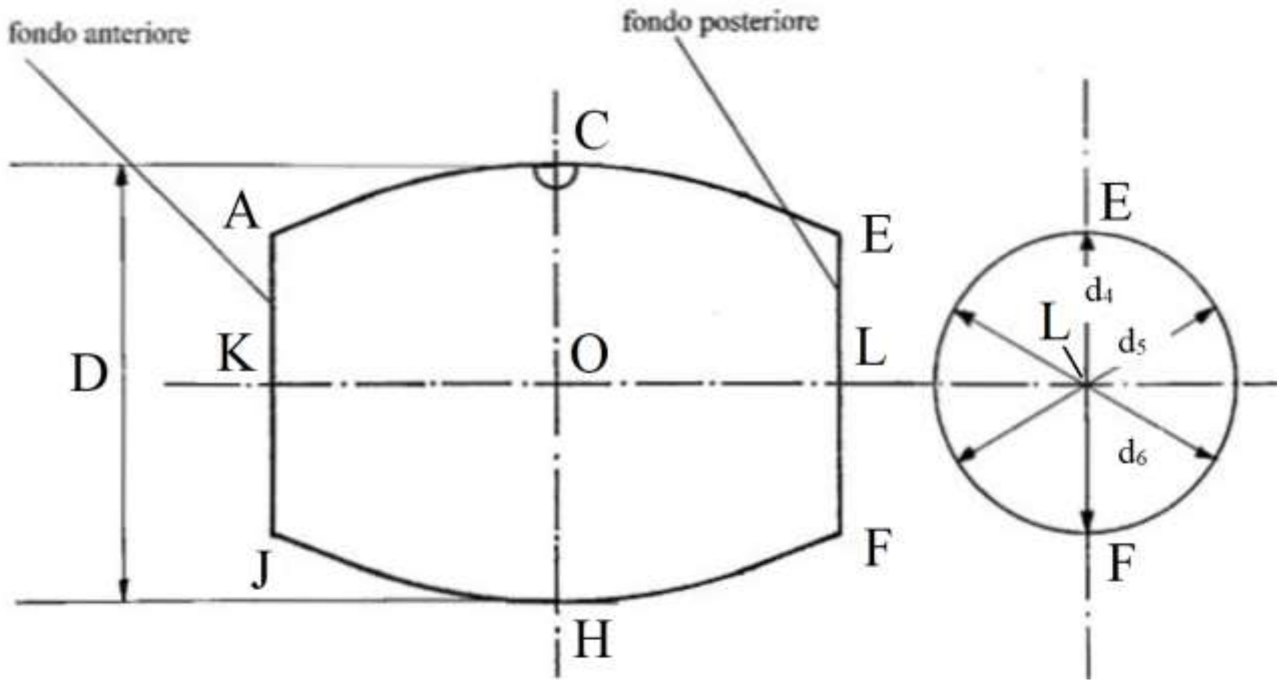
Nella figura, il fondo anteriore è disegnato *circolare* (come il fondo posteriore) ma non sembra che l'Autore dia per scontata questo forma.

Per il fondo anteriore, egli suggerisce di effettuare *tre* misurazioni del "diametro": una in senso verticale (d_1) e due trasversali (d_2 e d_3).

Il diametro *convenzionale* del fondo anteriore è dato dalla media aritmetica delle tre misure:

$d_{\text{ANTERIORE}} = (d_1 + d_2 + d_3)/3$.

Il diametro convenzioneale del fondo posteriore è ricavato con lo stesso metodo e cioè con tre misurazioni ruotate intorno al centro L:

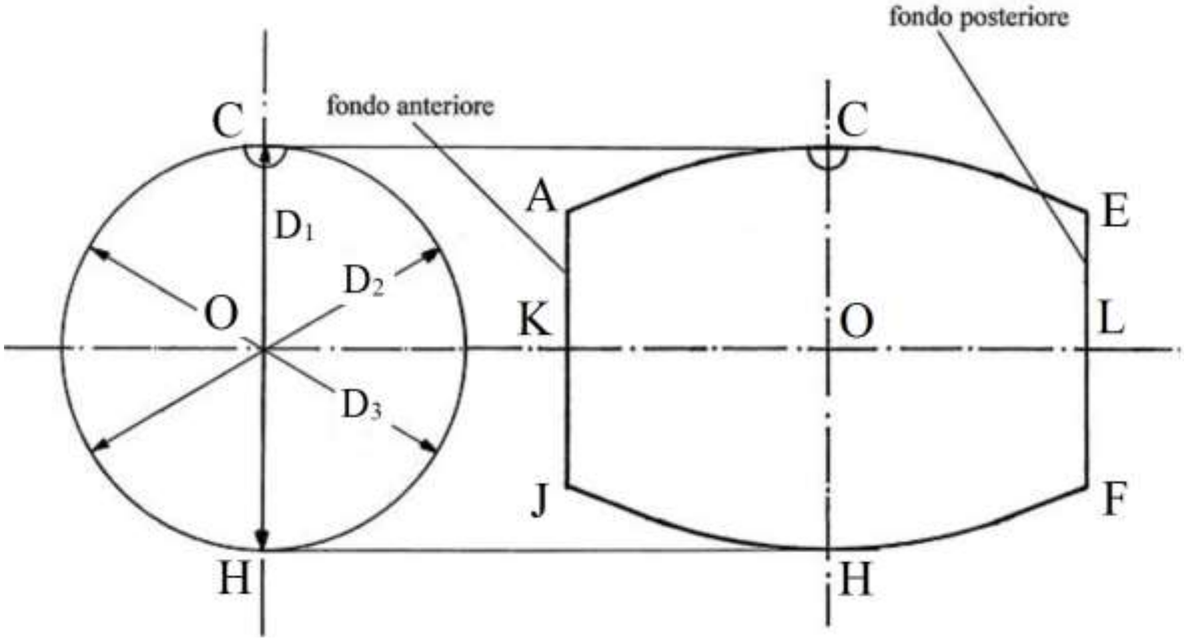


$d_{\text{POSTERIORE}} = (d_4 + d_5 + d_6)/3$.

Calcolare la media aritmetica dei due diametri medi dei fondi:

$d_m = (d_{\text{ANTERIORE}} + d_{\text{POSTERIORE}})/2$.

Sempre applicando il metodo già visto, Tommaso propone di misurare tre diametri interni della sezione corrispondente al cocchiume:



Per effettuare queste misurazioni all'interno della botte, è probabile che all'epoca fossero disponibili delle *stagie* articolate.

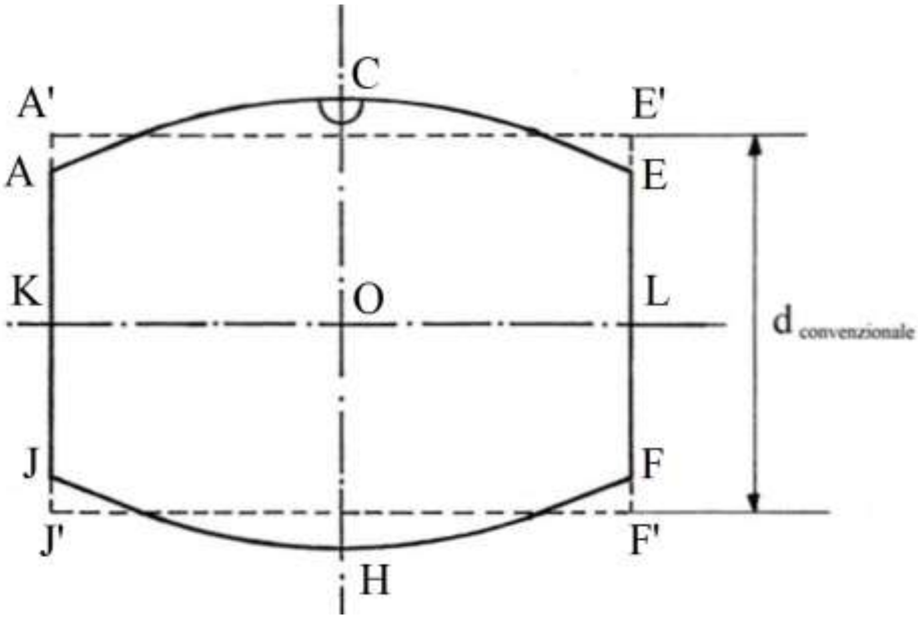
Il diametro medio D è dato da:

$D_m = (D_1 + D_2 + D_3)/3$.

Il *diametro convenzionale* è la media aritmetica fra i diametri d_m e D_m:

$d_{\text{CONVENZIONALE}} = (d_m + D_m)/2$.

Questo è il diametro convenzionale della botte A'J' = E'F':

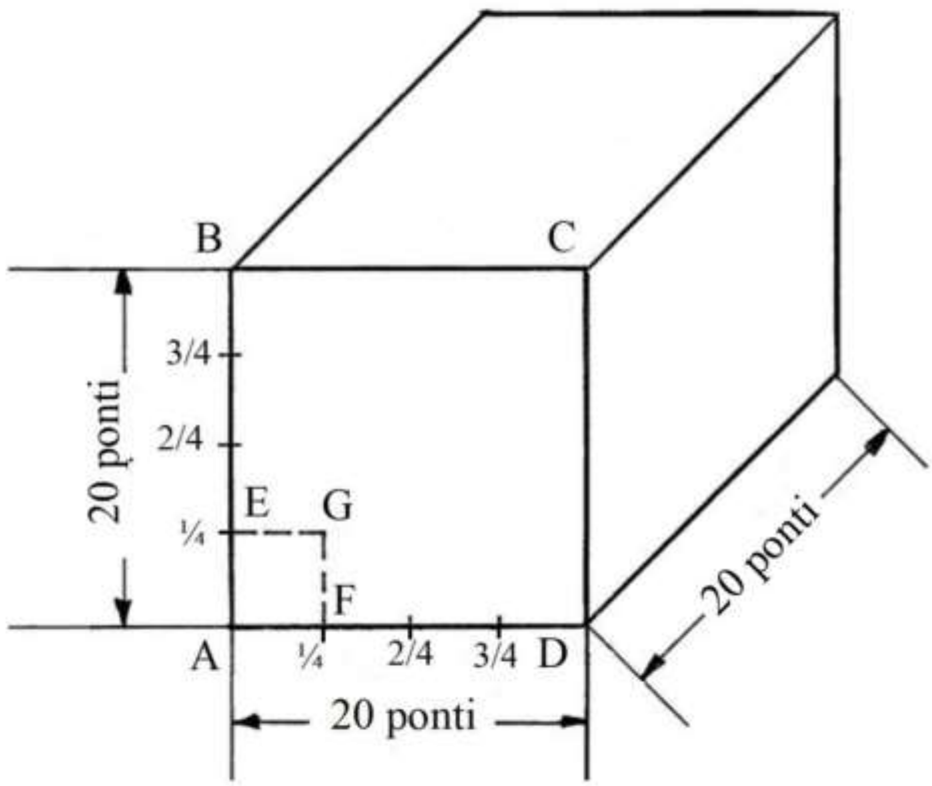


A'E'F'J' è il profilo convenzionale della botte che approssima quello reale ACELFHJK. La lunghezza della botte è inalterata ed è KL.

Il metodo appena descritto porta ai risultati già studiati da Annalisa Simi e citati in precedenza.

Una nuova unità di lunghezza: il *ponto*

Tommaso introduce una nuova unità *convenzionale* di lunghezza, il *ponto*, che viene poi definita:



Lo staio equivaleva a

1 staio = 8000 ponti cubici = 20^3 $ponti^3$.

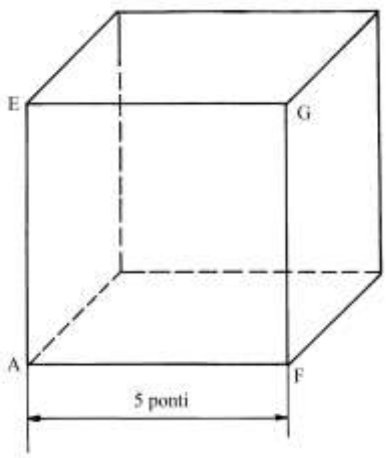
Nel cubo disegnato qui sopra in assonometria cavaliera isometrica, gli spigoli del solido sono lunghi 20 *ponti*.

Gli spigoli AB e AD sono divisi in *quattro* parti uguali:

AF = AE = FG = EG = ¼ * AD = ¼ * 20 ponti = 5 ponti .

Il cubo costruito sul segmento AF ha volume

$V = AF^3 = (5 \text{ ponti})^3 = 125 \text{ ponti}^3$.



Il rapporto fra i volumi dei due cubi è:

$8000/125 = 64$. Infatti, il cubo che ha faccia anteriore ABCD contiene $4^3 = 64$ piccoli cubi come quello definito dalla faccia AEGF.

Il piccolo cubo ha volume uguale a *1 quartuccio* perché è 1/64 dello staio.

In precedenza abbiamo incontrato l'equivalenza

$$1 \text{ staio} = (9/20 * \text{braccio})^3 = 729/8000 \text{ braccia}^3 .$$

Le espressioni del valore dello staio in (9/20 braccio) e in ponti sono equivalenti:

$$729/8000 \text{ braccia}^3 = 8000 \text{ ponti}^3 .$$

Ne consegue:

$$1 \text{ ponto}^3 = 729/(8000^2) \text{ braccia}^3 = 9^3/[(20)^3]^2 \text{ braccia}^3 =$$
$$= 9^3/400^3 \text{ braccia}^3 = (9/400)^3 \text{ braccia}^3.$$

Il ponto vale:

$$1 \text{ ponto} = 9/400 \text{ braccia} \approx 9/400 * 60{,}1055 \approx 1{,}3524 \text{ cm} .$$

L'unità di lunghezza *(9/20) di braccio* equivale a *20 ponti*, per cui:

$$1 \text{ ponto} = (9/20 \text{ braccio})/20 = (9/400) \text{ braccio}.$$

Inversamente, vale la relazione:

$$1 \text{ braccio} = 400/9 \text{ ponti} = (20/3)^2 \text{ ponti} .$$

Riassumiamo le equivalenze fra le unità di misura della capacità e il *ponto*^{3}:

* 1 staio = 8000 ponti^3 ;
* 1 quarto = ¼ staio = 2000 ponti^3 ;
* 1 zuccolo = 1/5 staio = 1600 ponti^3 ;
* 1 mezzoquarto = 1/8 staio = 1000 ponti^3 ;
* 1 metadella = 1/16 staio = 500 ponti^3 ;
* 1 quartuccio = 1/64 staio = 125 ponti^3.

Quindi, l'ultima figura, che rappresenta un cubo con lati lunghi *5 ponti*, ha volume uguale a 1 quartuccio.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

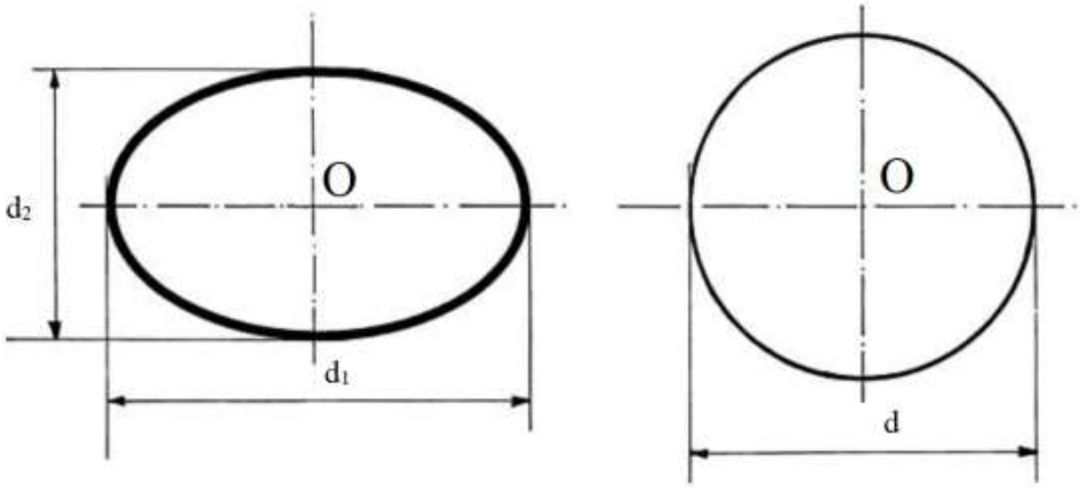
Tommaso descrive una nuova procedura per calcolare la capacità di una botte.

Implicitamente sono usati il *ponto* e i suoi derivati.

Ecco i passi della procedura:

* determinare l'altezza (il diametro) media/o della botte

[probabilmente Tommaso calcolò il diametro medio della testa e del fondo di una generica botte avente entrambe le estremità con un profilo qualsiasi di forma curvilinea chiusa, quale quello ellittico o ovale:



L'ovale a sinistra ha diametri massimo d_1 e minimo d_2: con un'approssimazione accettabile, l'area dell'ovale può essere equiparata a quella del cerchio di diametro

$d = (d_1 + d_2)/2$.

Se l'ovale fosse un'ellisse la sua area sarebbe data dalla formula corretta:

$\text{Area}_{\text{ELLISSE}} = (\pi * d_1 * d_2)/4 = \pi/4 * d_1 * d_2$.

L'area del cerchio equivalente all'ellisse è:

$\text{Area}_{\text{CERCHIO}} = \pi/4 * d^2$.

Ipotizzando che le due aree siano uguali, si ha:

$\text{Area}_{\text{ELLISSE}} = \text{Area}_{\text{CERCHIO}} = \pi/4 * d_1 * d_2 = \pi/4 * d^2$, da cui

$d_1 * d_2 = d^2$ e $d = \sqrt{(d_1 * d_2)}$.

Più precisamente, il diametro *d* non è la media aritmetica ma la media geometrica delle lunghezze dei due diametri: $d = \sqrt{(d_1 * d_2)}$.

Un'ellisse è facilmente sovrapponibile a un'ovale a 8 centri e pertanto le loro aree sono praticamente uguali.

La curva chiusa presentata nella figura qui sopra a sinistra è un'*ovale*];

* moltiplicare la lunghezza del diametro medio *d* per sé stessa: $d * d = d^2$;
* moltiplicare per la costante 11/14: $11/14 * d^2$;
* moltiplicare per la lunghezza *h* della botte: $11/14 * d^2 * h$;
* dividere per 8: $(11/14 * d^2)/8$ [Tommaso pare ipotizzare un risultato come il seguente *numero misto*: X.YYY (+) a/b : X.YYY è la parte intera, con il punto di separazione (.) e (a/b) è la parte frazionaria]; [Paolo dell'Abbaco aveva introdotto l'uso del punto separatore ogni gruppo di tre *figure* o *cifre*];
  [Tommaso chiama il valore di X *quoto* e lo prende come numero intero espresso in *staia* e cioè sembra che egli divida il quoziente $(11/14 * d^2)/8$ per 1000 e quindi
  $(11/14 * d^2)/(8000)$];
* dividere le prime tre cifre intere prese da destra (e cioè l'espressione "YYY") per 125:
  "YYY" : 125 = Q, numero dei quartucci [in precedenza abbiamo già incontrata l'equivalenza 8000/125 = 64];
* sottrarre (1 + 1/5) quartucci da ogni staio calcolato con il *quoto* X [l'operazione può essere descritta in questi termini: (1 + 1/5) quartucci/1 staio = (1+1/5)/64 = 3/160; sottraendo i 3/160 da un'unità *(uno staio*) residuano 1 – 3/160 = 157/160, costante non espressamente calcolata da Tommaso]: X * 157/160 = parte della capacità della botte calcolata da Tommaso in staia;
* sommare le due capacità parziali: X * 157/160 *staia* + Q *quartucci*, capacità totale della botte.

In conclusione, anche questo metodo è basato sull'impiego delle unità di misura *ponto*, *staio* e *quartuccio*.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

La precedente botte è poi oggetto dei calcoli secondo un nuovo metodo. I passi della procedura sono i seguenti (benché non espressamente detto, si ritiene che le lunghezze, le superfici e i volumi siano espressi rispettivamente in *ponti*, *ponti*^{2} e *ponti*^{3}):

* moltiplicare la lunghezza del diametro medio *d* per sé stessa: $d * d = d^2$;
* moltiplicare per la lunghezza *h*: $d^2 * h$;
* dividere per 160: $(d^2 * h)/160$, capacità lorda in *quartucci* ;
* dividere per 64: $(d^2 * h/160)/64 = (d^2 * h)/10240$, capacità lorda in *staia* ;
* sottrarre 4/5 di quartuccio per ogni staio:
  1 staio – 4/5 quartuccio = (64 – 4/5) quartucci = 316/5 quartucci ;
* moltiplicare la capacità lorda in *staia* per la costante 316/5:

$$[(d^2 * h/160)/64] * 316/5 = (d^2 * h) * (316/51200) \approx$$
$$\approx d^2 * h * 0{,}0062$$ *quartucci*, capacità netta della botte.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Un altro metodo impiega gli stessi passi iniziali della precedente procedura:

* moltiplicare la lunghezza del diametro medio *d* per sé stessa: $d * d = d^2$ [ponti^2] ;
* moltiplicare per la lunghezza *h*: $d^2 * h$ [ponti^3] ;
* dividere per 12: $(d^2 * h)/12$;
* dividere per 12: $(d^2 * h/12)/12 = d^2 * h/144$;
* dividere per 12: $(d^2 * h/144)/12 = d^2 * h/1728$,
  capacità della botte espressa in *soldi*^{3}.

Tommaso afferma che 1 soldo^3 *equivale a 1/6 di staio*, per cui per ottenere la capacità espressa in staia occorre dividere l'ultimo risultato per 6:

* dividere per 6: $(d^2 * h/1728)/6 = d^2 * h/10368$ staia.

Ulteriori informazioni su questo problema e sulle equivalenze fra le unità di misura impiegate nella sua soluzione vengono dal seguente passo di Gino Arrighi, p. 5 di [4]:

"…*Ciò significa che adesso deve dividersi per 10368 al fine di trovare le staia e per 162 per trovare i quartucci. Si tenga conto che il dividere per 10368 senza moltiplicare per 11/14 è come dividere per 8146 avendo moltiplicato per 11/14; l'attribuzione di un maggior numero di ponti cubici allo staio verrà in parte compensata di ogni ulteriore detrazione. Nell'analisi delle successive divisioni per 12 si richiama che 6 ponti cubici valgono ora 1/27 di quartuccio, che la dodicesima parte del soldo cubico detta denaro cubico è gli 8/9 di quartuccio e che il soldo cubico è quartucci 10 2/3.*"

- APPROFONDIMENTO -

Le equivalenze utilizzate da Tommaso nell'ultima procedura destano qualche perplessità: nella Toscana medievale, e non solo, le unità di misura del denaro (lira o libbra) e della lunghezza lineare (braccio) erano divise in 240 parti chiamate *denari*.

A Firenze la moneta base era il *fiorino* d'oro, coniato a partire dal 1252.

La lira era un'unità di conto, inizialmente equivalente al fiorino: in origine un fiorino valeva 240 denari d'argento.

La lira risale alla riforma monetaria di Carlo Magno: essa era una moneta di conto corrispondente al peso di *1 libbra* di circa 410 grammi (o forse più) e per il suo alto valore era divisa in *240 denari* d'argento. La libbra era anche divisa in 20 *soldi*, ciascuno dei quali valeva 12 *denari*. Solo il *denaro* circolava quale moneta fisica, coniata nelle Zecche, mentre la libbra (poi *lira*) e inizialmente anche il soldo erano soltanto *unità di conto*.

In origine, la libbra era sia un'unità di peso che un'unità monetaria di conto, perché essa non fu mai coniata: il valore dell'argento del peso di una libbra era enorme rispetto alle necessità dei piccoli commerci e delle transazioni ordinarie.

Una moneta o *unità di conto* è uno strumento usato soltanto nella contabilità privata e pubblica.

L'origine della parola lira sembra sia derivata dall'uso di dire "libbra" e poi "lira" invece di indicare "240 denari". La libbra e poi la lira erano impiegate nei conteggi di grosse somme espresse in *denari d'argento*.

Ne conseguì l'uso di dire e di scrivere, ad esempio, invece di 600 denari, "2 lire e 120 denari".

Come già descritto nella tabella a p. 21, anche il *braccio da panno* fiorentino era diviso in 20 *soldi* e ciascun soldo era ripartito in 12 *denari* e il denaro in 12 *punti*: furono usati gli stessi termini e uguali rapporti, sempre secondo la doppia base 20 e 12.

È possibile che a Siena il braccio da panno fosse diviso in 12 soldi invece che in 20? Eppure nella pratica, i Comuni di Firenze, di Pisa, di Siena e altri tendevano a una certa identità (di nomi e di valori) delle unità di misura lineari, superficiali, di capacità, di pesi e di monete, come sembra desumersi da "Il manuale di mercatura" di Saminiato de' Ricci (nota a p. 158 dell'edizione curata da Antonia Borlandi [7]).

Abbiamo già visto che fra lo *staio* e il *braccio*^{3} esisteva l'equivalenza

1 staio = (9/20 * braccio)^3 = 729/8000 * braccia^3.

Se il braccio di Siena, di lunghezza differente da quella dei corrispondenti bracci dei Comuni di Toscana, Umbria e Orvieto, rispettava le più diffuse regole riguardo ai suoi sottomultipli si aveva:

1 braccio = 20 soldi = 240 denari.

Quindi: 1 soldo = 1/20 di braccio. Ne consegue che

1 soldo^3 = (1/20 * braccio)^3 = 1/8000 braccio^3 e all'inverso

1 braccio^3 = 8000 soldi^3 .

Sostituendo questa equivalenza nell'espressione

1 staio = 729/8000 braccia^3 si ottiene:

1 staio = (729/8000) * 8000 soldi^3 = 729 soldi^3 = 9^3 soldi^3 e l'inverso

1 soldo^3 = 1/(9^3) staia, risultato ben diverso da quello di Tommaso

1 soldo^3 = 1/6 * staio .

Riproduciamo parte della precedente citazione da Arrighi:

"…*che la dodicesima parte del soldo cubico detta denaro cubico è gli 8/9 di quartuccio e che il soldo cubico è quartucci 10 2/3*…"

È abbastanza strana l'affermazione di Tommaso, ripetuta più volte, secondo la quale la dodicesima parte di un soldo cubico valeva *un denaro cubico*:

1 soldo^3/12 = 1 denaro^3 .

Se il soldo lineare valeva 12 denari lineari, il denaro cubico avrebbe dovuto essere equivalente a

1 soldo^3 = (12 denari)^3 = 1728 denari^3 e all'inverso

1 denaro^3 = 1/1728 soldo^3 .

Forse si trattava di una stranezza nelle unità di misura della capacità e dei volumi impiegate a Siena.

Infine, il braccio di Siena era diviso in 24 *oncie*.

- -

Un’altra procedura

Tommaso propone di determinare i diametri dei due fondi e del cocchiume effettuando almeno due misurazioni in tutte e tre le sezioni della botte, per poi ricavare il *diametro medio* con il metodo già visto.

Una botte ha diametro medio di 90 *punti* e lunghezza di 60 *punti*: Tommaso ha espressamente usato il termine *punti* invece di *ponti*; pare logico ritenere che si tratti della stessa unità di misura della lunghezza.

La procedura contiene i seguenti passi:

* moltiplicare la lunghezza del diametro per sé stessa: 90 * 90 = 8100 ;
* moltiplicare per 11: 8100 * 11 = 89100 ;
* dividere per 14: 89100/14 = 6364 + 4/14
  [Tommaso non semplifica la frazione a 2/7] ;
* moltiplicare per la lunghezza della botte: (6364 + 4/14) * 60 = 381.857 + 2/14 ;
* dividere le *migliaia* della parte intera per 8: 381/8 = 47 + 5/8 staia ;
* Tommaso calcola la capacità lorda in 47 staia + 11 metadelle + (2 + 4/5) quartucci ;
* sottrarre (1 + 1/5) quartucci per ogni staio: la capacità *netta* della botte è uguale a
  46 staia + (54 + 4/5) quartucci.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Una botte ha diametro medio di (95 + ½) *ponti* ed è lunga (49 + ¼) *ponti*.

La procedura mostra i seguenti passi:

* moltiplicare la lunghezza del diametro medio per sé stessa:
  (95 + ½) * (95 + ½) = 9120 + ¼ ;
* moltiplicare per 11: (9120 + ¼) * 11 = 100322 + ¾ ;
* dividere per 14: (100322 + ¾)/14 = 7165 + 51/56 ;
* moltiplicare per la lunghezza della botte: (7165 + 51/56) * (49 + ¼) = 352921 + 81/1568 ;
* dividere le cifre delle miglia per 8: 352/8 = 44 staia ;
* dividere le cifre delle unità (921 + 81/1568) per 125:
  (921 + 81/1568)/125 = 7 quartucci + (46 + 81/1568) ponti ;
* arrotondare l’ultimo quoziente a (7 + 1/3) quartucci;
* sommare le due capacità parziali: 44 staia + (7 + 1/3) quartucci, capacità *lorda*;
* sottrarre (1 + 1/5) di quartuccio per ogni staio della capacità lorda; risultano
  43 staia + 18 quartucci + 46 ponti, capacità *netta* della botte.

L’applicazione della regola del 60 di Paolo dell’Abbaco

Tommaso applica a una botte la regola del 60 messa a punto da Paolo dell’Abbaco.

La botte ha diametro 72 ponti e lo scemo misura 24 ponti. La sua capacità è di 18 staia.

La procedura contiene i seguenti passi:

* moltiplicare lo scemo per 60: 24 * 60 = 1440 ;
* dividere per la lunghezza del diametro della base: 1440/72 = 20 ;
* consultare la tabella che segue in corrispondenza del valore 20:

Per	1 piglia		14/60	Per	16 piglia	12	51/60
	2 pi.	0	37/60		17 pi.	13	59/60
	3 pi.	1	8/60		18 pi.	15	8/60
	4 pi.	1	43/60		19 pi.	16	19/60
	5 pi.	2	24/60		20 pi.	17	31/60
	6 pi.	3	7/60		21 pi.	18	43/60
	7 pi.	3	55/60		22 pi.	19	57/60
	8 pi.	4	46/60		23 pi.	21	20/60
	9 pi.	5	38/60		24 pi.	22	25/60
	10 pi.	6	35/60		25 pi.	23	40/60
	11 pi.	7	33/60		26 pi.	24	56/60
	12 pi.	8	33/60		27 pi.	26	11/60
	13 pi.	9	35/60		28 pi.	27	28/60
	14 pi.	10	38/60		29 pi.	28	44/60
	15 pi.	11	44/60		30 pi.	30	

* il valore risultante è: 17 + 31/60 ;
* moltiplicare la costante letta per la capacità della botte:

(17 + 31/60) * 18 = 315 + 18/60 ;

* dividere per 60: (315 + 18/60)/60 = 5 staia + 16 quartucci =

= 5 staia + ¼ staia = 5 + ¼ staia, volume dello scemo.

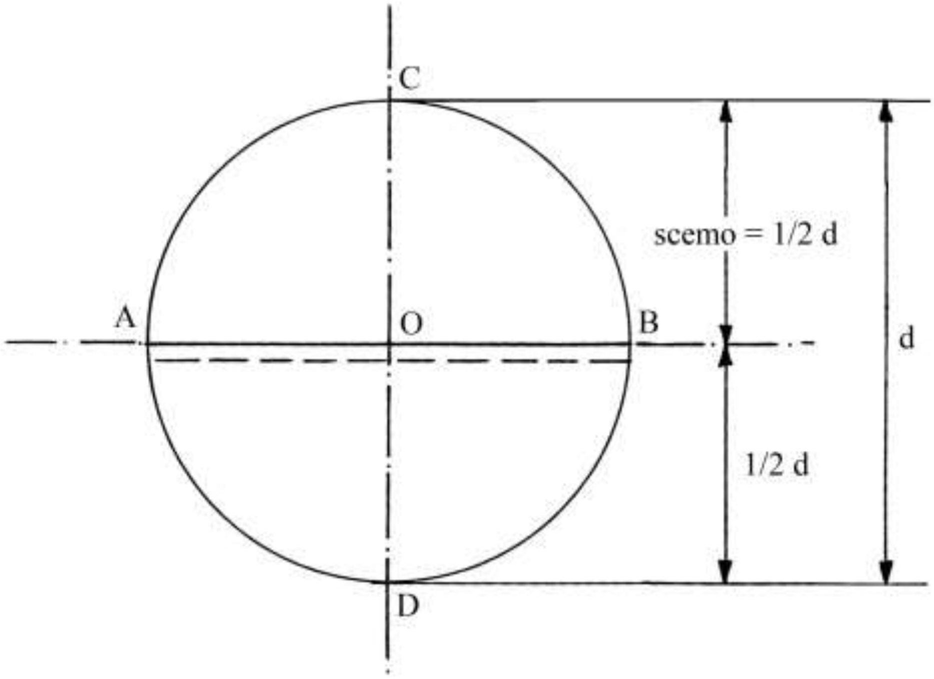
- APPROFONDIMENTO -

Una seconda tabella

Tommaso presenta una seconda tabella, riprodotta dal citato articolo di Gino Arrighi [3]:

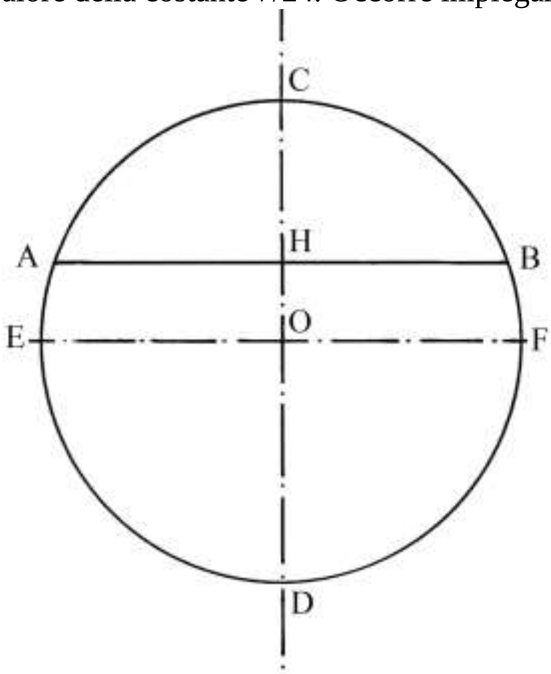
per lo	1/2 piglia	1/2		per	2/11 pi.	1/8
per	1/3 pi.	7/24		per	3/11 pi.	3/13
per	1/4 pi.	1/5		per	4/11 pi.	1/3
per	1/5 pi.	1/7		per	5/11 pi.	53/101
per	2/5 pi.	3/8		per	1/12 pi.	1/25
per	1/6 pi.	1/9		per	5/12 pi.	19/48
per	1/7 pi.	1/11		per	1/13 pi.	1/27
per	2/7 pi.	1/4		per	2/13 pi.	1/10
per	3/7 pi.	2/5		per	3/13 pi.	3/17
per	1/8 pi.	1/13		per	1/14 pi.	1/30
per	3/8 pi.	1/3		per	1/15 pi.	1/34
per	1/9 pi.	1/16		per	1/16 pi.	1/40
per	2/9 pi.	1/6		per	1/17 pi.	1/42
per	4/9 pi.	7/16		per	1/18 pi.	1/44
per	1/10 pi.	1/19		per	1/19 pi.	1/47
per	3/10 pi.	3/11		per	1/20 pi.	1/53
per	1/11 pi.	1/23				

Il primo dato fornito dalla tabella è: “*per lo ½ piglia ½*”. L’espressione sembra indicare che con uno *scemo* lungo ½ e cioè uguale a *metà* della lunghezza del diametro, la sua area vale metà (½) dell’area del cerchio:



Facciamo l’esempio di uno scemo lungo 1/3 (dell’*altezza* o *diametro* della botte): dalla tabella si desume un valore di 7/24: lo scemo occupa un volume uguale a 7/24 dell’area del cerchio e quindi della capacità della botte.

Verifichiamo il valore della costante 7/24. Occorre impiegare il *teorema delle corde*:



CD è il diametro *d* (o *altezza* della sezione circolare della botte). Lo scemo CH è lungo *1/3 d* e HD vale *2/3 d*.

Per il teorema delle corde si ha la seguente proporzione:

AH : CH = HD : HB.

In simboli, CH è la *freccia* e AB la *corda c*.

La precedente proporzione può essere scritta come segue:

(c/2) : f = (d – f) : (c/2) e

$(c/2) : (d/3) = (2/3 * d) : (c/2)$ da cui:

$c^2/4 = 2/9 * d^2$

$c^2 = 4 * 2/9 * d^2 = 8/9 * d^2$ e $c = (2*\sqrt{2})/3 * d$ e $c/2 = (\sqrt{2})/3 * d$.

Con l'aiuto di una formula *approssimata* dovuta all'agronomo romano Lucio Giunio Moderato Columella (4 – 70) calcoliamo l'area del segmento circolare ACBH:

$\text{Area}_{ACBH} = [(c + f)/2] * f + 1/14 * (c/2)^2$.

Applichiamo la formula:

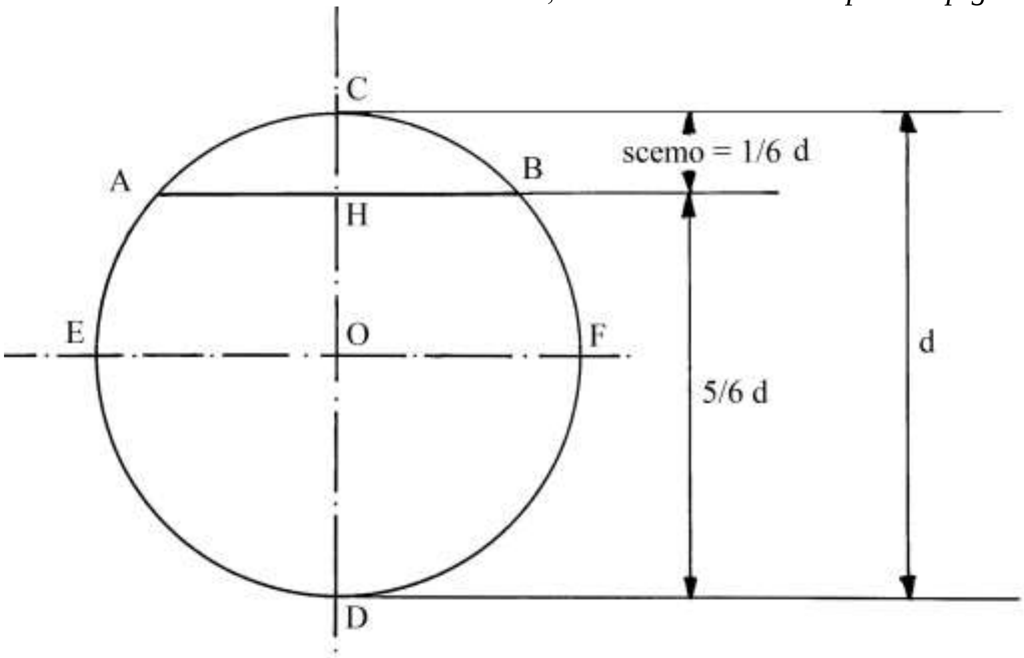
$\text{Area}_{ACBH} = [(2*\sqrt{2})/3 * d + 1/3 * d]/2 + 1/14 * [(\sqrt{2})/3]^2 =$

$= (14 * \sqrt{2} + 7 + 2)/126 * d^2 \approx d^2 * 0{,}22857$.

Il coefficiente proposto da Tommaso vale:

$7/24 \approx 0{,}291(6)$, assai più grande di quello calcolato in 0,22857.

Prendiamo in considerazione un altro caso, il sesto della tabella: "*per 1/6 piglia 1/9*".



La freccia CH è lunga: $f = 1/6 * d$; il segmento HD è: $5/6 * d$.

Per il teorema delle corde si ha:

$AH^2 = CH * HD$

$AH^2 = (1/6 * d) * (5/6 * d) = 5/36 * d^2$.

$AH = \sqrt{(5/36)} = (\sqrt{5})/6$.

La corda AB è lunga: $AB = 2 * AH = 2 * (\sqrt{5})/6 * d = (\sqrt{5})/3 * d$.

Applicando la formula approssimata di Columella si ha:

$\text{Area } ACBH = [(c + f)/2] * f + 1/14 * (c/2)^2 =$

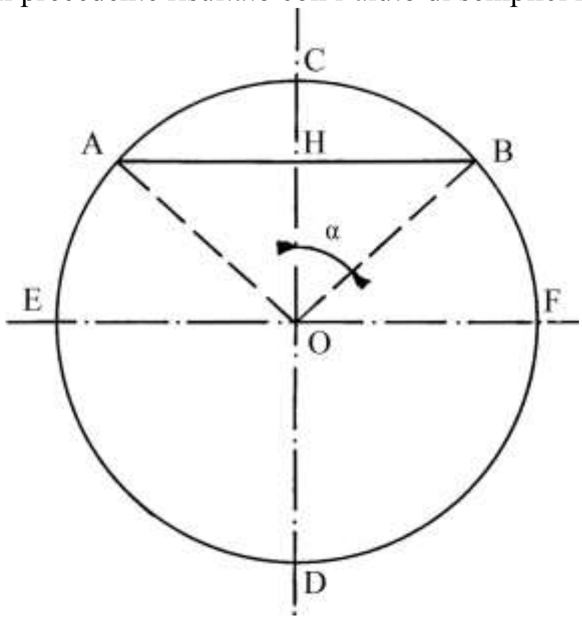
$= [(d * (\sqrt{5})/3 + 1/6 * d] * (1/6) * d + 1/14 * 5/36 * d^2 \approx$

$\approx 0{,}1619 * d^2$.

Il coefficiente proposto da Tommaso è: $1/9 \approx 0{,}(111)$.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Verifichiamo il precedente risultato con l'aiuto di semplici regole di trigonometria:



Consideriamo il triangolo rettangolo OHB; i suoi lati sono lunghi:

* l'ipotenusa OB è un raggio e quindi vale d/2;
* il cateto HB è metà della corda e cioè è $(\sqrt{5})/6 * d$;
* infine, il cateto OH è lungo: OH = OC – CH = d/2 – 1/6 * d = 1/3 * d.

Ai tempi di Tommaso della Gazzaia gli abacisti e gli agrimensori possedevano strumenti in grado di misurare angoli come quello indicato con *α* nello schema precedente.

Qui ricorriamo al calcolo della *tangente di α*:

$\mathrm{tg}\ \alpha = HB/OH = (\sqrt{5}/6 * d)/(1/3 * d) = (\sqrt{5})/2 \approx 1{,}118$ alla quale corrisponde un angolo $\alpha \approx 48{,}19°$.

L'angolo AOB vale: $AOB = 2 * \alpha \approx 48{,}19° * 2 \approx 96{,}38°$.

La lunghezza dell'arco ACB è ricavata da una semplice proporzione:

ACB : circonferenza = 2 * α : 360° da cui

ACB = (circonferenza * 2 * α)/360 ≈ (3,14 * d * 96,38/360 ≈ 0,84 * d .

A questo applichiamo la corretta formula per il calcolo dell'area di un segmento circolare:

$\text{Area}_{\text{ACBH}}$ = [raggio * (arco – corda) + (corda * freccia)]/2 =

$= [d/2 * (0{,}84 * d - \sqrt{5}/3 * d) + (\sqrt{5}/3 * d * 1/6 * d)]/2 \approx$

$\approx 0{,}162(5) * d^2$.

Il risultato è allineato a quello – $\approx 0{,}1619 * d^2$ – calcolato con la formula di Columella.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Applichiamo a questo caso concreto la formula dovuta a Paolo dell'Abbaco e utilizzata a pagina 31:

$\text{Area}_{\text{SEGMENTO CIRCOLARE}}$ = (d/2 * arco/2) – [(d/2 – freccia) * corda]/2 =

$\approx (d/2 * 0.84 * d/2) - [d/2 - d/6]*(\sqrt{5})/3 * d] \approx 0{,}08577\ d^2$, valore non troppo distante dal coefficiente 1/9 = 0,(111) calcolato da Tommaso.

Avanziamo un'ipotesi: la seconda tabella di Tommaso della Gazzaia fu, almeno in parte, costruita con l'applicazione della formula di Paolo dell'Abbaco?

È chiaro che questa seconda tabella veniva usata quando erano noti due dati: il diametro della botte e la lunghezza dello scemo.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Per chiarezza confrontiamo le tre formule usate per calcolare l'area di un segmento circolare:

Columella: Area $_{\text{SEGMENTO CIRCOLARE}}$ = $[(c + f)/2] * f + 1/14 * (c/2)^2$.

Paolo dell'Abbaco: Area $_{\text{SEGMENTO CIRCOLARE}}$ = (d/2 * arco/2) – [(d/2 – freccia) * corda]/2 .

Formula esatta: Area $_{\text{SEGMENTO CIRCOLARE}}$ = [R * (arco – corda) + corda*freccia]/2 .

- -

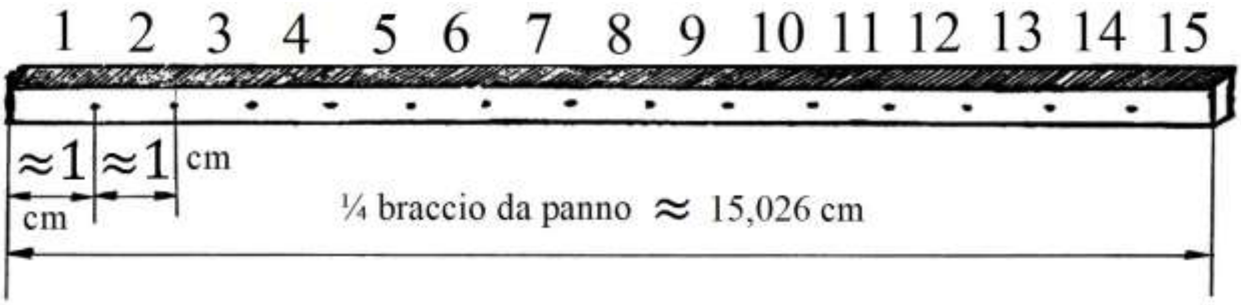
La misura dello scemo

La misura dello scemo era fatta con delle aste graduate, le *stagie*: il vino bagna l'asta ed è possibile leggere la profondità del liquido contenuto nella botte.

La stagia era conosciuta con diversi nomi: la stazza (da cui *stazzatura* delle botti), riga da misuratore, bacchetta cadometrica, la velta e la gauge (in Francia).

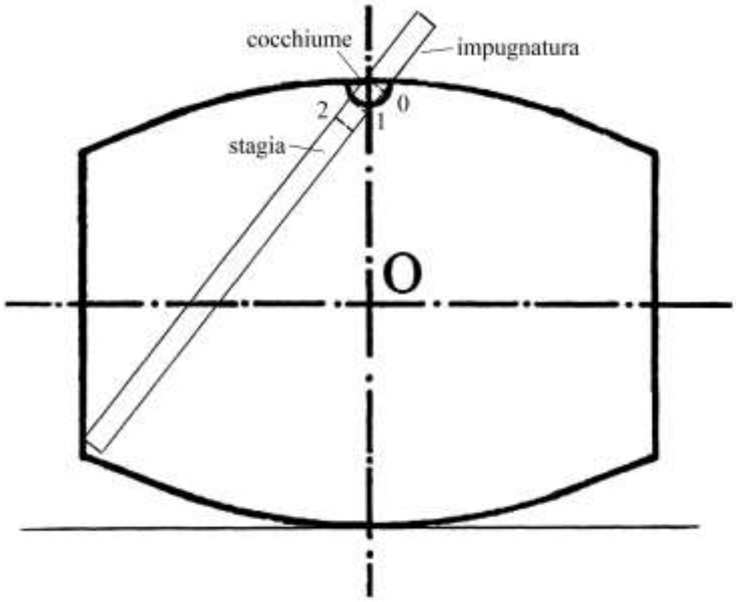
La stagia doveva recare delle tacche o dei fori per misurare il livello del vino.

Uno dei pochissimi esempi è contenuto nel trattato "Nuovo lume" del matematico senese Giovanni Sfortunati:



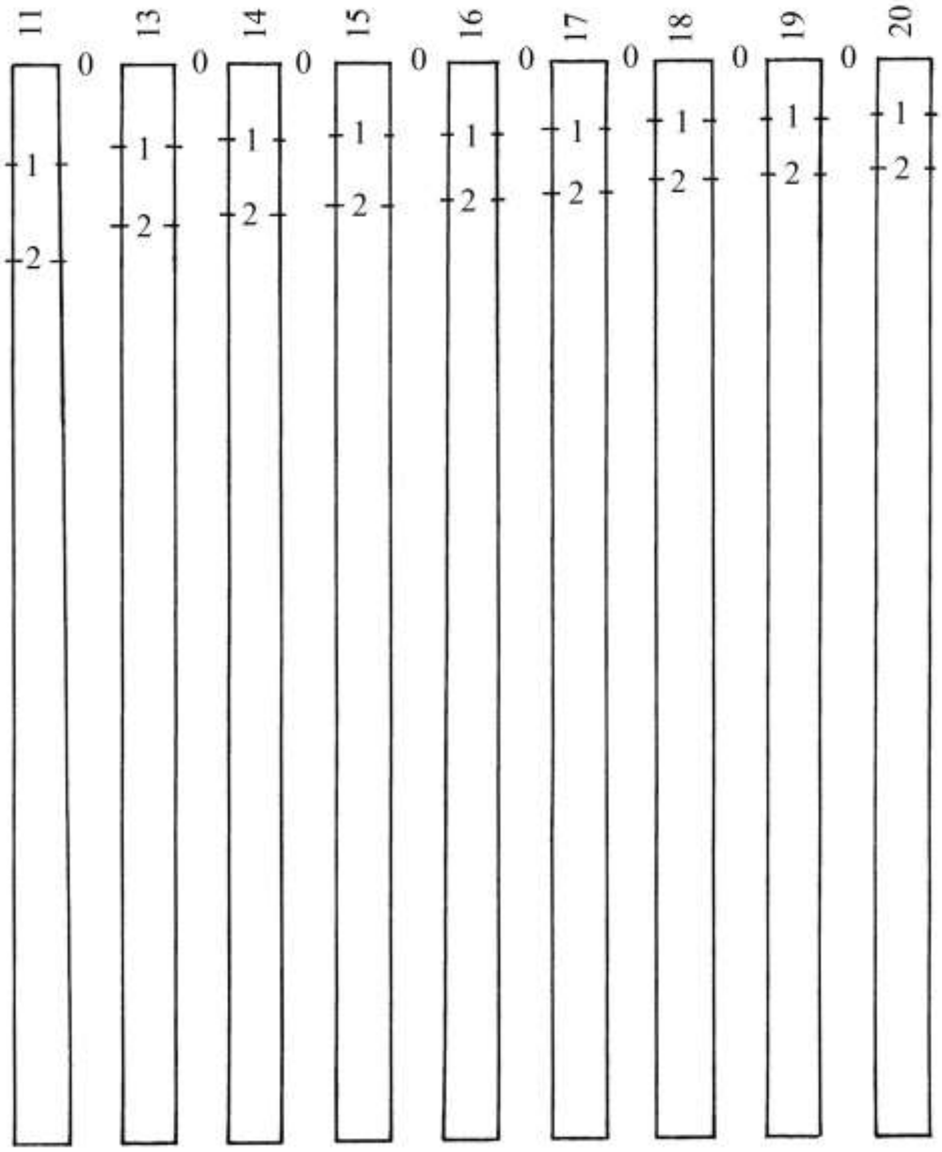
Lo strumento aveva la forma di un prisma a base quadrata e su di una faccia laterale recava *quattordici* fori a uguale distanza che lo dividevano in 15 parti uguali. Lo strumento era lungo un quarto di braccio e cioè 60,1055/4 = 15,026 cm: ciascuna delle divisioni corrispondeva a ≈ 1 cm.

Stando a quanto afferma in tempi più recenti Giuseppe Antonio Alberti nel suo trattato citato in bibliografia (e pubblicato nel 1822), la stagia veniva inserita obliquamente nella botte attraverso il cocchiume, fino a farle toccare un'estremità:



Le cifre “0”, “1” e “2” fanno parte della scala forse incisa sull’asta. Lo “0” doveva combaciare con il cocchiume.

La seconda tabella di Tommaso della Gazzaia suggerisce l’uso di più stagie per misurare. Probabilmente non occorreva un ampio ventaglio di aste per misurare le *trentatré* frazioni contenute nella tabella: il loro numero poteva restringersi alle *nove* mostrate nella figura che segue:



Ad esempio, la stagia da 16 tacche poteva essere usata per misurare gli scemi lunghi ½, ¼, 1/8, 3/8 oltreché 1/16.

Considerazioni analoghe valgono per le altre frazioni.

È assai probabile che la numerazione o il conteggio iniziassero dalla testa delle aste.

LEONARDO DA CREMONA

Leonardo da Cremona è anche conosciuto con il nome erroneo di Leonardo Mainardi o Leonardo Maynardi.

Egli è l'autore di alcune opere matematiche. Un manoscritto contenente suoi scritti era conservato nella biblioteca di Leonardo da Vinci.

Fu attivo almeno fra il 1404 e il 1438.

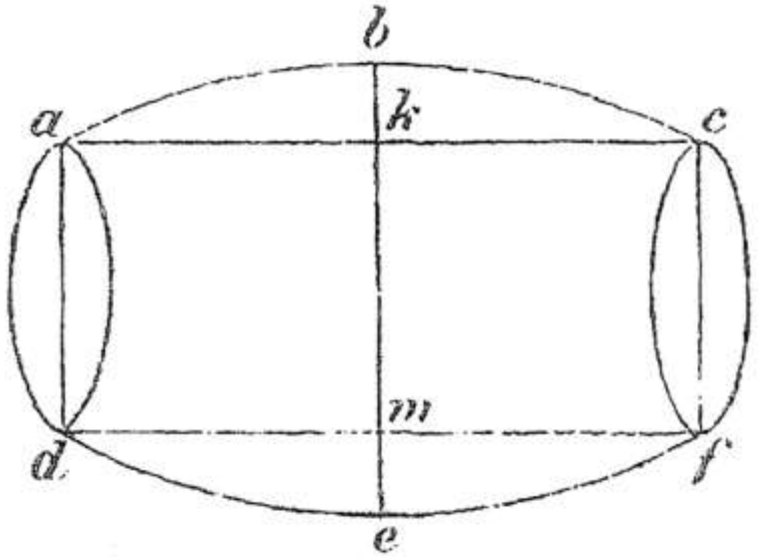
Un suo trattato di geometria pratica ("*Artis Metrice Practice Compilatio*") scritto in italiano (in dialetto veneziano) è stato pubblicato soltanto nel 1902, a cura dello storico della matematica Maximilian Curtze.

In quel lavoro erano trattati diversi argomenti di geometria piana e di geometria solida.

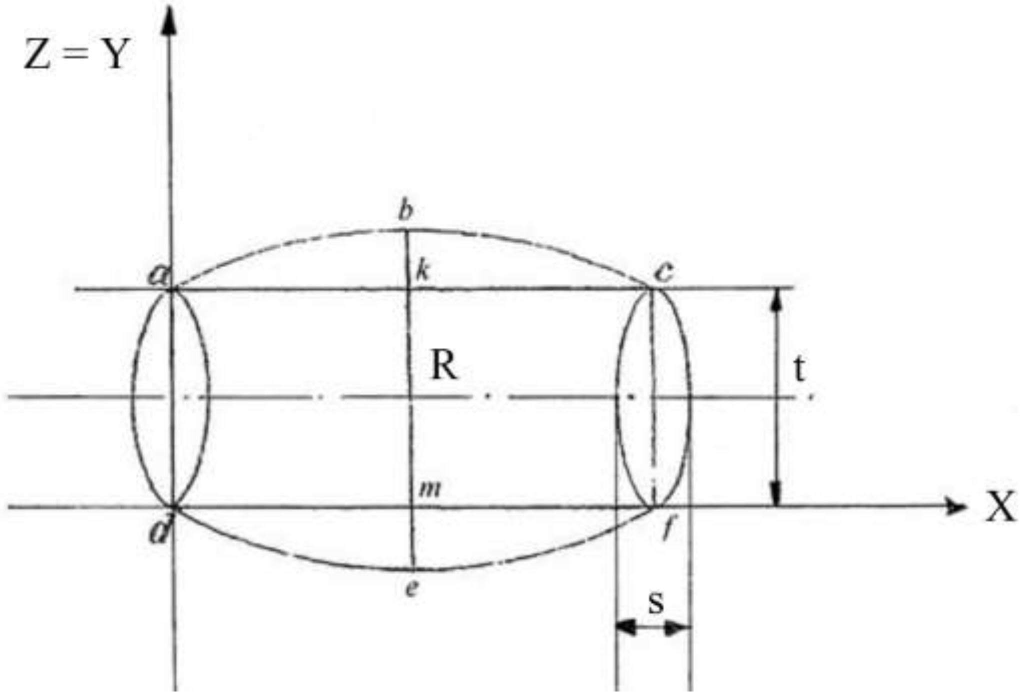
La misura della capacità di una botte

La misura della capacità di una botte (una *veza* nel dialetto veneto usato da Leonardo Cremonese) costituiva un problema diffuso nel Medioevo e nel Rinascimento e oggetto di spiegazioni e di metodi pratici per il suo calcolo nei *trattati d'abaco* italiani e nelle opere di molti matematici.

Anche Leonardo Cremonese studiò l'argomento e rappresentò una botte con l'asse di simmetria orizzontale:



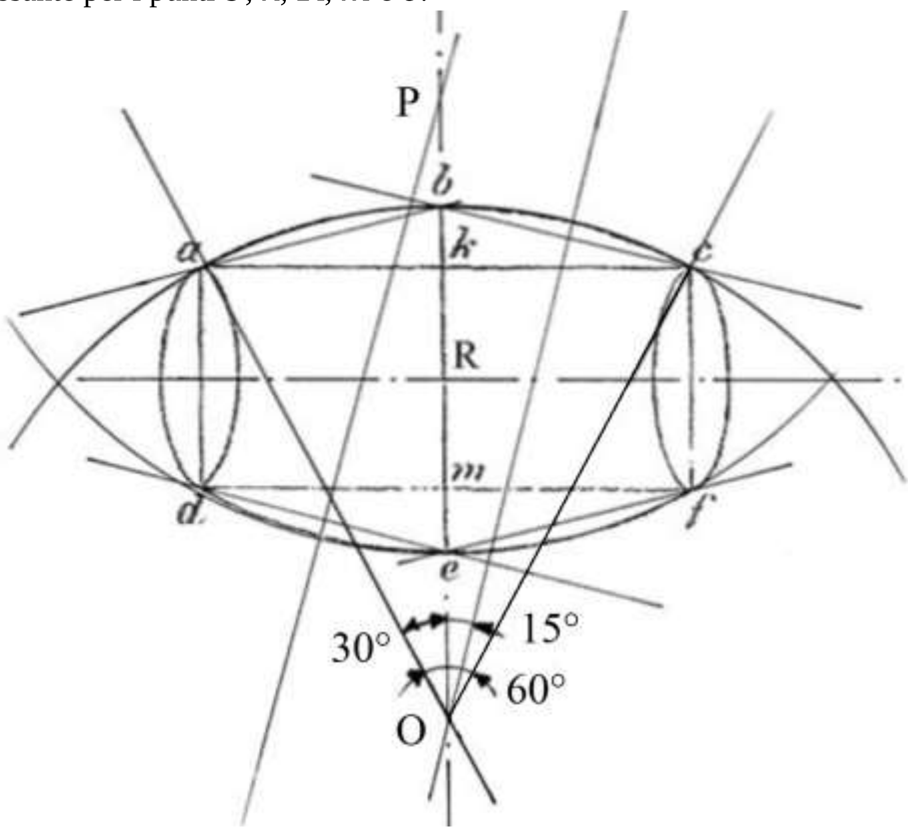
Il solido è disegnato in un'*assonometria cavaliera* che mostra entrambe le basi circolari deformate in ellissi. L'*angolo di fuga* è uguale a 90° (angolo formato dall'asse X con gli assi coincidenti Z e Y).



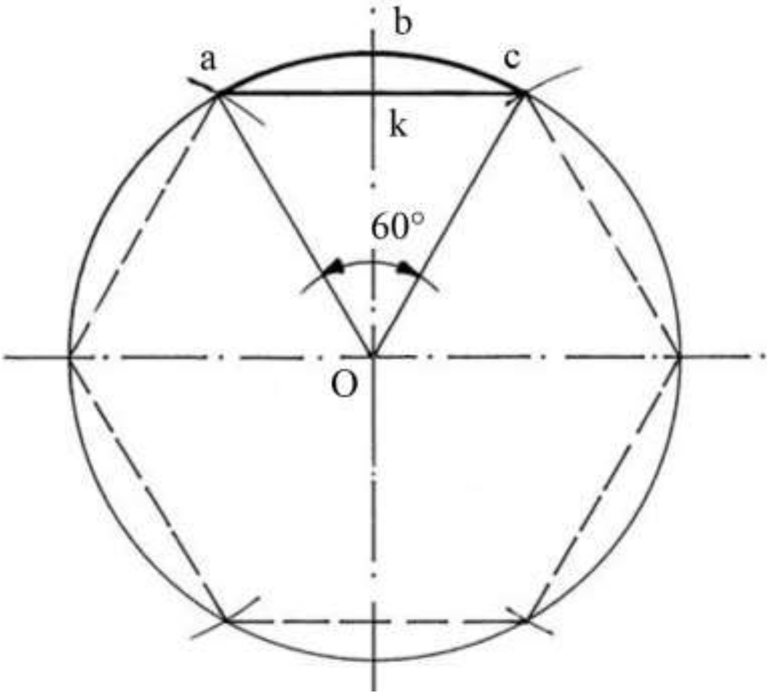
Il *rapporto di fuga* RF relativo allo schiacciamento delle circonferenze dei due cerchi di base è misurato lungo l'asse X e vale mediamente:

rapporto di fuga = RF = s/t ≈ 0,35 .

Gli archi *abc* e *def* sono archi di circonferenza (di raggi di uguale lunghezza), con centri rispettivamente nei punti O e P, esterni al profilo della botte e posizionati sull'asse di simmetria verticale passante per i punti *b*, *k*, R, *m* e *e*.



Lo schema che segue mostra l'origine geometrica del *segmento circolare* abck determinato nel cerchio di centro O e raggio Oa = Ob = Oc dalla corda ac:



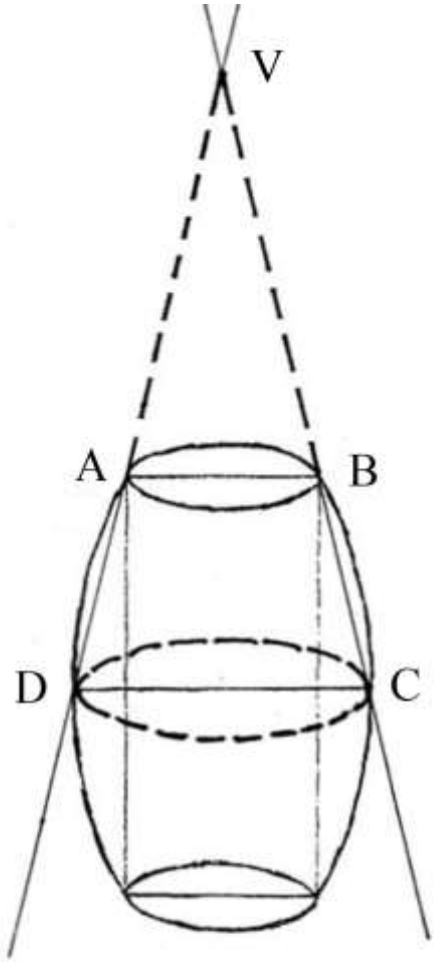
- APPROFONDIMENTO -

La botte descritta da Leonardo Cremonese ha pianta circolare e profilo ad arco di circonferenza.

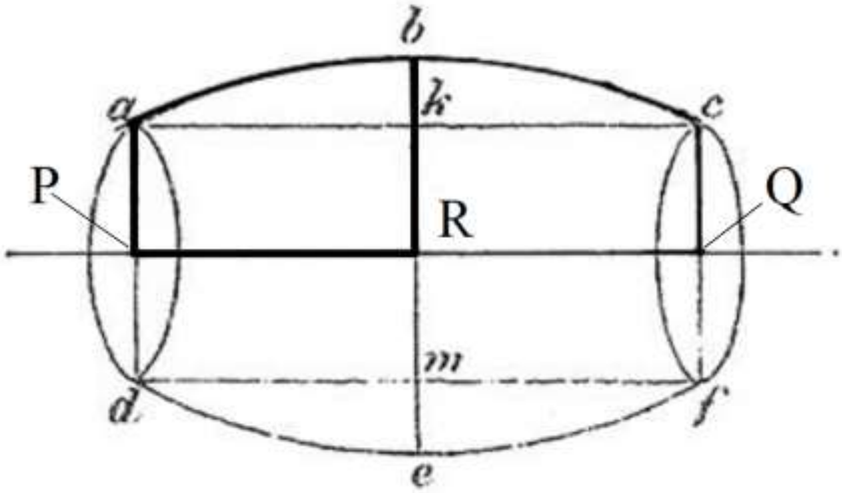
Altre botti e recipienti vinari hanno pianta a forma di ellisse e profili più complessi di quello circolare.

La soluzione approssimata più sbrigativa adottata da alcuni geometri (ma poco precisa) riduceva la botte a un solido formato da due tronchi di cono uniti per la base maggiore.

Il solido ABCD non è un tronco di cono ottenuto dal sezionamento del cono DVC: le due superfici AD e BC non sono rettilinee. I calcoli producevano un risultato errato per *difetto*.

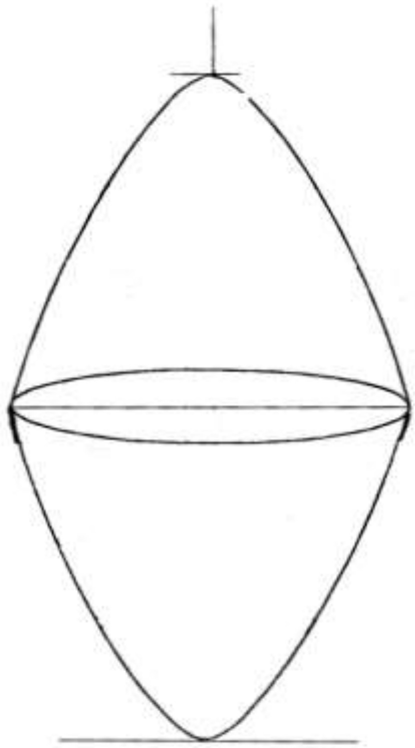


Il solido ABCD è prodotto dalla rotazione del quadrilatero RPab intorno all’asse di simmetria passante per i punti P e R:

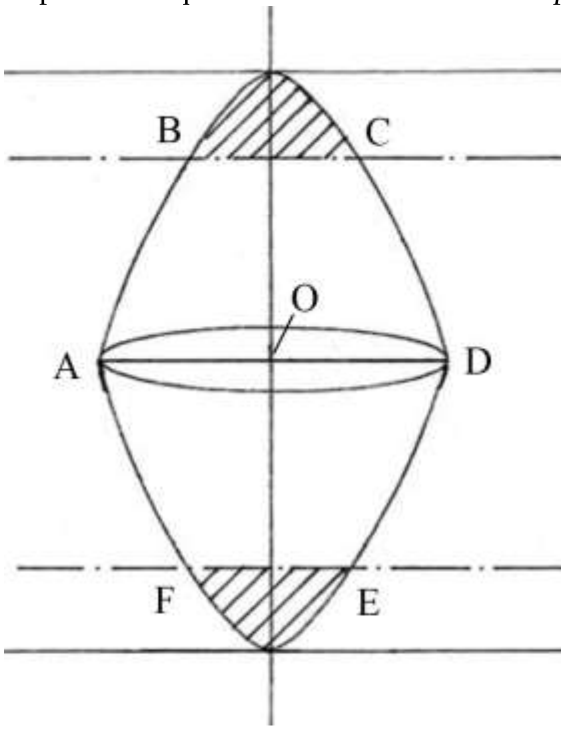


La successiva rotazione della figura QRPabc intorno all’asse di simmetria PRQ genera la botte (che ha stessa forma di quella descritta da Leonardo Cremonese).

La seconda soluzione era data dall'assimilazione della botte a due tronchi di *paraboloide* uniti per le loro basi maggiori:

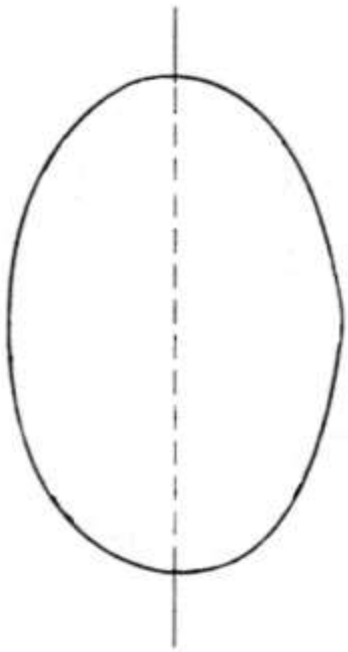


Tagliando con due piani paralleli a quello di unione si ottiene un *paraboloide troncato*:

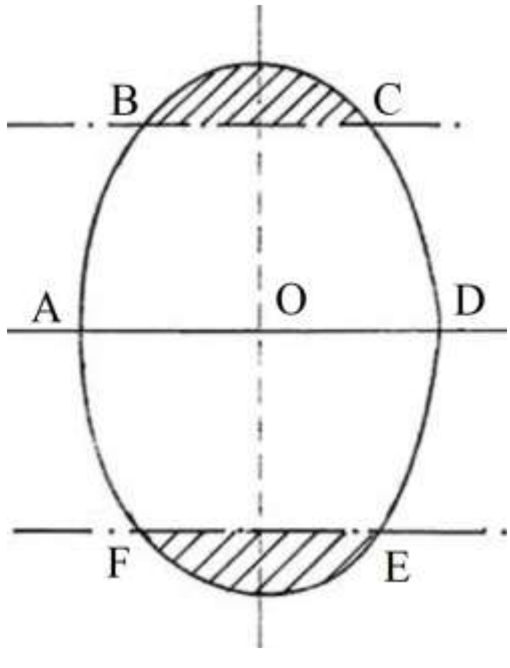


Una terza soluzione è data dall'assimilazione della botte circolare a un *ellissoide troncato*. Un ellissoide è un solido geometrico generato dalla rotazione di un'ellisse intorno a uno dei suoi due assi.

Un ellissoide prodotto dalla rotazione di un’ellisse intorno al suo asse maggiore è presentato nella figura che segue:



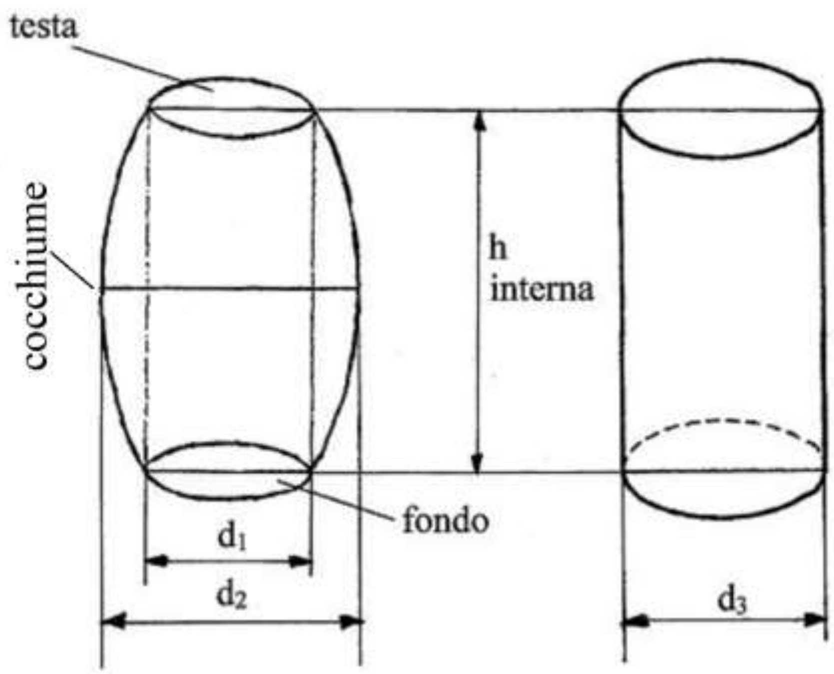
La figura che segue mostra un *ellissoide troncato* ABCDEF ottenuto sezionando un ellissoide con due piani paralleli equidistanti dal piano in cui giacciono i punti A, O e D:



Fra le tre soluzioni proposte quella che più si allontana dal profilo della botte è la prima, quella a doppio tronco di cono.

Il profilo di una generica botte non può essere assimilato ad alcuna delle tre forme viste.

La botte circolare presentata da Leonardo Cremonese è assimilabile a un cilindro di forma equivalente. Nella figura che segue, a sinistra è riprodotta la botte di Leonardo e a destra il cilindro equivalente con la stessa altezza h:



d_1 d_2 d_3 diametri misurati all'interno

L’assimilazione della botte circolare al cilindro è una soluzione ricercata dagli abacisti e dai geometri fino almeno all’Ottocento.

Questo metodo fu adottato nell’Ottocento dalle Dogane di alcuni Stati italiani anteriori all’unificazione nazionale.

Di seguito è descritta la soluzione spiegata dal matematico Luigi Malavasi nel suo trattato ”*La Metrologia Italiana …*”, pubblicato a Modena nel 1842.

Nel caso più semplice, il diametro della *testa* e quello del *fondo* sono uguali e valgono d_1.

La lunghezza del diametro del cilindro equivalente, d_3, è intermedia fra quelle di d_1 (d_{TESTA} e d_{FONDO}) e d_2 ($d_{COCCHIUME}$) della botte:

$$d_2 > d_3 > d_1$$

Il volume di una botte era calcolato determinando le dimensioni *interne* del solido: altezza h e diametri vari.

Nel caso mostrato nella precedente figura, il diametro del cilindro *equivalente*, d_3, era calcolato con la seguente formula *empirica*:

$$d_3 = [2 * d_2 + (d_{TESTA} + d_{FONDO})/2]3 = (2 * d_2 + d_1)/3$$

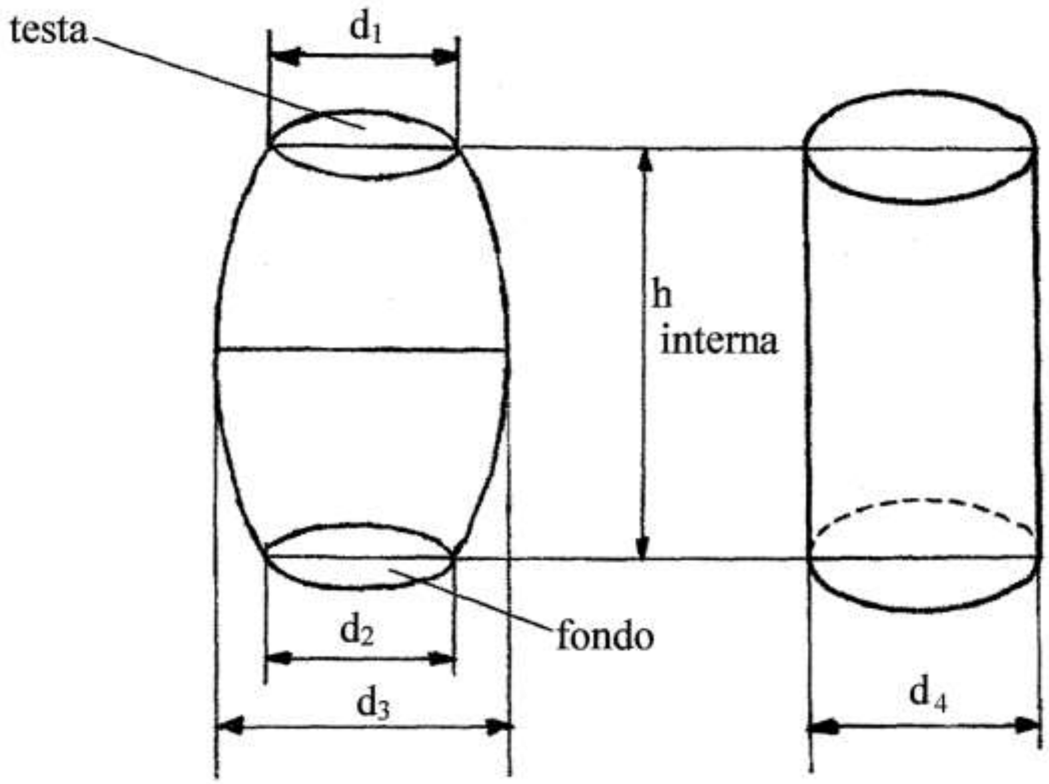
e cioè come la *terza parte* della somma del doppio diametro maggiore (d_2) e del diametro minore (d_1).

Il volume V del cilindro equivalente è dato da:

$$V = \pi/4 * (d_3)^2 * h .$$

Nel caso in cui il diametro della testa (d_1) fosse diverso da quello del fondo (d_2), la formula precedente si complica un po':

$$d_4 = [2 * d_{COCCHIUME} + (d_1 + d_2)/2]/3$$



d_1 d_2 d_3 d_4 diametri misurati all'interno

Malavasi confrontò i risultati ottenuti con l'applicazione della *formula empirica* con quelli ricavabili da una formula, a suo dire, più corretta:

$$V = \pi/4 * h/3 * [2 * (d_2)^2 + (d_1)^2]$$

La differenza fra i risultati dei due metodi è trascurabile: il volume calcolato con il diametro determinato con la *formula empirica* sarebbe approssimato *per difetto* dello 0,65%.

- ANALISI STORICA -

Altri abacisti e geometri si interessarono al tema del calcolo della capacità delle botti.

Il banchiere e abacista fiorentino Paolo Petriboni (1393/94 – 1443/44) studiò l'argomento nel suo trattato "*Libro d'arismetrica*", non pubblicato.

Numerosi matematici italiani si sono dedicati alla misura dei vasi vinari.

Il novarese Girolamo Cataneo pubblicò a Brescia nel 1572 un trattato ("*Opera del misurare*"): egli vi inserì alcune tabelle *cadometriche*.

La *cadometria* è il settore della geometria pratica che si occupa della misura delle botti e dei vasi.

Alcune tabelle furono dedicate alla misura degli *scemi* e cioè l'altezza del vuoto sovrastante il livello del liquido. Aumentando gli scemi diminuiscono l'altezza e il volume del vino contenuto nella botte, per cui misurandoli con un apposito strumento e usando una opportuna tabella, il vignaiolo calcolava la quantità di vino disponibile.

Altri successivi matematici italiani si interessarono al problema: Evangelista Torricelli, Pietro Cossali, Odoardo Gherli, Barnaba Oriani, Giuseppe Bruschetti, Giovanni Alessandro Majocchi.

Nelle opere di questi (e di altri autori) sono contenute formule assai più complesse di quella vista in precedenza e usata da alcune Dogane italiane del XIX secolo, prima dell'Unificazione.

- -

LA MISURA DEL VOLUME DELLE BOTTI SECONDO PIERO DELLA FRANCESCA

Alla carta 109 *recto* del Codice Ashurburhamiano 280 della Biblioteca Medicea Laurenziana di Firenze contenente copia del “Trattato d’Abaco” di Piero della Francesca è descritta una procedura per calcolare la capacità di una botte, senza l’ausilio di alcuna figura. Piero domanda quanto essa sarà “quadrata”, intendendo con questo termine il suo volume.

Ecco il testo di Piero [per comodità qui diviso in due paragrafi contrassegnati con I e II]:

I

Egl'è una bocte che i suoi fondi è ciascuno per diametro 2 bracci; et al cochiume è 2 1/4, et tra i fondi e 'l cochiume è 2 2/9, et è lunga 2 bracci, Domando quanto serà quadrata.

Questa è de spetie de piramide taglate, però fa' così. Montiplica il fondo in sè, ch'è 2, fa 4, poi montiplica 2 2/9 in sè fa 4 76/81; giogni insiemi fa 8 76/81. Poi montiplica 2 via 2 2/9 fa 4 4/9, giogni con 8 76/81 fa 13 31/81, parti per 3 ne vene 4 112/243 cioè radici de 4 112/243 che in sè montiplicato fa 4 112/243: e questo tieni a mente. Tu ài che montiplicato 2 2/9 in sè fa 4 76/81, hora montiplica 2 1/4 in sè fa 5 1/16, giongni insiemi fa 10 1/1296, et montiplica 2 2/9 via 2 1/4 fa 5 giogni insemi fa 15 1/1296; parti per 3 ne vene 5 1/3888, cioè la radici de 5 1/3888 che in sè montiplicato fa 5 1/3888. Giognilo chon quello de sopra ch'è 4 112/243 fa 9 1792/3888 il quale montiplica per 11 e parti per 14, ne vene 7 23600/54432: tanto è quadrata la dicta botte. Questo modo se po’ tenere quando le mesure sono tucte equidistante l'una da l'altra, none altramente.

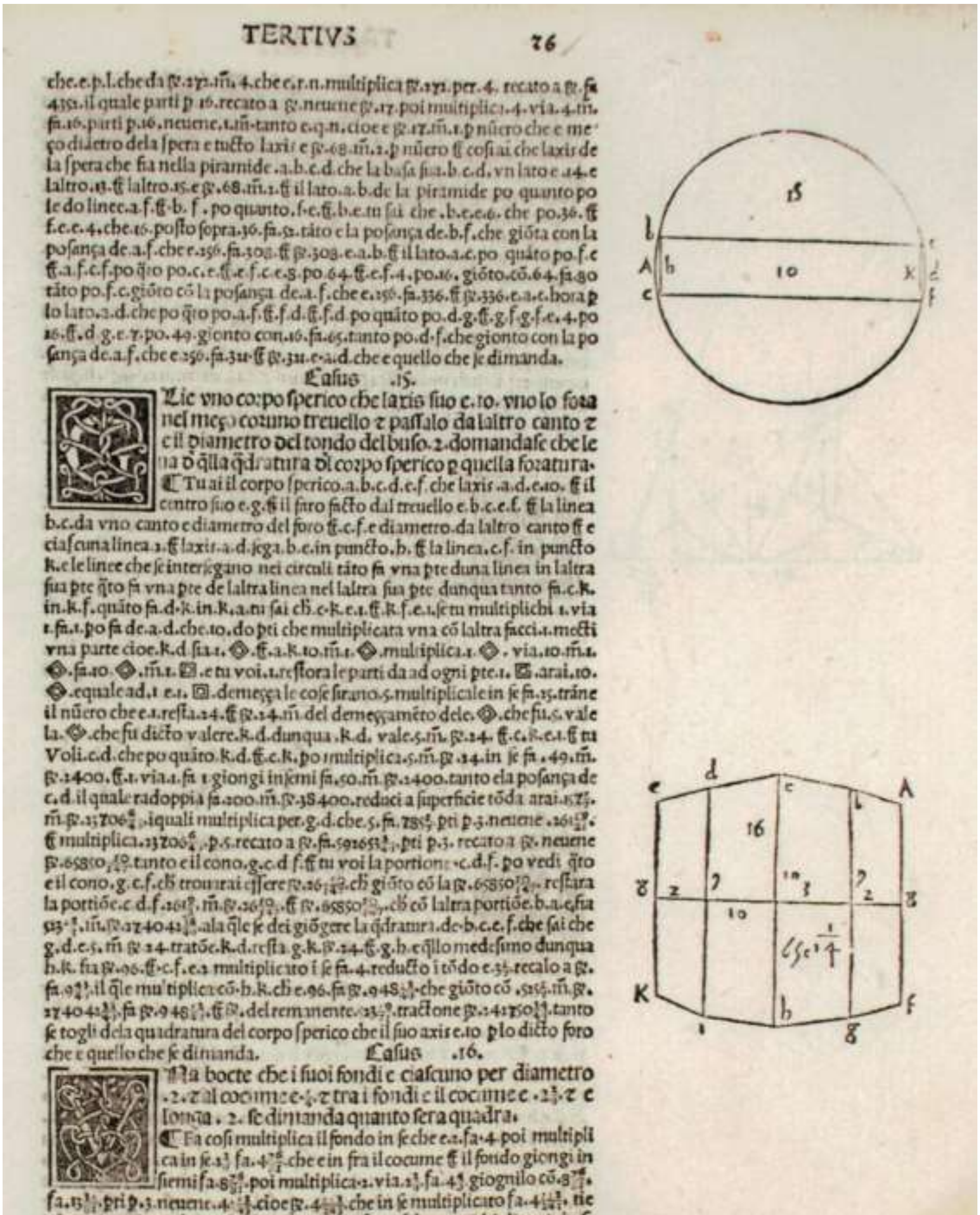
II

Ma quando non fussa equidistante tieni questo modo. Cioè metamo che i fondi de la bocte sieno per diametro 8 bracci et al cochiume sia 10 et, a 2 bracci presso ai fondi, sia 9; et sia la bocte lunga 10. Il primo fondo sia il suo diametro AF, et l'altro diametro apresso sia BG, et quello del cochiume sia CH et il terço sia DI, et il fondo de rieto sia EK. Hora montiplica prima quello del cochiume CH, ch'è 10, in sè fanno 100; poi montiplica BG, ch'è 9, in sè fa 81; giogni insie[me] fa 181. Hora montiplica CH chon BG fa 90, giognilo con 181 fa 271, il quale parti per 3 ne vene 90 1/3; il quale montiplica per 11 e parti per 14, ne vene 70 41/42, il quale montiplica per 6, ch'è da la linea BG a la linea DI, fa 428 31/42: e questo serba. Hora montiplica 9 che fa 81, et montiplica il fondo AF, ch'è 8, in sè fa 64, giogni insiemi fa 145; e montiplica 8 via 9 fa 72, giogni insiemi fa 217, partilo per 3 ne vene 72 1/3, il quale montiplica per 11 e parti per 14, ne vene 56 35/42, il quale montiplica per 4, che è da la linea AF a la linea BG ch'è 2, et 2 è da la linea DI a la linea EK che fa 4, via 56 35/42 fa 227 1/3. Giognilo con 428 32/42 fa 656 1/14: tanto fia quadrata la dicta bocte, cioè 656 1/14.

Il secondo paragrafo è pure contenuto nel trattato in latino “*Libellus de Quinque Corporibus Regularibus*”: in quest’opera è presente lo schema della botte con scritte le dimensioni. Questo secondo esempio è ricavato dall’importante studio di Girolamo Mancini (citato in bibliografia), che smascherò il pesante plagio compiuto da Luca Pacioli ai danni di Piero della Francesca: il testo di Piero fu tradotto dal latino in italiano e pubblicato dal Pacioli, come suo lavoro, nella terza parte del *De Divina proportione*.

Un’APPENDICE alla fine di questo capitolo è dedicata ai plagi di frate Luca Pacioli.

La figura che segue è tratta dal *De Divina proportione* (riprodotta dall’*Antologia della Divina Proporzione* citata in bibliografia):



TERTIVS 76

Casus .15.

Eglie uno corpo sperico che laxis suo e.10. vuolo forare nel mezo co uno trevello e passalo da laltro canto e el diametro del tondo del buso.2.domandase che le ua de qlla qdratura dl corpo sperico p quella foratura.

Casus .16.

Una bocte che i suoi fondi e ciascuno per diametro .2. e al cocume e.3. e tra i fondi e il cocume e .2½. e longa .2. se dimanda quanto sera quadra.

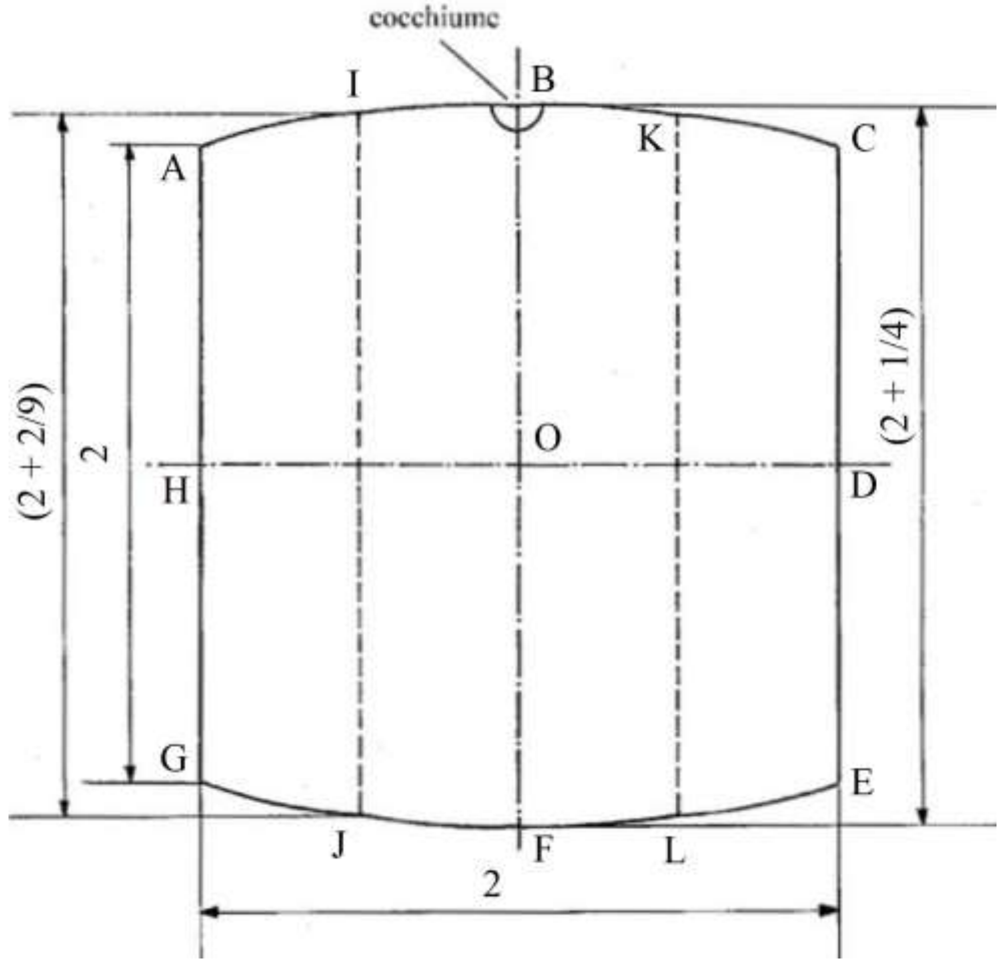
Pacioli copiò anche il testo e il disegno del secondo esempio di botte considerato da Piero della Francesca. Probabilmente il suo plagio fu effettuato a partire dal manoscritto originale in italiano curato da Piero e oggi scomparso (distrutto dallo stesso Pacioli?).

Sui numerosi plagi di Luca Pacioli è importante consultare il dettagliato studio che sull’argomento pubblicò Ettore Picutti nell’articolo citato in bibliografia.

Le misure lineari usate da Piero sono espresse in braccia: con ogni probabilità si tratta del braccio da panno di Firenze, usato all’epoca in cui visse Piero sia a Arezzo sia a Sansepolcro (in antico Borgo Sansepolcro), città natale di Piero.

La prima botte di Piero

Piero definisce il solido come una *piramide tagliata*: la figura che segue ne dà un’interpretazione circolare, perché questa sarebbe l’unica a mostrarsi compatibile con le dimensioni espresse in *braccia* fornite da Piero.



I diametri IJ e KL sono stati collocati rispettivamente in posizione equidistante dai diametri AG e BF e dai diametri BF e CE.

Il profilo della botte considerato in questo articolo è leggermente curvilineo, come mostrato nella figura qui sopra.

Per calcolare la capacità della botte, Piero impiega una procedura con i seguenti passi:

(1) moltiplicare per sé stessa la lunghezza del diametro di un fondo: 2 * 2 = 4 ;

(2) moltiplicare la lunghezza del diametro intermedio (IJ = KL) per sé stessa:
(2 + 2/9) * (2 + 2/0) = 4 + 76/81 ;

(3) sommare i due precedenti prodotti: 4 + (4 + 76/81) = 8 + 76/81 ;

(4) moltiplicare la lunghezza del diametro AG per quella del diametro IJ:
2 * (2 + 2/9) = 4 + 4/9 ;

(5) addizionare il prodotto (4) alla somma (3): (4 + 4/9) + (8 + 76/81) = 13 + 13/81 ;

(6) dividere (5) per 3: (13 + 13/81)/3 = 4 + 112/243 ;

(7) moltiplicare la lunghezza del diametro BF per sé stessa: (2 + ¼) * (2 + ¼) = 5 + 1/16 ;

(8) sommare il precedente prodotto (7) con il quadrato della lunghezza del diametro IJ (2):
(5 + 1/16) + (4 + 76/81) = 10 + 1/1296 ;

(9) moltiplicare la lunghezza di IJ per quella di BF: (2 + 2/9) * (2 + ¼) = 5 ;

(10) sommare i numeri (8) e (9): (10 + 1/1296) + 5 = 15 + 1/1296 ;

(11) dividere per 3: (15 + 1/1296)/3 = 5 + 1/3888 ;

(12) sommare l'ultimo quoziente con quello (6): $(5 + 1/388) + (4 + 112/243) = 9 + 1792/3888$;
(13) moltiplicare (12) per 11 e dividere per 14:

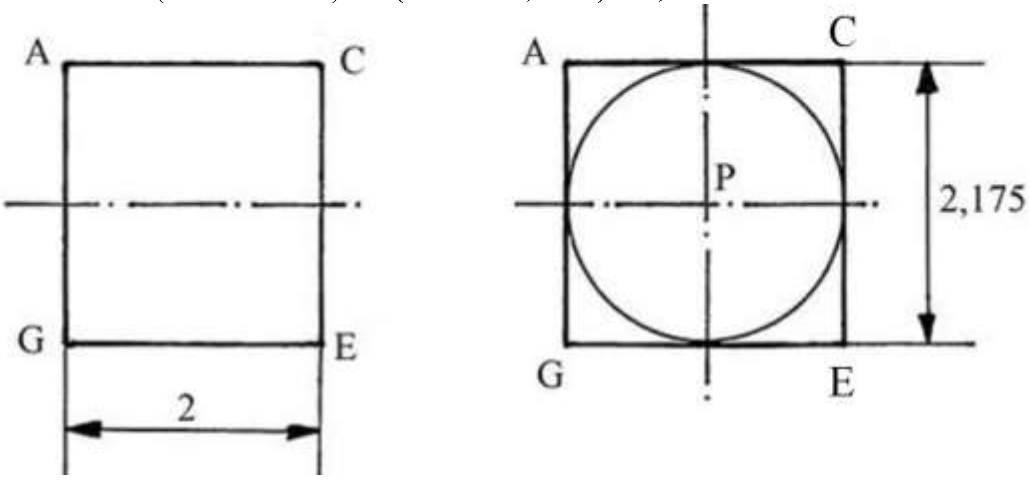
$(9 + 1792/3888) * 11/14 = 7 + 23600/54432$ braccia^3, volume della botte da arrotondare a $\approx 7{,}433$ braccia^3 .

Piero ha equiparato la botte a un cilindro che ha altezza h = 2 braccia e con i cerchi delle due basi che hanno area

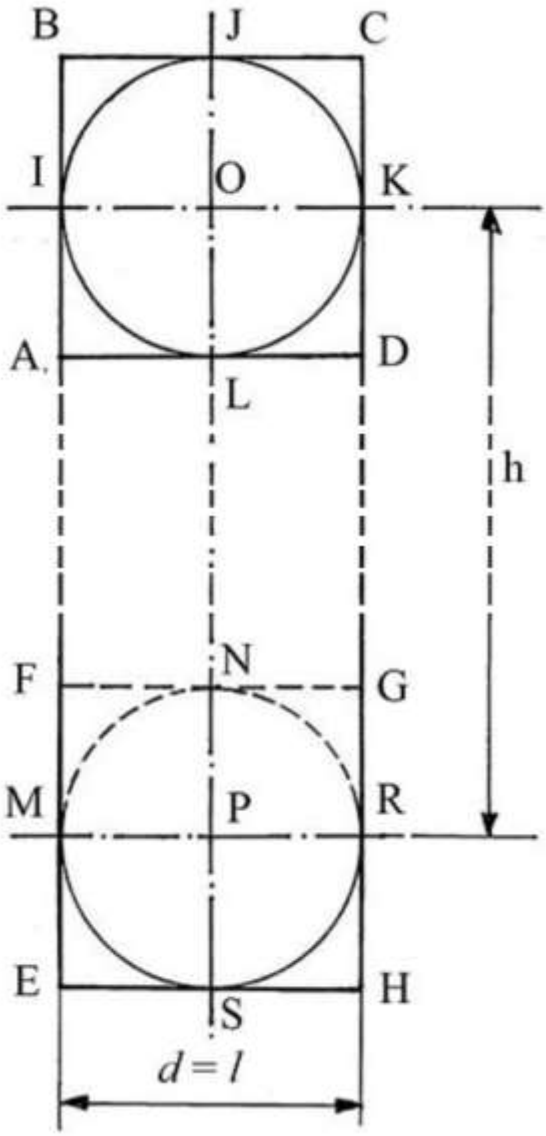
$\text{Area}_{\text{CERCHI}} = \text{Volume/altezza} \approx 7{,}433/2 \approx 3{,}7165$ braccia^2 .

L'area di un cerchio è data da:

$\text{Area} = \pi * d^2/4 = \pi/4 * d^2 \approx 11/14 * d^2$. Da questa formula ricaviamo il diametro *d*:
$d = \sqrt{(14/11 * \text{Area})} \approx \sqrt{(14/11 * 3{,}7165)} \approx 2{,}175$ braccia .



Il passo (12) della precedente procedura calcola il volume di una prisma a base quadrata che contiene il cilindro che approssima la botte e il successivo passo (13) ricava il volume del cilindro moltiplicando quello del prisma per la costante 11/14. Il volume del prisma a base quadrata della figura che segue (*che è fortemente fuori scala riguardo alla dimensione verticale ed è rappresentato in assonometria cavaliera con angolo di fuga uguale a 90°*) è:



Volume $_{PRISMA}$ = Area $_{BASE}$ * altezza = $\ell^2 * h = d^2 * h$.

Il volume del cilindro inscritto nel prisma è:

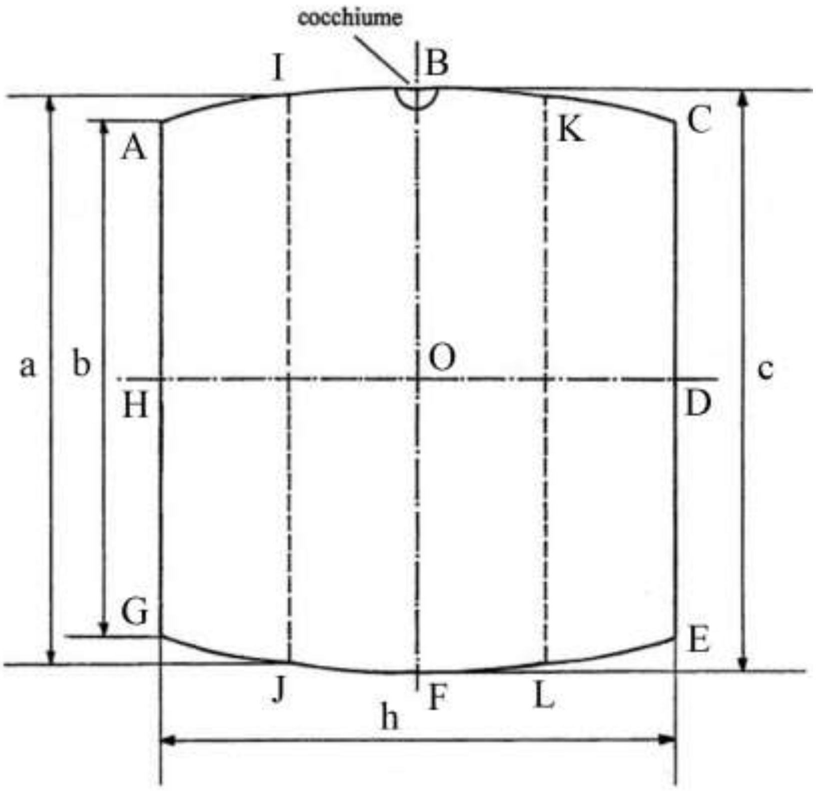
Volume $_{CILINDRO}$ = $\pi * d^2/4 * h = \pi/4 * d^2 * h \approx 11/14 * d^2 * h$.

Il rapporto fra il volume del cilindro e quello del prisma è:

rapporto = Volume $_{CILINDRO}$/Volume $_{PRISMA}$ $\approx (11/14 * d^2 * h)/(d^2 * h) \approx 11/14$.

Approfondiamo la procedura usata da Piero. Per semplificare introduciamo le lettere *minuscole* per indicare le grandezze in campo:

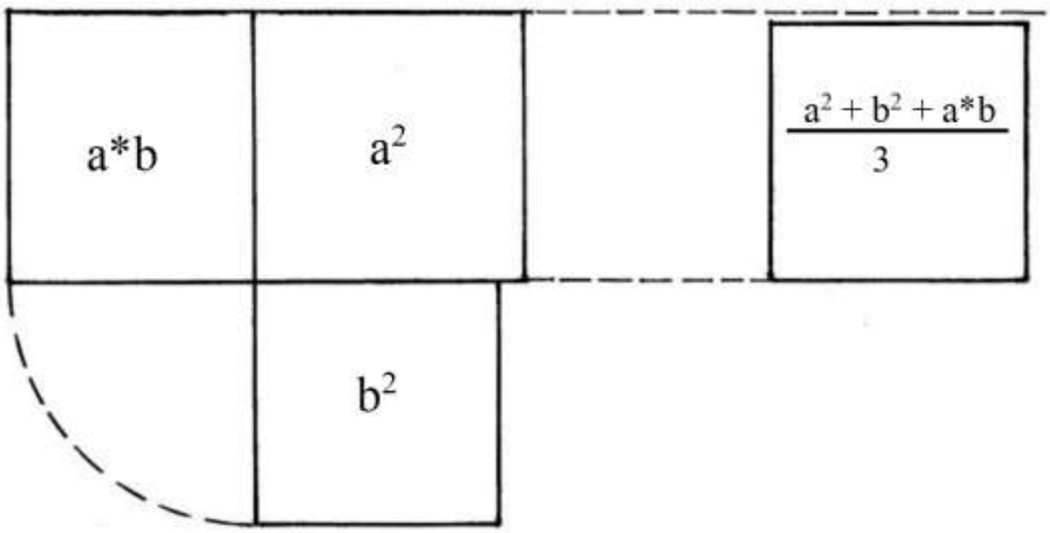
* IJ = KL = a = 2 + 2/9 ;
* AG = CE = b = 2 ;
* BF = c = 2 + 1/4 ;
* HD = h = 2 .



I passi della procedura possono essere scritti come segue:

(1) b^2 ;
(2) a^2 ;
(3) $a^2 + b^2$;
(4) $b*a$;
(5) $(a^2 + b^2) + a*b$ [l'espressione potrebbe essere scritta come $((a + b)^2 – a*b)$] ;
(6) $(a^2 + b^2 + a*b)/3$;
(7) c^2 ;
(8) $c^2 + a^2$;
(9) $a*c$;
(10) $c^2 + a^2 + a*c$;
(11) $(c^2 + a^2 + a*c)/3$;
(12) $(c^2 + a^2 + a*c)/3 + (a^2 + b^2 + a*b)/3$;
(13) $[(c^2 + a^2 + a*c)/3 + (a^2 + b^2 + a*b)/3] * 11/14$.

I passi da (1) a (5) della procedura sono finalizzati al calcolo dell'area di un poligono: con (1) e (2) sono determinate le aree di due quadrati di lati *b* e *a*. Alla loro somma è aggiunta l'area di un rettangolo che ha lati *b* e *a*.



L’espressione ($a^2 + b^2 + a*b$)/3 è la *media aritmetica* fra le aree dei tre quadrilateri ed è l’area di un poligono che può assumere la forma di un quadrato, come quello a destra nella figura qui sopra.

I passi da (7) a (11) calcolano l’area di un poligono che è la *media aritmetica* fra quelle dei quadrati convenzionali costruiti sui diametri corrispondenti al cocchiume (c^2) e a quelli delle sezioni intermedie IJ e KL. Il metodo seguito è quello già visto in precedenza.

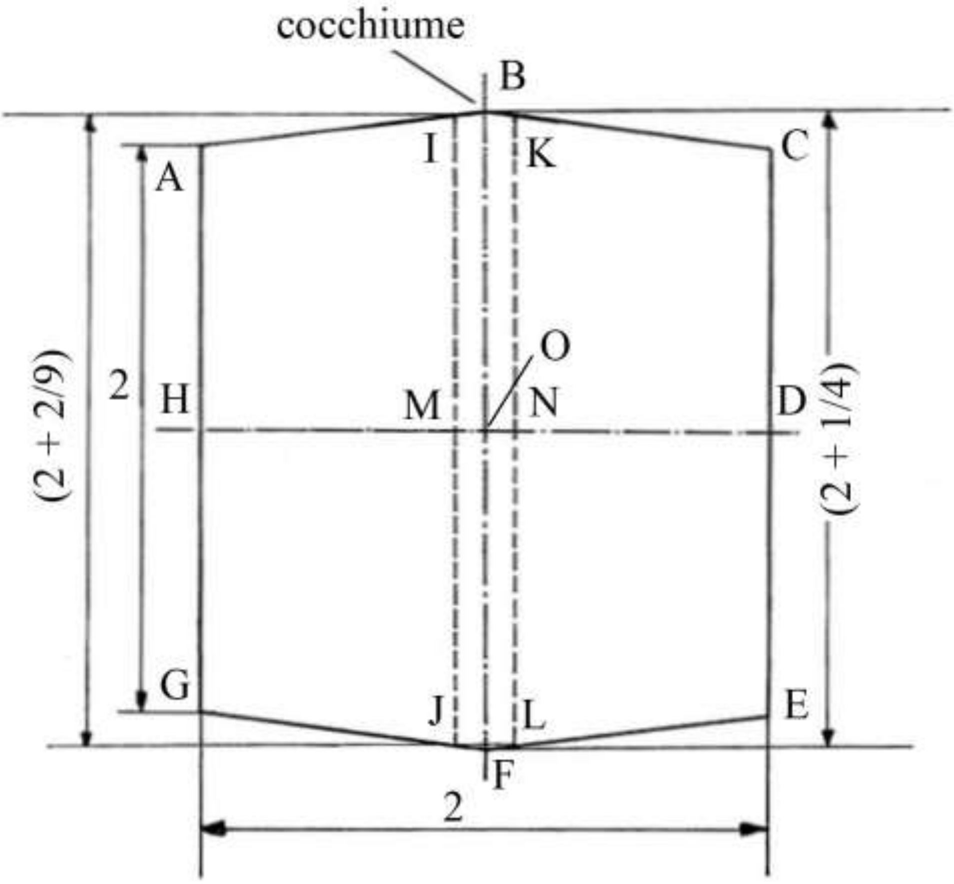
Il passo (12) somma le aree dei due poligoni convenzionali generati dalle due medie aritmetiche.

Il passo (13) moltiplica il risultato di (12) che *dimensionalmente* è un’area per la costante 11/14 ottenendo il volume della botte: la costante 11/14 viene considerata da Piero alla stregua di una lunghezza lineare. È opportuno sottolineare come nella sua procedura Piero non abbia mai utilizzato l’altezza della botte, h = 2 braccia.

- APPROFONDIMENTO -

Interpretando alla lettera l’espressione usata da Piero della Francesca per indicare questa botte, *piramide tagliata*, ne discendono altre considerazioni. È opportuno ricordare che il termine *piramide tagliata* indicava pure il *tronco di cono*.

Il profilo della botte diviene quello presentato nella figura che segue:

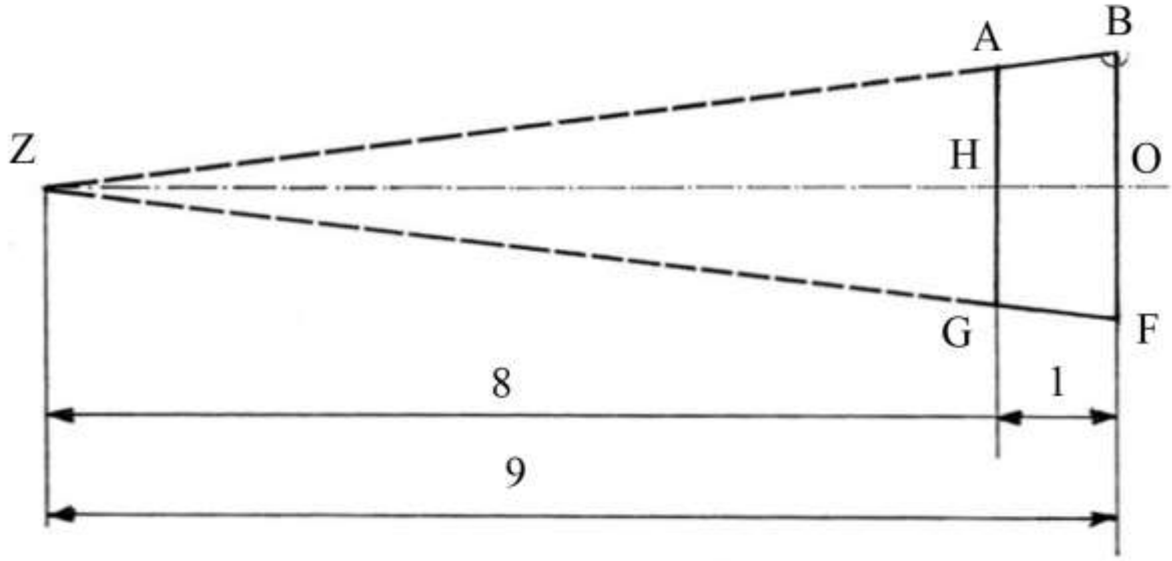


Le sezioni IJ e KL si trovano più vicine a quella del cocchiume BOF, a una distanza

$MN \approx 0{,}2$ braccia .

La botte è formata da due tronchi di cono, ABFG e BFEC, uniti lungo la loro base maggiore BOF.

Entrambi i due ipotetici tronchi di cono hanno le dimensioni descritte nella figura che segue:



L'ipotetico cono ZBF avrebbe altezza ZO uguale a 9 braccia.

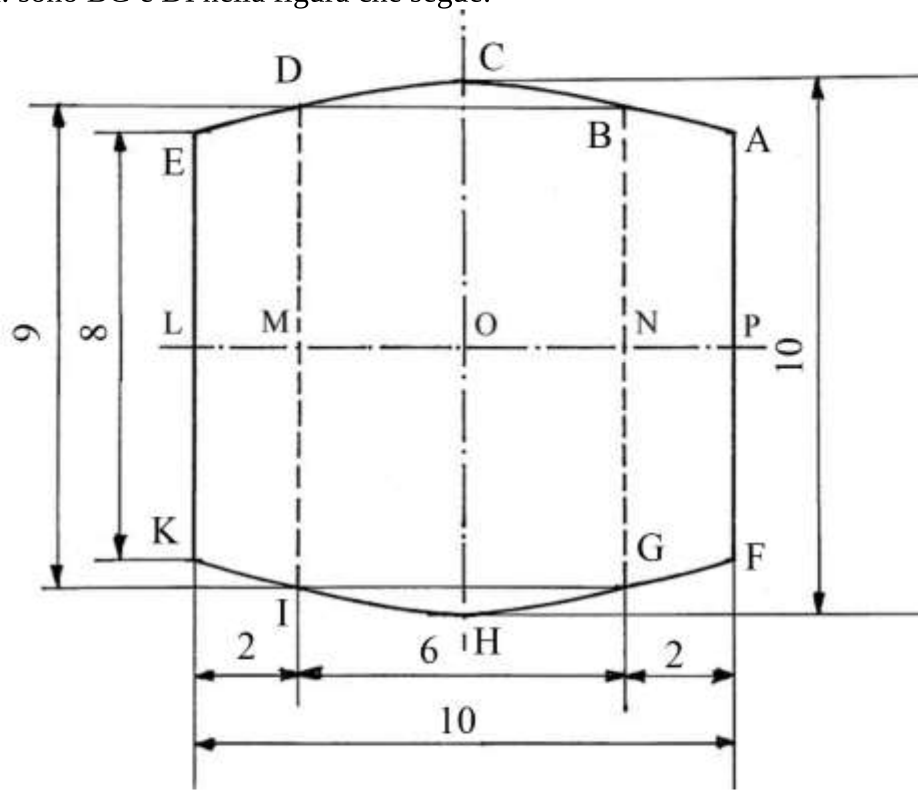
- -

La seconda botte di Piero

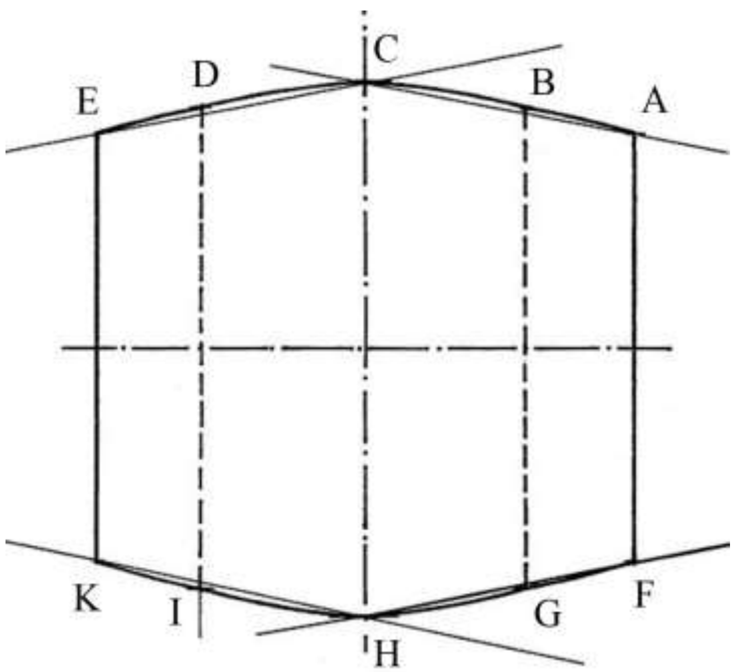
Il secondo esempio presentato da Piero si riferisce a una botte che ha fondi uguali con diametro lungo 8 braccia e un diametro al cocchiume pari a 10 braccia.

La botte è lunga 10 braccia.

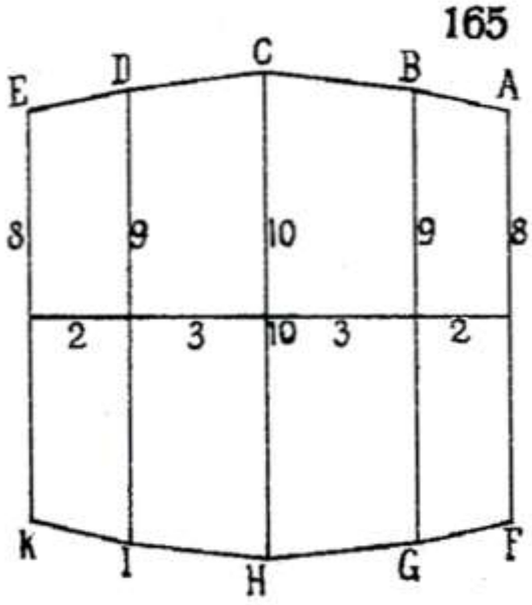
Misurando i diametri interni della botte alla distanza di 2 braccia dai fondi, essi risultano lunghi 9 braccia: sono BG e DI nella figura che segue:



Con le dimensioni utilizzate da Piero, il profilo della botte è sicuramente *curvo*. Lo schema che segue mostra come le terne di punti E-D-C, C-B-A, K-I-H e H-G-F non siano collocabili su rette:



Nell’edizione del *Libellus* curata da Girolamo Mancini è contenuto lo schema che segue, che si riferisce a questa seconda botte:



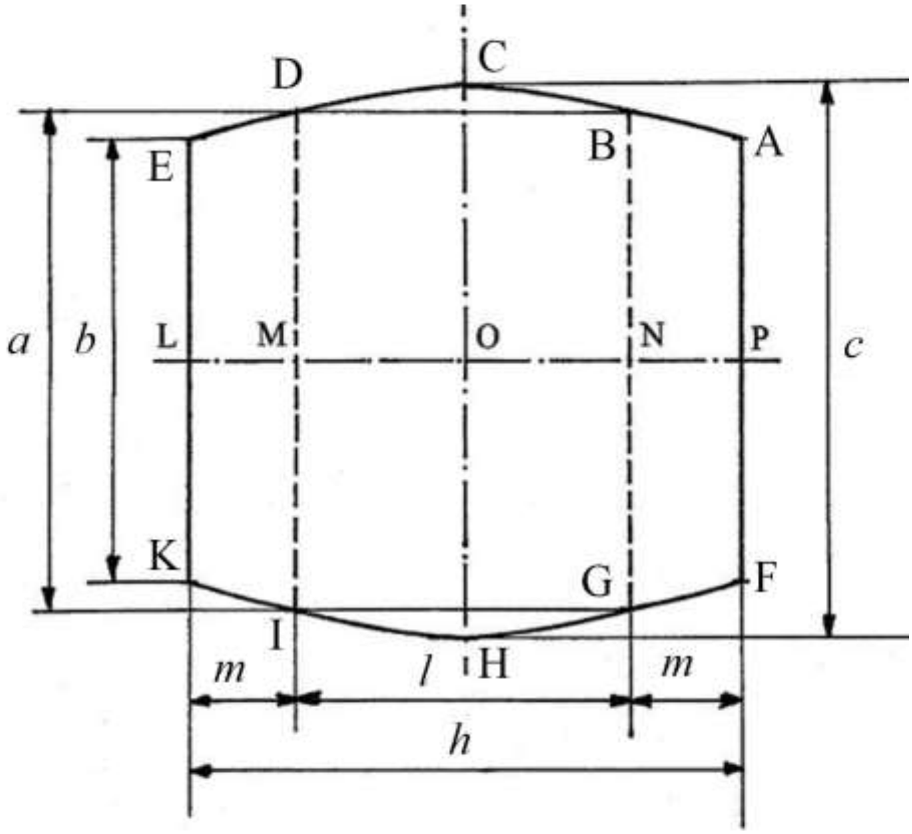
La procedura impiegata da Piero per calcolare la capacità di questa botte contiene i seguenti passi:

(1) moltiplicare per sé stessa la lunghezza del diametro del cocchiume: 10*10 = 100 ;
(2) moltiplicare la lunghezza del diametro intermedio, BG, per sé stessa: 9 * 9 = 81 ;
(3) sommare i prodotti (1) e (2): 100 + 81 = 181 ;
(4) moltiplicare la lunghezza del diametro al cocchiume per quella di BG: 10 * 9 = 90 ;
(5) sommare la (3) e la (4): 181 + 90 = 271 ;
(6) dividere la (5) per 3: 271/3 = 90 + 1/3 ;
(7) moltiplicare (6) per la costante 11/14: (90 + 1/3) * 11/14 = 70 + 41/42 ;
(8) moltiplicare (7) per la lunghezza di IG (o di MN): (70 + 41/42) * 6 = 425 + 6/7 [Piero della Francesca fornisce lo stesso risultato errato in entrambe le versioni, italiana e latina: (428 +31/42)];
(9) moltiplicare per sé stessa la lunghezza del diametro DI: 9 * 9 = 81 ;
(10) moltiplicare per sé stessa la lunghezza del diametro AF: 8 * 8 = 64 ;
(11) sommare (9) e (10): 81 + 64 = 145 ;
(12) moltiplicare la lunghezza di EK per quella di DI: 8 * 9 = 72 ;
(13) sommare (11) e (12): 145 + 72 = 217 ;
(14) dividere (13) per 3: 217/3 = 72 + 1/3 ;
(15) moltiplicare (14) per la costante 11/14: (72 + 1/3) * 11/14 = 56 + 35/42 [Piero non ha semplificato a 56 + 5/6];
(16) sommare le lunghezze LM e NP: 2 + 2 = 4 ;
(17) moltiplicare (15) per (16): (56 + 35/42) * 4 = 227 + 1/3 ;
(18) sommare (8) e (17): (425 + 6/7) + (227 + 1/3) = 653 + 4/21 braccia^3, volume della botte [Piero ha usato il valore errato calcolato al punto (8) e il suo risultato è di 656 + 1/14 braccia^3] .

Anche questa procedura può essere scritta usando il calcolo letterale:

* DI = BG = a = 9 ;
* EK =AF = b ;
* CH = c ;

* LP = h ;
* DB = MN = IG = ℓ = 6 ;
* LM = NP = m = 2 .



I passi della procedura possono essere scritti come segue:

(1) c^2 ;
(2) b^2 ;
(3) $c^2 + b^2$;
(4) c*b ;
(5) $c^2 + b^2 + c*b$;
(6) $(c^2 + b^2 + c*b)/3$;
(7) $(c^2 + b^2 + c*b)/3 * 11/14$;
(8) $[(c^2 + b^2 + c*b)/3 * 11/14] * \ell$;
(9) a^2 ;
(10) b^2 ;
(11) $a^2 + b^2$;
(12) b*a ;
(13) $a^2 + b^2 + b*a$;
(14) $(a^2 + b^2 + b*a)/3$;
(15) $(a^2 + b^2 + b*a)/3 * 11/14$;
(16) 2*m ;
(17) $(a^2 + b^2 + b*a)/3 * 11/14 * (2*m)$;
(18) $[(c^2 + b^2 + c*b)/3 * 11/14] * \ell + (a^2 + b^2 + b*a)/3 * 11/14 * (2*m)$.

Il metodo del calcolo della media aritmetica fra tre aree (di due quadrati e di un rettangolo), già usato nel caso del primo esempio di botte, è stato impiegato da Piero anche nella procedura di calcolo impiegata per il secondo esempio di botte.

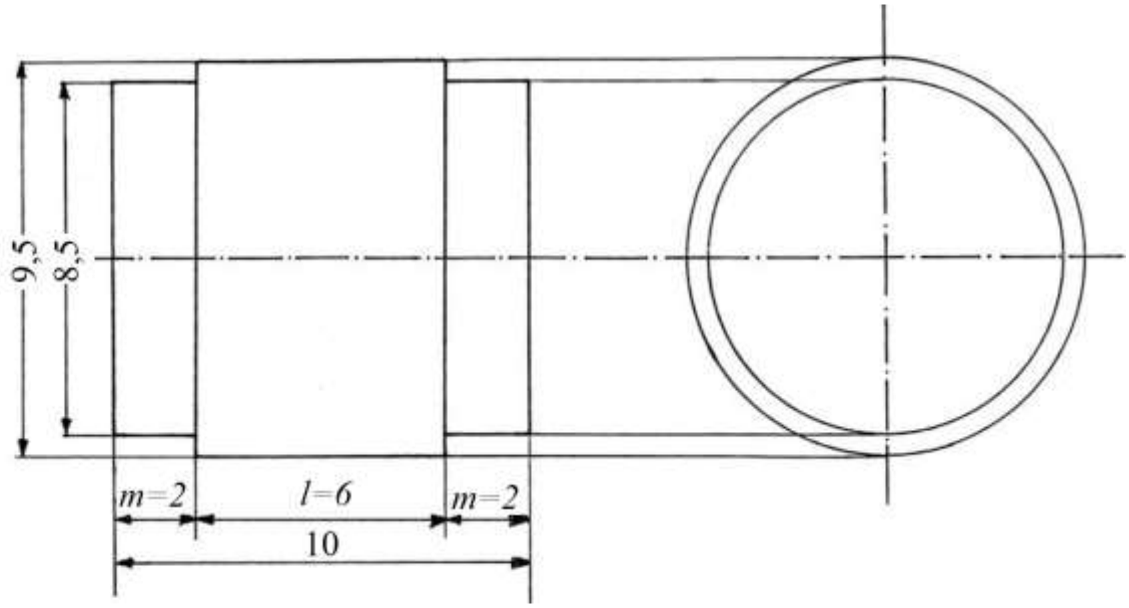
I passi da (1) a (6) calcolano l'area del poligono equivalente a *un terzo* della media aritmetica delle aree dei quadrati costruiti sui diametri al cocchiume (*c*) e ai due fondi (*b*) e del rettangolo di lati *c* e *b*.

Con il passo (7) Piero ottiene l'area del cerchio inscritto nel quadrato che ha area uguale a quella del poligono ricavato al passo (6), con l'uso della costante 11/14.

Al passo (8) Piero calcola *un* volume moltiplicando il precedente dato per la lunghezza del tratto MN che è $\ell = 6$.

Procede poi al passo (17) a determinare il volume complessivo dei due solidi identici delimitati dal profilo della botte e dalle coppie di piani EK-DI e AF-BG.

In conclusione, è come se Piero avesse scomposto la botte in tre cilindri coassiali di diametri 8,5 e 9,5 braccia, alti nell'ordine 2-6-2 braccia:



Con un ulteriore passaggio, la botte può essere assimilata a un cilindro con lo stesso volume, (653 + 4/21) braccia^3 e con altezza *h* uguale a quella botte: h = 10 braccia:

Il cerchio di base ha area uguale a:

$\text{Area}_{\text{CERCHIO}} = \text{Volume}_{\text{BOTTE}} / \text{altezza} \approx (653 + 4/21)/10 \approx 65{,}319$ braccia^2 .

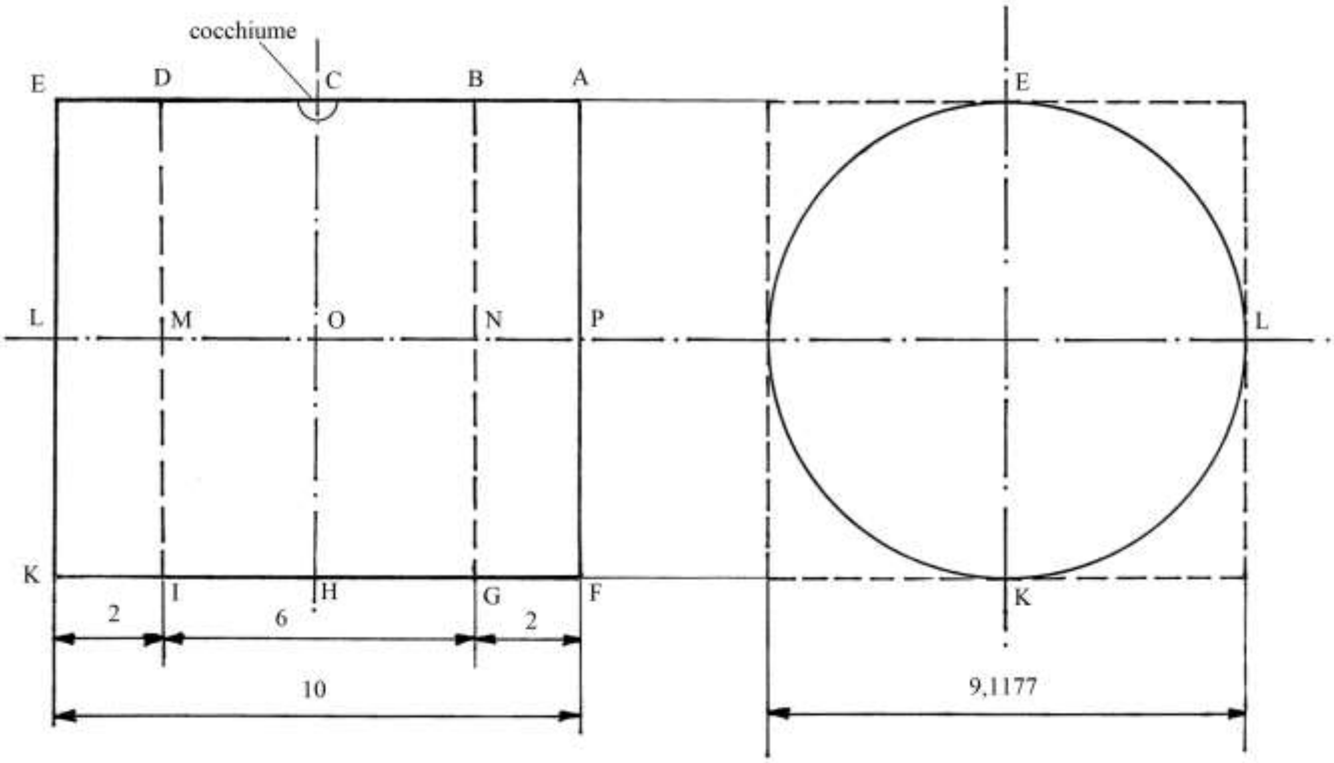
L'area del cerchio è data da:

$\text{Area}_{\text{CERCHIO}} = \pi * d^2/4 \approx 22/7 * d^2/4 \approx 22/28 * d^2 \approx 11/14 * d^2$, da cui

$d^2 \approx 14/11 * \text{Area}_{\text{CERCHIO}} \approx 14/11 * 65{,}319$ braccia^2 e

$d \approx \sqrt{(14/11 * 65{,}319)} \approx 9{,}1177$ braccia.

La botte è equivalente a un cilindro alto 10 braccia e con le basi aventi diametro ≈ 9,1177 braccia:



- APPENDICE -

I “plagi” di Luca Pacioli

Luca Pacioli (circa 1445 – 1517), originario di Sansepolcro come Piero della Francesca, è stato un matematico e un frate francescano, famoso per avere pubblicati alcuni trattati di matematica applicata (da lui fatti stampare a suo nome) e per avere insegnato in diverse città italiane.

L’opera più conosciuta è la *Summa de arithmetica geometria proportioni et proportionalita*, pubblicata a Venezia nel 1494.

Il secondo trattato è la *De divina proportione*, stampato a Venezia nel 1509.

Nel primo trattato, Pacioli “copiò” due testi non suoi, senza citarne gli autori e le fonti:

- Il *Libro che tracta de mercatantie et usanze de paesi*, di autore sconosciuto, attribuito a Giorgio di Lorenzo Chiarini e pubblicato anonimo a Firenze nel 1481.
- Il *Trattato di pratiche di geometria*, scritto in toscano, e risalente a circa il 1464. È conservato con la denominazione di *manoscritto Palatino 577* nella Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze. Alcuni studiosi, fra i quali Ettore Picutti e Elisabetta Ulivi, lo attribuiscono a Maestro Benedetto da Firenze (1429-1479), autore di altre opere di aritmetica e di abaco.

  Questo manoscritto contiene 241 carte. Il Pacioli copiò pure i disegni geometrici, le lettere che erano apposte ai vertici delle figure e le cifre delle misure.

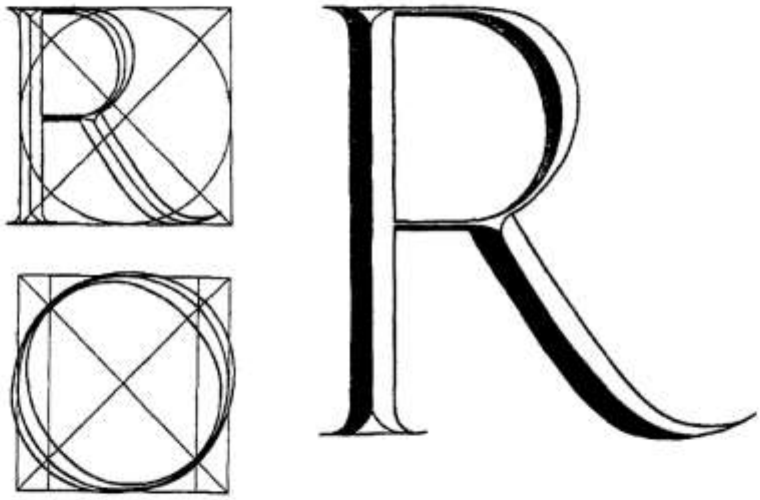
Sempre nel primo testo, copiò 57 problemi di geometria solida dal *Trattato d’abaco* di Piero della Francesca (1412-1416 ? - 1492).

Nel secondo trattato, *De Divina proportione*, Pacioli commise il plagio più famoso: la terza parte della sua opera è la pura e semplice traduzione italiana del trattato in latino di Piero della Francesca sui solidi (*Libellus De corporibus regularibus*).

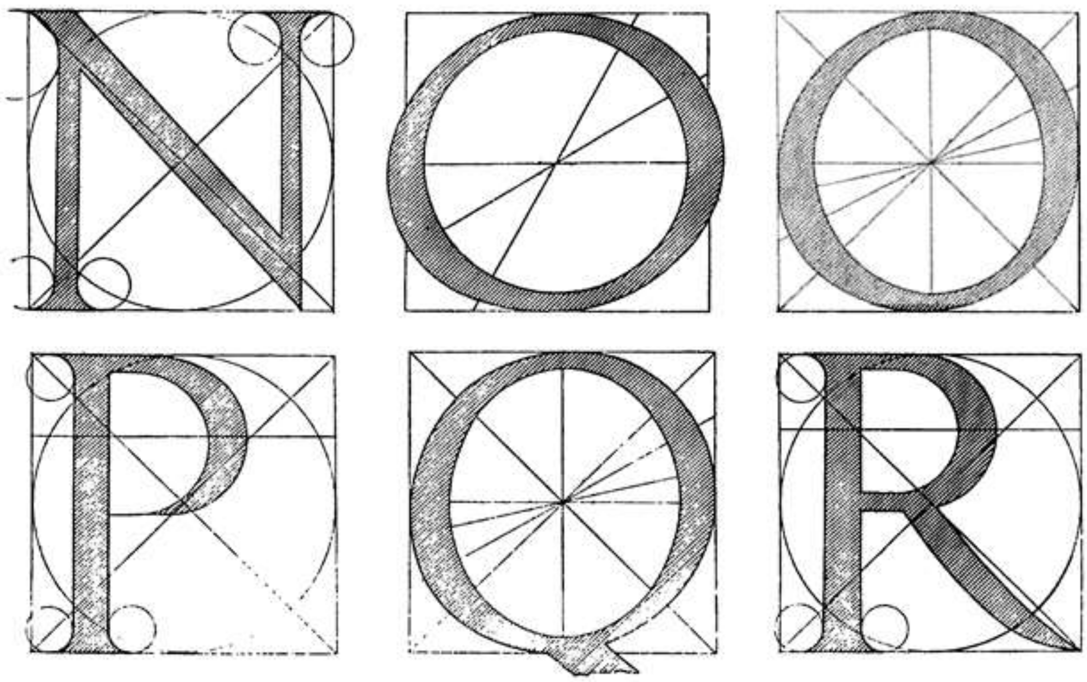
A segnalare per primo i plagi di Pacioli ai danni di Piero della Francesca fu Giorgio Vasari (1511 – 1574), pittore, scultore, architetto e primo storico dell'arte. Lo fece nel suo famoso trattato *Vite de' più eccellenti architetti, pittori, et scultori italiani, da Cimabue insino a' tempi nostri*.

Infine, in allegato al *De Divina proporzione,* Pacioli riprodusse – senza citarlo – il metodo di costruzione delle lettere maiuscole dell'alfabeto latino, elaborato dal calligrafo veronese Felice Feliciano (1433-1480).

Feliciano ed altri calligrafi italiani del XV e del XVI secolo presero a modello le lettere maiuscole della scrittura lapidaria romana e le riprodussero all'interno di forme quadrate e con l'impiego di archi di circonferenza, come spiega l'esempio che segue, tratto da Feliciano (circa 1460):



Gli stessi caratteri furono copiati da Luca Pacioli come spiega la seguente figura:



Evidentemente, *frate* Luca Pacioli aveva poca dimestichezza con quanto prescritto dal *settimo Comandamento* secondo la tradizione cattolica: “*non rubare*”.

Il dettagliatissimo articolo di Ettore Picutti, citato in bibliografia, descrive altre malefatte del Pacioli.

- -

MAESTRO BENEDETTO DA FIRENZE

Benedetto di Antonio, conosciuto come Maestro Benedetto da Firenze (1429 – 1479) è stato un importante abacista fiorentino. Gli sono attribuiti alcuni trattati fra i quali quello contenuto nel *Codice Acquisti e doni 154* della Biblioteca Medicea Laurenziana di Firenze: è il *Tractato d'abbacho* e il testo è stato pubblicato da Gino Arrighi nel 1974 che lo ha ritenuto opera dell'abacista fiorentino Pier Maria Calandri (1457 – 1508). Il testo risalirebbe al 1459, ciò che proverebbe l'erronea attribuzione a Calandri.

Il codice L.IV.21 della Biblioteca Comunale di Siena, risalente al 1463, contiene una *Praticha d'arismetica* anche essa attribuita a Maestro Benedetto.

Come già in parte anticipato nel precedente capitolo, alcuni studiosi assegnano a Maestro Benedetto anche la paternità di due codici *anonimi* della Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze:

* il Palatino 573 che reca il titolo *Praticha d'arismetricha*;
* il già ricordato trattato geometrico Palatino 577 (plagiato da Luca Pacioli).

Questi due ultimi trattati sarebbero stati compilati nel periodo 1460-1465.

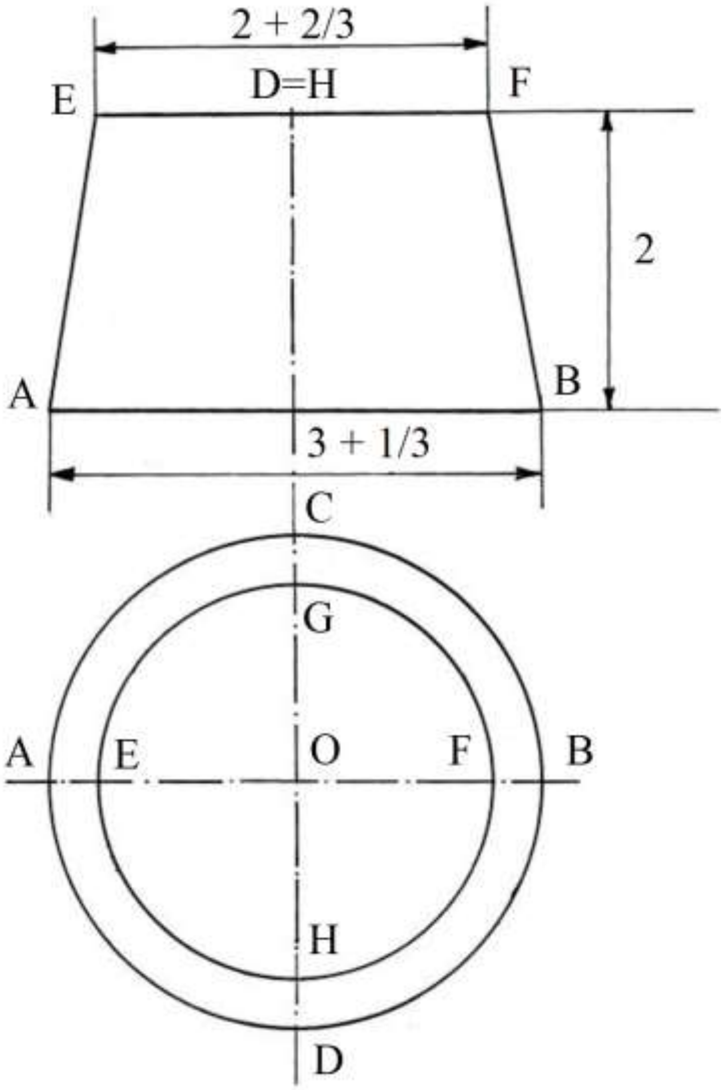
Nel trattato contenuto nel citato Codice della Biblioteca Medicea Laurenziana sono presenti tre diversi esempi di problemi relativi al calcolo della capacità di tini e di botti.

Alcune pagine all'inizio del trattato sono riservate alla descrizione delle principali unità di misura lineari, di superficie, di volume o di capacità e di peso usate a Firenze nel commercio.

Tutti i disegni che seguono sono dell'autore di questo articolo e sono stati realizzati nel pieno rispetto delle dimensioni fornite da Maestro Benedetto.

Primo esempio

Un tino ha la forma di un tronco di cono con le dimensioni in braccia riportate sulla figura:

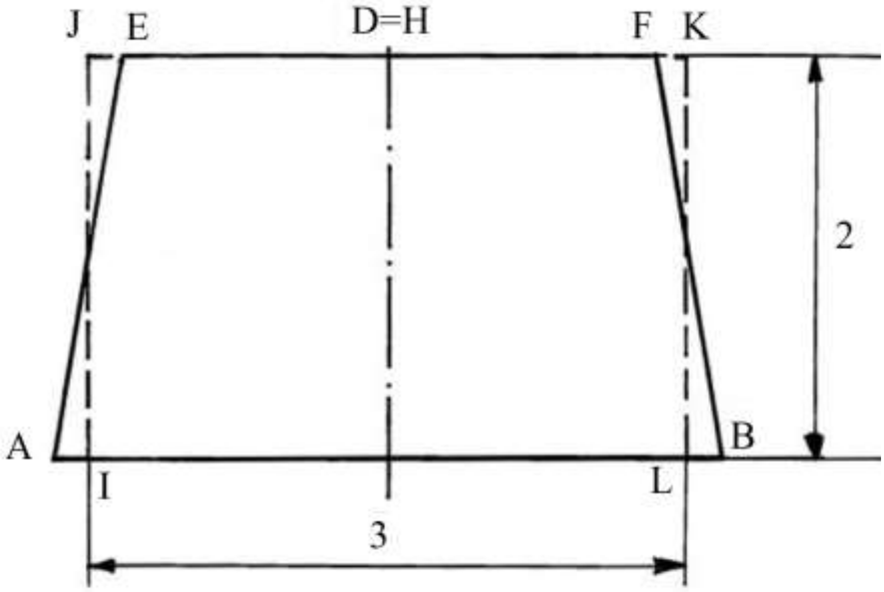


Il problema chiede il volume del solido.

La procedura impiegata da Maestro Benedetto contiene i seguenti passi:

* sommare le lunghezze dei diametri del fondo e della bocca: (3 + 1/3) + (2 + 2/3) = 6 ;
* dividere per 2: 6 : 2 = 3 ;
* moltiplicare l’ultimo quoziente per sé stesso: 3 * 3 = 9 ;
* moltiplicare per la costante 11/14: 9 * 11/14 = 7 + 1/14 braccia^2 ;
* moltiplicare per l’altezza 2: (7 + 1/14) * 2 = 14 + 1/7 braccia^3 , volume del tino;
* moltiplicare per 5: (14 + 1/7) * 5 = 70 + 5/7, volume del tino in *barili*.

La procedura usata da Maestro Benedetto assimila il tronco di cono a un cilindro con la stessa altezza di 2 braccia:



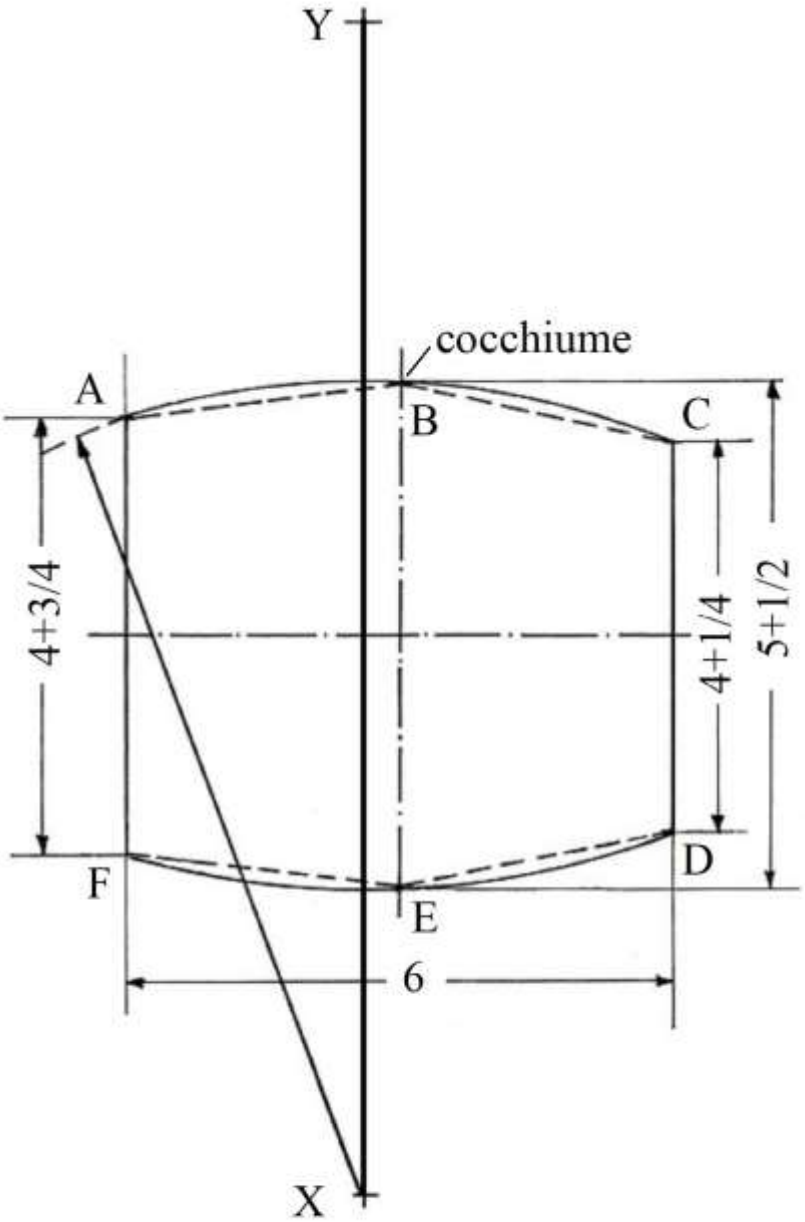
Il cilindro equivalente ha basi con diametro 3 braccia e aree uguali a (7 + 1/14) braccia^2.

<u>Secondo esempio</u>

La botte considerata in questo caso ha le dimensioni indicate nella figura che segue. Solo in questo esempio, le dimensioni sono scritte secondo l'uso dell'epoca, senza il simbolo "+" a separare la parte intera da quella frazionaria di un numero misto:

"4 ¾" = "4 + ¾" = "4,75" .

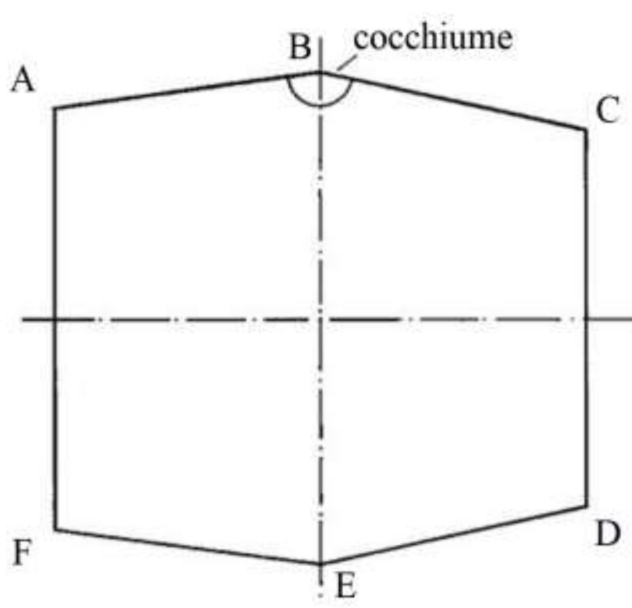
I simboli "+" e "-" usati per indicare le operazioni di addizione e di sottrazione in aritmetica furono probabilmente introdotti in un trattato matematico stampato nel 1489 e scritto dal matematico tedesco Joannes Widman (1462 – 1498).

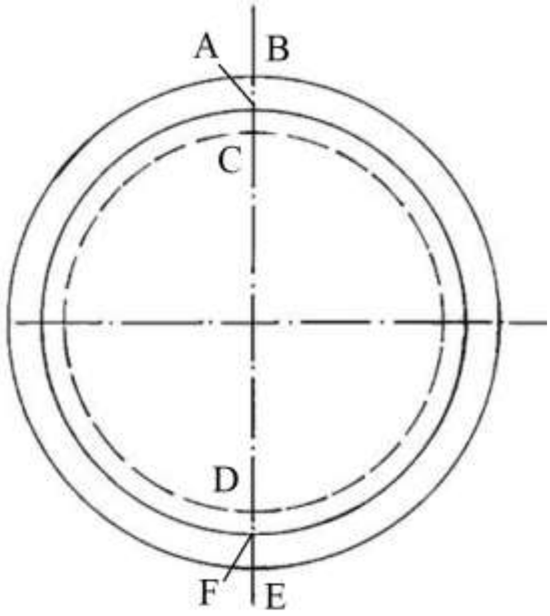


È opportuno notare che i due fondi hanno diametri differenti: (4 + ¾) e (4 + ¼).

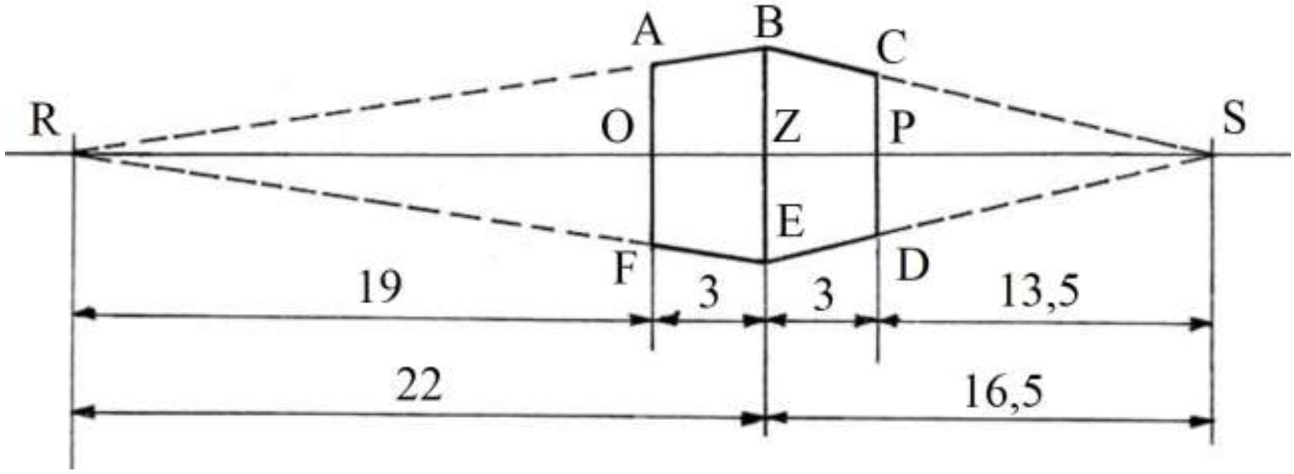
Il solido può essere esaminato con almeno due differenti profili:

* ABC e FED sono raccordabili con archi di circonferenza di raggio XA e centri in due punti esterni e fra loro simmetrici rispetto all'asse orizzontale della botte: sono X e Y, punti che giacciono su di un asse parallelo a BE e collocato alla sua sinistra;
* oppure il solido può essere ritenuto formato da due differenti tronchi di cono (ABEF e BEDC) uniti lungo la loro base maggiore BE:





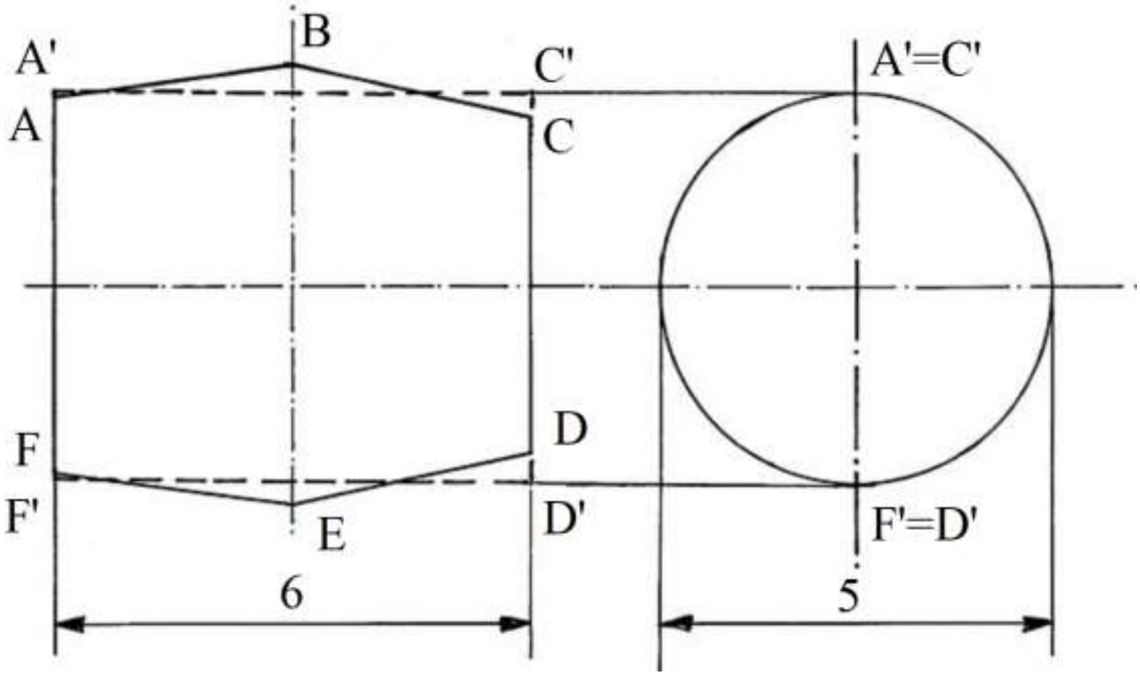
Lo schema che segue, *leggermente fuori scala*, mostra i due ipotetici coni BER e BES dai quali deriverebbero i rispettivi tronchi di cono. Le dimensioni scritte sulla figura sono corrette:



La procedura impiegata da Maestro Benedetto sembra optare perla soluzione del doppio tronco di cono. Ecco i suoi passi:

* sommare le lunghezze dei diametri dei due fondi: (4 + ¾) + (4 + ¼) = 9 ;
* dividere per 2: 9 : 2 = 4 + ½ :
* sommare l'ultimo quoziente con la lunghezza del diametro al cocchiume: (4 + ½) + (5 + ½) = 10 ;
* dividere per 2: 10 : 2 = 5 ;
* moltiplicare per sé stesso: 5 * 5 = 25 ;
* moltiplicare per la costante 11/14: 25 * 11/14 = 19 + 9/14 braccia^2, area del cerchio ipotetico equivalente;
* moltiplicare per la lunghezza della botte: (19 + 9/14) * 6 = 117 + 6/7 braccia^3, volume della botte equivalente ;
* moltiplicare per 5: (117 + 6/7) * 5 = 589 + 2/7 barili ;
* dividere per 10: (589 + 2/7) : 10 = 58 cogna + (9 + 2/7) barili.

Maestro Benedetto ha calcolato il volume di un *cilindro* equivalente alla botte data, con la stessa lunghezza e diametri delle due basi, A’F’ = C’D’ = 5 braccia:



Terzo esempio

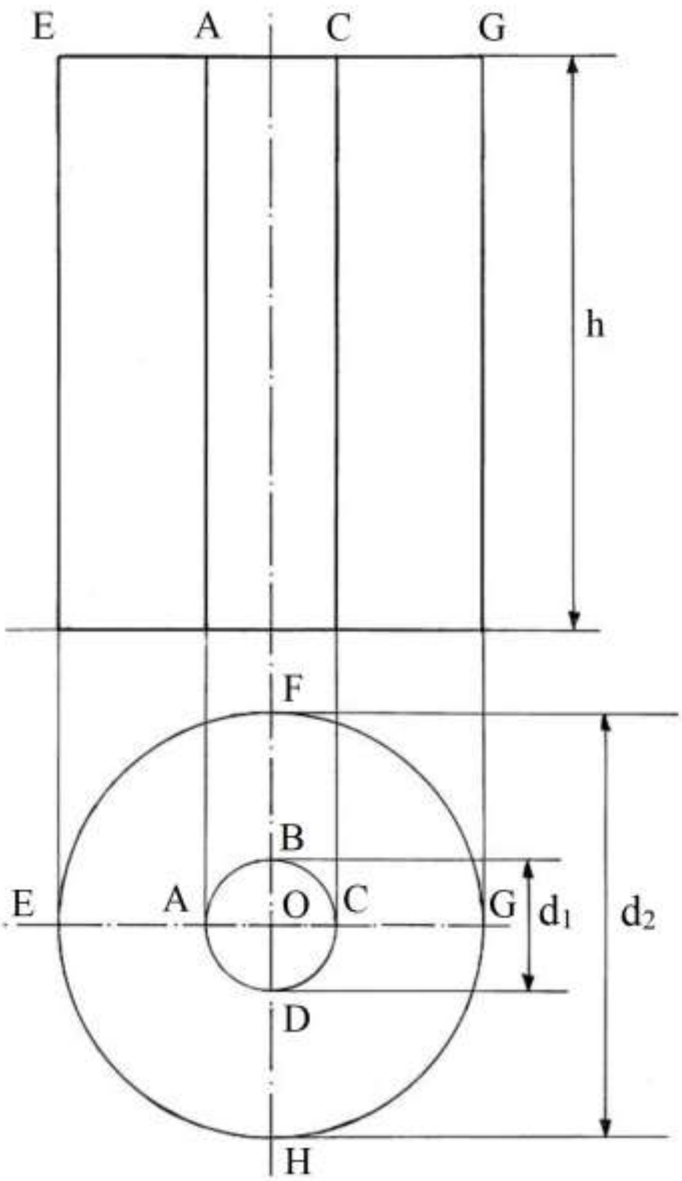
Il terzo caso descritto da Maestro Benedetto è quello di una botte lunga *6 spanne* e capacità di 3 barili. Una seconda botte ha circonferenza lunga *20 spanne*: il problema chiede il suo volume.

La procedura impiegata nel *Tractato* contiene i seguenti passi:

* moltiplicare per sé stessa la lunghezza della circonferenza della prima botte: 6 * 6 = 36 ;
* moltiplicare per sé stessa la lunghezza della circonferenza della secondo botte: 20 * 20 = 400 ;
* moltiplicare il volume della prima botte per il quadrato della lunghezza della circonferenza della seconda: 3 * 400 = 1200 ;
* dividere per il quadrato della lunghezza della circonferenza della prima botte: 1200 : 36 = 33 + 1/3 barili, volume della seconda botte.

La procedura adottata trascura le altezze delle due botti: sembra logico dedurre che esse siano uguali e che entrambi i solidi abbiano forma cilindrica.

Lo schema che segue confronta le due botti:



AC = BD è il diametro della prima botte, d_1, e EG = FH quello della seconda, d_2.
h è l'altezza comune.
Calcoliamo i due diametri:

d_1 = circonferenza$_1$/π ≈ 6/(22/7) ≈ 6 * 7/22 ≈ 21/11 spanne ;

d_2 = circonferenza$_2$/π ≈ 20/(22/7) ≈ 20 * 7/22 ≈ 70/11 spanne .

Il volume di un cilindro è dato da:

Volume $_{\text{CILINDRO}}$ = Area $_{\text{BASE}}$ * altezza = Area $_{\text{BASE}}$ * h .

L'area di un cerchio è calcolabile a partire dalla conoscenza della lunghezza della sua circonferenza:

Area $_{\text{CERCHIO}}$ = π * raggio^2 = π * [circonferenza/(2*π)]^2 = circonferenza^2/(4*π) ≈
≈ circonferenza^2/(4 * 22/7) ≈ circonferenza^2 * 7/88 .

A parità di altezza *h* i volumi delle due botti sono:

Volume $_{\text{BOTTE1}}$ = BASE$_1$ * h ≈ 6^2 * 7/88 * h ≈ 63/22 * h e

Volume $_{\text{BOTTE2}}$ = BASE$_2$ * h ≈ 20^2 * 7/88 * h ≈ 350/11 * h .

Con una semplice proporzione è facile ricavare il volume della seconda botte:

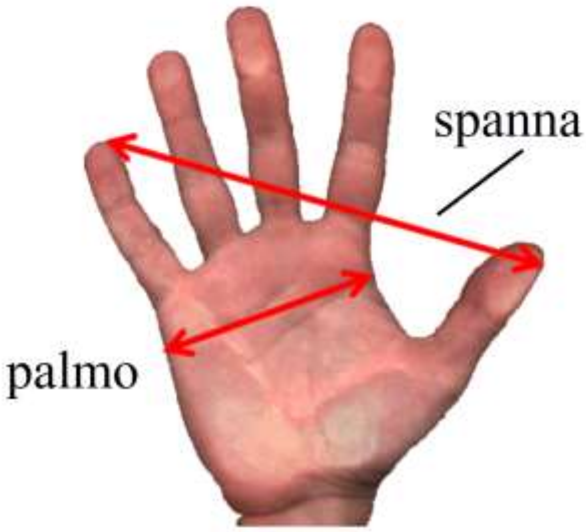
Volume $_{\text{BOTTE1}}$: Volume $_{\text{BOTTE2}}$ = 3 : X da cui

X = [(350/11) * h] * 3/[(63/22) + h] = (350/11) * 3 * (22/63) = 100/3 = (33 + 1/3) barili, che è il volume calcolato da Maestro Benedetto.

- APPROFONDIMENTO -

La spanna

La *spanna* misura la distanza fra l'estremità del pollice e quella del mignolo di una mano di un uomo adulto aperta:



Il terzo esempio di botti presentato da Maestro Benedetto misura la lunghezza delle circonferenze (e i diametri) delle due botti in *spanne*.

La *spanna* non sembra fosse molto usata a Firenze. La sua lunghezza era pari a 2/3 di quella del *piede*, altra unità poco impiegata.

Essa corrispondeva a circa 20 cm.

A sua volta, il *piede* valeva *11 soldi di braccio* e cioè ≈ 32,1 cm: 1 braccio era diviso in 20 soldi.

Quindi, la *spanna* equivaleva a:

1 spanna = 2/3 * piede ≈ 2/3 * 32,1 ≈ 21,4 cm.

- -

FILIPPO CALANDRI

Filippo Calandri (Firenze, 1468-1518) è l'autore del trattato "Aritmetica", compilato per uno dei figli di Lorenzo il Magnifico (Giuliano de' Medici, 1479-1516), poi pubblicato a Firenze da Lorenzo Morgiani e Johann Petri, nel 1491: alla data di pubblicazione del suo testo Calandri aveva 23 anni.

L'originale è conservato nel Codice 2669 della Biblioteca Riccardiana di Firenze: è un codice membranaceo in scrittura umanistica corsiva elaborato alla fine del XV secolo: contiene 122 carte che misurano 11,6 x 17 centimetri e reca il titolo *Trattato di aritmetica*.

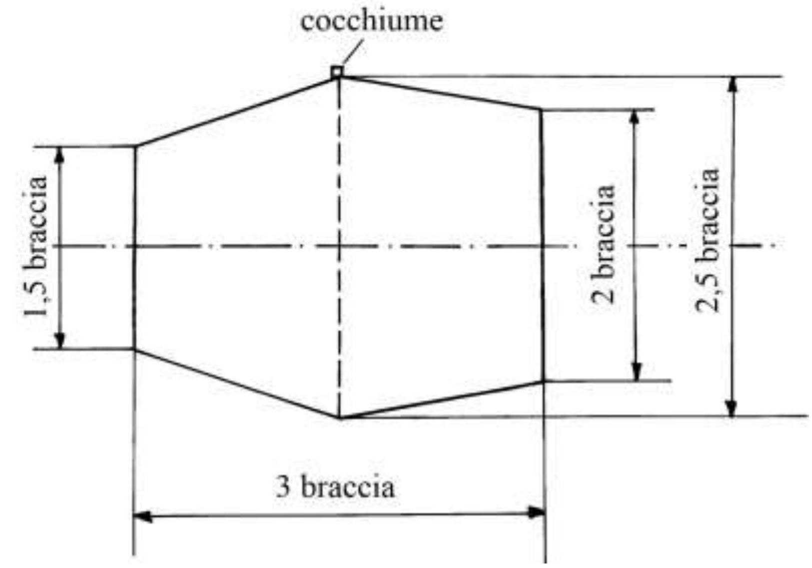
I soli testi dei problemi contenuti nel codice sono stati pubblicati da Gino Arrighi nel volume citato in bibliografia.

L'edizione a stampa del 1491 non è l'esatta riproduzione del codice riccardiano: molti problemi sono comuni ai due testi, anche se talvolta i dati differiscono.

Volume di una botte

Una botte ha il fondo posteriore con diametro 2 braccia, al cocchiume ha diametro di 2,5 e il fondo anteriore ha diametro lungo 1,5 braccia.

La lunghezza misurata fra i due fondi è di 3 braccia.



Per semplicità, qui sopra è disegnato un solido simmetrico rispetto al piano passante per il cocchiume, che risulta *equidistante* dai due fondi, anteriore e posteriore.

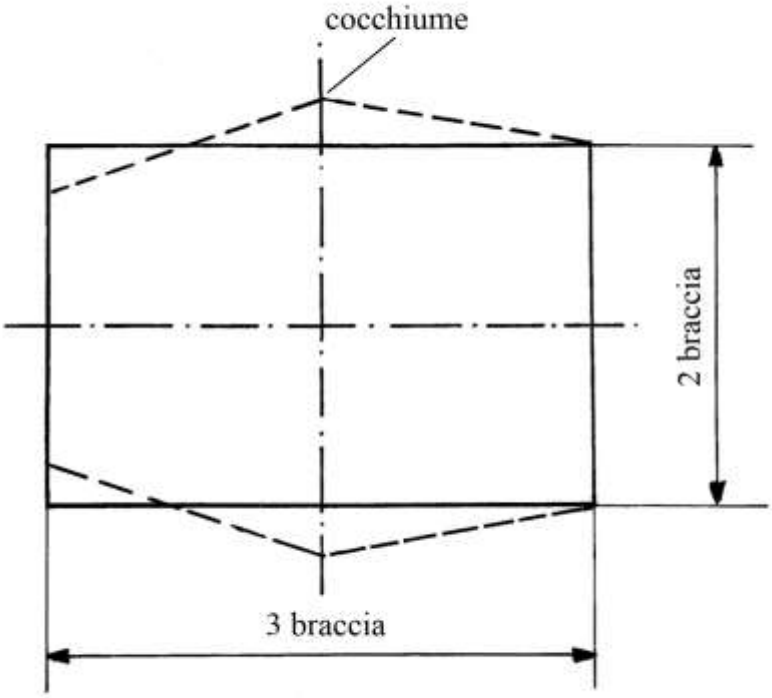
La botte ha la forma di un doppio tronco di cono: le basi maggiori dei due tronchi sono unite lungo il piano passante per il cocchiume.

La botte è costruita con *doghe* di legno rigidamente connesse per mezzo di *cerchi* metallici. Nella parte superiore, nella zona di diametro maggiore (*entasi*) è praticato un foro su di un'unica doga: è il *cocchiume*, chiuso con un tappo di forma conica o tronco-conica, lo *zaffo*.

Il problema chiede il volume del vino contenuto nella botte ed espresso in *barili*.

Calandri semplifica la forma del solido in maniera sintetica e senza fornire spiegazioni: il doppio tronco di cono è assimilato a un cilindro con la stessa lunghezza, 3 braccia, e con diametro ottenuto dalla media aritmetica dei tre diametri, al fondo anteriore (1,5), al cocchiume (2) e al fondo posteriore (2,5):

$$(1{,}5 + 2 + 2{,}5)/3 = 6/3 = 2 \text{ braccia.}$$



L’area S del cerchio del solido equivalente è:

$$S = 11/14 * 2^2 = 44/14 = 22/7 \text{ braccia}^2.$$

Il volume V del cilindro equivalente è:

$$V = S * \ell, \text{ con } \ell \text{ lunghezza:}$$

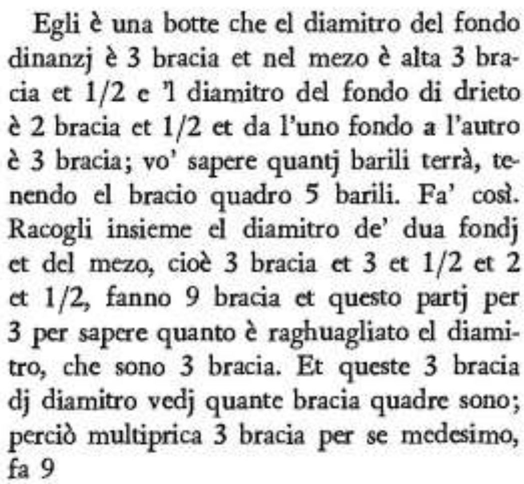
$$V = 22/7 * 3 = 66/7 = (9 + 3/7) \text{ braccia}^3.$$

Calandri conclude con la conversione da braccia^3 a barili:

$$V = (9 + 3/7) * 5 = (47 + 1/7) \text{ barili.}$$

- APPROFONDIMENTO -

Nel Codice 2669 della Biblioteca Riccardiana di Firenze è presentato un problema simile, con dimensioni leggermente aumentate: esso è descritto alle pagine 168-169 dell’edizione curata da Gino Arrighi (citata in bibliografia), qui riprodotte.



Egli è una botte che el diamitro del fondo dinanzj è 3 bracia et nel mezo è alta 3 bracia et 1/2 e ’l diamitro del fondo di drieto è 2 bracia et 1/2 et da l’uno fondo a l’autro è 3 bracia; vo’ sapere quantj barili terrà, tenendo el bracio quadro 5 barili. Fa’ così. Racogli insieme el diamitro de’ dua fondj et del mezo, cioè 3 bracia et 3 et 1/2 et 2 et 1/2, fanno 9 bracia et questo partj per 3 per sapere quanto è raghuagliato el diamitro, che sono 3 bracia. Et queste 3 bracia dj diamitro vedj quante bracia quadre sono; perciò multiprica 3 bracia per se medesimo, fa 9 bracia et di questo piglia li 11/14, che sono 7 et 1/14 et questo multiprica vie 3 bracia, che è da l'uno fondo a l'autro, fa 21 bracio et 3/14 e tanto fia quadra tutta la botte. Ora multiprica 21 bracio et 3/14 vie 5 barili, che tiene 1 bracio quadro, fa 106 barili et 1/14. E tanto tiene.

In questo caso Calandri spiega in dettaglio la soluzione usata per determinare il diametro medio, *d*, della botte:

$$d = (3 + 2,5 + 3,5)/3 = 9/3 = 3 \text{ braccia.}$$

La sezione trasversale ha area S che è:

$$S = 11/14 * d^2 = 11/14 * 3^2 = 11/14 * 9 = 99/14 = (7 + 1/14) \text{ braccia}^2.$$

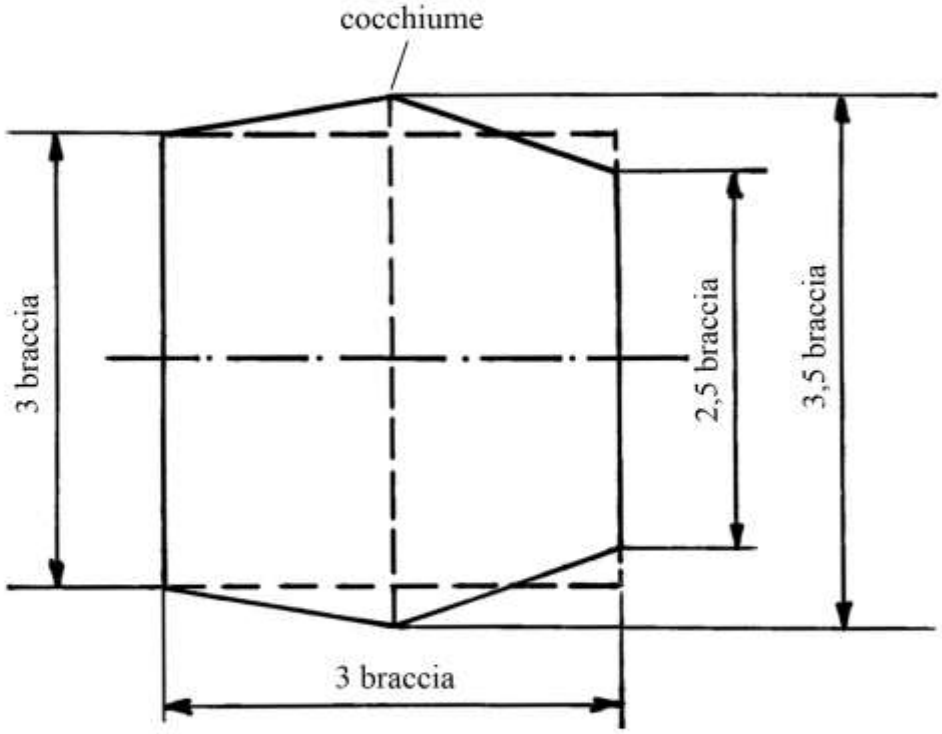
Il volume V della botte è:

$$V = S * \text{lunghezza} = (7 + 1/14) * 3 = (21 + 3/14) \text{ braccia}^3.$$

Il volume del vino contenuto nella botte, espresso in barili, è:

$$V = (21 + 3/14) * 5 = (106 + 1/14) \text{ barili.}$$

La figura che segue descrive la botte equivalente oggetto di questo problema:



- -

<u>Canale pieno di uve pigiate</u>

Un canale è pieno di uve pigiate. In basso è praticato un foro per il deflusso del vino.

Il recipiente ha la forma di un parallelepipedo lungo 4 braccia, largo 2,5 e profondo 2 braccia.

L'operazione mostrata nello schema originale qui riprodotto è la *pigiatura delle uve*.

La vinaccia residua è uguale ai 7/24 della quantità delle uve: il vino è i suoi 17/24.
Il problema chiede il volume del vino che esce dal canale.
Il volume V del canale è:

$$V = 4 * 2{,}5 * 2 = 20 \text{ braccia}^3.$$

Il volume espresso in barili è:

$$V = 20 * 5 = 100 \text{ barili.}$$

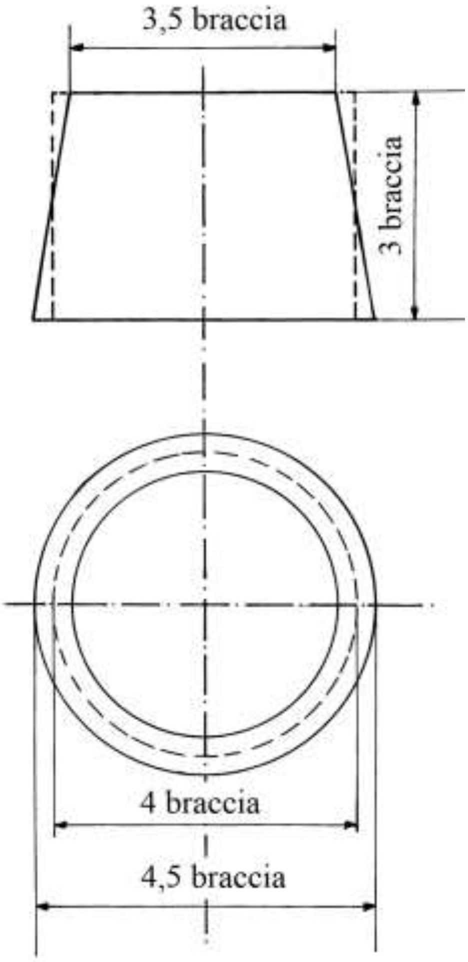
La quantità Q di vino che esce è:

$$Q = V * 17/24 = 100 * 17/24 = (70 + 5/6) \text{ barili.}$$

<u>Tino pieno di uve pigiate</u>

Un tino circolare è pieno di uve pigiate.

Esso ha la forma di un tronco di cono cavo: il diametro al fondo è 4,5 braccia, alla bocca è 3,5 ed è alto 3 braccia.



Il problema chiede il volume del vino che ne risulterà.

L'Autore semplifica i calcoli assimilando il tronco di cono a un cilindro con diametro *d* dato dalla media aritmetica dei diametri al fondo e alla bocca:

d = (4,5 + 3,5)/2 = 8/2 = 4 braccia.

L'area S della sezione trasversale di questo ipotetico cilindro è:

S = 11/14 * d^2 = 11/14 * 4^2 = 88/7 braccia^2 [(12 + 4/7) braccia^2].

Il volume V del cilindro è:

V = S * altezza = 88/7 * 3 = 264/7 = (37 + 5/7) braccia^3.

In barili, il volume è:

V = (37 + 5/7) * 5 = (188 + 4/7) barili.

Dato che il vino è i 17/24 del volume e i restanti 7/24 sono vinaccia, il volume del vino è:

V_{VINO} = (188 + 4/7) * 17/24 = (133 + 4/7) barili.

- APPROFONDIMENTO -

Il volume di un tronco di cono è oggi calcolato con una formula:

V = 1/3 * π * h * (R^2 + R * r + r^2).

* π è approssimato a 22/7 (o 3 + 1/7);
* *h* è l'altezza del tronco di cono, 3 braccia;
* *R* è il raggio del cerchio al fondo: R = 4,5/2 = 2,25 braccia;
* *r* è il raggio del cerchio alla bocca: r = 3,5/2 = 1,75 braccia.

Il volume V è:

V = 1/3 * 22/7 * 3 * ($2{,}25^2$ + 2,25 * 1,75 + $1{,}75^2$) =

= 22/7 * (5,0625 + 3,9375 + 3,0625) = 22/7 * 12,0625 ≈ 37,911 braccia^3.

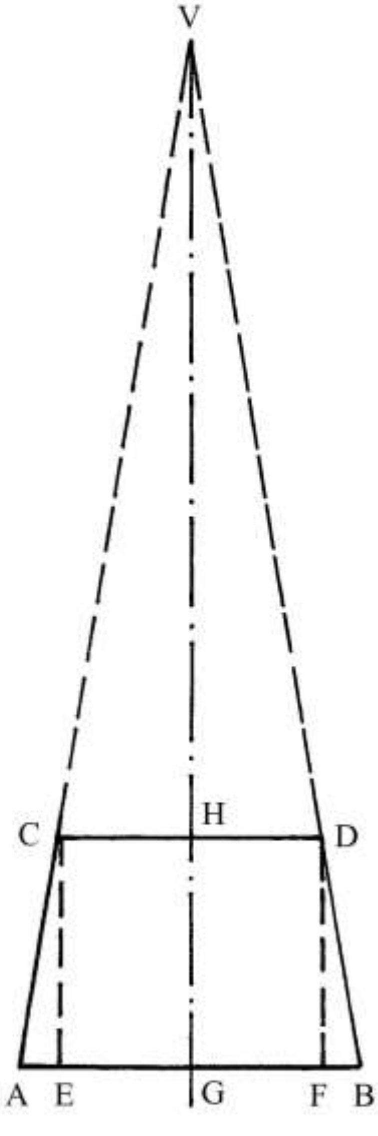
Il suo equivalente in barili è:

V = 37,911 * 5 = 189,555 barili.

La soluzione offerta da Calandri fornisce risultati leggermente approssimati per difetto.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Una soluzione corretta, sicuramente alla portata di Calandri, è data dal calcolo dei volumi di due coni.



Il tronco di cono che forma il tino è definito dai vertici A, B, C e D ed è ricavato da un ipotetico cono con vertice in V e altezza VG, tagliato con un piano passante per i punti C, H e D, piano parallelo al fondo e perpendicolare alla stessa altezza VG.

Il tronco di cono ha volume dato dalla differenza fra quello dell'intero cono e quello del cono che ha altezza VH.

Da C e da D sono abbassate le perpendicolari CE e DF al diametro del fondo, AB.

ACE è un triangolo rettangolo, simile al triangolo rettangolo AVG.

AE è lungo:

AE = FB = (AB – EF)/2 = (AB – CD)/2 = (4,5 – 3,5)/2 = 0,5 braccia.

CE è l'altezza del tronco di cono (il tino), che è 3 braccia.

Fra i due triangoli rettangoli vale la proporzione che segue:

AE : AG = CE : VG da cui

$VG = (AG * CE)/AE = [(4,5/2) * 3]/0,5 = (2,25 * 3) *2 = 13,5$ braccia.

L'altezza VH è lunga:

$VH = VG – HG = 13,5 – 3 = 10,5$ braccia.

Le aree del fondo e della bocca del tino sono le seguenti:

$S_{FONDO} = \pi * R^2 = 22/7 * (2,25)^2 \approx 15,91$ braccia^2;

$S_{BOCCA} = \pi * r^2 = 22/7 * 1,75^2 = 9,625$ braccia^2.

I volumi dei coni con altezze VG e VH sono rispettivamente:

$V_{VG} = S_{FONDO} * VG/3 = 15,91 * 13,5/3 = 71,595$ braccia^3;

$V_{VH} = S_{BOCCA} * VH/3 = 9,625 * 10,5/3 = 33,6875$ braccia^3.

La differenza fra i volumi dei due coni è:

$V_{VG} – V_{VH} = 71,595 – 33,6875 = 37,9075$ braccia^3.

Il risultato è pressoché uguale a quella calcolato con la precedente formula e quasi coincide con quello ottenuto da Calandri.

- -

BASTIANO DA PISA

Bastiano da Pisa, detto il Bevilacqua, è stato un abacista che è vissuto fra il 1483 (?) e il 1553.

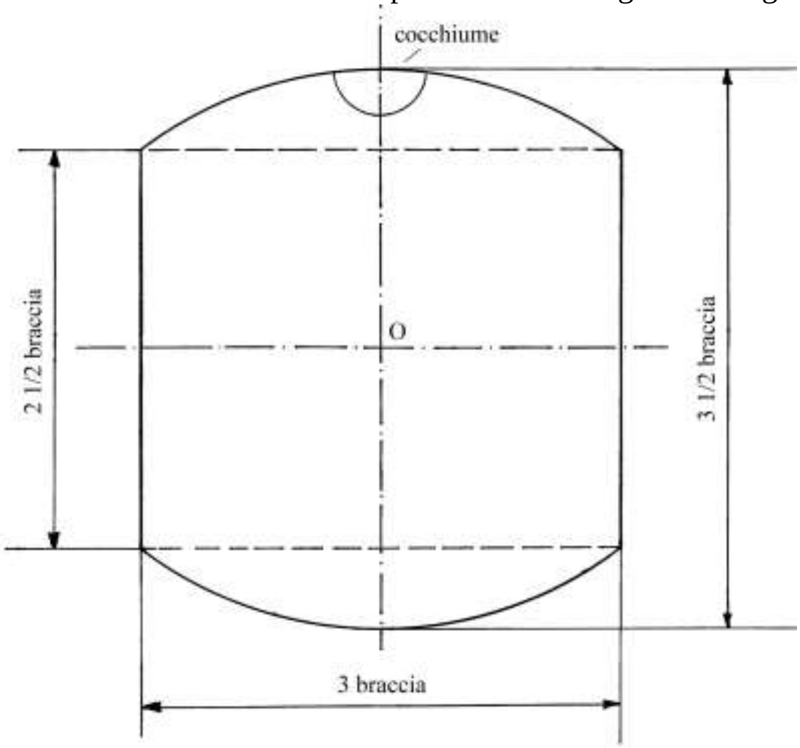
Ha esercitato la sua attività prevalentemente a Modena, città nella quale è morto.

Gli è stato attribuito un testo dal titolo "*Tratato d'arismeticha praticha*" che è conservato manoscritto nel Codice Ital. 1110 della Biblioteca Estense di Modena.

Il testo è stato pubblicato nella collana dei "Quaderni del Centro Studi della Matematica Medioevale" dell'Università di Siena a cura di Francesco Barbieri e di Paola Lancellotti.

Fra gli altri argomenti esposti da Bastiano vi è la presentazione di metodi per la misura della *tenuta delle botti* e cioè il calcolo del loro volume e la misura del contenuto in vino.

Una botte ha la forma e le dimensioni presentate nella figura che segue:



Per semplicità, il profilo della botte è qui definito da due archi di circonferenza.

Si presume che i fondi abbiano forma e dimensioni uguali.

La procedura impiegata da Bastiano per calcolare il volume di una botte contiene i seguenti passi:

* sommare la lunghezza (il diametro) di un fondo al diametro misurato al cocchiume: (2 + ½) + (3 + 1/2) = 6 ;
* dividere per 2: 6/2 = 3 [diametro convenzionale o *ragguagliato* della botte];
* moltiplicare per sé stesso: 3 * 3 = 9 ;
* moltiplicare per 11: 9 * 11 = 99 ;
* dividere per 14: 99/14 = (7 + 1/14) braccia^2 [area convenzionale della sezione della botte];
* moltiplicare per la lunghezza della botte: (7 + 1/14) * 3 = (21 + 3/14) braccia^3, volume della botte [Bastiano chiama questa unità volumetrica "braccio quadro" invece che "braccio cubico": anche Pier Maria Calandri (1457-1508) chiamava "braccio quadro corporeo" il braccio cubico];
* moltiplicare per 5: (21 + 3/14) * 5 = (106 + 1/14) *barili*.

La costante 11/14 era largamente impiegata quale buona approssimazione del rapporto π/4.

Come in altre località, il braccio cubico equivaleva a 5 barili.

Per migliorare la leggibilità della procedura, Bastiano la riassume in un algoritmo:

```
Altta nel fondo braccia           2 e 1/2
e nel chonchume                   3 e 1/2 asomma
                               fa 6 bracia
                               piglia la metà di 6
                               che è 3 braccia
                               multipricha 3
                               in sè medesimo fa 9
                               piglia li 11/14esimi
                               partti per 14      99
è di lunghezza da l'un         ne viene braccia 7 1/14
fondo a l'altro braccia 3      multipricha per 3 che fa
                               da l'un fondo a l'altro fa
                               21 e 3/4
                                5
barili 106 e 1/14 di barile terrà.
```

Bastiano fa una notevole confusione fra le unità di misura (ma l'errore era cosa comune). Il valore (7 + 1/14) indica l'*area* della sezione circolare della botte: egli la esprime in "*braccia*" invece che più correttamente in "*braccia quadre*".

<u>I metodi per misurare la capacità di una botte</u>

Bastiano presenta due metodi, il primo dei quali è più complesso e il secondo abbastanza semplificato.

Il *primo metodo* è, a suo dire, valido in qualsiasi località nella quale un abacista o un agrimensore debba calcolare il volume di una botte e non conosca quasi nulla delle unità di misura locali.

Egli fa un riferimento alle unità impiegate a Bologna e cita due di esse: la *soma da vino* e il *boccale*, legati fra loro dal rapporto 1 soma = 60 boccali; a sua volta la soma sarebbe l'equivalente di un *braccio "quadro"* [e cioè *cubico*].

Bastiano prosegue ipotizzando che il braccio bolognese sia diviso in 10 parti chiamate *once* e l'*oncia* sia divisa in 10 parti dette *punti*: è da notare il fatto rilevante dell'uso del *sistema metrico decimale* nella creazione di questi due sottomultipli. Poi cambia nome al braccio [cubico] e lo definisce *piede*.

È assai strano che Bastiano, originario di Pisa (all'epoca unita a Firenze), e vivente a Modena (Ducato di Modena e Reggio, dominio estense dal 1452 al 1796), richiami unità di misura in uso a Bologna (allora parte dello Stato Pontificio).

L'Autore così definisce al *recto* della carta 17 le unità di misura:

17r Hor diciamo cosi che in Bolognia el braccio quadro, in quel modo fatto una casetta, tenese una soma di vino e che la soma sia 60 bochali e che il braccio di Bologna sia diviso in 10 partti e chiamisi ciaschuna partte oncia e diciamo che sia pie' e non braccio e ciascheduna oncia sia 10 puntti, si che diciamo che il pie' di Bolognna sia oncie 10 e l'oncia sia 10 puntti e uno pie' quadro tieni una soma di vino che è 60 bochali. Hora diremo che il pie' sia 3 pie'. Partti 60 per 3 ne viene 20, si che il pie' quadro terrà bochali 20. Che a volere misurare una botte abbi una vergha grossa come un'asta di dardo e segnalla tuta a piedi a piedi; e poi dividi il pie' in 10 partti, cathuna partte si chiama oncia e ciascheduna oncia dividi in 10 partti, si domanda ciascheduna puntto.

Voltta cartta ch'io ti voglio dicniarire in modo che tu saparai quantto tiene apuntto ogni botte, e sia pur in che paese si voglia. Penssa ch'io ti mosterrò con detta misura apunto quantto vino terrà ogni botte.

L'inciso contenuto nelle righe 1 e 2 "…, in quel modo fatta una casetta, …" si riferisce al suggerimento (qui omesso), in precedenza dato dall'Autore per la costruzione di un modello tridimensionale di parallelepipedo privo di coperchio, usato per calcolare il rapporto fra il suo contenuto e quello di un *boccale*. In questo articolo l'argomento non è considerato.

- APPROFONDIMENTO -

Le unità di misura lineari usate a Modena e a Bologna

A Modena le unità di misura lineari erano le seguenti:

* braccio mercantile = 0,633153 metri;
* braccio agrimensore = 0,523048 m.

Entrambe le braccia si dividevano in 12 once (mercantili o agrimensorie) e ciascuna oncia in 12 punti,

A Bologna erano usati:

* il braccio mercantile = 0,640039 m;
* il piede agrimensore = 0,380098 m.

Le due lunghezze erano legate da un rapporto:

1 piede agrimensore = 6/10 di 1 braccio mercantile.

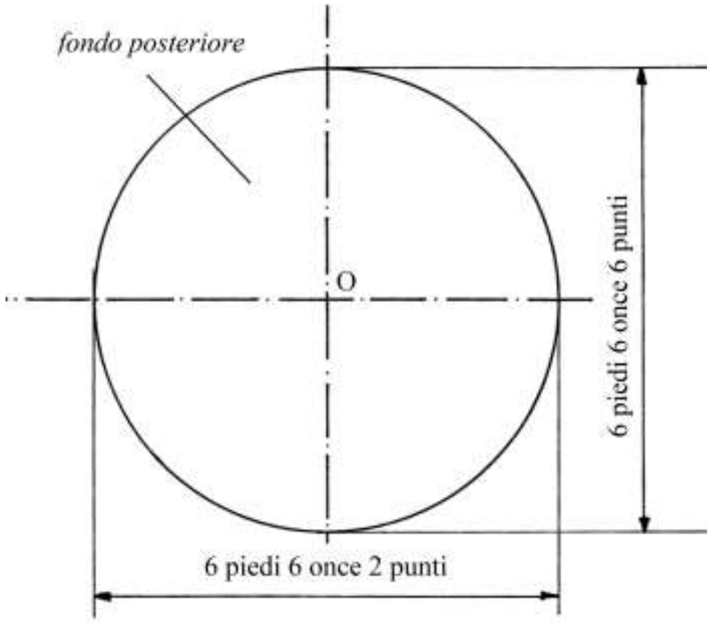
Il braccio era diviso in 20 once e il piede in 12.
Un’oncia valeva 12 *punti*.

- -

Bastiano descrive il primo metodo applicandolo al calcolo del volume di una botte le cui prime due dimensioni espresse in unità *lineari* sono:

* altezza del fondo posteriore: 6 piedi + 6 once + 6 punti;
* lunghezza del fondo posteriore: 6 piedi + 6 once + 2 punti.

Il fondo posteriore non è esattamente circolare ma leggermente ellittico: la differenza fra l’asse maggiore (altezza) e l’asse minore (lunghezza) è veramente minima: 4 punti e cioè 4/100 di piede.



La procedura impiegata è la seguente:

* sommare l’altezza e la lunghezza del fondo posteriore:
  (6 piedi + 6 once + 6 punti) + (6 piedi + 6 once + 2 punti) = (12 piedi + 12 once + 8 punti) =
  = (13 piedi + 2 once + 8 punti);
  * dividere per 2: (13 piedi + 2 once + 8 punti)/2 = (6 piedi + 6 once + 4 punti) [diametro medio del fondo posteriore];
  * convertire da piedi a once: (6 piedi + 6 once) * 10 = (60 + 6) once = 66 once;
  * convertire da once a punti: 66 * 10 = 660 punti;
  * convertire l’intero numero composto: [(6 piedi + 6 once) + 4 punti] =
    = (660 punti + 4 punti) = 664 punti.

Questo ultimo valore è il diametro medio del fondo posteriore: Bastiano lo definisce *ragguagliato*.

- APPROFONDIMENTO -

L’area di un’ellisse

Viene correttamente calcolata con la formula:

Area $_{\text{ELLISSE}}$ = π * (asse maggiore * asse minore)/4.

L'ellisse è equivalente a un cerchio che ha diametro *d*:

$\text{Area}_{\text{CERCHIO}} = \pi * d^2/4$.

Eguagliando le due formule è possibile ricavare la lunghezza del diametro del cerchio equivalente:

$\text{Area}_{\text{ELLISSE}} = \text{Area}_{\text{CERCHIO}}$

π * (asse maggiore * asse minore)/4 = $\pi * d^2/4$

(asse maggiore * asse minore) = d^2

d^2 = (asse maggiore * asse minore)

d^2 = (6 piedi + 6 once + 6 punti) * (6 piedi + 6 once + 2 punti)

d^2 = 666 punti * 662 punti = 440892, da cui

d = √(440892) ≈ 663,9969 punti, valore quasi coincidente con quello calcolato per il diametro medio da Bastiano, 664 punti.

- -

Riguardo al fondo anteriore, l'Autore fornisce solo il valore di *un* diametro, forse risultato di un'altra operazione di quadratura: ha altezza lunga (6 piedi + 5 once + 2 punti), che convertendola in punti dà:

(6 piedi + 5 once + 2 punti) = 600 + 50 + 2 = 652 punti.

Viene introdotta una nuova procedura:

* sommare i diametri dei due fondi: 664 + 652 = 1316 ;
  dividere per 2: 1316/2 = 658 [diametro medio dei fondi];
* [Bastiano fornisce qui il diametro al cocchiume: 730 punti]
  sommare il diametro medio dei fondi e il diametro al cocchiume: 658 + 730 = 1388 ;
* dividere per 2: 1388/2 = 694 punti, diametro *ragguagliato* della botte;
* [l'Autore fornisce ora la lunghezza della botte: 850 punti];
* moltiplicare la lunghezza del diametro ragguagliato per sé stessa: 694*694 = 481636 ;
* moltiplicare per 11: 481636 * 11 = 5297996 ;
* dividere per 14: 5297996/14 = (378428 + 2/7) punti [^{2}] , area ragguagliata della sezione della botte;
* dividere per 100: (378428 + 2/7)/100 ≈ 3784 piedi [^{2}] ;
* moltiplicare per la lunghezza della botte [qui Bastiano è un po' pasticcione perché moltiplica piedi (^{2}) per punti (lineari), salvo poi rimediare dividendo il risultato per 100]:
  3784 * 850 = 3216400 ;
* dividere per 100: 3216400/100 = 32164 punti [^{3}], volume della botte.

Il volume della botte è così determinato:

V_{BOTTE} = 32164 punti [^{3}] = 321 piedi [^{3}] + 6 once [^{3}] + 4 punti [^{3}] =
= (321 + 2/3 + 1/25) piedi [^{3}] .

È opportuno sottolineare un dato di fatto: Bastiano non ha *mai* fatta distinzione fra unità lineari, superficiali e volumetriche: qui i relativi apici sono aggiunti e scritti fra parentesi quadre o tonde.

Dato che 3 piedi [^{3}] equivalgono a una *soma*, il volume vale:

V_{BOTTE} ≈ 321/7 = 107 some.

Ma 1 piede [^{3}] vale anche 20 *boccali* per cui un'oncia [^{3}] è 2 boccali e 1 punto [^{3}] corrisponde a due decimi di boccale; il volume può essere espresso come segue:

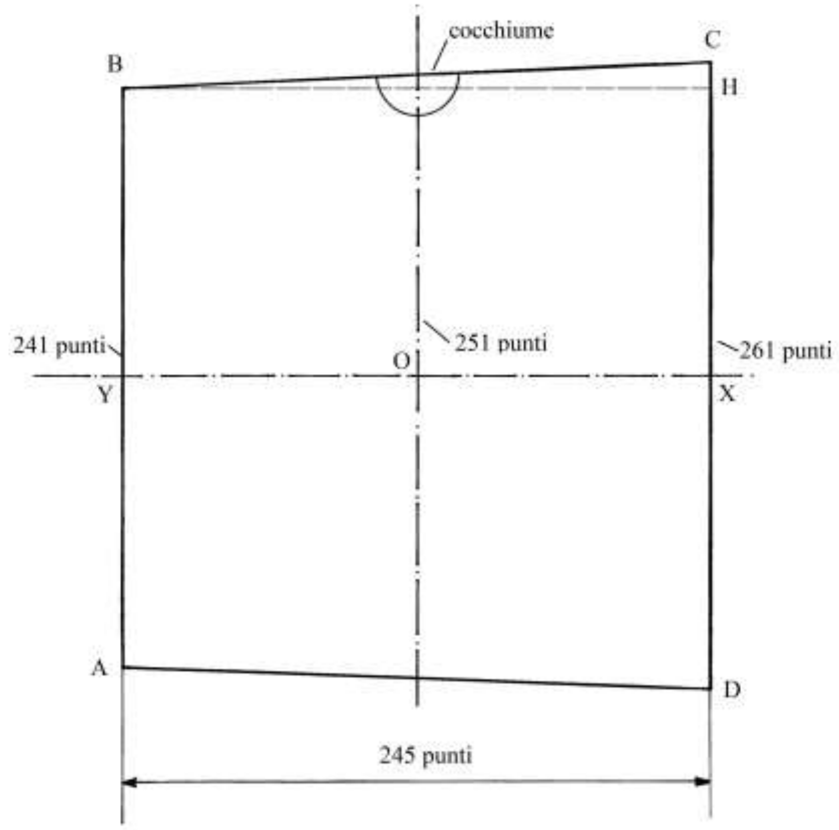
V_{BOTTE} = 107 some + (12 + 4/5) boccali .

<u>Il secondo metodo</u>

Bastiano fornisce i dati relativi alle dimensioni di una botte:

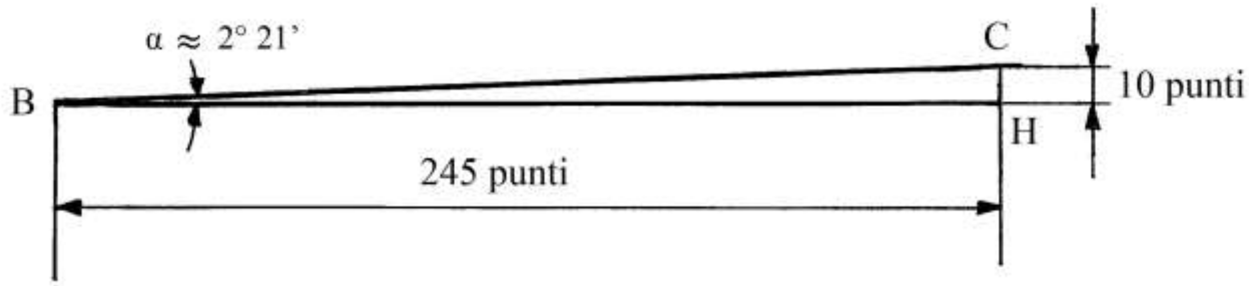
* un fondo ha diametro 241 punti;
* l'altro fondo è 261 punti;
* il diametro al cocchiume è 251 punti;
* la lunghezza della botte è 245 punti.

La botte ha la forma di un tronco di cono:



Nella figura è tracciato il segmento BH perpendicolare a AB e a CD. XY è l'asse di simmetria longitudinale.

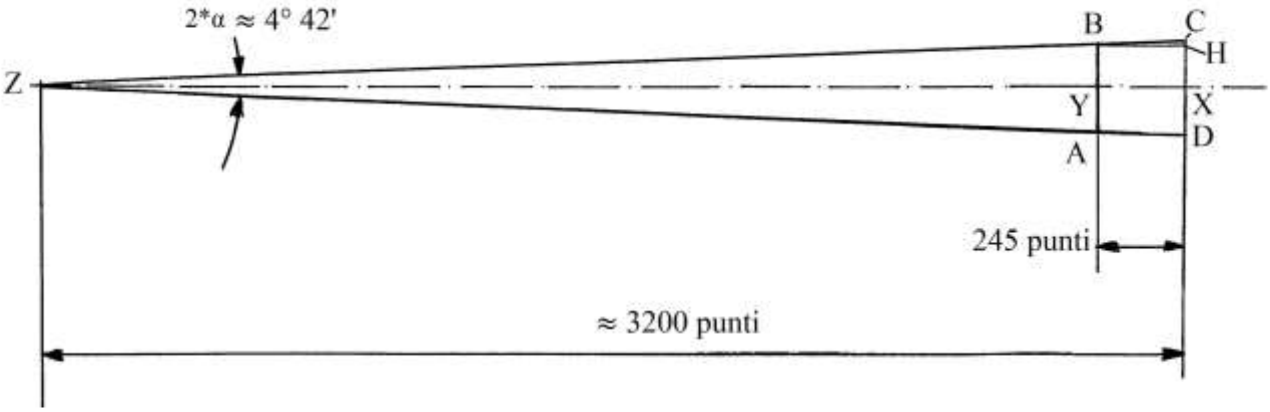
Il triangolo BCH è rettangolo in H:



La tangente dell'angolo CBH = α vale:

$tg\ \alpha = CH/BH = 10/245 \approx 0{,}0408$ alla quale corrisponde un angolo $\alpha \approx 2° 21'$.

La botte può essere ricavata dal sezionamento di un ipotetico cono retto:



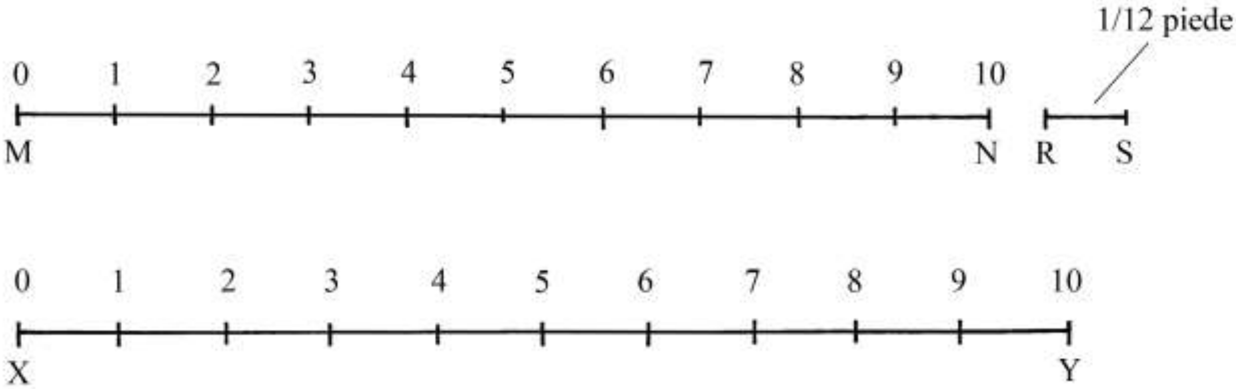
I triangoli ZCX e BCH sono simili. È possibile determinare la lunghezza dell'altezza ZX con una semplice proporzione:

ZX : BH = CX : CH   da cui

ZX = (BH * CX)/CH = [245 * (261/2)]/10 = 3197,25 punti, arrotondato per eccesso a 3200 punti.

Il principio messo in atto da Bastiano e caratterizzante il secondo metodo è dato dall'aumento della lunghezza dell'unità di misura lineare (il piede) di 1/12. Come accade al piede originario, anche la nuova unità viene suddivisa in 10 once (lineari) e in 100 punti (lineari).

Il grafico che segue spiega l'idea di Bastiano:



MN è il piede originario diviso in 10 once. RS è lungo 1/12 di MN.

In basso, il segmento XY è lungo:

XY = MN + RS = MN + 1/12 * MN = 13/12 * MN.

Anche XY è diviso in dieci parti uguali, le nuove once.

La botte è misurata con uno strumento che riporta incise unità lineari, piedi, once e punti, basate sulla lunghezza di XY.

Le dimensioni lineari della botte misurate con questo strumento risultato *apparentemente* più corte rispetto a quelle reali, nel rapporto 12/13.

Il volume di un cilindro equivalente a una botte è:

$V_{\text{CILINDRO}} = \pi * D^2/4 * L$, dove D è il diametro ponderato e L la lunghezza interna.

La costante π/4 era approssimata a 11/14 per cui la formula diviene:

$V_{\text{CILINDRO}} = 11/14 * D^2 * L$.

Le dimensioni della botte misurate con il *piede nuovo* sono:

d = 12/13 * D   (diametro ponderato)

ℓ = 12/13 * L   (lunghezza ponderata).

Bastiano calcola il volume della botte come segue:

$$\text{Volume}_{\text{BOTTE}} = d^2 * \ell = [(12/13)^2 * D^2] * [(12/13) * L] =$$
$$= 12^3/13^3 * D^2 * L .$$

La costante $(12^3/13^3) = (12/13)^3$ vale:

$(12/13)^3 = 1728/2197 \approx 0{,}7865$, numero assai vicino alla frazione $11/14 \approx 0{,}7857$.

Il secondo metodo di Bastiano è sostanzialmente corretto e presenta il vantaggio di eliminare la doppia operazione aritmetica richiesta dalla presenza della frazione 11/14 nel calcolo dell'area di un cerchio.

Nota

I metodi di Bastiano si propongono di calcolare la capacità *massima* delle botti. Egli ignora la misura degli *scemi* e non si propone di misurare e determinare la quantità di vino effettivamente contenuta.

L'OPERA DI GIOVANNI SFORTUNATI

Giovanni Sfortunati nacque a Siena probabilmente nel 1485 e nella prima fase della vita fu insegnante di abaco alle dipendenze del Comune di Siena. Poi si spostò in altre città italiane (in particolare a Ferrara) e in Sicilia sempre per insegnare l'abaco.

Il suo cognome potrebbe significare che appena nato era stato abbandonato in un Ospedale senese. A questo proposito, Raffaella Franci e Laura Toti Rigatelli, in uno studio pubblicato nel 1981 e citato in Bibliografia) fanno a p. 4 la seguente affermazione:

"…Non si sono trovati, presso l'Archivio di Stato di Siena, documenti nei quali lo Sfortunati sia citato. Nell'elenco dei battezzati dal 1470 al 1499 non compare alcun Giovanni Sfortunati o Giovanni figlio di Fortunato. Risulta però da tale elenco che un certo «*Giovanni Fortunato, figlio dello spedale, fu condotto a battesimo a di* 12 *aprile* 1485» ed ebbe a comari due donne dai nomi Lucia e Maria…".

Sembra che a Ferrara compilasse il suo trattato di aritmetica mercantile "*Nuovo Lume*", pubblicato per la prima volta a Venezia nel 1534 (edizione rarissima) e, grazie al suo successo, ristampato sempre a Venezia nel 1544, nel 1545, nel 1561 e nel 1568.

Non sono noti la data della sua morte e il luogo in cui avvenne.

Fra gli argomenti affrontati nel suo trattato vi è lo studio dei metodi di misura del contenuto delle botti da vino (e quindi anche dei loro *scemi*): allo scopo lo Sfortunati utilizzò le unità di misura lineari e volumetriche in uso a Siena all'epoca, all'inizio del Cinquecento.

L'edizione del 1545 contiene ben *ventuno* pagine di tabelle (da p. 277 a p. 297 del documento in pdf scaricabile da Google), relative ai calcoli da effettuare.

Interessanti sono le considerazioni che Sfortunati fa riguardo ai metodi usati dai misuratori senesi. Essi impiegavano il *braccio da panno*, lungo l'equivalente di 60,1055 cm, che da essi era suddiviso in 24, oppure in 45, 48 o anche 60 parti uguali: ciascuna di queste parti era chiamata *ponto*.

Probabilmente *ponto* stava per *punto*: stesse considerazioni potrebbero farsi per il *ponto* usato per misurare le botti da Tommaso della Gazzaia.

Il trattato dello Sfortunati evidenzia una notevole variazione dei valori delle unità di misura rispetto a quelli che esse avevano all'epoca di Della Gazzaia, ma i loro reciproci rapporti interni rimasero invariati:

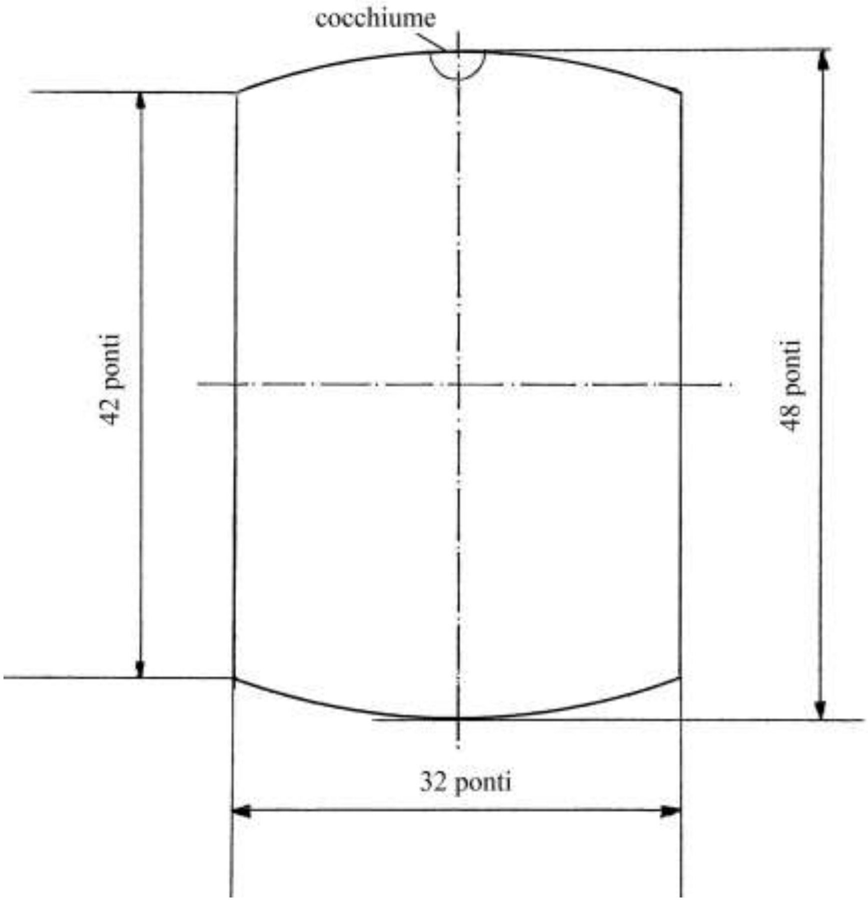
1 staio = 16 (=2^4) boccali (o metadelle) = 64 (=2^6) quartucci.

A Siena erano anche usati due multipli dello staio:

1 soma = 2 barili = 4 staia = 64 (=2^6) boccali = 256 (=2^8) quartucci.

Tutte queste unità erano legate da rapporti espressi da potenze di 2.

Sfortunati fa l'esempio di una botte, probabilmente circolare, che ha i fondi di uguali dimensioni:



Egli la misura con il *ponto* sottomultiplo del braccio senese nel rapporto:

1 braccio = 45 ponti e

1 ponto = 1/45 di braccio = 1/45 * 60,1055 = 1,33567 cm.

Sulla base di questo rapporto, le dimensioni della botte risulterebbero:

* diametro dei fondi: 42/45 * 60,1055 = 56,14 cm;
* diametro al cocchiume: 48/45 * 60,1055 = 64,11 cm;
* lunghezza: 32/45 * 60,1055 = 42,74 cm.

Sfortunati calcola il volume della botte con una procedura un po' strana:

* moltiplicare la lunghezza della botte per il diametro dei fondi: 32 * 42 = 1344 [ponti^2];
* moltiplicare il precedente risultato per il diametro al cocchiume:

  1344 * 48 = 64512 [ponti^3].

L'Autore fornisce un risultato uguale a 645: egli ha diviso il risultato per 100, ma non spiega il perché.

L'Autore propone un'altra procedura:

* sommare le due *altezze* (e cioè le lunghezze del diametro al fondo e di quello al cocchiume): 42 + 48 = 90;
* dividere per 2: 90/2 = 45 [e cioè calcola l'*altezza ragguagliata* della botte];
* moltiplicare per sé stesso: 45 * 45 = 2025;
* moltiplicare per la lunghezza della botte: 2025 * 32 = 64800 [ponti^3].

A questo punto, Sfortunati introduce le sue unità di misura:

* 1 quartuccio = (161 + ½) ponti^3;
* 1 boccale = 646 ponti^3;
* 1 staio = 10336 ponti^3.

Sulla base di questi valori, la conversione del volume espresso da 64800 [ponti^3] fornisce il seguente risultato:

Volume $_{BOTTE}$ = (6 staia + 4 boccali + 1 quartuccio e 1/5).

Le unità di misura appena introdotte da Sfortunati portano lo stesso nome di quelle usate da Tommaso della Gazzaia (e mantengono i loro rapporti interni) ma hanno valori differenti:

Unità di misura	Tommaso della Gazzaia (inizio Quattrocento)	Giovanni Sfortunati (prima metà Cinquecento)
Staio	8000 ponti^3	10336 ponti^3
Boccale (= 4 quartucci)	500 ponti^3	646 ponti^3
Quartuccio	125 ponti^3	(161 + ½) ponti^3

Rispetto ai valori usati da Della Gazzaia vi è un incremento costante uguale per tutte le unità cubiche pari a:

10336/8000 = 646/500 = (161 + ½)/125 = 1,292.

La radice cubica di 1,292 vale:

$$\sqrt[3]{1,292} \approx 1,08914952$$

L'origine di questa costante, 1,292, non è nota.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Le tre pagine finali del trattato di Sfortunati contengono la descrizione di un ulteriore metodo per il calcolo delle quantità di vino contenute nelle botti. Come accade a gran parte del libro non sono presenti figure, schemi o diagrammi esplicativi, ciò che avrebbe facilitato la comprensione.

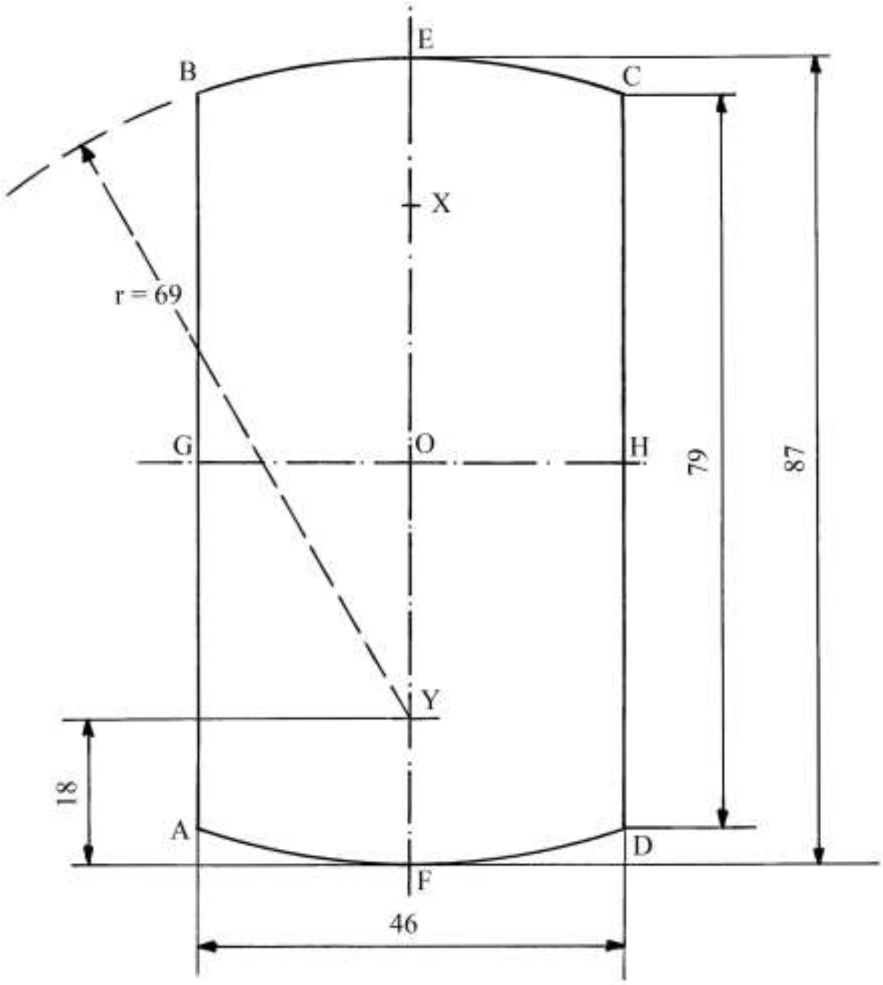
Una botte ha le seguenti dimensioni:

* capacità: 3 some + 1 staio (= 13 staia);
* diametro al cocchiume: 87 ponti;
* diametro del (o dei) fondo/i: 79 ponti;
* distanza fra i fondi: 46 ponti;
* volume: 208 boccali.

Il ponto usato in queste tre pagine del trattato è uguale a 1/60 (e non 1/45) della lunghezza del braccio e quindi:

1 ponto = 1 braccio/60 ≈ 60,1055/60 ≈ 1,002 cm, arrotondato a 1 cm.

Notiamo che in precedenza Sfortunati aveva usato il ponto uguale a 1/45 di braccio.



La botte di questo esempio potrebbe avere avuto un profilo delimitato da due archi di circonferenza di raggio XA = YB = 69 ponti. I due centri X e Y sono posizionati sull'asse di simmetria EF a 18 ponti di distanza rispettivamente da E e da F e cioè EX = FY = 18 ponti.

L'Autore richiama il volume di metà della botte e cioè 104 boccali. Infatti:

volume $_{\text{METÀ BOTTE}}$ = 13 staia/2 = (6 + ½) staia = (6 + ½) * 16 = 104 boccali.

La procedura impiegata contiene i seguenti passi:

* moltiplicare il diametro al cocchiume per quello di un fondo: 87 * 79 = 6873 [ponti^2];
* moltiplicare per la lunghezza della botte: 6873 * 46 = 316158 [ponti^3];
* dividere per 1520 [Sfortunati introduce senza alcuna spiegazione un nuovo valore per il boccale: 1 boccale = 1520 ponti^3]:

  316158/1520 ≈ 207,998 arrotondato a 208 boccali.

A questo punto è utile riepilogare le nuove equivalenze secondo l'abacista senese:

* 1 ponto = 1/60 braccio;
* 1 boccale = 1520 ponti^3;
* 1 staio = 16 boccali = 16 * 1520 = 24320 ponti^3.

Dato che i 316158 [ponti^3] calcolati da Sfortunati devono equivalere a 13 staia, l'Autore introduce il valore convenzionale di 24320 (=16*1520) per verificare il risultato del calcolo del volume in 13 staia:

Volume $_{\text{BOTTE}}$ = 316158/24320 ≈ 12,9999, arrotondato a 13 staia.

A questo riguardo l'esatto valore in *ponti^3 convenzionali* è:

13 staia * 24320 = 316160.

Il volume effettivo della botte in boccali vale:

Volume $_{BOTTE}$ = 13 staia * 16 = 208 boccali.

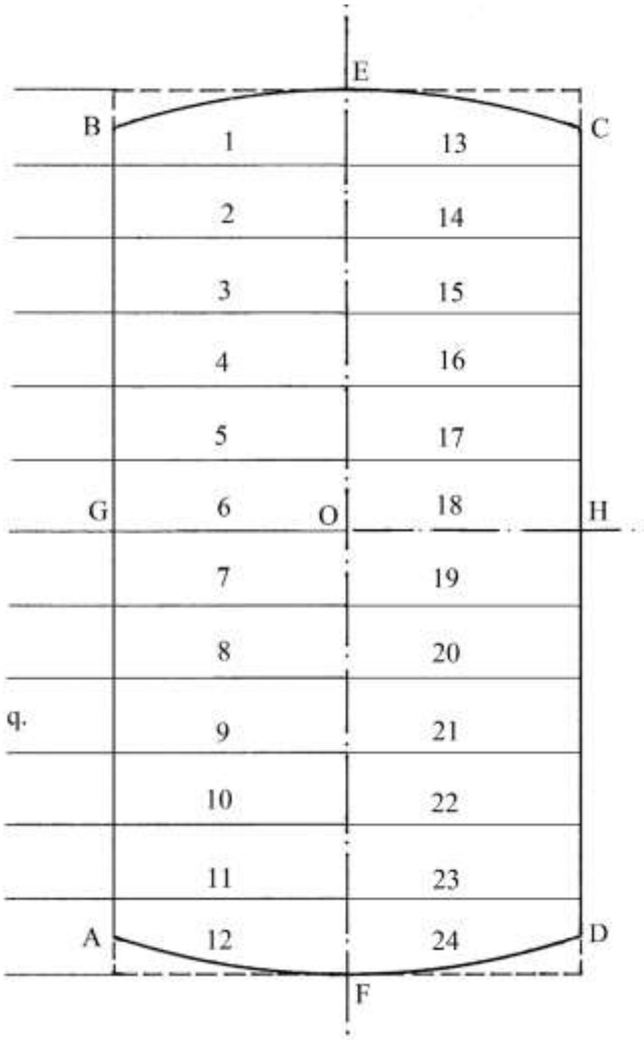
La scomposizione in fattori primi dei due numeri mostra stretti legami fra di loro:

$24320 = 2^8 * 5 * 19$

$1520 = 2^4 * 5 * 19$.

Infatti, la divisione 24320/1520 dà come risultato 2^4 e cioè 16.

L'Autore divide la botte in 24 parti uguali con sezionamenti orizzontali e con una sezione effettuata lungo l'asse di simmetria verticale EF:



Le parti sono numerate dall'alto verso il basso: nella semibotte di sinistra vanno da 1 a 12 e in quella di destra da 13 a 24.

Sfortunati prende in considerazione una delle due semibotti: qui è stata scelta quella di sinistra.

Egli mostra una tabella, che qui di seguito è riformulata, nella quale fornisce i successivi volumi contenuti nelle dodici parti: la capacità cresce secondo una progressione quasi aritmetica:

Sezioni	Capacità in *boccali* e *quartucci*	Differenza con il successivo
1	1 bb. + 3 qq.	5 bb. + 0 qq.
2	6 bb. + 3 qq.	7 bb. + 0 qq.
3	13 bb. + 3 qq.	7 bb. + 1 qq.
4	21 bb. + 0 qq.	9 bb. + 1 qq.
5	30 bb. + 1 qq.	9 bb. + 3 qq.
6	40 bb. + 0 qq.	10 bb. + 0 qq.
7	50 bb. + 0 qq.	10 bb. + 1 qq.
8	60 bb. + 1 qq.	11 bb + (1 + 1/3) qq.
9	71 bb. + (2 + 2/3) qq.	10 bb. + (1 + 1/3) qq.
10	82 bb. + 0 qq.	11 bb. + 0 qq.
11	93 bb. + 0 qq.	11 bb. + 0 qq.
12	104 bb. + 0 qq.	- - - - - - - - - - - - - - - - -

Nota: *bb.* sta per *barili* e *qq.* per *quartucci*.

Gli incrementi discontinui che la tabella mostra nella terza colonna possono essere giustificati con la curvatura del profilo della botte.

Lo Sfortunati non fornisce alcuna spiegazione riguardo alla procedura con la quale ha calcolato i valori delle successive capacità: operò empiricamente con una serie di misurazioni?

L'Autore applica il metodo appena visto a un *secondo caso*.

Una botte ha la capacità di 100 staia e al cocchiume ha diametro uguale a 176 ponti e l'altezza del vino è 136 ponti: ne consegue che lo scemo vale:

scemo = 176 – 136 = 40 ponti.

Prima di procedere, Sfortunati introduce una precisazione: se il vino occupa in altezza più della metà del diametro al cocchiume (ed è questo caso) deve essere misurato lo scemo. Se, invece, il vino è alto meno della metà del diametro (e quindi lo scemo è maggiore della metà del diametro al cocchiume) deve essere misurata la profondità del vino per poi ricavare, per differenza, la lunghezza dello stesso scemo.

Ecco i passi della procedura:

* dividere per 2 la capacità della botte: 100/2 = 50 staia = 800 boccali;
* dividere per 2 il diametro al cocchiume: 176/2 = 88 [ponti];
* dividere per 12: 88/12 = (7 + 1/3) [ponti];
* dividere la lunghezza dello scemo per 12: 40/12 = (3 + 1/3) [ponti].

A questo punto, Sfortunati fornisce alcuni dati:

* fino alla quinta parte [rivedere la precedente tabella] tiene (30 boccali + 1 quartuccio).
* Sempre utilizzando la tabella, fra la sesta e la quinta parte vi una differenza di (9 barili e 3 quartucci).
* Calcolare la terza parte di questa differenza: (9 barili + 3 quartucci)/3 = = (3 barili + 1 quartuccio).
* Sommare l'ultimo risultato al valore della quinta parte:

(30 boccali + 1 quartuccio) + (3 boccali + 1 quartuccio) = (33 boccali + 2 quartucci) =
= (33 + ½) boccali.

Per determinare il volume del vino contenuto in questa seconda botte, l'Autore impiega una seconda procedura che inizia con una proporzione:

* ultimo dato : volume prima semibotte = x : volume metà seconda botte
  (33 + ½ boccali) : 104 boccali = x : 800 boccali da cui
  x = [(33 + ½) * 800]/104 = (257 + ½) boccali.
* Sottrarre l'ultimo risultato dalla capacità totale della seconda botte, 100 staia = 1600 boccali:
  1600 – (257 + ½) = (1342 + ½) boccali, contenuto in vino della botte.

Questo dato equivale a:
(1342 + ½)/16 = (83 staia + 14 boccali + 2 quartucci).

Un *terzo esempio* è quello di una botte che ha capacità uguale a 80 staia, con diametro al cocchiume uguale a 172 ponti e con il vino alto 60 ponti.

Quindi, il livello del liquido è più basso della metà del diametro al cocchiume e lo scemo misura:
scemo = 172 – 60 = 112 ponti.

La procedura impiegata per calcolare il volume del vino prevede i seguenti passi:

* dividere per 2 la lunghezza del diametro al cocchiume: 172/2 = 86 [ponti];
* dividere per 12: 86/12 = (7 + 1/6);
* dividere l'altezza del vino, 60, per l'ultimo quoziente: 60/(7 + 1/6) = (8 + 16/43).

La procedura si interrompe con la consultazione della solita tabella: la parte intera dell'ultimo quoziente, "8", porta a leggere il dato relativo alla *sezione 8* che vale la capacità di
(60 boccali + 1 quartuccio).

Dalla stessa tabella risulta che fra la *nona* e l'*ottava* sezione vi è una differenza di [11 boccali + (1 + 2/3) quartucci]: occorre calcolarne i 16/43:

[11 boccali + (1 + 2/3) quartucci] * 16/43 ≈ 4 boccali [Sfortunati calcola 5 boccali] + 2/3 quartucci.

Occorre sommare l'ultimo quoziente al dato relativo alla *sezione 8*:
(4 boccali + 2/3 quartucci) + (60 boccali + 1 quartuccio) =
= [64 boccali + (1 + 2/3) quartucci].

Per calcolare il volume del vino contenuto nella terza botte occorre applicare una seconda procedura che inizia con una proporzione:

ultimo dato : volume prima semibotte = y : volume terza semibotte.

Il volume della terza botte è:
Volume $_{\text{TERZA BOTTE}}$ = 80 staia = 80 * 16 = 1280 boccali.

La proporzione diviene:
[64 boccali + (1 + 2/3) quartucci)] : 104 = y : 1280/2
y= {[64 boccali + (1 + 2/3) quartucci] * 640}/104 ≈ (24 + ¾) staia ≈
≈ (396 + 2/5) boccali [Sfortunati fornisce un risultato leggermente diverso: 400 boccali].

Il successo editoriale del trattato dello Sfortunati può essere confermato da un successivo manoscritto, di area emiliana o romagnola, studiato da Gino Arrighi. Esso fu composto intorno alla metà del Cinquecento da un certo *Antonio di Marchionne*, interessato alla misura delle botti: egli utilizzò il lavoro dello Sfortunati per costruire delle apposite tavole basate sulle misure espresse in *punti*. Il *Nuovo Lume* fu utilizzato anche da Niccolò Fontana (Niccolò Tartaglia, 1499-1557) nella stesura del suo *General trattato de' numeri et misure*.

APPENDICE

Le tabelle contenute nelle ventuno pagine ad esse riservate sono redatte allo scopo di semplificare i calcoli.

Esse sono basate sull'*altezza ragguagliata*: si tratta del diametro medio fra quello del fondo e quello al cocchiume: Sfortunati non accenna al suo metodo di calcolo.

La colonna a sinistra indica la lunghezza della botte in *ponti*. Per i diversi valori dell'*altezza ragguagliata* sono compilate separate tabelle. Ecco la prima tabella relativa a un'*altezza* di 45 *ponti* = 1 braccio (tutte le tabelle sono basate su questa equivalenza dei *ponti*):

Distanza fra i fondi (in ponti)	Staia	Boccali	Quartucci
27	5	5	0
28	5	8	0
29	5	11	1
30	5	14	1
31	6	1	0
32	6	4	1
33	6	7	0
34	6	10	1
35	6	13	1
36	7	0	0
37	7	3	0

COSIMO BARTOLI

Cosimo Bartoli (Firenze 1503-1572) è stato uno scrittore, un traduttore dal latino e l'ambasciatore di Cosimo I de' Medici presso la Repubblica di Venezia.

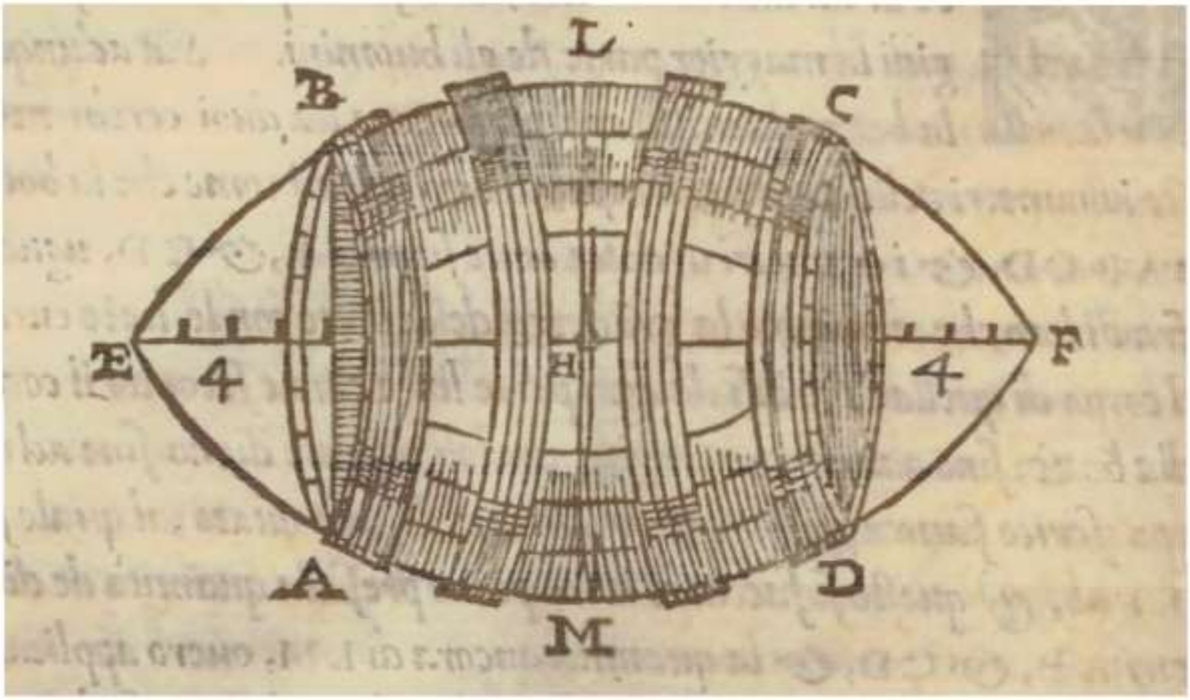
Fra le sue opere vi è la traduzione di numerose testi di Leon Battista Alberti, di Albrecht Dürer e di Oronce Finé (1494 – 1555).

Le informazioni che seguono sono ricavate dal suo trattato di agrimensura e di geometria pratica citato in bibliografia e pubblicato a Venezia nel 1564.

Il metodo di Bartoli

Nel suo trattato geometrico, Cosimo Bartoli ha descritto una botte e una procedura per calcolarne la capacità.

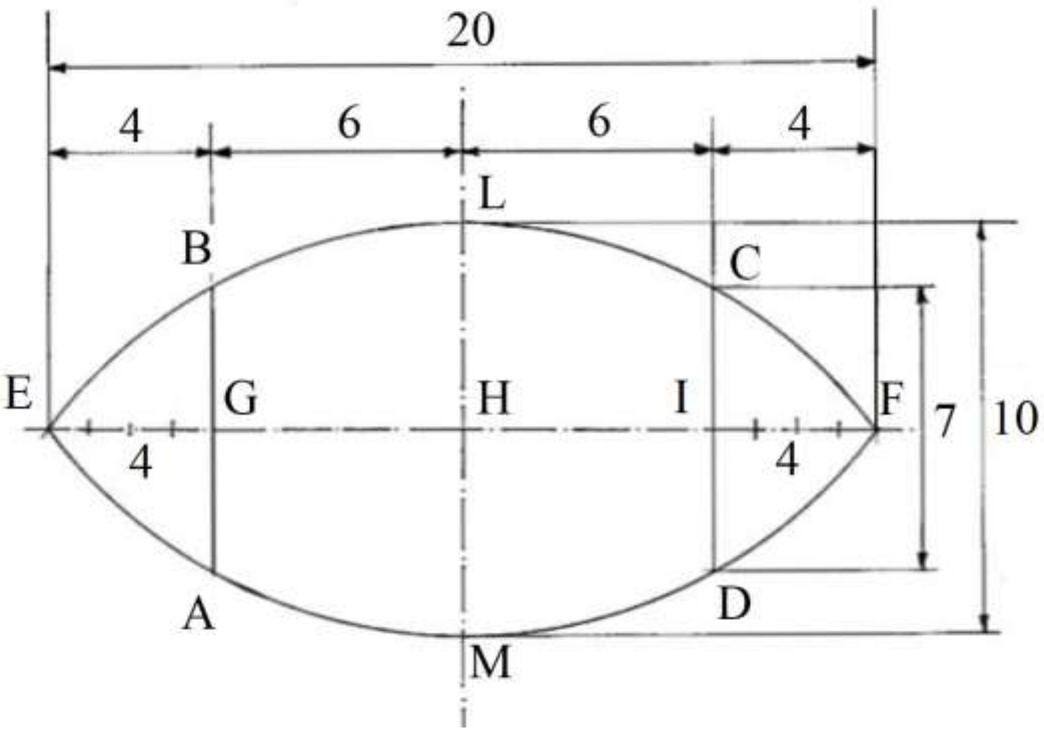
Lo schema del solido è mostrato nella figura che segue:



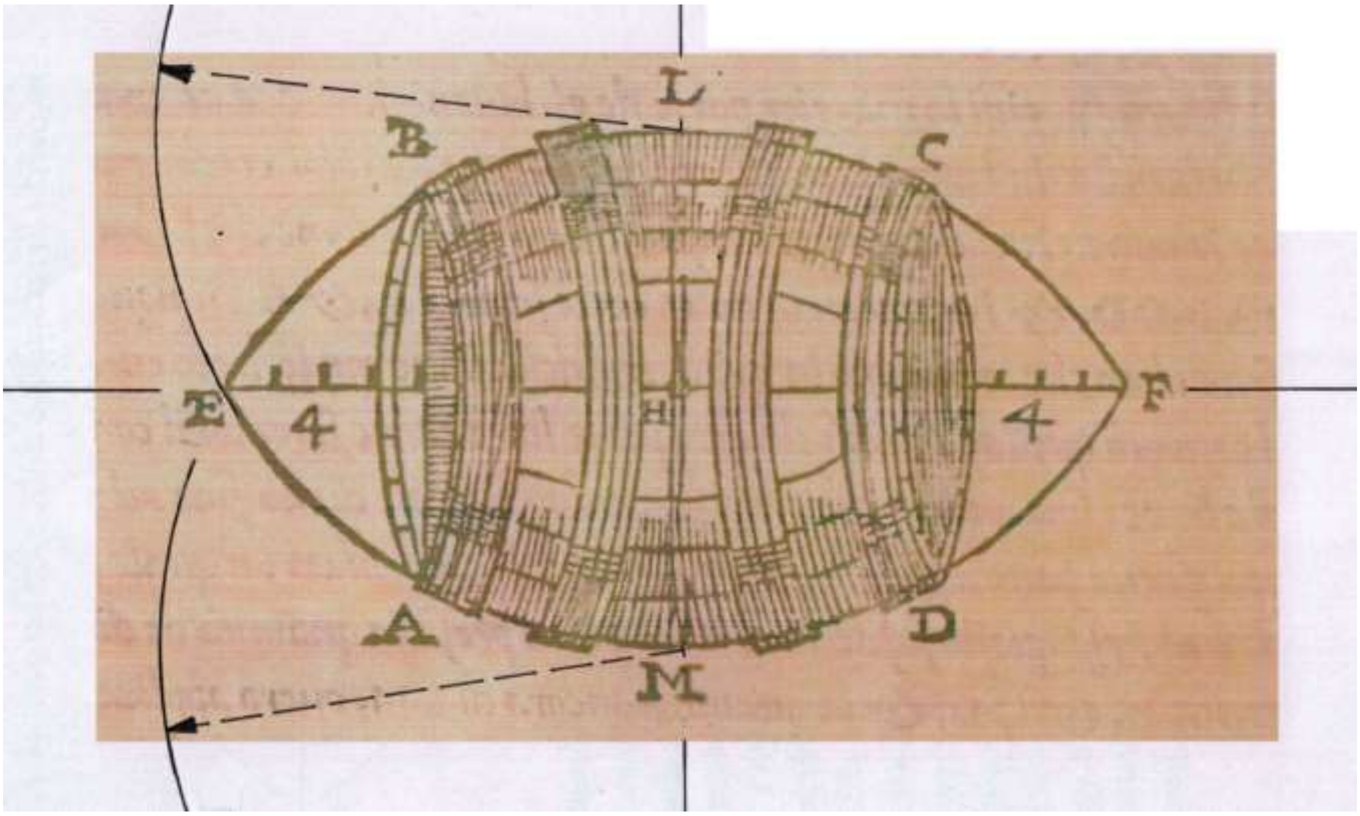
Il solido è chiamato *ammandorlato ovato*.

La botte è prodotta dal sezionamento del solido con piani fra loro paralleli passanti per le coppie di punti A-B e C-D: i due piani sono perpendicolari all'asse di simmetria EHF.

Le dimensioni della botte, espresse in *braccia fiorentine da panno*, sono presentate nello schema che segue:

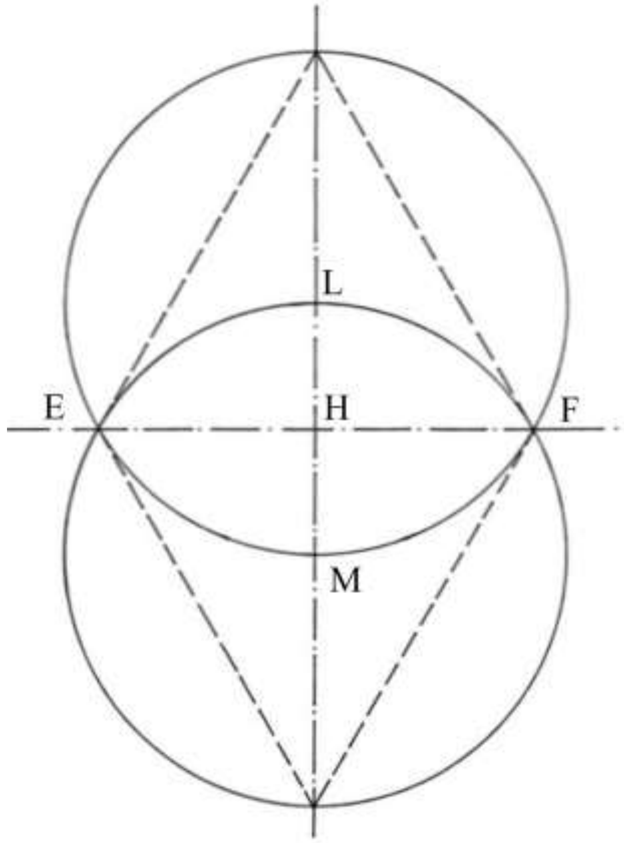


Il disegno di Bartoli avvicina il profilo della botte a quello della *vesica pisces*:

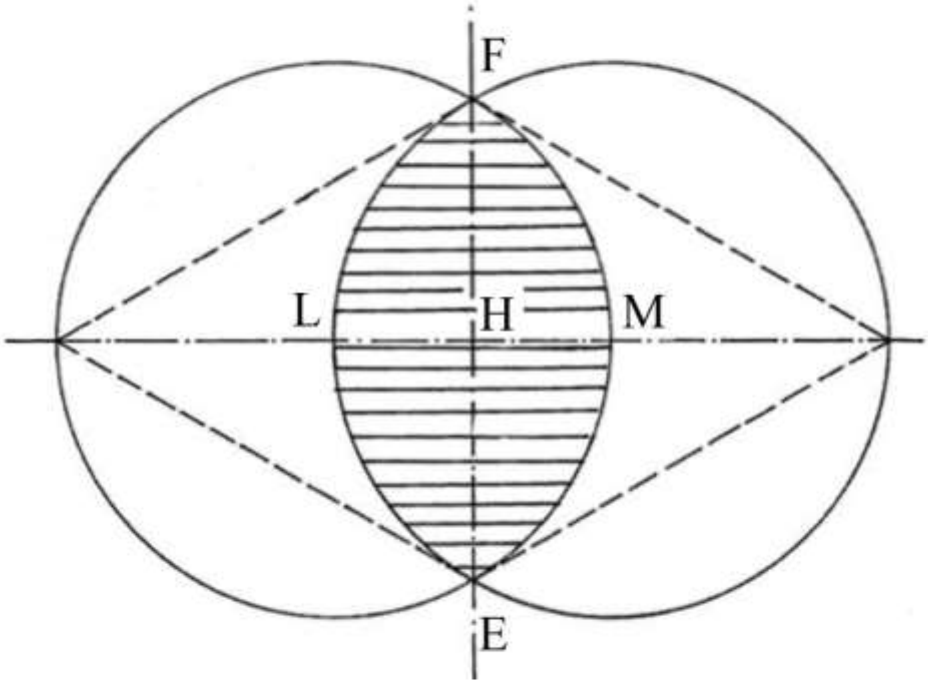


La *vesica pisces* (in latino significa “vescica di pesce”) è, nella storia dell’arte, conosciuta anche con il termine *mandorla*.

Il profilo della botte BLCDMA e quello del solido di rotazione EBLCFDMA sono delimitati da archi di circonferenza di raggio LM e centri in L e in M: la mandorla è la figura ELFM ed è ottenuta con l'intersezione di due cerchi di raggio uguale (LM) con i centri posizionati l'uno sulla circonferenza dell'altro.

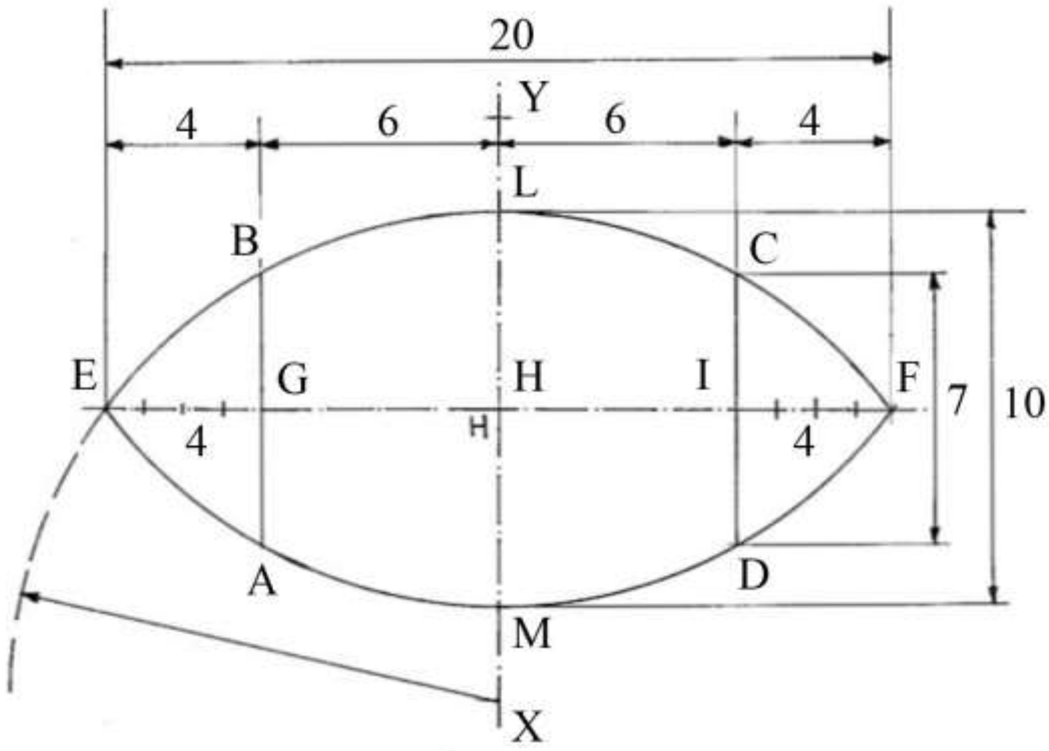


La figura della mandorla, disposta in senso verticale, è stata ampiamente usata nelle rappresentazioni pittoriche medievali di Cristo e della Madonna:



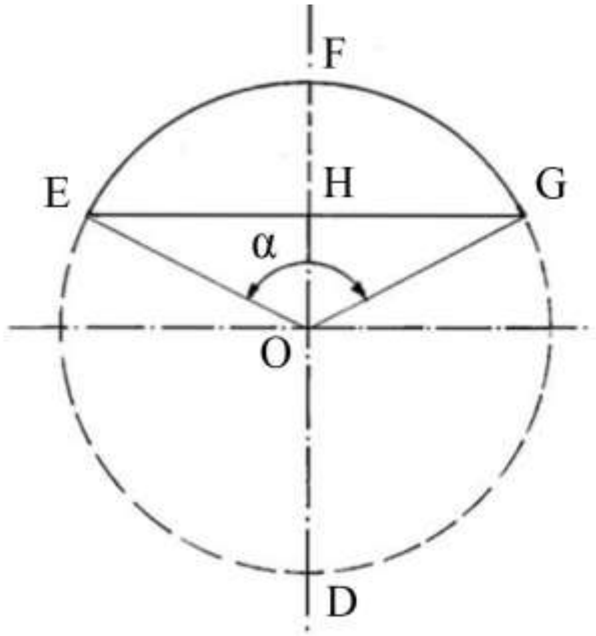
La costruzione della *vesica pisces* è strettamente legata a quelle del triangolo equilatero e del pentagono regolare.

Con le dimensioni fornite da Bartoli, gli archi di circonferenza generatori sono tracciati facendo centro nei *punti esterni* X e Y(non più posizionati l'uno sulla circonferenza dell'altro, come nel caso visto in precedenza), collocati sull'asse di simmetria passante per LHM e fra loro simmetrici rispetto all'asse EF:

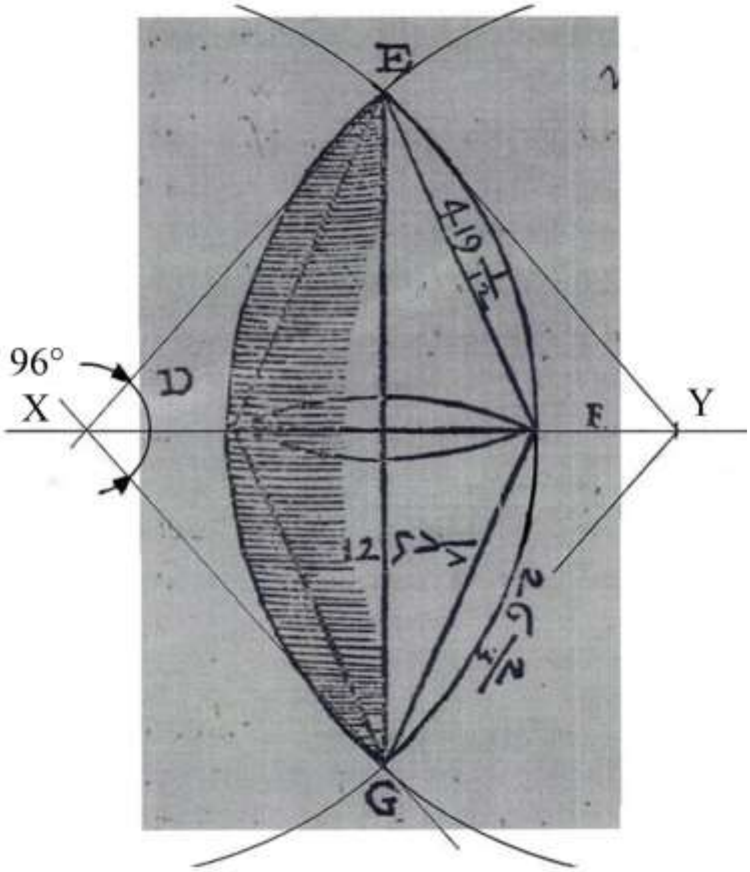


La mandorla ovata

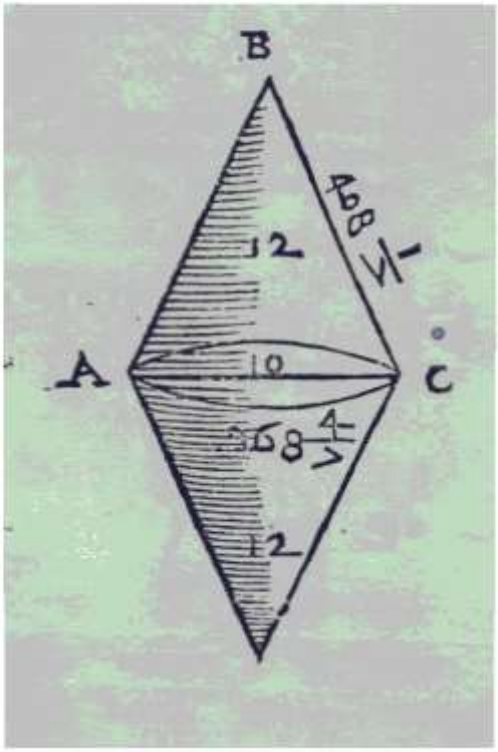
Cosimo Bartoli assimila una botte a un solido geometrico ricavato dalla rotazione di un *segmento circolare* EFG intorno alla corda EG che lo delimita:



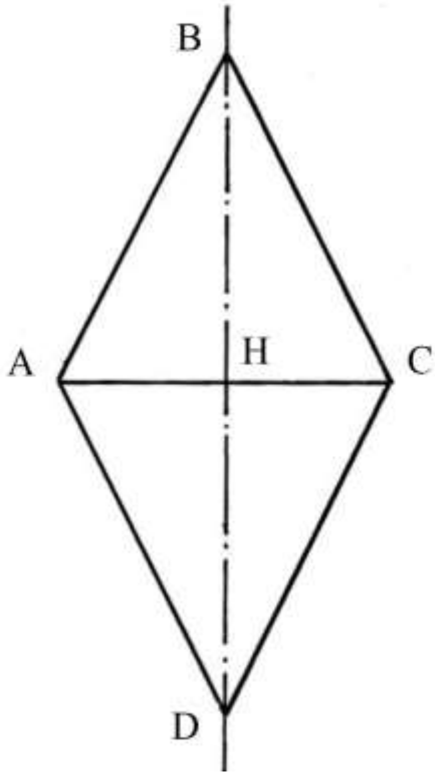
FH è la *freccia* o *saetta* del segmento circolare.
Il solido generato ha la forma mostrata nella figura che segue:



EFG è l'arco di circonferenza che delimita il segmento circolare che ruota intorno alla corda EG.
Il solido DEFG è chiamato da Cosimo Bartoli *mandorla ovata*.
Il calcolo del suo volume è abbastanza complesso perché il solido non è assimilabile a un doppio cono.
Gli archi EFG e EDG fanno parte di due circonferenze con centri nei punti Y e X che giacciono sul prolungamento dell'asse di simmetria DF: i due archi sottendono angoli di 96°.
Bartoli muove dallo studio di un *doppio cono* che è il nucleo della mandorla ovata:



La rotazione del *rombo* ABCD intorno all’asse BD genera il doppio cono:



Il rombo è originato dall’unione dei triangoli isosceli ABC e ADC (di uguali dimensioni), lungo la base comune AC.

Anche i due coni hanno uguali dimensioni: il diametro della base comune è 10 braccia e l’altezza di ciascun cono è 12 braccia.

Talvolta, Bartoli chiama *piramide* il cono.

Il volume di ciascun cono è:

$$Volume_{CONO} = 1/3 * \pi * d^2/4 * h,$$ dove *h* è l'altezza. Sostituendo a π la consueta costante 22/7, il volume di uno dei due coni è:

$$Volume_{CONO} \approx 1/3 * 22/7 * 10^2/4 \approx (314 + 2/7) \text{ braccia}^3 .$$

Il volume del doppio cono è:

$$Volume_{DOPPIO\ CONO} = 2 * Volume_{CONO} \approx 2 * (314 + 2/7) \approx (628 + 4/7) \text{ braccia}^3 .$$

La superficie laterale di un cono è calcolata da Bartoli con la seguente formula:

$$Area_{LATERALE\ CONO} = ½ * \text{circonferenza base} * \text{apotema} = ½ * (2*\pi*d/2) * AB = = \pi*d/2 * AB .$$

Come è noto, l'*apotema* di un cono è il segmento AB e cioè la lunghezza dell'ipotenusa del triangolo rettangolo ABH che è ricavabile con l'applicazione del teorema di Pitagora:

$$AB = \sqrt{(AH^2 + BH^2)} = \sqrt{(5^2 + 12^2)} = \sqrt{(169)} = 13 .$$

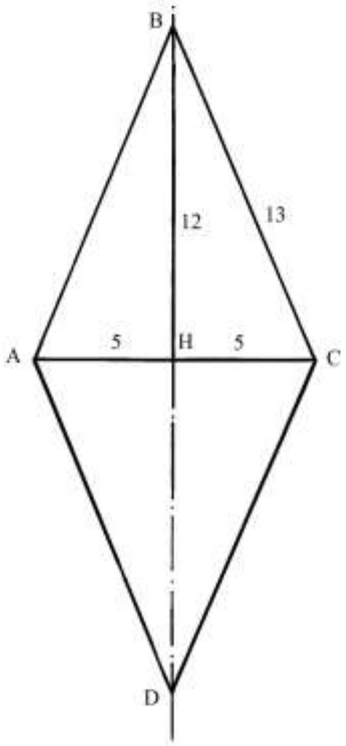
La superficie è:

$$Area_{LATERALE\ CONO} \approx 22/7 * 5 * 13 \approx (204 + 2/7) \text{ braccia}^2 .$$

La superficie laterale del doppio cono è:

$$Area_{DOPPIO\ CONO} = 2 * Area_{LATERALE\ CONO} \approx 2 * (204 + 2/7) \approx (408 + 4/7) \text{ braccia}^2 .$$

Il rombo ABCD è scomponibile in quattro triangoli rettangoli di uguali dimensioni:

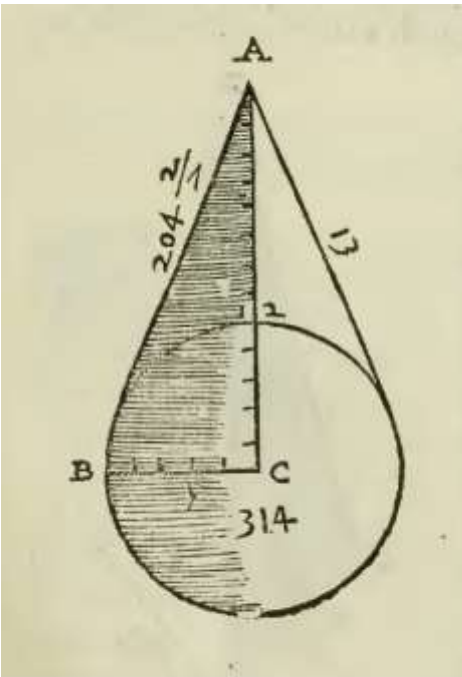


Consideriamo uno dei triangoli rettangoli, ad esempio quello BHC: i suoi lati sono lunghi in proporzione alla *seconda terna pitagorica primitiva*: 5-12-13.

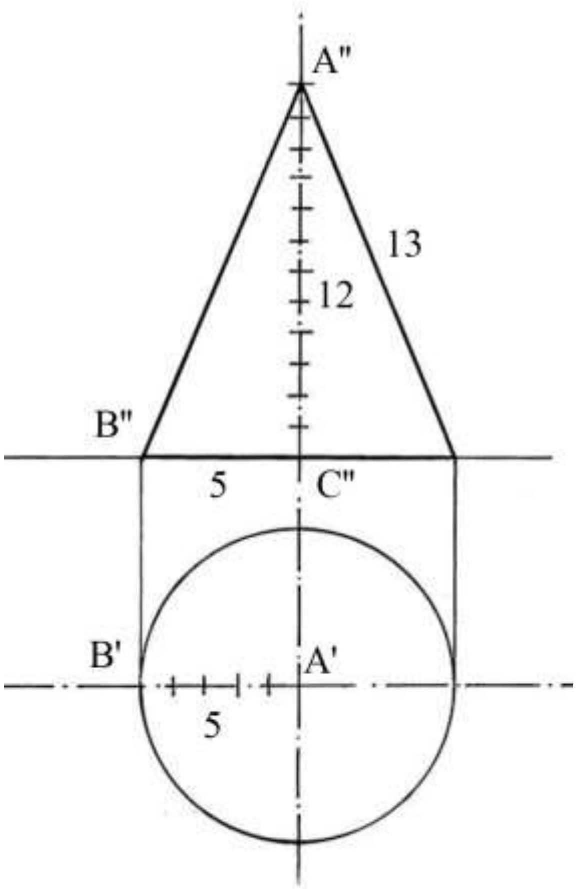
Anche gli altri tre triangoli rettangolo presentano la stessa proprietà.

\- APPROFONDIMENTO -

Bartoli calcola il volume e le superfici (di base e laterale) di un cono che egli disegna nel modo mostrato nella figura che segue:



Egli ha fuso in un unico grafico la proiezione orizzontale del cerchio di base e la proiezione verticale del corpo del cono: il metodo usato da Bartoli è senz'altro di grande efficacia.



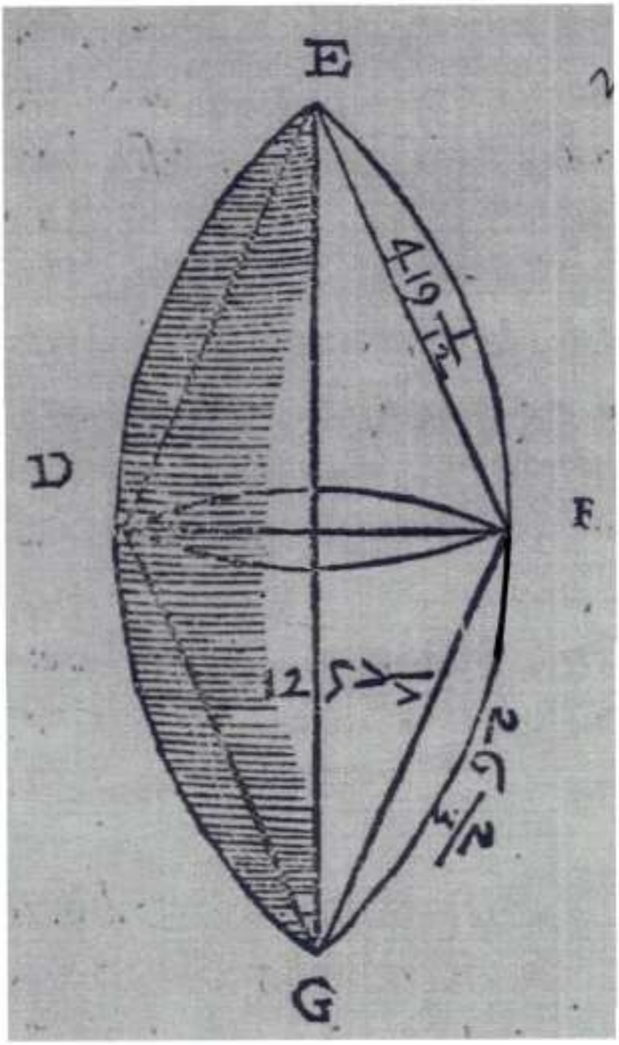
- -

Misura del volume della mandorla ovata

Bartoli semplifica il calcolo del volume della mandorla ovata stabilendo che essa contenga al suo interno il doppio cono del quale ha appena calcolato il volume e la superficie laterale.

Egli ricava in *modo empirico* e *approssimato per eccesso* il volume della mandorla moltiplicando per *due* quello del doppio cono:

$$V_{\text{MANDORLA}} \approx 2 * \text{Volume}_{\text{DOPPIO CONO}} \approx 2 * (628 + 4/7) \approx (1257 + 1/7) \text{ braccia}^3 .$$



Bartoli calcola poi la superficie laterale del solido moltiplicando la lunghezza dell'arco EFG per metà di quella del cerchio di diametro DF. Egli fissa in (26 + 2/3) braccia la lunghezza dell'arco EDG e determina la lunghezza della circonferenza e l'area del cerchio:

$$\text{Circonferenza} = \pi * DF \approx 22/7 * 10 \approx (220/7) \text{ braccia} .$$

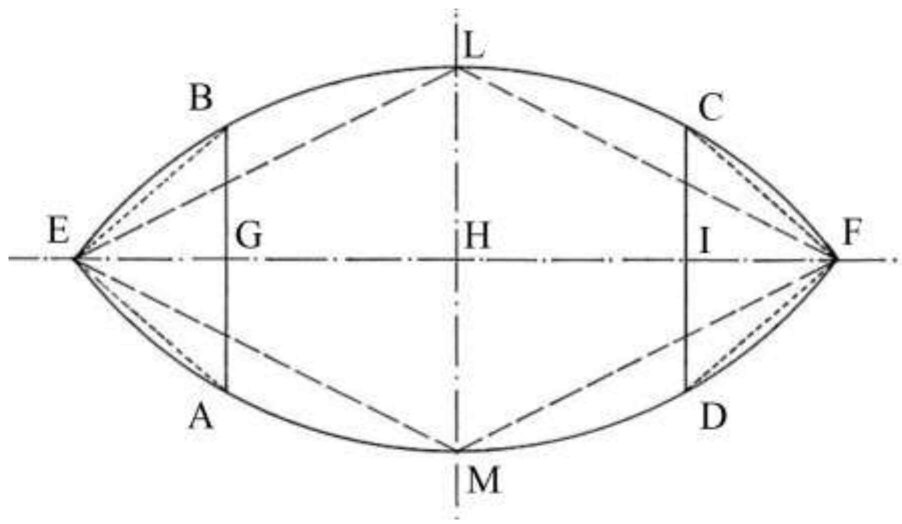
$$\text{Area}_{\text{CERCHIO}} = \pi * (DF/2)^2 \approx 22/7 * 5^2 \approx (78 + 4/7) \text{ braccia}^2 .$$

L'area laterale è:

$$\text{Area}_{\text{LATERALE}} = EFG * \text{circonferenza}/2 \approx (26 + 2/3) * (220/7)/2 \approx$$
$$\approx (419 + 1/21) \text{ braccia}^2 .$$

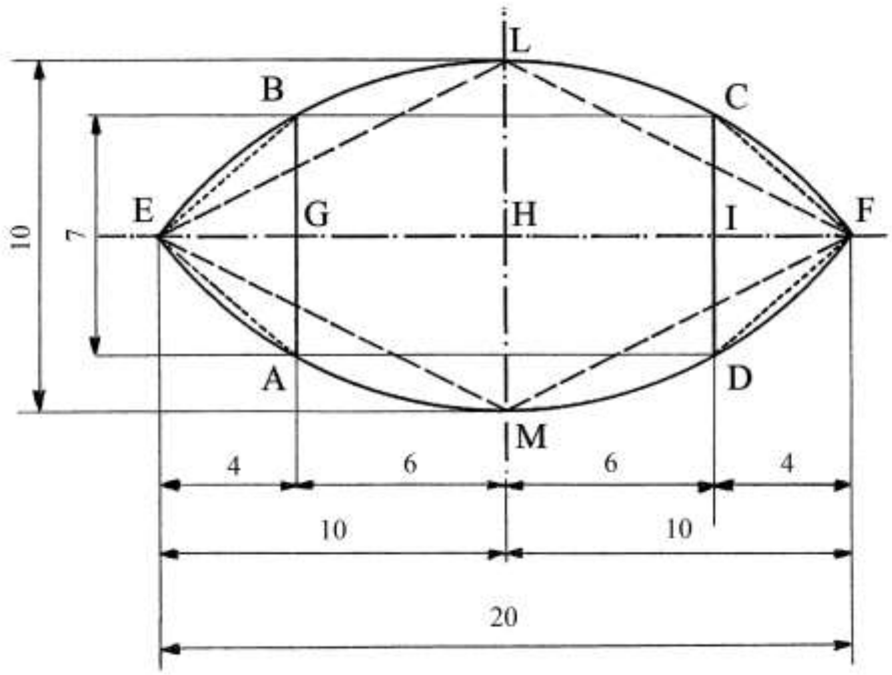
Calcolo del volume della botte

Per calcolare il volume del solido ELFM che racchiude la botte, Bartoli lo scompone in due parti di uguali dimensioni: ELM e LMF.



Il volume del cono *ideale* (tratteggiato nella figura qui sopra) ELM è dato da:

V_{ELM} = Area $_{LHM}$ * EH/3 .



Per chiarire i successivi calcoli riproduciamo la precedente figure aggiungendo le *quote*:

L'area del cerchio di diametro LHM è:

Area $_{LHM} = \pi * (LM/2)^2 \approx 22/7 * (10/2)^2 \approx (78 + 4/7)$ braccia^2 .

Il volume del cono è:

$V_{ELM} \approx (78 + 4/7) * 10/3 \approx (261 + 57/63)$ braccia^3 .

Il volume del doppio cono *ideale* ELFM è:

$V_{ELFM} \approx 2 * V_{ELM} \approx 2 * (261 + 57/63) \approx (523 + 52/63)$ braccia^3 .

Applicando la regola proposta da Bartoli e già descritta nel precedente paragrafo, la mandorla ovata ELFM avrebbe *volume doppio* di quello del doppio cono ideale:

$V_{MANDORLA} \approx 2 * V_{ELFM} \approx 2 * (523 + 52/63) \approx 1047 + 13/21$ braccia^3 .

Dal volume della mandorla ovata vanno sottratti i volumi dei solidi "a mandorla" EBGA e FDIC, di uguali dimensioni.

Il cono *ideale* EBGA ha volume:

$V_{EBGA} = 1/3 * EG * \pi * (AB/2)^2 \approx 1/3 * 4 * 22/7 * (7/2)^2 \approx (51 + 1/3)$ braccia^3 .

Applicando di nuovo la regola di Bartoli, il cono a a mandorla EBGA ha volume doppio di quello del cono ideale EBGA:

$V_{MANDORLA\ EBGA} \approx 2 * (51 + 1/3) \approx (102 + 2/3)$ braccia^3 .

Infine, il volume della botte AGBLCIDM è:

$V_{AGBLCIDM} \approx (1047 + 13/21) – 2 * (102 + 2/3) \approx (842 + 2/7)$ braccia^3 .

%%%%%%%%%%%%%%%%

Bartoli conclude con la descrizione di una differente procedura per il calcolo del volume della botte. Eccone i passi:

* sommare le lunghezze di GF e FH: 16 + 10 = 26 braccia;
* moltiplicare il volume del cono *ideale* EBGA per (GF + FH): (51 + 1/3) * 26 = (1334 + 2/3);
* dividere per la lunghezza di GF: (1334 + 2/3)/16 = (83 + 5/12 braccia)^3 , volume del cono a mandorla EBGA [in precedenza era stato calcolato il valore (102 + 2/3 braccia^3)];
* moltiplicare per 2: (83 + 5/12) * 2 = (166 + 5/6) braccia^3, volume complessivo dei coni a mandorla EBGA e FDIC;
* sottarre dal volume dell'intera mandorla ovata: (1047 + 13/21) – (166 + 5/6) ≈ (880 + 11/14) braccia^3, volume della botte AGBLCIDM [il risultato è maggiore di quello calcolato in precedenza: (842 + 2/7) braccia^3].

Infine, Bartoli calcola i numero di *barili* di vino che la botte può contenere sulla base dell'equivalenza 1 braccio^3 = 5 barili .

Ne consegue che la botte può contenere fino a

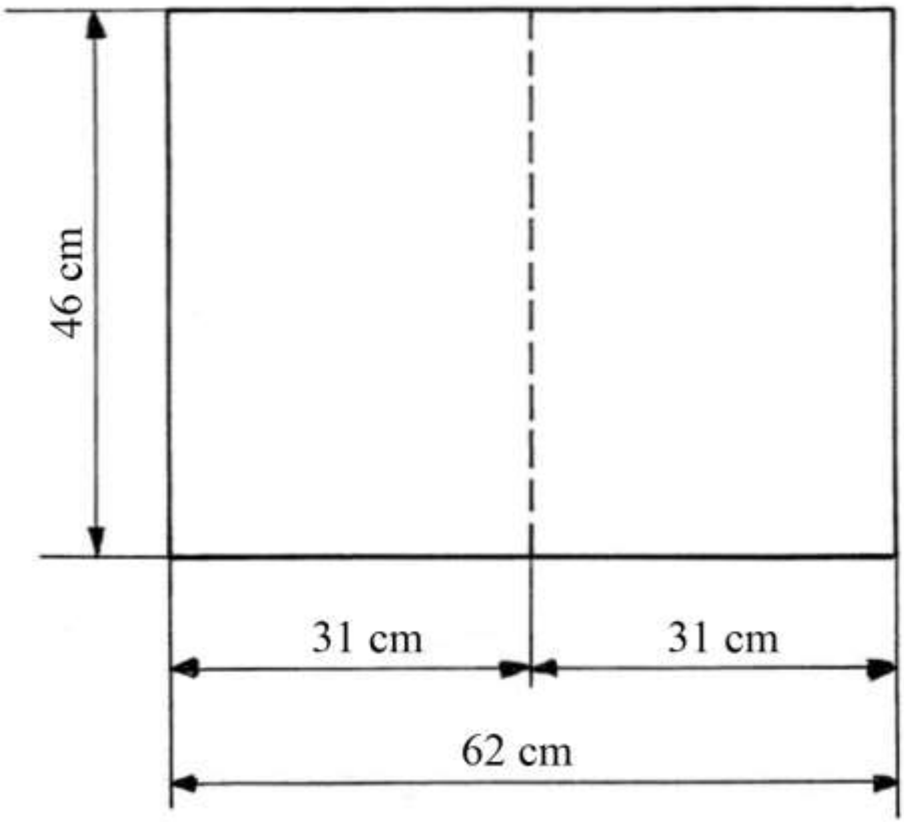
$(880 + 11/14) * 5 \approx (4403 + 13/14)$ barili.

- APPROFONDIMENTO -

I metodi grafici usati da Bartoli

Il trattato di Cosimo Bartoli è uno dei più importanti testi di geometria pratica del XVI secolo. Particolarmente interessanti sono i metodi di rappresentazione grafica da lui impiegati: proiezioni ortogonali, assonometrie e prospettive.

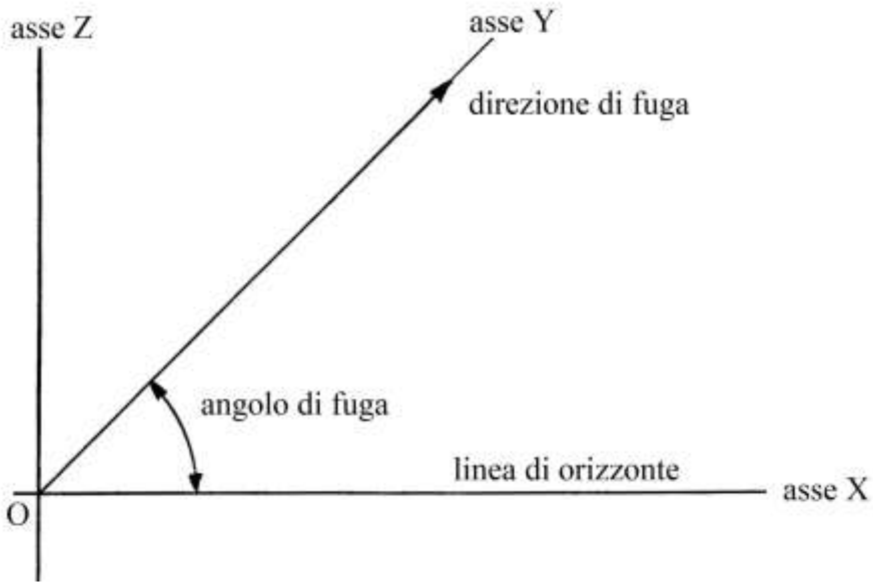
A questo importante testo va aggiunto l'inedito e anonimo *Codice di macchine* attribuito a Cosimo Bartoli da Daniela Lamberini dell'Università degli studi di Firenze. Il Codice è conservato nella Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze (E.B.16.5^{II}) ed è intitolato "Raccolta di varie macchine e disegni per vasi". Il codice contiene 135 carte e ha dimensioni 445x301 mm e cioè *mezzo reale*:



Lo studio della Lamberini è ampio e molto dettagliato ed è contenuto nel volume con gli Atti del Convegno tenutosi nel 2009 su Cosimo Bartoli, citato in bibliografia.

Nel trattato geometrico, Bartoli ha disegnato alcuni solidi in assonometria cavaliera o militare.

In generale, un disegno in *assonometria cavaliera* è definito da quattro elementi:



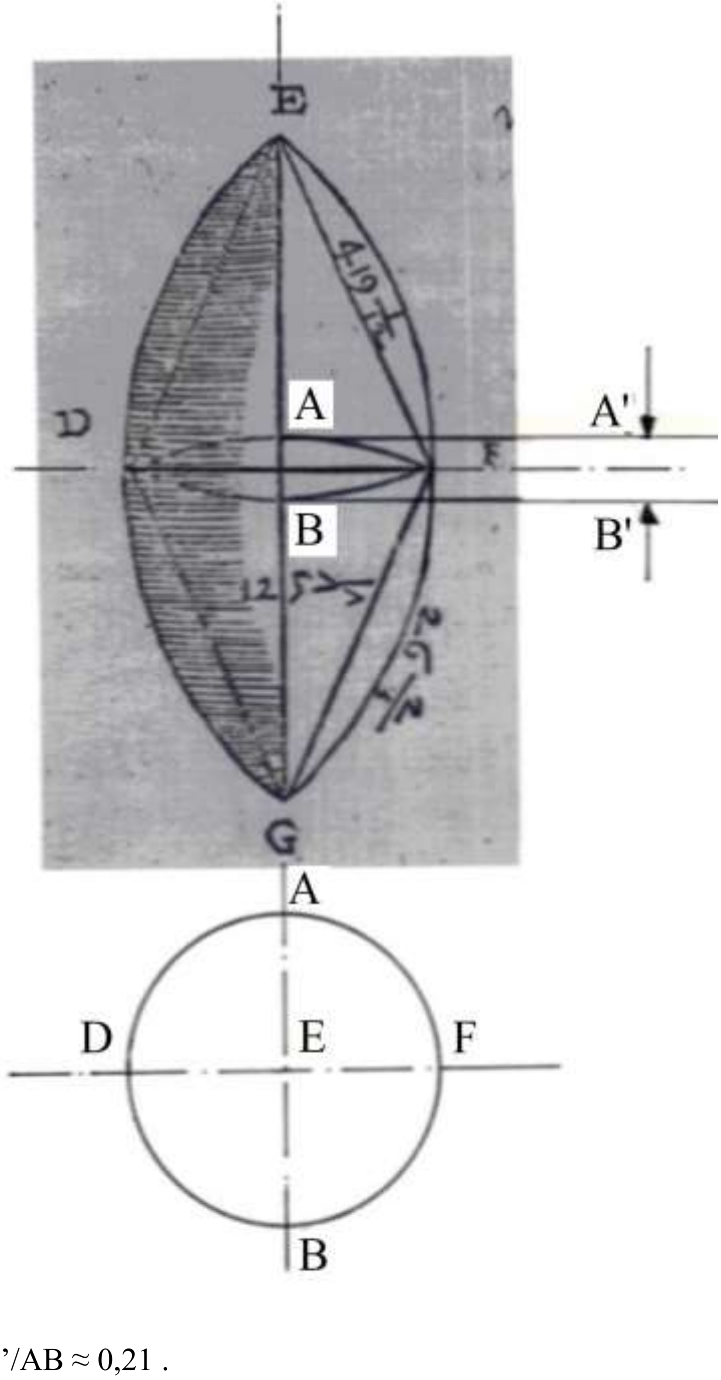
* un *piano di proiezione* che è rappresentato dal foglio di carta sul quale si disegna (o dallo schermo di un monitor);
* una *scala di proporzione*: 1:1 1:2 1:5, ecc.;

*	una *direzione di fuga*: è un asse, Y in figura, che forma un dato angolo con la *linea di orizzonte* rappresentata dall'asse X. In questo caso l'angolo di fuga è uguale a 45°;
*	un *rapporto di fuga* è espresso da un numero uguale o inferiore a 1: esso si riferisce al rapporto fra le lunghezze misurate lungo l'asse Y e quelle reali:

rapporto di fuga = RF = lunghezza disegnata/lunghezza reale .

%%%%%%%%%%%%%%%%

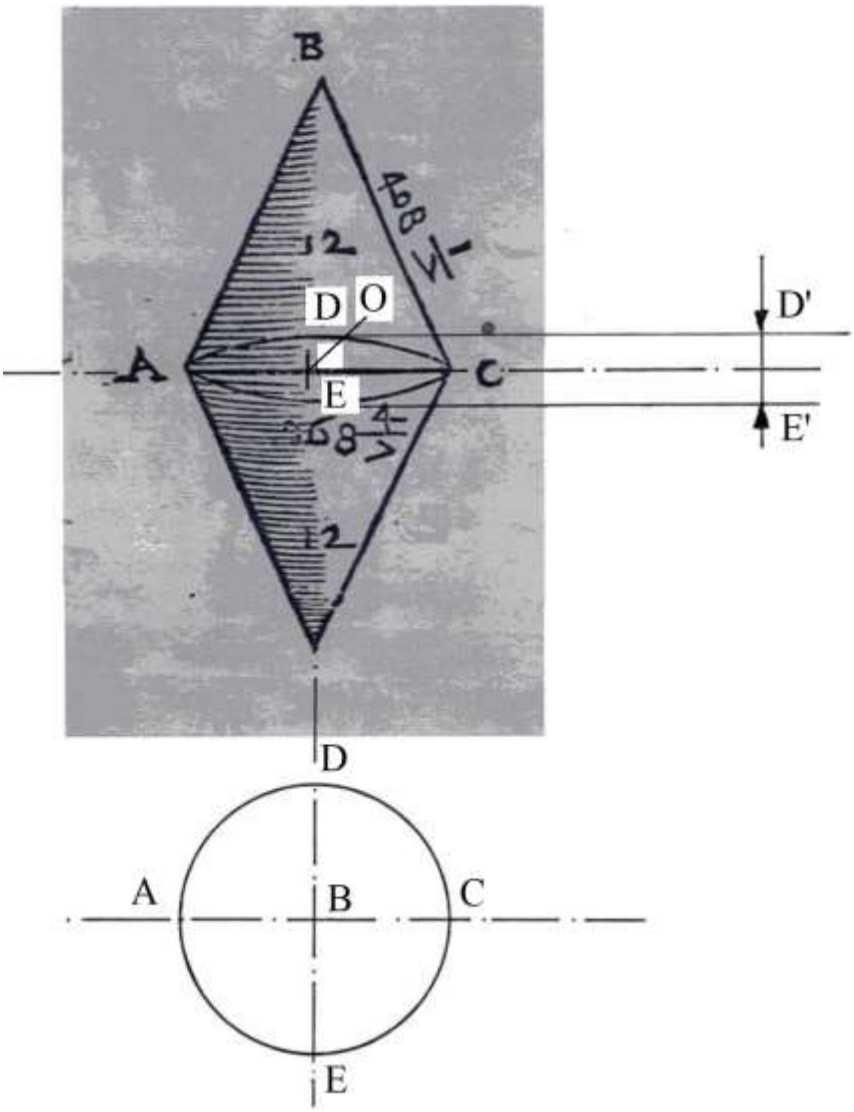
Nel caso della mandorla ovata il rapporto di fuga RF vale:



RF ≈ A'B'/AB ≈ 0,21 .

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

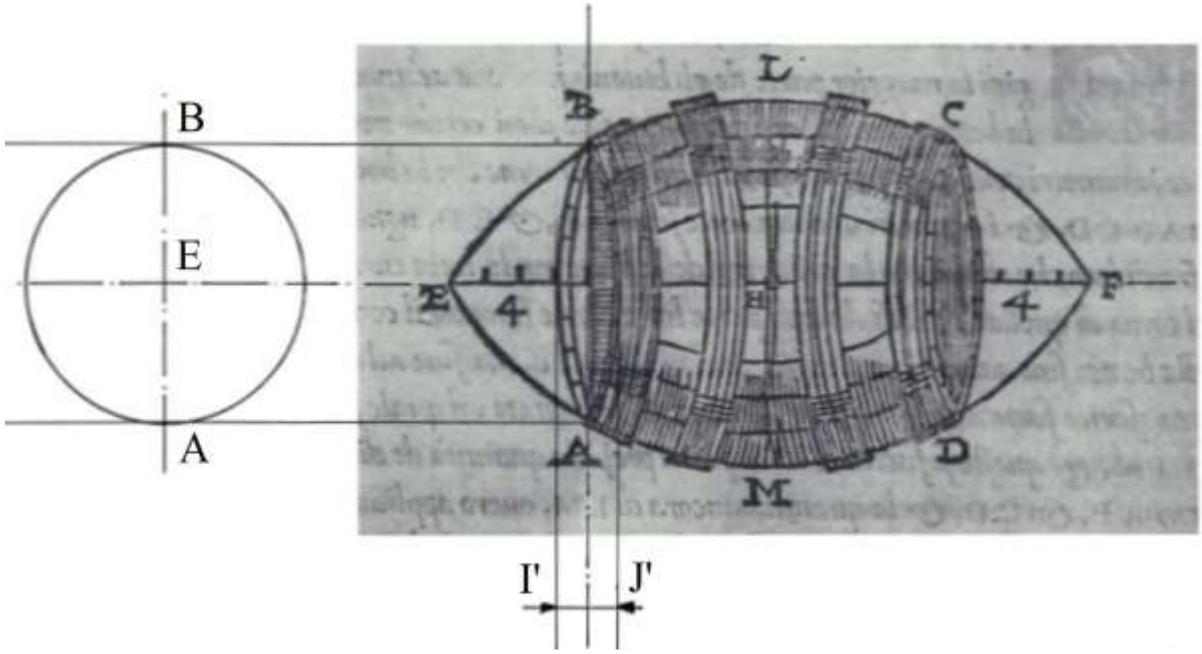
Nell'esempio del *doppio cono* il rapporto RF vale:



RF = D’E’/DE ≈ 0,24 .

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

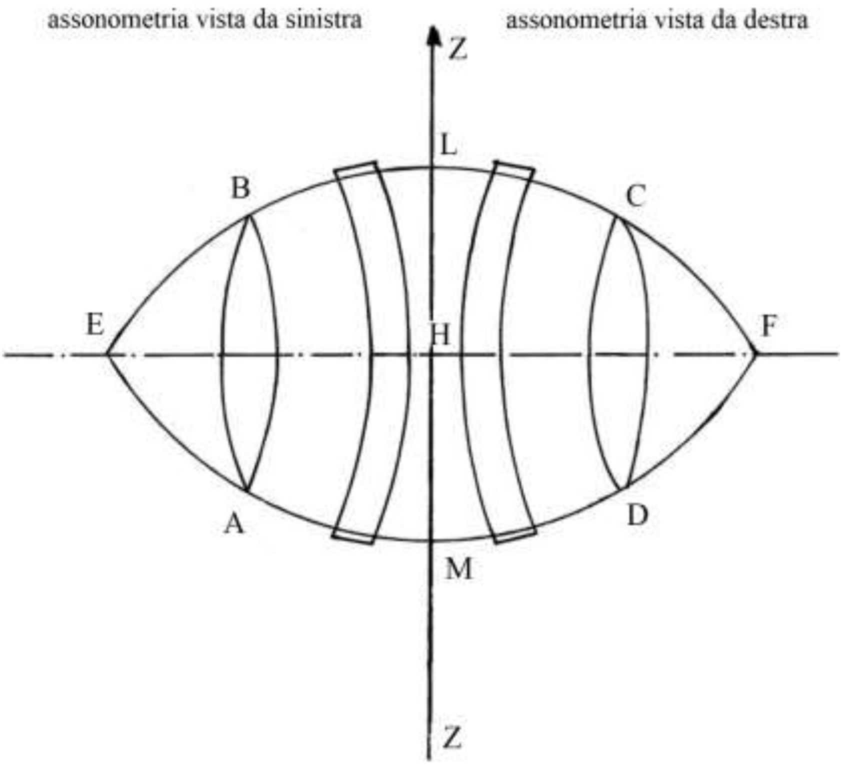
Infine, nel caso della botte, il rapporto di fuga per il fondo di sinistra vale:



RF ≈ I’J’/BA ≈ 0,22 .

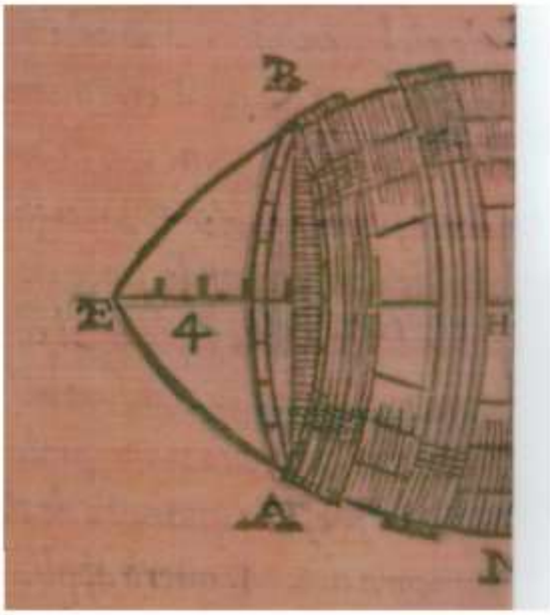
- APPROFONDIMENTO -

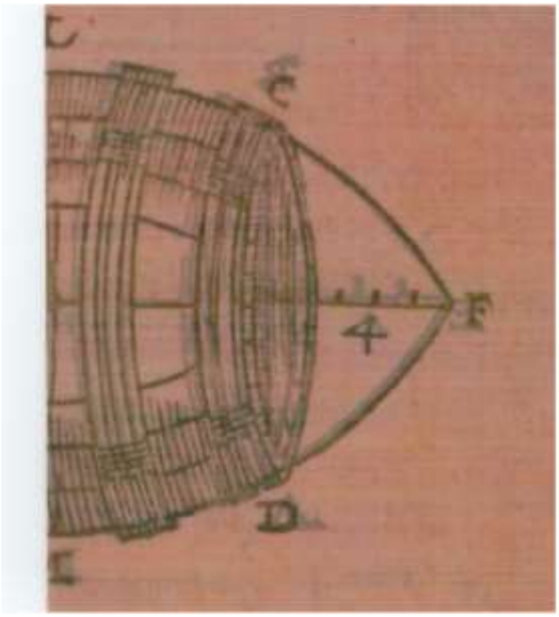
Il modello della botte disegnato da Bartoli è rappresentato secondo le regole di una assonometria:



Lo schema del solido sembra rappresentare la botte con due differenti viste prese dall’alto: una da sinistra e l’altra da destra. Le due viste sono state unite lungo il comune asse verticale Z, passante per i punti L, H e M: esse sono simmetriche.

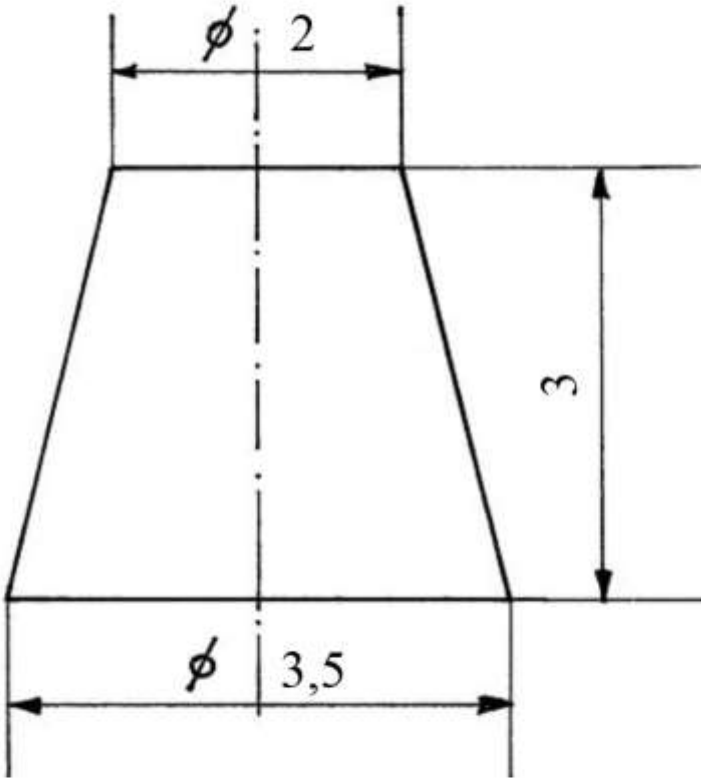
Il disegno potrebbe essere stato realizzato mediante la rotazione di una metà della botte intorno all’asse verticale LHM, come sembrano confermare i due schemi che seguono:





LA MISURA DELLE BOTTI SECONDO PIETRO CATANEO

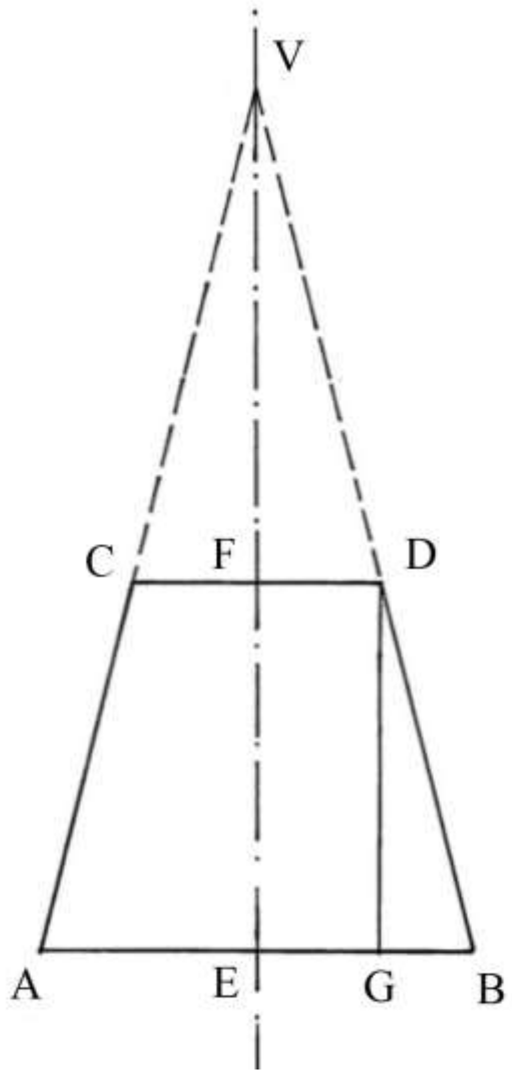
Il metodo impiegato dall'ingegnere e matematico senese Pietro Cataneo o Cattaneo (circa 1510 – 1569-73) per la misura della capacità delle botti muove dalla considerazione di un *tino* che ha la forma di tronco di cono e le dimensioni in braccia mostrate nella figura:



Il solido ha forma circolare e le dimensioni sono espresse in *braccia senesi da panno* (equivalenti a 60,1055 cm).

Il passo successivo è la ricostruzione del cono da cui ha origine il tino: Cataneo usa la regola delle proporzioni.

In parole più semplici, Cataneo calcola l'altezza EV del cono con la similitudine fra i triangoli GDB e EVB e le proporzioni fra le lunghezze dei loro lati:



GB : EB = GD : EV .

Fissiamo le lunghezze dei diversi cateti:

* GB = (AB – CD)/2 = (3,5 – 2)/2 = 0,75 braccia ;
* EB = AB/2 = 3,5/2 = 1,75 braccia ;
* GD = 3 braccia ;
* EV = EF + FV = 3 + FV .

Sostituendo i dati nella proporzione si ha:

0,75 : 1,75 = 3 : EV
EV = (1,75 * 3)/0,75 = 7 braccia
FV = EV – FE = 7 – 3 = 4 braccia.

Cataneo impiega *numeri misti* formati da una parte intera e da una parte frazionaria (una *frazione propria*), senza separarle con il segno dell'addizione (+), come è qui fatto per semplificare i calcoli.

L'Autore senese calcola il volume del tronco di cono sottraendo, da quello del cono con base AEB e altezza EV, il volume del cono immaginario che ha base CFD. Ecco i passi della procedura:

* moltiplicare per sé stessa la lunghezza del diametro AB: (3 + ½)*(3 + ½) = (12 + 1/4);
* moltiplicare per la costante 11/14: (12 + ¼) * 11/14 = (9 + 5/8) braccia^2 , area della base;
* moltiplicare l'area per l'altezza EV: (9 + 5/8) * 7 = (67 + 3/8) ;

* dividere per 3: (67 + 3/8) : 3 = (22 + 11/24) $braccia^3$, volume del cono ABV ;
* moltiplicare per sé stessa la lunghezza del diametro CD: 2 * 2 = 4 ;
* moltiplicare per la costante 11/14: 4 * 11/14 = (3 + 1/7) $braccia^2$, area del cerchio di diametro CD ;
* moltiplicare per l'altezza FV: (3 + 1/7) * 4 = (12 + 4/7);
* dividere per 3: (12 + 4/7) : 3 = (4 + 4/21) $braccia^3$, volume del cono CDV ;
* sottrarre l'ultimo volume da quello di ABV: (22 + 11/24) – (4 + 4/21) = (18 + 15/56) $braccia^3$, volume del tino a forma di tronco di cono ACDB .

L'Autore calcola il volume del tino pari a (18 + 135/504) $braccia^3$, senza semplificare la parte frazionaria; infatti:

135/504 = 15/56.

Egli poi converte il risultato passando dal $braccio^3$ (che lui chiama *braccio quadro cubo*, come Calandri a Firenze intorno al 1500 definiva il corrispondente *braccio quadro corporeo*) in staia secondo l'equivalenza – evidentemente in uso a Siena – di 11 staia per 1 $braccio^3$:

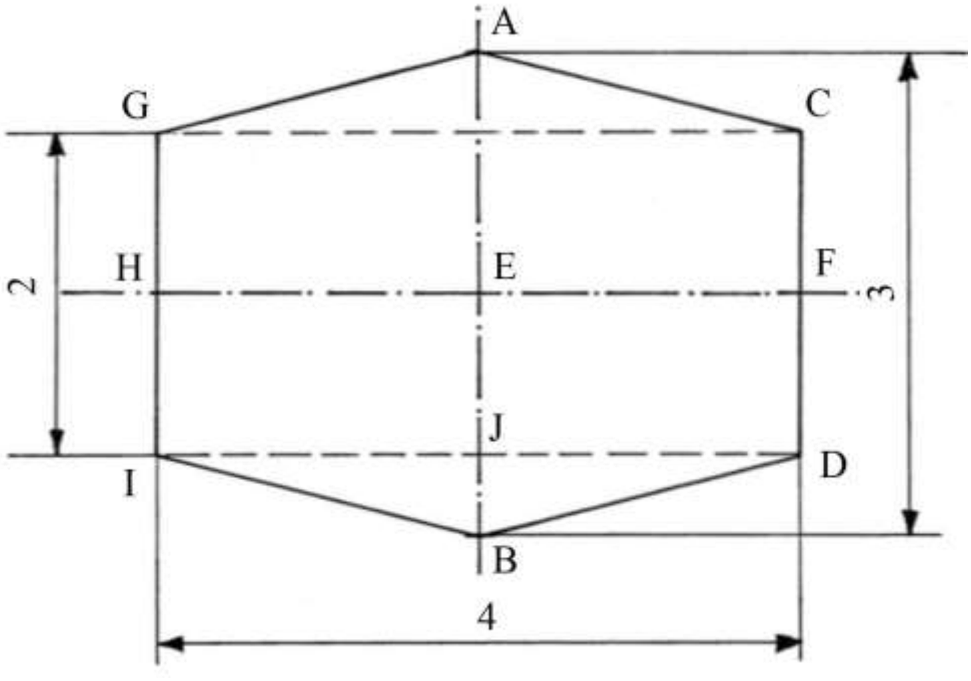
Volume ACDB = (18 + 15/56) + 11 = 200 + 53/56 staia ≈ 201 staia.

L'Autore poi cita altre due unità di misura multiple dello staio:
* 1 soma = 4 staia = 2 barili.
* 1 barile = 2 staia.

Infine, egli stima il rapporto fra il volume delle uve *pestate* contenute in un tino e quello del vino che veniva ricavato: 2/3.

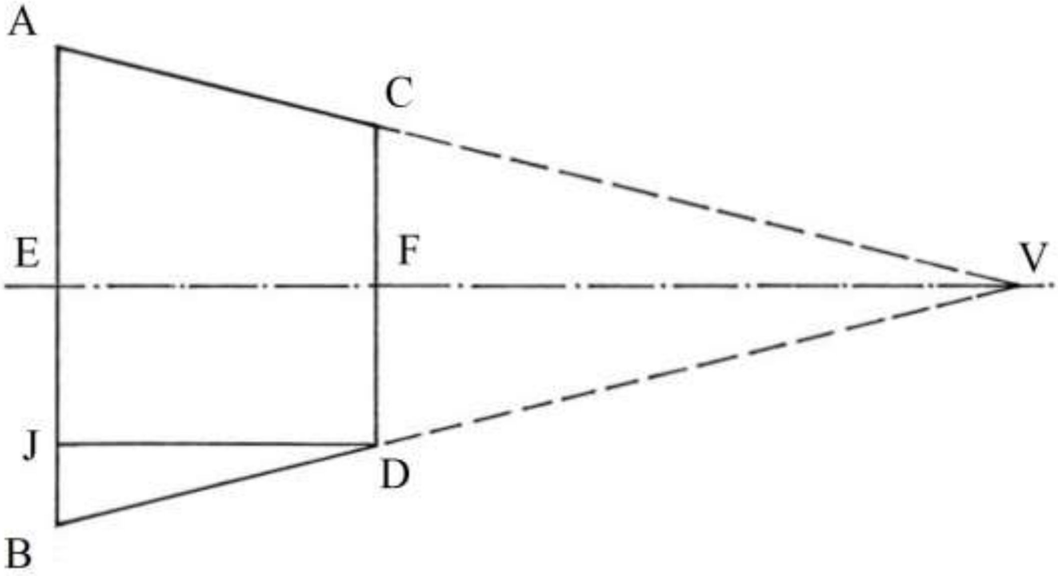
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Cataneo esamina poi una botte che ha la forma presentata nella figura che segue:



La botte è considerata come un doppio tino con basi circolari e di forma troncoconica. I due tronchi di cono hanno uguali dimensioni e sono uniti lungo le basi maggiori (AEB).

Cataneo propone di calcolare il volume di uno dei due tini con la procedura descritta in precedenza.



Il cono virtuale ABV è tagliato con un piano perpendicolare all'asse di simmetria E-F-V, parallelo alla base A-E-B e passante per i punti C, F e D.

I triangoli rettangoli JDB e EVB sono simili. Vale proporzione già utilizzata per il precedente tino:

JB : EB = JD : EV .

Le lunghezze dei cateti interessati sono:

* JB = (AB – CD)/2 = (3 – 2)/2 = 0,5 braccia;
* EB = AB/2 = 3/2 = 1,5 braccia ;
* JD = HF/2 = 4/2 = 2 braccia ;
* EV = EF + FV = 2 + FV .

Sostituendo questi valori nella proporzione si ha:

0,5 : 1,5 = 2 : EV

EV = (1,5 * 2)/0,5 = 6 braccia.

EV = 2 + FV = 6 da cui FV = 4 braccia .

A questo punto, per calcolare il volume del tronco di cono ACDB Cataneo utilizza la stessa procedura usata per il tino. Ecco i passi occorrenti:

* moltiplicare per sé stessa la lunghezza del diametro AB: 3 * 3 = 9 ;
* moltiplicare per la costante 11/14: 9 * 11/14 = (7 + 1/14) braccia^2, area della base AEB ;
* moltiplicare per l'altezza EV: (7 + 1/14) * 6 = (42 + 3/7) ;
* dividere per 3: (42 + 3/7) : 3 = (14 + 1/7) braccia^3, volume del cono ABV ;
* moltiplicare per sé stessa la lunghezza del diametro CD: 2 * 2 = 4 ;
* moltiplicare per la costante 11/14: 4 * 11/14 = (3 + 1/7) braccia^2, area della base CFD ;
* moltiplicare per l'altezza FV: (3 + 1/7) * 4 = (12 + 4/7);
* dividere per 3: (12 + 4/7) : 3 = (4 + 4/21) braccia^3, volume del cono CDV ;
* sottrarre questo secondo volume dal primo: (14 + 1/7) – (4 + 4/21) = (9 + 20/21) braccia^3, volume del tronco di cono ACDB .

Il volume dell'intera botte è *doppio* di quello di ACDB:

Volume $_{BOTTE}$ = 2 * Volume $_{ACDB}$ = 2 * (9 + 20/21) = (19 + 19/21) braccia^3 .

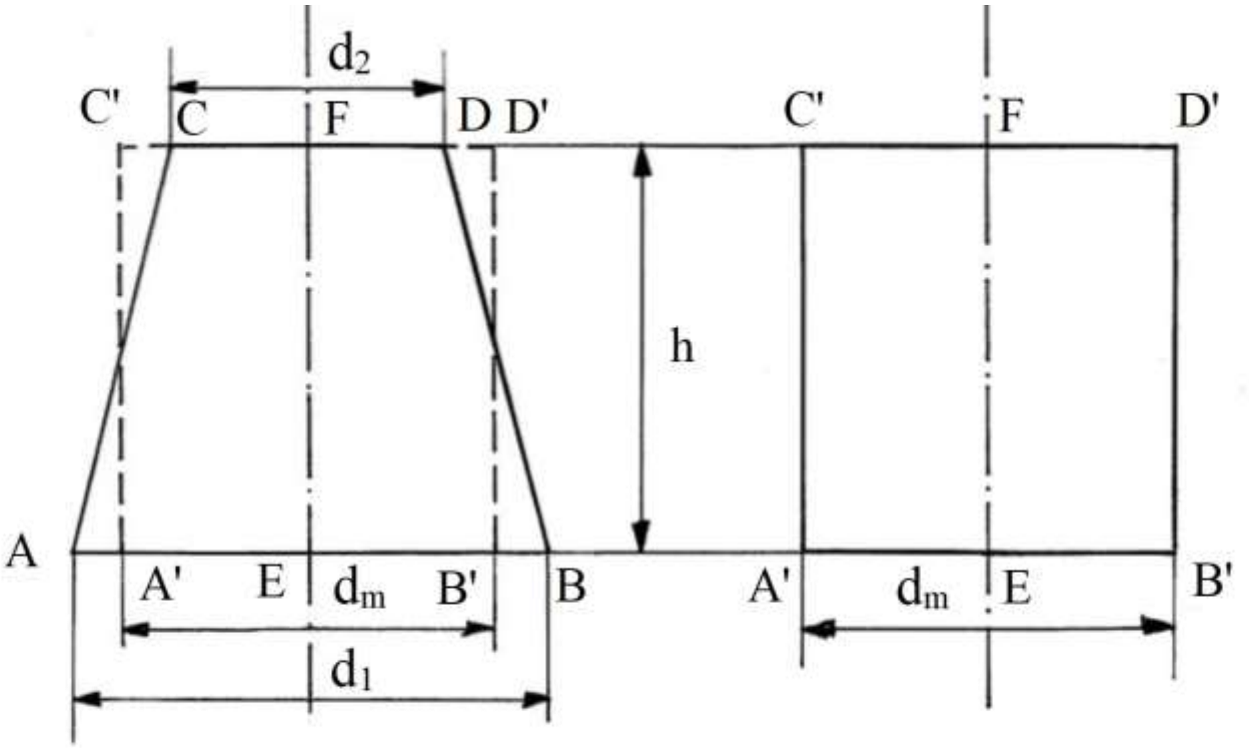
Anche in questo caso è effettuata la conversione in staia e some:

Volume $_{BOTTE}$ = (19 + 19/21) braccia3 = (218 + 20/21) staia =
= [54 some + (2 + 20/21) staia].

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

In un successivo paragrafo, Cataneo passa a descrivere un altro metodo impiegato per calcolare il volume di una botte circolare, metodo in uso a Siena e in gran parte della Toscana all'inizio del XVI secolo.

Il tino ACDB ha la forma di un tronco di cono:



Il diametro del fondo è AB = d_1, quello della testa è CD = d_2 e l'altezza è FE = h .
Il metodo consiste nell'assimilare il tronco di cono a un *cilindro* avente la stessa altezza h e diametro d_m uguale alla media aritmetica fra i due diametri del tronco di cono:

$$d_m = (d_1 + d_2)/2 .$$

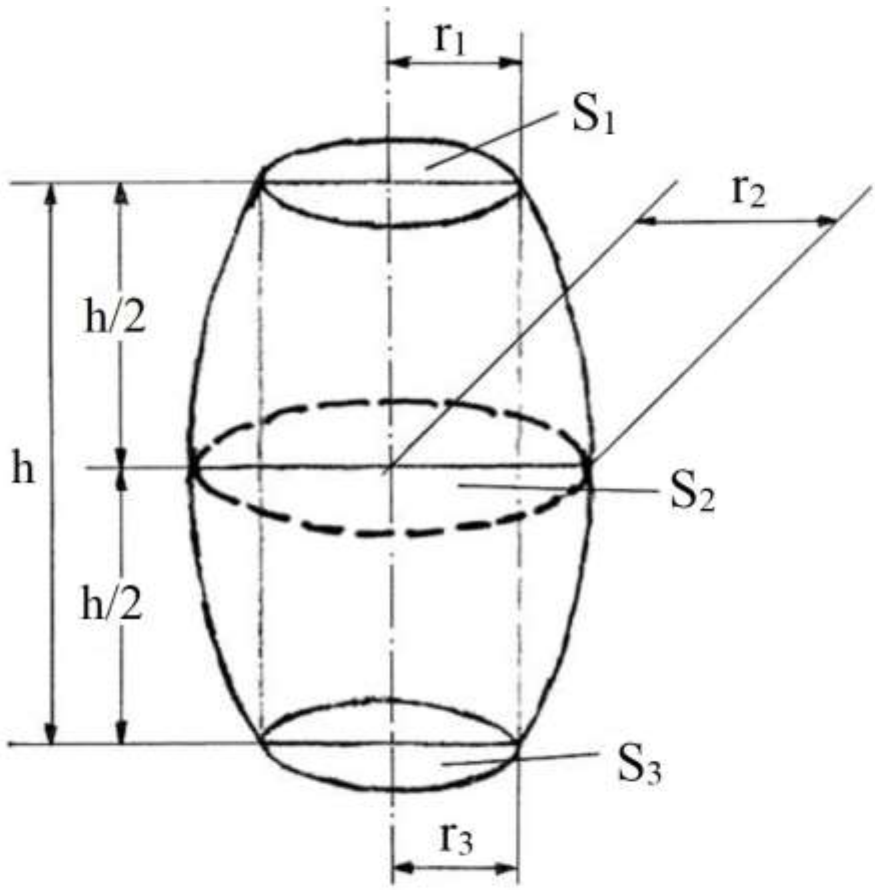
LA FORMULA DI KEPLERO

Il matematico tedesco Giovanni Keplero (1571 – 1630) pubblicò nel 1615 un trattato dedicato allo studio della geometria delle botti ("*Nova stereometria doliorum vinariorum*").

Egli usò una *formula approssimata* per calcolare il volume di una botte di sezione circolare; r_1, r_2 e r_3 sono i raggi delle tre sezioni circolari: il primo è il raggio della *testa*, il terzo è quello del *fondo* e r_2 è quello al cocchiume.

S_1, S_2 e S_3 sono le rispettive aree:

$$S_1 = \pi * (r_1)^2 \qquad S_2 = \pi * (r_2)^2 \qquad S_3 = \pi * (r_3)^2$$



Nell'esempio di figura, il rigonfiamento (l'*entasi*) della botte si trova a metà altezza, $h/2$.

La formula di Keplero per calcolare il volume V è la seguente:

$$V = 1/6 * h * (S_1 + 4*S_2 + S_3)$$

Nel caso in cui i diametri della *testa* e del *fondo* siano uguali ne deriva:

$r_1 = r_2$ e $S_1 = S_3$.

La formula di Keplero viene così semplificata:

$$V = 1/6 * h * (2*S_1 + 4*S_2) .$$

- APPROFONDIMENTO -

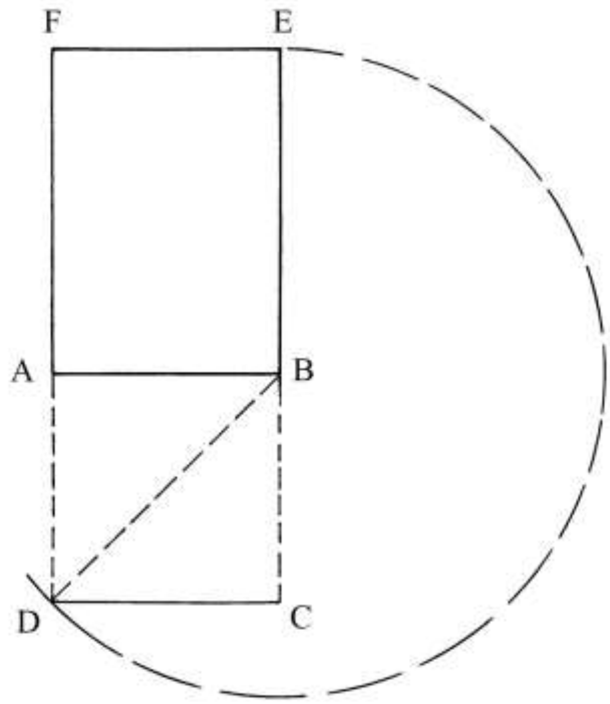
A p. 80 del suo testo citato in bibliografia, Wilma Di Palma ricava dal lavoro di Keplero sulle botti una serie di considerazioni.

All'epoca di Keplero le botti austriache erano più larghe che alte: *h* era l'altezza (o lunghezza) e *2 * r* il diametro dei due fondi.

Secondo Di Palma, il rapporto ottimale fra *h* e *2 * r* era:

$2 * r = h * \sqrt{2}$.

Vediamo la costruzione del profilo semplificato di una botte cilindrica con quelle proporzioni:



AB è l'altezza *h*. Su AB costruire il quadrato ABCD e tracciare la diagonale BD.

Prolungare verso l'alto i lati AD e BC. Fare centro in B e con raggio BD disegnare un arco da D fino a stabilire il punto E sul prolungamento di BC.

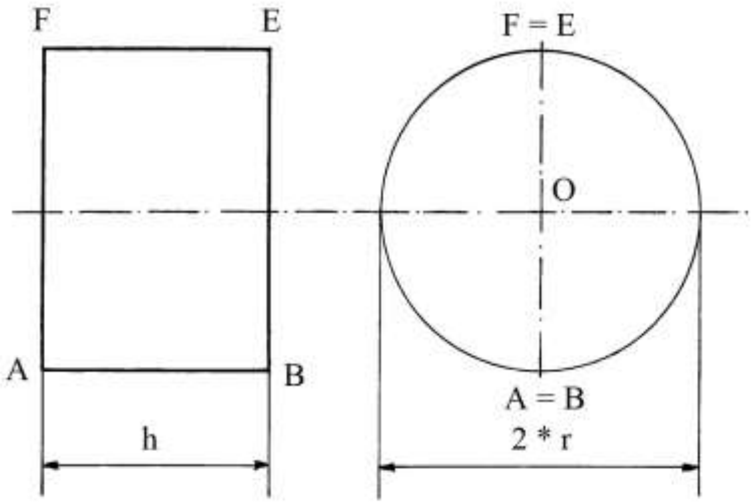
Da E condurre verso sinistra la parallela a AB.

BE è lungo quanto BD e cioè:

$BE = BD = AB * \sqrt{2} = h * \sqrt{2}$.

AF e BE sono lunghi "2 * r".

La figura che segue è la doppia proiezione ortogonale della botte il cui profilo è stato ricavato con il precedente schema:


F
E
F = E
O
A
B
A = B
h
2 * r

IL CONTRIBUTO DI DIONIGI VEGLIA

Il perugino Pier Dionigi Veglia (1584-1636) è stato un monaco appartenente all'Ordine dei Servi di Maria. Si è occupato fra le altre materie di botanica e di geometria.

Importanti sono due opere stampate: la "*Geometria pratica*" di ben 618 pagine, pubblicata a Perugia nel 1626 e il più piccolo trattato "*Della dimensione…*" , citato in bibliografia, che contiene un capitolo, quello finale, dedicato alla misura degli scemi delle botti.

Al termine della sua vita è stato nominato Botanico del Granduca di Toscana e Prefetto dell'Orto Botanico di Pisa.

I tre casi possibili degli scemi delle botti

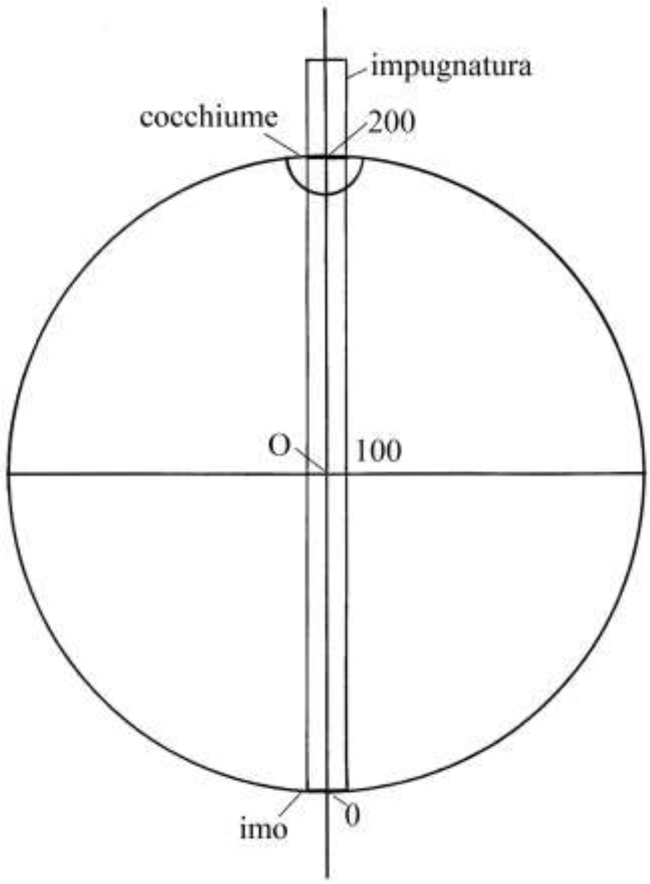
Veglia fissa preliminarmente i tre possibili casi nei quali si articola la presenza dello *scemo*, distinti in funzione della sua lunghezza:

* più corto della metà dell'altezza al cocchiume;
* uguale alla metà;
* più corto della metà.

Nel secondo caso, se la botte ha capacità uguale a 10 barili, il vino contenuto ha volume uguale a 5 barili.

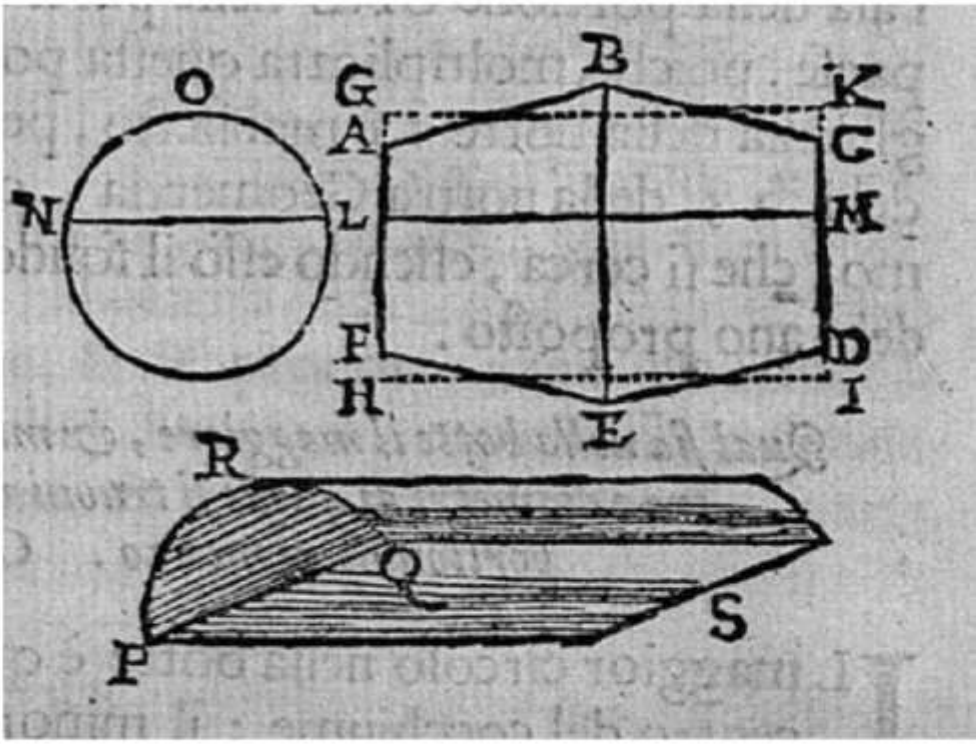
Veglia misura l'altezza in *once* e, come esempio, prende in esame una botte che in corrispondenza del cocchiume sia alta 24 once.

Egli propone di misurare la profondità del vino, in senso verticale, a partire dal fondo o *imo*, immaginando di dividere l'altezza al cocchiume in 200 *parti* uguali: a tale scopo poteva servire un'asta divisa come in figura:



Veglia approssima la forma di una generica botte a quella di due tronchi di cono di uguali dimensioni, uniti lungo le loro basi maggiori e utilizza un metodo per equipararla a un cilindro di identica lunghezza (o distanza fra i due fondi) e con lo stesso volume.

Lo schema che segue è ripreso dal testo di quell'Autore:



ABCDEF è il profilo della botte, formata dai tronchi di cono ABEF e BEIG.

M indica l'altezza del vino all'interno della botte.

GHIK è il profilo del cilindro equivalente e, a sinistra, in proiezione frontale, NL è il livello del vino.

In basso, PQRS è il volume dello scemo.

Il calcolo del volume del cilindro equivalente è basato sul *diametro proporzionale di mezzo*, come lo definisce l'Autore.

Veglia propone alcuni metodi per calcolare quel diametro proporzionale e fa degli esempi numerici: il *diametro maggiore* (al cocchiume) è 36 once e il *diametro minore* (dei due fondi ritenuti di uguali dimensioni) è 32 once.

Un primo metodo è dato dal calcolo della media geometria fra i due diametri:

> diametro proporzionale di mezzo = $\sqrt{(\text{diametro maggiore} * \text{diametro minore})}$ =
> = $\sqrt{(36 * 32)} = \sqrt{(1152)} \approx (33 + 62/66) = (33 + 31/33)$ once [Veglia ha l'abitudine di non ridurre ai minimi termini le frazioni].

- APPROFONDIMENTO -

<u>Le unità di misura di Perugia</u>

La tabella che segue è riprodotta dal *Manuale di metrologia* del Martini (citato in Bibliografia) e contiene un riepilogo delle antiche unità di misura usate a Perugia fino all'Ottocento e cioè prima dell'introduzione del *sistema metrico decimale*:

Misure di lunghezza

	metri
Canna agrimensoria = 15 Piedi	5,452500
Canna mercantile = 8 Palmi .	2,008500
Braccio da tela = 4 Palmi . .	1,004250
Passetto = 2 Piedi	0,727000
Braccetto da nastri = 2 ½ Palmi	0,627656
Piede da legname e da fabbriche = 12 Once	0,363500
Palmo	0,251062
Oncia	0,030292

Oltre le Misure suddette, speciali di Perugia, si usavano pure quelle antiche di Roma; *Vedi Roma.*

Misure di superficie

	ari
Mina = 150 Tavole . . .	44,594634
	metri qu.
Tavola = 225 Piedi quadri .	29,729756
Piede quadro	0,132132

Misure di volume

	metri c.
Canna cuba (Canna cuba architettonica romana) = 1000 Palmi cubi	11,152616
Palmo cubo (Palmo cubo romano)	0,011153

Misure di capacità

Per gli aridi:

	litri
Rubbio da legumi = 2 ⅛ Sacchi (9 ¼ Staia) . .	336,015000
Rubbio da grano = 2 Sacchi (8 Staia)	282,960000
Sacco = 2 Mine (4 Staia) .	141,480000
Mina = 2 Staia	70,740000
Staio = 2 Quarti	35,370000
Quarto = 4 Coppe . . .	17,685000
Coppa = 4 Scodelle . . .	4,421250
Scodella	1,105312

Il Rubbio da legumi di Perugia si divide come quello del grano, ma si considera di Staia 9 ½, perchè lo Staio in tal caso è adopererato colmo e non raso.

Per il vino:

	litri
Soma da mosto = 2 Barili da mosto	99,880000
Soma da vino = 2 Barili da vino	95,340000
Barile da mosto = 22 Boccali	49,940000
Barile da vino = 21 Boccale .	47,670000
Boccale = 2 Mezzi	2,270000
Mezzo = 2 Fogliette . . .	1,135000
	litri
Foglietta = 2 Quartucce . .	0,567500
Quartuccia	0,283750

Per l'olio:

	litri
Mezzolino (Caldarello) = 4 Quarti	24,160000
Quarto = 15 Libbre . . .	6,040000
Libbra = 2 Mezze	0,402667
Mezza = 2 Terzetti . . .	0,201333
Terzetto	0,100667

Pesi

	chilogr.
Libbra = 12 Once	0,337815
Oncia = 8 Ottave	0,028151
Ottava = 3 Denari	0,003519
Denaro = 24 Grani	0,001173
Grano	0,000049

Fra le altre cose notevoli è bene tenere presente che *oncia* era il nome sia di un'unità di lunghezza sia di un'unità di peso.

- -

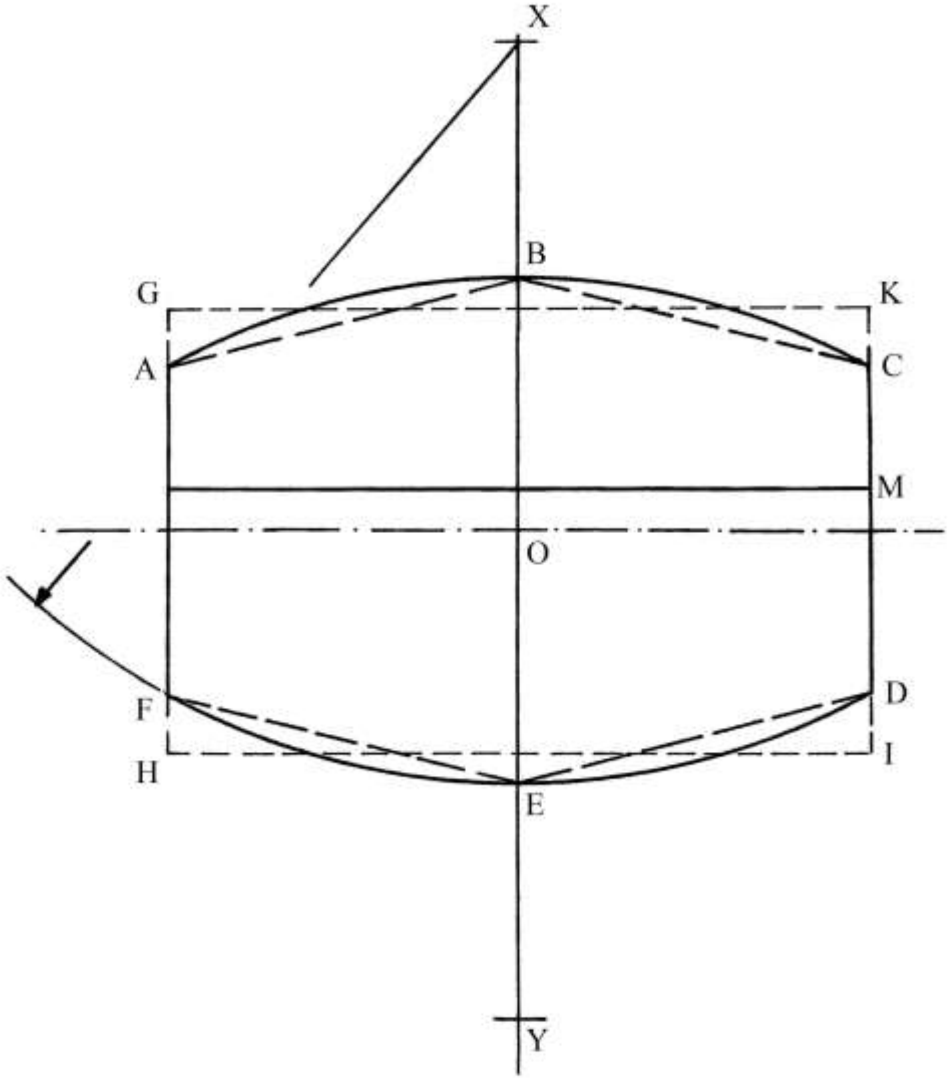
Veglia utilizza alcune unità di misura: il piede che vale 12 once con l'oncia divisa in *quattro* parti uguali chiamate *punti*: quindi esiste la relazione

1 piede = 12 once = 48 punti.

Una botte ha diametro maggiore uguale a 60 punti e quello minore 52 punti. Il diametro proporzionale è la loro media geometrica:

diametro proporzionale = √(60 * 52) = √(3120) ≈ (55 + 95/110) =

= (55 + 19/22) punti, che l'Autore arrotonda *per eccesso* a 56 punti con una semplice considerazione geometrica: una botte ha capacità maggiore di quella calcolata assimilandola a un cilindro perché i due tronchi di cono che la formano non hanno doghe rettilinee (come ipotizzato per semplificare i calcoli) ma *ricurve*: lo schema che segue riproduce l'ultima botte e vi aggiunge un ipotetico profilo curvo ricavato dalla tracciatura di due archi di circonferenza di centri X e Y (fra loro simmetrici e posizionati sull'asse verticale passante per il cocchiume) e raggi XF = XE = YA.



Il profilo della botte curvilinea ABCDEF sembra racchiudere un volume maggiore di quello definito dal rettangolo GHIK.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Un altro esempio di botte ha i due diametri (maggiore e minore) lunghi 60 e 53 punti: la loro media geometrica è:

diametro proporzionale = $\sqrt{(60 * 53)} = \sqrt{(3180)} \approx (56 + 44/122) = (56 + 22/61)$ punti,

che Veglia arrotonda a 57 punti per tener conto della curvatura del profilo delle doghe.

Il metodo della media geometrica è applicabile ai casi nei quali la differenza fra le lunghezze del diametro maggiore e di quello minore è piccola.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Un secondo metodo è spiegato da Veglia come basato sul calcolo della *media aritmetica* delle lunghezze dei due diametri. Vediamo il caso del diametro maggiore lungo 60 punti e di quello minore 50. In questo caso si ha:

diametro proporzionale = (diametro maggiore + diametro minore)/2 = (60 + 50)/2 =
= 110/2 = 55 punti.

La riprova dell'utilità di questo più semplice metodo è fornita dal calcolo della media geometrica delle lunghezze dei due diametri di questo esempio:

diametro proporzionale = √(diametro maggiore * diametro minore) =

= √(60 * 50) = √(3000) ≈ (54 + 84/108) = (54 + 7/9) punti, arrotondato a 55 punti. La differenza fra i due metodi (media geometrica e media aritmetica) è minima.

Veglia mostra un ultimo esempio al quale applica entrambi i metodi. Il diametro maggiore è lungo 60 e quello minore 51:

* diametro proporzionale = √(60 * 51) = √(3060) ≈ (55 + 35/110) = (55 + 7/22) punti;
* diametro proporzionale = (60 + 51)/2 = 111/2 = 55,5 punti.

Anche in questo caso a differenza è veramente trascurabile: il vantaggio era dato dall'eliminazione della difficile estrazione della radice quadrata, operazione piuttosto problematica ancora all'inizio del Seicento.

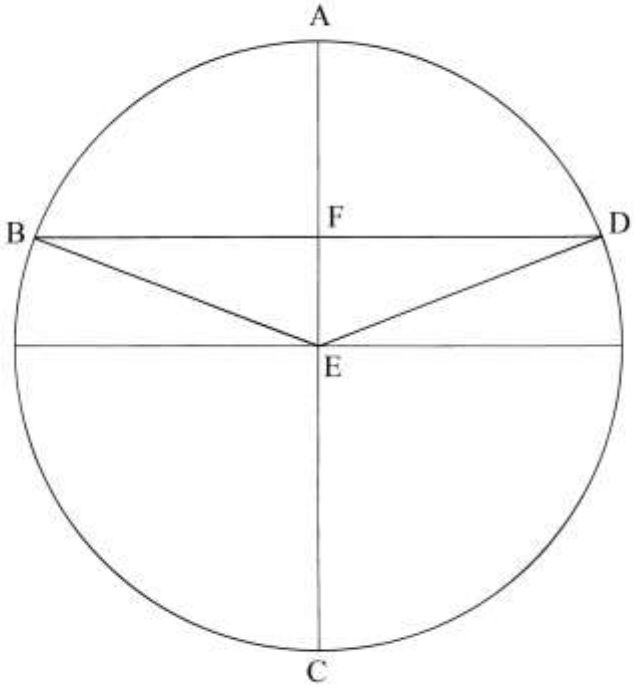
La tavola degli scemi

Veglia ha approntato una *tavola* contenente dei coefficienti da usare per calcolare l'area dei segmenti circolari con la freccia uguale allo scemo.

Tauola delle portioni per le parti del perpendicolo dal sommo, ò dall'imo della botte, cioè del suo circolo mezzano al piano del vino, posto il semidiametro 100.

1	19	34	3545	67	9235
2	54	35	3697	68	9423
3	98	36	3848	69	9613
4	151	37	4003	70	9806
5	211	38	4159	71	9997
6	276	39	4218	72	10186
7	347	40	4477	73	10379
8	423	41	4638	74	10573
9	504	42	4800	75	10765
10	589	43	4963	76	10960
11	679	44	5129	77	11154
12	771	45	5295	78	11348
13	868	46	5462	79	11545
14	969	47	5632	80	11741
15	1072	48	5802	81	11937
16	1180	49	5973	82	12133
17	1290	50	6146	83	12331
18	1403	51	6322	84	12529
19	1579	52	6495	85	12724
20	1637	53	6671	86	12923
21	1759	54	6848	87	13122
22	1882	55	7025	88	13318
23	2010	56	7206	89	13518
24	2138	57	7386	90	13718
25	2270	58	7567	91	13916
26	2403	59	7749	92	14117
27	2540	60	7931	93	14315
28	2677	61	8116	94	14516
29	2816	62	8300	95	14714
30	2958	63	8485	96	14913
31	3102	64	8672	97	15115
32	3247	65	8859	98	15314
33	3395	66	9045	99	15515

L'Autore spiega l'origine dei coefficienti contenuti nella tavola con un esempio di una botte il cui schema è nella figura che segue:



Prima di procedere oltre è indispensabile notare la differenza fra i *punti* (1 punto = ¼ di oncia) e le *parti*: 200 parti sono per Veglia la lunghezza convenzionale del diametro di una botte misurato al cocchiume. Il rapporto fra il punto e la parte varia in relazione alle dimensioni della singola botte.

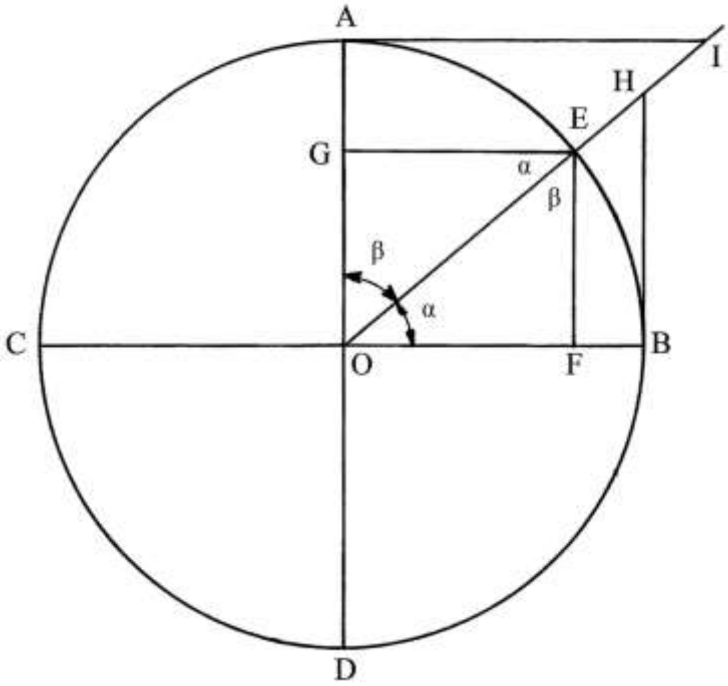
La botte ha sezione circolare con raggio EA = EB e centro in E.
Il diametro AC è lungo convenzionalmente 200 parti e il raggio è 100.
BD è il livello del vino. Lo scemo AF è lungo 64 parti e il segmento FE è 36.
A questo stadio della soluzione del problema, Veglia utilizza la funzione trigonometrica *senoverso*.

\- APPROFONDIMENTO -

Che cosa è il senoverso

Il senoverso, *versin*, di un angolo è il complemento a 1 del suo coseno:

$$\text{versin}\ \alpha = (1 - \cos \alpha)\ .$$



Il raggio OA = OB del cerchio trigonometrico è lungo convenzionalmente 1: OF è lungo quanto il coseno di α e FB è lungo quanto il senoverso di α:

versin α = (1 – cos α) = (1 – OF) = FB.

Nel triangolo rettangolo OEF, il cateto EF rappresenta il seno di α: EF = sen α.

Per qualsiasi valore di α, *versin* è sempre positivo: nel caso di α = 0° *versin* è uguale a 0.

Fin dai tempi dei primi matematici Indiani (che introdussero questa e altre funzioni trigonometriche) e Arabi, il senoverso aveva notevole importanza: oggi l'ha persa a causa della disponibilità di calcolatrici e computer.

Nel grafico, GA è il *cosenoverso* o *coversin* dell'angolo α (un'altra funzione trigonometrica): GA = coversin α = (1 – sen α).

Infatti: GA = (OA – OG) = (1 – EF) = (1 – sen α).

Consideriamo i triangoli rettangoli OEF e OGE: essi hanno identiche proprietà geometriche. Ricordiamo una regola basilare della trigonometria, applicata al triangolo rettangolo OEF:

sen α = cos β e sen β = cos α.

Torniamo al cerchio trigonometrico: BH è lungo quanto la tangente dell'angolo α:

BH = EF/OF = sen α/cos α = tg α.

AI è invece la *cotangente* di α:

AI = OF/EF = cos α/sen α = ctg α e tg α = 1/(ctg α) .

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Consideriamo ora l'angolo AOE = β, complementare di quello α. Fissiamo alcuni dati:

* α + β = 90°;
* OF = cos α = GE;
* FE = sen α = OG;
* GE = sen β = OF;
* OG = cos β = EF.

Ne consegue: sen α = cos β e sen β = cos α.

Consideriamo l’angolo β: il suo senoverso è dato da:

$$\text{versin } \beta = (1 - \cos \beta) = (OA - OG) = GA .$$

Il suo cosenoverso vale:

$$\text{coversin } \beta = (1 - \text{sen } \beta) = (OB - GE) = (OB - OF) = FB.$$

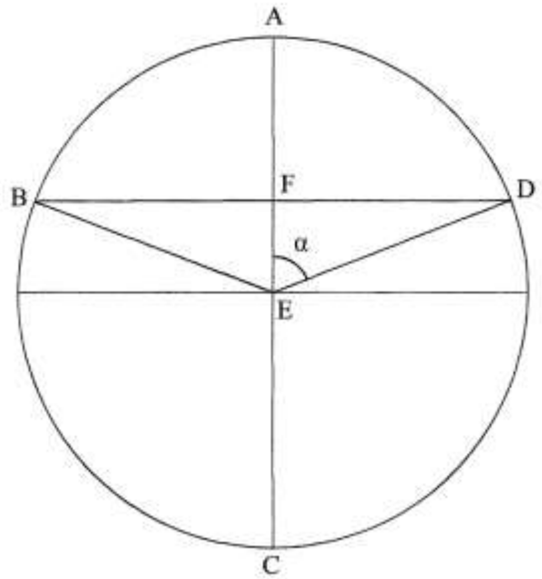
Fra le funzioni trigonometriche di α e di β valgono anche le seguenti relazioni:

$$\text{versin } \alpha = \text{coversin } \beta$$

$$\text{versin } \beta = \text{coversin } \alpha .$$

- -

Torniamo al grafico di Veglia:



AF è il *senoverso* dell’angolo AED = α.

Calcoliamo l’ampiezza dell’angolo α:

$$AF = 64 * (1 - \cos \alpha)$$

$$(1 - \cos \alpha) = 64/100$$

$$1 - \cos \alpha - 64/100 = 0$$

$\cos \alpha = 36/100$ $\quad$ $\cos \alpha = 0{,}36$, $\quad$ valore al quale corrisponde un angolo $\alpha \approx 68° \, 54'$.

La circonferenza del cerchio è lunga:

$$\text{circonferenza} = 2 * \pi * \text{raggio} \approx 2 * (22/7) * 100 = (628 + 4/7) \text{ parti.}$$

Occorre calcolare la lunghezza dell’arco AD per mezzo di una proporzione:

AD : circonferenza = α : 360

$$AD = (\text{circonferenza} * \alpha)/360 = (628 + 4/7)*(68° \, 54')/360 \approx$$

$$\approx (120 + 456/1512) = (120 + 19/63) \text{ parti.}$$

Moltiplicando l’ultimo dato per il raggio, Veglia calcola l’area del settore circolare ABED. Infatti, l’area del settore è data da:

$$\text{Area}_{ABED} = (\text{arco}_{BAD} * \text{raggio})/2 = \text{arco}_{AD} * \text{raggio} = (120 + 19/63) * 100 =$$

$$= (12030 + 10/63) \, [\text{parti}^2].$$

Sebbene Veglia non faccia alcun cenno alla questione, l’ultimo dato calcolato è una *superficie* e le superfici sono espresse in unità di misura lineari elevate al quadrato: le unità lineari moltiplicate fra loro sono *parti* (e cioè duecentesimi del diametro misurato al cocchiume) e la superficie è esprimibile in unità che possono essere chiamate *parti*^{2}.

Veglia introduce la lunghezza della semicorda FD: è (93 + 295/1000) parti; non fornisce indicazioni sul modo con il quale ha ricavato il dato, ma è ovvio che abbia applicato il teorema c.d. di Pitagora al triangolo rettangolo EFD:

$FD = \sqrt{(ED^2 – EF^2)} = \sqrt{(100^2 – 36^2)} = \sqrt{(10000 – 1296)} = \sqrt{8704} \approx (93 + 295/1000) =$
$= (93 + 59/200)$ parti.

L'area del triangolo BDE è:

$Area_{BDE} = BD * FE/2 = (BD/2) * FE = FD * FE = (93 + 59/200) * 36 =$
$= (3357 + 25/50)$ *parti*^{2} [Veglia dà un risultato diverso: (3358 + 620/1000)].

Infine, l'Autore calcola l'area del segmento circolare BADF sottraendo l'area di BDE da quella del settore circolare ABED:

$Area_{BADF} = Area_{ABED} – Area_{BDE} = (12030 + 10/63) – (3357 + 27/50) =$
$= [8673 + (10/63 – 27/50)] = (8672 + 1949/3150)$ *parti*^{2}, area del segmento circolare BADF e cioè *area dello scemo* con uno scemo AF lungo 64 punti in un cerchio di raggio 100.

Dato che la parte frazionaria, (1949/3150), è maggiore di ½, il risultato è arrotondato per eccesso a 8673 [Veglia dà 8672]. Per la precisione, 1949 è un numero primo e la frazione non è riducibile.

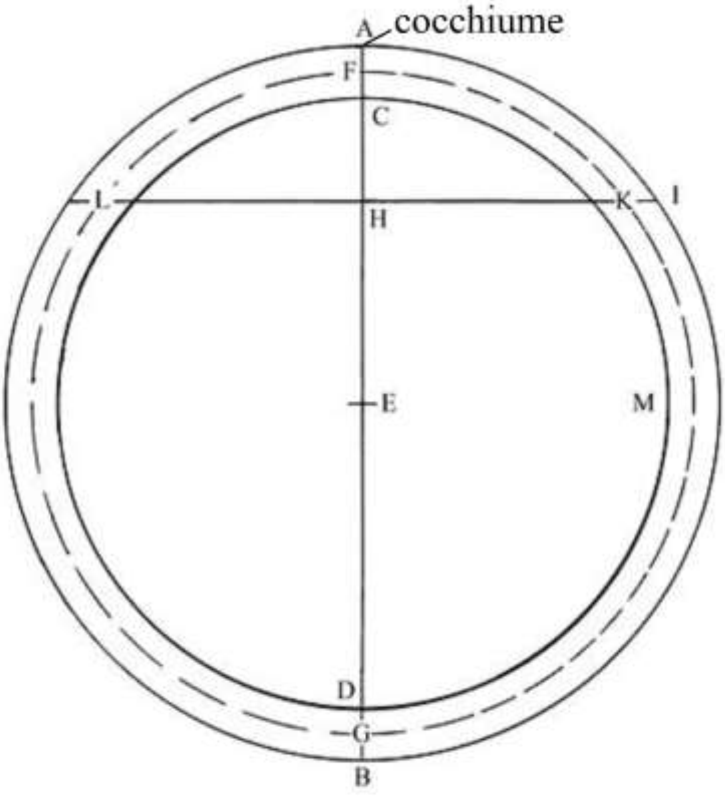
Il valore appena calcolato è presente nella tavola: nella colonna centrale in corrispondenza di 64 parti l'Autore fornisce il dato 8672 *parti*^{2}.

Tutti gli altri valori contenuti nella tavola sono costruiti con lo stesso metodo: il primo dato (compreso fra 1 e 99) è la lunghezza dello scemo in parti ragguagliate al raggio lungo 100 parti e il secondo è l'area dello scemo.

Infine, il titolo premesso da Veglia alla tavola informa che i suoi coefficienti possono essere usati anche nei casi nei quali le lunghezze siano misurate dal basso verso l'alto a partire dall'*imo* invece che dal cocchiume, dall'alto verso il basso: ciò si rivela utile quando l'altezza del vino è inferiore alla metà del diametro al cocchiume.

<u>Calcolo dei seniversi</u>

Lo schema che segue è quello della sezione di una botte:



A è il cocchiume e AB è il diametro misurato a partire da esso e lungo 112 punti. CD è il diametro dei due fondi (ritenuti di uguali dimensioni) e vale 96 punti.

FG è il *diametro proporzionale di mezzo* lungo 104 punti: è stato calcolato facendo la media aritmetica fra le lunghezze di AB e di CD.

E è il centro delle tre circonferenze.

LI è il pelo del vino e AH è lo scemo, lungo 24 punti.

La lunghezza di FH è data da:

FH = AH – AF = AH – (EA – EF) = AH – (AB/2 – FG/2) = 24 – (112/2 – 104/2) =
= 24 – 4 = 20 punti.

FH è il senoverso dell'angolo FEK: rinviamo al successivo APPRONDIMENTO.

L'Autore trasforma il valore di FH da punti a parti rapportandolo a quello di FE = 52 punti e riferendolo al valore convenzionale FE ≡ 100 parti:

FE : 100 = FH : x
52 : 100 = 20 : x
x = (100 * 20)/52 = 500/13 = (38 + 6/13) parti, lunghezza in *parti* di FH.

Il valore è arrotondato per eccesso a 39 parti, valore che nella tavola corrisponde a 4318, area del segmento circolare corrispondente allo scemo.

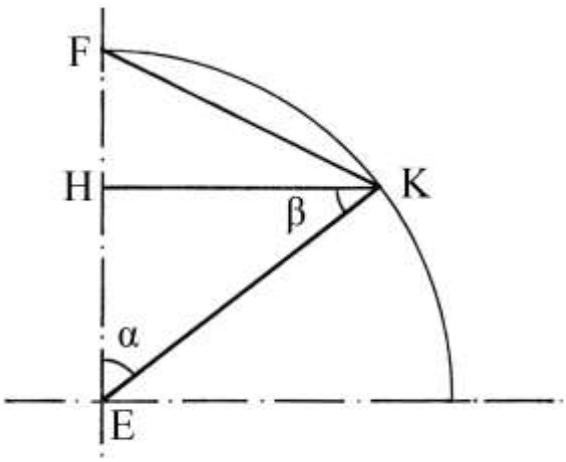
Veglia conclude il suo esempio con un corollario:

Se dalla distanza dal cocchiume al pelo del vino si sottrae la quarta parte della differenza fra i diametri (maggiore e minore, 16), il resto (4) è la stessa distanza fra il diametro maggiore (112) e quello proporzionale (108).

- APPROFONDIMENTO -

Il senoverso FH

Con l'aiuto dello schema che segue, ripreso dalla precedente figura, chiariamo la lunghezza di FH:



Le lunghezze dei segmenti in gioco sono:

* EF = FG/2 = 104/2 = 52 punti;
* FH = 20 punti;
* EK = EF = 52 punti;
* EH = EF – FH = 52 – 20 = 32 punti.

Il triangolo EHK è rettangolo in H e i suoi angoli interni complementari sono α e β.

EH ha lunghezza proporzionale al coseno di α (e al seno di β).

A sua volta, HK è il seno di α e il coseno di β.

Il valore di cos α è dato da:

cos α = EH/EK = 32/52 = 8/13 ≈ 0,615, valore al quale corrisponde un angolo α ≈ 52,02°.

Possiamo facilmente verificare che la lunghezza di FH sia proporzionale al senoverso di α:

versin α = (1 – cos α) ≈ (1 – 0,615) ≈ 0,385.

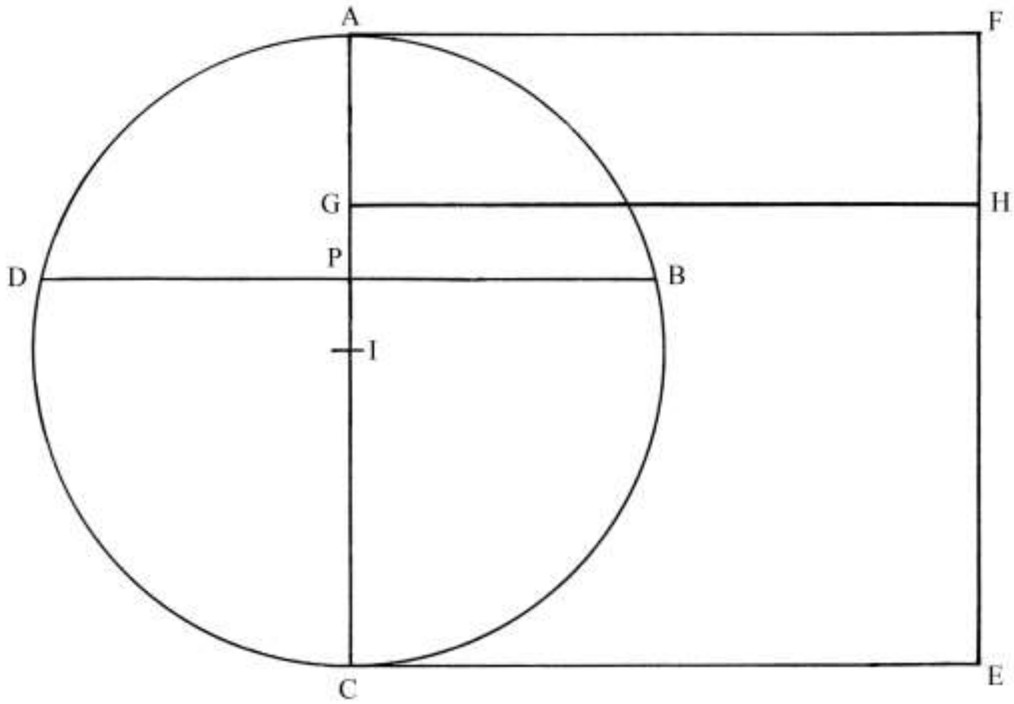
Infatti:

versin α = FH/EK = 20/52 = 5/13 ≈ 0,385.

- -

Problema inverso dato il diametro proporzionale

In una botte l'area del segmento circolare DAB è 8116 [parti^2], valore misurato rispettando la convenzione secondo la quale il raggio AI è lungo 100 parti (e il diametro AC 200) [*il grafico che segue riproduce quello di Veglia rettificandolo: è probabile che esso sia leggermente fuori scala*]:



In realtà il diametro AC è lungo 98 punti e il raggio AI è 49.

Occorre calcolare l'area effettiva [in punti^2] del segmento circolare DAB.

Si può presumere che Veglia abbia utilizzato il *punto* sottomultiplo dell'*oncia*, unità che abbiamo già incontrate.

Costruire il quadrato ACEF che ha lati lunghi quanto il diametro AC e quindi la sua area convenzionale è:

Area $_{ACEF}$ = AC^2 = 200^2 = 40 000 [parti^2].

Tracciare il rettangolo AFHG che ha la stessa area di DAB e cioè 8116 [parti^2]: la lunghezza in *parti* del segmento AG è ricavata da:

AG = 8116/AF = 8116/AC = 8116/200 = 40,58 parti, da arrotondare a 41 parti.

La stessa area espressa in *punti*^{2} vale:

Area $_{ACEF}$ = $AC^2 = 98^2 = 9604$ punti^2.

Infine, dobbiamo calcolare il valore in *punti* dell'area di DAB=AFHG con la seguente proporzione:

Area $_{ACEF}$ punti = Area $_{ACEF}$ parti = Area $_{DAB}$ punti : Area $_{DAB}$ parti

9604 : 40 000 = Area $_{DAB}$ punti : 8116 da cui

Area $_{DAB}$ punti = (9604 * 8116)/(40 000) = 1948,65 , arrotondato a 1949 [punti^2], area del segmento circolare corrispondente allo scemo AP (di cui Veglia non ha fornito la lunghezza).

IL CONTRIBUTO DI GIUSEPPE ANTONIO ALBERTI

Giuseppe Francesco Antonio Alberti, noto come Giuseppe Antonio (Bologna 1712 – Perugia 1768) è stato un agrimensore e un ingegnere.

Nella terza edizione del suo "*Trattato della misura delle fabbriche*", pubblicato a Firenze nel 1822 con note e aggiunte di Baldassarre Orsini, Alberti descrive uno strumento usato per misurare botti e altri vasi destinati a contenere liquidi.

Egli cita l'esempio di Parigi dove una comunità di misuratori di botti impiegava degli strumenti a forma di bastoni graduati: la loro costruzione e il loro uso erano gelosamente custoditi dagli appartenenti alla corporazione.

I bastoni parigini erano chiamati *veltes*: la *velte* era un'antica unità di misura francese della capacità e per estensione il termine passò a indicare anche lo strumento usato per misurare le botti.

Dato che in un territorio, una provincia, una contea o un piccolo Stato, le botti avevano praticamente le stesse dimensioni, i bastoni venivano tarati su di una di esse e erano impiegati in tutti i vasi vinari. I primi bastoni erano fatti di legno e forse muniti di un'impugnatura metallica.

Su questi strumenti venivano incise delle tacche misurate a partire da un'estremità.

Le misure definite dalle tacche rappresentavano *radici cubiche* di una progressione aritmetica. Vediamone il perché. Il volume di un solido è indicato con unità di misura che esprimono un'unità di misura di lunghezza lineare elevata al cubo: la radice cubica di un volume è rappresentata da una lunghezza lineare.

La botte standard di Alberti

Alberti propone la realizzazione di una botte con il volume di *una pinta*, la più impiegata unità di misura francese della capacità.

Sia consentito rilevare una stranezza: Alberti è vissuto nel XVIII secolo, cita soltanto lavori ed esperienze francesi e sembra non aver conosciuto le opere degli abacisti italiani, toscani e non toscani, che dall'inizio del XIV fino almeno a tutto il XVI secolo studiarono il problema della misura del contenuto delle botti: da Paolo dell'Abbaco a Leonardo da Cremona a Paolo di Matteo Petriboni a Piero della Francesca a Tommaso della Gazzaia a Bastiano da Pisa, tanto per citarne alcuni.

Le unità di misura delle lunghezze lineari usate in Francia dopo il 1668 e interessanti il settore delle botti e dei vasi vinari sono riportate nella tabella che segue:

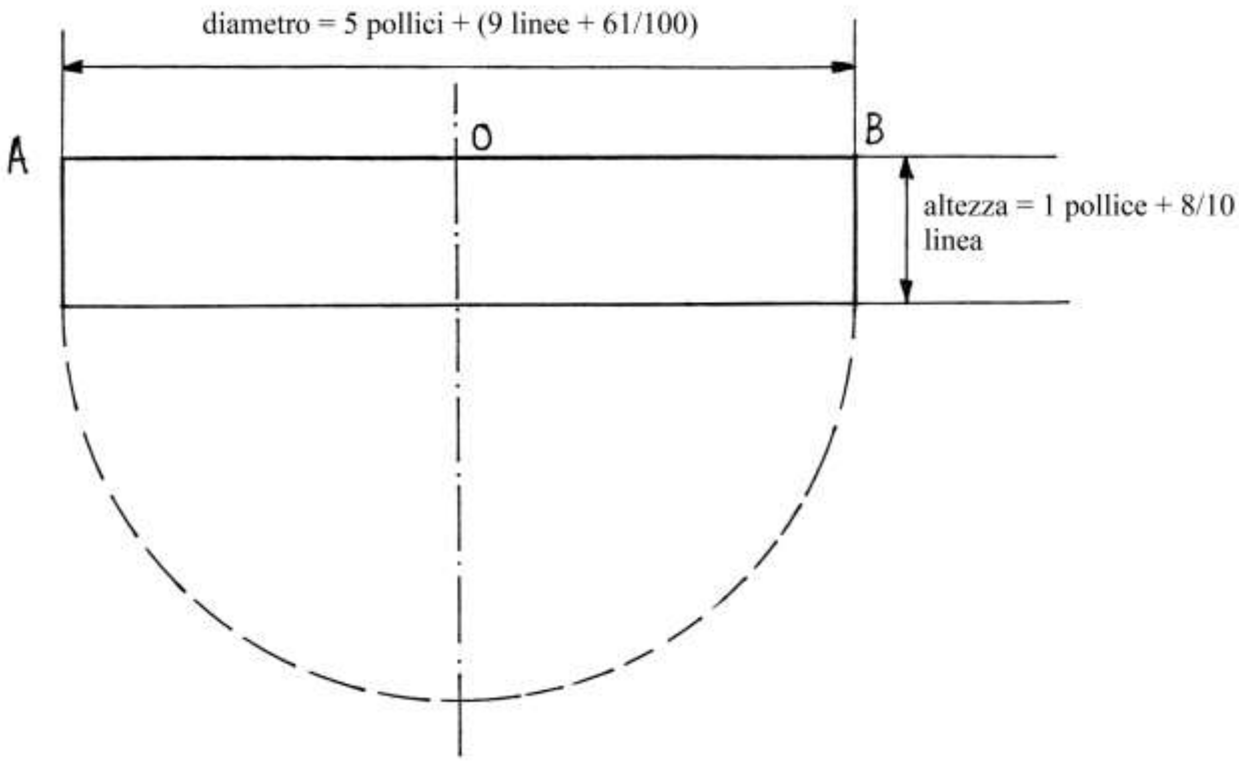
unità	equivalenze	valore in mm o in cm
punto	1/12 linea	0,188 mm
linea	12 punti	2,256 mm
pollice	12 linee	2,707 cm
piede	12 pollici	32,484 cm

È facile desumere dalla lettura della tabella che quelle unità di misura erano basate sul *sistema numerico duodecimale*.

Da quelle unità derivavano alcune unità di misura di volume e di capacità:

unità	equivalenze	valore in dm^3 o in cm^3
pollice cubico	1/48 pinta	1,9836 cm^3
pinta	48 $pollici^3$	0,952146 dm^3
velte (o setier)	8 pinte	7,617168 dm^3

Alberti propose un modello di botte con volume uguale a *una pinta*:



(Per ragioni di spazio, nella figura è disegnato solo un semicerchio).

Procediamo a convertire in millimetri le dimensioni della botte con il volume uguale a *una pinta*:

*	diametro = 5 pollici + (9 + 61/100) linee ≈ 5 * 2,707 cm + 961/100 * 2,256 mm ≈
	≈ 5 * 27,07 mm + 961/100 * 2,256 mm ≈ 157 mm ;

*	altezza = 1 pollice + 8/10 linea ≈ 27,07 mm + 8/10 * 2,256 mm ≈ 28,87 mm .

IL PASSETTO DI BALDASSARRE ORSINI

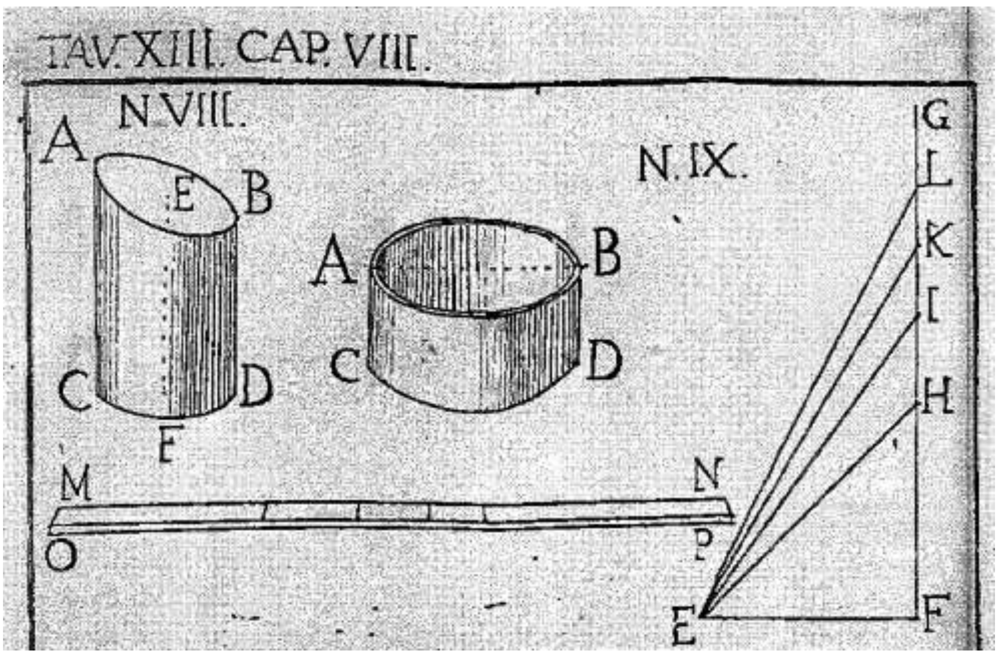
Il perugino Baldassarre Orsini (1732-1810) è stato un architetto, un ingegnere e uno storico dell'arte.

Fra le sue opere stampate vi è un trattato dedicato alla "*Geometria e Prospettiva pratica*", pubblicato in due tomi a Perugia nel 1771 e nel 1772. Le pagine 63-67 del secondo tomo, dedicato alla geometria solida, sono riservate alla misura del volume (la *solidità*) di cilindri e vasi vinari: un buon numero di schemi accompagna le spiegazioni.

La misura era fatta con uno strumento chiamato *passetto* (come l'unità di misura della lunghezza usata a Perugia: rivedere la tabella pubblicata a p. 135), fabbricato in legno di bosso o di noce.

Lo strumento era lungo 10 *palmi*: un palmo era l'equivalente di 0,251062 m e l'intero passetto era 2,51062 m. La sua notevole lunghezza ne imponeva l'articolazione in tre parti uguali, collegate da cerniere di ottone.

Sulle due facce maggiori e parallele del passetto erano incise delle tacche: esse sono contrassegnate con le coppie di lettere MN e OP nella figura che segue:



Vediamo l'origine delle gradazioni incise.

In alto a sinistra, ABCD è un vaso cilindrico: la base superiore AB non è parallela a quella inferiore CD. Il volume di questo cilindro è:

$$\text{Volume}_{\text{CABD}} = \text{Area}_{\text{BASE CD}} * \text{EF}.$$

Alla sua destra è disegnato un secondo vaso, CABD, con le due basi AB e CD perfettamente parallele: esso deve contenere una misura definita di vino, grande o piccola che sia, come il *barile* o il *boccale*

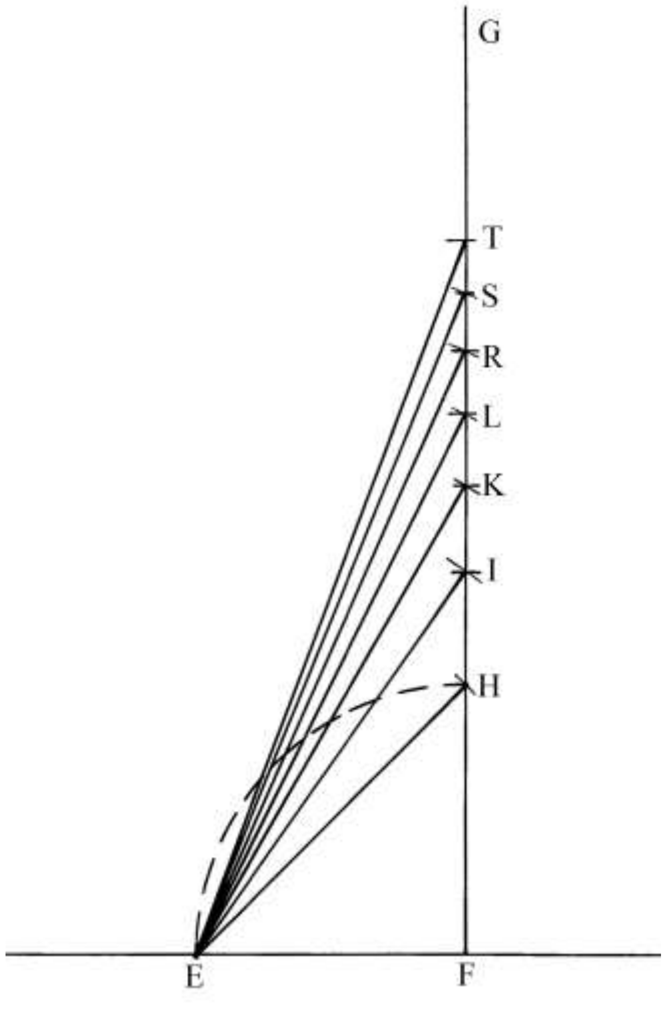
Ricordiamo che a Perugia (rivedere la tabella a p. 136), le due unità valevano:

* 1 barile da vino = 21 boccali = 47,67 litri;
* 1 boccale = 2,27 litri.

L'altezza EF è usata per costruire il vaso cilindrico a destra: il diametro AB = CD è lungo l'altezza EF misurata a sinistra.

Ricostruiamo l'origine del grafico contenuto a destra nella stessa figura.

Tracciare una retta orizzontale e riportarvi la lunghezza EF = AB (diametro della faccia superiore del secondo cilindro) e dal punto F elevare la perpendicolare FG, lunga a piacere:



Nota: il segmento EF non rappresenta l'altezza EF del primo vaso della prima figura.

Fare centro in F e con raggio FE = *h* disegnare un arco da E fino a stabilire il punto H: il segmento EH è l'ipotenusa del triangolo rettangolo isoscele EHF ed è lunga:

EH = $\sqrt{2}$ * h (è la diagonale di un quadrato di lato EF).

Con il compasso misurare la lunghezza di EH e riportarla facendo centro in F per fissare il punto I. EIF è un triangolo rettangolo scaleno i cui cateti sono lunghi:

* EF = h;
* FI = EH = $\sqrt{2} * h$.

L'ipotenusa EI vale:

$EI^2 = EF^2 + FI^2 = h^2 + (\sqrt{2} * h)^2 = h^2 + 2*h^2 = 3*h^2$, da cui

$EI = \sqrt{3} * h$.

A partire da F riportare la lunghezza di EI in FK. Anche EKF è un triangolo rettangolo i cui cateti hanno lunghezze:

* EF = h:
* FK = EI = $\sqrt{3} * h$.

L'ipotenusa EK è:

$EK^2 = EF^2 + FK^2 = EF^2 + EI^2 = h^2 + (\sqrt{3} * h)^2 = h^2 + 3*h^2 = 4*h^2$, da cui

$EK = \sqrt{4} * h = 2*h = FL$.

Continuando la costruzione con lo stesso metodo fin qui impiegato si ha:

EL = FR = $\sqrt{5} * h$;

ER = FS = $\sqrt{6} * h$;

ES = FT = $\sqrt{7} * h$.

La scala progettata da Orsini non è lineare ma è funzione delle radici quadrate di numeri interi.

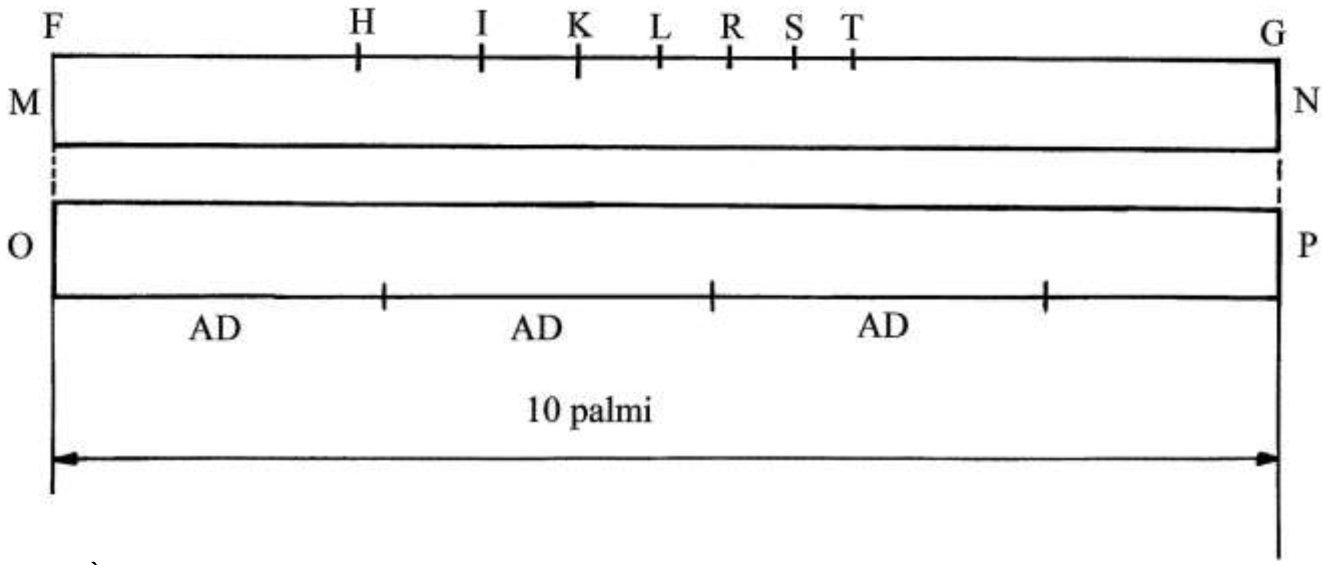
La lunghezza dei singoli intervalli fra i diversi punti collocati su FG decresce come è evidente dalla comparazione che segue, basata sulle radici quadrate dei numeri interi, approssimate alle prime due cifre decimali:

* $\sqrt{2} = 1{,}41$;
* $\sqrt{3} = 1{,}73$;
* $\sqrt{4} = 2$;
* $\sqrt{5} = 2{,}24$;
* $\sqrt{6} = 2{,}45$;
* $\sqrt{7} = 2{,}65$.

Risultano i seguenti dati:

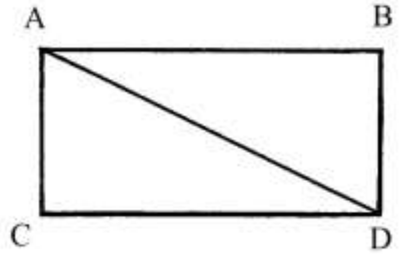
* $(FI – FH) = h * (\sqrt{2} – 1) = h * 0{,}41$;
* $(FK – FI) = h * (\sqrt{3} – \sqrt{2}) = h * 0{,}32$;
* $(FL – FK) = h * (\sqrt{4} – \sqrt{3}) = h * 0{,}27$;
* $(FR – FL) = h * (\sqrt{5} – \sqrt{4}) = h * 0{,}24$;
* $(FS – FR) = h * (\sqrt{6} – \sqrt{5}) = h * 0{,}21$;
* $(FT – FS) = h * (\sqrt{7} – \sqrt{6}) = h * 0{,}20$.

Sul lato MN del passetto sono trasferite le lunghezze dei segmenti appena determinati con l'aiuto della costruzione su EFG:

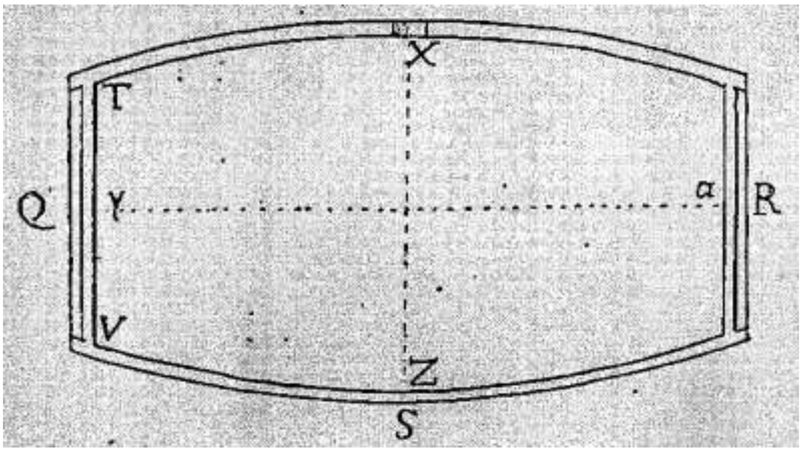


È bene ricordare che FH è lungo quanto EF e quanto lo è il diametro AB

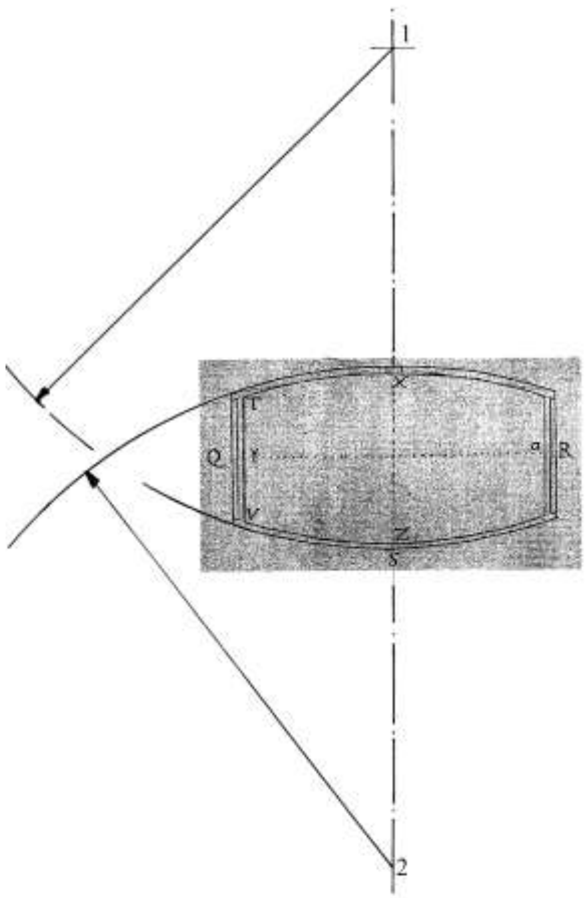
Sulla faccia indicata con OP viene riportata la *profondità* AD del vaso o botte tante volte quante essa vi entra. AD non è l'*altezza* della botte ma una diagonale del rettangolo ABDC:



Orsini spiega l'impiego del passetto con l'esempio della botte QRS:



La botte ha fondi di uguali dimensioni e sono ritenuti perfettamente circolari: il suo profilo è delimitato da due archi di circonferenza e dai due fondi:



Il passetto viene così utilizzato: con la faccia MN sono misurati i diametri TV e XZ ed è calcolata la loro media aritmetica.

Con la scala incisa sulla faccia OP è poi misurata la lunghezza di *ya*.

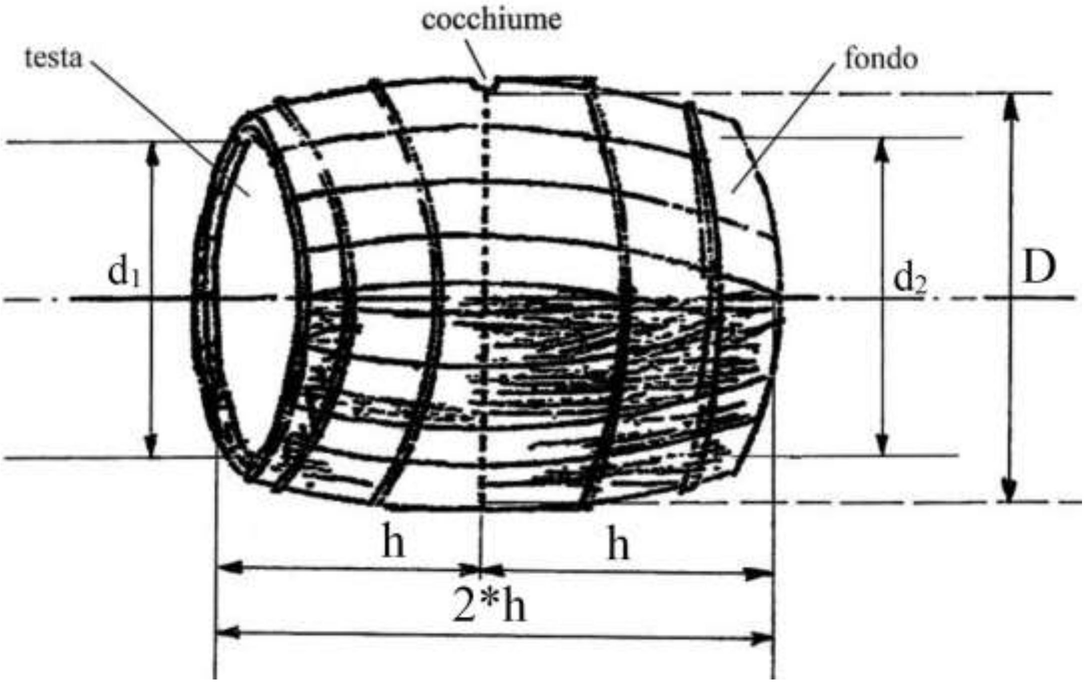
Il prodotto del diametro medio per la lunghezza di *ya* fornisce la capacità della botte espressa nell'unità di misura scelta per definire il recipiente CABD: barili o boccali.

Lo strumento dell'Orsini si rivela poco utile perché non serve a misurare gli scemi: è impiegabile per determinare il volume totale della botte.

LE FORMULE DI MALAVASI

Il calcolo del volume di una botte è stato spesso basato sulla assimilazione a un cilindro cavo avente la stessa altezza e uguale capacità.

Nella figura che segue sono evidenziate alcune lunghezze tipiche di ina botte con un profilo leggermente curvo:



Nella figura sono indicate le seguenti grandezze:

* d_1 è il diametro *interno* della testa;
* d_2 è il diametro *interno* del fondo:
* D è il diametro *interno* al cocchiume;
* h è la distanza misurata all'*interno* sull'asse di simmetria fra la proiezione del cocchiume e la testa o il fondo;
* 2*h è la lunghezza *interna* totale della botte, che è simmetrica rispetto al piano passante per il cocchiume (tratteggiato in figura).

Prima di procedere occorre calcolare il *diametro medio* fra i diametri detesta e del fondo:

$$d_m = (d_1 + d_2)/2.$$

In questo caso: $d_m = d_1 = d_2$.

Nel suo volume "La metrologia italiana", citato in bibliografia, Luigi Malavasi descrive due metodi per calcolare il volume della botte: uno da lui definito *rigoroso* e l'altro *empirico*.

Il primo metodo, quello rigoroso, calcola il volume con la seguente formula:

$$V_{botte} = \pi/4 * 2*h * [2*D^2 + (d_m)^2] .$$

Modifichiamo la formula:

$$V_{botte} = 2*h * [\pi/4 * (2*D^2 + (d_m)^2)] .$$

L'espressione racchiusa qui sopra fra parentesi quadre […] calcola l'area del cerchio del cilindro equivalente alla botte.

L'area di un cerchio di raggio *r* e diametro *d = 2*r* è data da:

$$Area_{CERCHIO} = \pi * r^2 = \pi * (d/2)^2 = \pi/4 * d^2 .$$

Ecco spiegata l'origine della costante π/4 .

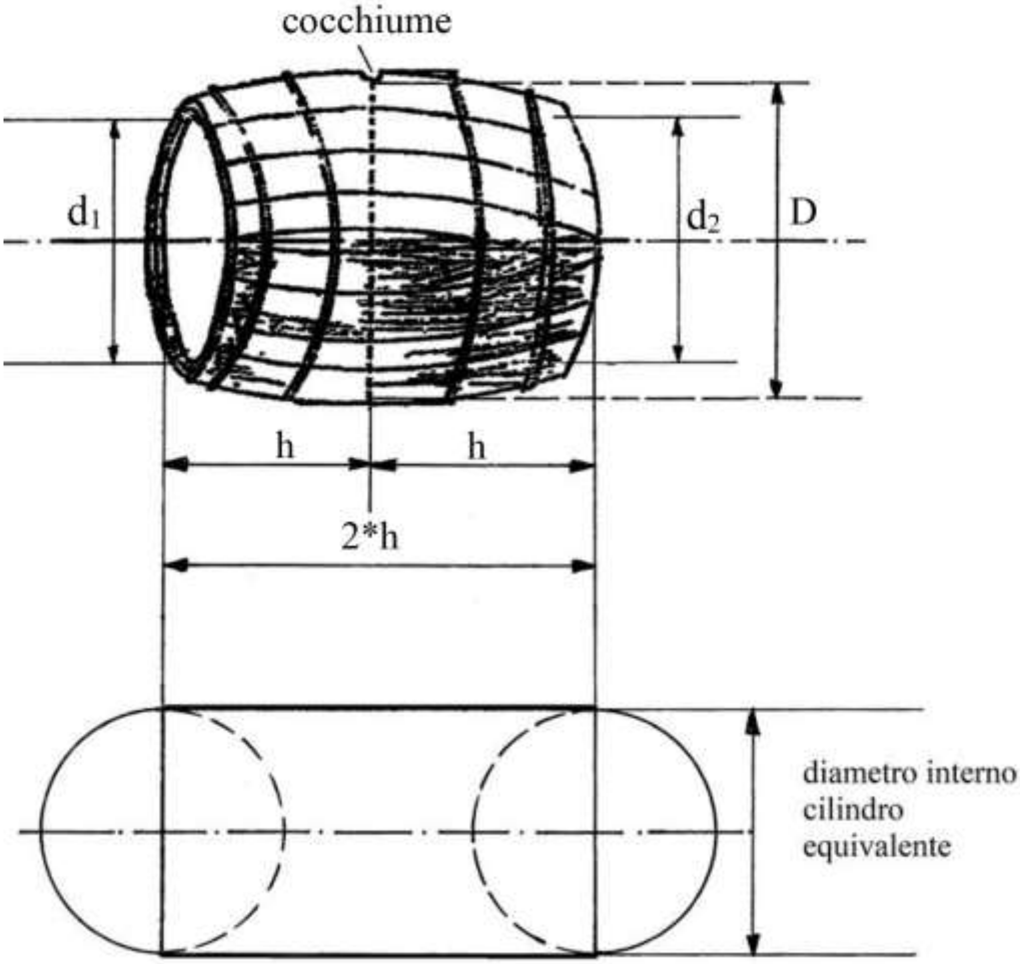
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Il metodo *empirico* proposto da Malavasi, nei primi anni dell'Ottocento, era usato nel Lombardo-Veneto e nel Ducato Estense (Modena e Reggio Emilia).

Esso contiene i seguenti passi:

* calcolare il diametro medio fra quelli della testa e del fondo: $d_m = (d_1 + d_2)/2$;
* raddoppiare la lunghezza di D: $2 * D$;
* sommare i due dati precedenti: $d_m + 2*D$;
* dividere per 3: $(d_m + 2*D)/3$;
* moltiplicare l'ultimo quoziente per il diametro medio d_m:
  $d_m * (d_m + 2*D)/3$: questa formula fornisce la superficie laterale *interna* del cilindro cavo equivalente;
* moltiplicare per l'altezza 2*h: $[d_m * (d_m + 2*D)/3] * 2*h = V_{botte}$.

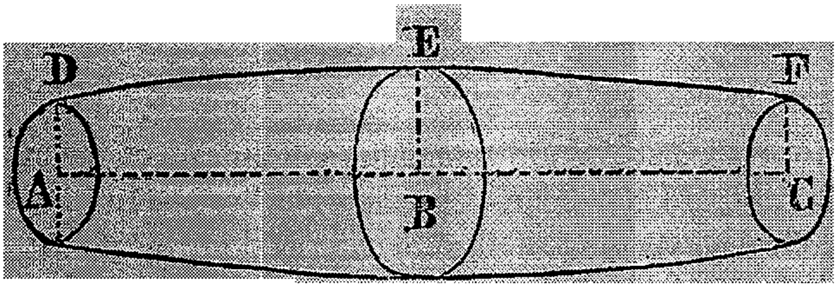
La figura che segue mette a confronto la botte e il cilindro ad essa equivalente:



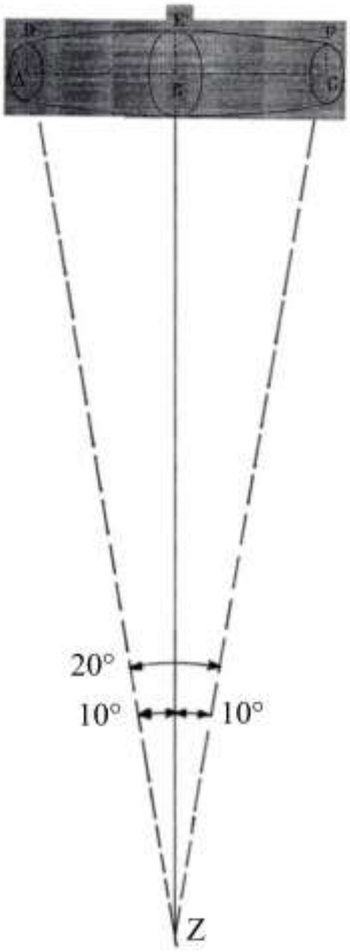
I risultati offerti dai due metodi differiscono di poco.

LA FORMULA DI SELLETTI

Nel “Nuovo trattato teorico-pratico di viticoltura e vinificazione”, Pietro Selletti propose una formula per calcolare il volume interno di una botte a sezione *circolare*:



Il profilo esterno della botte è probabilmente delimitato da due archi di circonferenza con raggio ZD = ZE = ZF che sottendono angoli di 20°:



La formula di Selletti è:

$$V_{(olume)} = 1{,}047 * h * (R^2 + r^2 + R*r) .$$

Nella formula sono presenti i seguenti dati:

* *V* è il volume ;
* *1,047* è una costante fissata in modo empirico ;
* *h* è la lunghezza *interna* della botte e nelle figure è AC ;
* *R* è il raggio interno della botte in corrispondenza dell’entasi e del cocchiume: è il segmento EB ;
* *r* è il raggio interno dei cerchi del fondo e della testa, che hanno uguali dimensioni.

L’Autore propone un esempio numerico con i seguenti dati:

* $h = 0,9$ m ;
* $R = 0,25$ m ;
* $r = 0,22$ m .

Applicando la formula al caso concreto si ha:

$$V_{(olume)} = 1,047 * 0,9 * (0,25^2 + 0,22^2 + 0,25 * 0,22) \approx 0,156327 \text{ m}^3 \approx 156 \text{ litri.}$$

LE PROPOSTE DI NICCOLI

Vittorio Niccoli (1859-1917), è stato un ingegnere, un agronomo e un importante agricoltore toscano.

Nel suo "*Prontuario dell'Agricoltore*" (citato in bibliografia) sono fornite alcune formule approssimate per il calcolo della capacità delle botti a sezione circolare a forma di *tronco di cono*:

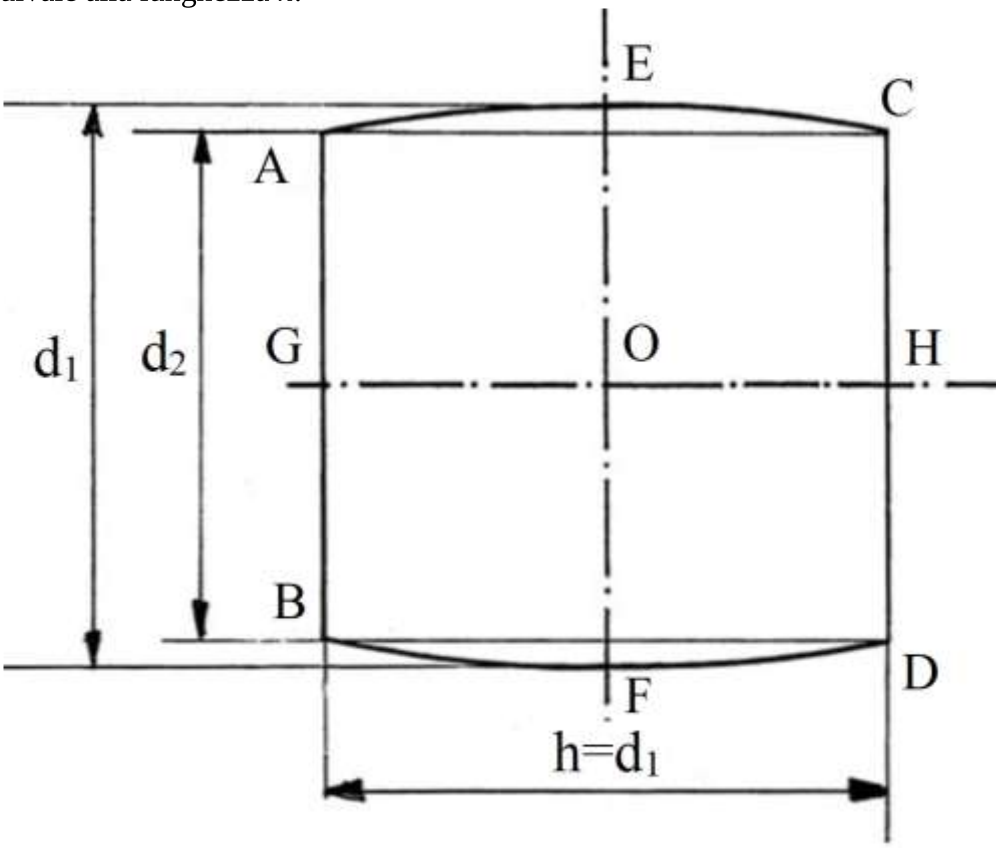
* per un tino con forte differenza fra le due basi che hanno diametri d_1 (maggiore) e d_2 (minore) e altezza *h* il volume è:

  $V \approx \pi * h * [(d_1/2)^2 + (d_2/2)^2]/2$;

* per un tino quasi cilindrico, il volume è dato da:

  $V \approx \pi * h * [(d_1/2 + d_2/2)/2]^2$.

Niccoli chiama *botti normali* i vasi a sezione circolare nei quali il diametro maggiore d_1, al cocchiume, equivale alla lunghezza *h*:

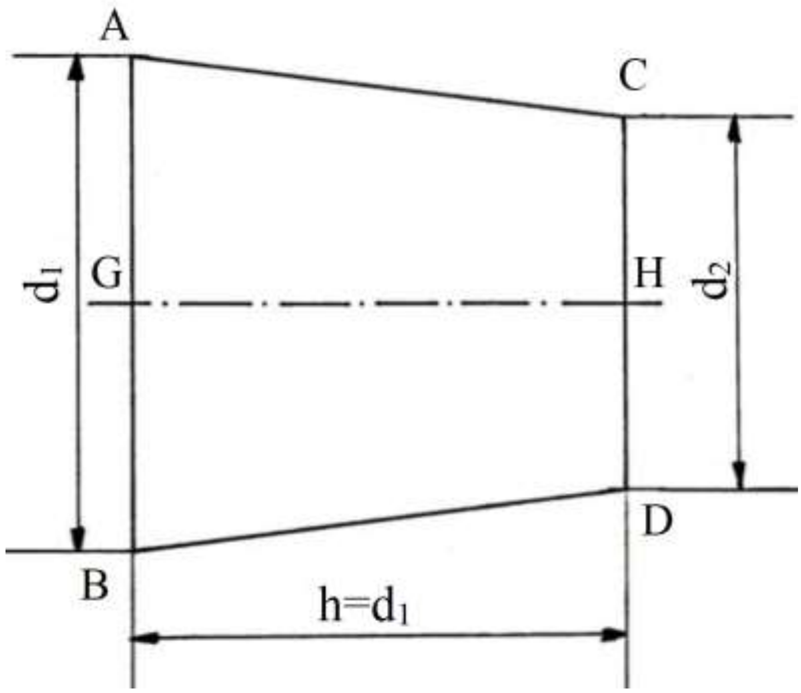


Il volume di una botte a base circolare, come quella della figura, è calcolata da Niccoli con la seguente formula:

$V \approx 0{,}087 * h * (d_2 - 2*d_1)^2$ [la formula è scritta proprio in questo modo: il risultato dell'espressione fra parentesi tonde – "$(d_2 - 2*d_1)$" – è certamente *negativo*, ma il suo quadrato è positivo; la formula andrebbe scritta in altro modo:

$V \approx 0{,}087 * h * (2*d_1 - d_2)^2$.]

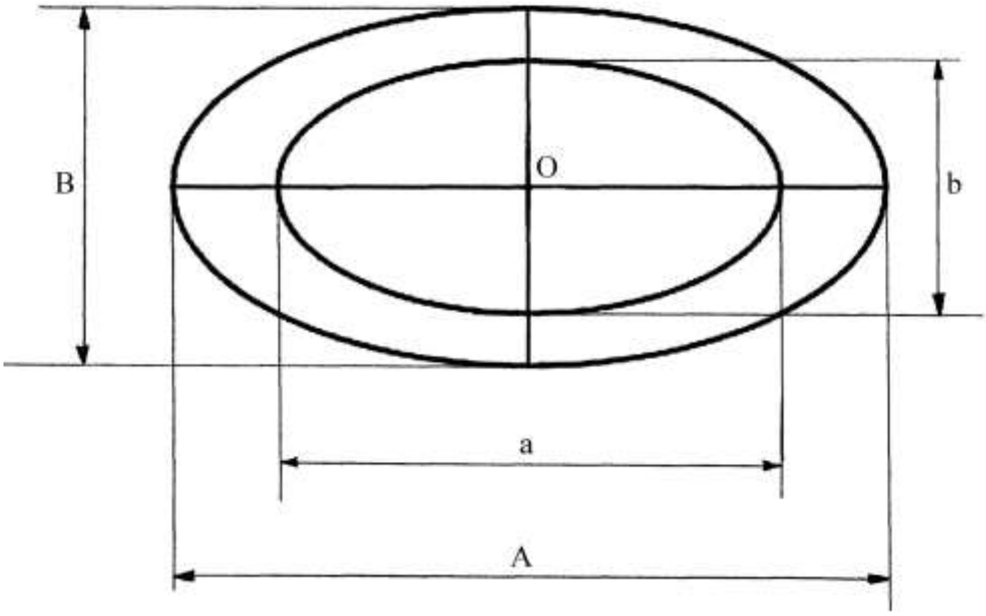
Lo schema che segue mostra un tino, una *botte normale*, a forma tronco-conica e con l'altezza *h* uguale alla lunghezza del diametro maggiore d_1:



Egli fornisce una tabella con i volumi approssimati per vasi aventi $h = d_1$:

Diametro della base inferiore ed altezza utile del tino	Volume approssimativo in litri	
	per tini conici	per tini quasi cilindrici
m. 1,00	630- 660	680- 720
„ 1,25	1200-1300	1400-1500
„ 1,50	2100-2200	2300-2400
„ 1,75	3000-3200	3400-3600
„ 2,00	5000-5300	5400-5700
„ 2,25	7900-8100	
„ 2,50	10.000	10.500
„ 3,00	17.000	18.000
„ 3,50	28.000	30.000

Infine, Niccoli suggerisce una formula per calcolare il volume di una botte a *sezione ellittica*. *A* e *B* sono gli assi della sezione massima e *a* e *b* sono i due assi delle sezioni minime o dei fondi e *h* la lunghezza:



$V \approx 0{,}26 * h * (2*A*B + a*b)$.

Questa formula deriva da quella di William Oughtred per le botti cilindriche:

$V \approx 0{,}262 * [2 * (d_1)^2 + (d_2)^2]$ sostituendo a $(d_1)^2$ e $(d_2)^2$ rispettivamente i prodotti delle coppie di assi delle ellissi e approssimando a 0,26 la costante 0,262. La formula di Oughtred è citata nel successivo paragrafo.

Tutte queste formule ricordano quella che calcola l'area di un'ellisse della quale sono note le lunghezze dei due assi: *a* (maggiore) e *b* (minore):

$\text{Area}_{\text{ELLISSE}} = \pi * a * b$.

<u>ITALO GHERSI</u>

Italo Ghersi (1862-1925) è stato un ingegnere italiano e un prolifico autore di manuali tecnici pubblicati dall'Editore Ulrico Hoepli di Milano.

I suoi testi hanno dato un grande contributo alla crescita della cultura tecnologica e scientifica degli Italiani fra la fine dell'Ottocento e i primi decenni del Novecento. Scritti con linguaggio preciso, chiaro e comprensibile da tutti e corredati da moltissimi dettagliati schemi, ancora a distanza di un secolo offrono preziose informazioni e modelli di notevole valore culturale.

Il manuale dedicato ai "Conti e Calcoli fatti" contiene un'ampia varietà di dati e formule relative alla fisica, alla matematica applicata, alla chimica, alla metrologia e alle tecnologie. I dati sono organizzati in 93 Tabelle.

Fra gli argomenti trattati vi è la *misurazione delle botti*, argomento che è presentato alle pagine 8 – 11 del manuale, pagine qui di seguito riprodotte.

MISURAZIONE DELLE BOTTI

Per botti colme di forma e proporzioni usuali si può usare la formola:

$$V = 0,7 \times D \times D \times l$$

nella quale D è il diametro della botte al cocchiume (diametro interno naturalmente) ed l è la lunghezza tra i due fondi al loro centro.

Esempio. — Trovare la capacità d'una botte il cui diametro D é di m. 1,30 e la lunghezza l m. 1,70

Risposta. — Applicando la formola avrò:

$$0,7 \times 1,3 \times 1,3 \times 1,7 = \text{litri } 201,11$$

Botti sceme. — Nel caso delle botti sceme si fa uso delle tavole a pag. 9, 10, 11 nel modo sotto indicato.

Esempio. — Trovare la quantità di liquido contenuto in una botte nella quale il diametro massimo è m. 0,84, l'altezza del liquido dal fondo, misurata al cocchiume, è di m. 0,69 e la lunghezza m. 0,95.

Risposta. — Divido 0,69 per 0,84 ed ottengo: $0,69 : 0,84 = 0,821$.

Nella tavola a pag. 10 al 0,82 (cm. 82) corrisponde 622,76; per tener calcolo della terza cifra decimale aggiungo $\frac{1}{10}$ di 6,78 che è la differenza fra due numeri consecutivi della tabella (vedi 3ª colon.) Avrò in tal modo:

$$622.76 + \frac{6.78}{10} = \text{litri } 623,44$$

Nella tabella a pag. 11 trovo che il quadrato di 0,84 (diametro) è 0,7056 cioè, in cifra tonda, 0,71. Moltiplico litri 623 per questo numero e poi per la lunghezza della botte (0,95) ed ho: $623 \times 0,71 \times 0,95 = \text{litri } 420$ che è la quantità del liquido che si voleva trovare.

Tavola per la determinazione dei volumi delle botti circolari e dei loro segmenti di qualsiasi altezza.

Altezza dei segmenti dal fondo	Volumi	Differenze o volume di ciasc. strato	Altezza dei segmenti dal fondo	Volumi	Differenze o volume di ciasc. strato
cm.	dmc. o litri	dmc.	cm.	dmc. o litri	dmc.
		0.12			7.90
1	0,12	0.30	25	123,68	8.02
2	0,42	0.58	26	131,70	8.14
3	1,00	1.08	27	139,84	8.26
4	2,08	2.10	28	148.10	8.36
5	4,18	2.82	29	156,46	8.46
6	7,—	3.40	30	164.92	8.56
7	10.40	3.90	31	173,48	8.64
8	14.30	4.40	32	182,12	8.72
9	18,70	4.76	33	190,84	8.80
10	23,46	5.10	34	199,64	8.88
11	28,56	5.40	35	208,52	8.94
12	33,96	5.66	36	217,46	9.—
13	39,62	5.92	37	226.46	9.06
14	45,54	6.16	38	235,52	9.12
15	51,70	6.38	39	244.64	9.16
16	58,08	6.60	40	253,80	9.20
17	64.68	6.78	41	263,—	9.24
18	71.46	6.98	42	272.24	9.28
19	78,44	7.16	43	281,52	9.32
20	85,60	7.32	44	290.84	9.34
21	92,92	7.48	45	300,18	9.36
22	100.40	7,62	46	309·54	9.38
23	108.02	7.76	47	318,92	9.39
24	115.78	7.90	48	328,31	9.40

(Continuazione della tabella precedente)

Altezza dei segmenti dal fondo	Volumi	Differenze o volume di ciasc. strato	Altezza dei segmenti dal fondo	Volumi	Differenze o volume di ciasc. strato
cm.	dmc. o litri	dmc.	cm.	dmc. o litri	dmc.
		9.40			8.02
49	337,71	9.40	75	570,54	7.90
50	347,11	9.40	76	578,44	7.76
51	356,51	9.40	77	586.20	7.62
52	365,91	9.39	78	593,82	7.48
53	375,30	9.38	79	601,30	7.32
54	384.68	9.36	80	608,62	7.16
55	394,04	9.34	81	615.78	6.98
56	403,38	9.32	82	622.76	6.78
57	412,70	9.28	83	629,54	6.60
58	421.98	9.24	84	636,14	6.38
59	431,22	9.20	85	642,52	6.16
60	440,42	9.16	86	648,68	5.92
61	449.58	9.12	87	654,60	5.66
62	458.70	9.06	88	660,26	5.40
63	467,76	9.—	89	665,66	5.10
64	476.76	8.94	90	670,76	4.76
65	485,70	8.88	91	675,52	4.40
66	494,58	8.80	92	679,92	3.90
67	503,38	8.72	93	683,82	3.40
68	512,10	8.64	94	687,22	2.82
69	520,74	8 56	95	690,04	2.10
70	529,30	8.46	96	692,14	1.08
71	537,76	8.36	97	693,22	0.58
72	546.12	8.26	98	693,80	0.30
73	554.38	8.14	99	694,10	0.12
74	562,52	8.02	100	694,22	

Misurazione delle botti. — Tavola dei Quadrati.

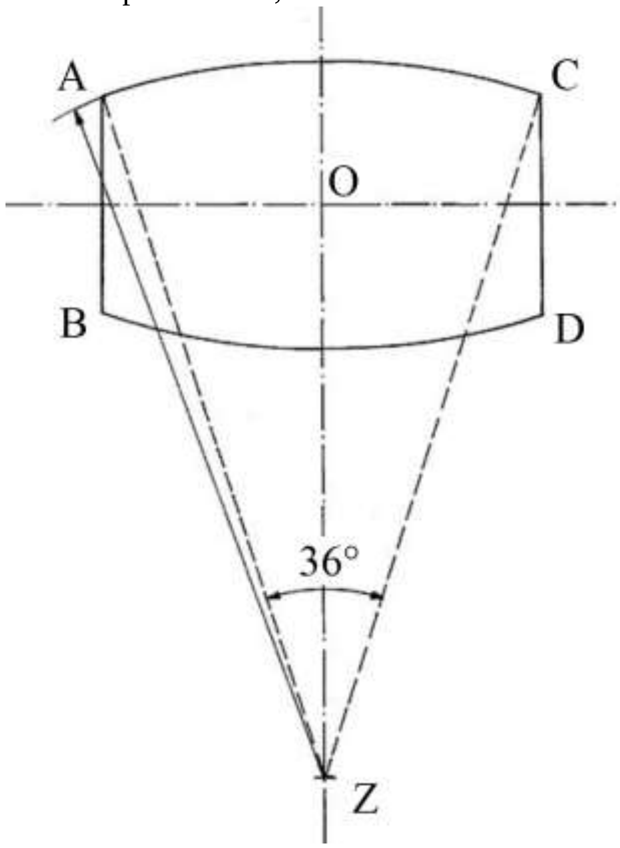
Diametro D	Quadrato D²	Diametro D	Quadrato D²	Diametro D	Quadrato D²	Diametro D	Quadrato D²	Diametro D	Quadrato D²
metri	mq.	metri	mq.	metri	mq.	metri	mq.	metri	mq.
0.26	0.0676	0.51	0.2601	0.76	0.5776	1.01	1.0201	1.26	1.5876
0.27	0.0729	0 52	0.2704	0.77	0.5929	1.02	1.0404	1.27	1.6129
0.28	0.0784	0.53	0.2809	0.78	0.6084	1.03	1.0609	1.28	1.6384
0.29	0.0841	0.54	0.2916	0.79	0.6241	1.04	1.0816	1.29	1.6641
0.30	0.0900	0.55	0.3025	0.80	0.6400	1.05	1.1025	1.30	1.6900
0.31	0.0961	0.56	0.3136	0.81	0.6561	1.06	1.1236	1.31	1.7161
0.32	0.1024	0.57	0.3249	0 82	0.6724	1.07	1.1446	1.32	1.7424
0.33	0.1089	0.58	0.3364	0.83	0.6889	1.08	1.1664	1.33	1.7689
0.34	0.1156	0.59	0.3481	0.84	0.7056	1.09	1.1881	1.34	1.7956
0.35	0.1225	0.60	0.3600	0.85	0,7225	1.10	1.2100	1.35	1.8225
0.36	0.1296	0.61	0.3721	0.86	0.7396	1.11	1.2321	1.36	1.8496
0.37	0.1396	0.62	0.3844	0.87	0,7569	1.12	1.2544	1.37	1.8769
0.38	0.1444	0.63	0.3969	0.88	0.7744	1.13	1.2769	1.38	1.9044
0.39	0.1521	0.64	0.4096	0.89	0.7921	1.14	1.2996	1.39	1.9321
0.40	0.1600	0.65	0.4225	0.90	0.8100	1.15	1.3225	1.40	1.9600
0.41	0.1681	0.66	0.4356	0.91	0.8281	1.16	1.3456	1.41	1.9881
0.42	0.1764	0.67	0.4489	0.92	0.8464	1.17	1.3689	1.42	2.0164
0.43	0.1849	0.68	0.4624	0.93	0.8649	1.18	1.3924	1.43	2.0449
0.44	0.1936	0.69	0.4761	0.94	0.8836	1.19	1.4161	1.44	2.0736
0.45	0.2025	0.70	0.4900	0.95	0.9025	1.20	1.4400	1.45	2.1025
0.46	0.2116	0.71	0.5041	0.96	0.9216	1.21	1.4641	1.46	2.1316
0.47	0.2209	0.72	0.5184	0.97	0.9409	1.22	1.4884	1.47	2.1609
0.48	0.2304	0.73	0.5329	0.98	0.9604	1.23	1.5129	1.48	2.1904
0.49	0.2401	0.74	0.5476	0.99	0.9801	1.24	1.5376	1.49	2.2201
0.50	0.2500	0,75	0.5625	1.00	1.0000	1.25	1.5625	1.50	2.2500

LE PROPOSTE DEL GIOVANNETTI

Nel suo opuscolo citato in bibliografia, il geometra (o agrimensore) Bruno Giovannetti ha raccolto una serie di formule usate per calcolare la capacità di una generica botte circolare con fondi di uguali dimensioni e con la sezione mediana – quella al cocchiume – più grande.

Egli ha anche considerato tini a forma di tronco di cono e botti a basi ellittiche.

Partiamo da una botte tipo circolare, ricostruita nello schema che segue:



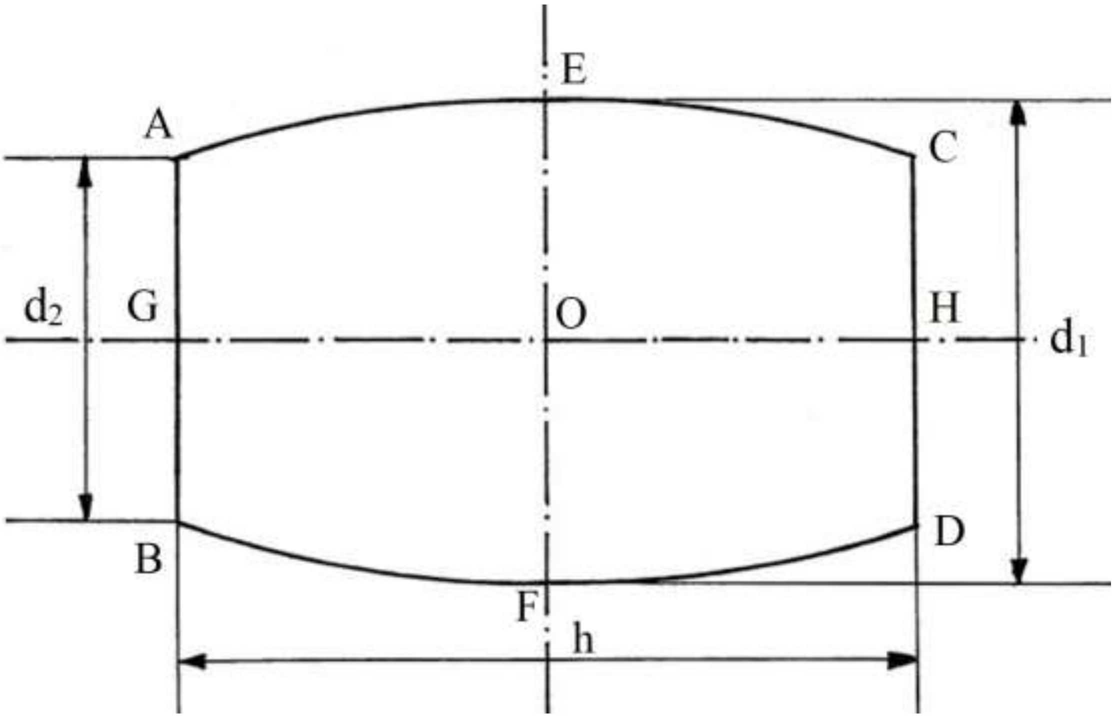
Il profilo della botte è delimitato da due archi di circonferenza (AC e BD) e dai due fondi, testa e fondo.

ZA è il raggio con il quale sono disegnati i due archi: per ragioni di spazio è presentato solo il centro Z dell'arco AC ed è omesso il centro dell'arco BD.

I due archi sottendono angoli al centro di ampiezza uguale a 36°.

Le dimensioni interne proposte da Giovannetti sono le seguenti:

* il diametro corrispondente al cocchiume è: $EF = d_1 = 1{,}3$ m ;
* il diametro del *fondo* e della *testa* è: $AB = CD = d_2 = 1$ m ;
* la lunghezza (o altezza della botte) è: $GH = h = 2$ m .



Giovannetti utilizza la formula che segue:

$$V_{(\text{olume BOTTE})} = 2 * \{1/3 * \pi * h * [(d_1/2)^2 + (d_2/2)^2 + (d_1/2)*(d_2/2)]\}.$$

Con i dati da lui scelti, presenta il risultato:

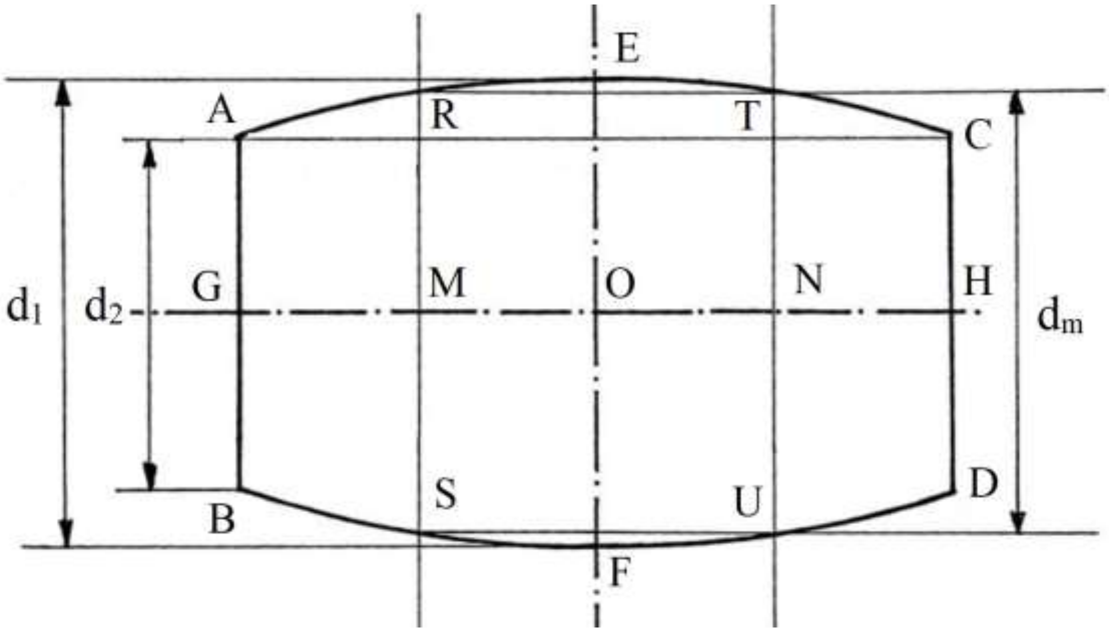
$$V = 2{,}052\ m^3\ .$$

Usando la sua formula, il risultato è assai differente. Infatti si ha:

$$V \approx 2 * \{3{,}14 * 1/3 * [(1{,}3/2)^2 + (1/2)^2 + 1{,}3/2 * ½)]\} \approx$$
$$\approx 4/3 * 3{,}14 * (0{,}4225 + 0{,}25 + 0{,}325) \approx$$
$$\approx 4/3 * 3{,}14 * 0{,}9975 \approx 4{,}1762\ m^3\ .$$

Forse, Giovannetti ha applicato un'altra formula (non indicata) per il calcolo del volume del tronco di cono. La sua descrizione è incomprensibile.

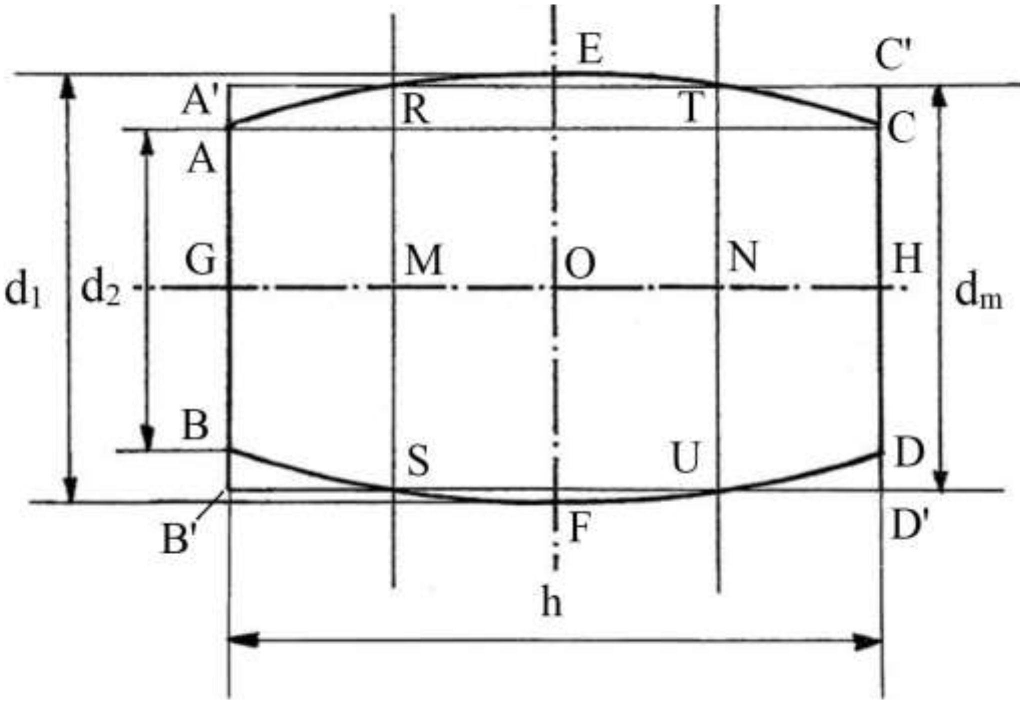
Facciamo un'ipotesi che è descritta con l'aiuto della figura che segue:



Determinare i punti medi dei semiassi GO e OH: sono M e N. Per questi punti tracciare due linee perpendicolari a GH: esse tagliano la botte nei punti R, S, T e U.

Per le coppie di punti R-T e S-U disegnare due rette parallele all'asse GH.

Il cilindro A'C'D'B' ha la stessa altezza *h* della botte:



Il cilindro è una accettabile approssimazione della botte, ma *per eccesso*.

RS e TU sono due diametri medi, d_m, del cilindro.

Basandoci sulle dimensioni ricavabili dal grafico sembra ragionevole ipotizzare per d_m un valore uguale a

$$d_m = A'B' \approx EF * 75/79 \approx 1,3 * 75/79 \approx 1,234 \text{ m} .$$

Il volume V del cilindro A'C'D'B' è:

$V = Area_{A'GB'} * GH \approx (1{,}234^2 * 11/14) * 2 \approx 2{,}393\ m^3$, valore approssimato *per eccesso* del volume della botte ARETCHDUFSBG.

Il risultato è abbastanza vicino a quello fornito da Giovannetti.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

L'Autore applica diverse formule allo stesso caso concreto. Eccone descritte alcune.

Il matematico inglese William Oughtred (1574-1660) propose la seguente formula:

$V \approx 0{,}262 * [2 * (d_1)^2 + (d_2)^2]$.

Applicando questa formula ai dati della botte di Giovannetti si ha:

$V \approx 0{,}262 * (2 * 1{,}3^2 + 1^2) \approx 1{,}14756\ m^3$, valore lontano dalla realtà.

Altre formule proposte per la botte esempio di Giovannetti sono le seguenti:

* Formula di Bernard:

$V \approx 0{,}2 * h * (d_1 + d_2)^2$ da cui

$V \approx 0{,}2 * 2 * (1{,}3 + 1)^2 \approx 2{,}116\ m^3$.

* Formula di Maitre:

$V \approx 0{,}8 * h * d_1 * d_2$

$V \approx 0{,}8 * 2 * 1{,}3 * 1 \approx 2{,}08\ m^3$.

[Moschetti usa una diversa costante: $V = \mathit{0{,}8025} * h * d_1 * d_2$ per cui

$V \approx 0{,}8025 * 2 * 1{,}3 * 1 \approx 2{,}0865\ m^3$.]

* Formula dell'Ufficio Daziario di Milano:

$V \approx 0{,}8025 * h * [(d_1 + d_2)/2]^2$

$V \approx 0{,}8025 * 2 * 1{,}3225 \approx 2{,}1226\ m^3$

[La costante 0,8025 è uguale a quella di Maitre.]

* Formula pratica:

$V \approx 0{,}087 * h * (2*d_1 + d_2)^2$

$V \approx 0{,}087 * 2 * 12{,}96 \approx 2{,}255\ m^3$.

* Formula di Dez:

$V = \pi * h * (5 * d_1/2 + 3 * d_2/2)/8$

$V \approx 3{,}14 * 2 * (5 * 1{,}3 + 3 * 1)/16 \approx 3{,}72875\ m^3$

[Giovannetti offre un risultato errato: $V \approx 2{,}20\ m^3$.]

* Altra formula pratica:

$V \approx 2 * h * (d_1 + d_2)^2/10$

$V \approx 2 * 2 * (1{,}3 + 1)^2/10 \approx 2{,}116\ m^3$.

* Formula di Giovannetti:

$V \approx 0{,}28 * h * (d_1 + d_2)^2$

$V \approx 0{,}28 * 2 * 5{,}29 \approx 2{,}9624\ m^3$.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Un altro Autore citato da Giovannetti è Marzocchi al quale viene attribuita una tabella con alcuni dati:

Condizioni della Botte	Volume della parte piena	Volume della parte vuota
Quasi piena	———	2.18 * h * p²
Quasi vuota	2.18 * h * p²	———
Oltre la metà	———	1.77 * h * p²
Meno la metà	1.77 * h * p²	———

Nella tabella e nel grafico che segue sono usati alcuni simboli:

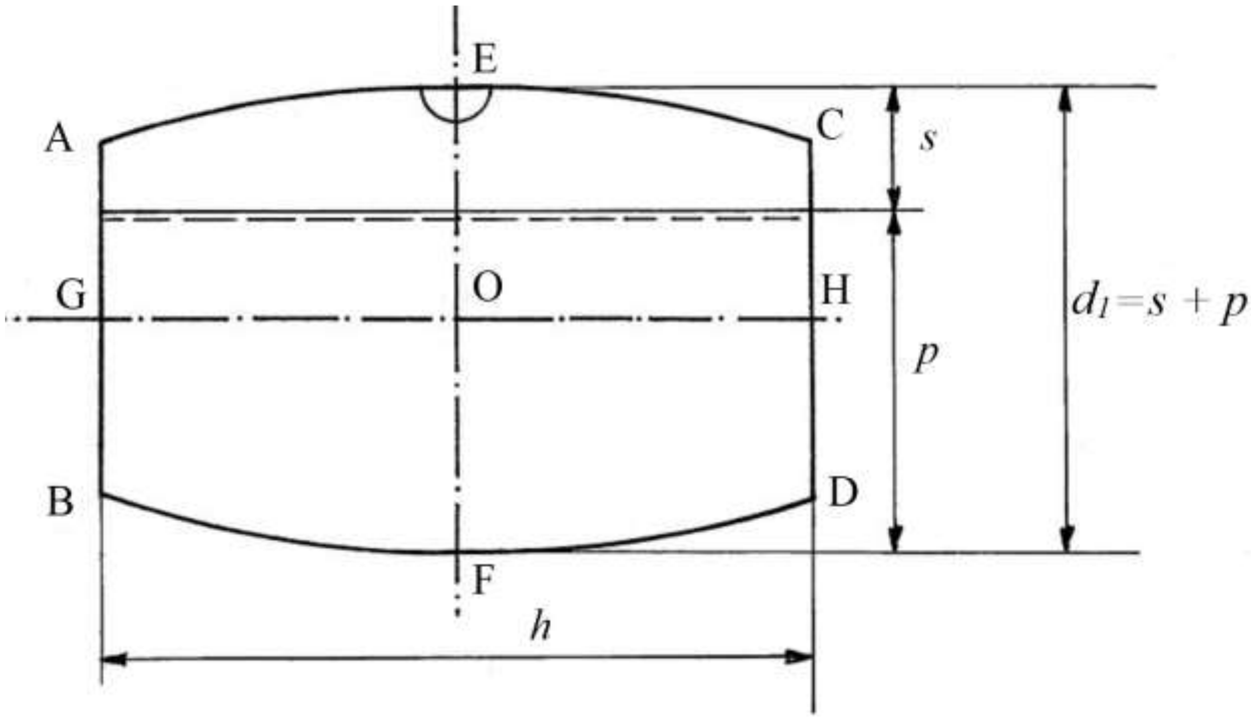
* *h* è l'altezza della botte;

* *s* è lo *scemo*;

* *p* è l'altezza del *pieno*;

* d_1 è il diametro al cocchiume che è uguale alla somma dello scemo *s* e del pieno *p*:

$$d_1 = s + p\ .$$



%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Giovannetti cita il lavoro di Vittorio Niccoli e critica la sua formula per il calcolo del volume di una botte di sezione ellittica e ne offre una che, a suo dire, fornirebbe risultati più esatti:

$$V_{\text{BOTTE ELLITTICA}} \approx 0{,}087 * h * [A + B + (a + b)/2]^2\ .$$

A sua volta egli applica la formula di William Oughtred per le botti cilindriche

$V \approx 0,262 * [2 * (d_1)^2 + (d_2)^2]$ sostituendo a $(d_1)^2$ e $(d_2)^2$ rispettivamente i prodotti delle coppie di assi delle ellissi:

$V \approx 0,262 * h * (2*A*B + a*b)$. A suo avviso, la formula è *esatta*.

Infine, Giovannetti suggerisce per le botti ellittiche con i due fondi di uguali dimensioni la seguente formula che ritiene più pratica della precedente:

$V = \pi/4 * h/6 * (4*A*B + 2*a*b)$.

Bibliografia

1. AA. VV. (a cura di), “Antologia della Divina Proporzione di Luca Pacioli, Piero della Francesca e Leonardo da Vinci”, Sansepolcro, Aboca, seconda edizione, 2014, pp. 304 con tavole fuori testo.
2. Alberti Giuseppe Antonio, “Trattato della misura delle fabbriche”, con note ed aggiunte di Baldassarre Orsini, terza edizione, Firenze, Luigi Pezzati, 1822, pp. XXXIV-317.
3. Arrighi Gino (a cura e con introduzione di), “Trattato d’Aritmetica” di Paolo dell’Abbaco, secondo la lezione del Codice Magliabechiano XI, 86 della Biblioteca Nazionale di Firenze, Pisa, Domus Galilæana, 1964, pp. 160.
4. Arrighi Gino, “La tenuta delle botti e il calcolo degli scemi (In un’opera del senese Tommaso della Gazzaia)”, “Rivista di Storia dell’Agricoltura”, Firenze, anno VII, 1967, pp. 271-292.
5. Arrighi Gino, “Le tavole di Antonio di Marchionne (sec. XVI) per la tenuta delle botti e gli scemi”, “Rivista di Storia dell’Agricoltura”, Firenze, anno XIII, n. 2, agosto 1973, pp. 129-141.
6. Bartoli Cosimo, “Del modo di misurare le distantie, le superficie, i corpi, le piante, le provincie, le prospettive, e tutte le altre cose terrene, che possono occorrere a gli huomini, secondo le vere regole d’Euclide, e de gli altri più lodati scrittori”, Venezia, Francesco Franceschi Sanese, 1564, pp. 304.
7. Bastiano da Pisa detto il Bevilacqua, “Tratato d’arismeticha praticha”, a cura di Francesco Barbieri e Paola Lancellotti, Siena, “Quaderni del Centro Studi della Matematica Medioevale”, n. 17, Università degli Studi di Siena, s.d., pp. 83.
8. Boncompagni Baldassarre, “Intorno ad alcune opere di Leonardo Pisano matematico del secolo decimoterzo”, Roma, Tipografia delle Belle Arti, 1954, pp. VIII-409.
9. Borlandi Antonia, “Il manuale di mercatura di Saminiato de’ Ricci”, Genova, Di Stefano, 1963, pp. 183.
10. Calandri Filippo, “Aritmetica”, Firenze, Lorenzo Morgiani e Johann Petri, 1491-1492, 104 carte.
11. Calandri Filippo, “Aritmetica”. Secondo la lezione del Codice 2669 (sec. XV) della Biblioteca Riccardiana di Firenze, Firenze, Edizioni della Cassa di Risparmio di Firenze, a cura e con introduzione di Gino Arrighi, 1969, pp. XXXIV + 222.
12. Cataneo Pietro, “Le pratiche delle due prime matematiche”, Venezia, Giovanni Griffo, 1567, pp. 88.
13. Coignet Michel, “La géométrie”, Parigi, Hulpeau, 1626, pp. 197.
14. “Cosimo Bartoli (1503 – 1572)”. Atti del Convegno internazionale Mantova-Firenze 2009, a cura di Francesco Paolo Fiore e Daniela Lamberini, Firenze, Olschki, 2011, pp. XVII-422.
15. Curtze Maximilian, “Urkunden zur Geschichte der Mathematik im Mittelalter und der Renaissance”, Lipsia, Tubner, 1902, vol. II [le pp. da 339 a 434 contengono l’edizione bilingue, italiana e tedesca, del trattato di Leonardo da Cremona].
16. Giovanni de’ Danti, “Tractato de l’algorisimo”. Dal Cod. Plu. 30. 26 (sec. XIV) della Biblioteca Medicea Laurenziana di Firenze, a cura e con introduzione di Gino Arrighi, Arezzo, Atti e Memorie della Accademia Petrarca di Lettere, Arti e Scienze, nuova serie, vol. XLVII, anno 1985, pp. 91.
17. De Marchi Sara, “*Nova stereometria doliorum vinariorum*. Nuovi metodi infinitesimali per il calcolo dei volumi nell’opera di Johannes Keplero”, tesi di laurea magistrale in Storia della Matematica, Università degli Studi di Bologna, anno accademico 2018/2019, reperibile come “De_Marchi_Sara_TesiMagistrale.pdf”, pp. 170.
18. Devoto Giacomo – Oli Gian Carlo, “Vocabolario illustrato della lingua italiana”, Milano, Selezione dal Reader’s Digest, 1983, 2 volumi.
19. Di Palma Wilma, “L’integrale di vino”. Genesi di un concetto matematico, Torino, Bollati Boringhieri editore, 2002, pp. 109.

20. Favaro Antonio, “Sul matematico cremonese LEONARDO MAINARDI”, “Bibliotheca Mathematica”, Lipsia, 4_a, 1903, pp. 334-337.
21. Favaro Antonio, “Intorno al presunto autore della ‘Artis metrice pratice compilatio’ edita da Massimiliano Curtze”, in “Atti del Regio Istituto”, 63-2, 1904, pp. 377-395.
22. Favaro Antonio, “Nuove ricerche sul matematico Leonardo Cremonese” in “Bibliotheca Mathematica”, Lipsia, 1904, pp. 326 – 341.
23. Ferraro Alfredo, “Dizionario di metrologia generale”, Bologna, Zanichelli, nuova edizione aggiornata, 1965, pp. XVI+270.
24. Francesca (della) Piero, “Trattato d’abaco”, 3 voll., (stampa anastatica del codice Ashburnham 359* della Biblioteca Medicea Laurenziana di Firenze), volume I (testo e note) pp. LXXI-250 e vol. II (Disegni) pp. XXIII-189, Roma, Istituto Poligrafico e Zecca dello Stato, 2012.
25. Franci Raffaella – Toti Rigatelli Laura, “La trattatistica matematica del Rinascimento senese”, “Gli Atti dell’Accademia delle Scienze di Siena detta de’ Fisiocritici”, serie XIV tomo XIII, Siena, 1981, pp. 71.
26. Frizzo G.(iacomo), “Le Regoluzze di Maestro Paolo dell’Abbaco Matematico del secolo XIV”, Verona, Libreria H. F. Münster, Verona, 1883, pp. 63.
27. Gazzaia (della) Tommaso, “Pratica di geometria e tutte misure di terre” (dal ms. C III. 23 della Biblioteca Comunale di Siena), a cura di Cinzia Nanni e con introduzione di Gino Arrighi, Siena, Servizio Editoriale dell’Università di Siena, 1982, pp. 77.
28. Ghersi Italo, “Conti e Calcoli fatti”. 93 Tabelle ed istruzioni pratiche sul modo di usarle, Milano, Ulrico Hoepli editore, 1901, pp. XI+191.
29. Giovannetti Bruno, “Sulla determinazione della capacità delle botti e dei Mastelli”, Pescia, Cipriani, 1913, pp. 17.
30. Gori Dionigi, “Libro di ragioni e misure in sunto e a mente” (dal Codice L.IX.30 della Biblioteca Comunale di Siena), a cura e con introduzione di Raffaella Franci, Siena, Servizio Editoriale dell’Università di Siena, 1984, pp. xvi-pagine non numerate.
31. Libri Guglielmo, “Histoire des sciences mathématiques en Italie depuis la renaissance des lettres jusqu’a la fin du 17^{e} siècle”, tomo III, ristampa anastatica, Georg Olms –Arnaldo Forni Editore, Hildesheim – Bologna, 1967, pp. 461.
32. Malavasi Luigi, “La metrologia italiana”, Modena, Malavasi, 1842-’44, pp. XX-447.
33. Mancini Girolamo, “L’opera ‘*De corporibus regularibus*’ di Pietro Franceschi detto Della Francesca usurpata da fra Luca Pacioli”, Roma, Memorie della R. Accademia dei Lincei – Classe di Scienze morali, storiche e filologiche – anno CCCXII, serie quinta, volume XIV, fascicolo VII^{B}, Roma, 1915, pp. da 441 a 580, con 4+VIII tavole fuori testo.
34. Martini Angelo, “Manuale di Metrologia: ossia Misure, Pesi e Monete in Uso Attualmente e Anticamente presso Tutti i Popoli”, Loescher, Torino-Roma-Firenze, 1883, pp. VIII-904.
35. Moschetti Alfredo, “Come si fa il vino”, Sassari, Gallizzi, 1946, pp. 67.
36. Murolo G., Cassano A., Murolo M., “Una tecnica dimenticata: la cadometria”, in “Cerere”, Centro di Ricerca, Sperimentazione e Formazione in Agricoltura “Basile Caramia”, Locorotondo (Bari), anno II – n. 4, settembre – dicembre 2013, pp. 33-49.
37. Niccoli Vittorio, “Prontuario dell’Agricoltore”, Milano, Hoepli, 1897, pp. XX-436.
38. Orsini Baldassarre, “Della Geometria e Prospettiva pratica”. Tomo II, Roma, 1772, Benedetto Franzesi, pp. 291 + XLIV tavv. f.t.
39. Pavone Luigi – Strucchi Arnaldo, “Manuale del bottaio”, ristampa anastatica, Sorso, Lazarus, 2018, pp. XI-214.
40. Picutti Ettore, “Sui plagi matematici di frate Luca Pacioli”, “Le Scienze – Scientific American”, n. 246, febbraio 1989, pp. 72-79.
41. Roccasecca Pietro, “La misura, la Botte, il Calice”, Aperture-rivista.it/public/upload/Roccasecca4.pdf, pp. 56-66, n. 4, anno 1998.

42. Scolari Massimo, “Il disegno obliquo”. Una storia dell’antiprospettiva, Venezia, Marsilio, 2005, pp. 348.
43. Selletti Pietro, “Nuovo trattato teorico-pratico di viticoltura e vinificazione”, Milano, 1877, Tipografia Messaggi, pp. 320.
44. Sfortunati Giovanni, “Nuovo lume”. Libro de arithmetica, Venezia, Bernardino de Bindoni, 1545, pp. 301.
45. Simi Annalisa, “Celerimensura e strumenti in manoscritti dei secoli XIII – XV”, in “Itinera matematica. Studi in onore di Gino Arrighi per il suo 90° compleanno”, a cura di Raffaella Franci – Paolo Pagli – Laura Toti Rigatelli, Siena, Centro Studi sulla Matematica Medioevale – Università di Siena, Siena, 1996, pp. 71 – 121.
46. Simi Annalisa, “Problemi caratteristici della geometria pratica nei secoli XIV-XVI”, in “Scienze matematiche e insegnamento in epoca medioevale”, Napoli, Edizioni Scientifiche Italiane, 2000, pp. 154 – 199.
47. “Tavole di Ragguaglio per la riduzione dei pesi e misure che si usano in diversi luoghi del Granducato di Toscana al peso e misura vegliante in Firenze”, Firenze, Gaetano Cambiagi Stampator Granducale, 1782, pp. XVII+835.
48. Tura Stefano, “Fra Giocondo & les textes français de géométrie pratique”, Ginevra, Librairie Droz, 2008, pp. XII-294.
49. Veglia Piero Dionigio, “Della dimensione delle linee rette eseguita con lo Squadro agrimensorio, con sergentine ordinarie, ò con canne semplicissime”. Con una Digressione Geometrica della misura degli Scemi delle botti del medesimo Autore, Perugia, Michele Valchetti Libraio, 1632, pp. 94.
50. Zupko Ronald Edward, “Italian Weights and measures from the Middle Ages to the Nineteenth Century”, Philadelphia, American Philosophical Society, 1981, pp. lxxxiv+339.

INDICE