sergio(punto)calzolani(at)outlook(punto)it

Edizione rivista e corretta

Parole chiave: valore approssimato di π; problemi sul cerchio e sulla circonferenza; quadrati inscritti e circoscritti; scudi quali triangoli isosceli e equilateri; triangoli inscritti; problemi sui triangoli; triangolo 3-4-5; problemi sui trapezi.

INTRODUZIONE

Il testo geometrico contenuto nel trattato inizia con la seguente frase:

"*Quisto è-ne lo primo amastramento de l'arte de la geometria*".

È scritto in umbro (perugino) ed è attribuito a uno sconosciuto "Maestro Umbro".

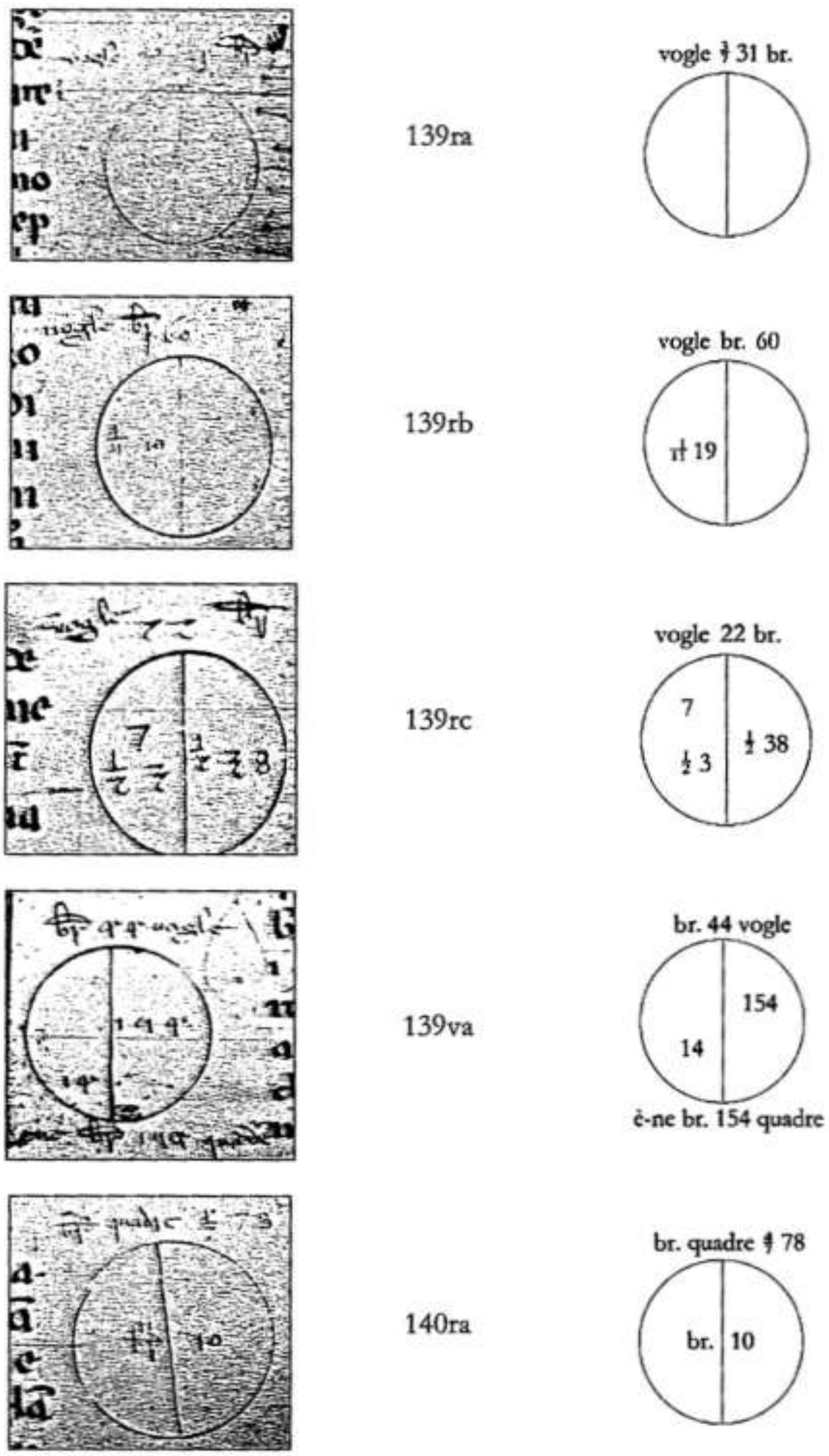
Il trattato è conservato nel Codice 2404 della Biblioteca Riccardiana di Firenze.

Nella parte iniziale, il manoscritto contiene pure un più ampio trattato aritmetico dal titolo "*Livero de l'Abbecho"* di cui l'*Amastramento* forma la parte finale, dalla carta 139 recto alla 178 verso.

Nel suo complesso, il manoscritto è datato al 1288 - 1290 perché nel *Livero* è contenuto un esempio di conto corrente intestato a un certo *messer Ranieri della Terza*, con alcune operazioni registrate fra il gennaio e l'agosto del 1288.

Entrambi i testi sono stati trascritti e pubblicati da Gino Arrighi nei due studi indicati in bibliografia. In seguito, il ricercatore Andrea Bocchi (Università di Udine) ha dedicato al *Livero de l'Abbecho"* e all' "*Amastramento de l'arte de la geometria*" un poderoso e approfondito studio di cui è finora uscito solo il primo volume: mentre l'Arrighi non ha riprodotti i grafici, Andrea Bocchi ha pubblicato le riproduzioni degli schemi contenuti nei margini delle carte. A titolo di esempio è presentata la pagina 503 del suo studio:

SCHEMI NEI MARGINI DEL MANOSCRITTO RICCARDIANO 2404 503



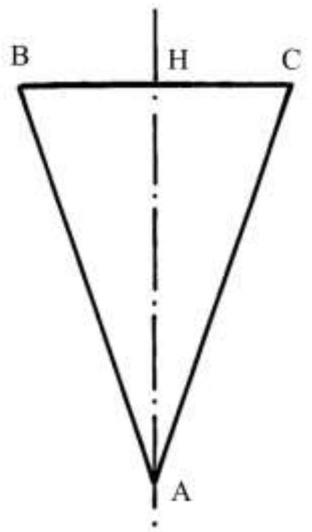
A sinistra sono le riproduzioni degli schemi originale e a destra essi sono ridisegnati riportandovi le scritte originali.

L'*Amastramento* è diviso in sei capitoli di cui solo i primi cinque hanno contenuto geometrico e il sesto prevalentemente aritmetico (che Gino Arrighi non ha considerato nella sua trascrizione).

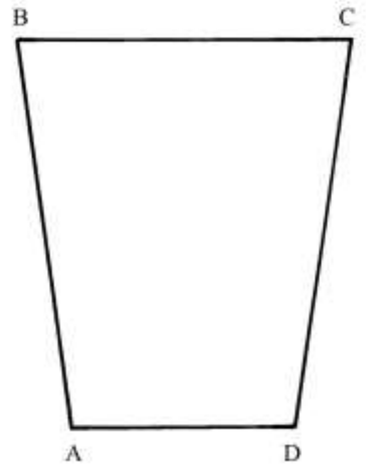
In questo articolo sono considerati soltanto i problemi geometrici del sesto capitolo.

Il Maestro Umbro usa una serie di termini per indicare alcune entità geometriche:

* *façia* è il lato di un poligono;
* *piaça* è l'area di una superficie piana;
* *chupo* sta per *profondo*;
* *rotondo* è il nome di un cerchio;
* *rotondo vogle d'entorno* sta per circonferenza;
* *schudo* è un triangolo isoscele (ma anche equilatero), con il vertice nel quale convergono i lati di uguale lunghezza che è collocato in basso (numerosi altri trattati coevi usano questo termine per indicare un triangolo):



* gli ultimi due problemi del 3° capitolo si riferiscono a trapezi isosceli con la base maggiore collocata superiormente e anch'essi chiamati *schudo*:



* *diametro de meço* è l'altezza di un triangolo isoscele (HA nella prima figura) o equilatero relativa al lato orizzontale (BC);
* *lina de sopre* è il terzo lato, orizzontale, di un triangolo (BC, sempre nella prima figura).

Note

I. Il titolo di ciascun problema è preceduto da un numero progressivo per distinguere le varie *ragioni*. Nel manoscritto è assente una qualsiasi numerazione.

II. I problemi sono chiamati *ragioni*, termine introdotto in Italia nel Medioevo con il significato di conto: il termine è stato impiegato nei trattati d'abaco e da esso sono derivati i termini *Ragioneria* e *Ragioniere*.

III. Fra parentesi quadre sono aggiunte ulteriori spiegazioni relative a alcuni passaggi delle procedure risolutive impiegato dal Maestro Umbro.

IV. I disegni che accompagnano le soluzioni di alcuni problemi sono dell'Autore di questo articolo e recano le lettere ai vertici dei segmenti; il Maestro Umbro non ha mai scritto le lettere: la loro assenza potrebbe essere un indizio a conferma dell'antichità dei primi manoscritti. Si ritiene che l'apposizione delle lettere faciliti la comprensione degli schemi e dei testi ai quali essi sono collegati.

V. Il Maestro Umbro usa una notazione particolare per scrivere i *numeri misti* (contenenti una parte intera e una frazionaria) sia nel testo che sugli schemi: egli antepone la parte frazionaria all'intero e non collega le due parti con alcun simbolo aritmetico, come ad esempio (2/3 8) invece di (2/3 + 8) oppure di (8 + 2/3). Nella descrizione di alcuni problemi saranno usati numeri reali in formato decimale invece dell'equivalente numero misto, come ad esempio 38,5 invece di "38 + ½". Comunque, si è cercato di conservare i numeri misti.

VI. I numeri misti sono qui di seguito racchiusi fra parentesi tonde (assenti nel Trattato) per non creare confusione, come ad esempio (8 + 2/3) invece di 8 + 2/3.

VII. Per π egli usa l'approssimazione 22/7 che scrive nella forma "1/7 3" invece di "3 + 1/7".

VIII. Nel trattato non è fatto cenno ad alcuno strumento, tranne al compasso (*seste*).

IX. La precisione richiederebbe di usare le espressioni "lunghezza del diametro", "lunghezza del raggio", lunghezza della circonferenza" e via di seguito: per non appesantire il testo, saranno usate le espressioni "diametro", "raggio", "circonferenza" per indicare sia le entità geometriche sia le loro lunghezze.

Le unità di misura

L'Anonimo impiega un'unità di misura di lunghezza, il *braccio*, e i suoi derivati *braccio*^{2} e *braccio*^{3}.

Egli non usa alcun multiplo del braccio, quali la canna agrimensoria e la canna mercantile: ciò starebbe a indicare che il Maestro Umbro non era un agrimensore di professione.

La tabella che segue, tratta dal Martini (citato in bibliografia) riassume le antiche unità di misura di lunghezza di Perugia:

Misure di lunghezza	metri
Canna agrimensoria = 15 Piedi	5,452500
Canna mercantile = 8 Palmi .	2,008500
Braccio da tela = 4 Palmi . .	1,004250
Passetto = 2 Piedi	0,727000
Braccetto da nastri = 2 ¹/₂ Palmi	0,627656
Piede da legname e da fabbriche = 12 Once	0,363500
Palmo	0,251062
Oncia	0,030292

Il lavoro di Martini è troppo posteriore rispetto all'epoca nella quale fu composto il *Livero de l'abbecho*: risale al 1883; inoltre Martini non cita il braccio.

Lo Zupko a p. 47 della sua raccolta di unità di misura italiane fornisce le seguenti informazioni sul *braccio* usato nelle città dell'Umbria:

> UMBRIA -- (0.599 m) at Perugia, Foligno, Orvieto, Spoleto, and Terni, "corto;" (0.641 m) at Gubbio; (0.668 m) at Perugia, Foligno, Orvieto, Spoleto, and Terni, "lungo;" (0. 670 m) at Sigillo; (0.871 m) at Orvieto; and (1.004 m) at Perugia, "da tela" of 4 palmi or 1/2 CANNA.

Riguardo alle unità di misura usate nel Medioevo a Orvieto è molto utile la consultazione del testo di Renzo Chiovelli citato in bibliografia.

Le formule relative alla circonferenza e al cerchio

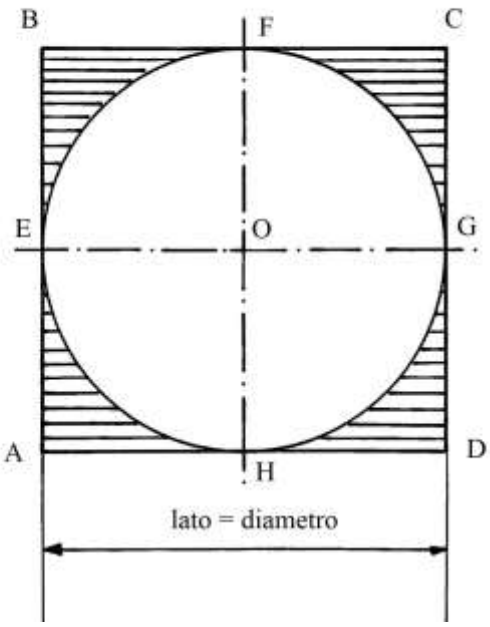
Diversi testi matematici medievali contengono almeno una parte dedicata alla geometria: è questo il caso dell'opera del Maestro Umbro. Pochi trattati sono dedicati alla geometria.

Tutti sono accomunati dall'uso per π dell'approssimazione (3 + 1/7) = 22/7 che risale ad Archimede.

Il valore di π è 3,141592653589…, mentre quello di 22/7 è 3,(142857)142857142857… e quindi questo secondo valore è leggermente approssimato per eccesso.

Inoltre, in questo ultimo numero si ripete all'infinito il blocco di *sei* cifre racchiuso fra parentesi tonde: (142857). Infatti 1/7 = 0,142857…Il numero è *periodico*.

Il cerchio della figura che segue è inscritto nel quadrato ABCD che ha lato lungo quanto il diametro del cerchio:



L'area del cerchio è data da:

$$\text{Area}_{\text{CERCHIO}} = \pi * r^2 = \pi * (d/2)^2 = \pi * d^2/4.$$

Il diametro è indicato con *d* e il raggio con *r*.

Sostituendo a π il valore 22/7, la formula precedente diviene:

$$\text{Area}_{\text{CERCHIO}} = (22/7) * d^2/4 = 22/28 * d^2 = 11/14 * d^2.$$

L'area del quadrato ABCD è:

$$\text{Area}_{\text{QUADRATO}} = \text{lato}^2 = AD^2 = d^2.$$

La differenza fra l'area del quadrato e quella del cerchio è:

$$\text{differenza} = \text{Area}_{\text{QUADRATO}} - \text{Area}_{\text{CERCHIO}} = d^2 - 11/14 * d^2 = (3/14) * d^2.$$

Essa è la superficie compresa fra il quadrato e il cerchio, che è formata dai quattro identici poligoni mistilinee che hanno i vertici nei punti A, B, C e D, che sono tratteggiati in figura.

La formula dell'area di un cerchio può essere scritta nel modo che segue:

$$\text{Area}_{\text{CERCHIO}} = \pi * d^2/4 = (\pi * d) * (d/4).$$

Ma (π * d) è la lunghezza della *circonferenza*, *c*, per cui la formula diviene:

$$\text{Area}_{\text{CERCHIO}} = c * d/4.$$

Peraltro, la lunghezza della circonferenza è approssimabile a

$$c = \pi * d = (22/7) * d.$$

Sostituendo questo ultimo valore nella formula dell'area del cerchio si ottiene

$$\text{Area}_{\text{CERCHIO}} = (d * 22/7) * d/4 = (22/28) * d^2 = (11/14) * d^2.$$

Fra l'area del quadrato e quella del cerchio intercorre la proporzione

$$\text{Area}_{\text{QUADRATO}} : \text{Area}_{\text{CERCHIO}} = d^2 : (11/14) * d^2 = 1 : 11/14.$$

Quindi, vale la segue proporzione:

$$\text{Area}_{\text{QUADRATO}} : \text{Area}_{\text{CERCHIO}} = 1 : 11/14 = 14 : 11.$$

Conoscendo l'area di un cerchio è facile ricavare l'area del quadrato circoscritto e la lunghezza del suo lato:

$$\text{Area}_{\text{QUADRATO}} = \text{Area}_{\text{CERCHIO}} * (14/11).$$

Il lato del quadrato è lungo:

$$\text{lato} = \sqrt{(\text{Area}_{\text{CERCHIO}} * 14/11)}.$$

Esprimendo le aree delle due figure in funzione di quella del cerchio, si ha:

$$\text{differenza} = \text{Area}_{\text{QUADRATO}} - \text{Area}_{\text{CERCHIO}} = (14/11) * \text{Area}_{\text{CERCHIO}} - \text{Area}_{\text{CERCHIO}} =$$
$$= (3/11) * \text{Area}_{\text{CERCHIO}}.$$

Le soluzioni di alcuni problemi presenti nell' "*Amastramento de l'arte de la geometria*" e relativi al cerchio e alla circonferenza contengono operazioni con le costanti (3 + 1/7), 3/11, 3/14, 11/14 e 14/11.

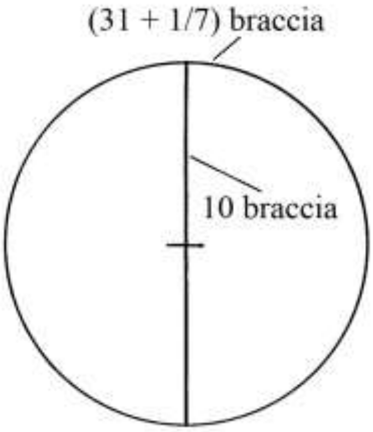
1° CAPITOLO

[1] Circonferenza di un cerchio

Un cerchio ha diametro lungo 10 braccia: il problema chiede di calcolare la circonferenza.

La soluzione è data dal prodotto del diametro per la costante (3 + 1/7):

circonferenza = 10 * (3 + 1/7) = (31 + 3/7) braccia.



Il Maestro Umbro usa una procedura un po' più lunga come è chiarito dal seguente passaggio:

"*…devemo multiplicare quisto 10 per 1/7 3 e dire: 3 via 10 che fa 20 e una via 10/7 che fa 10/7 che 1 sano 3/7. Ed avemo br. 3/7 31…*".

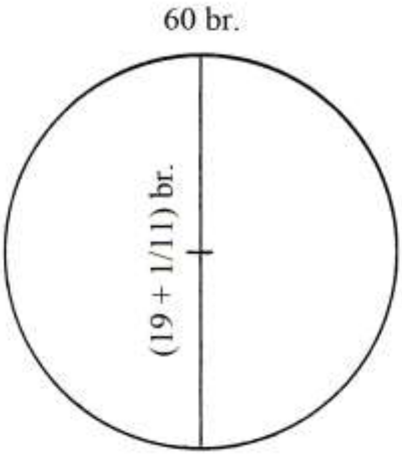
Il termine *via* sta per *per* (e cioè *moltiplica*) e *sano* significa *intero*.

L'Autore suggerisce un metodo un po' più lungo per moltiplicare o dividere con numeri misti: evidentemente i destinatari del suo lavoro avevano poca familiarità con le frazioni.

[2] Diametro di un cerchio

Un cerchio ha circonferenza lunga 60 braccia: il problema chiede di calcolare il diametro.

La soluzione è: dividere la circonferenza per la costante (3 + 1/7).



Ecco i passi della procedura impiegata:

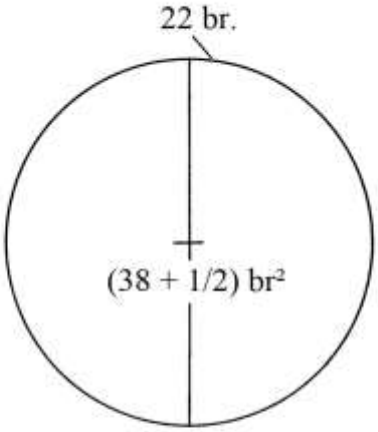
* moltiplicare 60 per 7: 60 * 7 = 420;
* moltiplicare 7 per (3 + 1/7): 7 * (3 + 1/7) = 22;

* dividere 420 per 22: 420 : 22 = (19 + 1/11) braccia,
diametro del cerchio.

Nota: nella figura qui sopra, e in altre che seguono, l'espressione "braccia" è abbreviata con "*br.*" E "braccia^2" con "*br^2.*".

[3] Area di un cerchio

Un cerchio ha la circonferenza lunga 22 braccia. Il problema chiede di calcolarne l'area.



Per prima cosa occorre ricavare la lunghezza del *diametro de meço*, e cioè il diametro, dividendo la circonferenza per la costante (3 + 1/7):

* moltiplicare 22 per 7: 22 * 7 = 154;
* moltiplicare 7 per (3 + 1/7): 7 * (3 + 1/7) = 22;
* dividere 154 per 22: 154 : 22 = 7 braccia,
diametro del cerchio;
* dividere per 2 la circonferenza: 22 : 2 = 11;
* dividere per 2 il diametro: 7 : 2 = 3,5;
* moltiplicare i due ultimi quozienti: 11 * 3,5 = 38,5 braccia^2,
area del cerchio.

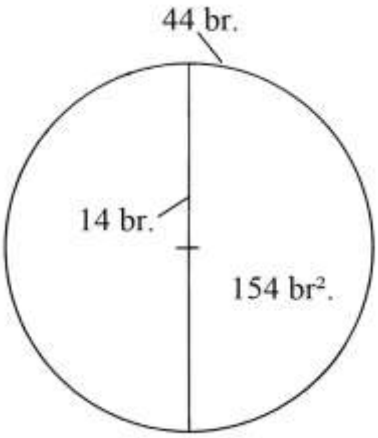
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

È poi descritta una soluzione alternativa: moltiplicare la circonferenza per il diametro e dividere per 4:

$$\text{Area} = \frac{\text{circonferenza}}{2} * \frac{\text{diametro}}{2} = \frac{22}{2} * \frac{7}{4} = \frac{22 * 7}{4} = \frac{154}{4} = 38{,}5 \text{ braccia}^2$$

[4] Circonferenza di un cerchio

Un cerchio ha area 154 braccia^2: deve essere calcolata la circonferenza.



Ecco la procedura:

* calcolare i 3/11 dell'area: 154 * 3/11 = 42;
* sommare l'ultimo prodotto all'area: 42 + 154 = 196;
* estrarre la radice quadrata: √196 = 14 braccia, diametro del cerchio

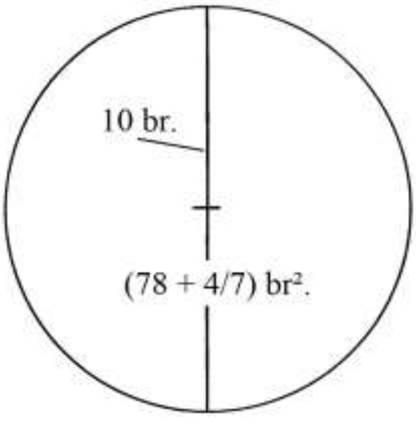
[Il Maestro Umbro calcola l'area del quadrato *circoscritto* al cerchio che ha lato lungo quanto il diametro: il rapporto fra le due aree è:

Area $_{\text{QUADRATO}}$: Area $_{\text{CERCHIO}}$ = 14/11 : 1];

* moltiplicare il diametro per la costante (3 + 1/7): 14 * (3 + 1/7) = 44 braccia, circonferenza del cerchio.

[5] Area di un cerchio

Un cerchio ha diametro 10 braccia: il problema chiede di calcolare la sua area.



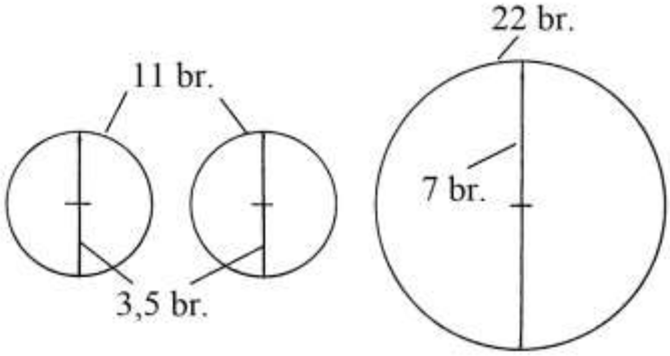
La procedura impiegata è la seguente:

* moltiplicare il diametro per sé stesso: 10 * 10 = 100;
* calcolare i 3/14 di 100: (3/14) * 100 = (21 + 3/7);
* sottrarre l'ultimo prodotto da 100: 100 – (21 + 3/7) = (78 + 4/7) braccia^2, area del cerchio

[Il Maestro Umbro ha impiegato lo stesso metodo usato per risolvere il precedente problema:
Area $_{\text{CERCHIO}}$ = Area $_{\text{QUADRATO circoscritto}}$ * (1 – 3/14) = Area $_{\text{QUADRATO circoscritto}}$ * 11/14].

[6] Divisione di un cerchio in 4 cerchi

Un cerchio ha circonferenza lunga 22 braccia: devono essere ricavati *quattro* cerchi di uguali dimensioni la cui superficie totale deve essere uguale a quella del cerchio originario.



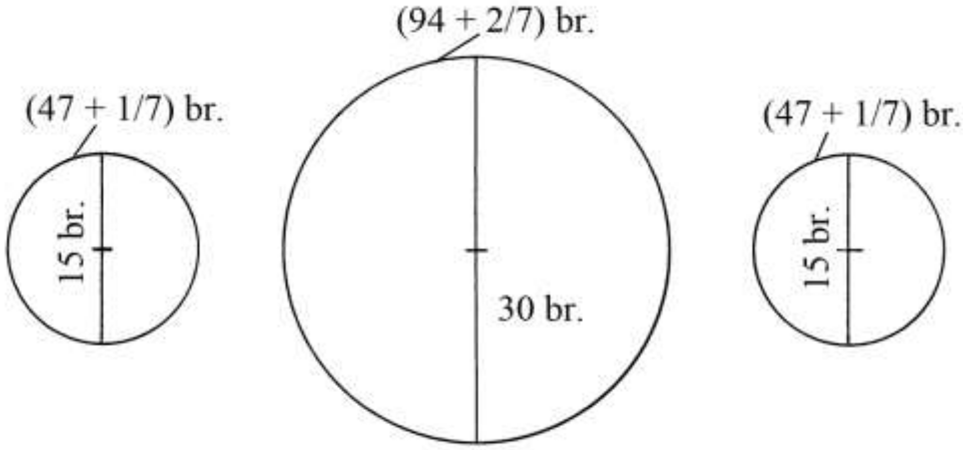
La soluzione è molto semplice:

* dividere per 2 la circonferenza del cerchio iniziale: 22 : 2 = 11 braccia, circonferenza di ciascuno dei quattro cerchi
  [la soluzione è corretta: l'area di un cerchio è proporzionale al quadrato del diametro e quindi della circonferenza; dimezzando la circonferenza, il suo quadrato si riduce a ¼]:
* dividere 11 per la costante (3 + 1/7): 11 : (3 + 1/7) = (3 + ½) braccia, diametro dei quattro più piccoli cerchi;
* dividere per 2: (3 + ½) : 2 = (1 + ¾);
* dividere per 2 la circonferenza di uno dei quattro cerchi: 11 : 2 = (5 + ½);
* moltiplicare gli ultimi due quozienti: (1 + ¾) * (5 + ½) = (9 + 5/8) braccia^2, area di ciascuno dei quattro cerchi;
* moltiplicare l'ultimo prodotto per 4: (9 + 5/8) * 4 = 38,5 braccia^2, area del cerchio di partenza.

[7] Unione di due cerchi

Due cerchi hanno uguali dimensioni: il loro diametro è lungo 15 braccia e la circonferenza è lunga (47 + 1/7) braccia.

Il problema chiede di unire i due cerchi in un cerchio più grande che abbia superficie uguale alla somma dei due e di calcolare la sua area.



La procedura contiene i seguenti passi:

* sommare i due diametri: 15 + 15 = 30;
* moltiplicare per la costante (3 + 1/7): 30 * (3 + 1/7) = (94 + 2/7) braccia, lunghezza della circonferenza del cerchio somma;
* dividere per 2: (94 + 2/7) : 2 = (47 + 1/7);
* moltiplicare per la metà di 30: (47 + 1/7) * 15 = (707 + 1/7) braccia^2, che è la *doppia* area del cerchio unione;
* dividere 15 per 2: 15 : 2 = (7 + ½);
* dividere (47 + 1/7) per 2: (47 + 1/7) : 2 = (23 + 4/7);
* moltiplicare gli ultimi due quozienti: (7 + ½) * (23 + 4/7) = (176 + 11/14) braccia^2, area di ciascuno dei due cerchi;
* moltiplicare per 2: (176 + 11/14) * 2 = (353 + 4/7) braccia^2, area del cerchio nato dall'unione

[La soluzione è esatta perché l'area di un cerchio iniziale è data da:

Area $_{\text{CERCHIO}}$ = diametro/2 * circonferenza/2 = 15/2 * [(47 + 1/7)2]^2 = (353 + 4/7) braccia^2].

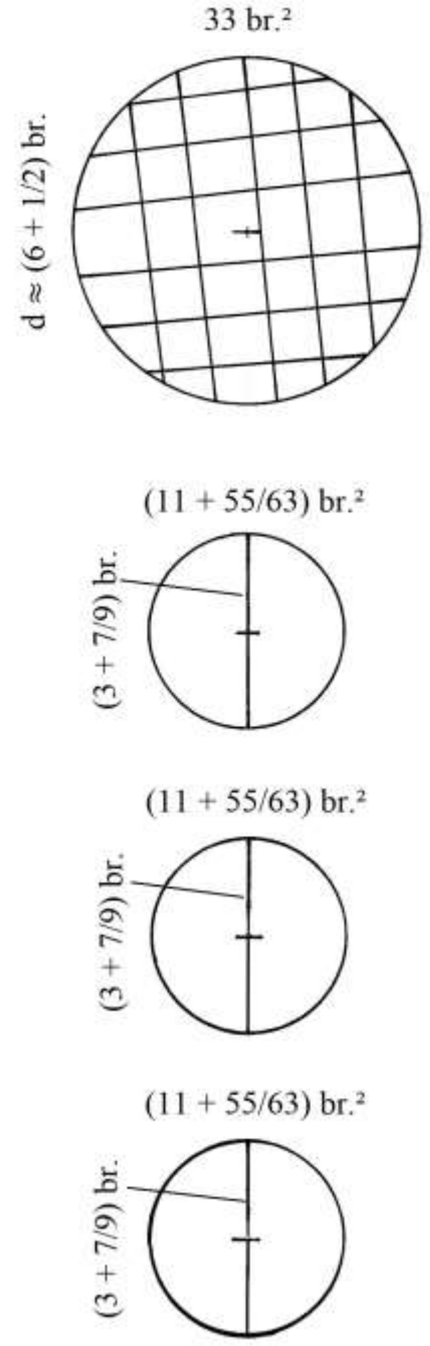
Nota: la circonferenza *c* dei due cerchi iniziali è lunga: c = 22/7 * diametro = 22/7 * 15 = = (47 + 1/7) braccia.

[8] <u>Divisione di un cerchio in tre cerchi uguali</u>

Un cerchio ha area di 33 braccia^2: devono essere tracciati tre più piccoli cerchi di uguali dimensioni e con la stessa superficie totale.

La procedura è la seguente:

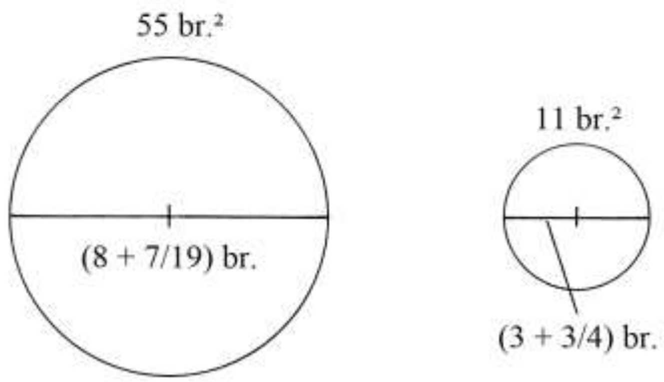
* dividere per 3 l'area: 33 : 3 = 11 [che è l'area di ciascuno dei tre cerchi piccoli] ;
* moltiplicare per 3/11: 11 * (3/11) = 3;
* sommare i due ultimi dati: 11 + 3 = 14;
* estrarre la radice quadrata √14 braccia, diametro dei tre cerchi più piccoli [dato che il risultato dell'estrazione di radice è un *numero irrazionale*, il Maestro Umbro lo arrotonda per eccesso a (3 + 7/9)];
* moltiplicare la radice per la costante (3 + 1/7): (3 + 7/9) * (3 + 1/7) = = (11 + 55/63) braccia^2, misura della superficie approssimata per eccesso di ciascuno dei tre piccoli cerchi [il risultato è errato per eccesso di 55/63 braccia^2: ciascun cerchio dovrebbe avere area uguale a 33/3 = 11 braccia^2].



Nota: l'Autore non fornisce la lunghezza del diametro del cerchio originario che è: d ≈ (6 + ½) braccia.

[9] Divisione di un cerchio in cinque cerchi uguali

Un cerchio ha superficie di 55 braccia^2 e deve essere diviso in *cinque* cerchi di uguale area.



La procedura impiegata è la seguente:

* dividere l'area per 5: $55 : 5 = 11$ braccia^2, area di ciascuno dei cinque più piccoli cerchi;
* calcolare i 5/11 di 11: $(5/11) * 11 = 5$;
* sommare i due ultimi dati: $11 + 5 = 16$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{16} = 4$ braccia, diametro dei cinque piccoli cerchi.

Nota: il risultato è errato per eccesso, perché ha moltiplicato l'area di 11 braccia^2 per la frazione 5/11 invece che per la corretta costante 3/11. L'area di un cerchio è data da:

Area = d/2 * circonferenza/2 = d/2 * (22/7 * d)/2 = d^2 * 11/14 , dalla quale deriva la lunghezza del diametro d:

$$d = \sqrt{(14/11 * \text{Area})}.$$

Nel caso di uno dei cinque cerchi di area 11 braccia^2, il suo diametro *d* vale:

$$d = \sqrt{[(14/11) * 11]} = \sqrt{14} \text{ braccia.}$$

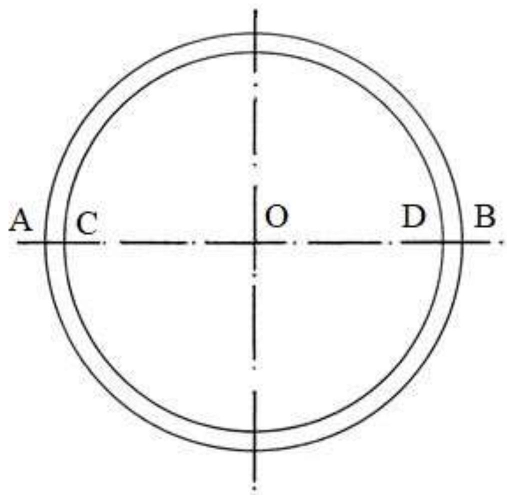
Ma $\sqrt{14}$ corrisponde a 3,74 [≈ (3 + ¾) braccia], mentre la lunghezza di 4 braccia rappresenta la radice quadrata di 16.

Infine, il diametro del cerchio originario è ≈ (8 + 7/19) braccia.

[10] Cerchi concentrici

Un cerchio ha circonferenza lunga 100 braccia e al suo interno deve essere tracciato un secondo cerchio, concentrico, con circonferenza lunga 90 braccia.

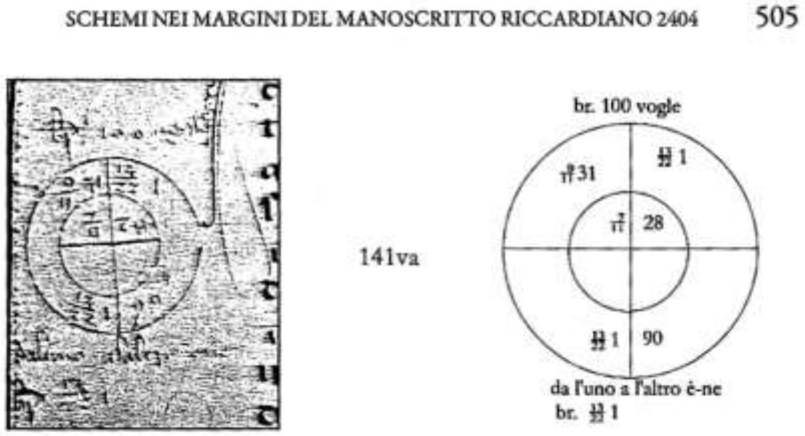
Il problema chiede di conoscere la distanza fra le due circonferenze (AC = DB):



La procedura usata è la seguente:

* dividere la circonferenza esterna per la costante (3 + 1/7): 100 : (3 + 1/7) = (31 + 9/11) braccia, diametro del cerchio più grande
[Il Maestro Umbro impiega una soluzione un po' più lunga per non operare con troppe frazioni: "… *devemo rechare a sano* …". Egli utilizza i seguenti passi:
  * moltiplicare 100 per 7: 100 * 7 = 700;
  * moltiplicare 7 per la costante (3 + 1/7): 7 * (3 + 1/7) = 22 ;
  * dividere il primo prodotto per il secondo: 700 : 22 = (31 + 9/11) braccia, che è il risultato corretto];
* dividere la circonferenza interna per la costante (3 + 1/7): 90 : (3 + 1/7) = (28 + 1/7) braccia, diametro del cerchio interno;
* sottrarre il secondo diametro dal primo: (31 + 9/11) – (28 + 7/11) = (3 + 2/11) braccia [il Maestro Umbro dà il risultato errato di (3 + 7/11)];
* dividere per 2: (3 + 2/11) : 2 = (1 + 13/22) braccia, lunghezza dei segmenti AC e DB [nel testo il risultato è errato: (1 + 17/22)].

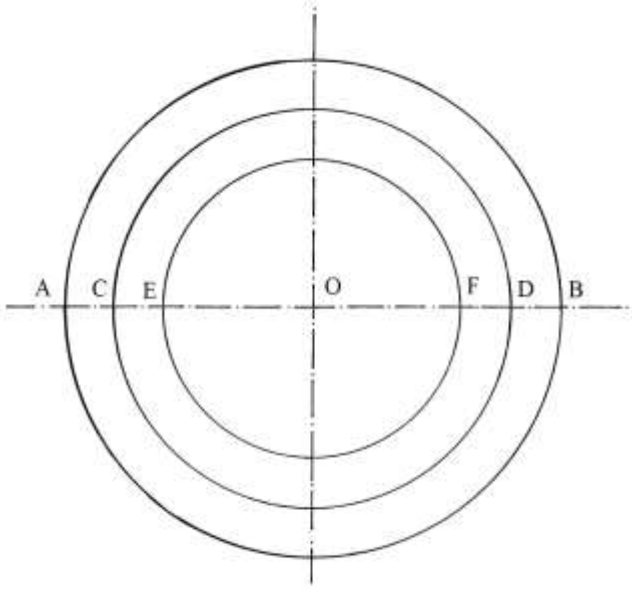
La figura che segue riproduce parte della pagina 505 della trascrizione di Andrea Bocchi:



Sia lo schema originale (a sinistra) che la trascrizione (a destra) sono fuori scala.

[11] Cerchi concentrici

Il problema costituisce un'evoluzione del precedente.
Sono dati tre cerchi concentrici che hanno circonferenze lunghe 100, 80 e 60 braccia (e quindi in progressione aritmetica con ragione 20).
È chiesto di calcolare le distanze fra le tre circonferenze.



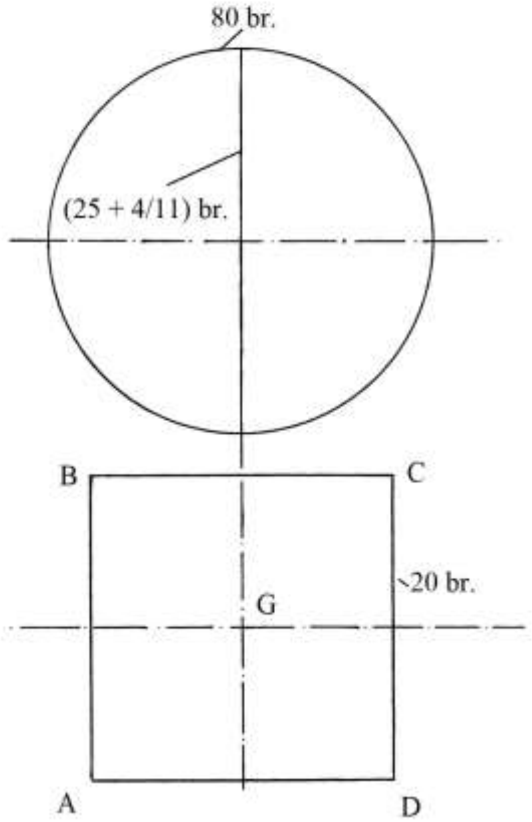
La procedura contiene i seguenti passaggi:

* dividere 100 per la costante (3 + 1/7): 100 : (3 + 1/7) = (31 + 9/11) braccia, diametro della circonferenza più esterna;
* dividere 80 per (3 + 1/7): 80 : (3 + 1/7) = (25 + 5/11) braccia, diametro della circonferenza intermedia;
* dividere 60 per (3 + 1/7): 60 : (3 + 1/7) = (19 + 1/11) braccia, diametro della circonferenza più interna;
* sottrarre il diametro del cerchio intermedio intermedio da quello del cerchio esterno: (31 + 9/11) – (25 + 5/11) = (6 + 4/11) braccia;
* dividere per 2: (6 + 4/11) : 2 = (3 + 2/11) braccia, distanza fra il cerchio esterno e quello intermedio (AC = DB);
* sottrarre il diametro del cerchio più interno da quello del cerchio intermedio: (25 + 5/11) – (19 + 1/11) = (6 + 4/11) braccia [il testo contiene il valore errato (6 + 5/11)];
* dividere per 2: (6 + 4/11) : 2 = (3 + 2/11) braccia che è la distanza fra la circonferenza intermedia e quella più interna (CE = FD).

Come è evidente dai calcoli le distanze fra le tre circonferenze sono uguali e cioè (3 + 2/11) braccia: quella passante per C e per D è equidistante da quella più esterna (per i punti A e B) e da quella più interna (per i punti E e F).

[12] Confronto fra un cerchio e un quadrato

Un cerchio ha la circonferenza lunga 80 braccia e un quadrato ha lato 20 braccia.
Il problema chiede di determinare quale delle due figure abbia superficie maggiore:



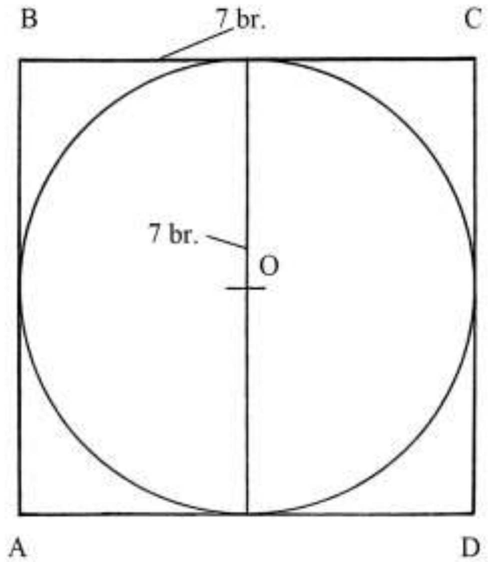
La procedura impiegata contiene i seguenti passi:

* dividere la circonferenza per (3 + 1/7): 80 : (3 + 1/7) = (25 + 4/11) braccia, diametro del cerchio;
* dividere per 2: (25 + 4/11) : 2 = (12 + 15/22) braccia, raggio della circonferenza [nel trattato il risultato è errato: (12 + 8/11)];
* dividere per 2 la circonferenza: 80 : 2 = 40;
* moltiplicare gli ultimi due quozienti: (12 + 15/22) * 40 = (507 + 3/11) braccia^2, area del cerchio;
* moltiplicare il lato del quadrato per sé stesso: 20 * 20 = 400 braccia^2, area del quadrato;
* sottrarre l’area del quadrato da quella del cerchio: (507 + 3/11) – 400 = (107 + 3/11) braccia^2, differenza fra le aree delle due figure.

Chiaramente, il cerchio ha superficie maggiore di quella del quadrato.

[13] <u>Cerchio inscritto in un quadrato</u>

Un quadrato ha lato (*façia* nel testo in umbro) lungo 7 braccia.



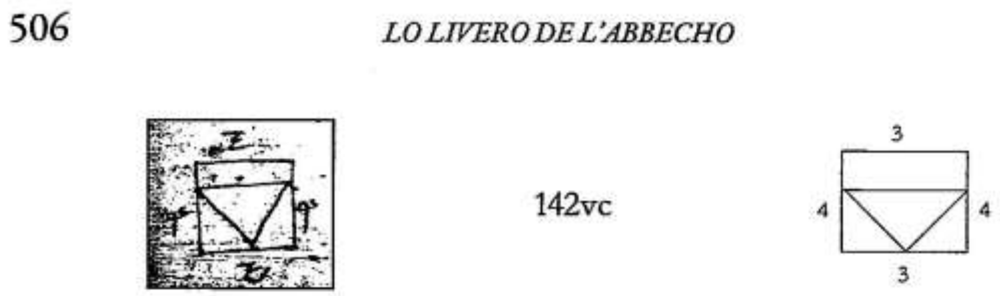
Al suo interno è inscritto un cerchio il cui diametro è lungo quanto il lato del quadrato.
Il problema chiede di calcolare l’area del cerchio e la differenza con quella del quadrato.
La procedura utilizzata è la seguente:

* moltiplicare il diametro per la costante (3 + 1/7): 7 * (3 + 1/7) = 22 braccia, lunghezza della circonferenza;
* dividere per 2: 22 : 2 = 11;
* dividere per 2 il diametro: 7 : 2 = 3,5;
* moltiplicare gli ultimi due quozienti: 11 * 3,5 = 38,5 braccia^2, area del cerchio inscritto;
* moltiplicare il lato del quadrato per sé stesso: 7 * 7 = 49 braccia^2, area del quadrato;
* sottrarre l’area del cerchio da quella del quadrato: 49 – 38,5 = 10,5 braccia^2.

[14] <u>Dimensioni di uno scudo</u>

Il problema è poco comprensibile. Un rettangolo (un *quadro*) ha dimensioni di 3 per 4 braccia: deve essere ricavato uno scudo.

Lo schema originale è poco preciso, come mostra la riproduzione che segue dal testo di Andrea Bocchi:


506 LO LIVERO DE L’ABBECHO

142vc

Non è possibile che il lato più corto del rettangolo – 3 braccia – risulti più lungo di quello che misura 4 braccia.

Il problema chiede l'area e le dimensioni dello scudo.

La soluzione contenuta nel testo originale contiene i seguenti passi:

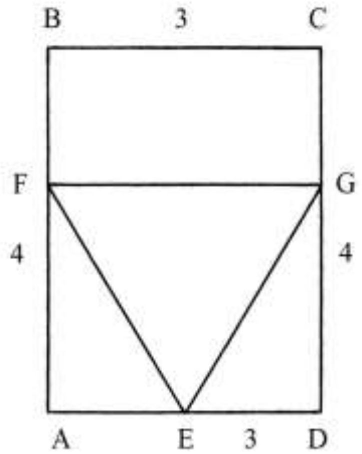
* moltiplicare la larghezza (3 braccia) per la lunghezza del rettangolo (4): $3 * 4 = 12$;
* moltiplicare per sé stesso: $12 * 12 = 144$;
* dividere per 3: $144/3 = 48$;
* sommare a 144: $48 + 144 = 192$:
* moltiplicare per 4 [lunghezza del rettangolo]: $192 * 4 = 768$;
* estrarre la *radice quarta*: $\sqrt{\sqrt{768}} \approx 5{,}264$ braccia, lunghezza di un lato dello scudo.

- APPROFONDIMENTO -

Uno scudo ha la forma di un triangolo equilatero o di un triangolo isoscele.

Il rettangolo originario ha area data da:

$A_{ABCD} = AD * AB = 3 * 4 = 12$ braccia^2.

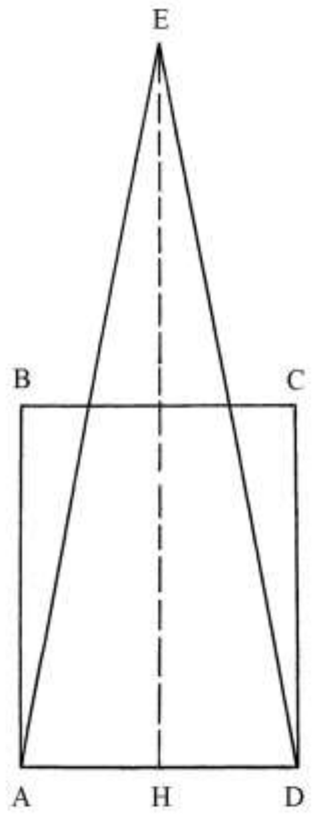


E è il punto medio di AD. EFG simula lo scudo: il lato FG è lungo quanto AD e BC e cioè è 3 braccia.

Se lo scudo deve avere un lato lungo quanto FG possiamo ricavare la forma e le dimensioni. La sua superficie è uguale a quella di ABCD: la forma dello scudo AED è quella di un triangolo isoscele. Calcoliamo l'altezza EH:

$A_{AED} = AD * EH/2 = 12.$

$EH = (2 * A_{AED})/AD = (2 * 12)/3 = 8$ braccia.



%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

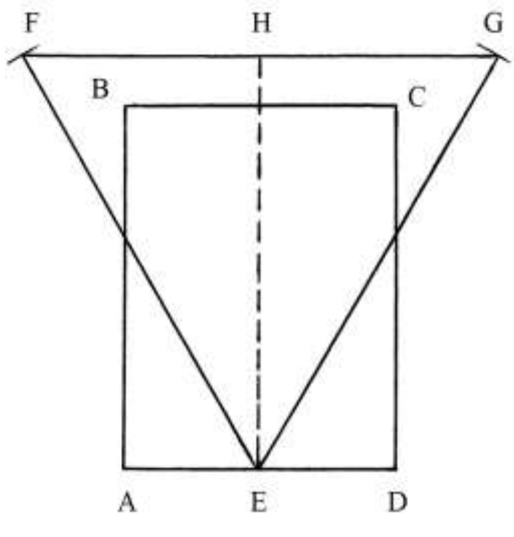
Avanziamo un’altra ipotesi.

Nella procedura risolutiva, il Maestro Umbro introduce l’uso della costante 4/3 per la quale moltiplica il quadrato dell’area del rettangolo ABCD.

Questa presenza fa pensare al *triangolo equilatero*.

Utilizzando l’intera superficie del rettangolo ABCD anche lo scudo a forma di triangolo equilatero deve avere area uguale 12 braccia^2.

Lo schema che segue sovrappone il triangolo equilatero EFG al rettangolo originario ABCD.



L'area di EFG è:

$A_{EFG} = FG * HE/2$.

Conosciamo l'area di questo triangolo ma sono ignote le lunghezze dei lati e dell'altezza HE.

Nel triangolo, l'altezza HE è lunga:

$HE^2 = EG^2 – HG^2 = EG^2 – (EG/2)^2 = ¾ * EG^2$ e

$HE = EG * (\sqrt{3})/2 = FG * (\sqrt{3})/2$.

Vale anche il rapporto reciproco:

$EG^2 = 4/3 * HE^2$: qui riappare la costante 4/3.

L'area del triangolo è:

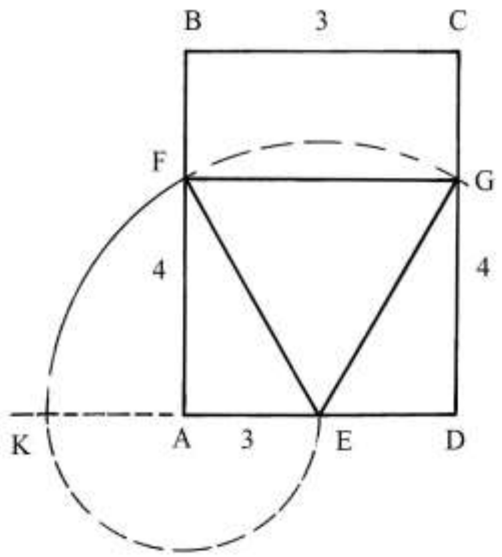
$A_{EFG} = FG * [FG * (\sqrt{3})/2]/2 = FG^2 * (\sqrt{3})/4$ e

$FG^2 = A_{EFG} * 4/\sqrt{3}$, da cui

$FG = \sqrt{[A_{EFG} * 4/\sqrt{3}]} = \sqrt{(12 * 4/\sqrt{3})} = \sqrt{(16 * \sqrt{3})} \approx 5,264$ braccia.

Pur nella sua poca chiarezza, la soluzione del Maestro Umbro è quella di uno scudo a forma di triangolo equilatero con area di 12 braccia^2 e lati lunghi ≈ 5,264 braccia.

Benché sia impreciso, lo schema originale può essere interpretato come un triangolo equilatero (EFG) inscritto nel rettangolo ABCD:



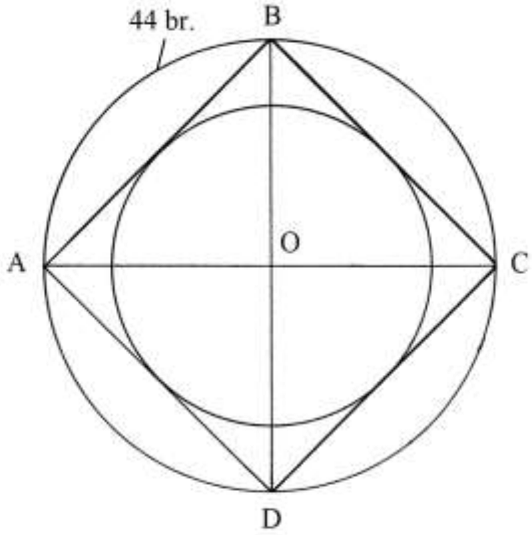
La procedura del Maestro Umbro può essere sintetizzata con la seguente formula:

$FG = \sqrt{\{\sqrt{[(A_{ABCD})^2 * 4/3 * AB]}\}}$.

- -

[15] <u>Rapporto fra l'area di un cerchio e quella di un quadrato</u>

Il problema costituisce un approfondimento della situazione descritta nel paragrafo ([13]).



Il Maestro Umbro richiama preliminarmente alcune regole:

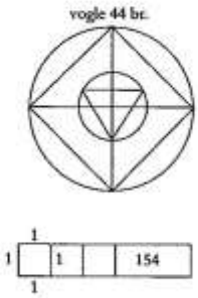
* l’area (*piaça* in perugino) di un cerchio è data dal prodotto della metà del diametro per la metà della circonferenza;

* l’area di un cerchio inscritto in un quadrato è uguale a 11/14 di quella di questo ultimo.

L’Autore presenta degli esempi numerici:

a) un cerchio ha diametro 14 *misure* e circonferenza lunga 44 *misure*; la sua area è data da 7 * 22 = 154 [il trattato non indica alcuna esplicita unità di misura di superficie né chiarisce che cosa intenda con il termine *misure*]; nello schema indica però la lunghezza della circonferenza in “44 br.” (riprodotto da p. 506 di Bocchi):

143ra

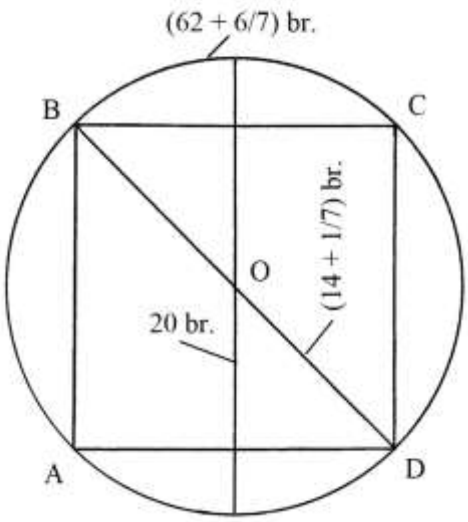


b) un quadrato è inscritto nel precedente cerchio e ha diagonale BD lunga quanto il diametro e cioè 14;
L’area del quadrato è 98 e cioè 7/11 dell’area del cerchio in cui è inscritto:
(7/11) * 154 = 98.

c) Nel quadrato è inscritto un secondo cerchio: la sua area è 11/14 di quella del quadrato e cioè:
(11/14) * 98 = 77: esso ha area uguale a *metà* di quello esterno.

[16] <u>Cerchio e quadrato inscritto</u>

La circonferenza di un cerchio è lunga (62 + 6/7) braccia e ha diametro 20 braccia.
Il quadrato inscritto ha diagonale lunga quanto il diametro del cerchio:



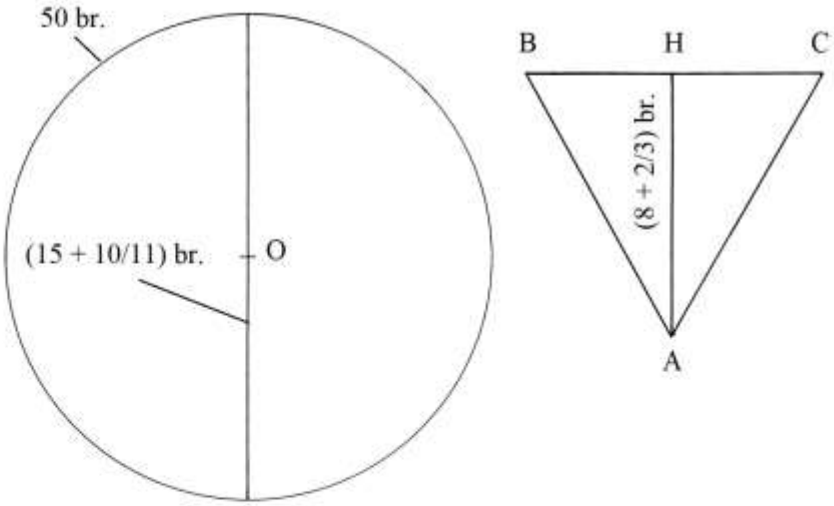
Il problema chiede la lunghezza del lato del quadrato e la differenza fra l'area del cerchio e quella del quadrato.

La procedura impiegata è la seguente:

* moltiplicare il diametro per sé stesso: 20 * 20 = 400;
* dividere per 2: 400 : 2 = 200 braccia^2, area del quadrato;
* moltiplicare (14 + 1/7) per sé stesso: (14 + 1/7) * (14 + 1/7) = (200 + 1/49) braccia^2 [Il Maestro Umbro conosce già la lunghezza del lato che è data dalla radice quadrata di 200, che approssima a (14 + 1/7) e verifica il risultato moltiplicando la radice per sé stessa, fino a ricavare il valore approssimato per eccesso uguale a (200 + 1/7)] ;
* moltiplicare per 2: (200 + 1/49) * 2 = (400 + 2/49), che è il valore approssimato per eccesso del quadrato del diametro;
* moltiplicare metà del diametro per metà della circonferenza:
  (20/2) * (1/2) * (62 + 6/7) = (314 + 2/7) braccia^2, area del cerchio;
* sottrarre l'area del quadrato da quella del cerchio:
  (314 + 2/7) – (200 + 1/49) = (114 + 13/49) braccia^2, differenza fra le aree del cerchio e del quadrato inscritto.

[17] Aree di un cerchio e di un triangolo equilatero

Un cerchio ha circonferenza lunga 50 braccia. Un triangolo equilatero ha lati lunghi 10 braccia.



Il problema chiede di conoscere la differenza fra l'area del cerchio e quella del triangolo [ABC] che è uno scudo.

Anche questo *scudo* è disegnato con il lato orizzontale collocato superiormente, come è il caso di BC nella figura precedente.

Ecco la procedura impiegata:

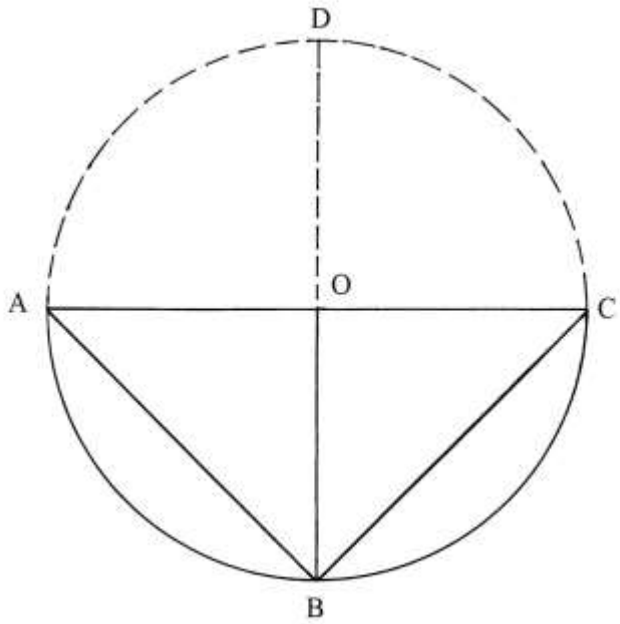
* dividere la lunghezza della circonferenza per la costante (3 + 1/7):
  50 : (3 + 1/7) = (15 + 10/11) braccia, diametro del cerchio;
* dividere per 2: (15 + 10/11) : 2 = (7 + 21/22);
* dividere la circonferenza per 2: 50 : 2 = 25;
* moltiplicare gli ultimi due quozienti: (7 + 21/22) * 25 = (198 + 19/22) braccia^2, area del cerchio [nel testo è scritto erroneamente (298 + 19/22) ma i successivi calcoli sono basati sul valore corretto];
* moltiplicare il lato del triangolo per sé stesso: 10 * 10 = 100;
* dividere per 4: 100 : 4 = 25;
* sottrarre l'ultimo quoziente da 100: 100 – 25 = 75
  [è applicato il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo ABH];
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{75} \approx$ (8 + 2/3) braccia, valore approssimato per eccesso del *diametro* o altezza AH del triangolo equilatero;
* dividere per 2 la lunghezza de *la line de sopre*, il lato BC: 10 : 2 = 5;
* moltiplicare l'ultimo quoziente per l'altezza: 5 * (8 + 2/3) = (43 + 1/3) braccia^2, area del triangolo equilatero;
* sottarre l'area del triangolo equilatero da quella del cerchio:
  (198 + 19/22) – (43 + 1/3) = (155 + 35/66) braccia^2, differenza fra le aree delle due figure.

Nota: la soluzione di questo problema mostra che il triangolo equilatero non è inscritto nel cerchio.

[18] <u>Triangolo rettangolo isoscele inscritto in un semicerchio</u>

Un cerchio ha diametro lungo 12 braccia ed è tagliato a metà lungo il diametro AC.

Il problema chiede di inscrivere nel semicerchio uno *scudo* e di calcolarne l'area.



È dato il semicerchio ABC, ritagliato dal cerchio di centro O e diametro 12 braccia.

Il problema fissa alcuni dati:

* la distanza dalla punta dello scudo [B] al punto medio del diametro [O] è 6 braccia e cioè è quanto il raggio del semicerchio;
* il raggio [OB] è anche l'altezza dello scudo;

Ecco la procedura usata:

* moltiplicare per sé stessa l'altezza OB: $6 * 6 = 36$;
* moltiplicare per sé stessa metà della lunghezza di AC: $6 * 6 = 36$;
* sommare i due prodotti: $36 + 36 = 72$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{72} \approx (8 + ½)$ braccia, lunghezza del lato AB (e di quello BC) [il Maestro Umbro ha applicato il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo OEC];
* moltiplicare le lunghezze di OB e di OA: $6 * 6 = 36$ braccia^2, area dello scudo, il triangolo rettangolo ABC.

[La descrizione del problema contiene un errore di scrittura: all'inizio il diametro è indicato erroneamente in 22 braccia invece di 12.]

La procedura procede con altri passi:

* moltiplicare il diametro per sé stesso: $12 * 12 = 144$;
* calcolare i 3/14: $(3/14) * 144 = (30 + 6/7)$;
* sottrarre da 144: $144 – (30 + 6/7) = (113 + 1/7)$ braccia^2, area dell'intero cerchio

[i tre ultimi passi possono essere sostituiti con l'applicazione della formula

Area cerchio = $(11/14) *$ diametro^2];

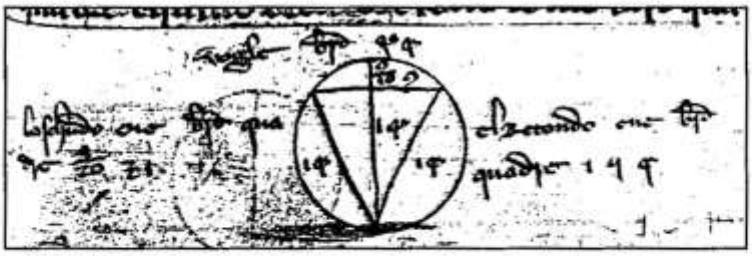
* dividere per 2: $(113 + 1/7) : 2 = (56 + 4/7)$ braccia^2, area del semicerchio;
* sottrarre l'area dello scudo da quella del semicerchio: $(56 + 4/7) – 36 = (20 + 4/7)$ braccia^2, differenza fra l'area del semicerchio e quella dello scudo.

[19] Triangolo isoscele inscritto in un cerchio

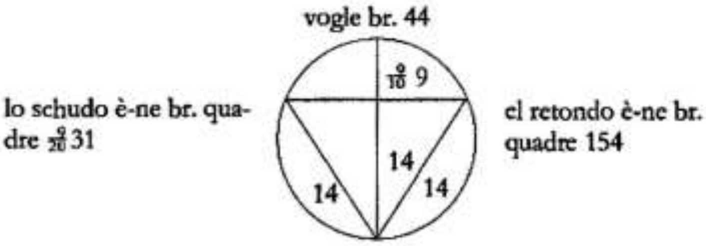
Il testo di questa Ragione presenta alcuni punti oscuri in entrambe le trascrizioni quella di Gino Arrighi e quella di Andrea Bocchi.

L'Arrighi afferma che lo scudo ha forma di un triangolo isoscele (vedere l'articolo di cui al punto 2 della Bibliografia). Non è dato di capire perché uno scudo inscritto in un cerchio debba avere la forma di un triangolo isoscele: il triangolo equilatero può sfruttare meglio la superficie disponibile.

La figura che segue è riprodotta da p. 507 del testo di Andrea Bocchi:



145ra



145ra

Lo schema qui sopra fornisce alcune informazioni: la lunghezza della circonferenza *c* è indicata in 44 braccia. Nel consegue che il diametro *d* è lungo:

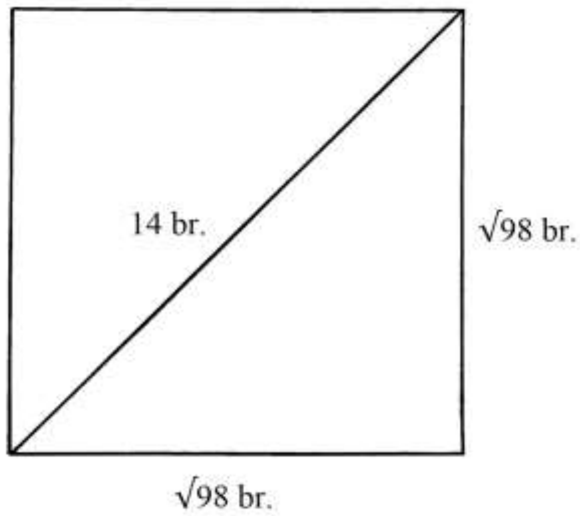
$$d = c/(22/7) = 44 * 7/22 = 14 \text{ braccia.}$$

Lo stesso schema sembra indicare la lunghezza dei due lati obliqui del triangolo equilatero uguale a 14 braccia, ciò che è impossibile perché il diametro è proprio 14 braccia e i lati di un triangolo sono più corti del diametro perché essi sono corde che non passano per il centro del cerchio.

Il problema chiede l'area dello scudo.

La procedura impiegata è la seguente:

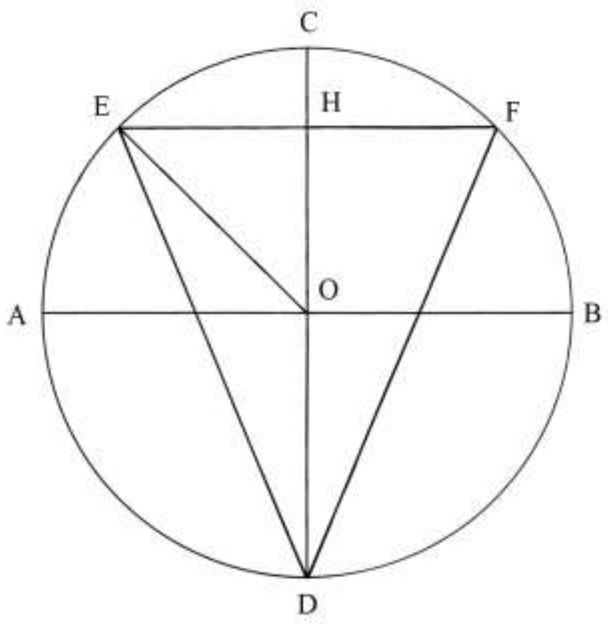
* moltiplicare il diametro per sé stesso: $14 * 14 = 196$;
* dividere per 2: $196 : 2 = 98$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{98} \approx (9 + 9/10)$ braccia, lunghezza della "*lina de lo scudo de sopre…*", che è il lato orizzontale superiore del triangolo, EF [occorre fare una precisazione con l'aiuto dello schema che segue:



l’operazione compiuta dal Maestro Umbro consiste nel ricavare la lunghezza dei lati di un quadrato di cui è nota la lunghezza della diagonale, pari a 14 braccia; i lati del quadrato sono lunghi $\sqrt{98}$ braccia];

* dividere per 2: $(9 + 9/10) : 2 = (4 + 19/20)$;
* moltiplicare per sé stesso: $(4 + 19/20)^2 = (24 + 201/400)$;
* sottrarre l’ultimo prodotto dal penultimo: $196 – (24 + 201/400) = (171 + 199/400)$ [che il Maestro Umbro arrotonda per difetto a 171] ;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{171} \approx (13 + 1/9)$ braccia, altezza del triangolo equilatero;
* dividere per 2: $(13 + 1/9) : 2 = (6 + 5/9)$;
* moltiplicare per metà della lunghezza del lato di sopra: $(6 + 5/9) * (4 + 19/20) = (32 + 9/20)$ braccia^2, area dello scudo a forma di triangolo isoscele.

Lo schema che segue presenta il triangolo isoscele inscritto: il suo lato EF è lungo $\sqrt{98}$ braccia:

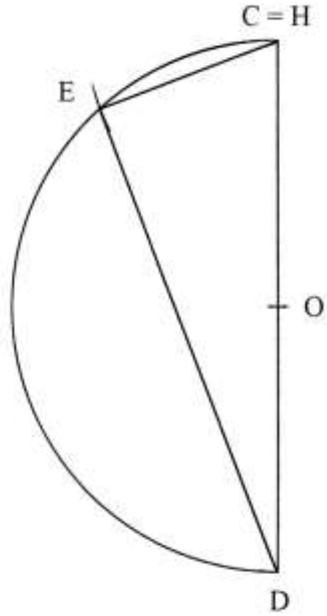


In primo luogo occorrerebbe capire l’origine della scelta della lunghezza del lato EF: nel testo non vi sono indizi.

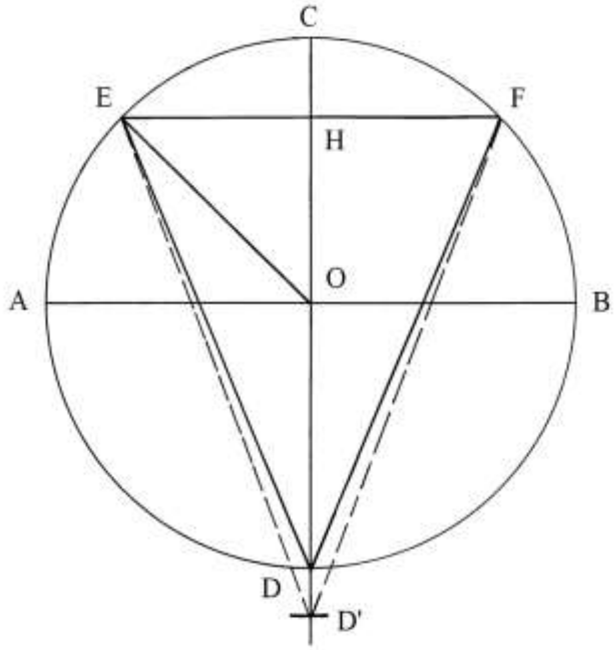
Il Maestro Umbro ricava la lunghezza dell'altezza HD (il *diametro de meço*) come segue:

$$HD^2 = CD^2 – EH^2.$$

HD sarebbe il cateto di un ipotetico triangolo rettangolo che ha ipotenusa CD e l'altro cateto EH:



ED è la lunghezza dell'altezza HD del triangolo isoscele DEF: riportiamo questa lunghezza sul penultimo schema, a partire dal punto H: HD' non è più contenuta all'interno del cerchio:



La procedura usata dal Maestro Umbro contiene errori.

\- APPROFONDIMENTO -

La lunghezza di HD può essere determinata in due modi.

HD è lungo:

$$HD = HO + OD = HO + r = HO + 7.$$

HD è un cateto del triangolo rettangolo EHO:

$$HO^2 = OE^2 – EH^2 = 7^2 – [(\sqrt{98})/2]^2 = 49 – 24,5 = 24,5 \qquad \text{e}$$

$HO = \sqrt{24{,}5} \approx 4{,}95$ braccia.
$HD = 4{,}95 + 7 = 11{,}95$ braccia.

Il secondo metodo consiste nell'applicazione del *teorema delle corde*, la cui conoscenza da parte dei maestri di abaco era assai diffusa.

Applicando quel teorema si ha:

$CH : EH = HF : HD.$

Ma EH = HF per cui la proporzione diviene:

$CH : EH = EH : HD.$

Risolvendo un'equazione di 2° grado con HD = x, si hanno due radici:

$x_1 = 11{,}95$ e
$x_2 = 2{,}05.$

La radice esatta è la prima: HD è lunga 11,95 braccia, come già ottenuto con il primo metodo.

Infine, l'area del triangolo DEF è:

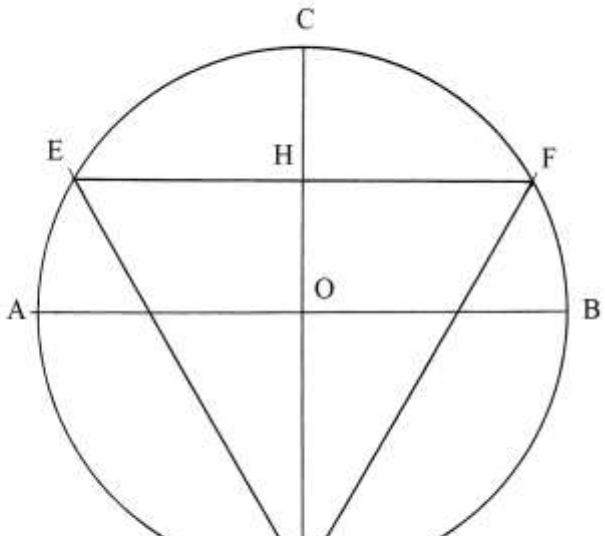
$A_{DEF} = EF * HD/2 = (\sqrt{98})/2 * 11{,}95/2 = 29{,}57$ braccia^2.

- -

Nella stessa carta 145 recto che contiene questa Ragione vie è un altro problema, non accompagnato da alcuno schema.

Un cerchio ha circonferenza lunga 22 braccia e deve esservi inscritto il più grande cerchio possibile.

La figura che segue tenta un'interpretazione del problema:



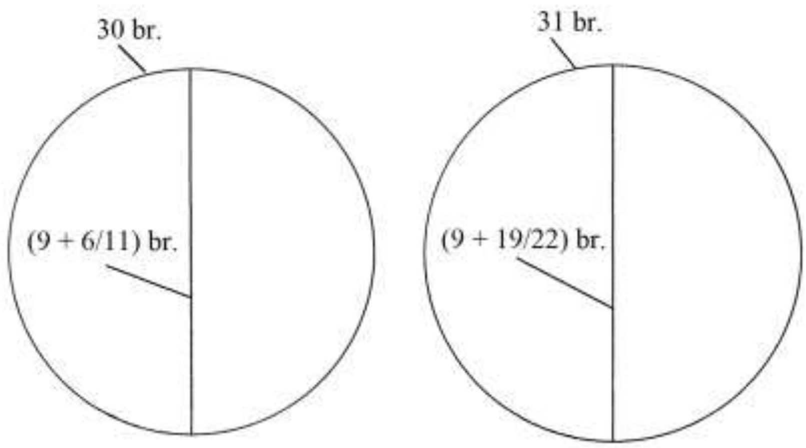
La procedura usata dal Maestro Umbro per calcolare la lunghezza dei lati dello scudo triangolare è la seguente:

* dividere la circonferenza per la costante (3 + 1/7): 22/(3 + 1/7) = 7 braccia, diametro del cerchio;
* moltiplicare per ¾: 7 * ¾ = (5 + ¼) braccia [lunghezza di HD];
* moltiplicare per sé stesso: (5 + ¼) * (5 + ¼) = (27 + 9/16) [l'Autore Scrive "*9/16 | 27*"];

* dividere per 3: $(27 + 9/16)/3 = (9 + 3/16)$;
* sommare con $(27 + 9/16)$: $(9 + 3/16) + (27 + 9/16) = (36 + 12/16)$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{(36 + 12/16)} \approx 6{,}062$ braccia, lunghezza dei lati del triangolo DEF.

[20] <u>Cerchio più grande di un altro</u>

Un cerchio ha circonferenza lunga 30 braccia e deve esserne costruito un secondo con circonferenza lunga 31 braccia.



Il problema chiede di calcolare l'aumento di superficie.

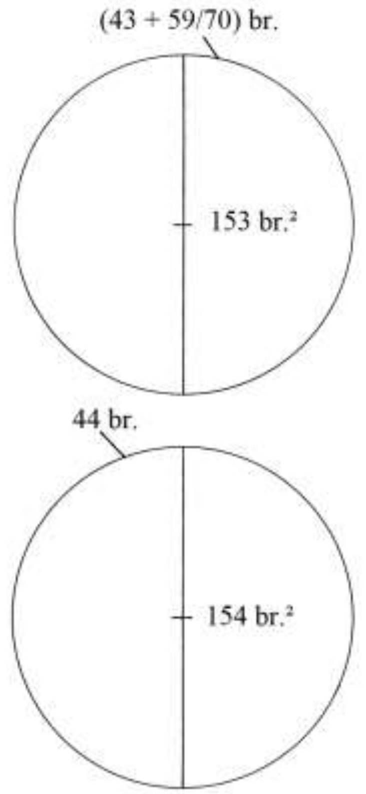
Ecco i passi della procedura:

* dividere la circonferenza delprimo cerchio per la costante $(3 + 1/7)$:
  $30 : (3 + 1/7) \approx (9 + 6/11)$ braccia, diametro del cerchio;
* dividere per 2: $(9 + 6/11) : 2 = (4 + 17/22)$;
* dividere per 2 la circonferenza del primo cerchio: $30 : 2 = 15$;
* moltiplicare per metà della lunghezza della circonferenza:
  $15 * (4 + 17/22) = (70 + 12/22)$ braccia^2, area del primo cerchio;
* dividere la circonferenza del secondo cerchio per la costante $(3 + 1/7)$:
  $31 : (3 + 1/7) = (9 + 19/22)$, diametro del secondo cerchio;
* dividere per 2: $(9 + 19/22) : 2 = (4 + 41/44)$;
* dividere per 2 la circonferenza del secondo cerchio: $31 : 2 = (15 + ½)$;
* moltiplicare i due ultimi quozienti: $(4 + 41/44) * (15 + ½) = (76 + 39/88)$ braccia^2, area del cerchio esterno;
* sottrarre l'area del cerchio interno da quella del cerchio esterno:
  $(76 + 39/88) – (70 + 12/22) = (5 + 19/88)$ braccia^2, differenza fra le aree dei due cerchi (e cioè area della corona circolare).

[21] <u>Cerchio più ampio di un altro</u>

Un primo cerchio ha area di 153 braccia^2 e un secondo cerchio ha superficie leggermente superiore, 154 braccia^2.

Il problema chiede di calcolare la differenza fra le lunghezze delle due circonferenze.

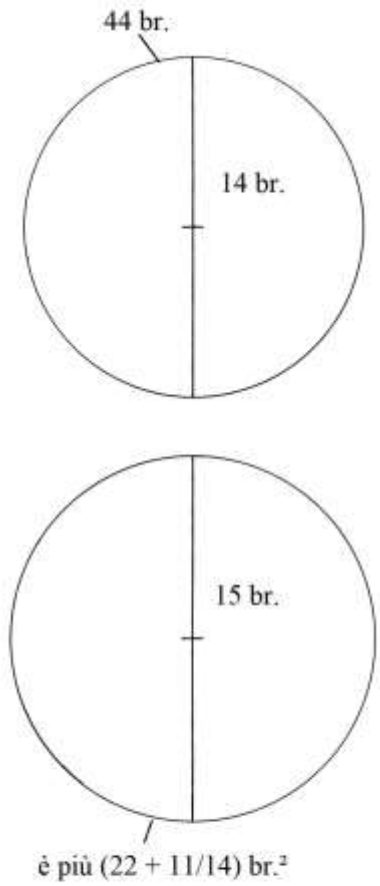


Ecco la procedura impiegata:

* calcolare i 3/11 dell'area del primo cerchio: (3/11) * 153 = (41 + 8/11);
* sommare a 153: 153 + (41 + 8/11) = (194 + 8/11);
* estrarre la radice quadrata: √(194 + 8/11) = (13 + 19/20) braccia, diametro del primo cerchio;
* moltiplicare per la costante (3 + 1/7): (13 + 19/20) * (3 + 1/7) = (43 + 59/70) braccia, lunghezza della circonferenza del primo cerchio;
* moltiplicare 3/11 per l'area del secondo cerchio: (3/11) * 154 = 42;
* addizionare l'ultimo prodotto a 154: 42 + 154 = 196;
* estrarre la radice quadrata: √196 = 14 braccia, diametro del secondo cerchio;
* moltiplicare il diametro per la costante (3 + 1/7): 14 * (3 + 1/7) = 44 braccia, lunghezza della circonferenza del secondo cerchio;
* sottrarre la lunghezza della prima circonferenza da quella della seconda:
  44 – (43 + 59/70) = 11/70 che il Maestro Umbro arrotonda a 1/7 braccio.

[22] <u>Differenza fra le aree di due cerchi</u>

Un cerchio ha circonferenza lunga 44 braccia e diametro 14 braccia.
Un secondo cerchio ha diametro 15 braccia.
Il problema chiede di calcolare la differenza fra le aree dei due cerchi.



Ecco la procedura:

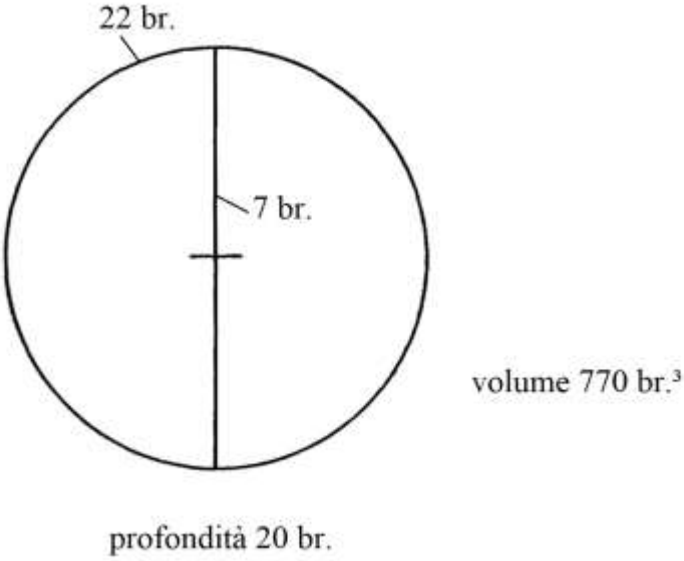
* moltiplicare 15 per la costante (3 + 1/7): 15 * (3 + 1/7) = (47 + 1/7) braccia, circonferenza del secondo cerchio;
* dividere per 2 il diametro del primo cerchio: 14 : 2 = 7;
* dividere per 2 la circonferenza del primo cerchio: 44 : 2 = 22;
* moltiplicare gli ultimi due quozienti: 7 * 22 = 154 braccia^2, area del primo cerchio;
* dividere per 2 il diametro del secondo cerchio: 15 : 2 = (7 + ½);
* dividere per 2 la circonferenza del secondo cerchio: (47 + 1/7) : 2 = (23 + 4/7);
* moltiplicare i due ultimi quozienti: (7 + ½) * (23 + 4/7) = (176 + 11/14) braccia^2, area del secondo cerchio;
* sottarre l'area del primo cerchio da quella del secondo:

  (176 + 11/14) – 154 = (22 + 11/14) braccia^2, differenza fra le aree dei due cerchi.

2° CAPITOLO
PROBLEMI RELATIVI A POZZI E CISTERNE

[23] Volume di un pozzo

Un pozzo circolare è profondo 20 braccia e ha circonferenza lunga 22 braccia. Il problema chiede il suo volume.



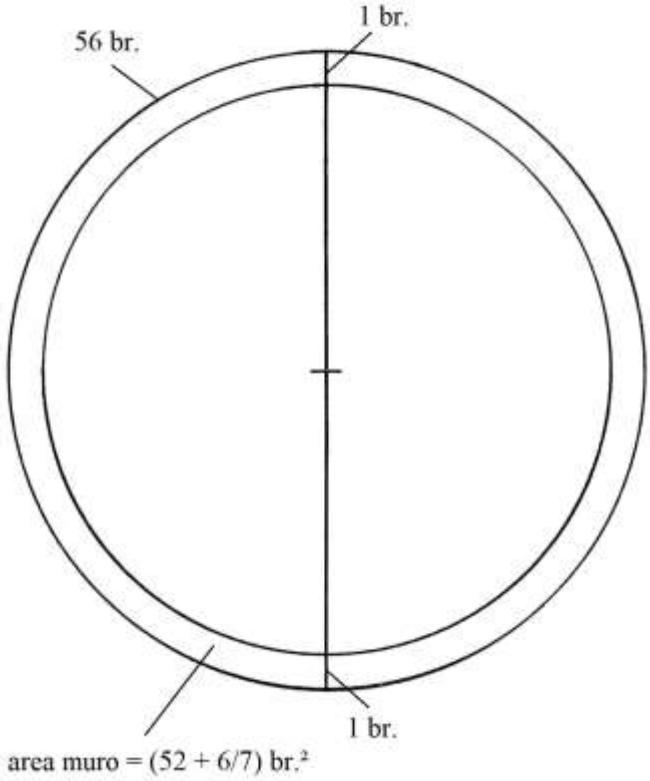
La procedura usata contiene i seguenti passi:

* dividere la circonferenza per la costante (3 + 1/7): 22/(3 + 1/7) = 7 braccia, diametro;
* moltiplicare la metà del diametro per la metà della circonferenza:
  (7/2) * (22/2) = (3 + ½) * 11 = (38 + ½) braccia^2, area del cerchio;
* moltiplicare per la profondità: (38 + ½) * 20 = 770 braccia^3, volume del pozzo.

L'Autore non usa le *braccia cubiche* (braccia^3 o br.^{3}) ma esprime il volume in *braccia quadre*: questo uso è abbastanza diffuso nei primi trattati di abaco.

[24] Spessore del muro di un pozzo

Un pozzo circolare ha circonferenza esterna lunga 56 braccia e il muro di cui è fatto è spesso 1 braccio. Il problema chiede la superficie occupata dal muro.



La procedura usata è la seguente:

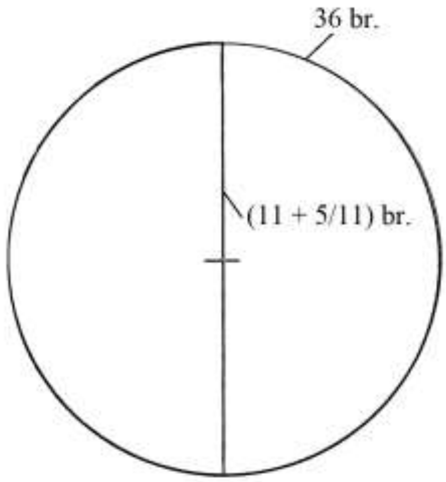
* dividere la lunghezza della circonferenza esterna per la costante (3 + 1/7):
  56/(3 + 1/7) = (17 + 9/11) braccia, diametro del cerchio esterno;
* dividere per 2: (17 + 9/11)/2 = (8 + 10/11) braccia;
* moltiplicare per metà della circonferenza: (8 + 10/11) * (56/2) = (249 + 5/11) braccia^2, area del cerchio esterno [nel testo è scritto ("149" + 5/11) braccia^2];
* sottrarre il doppio dello spessore del muro dal diametro esterno: (17 + 9/11) – 2 * 1 =
  (15 + 9/11) braccia, diametro del cerchio interno;
* moltiplicare per la costante (3 + 1/7): (15 + 9/11) * (3 + 1/7) = (49 + 5/7) braccia,
  circonferenza interna [nel testo è (49 + 55/77) braccia];
* dividere per 2: (49 + 5/7)/2 = (24 + 6/7), semicirconferenza interna;
* moltiplicare per il semidiametro interno: (24 + 6/7) * (15 + 9/11)/2 = (196 + 46/77) braccia^2, area del cerchio interno;
* sottrarre dall'area del cerchio esterno: (249 + 5/11) – (196 + 46/77) = (52 + 6/7) braccia^2, area della corona circolare che forma il muro.

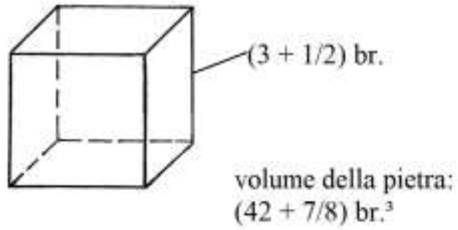
[25] <u>Pietra gettata in un pozzo</u>

Un pozzo ha circonferenza lunga 36 braccia, è profondo 10 ed è pieno di acqua.

Vi viene messa una pietra a forma di prisma a base quadrata, con i lati dei quadrati lunghi (3 + ½) braccia e spesore di 1.

Lo schema che segue presenta, nella stessa scala, la sezione orizzontale del pozzo e l'assonometria cavaliera della pietra:





Il problema chiede di calcolare il volume dell'acqua che fuoriesce.
La procedura risolutiva è la seguente:

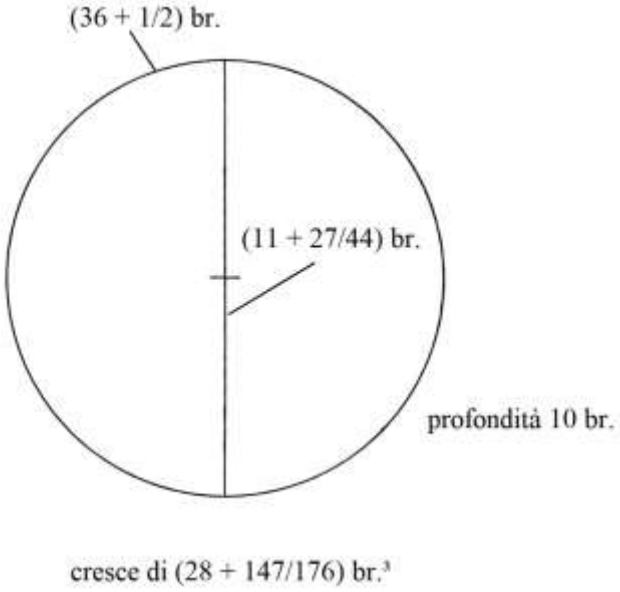
* dividere la circonferenza per la costante (3 + 1/7): 36/(3 + 1/7) = (11 + 5/11) braccia, diametro del pozzo;
* moltiplicare la metà del diametro per la metà della circonferenza: (11 + 5/11)/2 * 36/2 = = 126/22 * 18 = (103 + 1/11) braccia^2, area del cerchio;
* moltiplicare per la profondità del pozzo: (103 + 1/11) * 10 = (1030 + 10/11) braccia^3, volume del pozzo e dell'acqua in esso contenuta;
* moltiplicare lo spigolo del quadrato della faccia della pietra per sé stesso e il risultato per lo spigolo: [(3 + ½) * (3 + ½)] * (3 + ½) = (42 + 7/8) braccia^3, volume della pietra e volume dell'acqua che fuoriesce.

[26] <u>Accrescimento di un pozzo</u>

Un pozzo ha la circonferenza lunga 36 braccia ed è profondo 10.

La circonferenza viene incrementata di ½ braccio. Deve essere calcolato l'aumento del volume del pozzo.

Il problema utilizza i dati del precedente problema: il volume del pozzo è di (1030 + 10/11) braccia^3.



La soluzione è la seguente:

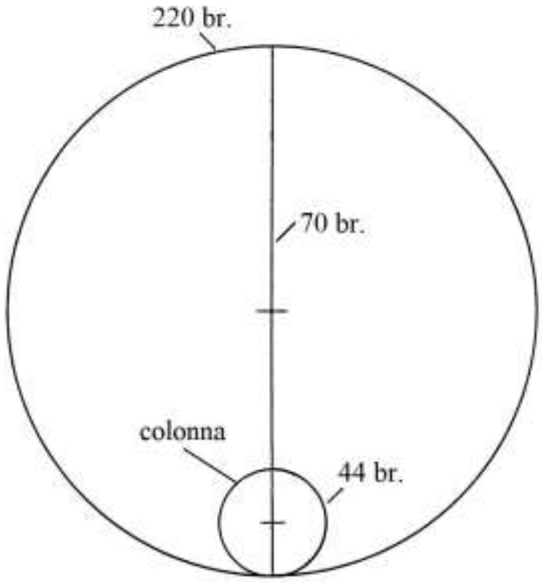
* sommare ½ alla lunghezza iniziale della circonferenza: ½ + 36 = (36 + ½) braccia, lunghezza della nuova circonferenza;
* dividere per la costante (3 + 1/7): (36 + ½)/(3 + 1/7) = (11 + 27/44) braccia, nuovo diametro;
* dividere per 2: (11 + 27/44)/2 = (5 + 71/88) braccia, semidiametro;
* dividere per 2 la nuova circonferenza: (36 + ½)/2 = (18 + ¼);
* moltiplicare per il semidiametro: (18 + ¼) * (5 + 71/88) = (105 + 343/352), area del cerchio;
* moltiplicare per la profondità: (105 + 343/352) * 10 = (1059 + 131/176) braccia^3, volume del pozzo;
* sottrarre il volume iniziale: (1059 + 131/176) – (1030 + 10/11) = (28 + 147/176) braccia^3, incremento del volume del pozzo.

[27] <u>Colonna caduta in una peschiera</u>

Una peschiera ha forma circolare e la sua circonferenza misura 220 braccia ed è profonda 12. Essa è piena di acqua per *metà*.

Vi cade una colonna di marmo che ha circonferenza lunga 44 braccia ed è alta 4.

Il problema chiede di calcolare l’innalzamento del livello dell’acqua.



aumento altezza acqua 4/25 br.

La procedura risolutiva è la seguente:

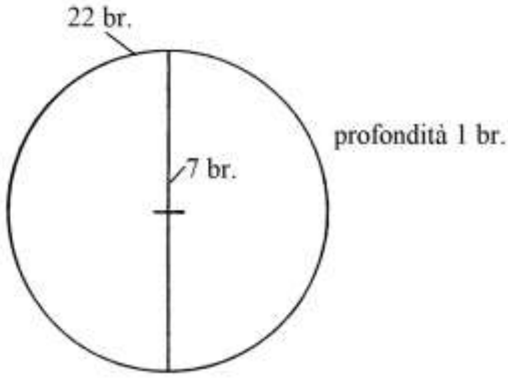
* dividere la circonferenza per la costante (3 + 1/7): 220/(3 + 1/7) = 70 braccia, diametro della peschiera;
* dividere per 2: 70/2 = 35;
* dividere per 2 la circonferenza: 220/2 = 110;
* moltiplicare il semidiametro per la semicirconferenza: 35 * 110 = 3850 braccia^2, area del cerchio;
* dividere per 2 la profondità della peschiera: 12/2 = 6 braccia, profondità dell'acqua;
* moltiplicare per l'area del cerchio: 6 * 3850 = 23100 braccia^3, volume dell'acqua contenuta nella peschiera;
* dividere la circonferenza della colonna per la costante (3 + 1/7): 44/(3 + 1/7) = 14 braccia, diametro della colonna;
* dividere per 2 la circonferenza della colonna: 44/2 = 22;
* moltiplicare per metà del diametro: 22 * (14/2) = 154 braccia^2, base della colonna;
* moltiplicare per l'altezza della colonna: 154 * 4 = 616 braccia^3, volume della colonna;
* sommare al volume dell'acqua: 616 + 23100 = 23716 braccia^3, volume dell'acqua e della colonna;
* dividere per l'area della peschiera: 23716/3850 = (6 + 4/25) braccia, nuova profondità dell'acqua;
* sottrarre la profondità originaria: (6 + 4/25) – 6 = 4/25 braccio, incremento dell'altezza dell'acqua.

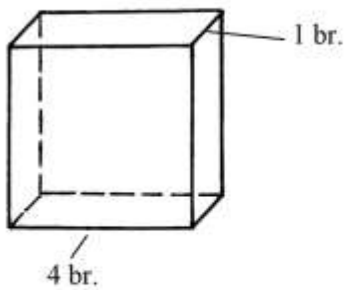
[28] <u>Pietra in una fonte</u>

Una fonte circolare ha circonferenza *c* lunga 22 braccia ed è profonda 1 braccio: l'acqua è radente.

Nella fonte viene deposta una pietra che ha forma di un prisma a base quadrata: il quadrato ha lati lunghi 4 braccia e il solido è alto 1 braccio.

Il problema chiede di calcolare il volume dell'acqua che fuoriesce dalla fonte.





Il diametro *d* della fonte è:

$$d = 22/(3 + 1/7) = 7 \text{ braccia.}$$

L'area dello specchio d'acqua è:

$$A = c/2 * d/2 = (22/2) * (7/2) = (38 + ½) \text{ braccia}^2.$$

Il volume della pietra è dato da:

$$V_{\text{PIETRA}} = 4 * 4 * 1 = 16 \text{ braccia}^3.$$

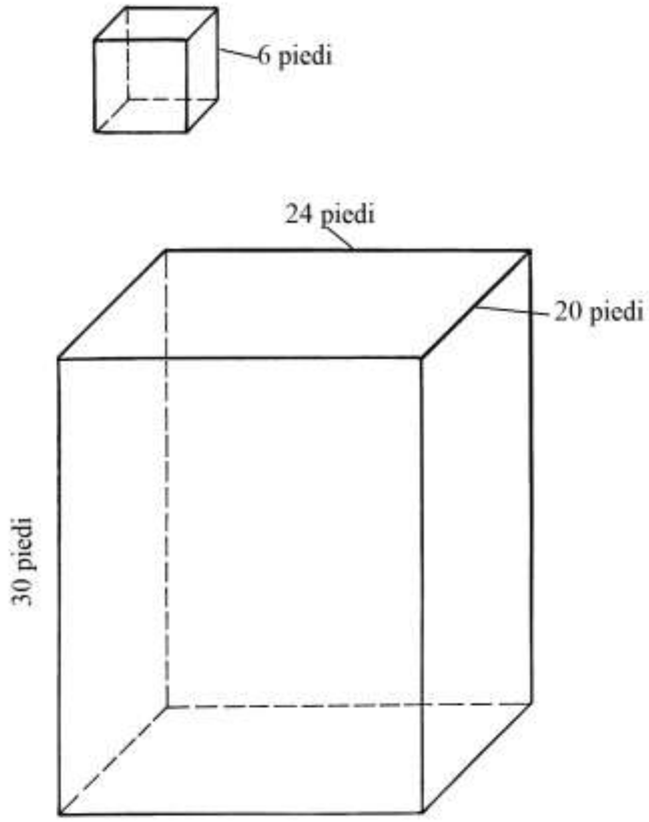
Il volume dell'acqua che fuoriesce è uguale a quello della pietra.

Nella fonte rimangono:

$$(38 + ½) – 16 = (22 + ½) \text{ braccia}^3 \text{ di acqua.}$$

[29] <u>Pietra in una cisterna</u>

Una cisterna contiene 1000 barili [*barigle*] di acqua, è larga 20 piedi, lunga 24 e alta 30 piedi. Essa è piena.



Il problema chiede di calcolare il volume dell'acqua che esce dalla cisterna se vi è depositata una pietra di forma "quadra" (e cioè cubica), con spigoli lunghi 6 piedi.

L'area della base della cisterna è:

$A_{BASE} = 20 * 24 = 480$ piedi^2.

Il volume della cisterna è:

$V_{CISTERNA} = A_{BASE} *$ altezza $= 480 * 30 = 14400$ piedi^3.

Il volume della pietra cubica è:

$V_{PIETRA} =$ spigolo$^3 = 6^3 = 216$ piedi^3.

Il volume dell'acqua che fuoriesce, espresso in barili, è calcolato con una proporzione:

14400 piedi^3 : 1000 barili = 216 piedi^3 : volume acqua fuoriuscita

volume acqua fuoriuscita = (1000 * 216)/14400 = 15 barili.

- APPROFONDIMENTO -

In questa Ragione compaiono due unità di misura: il barile (*barigle*) e il piede (plurale *pièie*).

Le due figure che seguono riproducono parte delle pagine 518 e 519 del manuale di Angelo Martini (citato in bibliografia):

PERUGIA (Regno d'Italia), *Vedi Roma.*

ANTICHE MISURE, PESI E MONETE.

Misure di lunghezza

	metri
Canna agrimensoria = 15 Piedi	5,452500
Canna mercantile = 8 Palmi	2,008500
Braccio da tela = 4 Palmi	1,004250
Passetto = 2 Piedi	0,727000
Braccetto da nastri = 2 $^1/_2$ Palmi	0,627656
Piede da legname e da fabbriche = 12 Once	0,363500
Palmo	0,251062
Oncia	0,030292

Oltre le Misure suddette, speciali di Perugia, si usavano pure quelle antiche di Roma; *Vedi Roma.*

Misure di superficie

	ari
Mina = 150 Tavole	44,594634
	metri qu.
Tavola = 225 Piedi quadri	29,729756
Piede quadro	0,132132

Misure di volume

	metri c.
Canna cuba (Canna cuba architettonica romana) = 1000 lo Palmi cubi	11,152616
o cubo (Palmo cubo ro- uso, o)	0,011153
	litri
Foglietta = 2 Quartucce	0,567500
Quartuccia	0,283750

Misure di capacità

Per gli aridi:

	litri
Rubbio da legumi = 2 $^3/_8$ Sacchi (9 $^1/_2$ Staia)	336,015000
Rubbio da grano = 2 Sacchi (8 Staia)	282,960000
Sacco = 2 Mine (4 Staia)	141,480000
Mina = 2 Staia	70,740000
Staio = 2 Quarti	35,370000
Quarto = 4 Coppe	17,685000
Coppa = 4 Scodelle	4,421250
Scodella	1,105312

Il Rubbio da legumi di Perugia si divide come quello del grano, ma si considera di Staia 9 $^1/_2$, perchè lo Staio in tal caso è adoperato colmo e non raso.

Per il vino:

	litri
Soma da mosto = 2 Barili da mosto	99,880000
Soma da vino = 2 Barili da vino	95,340000
Barile da mosto = 22 Boccali	49,940000
Barile da vino = 21 Boccale	47,670000
Boccale = 2 Mezzi	2,270000
Mezzo = 2 Fogliette	1,135000

Per l'olio:

	litri
Mezzolino (Caldarello) = 4 Quarti	24,160000
Quarto = 15 Libbre	6,040000
Libbra = 2 Mezze	0,402667
Mezza = 2 Terzetti	0,201333
Terzetto	0,100667

Pesi

	chilogr.
Libbra = 12 Once	0,337815
Oncia = 8 Ottave	0,028151
Ottava = 3 Denari	0,003519
Denaro = 24 Grani	0,001173
Grano	0,000049

Per i medicinali, *Vedi Roma.*

Monete — Vedi Roma.

Il testo di Martini è stato pubblicato nel 1883 e quindi sei secoli dopo la compilazione del *Livero de l'Abbecho*. Le unità di misura sono cambiate nel tempo, ma i loro nomi si sono conservati.

Pur nell'incertezza che affligge la conoscenza della natura delle equivalenze delle unità di misura medievali, la lunghezza del *piede* non può essere molto cambiata: si tratta di un'unità di misura *anatomica*.

Anche lo Zupko fornisce per il "*piede da legname e da fabbrica*" in uso a Perugia una lunghezza equivalente a 0,365 metri.

- -

[30] Colonna in una cisterna

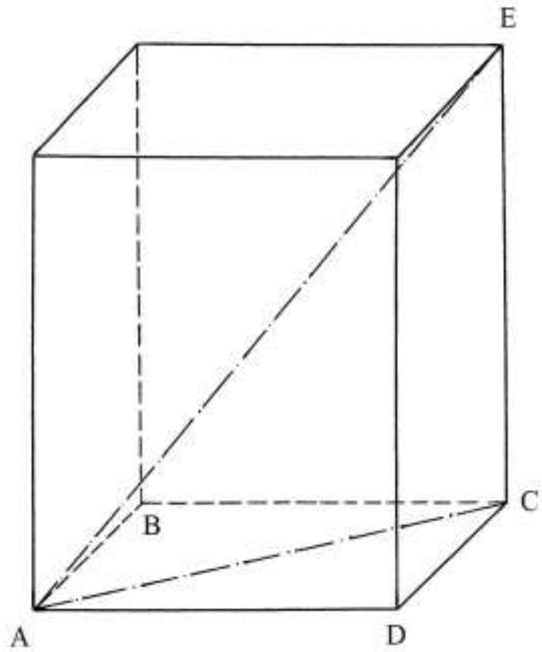
Nella cisterna considerata nella precedente Ragione viene inserita una colonna cilindrica che ha circonferenza lunga 22 piedi ed è alta 100 piedi.

Il problema chiede di calcolare l'acqua che fuoriesce.

I dati del problema destano qualche perplessità: come è possibile far entra una colonna lunga 100 piedi (equivalenti a oltre 36 metri) in una cisterna di dimensioni 20*24*30 piedi?

Alla fine del XIII secolo poteva esistere una colonna di quelle dimensioni (e di quel peso)? Probabilmente, la colonna era alta soltanto *10* (dieci) piedi.

La diagonale della cisterna è assai più corta di 100 piedi:



AC è una diagonale della faccia ABCD ed è lunga:

$AC^2 = AD^2 + DC^2 = 24^2 + 20^2 = 576 + 400 = 976$ e

$AC = \sqrt{976}$ piedi.

AEC è un triangolo rettangolo e AE è la sua ipotenusa che è una diagonale del parallelepipedo: essa è lunga:

$AE^2 = AC^2 + CE^2 = 976 + 30^2 = 976 + 900 = 1876$ e

$AE = \sqrt{1876} \approx 52,69$ piedi.

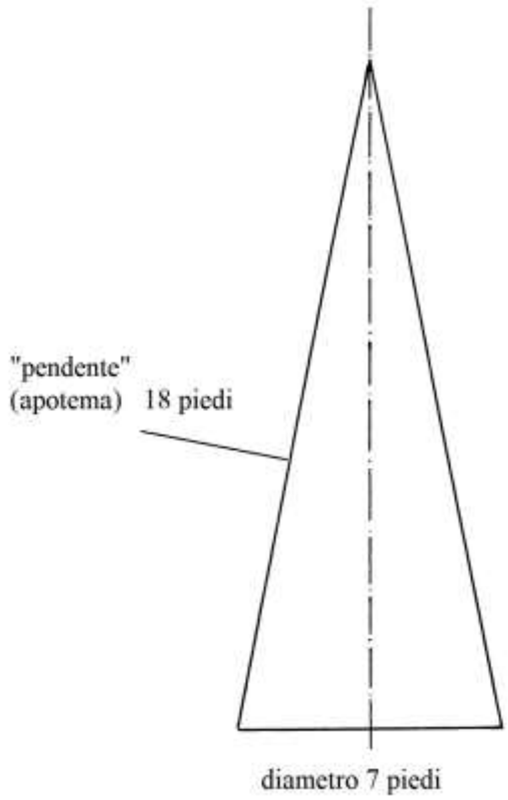
La colonna alta 100 piedi non può essere appoggiata lungo la diagonale AE della cisterna perché è assai più lunga.

La soluzione che sia Arrighi sia Bocchi trascrivono è la seguente:

* dividere la circonferenza della colonna per (3 + 1/7): 22/(3 + 1/7) = 7 piedi, diametro della colonna;
* moltiplicare metà della circonferenza per metà del diametro: (22/2) * (7/2) = (38 + ½) piedi^2, area del cerchio di base della colonna;
* moltiplicare per l'altezza della colonna: (38 + ½) * 100 = 3850 piedi^3, volume della colonna;
* moltiplicare per 1000 [barili]: *3850 * 1000 = 385.000* [a questo punto sorge un problema: 3850 per 1000 fa 3.850.000 e non 385.000: questo errore conferma che la colonna è alta *10 piedi* e non *100 piedi*?];
* dividere per 14400 [piedi^3]: 385.000/14400 = (26 + 53/72) barili, volume dell'acqua che fuoriesce.

[31] Pietra conica in una cisterna

Nella solita cisterna colma di acqua è collocata una pietra a forma di cono retto che ha circonferenza di base lunga 22 piedi e apotema (*pendente*) lungo 18 piedi: la base è uguale a quella della colonna cilindrica del precedente problema.



Il problema chiede il volume della acqua che fuoriesce dalla cisterna dopo avervi posizionato il cono.

La soluzione è la seguente:

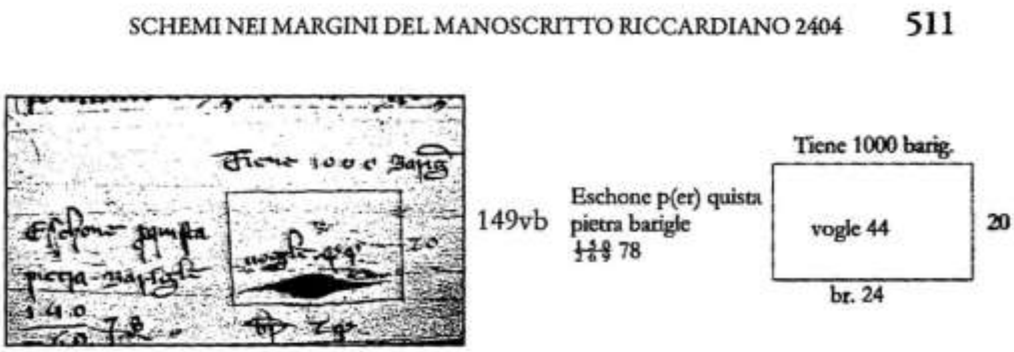
* dividere la circonferenza della base del cono per (3 + 1/7): 22/(3 + 1/7) = 7 piedi, diametro della base;
* moltiplicare metà della circonferenza per metà del diametro della base: (22/2) * (7/2) = (38 + ½) piedi^2, area della base;
* moltiplicare per sé stesso l'apotema del cono: 18 * 18 = 324;
* moltiplicare per sé stessa la metà del diametro della base del cono: (7/2) * (7/2) = (12 + ¼);
* sottrarre da 324: 324 – (12 + ¼) = (311 + ¾);
* estrarre la radice quadrata: √(311 + ¾) = (17 + 12/17) piedi, altezza del cono retto;
* dividere per 3: (17 + 12/17)/3 = (5 + 15/17);
* moltiplicare per l'area della base: (5 + 15/17) * (38 + ½) = (226 + 8/17) piedi^3, volume della pietra conica e dell'acqua che fuoriesce;
* moltiplicare per 1000 [barili]: (226 + 8/17) * 1000;
* dividere per il volume della cisterna in piedi^3: [(226 + 8/17) * 1000]/14400 = = (15 + 445/612) barili, volume dell'acqua che fuoriesce.

Nota: i risultati forniti dal Maestro Umbro sono leggermente differenti da quelli calcolati in questo articolo perché egli non riduce le frazioni ai minimi termini.

[32] <u>Pietra a forma di fuso</u>

Nella consueta cisterna è collocata una pietra che ha la forma di un *fuso* usato per la filatura.

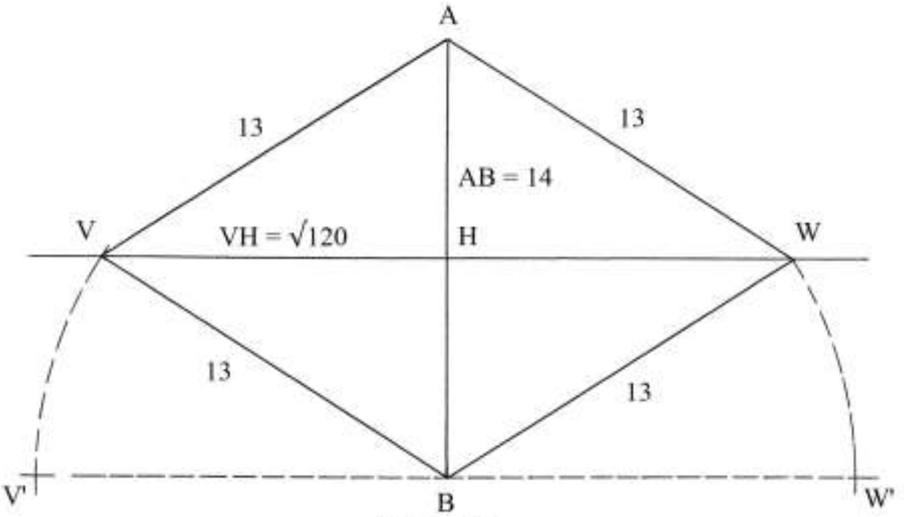
Essa ha la forma di una doppia piramide, come mostra lo schema originale riprodotto da pagina 511 del volume di Andrea Bocchi:



Lo schema sopra riportato presenta un dubbio: se la cisterna è la stessa dei precedenti problemi, la lunghezza “24” non è espressa in “br.[accia]” ma in *piedi*.

Il testo del problema è piuttosto oscuro. Qui ne viene data un’interpretazione che parrebbe confermata dai dati forniti dal Maestro Umbro.

La pietra ha la forma descritta nello schema che segue:



V'W' = 26

dimensioni in piedi lineari

La circonferenza del cerchio che forma la base del doppio cono, AHB, è lunga 44 piedi: il diametro AB è:

AB = 44/(3 + 1/7) = 14 piedi.

L’Autore indica la lunghezza della pietra uguale a 26 piedi: in realtà si tratta della somma delle lunghezze dei due apotemi VB e BW:

VB + BW = 13 + 13 = 26 piedi.

Per il vertice B è tracciata una retta parallela all’asse di simmetria del doppio cono, VHW: su di esso sono ribaltate le lunghezze, uguali, dei due apotemi BV e BW: il segmento V’BW’ è lungo 26 piedi.

Questa soluzione è simile a quella utilizzata nel precedente problema.

Con il teorema di Pitagora calcoliamo l’altezza di uno dei due coni retti:

$VH^2 = VA^2 – AH^2 = 13^2 – (14/2)^2 = 169 – 49 = 120$ e
$VH = \sqrt{120}$ piedi.

L'intera altezza VW è:

$VW = 2 * VH = 2 * \sqrt{120} = \sqrt{480} \approx 21,9$ piedi.

Grazie alle sue dimensioni, la pietra può essere contenuta nella cisterna.

Il volume della pietra è il doppio di quello di ciascuno dei due coni.

L'area della base è:

A_{BASE} = (circonferenza/2) * (AB/2) = (44/2) * (14/2) = 22 * 7 = 154 piedi^2.

Il volume di un cono è:

$V_{CONO} = (A_{BASE} * VH)/3 = (154 * \sqrt{120})/3 = 154 * \sqrt{(40/3)}$ piedi^3.

Il volume dell'intera pietra è:

$V_{PIETRA} = 2 * V_{CONO} = 2 * [154 * \sqrt{(40/3)}] = 154 * \sqrt{(160/3)} = (1124 + 2/3)$ piedi^3.

Il Maestro Umbro offre lo stesso risultato, senza fornire alcuna dettagliata spiegazione.

Il volume dell'acqua che fuoriesce è:

(1124 + 2/3) * 1000/14400 = (78 + 150/269) barili.

[33] <u>Pietra sferica nella cisterna</u>

L'ultimo caso di questa serie di pietre che cadono in una cisterna piena di acqua è quello di una sfera che ha circonferenza *c* di 44 piedi: il suo diametro *d* è lungo 14 piedi.

Il Maestro Umbro calcola il volume della sfera con la seguente procedura:

* moltiplicare il diametro per 1/6: 14 * 1/6 = (2 + 1/3) [nel testo è (2 + ½)];
* moltiplicare per il diametro: (2 + 1/3) * 14 = (32 + 2/3);
* moltiplicare per la circonferenza: (32 + 2/3) * 44 = (1437 + 1/3) piedi^3 [l'Autore dà 1437].

La soluzione può essere riassunta nella formula:

$V_{SFERA} = d/6 * d * c = [(d^2)/6] * c.$

La formula che è oggi usata è:

$V_{SFERA} = 4/3 * \pi * r^3$, con *r* lunghezza del raggio. La formula diviene:

$V_{SFERA} = 4/3 * 22/7 * (d/2)^3 = 88/21 * (14/2)^3 = 88/21 * 14^3/8 =$

$= 11/21 * 2744 = (1437 + 1/3)$ piedi^3.

Le due formule sono equivalenti e la procedura usata dal Maestro Umbro è corretta.

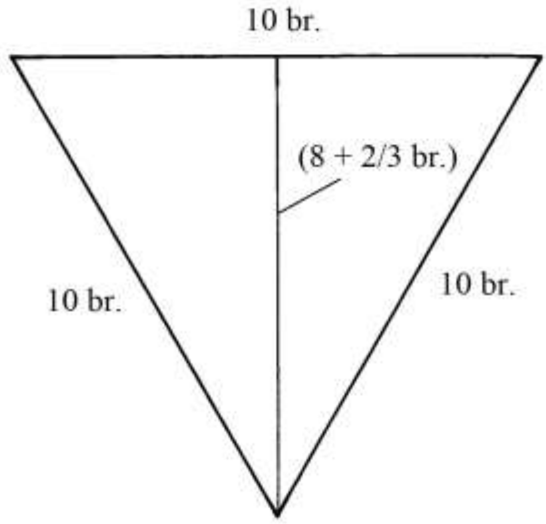
Il volume dell'acqua che fuoriesce è:

$V_{ACQUA} = V_{SFERA} * 1000/14400 = (99 + 22/27)$ barili.

3° CAPITOLO
LE REGOLE DELLO SCUDO E DEL TRIANGOLO

[34] Altezza di un triangolo equilatero

Un *eschudo*, e cioè un triangolo che in questo caso è *equilatero*, ha lati lunghi 10 braccia. Il problema chiede di calcolare l'altezza (o *diametro*, secondo il Maestro Umbro).



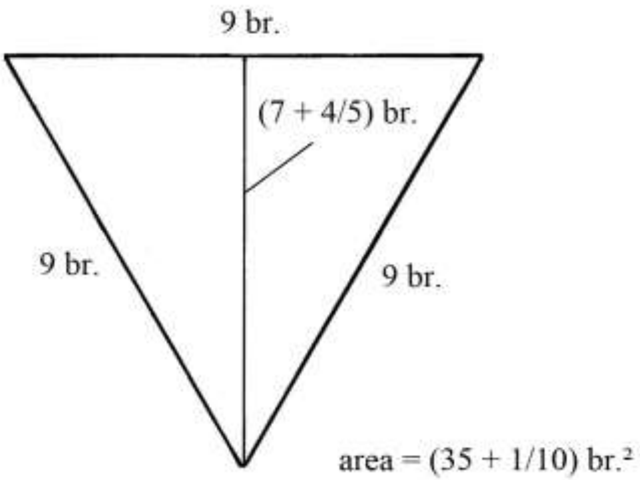
La procedura impiegata è la seguente:

* moltiplicare la lunghezza del lato per sé stessa: 10 * 10 = 100;
* moltiplicare per ¼: 100 * ¼ = 25;
* sottrarre 25 da 100: 100 – 25 = 75;
* estrarre la radice quadrata: √75 ≈ (8 + 2/3) braccia, altezza HA del triangolo equilatero

[l'Autore approssima √75 = √3*25 = 5 * √3, che è un numero irrazionale, al *numero misto* (8 + 2/3) che più gli si avvicina. Infatti √75 ≈ 8,6602 e (8 +2/3) ≈ 8,(66): le cifre racchiuse fra parentesi tonde (66), dopo la virgola, sono la *stringa* che si ripete all'infinito perché il numero è periodico].

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Il problema presenta una variante: un secondo triangolo equilatero ha lati lunghi 9 braccia: il testo chiede l'altezza e l'area del triangolo.



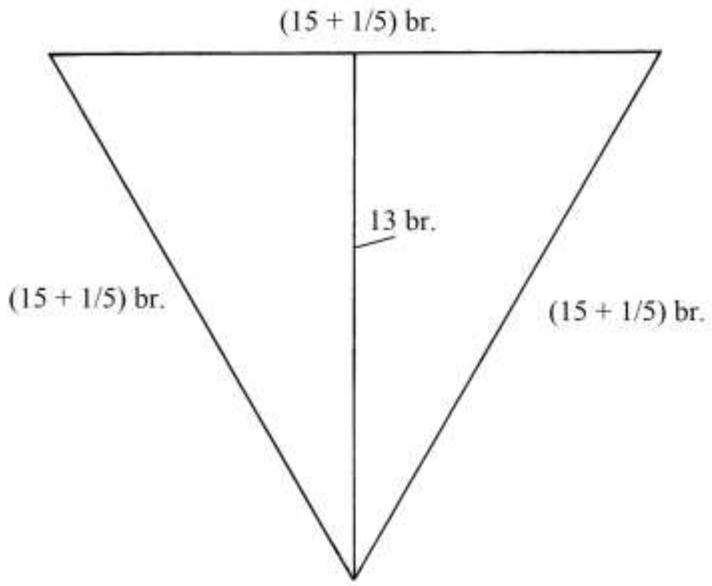
La procedura applicata è la seguente:

* moltiplicare la lunghezza del lato per sé stessa: 9 * 9 = 81 ;
* dividere per 2 la lunghezza del lato: 9 : 2 = (4 + ½);
* moltiplicare per sé stesso: (4 + ½) * (4 + ½) = (20 + ¼);
* sottrarre l'ultimo prodotto da 81: 81 – (20 + ¼) = (60 + ¾);
* estrarre la radice quadrata: √(60 + ¾) ≈ (7 + 4/5) braccia, altezza del triangolo equilatero;
* moltiplicare l'altezza per la metà del lato: (7 + 4/5) * (4 + ½) = (35 + 1/10) braccia^2, area di questo secondo triangolo equilatero.

Nota: il Maestro Umbro giustifica l'approssimazione a un numero misto delle radici quadrate quando sono *sorde*: una radice è *sorda* o irrazionale quando non può essere espressa con un numero razionale.

[35] Altezza di un triangolo equilatero

È nota l'altezza di un triangolo equilatero: essa è lunga 13 braccia.
Il problema chiede di ricavare la lunghezza dei suoi lati.



La procedura usata è la seguente:

* moltiplicare l'altezza per sé stessa: $13 * 13 = 169$;
* dividere per 3: $169 : 3 = (56 + 1/3)$;
* sommare l'ultimo quoziente a 169: $(56 + 1/3) + 169 = (225 + 1/3)$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{(225 + 1/3)} \approx (15 + 1/15)$ braccia, lunghezza di ciascuno dei tre lati.

- APPROFONDIMENTO -

La procedura usata dall'Autore è riassunta con la formula che segue:

$$\text{lato} = \sqrt{(\text{altezza}^2 + 1/3 * \text{altezza}^2)} = \text{altezza} * 2/\sqrt{3} = \text{altezza} * 2 * \sqrt{(3)}/3.$$

Essa è la formula inversa di quella che fornisce la lunghezza dell'altezza conoscendo quella del lato:

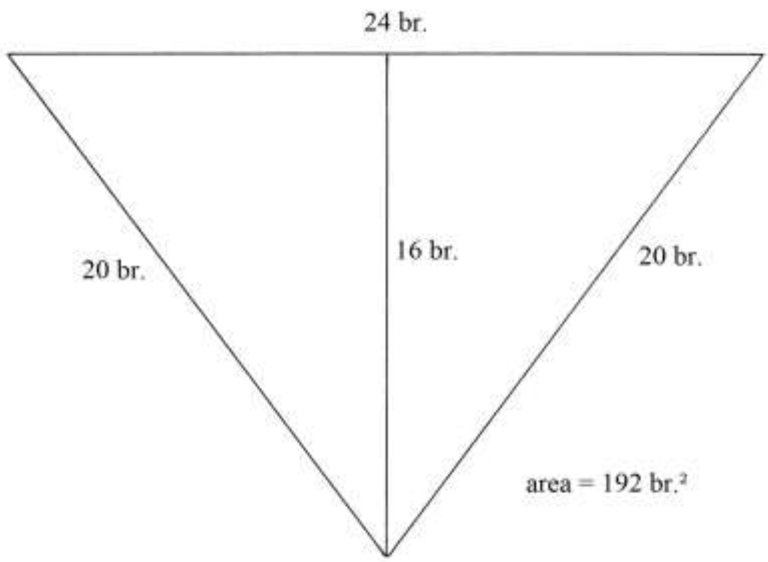
$$\text{altezza} = \sqrt{(\text{lato}^2 - \text{lato}^2/4)} = \text{lato} * \sqrt{(3)}/2$$ dalla quale si ha:

$$\text{lato} = 2 * \text{altezza}/\sqrt{3} = 2 * /\sqrt{3} * \text{altezza}/3$$, che è la formula sottostante alla procedura impiegata dal Maestro Umbro.

- -

[36] <u>Un triangolo isoscele</u>

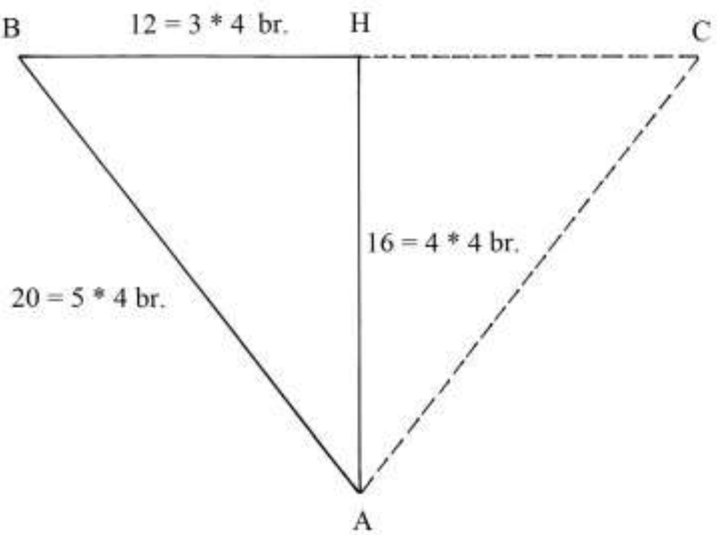
Uno scudo ha la forma di un triangolo isoscele:



Il *lato di sopra* è lungo 24 braccia e l'altezza è 16 braccia.
Il problema chiede di calcolare la lunghezza dei due lati obliqui e l'area.
Ecco la procedura:

* dividere per 2 la lunghezza del *lato di sopra*: 24 : 2 = 12;
* moltiplicare per sé stesso: 12 * 12 = 144;
* moltiplicare per sé stessa l'altezza: 16 * 16 = 256
* sommare i due ultimi prodotti: 144 + 256 = 400;
* estrarre la radice quadrata: √400 = 20 braccia, lunghezza dei due lati obliqui;
* moltiplicare metà della lunghezza del lato di sopra per l'altezza: 12 * 16 = 192 $braccia^2$, area del triangolo isoscele.

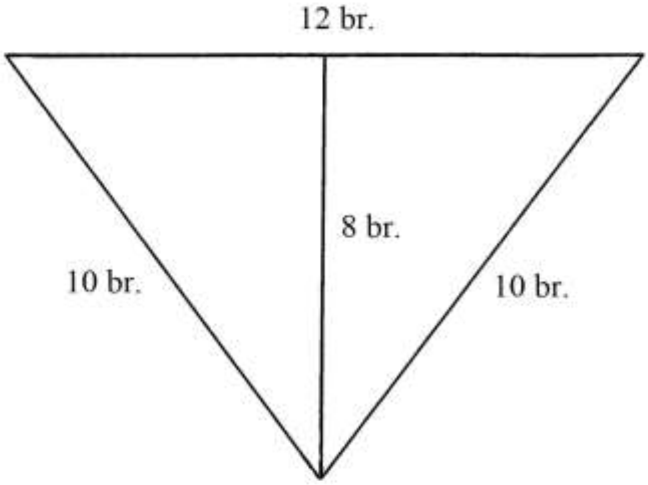
Nota: il triangolo isoscele ABC è scomposto dall'altezza AH in due triangoli rettangoli di uguali dimensioni:



Ciascuno dei due triangoli ha i lati con lunghezze che formano la terna derivata 12-16-20, multipla di un fattore 4 della terna primitiva 3-4-5.

[37] Triangolo isoscele

La descrizione di questo problema è piuttosto contorta e di difficile interpretazione. La descrizione che segue e la successiva soluzione sono soltanto un'ipotesi.



Uno scudo ha un lato lungo 12 braccia: è il lato di sopra.

Senza fornire ulteriori informazioni, il Maestro Umbro chiede di determinare la lunghezza dei due lati obliqui e la sua area.

La procedura messa in atto nel trattato è la seguente:

* calcolare 1/6 della lunghezza del lato di sopra: 12 : 6 = 2;
* sottrarre 2 da 12: 12 – 2 = 10 braccia, lunghezza dei due lati obliqui;
* dividere per 3 la lunghezza del lato di sopra: 12 : 3 = 4;
* sottrarre l'ultimo quoziente dalla lunghezza del lato di sopra: 12 – 4 = 8 braccia, altezza del triangolo;
* moltiplicare l'altezza per metà della lunghezza del lato di sopra:
  $8 * (12/2) = 8 * 6 = 48$ braccia^2, area del triangolo.

Il Maestro Umbro effettua poi una verifica dei risultati ottenuti con i seguenti passaggi:

* moltiplicare la lunghezza della metà del lato di sopra per sé stessa:
  $(12/2) * (12/2) = 6 * 6 = 36$;
* moltiplicare l'altezza per sé stessa: $8 * 8 = 64$;
* sommare i due prodotti: $36 + 64 = 100$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{100} = 10$ braccia, lunghezza dei due lati obliqui.

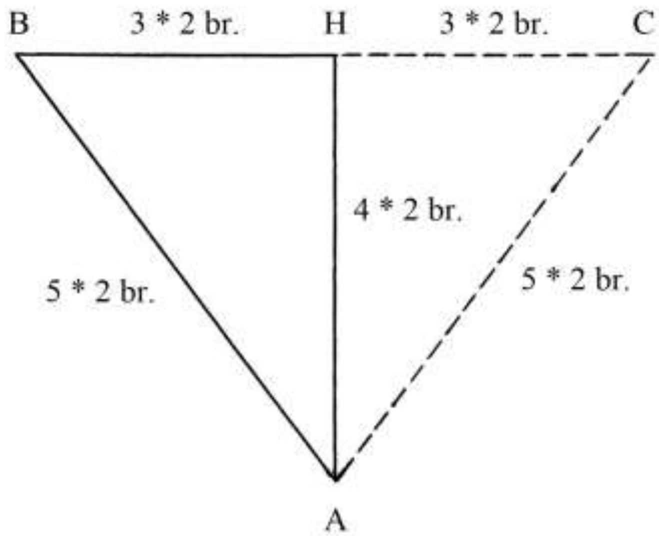
Nota: non sono spiegati i motivi che stanno alla base dei primi quattro passi della precedente procedura. L'Autore non fornisce alcuna indicazione.

Le lunghezze dell'altezza, dei lati obliqui e del lato superiore formano una *progressione aritmetica* di ragione 2: $8 \rightarrow 10 \rightarrow 12$.

Come vedremo nel caso del successivo problema, i lati obliqui sono lunghi i 5/6 del *lato di sopra* e l'altezza relativa a questo ultimo è lunga i 2/3 del lato stesso.

È ragionevole ritenere che nel manoscritto il copista abbia omesso un paragrafo.

Il triangolo ABC è scomponibile in due triangoli rettangoli, ABH e AHC, i cui lati formano la terna pitagorica 3-4-5 moltiplicata per il fattore 2:

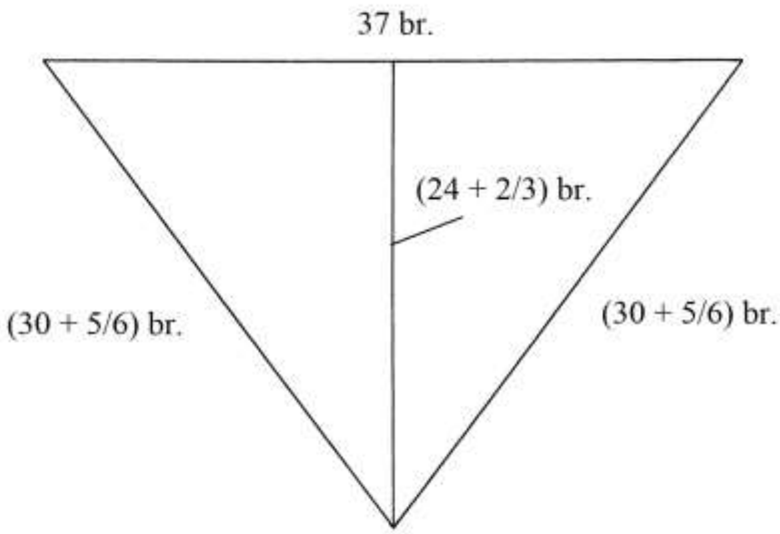


I lati del triangolo isoscele di questo problema hanno dimensioni lunghe la *metà* dei corrispondenti lati del precedente problema [36].

[38] <u>Triangolo isoscele dato un lato</u>

Il *lato di sopra* di un triangolo isoscele è lungo 37 braccia.

Il problema chiede in maniera implicita di calcolare la lunghezza dei lati obliqui e l'area.



Ecco la procedura:

*	calcolare 1/6 di 37:	37 * 1/6 = (6 + 1/6);
*	sottrarre da 37:	37 – (6 + 1/6) = (30 + 5/6) braccia,
	lunghezza dei due lati obliqui;	
*	calcolare 1/3 di 37:	37 * 1/3 = (12 + 1/3);
*	sottrarre dalla lunghezza del lato di sopra:	37 – (12 + 1/3) = (24 + 2/3) braccia,
	altezza del triangolo.	

Nota: anche in questo caso è evidente la mancanza di un paragrafo con le spiegazioni occorrenti per avviare la procedura risolutiva.

Se osserviamo in dettaglio le lunghezze dei lati e dell'altezza verifichiamo la presenza di una terna derivata dalla primitiva 3-4-5:

37/2 : (24 + 2/3) : (30 + 5/6) = 3 : 4 : 5

Il modulo per cui i componenti della terna 3-4-5 sono moltiplicati è (6 + 1/6).

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

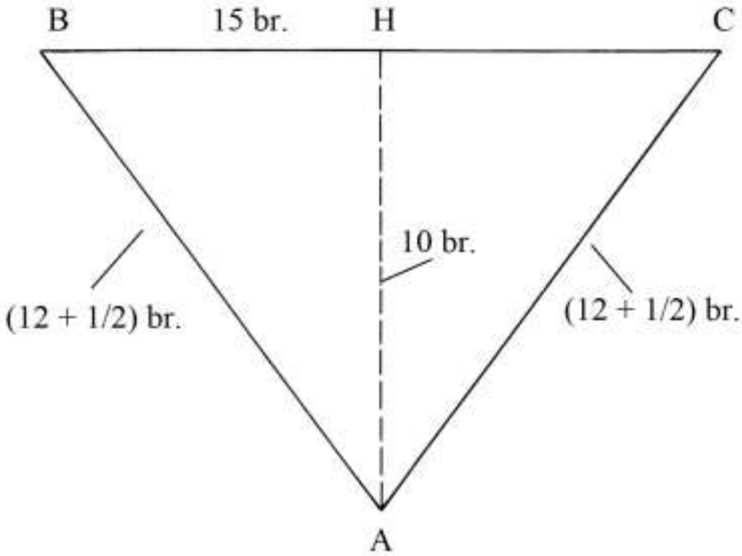
Il Maestro Umbro sviluppa poi una verifica con i seguenti passi:

* dividere per 2 la lunghezza del lato di sopra: 37/2 = (18 + ½);
* moltiplicare per sé stesso: (18 + ½) * (18 + ½) = (342 + ¼);
* moltiplicare l'altezza per sé stessa: (24 + 2/3) * (24 + 2/3) = (608 + 4/9);
* sommare i due ultimi prodotti: (342 + ¼) + (608 + 4/9) = (950 + 25/36);
* estrarre la radice quadrata: √(950 + 25/36) ≈ (30 + 5/6) braccia, lunghezza dei due lati obliqui del triangolo isoscele;
* moltiplicare metà della lunghezza del lato di sopra per l'altezza: (37/2) * (24 + 2/3) = (456 + 1/3) braccia^2, area del triangolo isoscele.

[39] Triangolo isoscele data l'altezza

Un triangolo isoscele ha altezza lunga 10 braccia.

Il problema chiede di calcolare la sua area.



La procedura usata è la seguente:

* dividere per 2 l'altezza: 10/2 = 5;
* addizionare il precedente quoziente all'altezza: 5 + 10 = 15 braccia, lunghezza del lato di sopra [BC];
* dividere la lunghezza della *line de sopre* [BC] per 6: 15/6 = (2 + ½);
* sottrarre l'ultimo quoziente dalla lunghezza del lato di sopra: 15 – (2 + ½) = (12 + ½) braccia, lunghezza dei due lati obliqui [AB e AC];
* moltiplicare la metà della *lina de sopre* per l'altezza: (15/2) * 10 = 75 braccia^2, area del triangolo.

Nota: anche in questo problema compare la terna pitagorica 3-4-5. Infatti le lunghezze dei lati dei due triangoli rettangoli ABH e AHC stanno nella seguente proporzione:

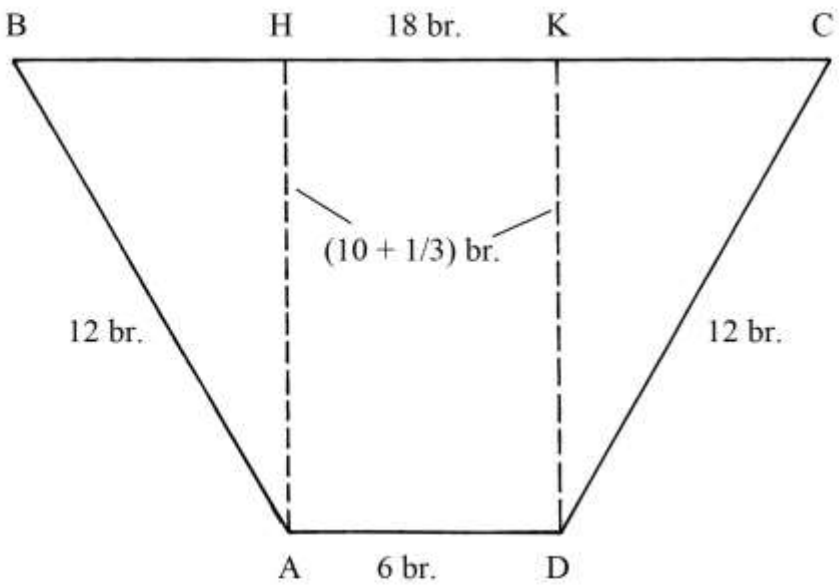
BH : AH : AB = 7,5 : 10 : 12,5 = 3 : 4 : 5.

La verifica dei risultati descritta nel trattato è articolata sui seguenti passi:

* dividere per 2 la lunghezza del lato di sopra: 15/ 2 = (7 + ½);
* moltiplicare per sé stesso: (7 + ½) * (7 + ½) = (56 + ¼);
* moltiplicare l'altezza per sé stessa: 10 * 10 = 100;
* sommare gli ultimi due prodotti: (56 + ¼) + 100 = (156 + ¼);
* estrarre la radice quadrata: √(156,25) = 12,5 braccia, lunghezza dei due lati obliqui [AB e AC].

[40] Trapezio isoscele

Uno *scudo* ha la forma di un trapezio isoscele:



La base superiore è la più lunga ed è 18 braccia, mentre la base minore è 6 braccia. I due lati obliqui, AB e DC, sono lunghi 12 braccia.

La base superiore è detta *façia de sopra*, i lati obliqui sono le *façie da lato* e la base minore la *testa de sotta*.

Le lunghezze dei lati del trapezio sono multiple di 3:

AD : 6 = AB : 12 = BC : 18.

Il problema domanda la superficie del trapezio.

La procedura impiegata è la seguente:

* moltiplicare per sé stessa la lunghezza di un lato obliquo: 12 * 12 = 144;
* dividere per 4: 144/4 = 36;
* sottrarre da 144: 144 – 36 = 108;
* estrarre la radice quadrata: √108 ≈ (10 + 1/3) braccia, altezza [AH] del trapezio;
* dividere per 2 la lunghezza di un lato obliquo: 12/2 = 6;
* moltiplicare per l'altezza: 6 * (10 + 1/3) = 62 braccia^2, area del trapezio.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

La procedura impiegata dal Maestro Umbro può essere sintetizzata come segue:

$AB = CD = \ell$ (lati obliqui); $AH = h$ (altezza).

$h = \sqrt{(3/4 * \ell^2)} = (\sqrt{3})/2 * \ell$;

$\text{Area}_{ABCD} = \ell/2 * h = \ell/2 * (\sqrt{3})/2 * \ell = \ell^2 * (\sqrt{3})/4$.

Per spiegare la procedura usata dall'Autore presentiamo un'ipotesi: con centro in A e raggio AB tracciare un arco da B fino a incontrare la base maggiore BC in un punto, K, che già conosciamo essendo il piede dell'altezza DK.

BH è lungo quanto KC ed è:

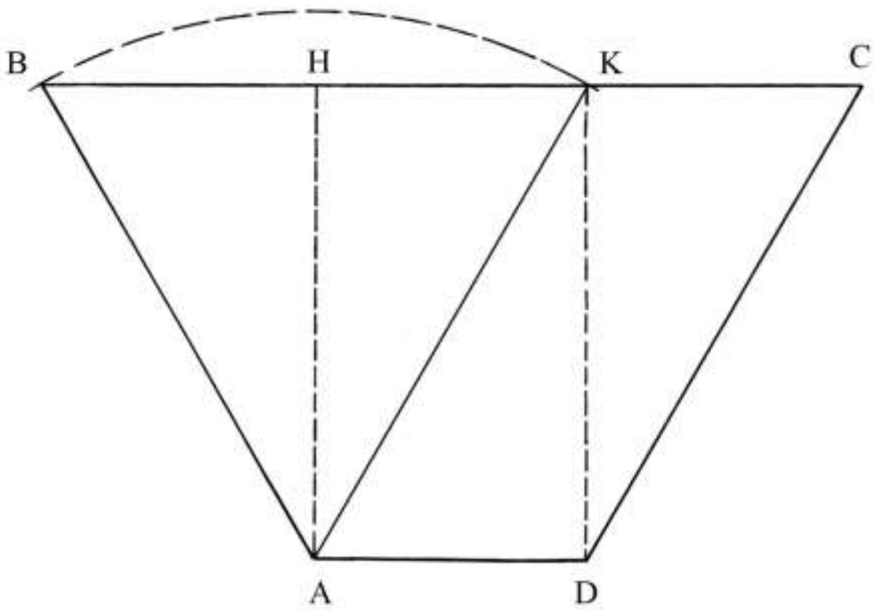
$BH = KC = (BC – AD)/2 = 12 – 6 = 6$ braccia.

Il segmento BK è lungo:

$BK = BH + HK = BH + AD = 6 + 6 = 12$ braccia.

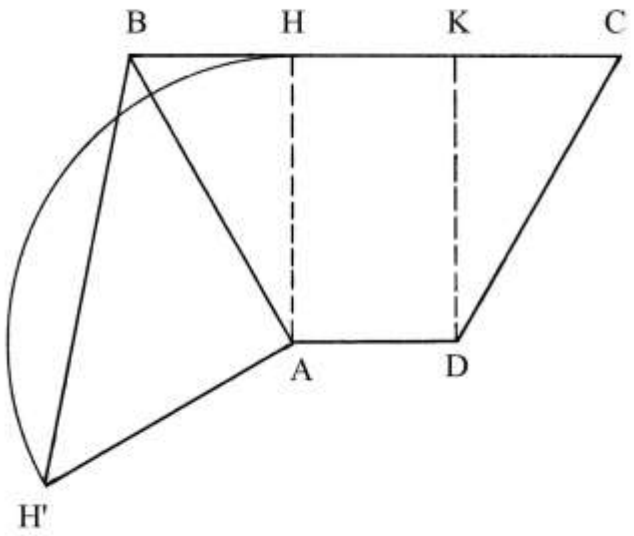
Ne consegue che il triangolo ABK è *equilatero* e AH è una sua altezza: essa è lunga proprio

$AH = AB * (\sqrt{3})/2 = 12 * (\sqrt{3})/2$.



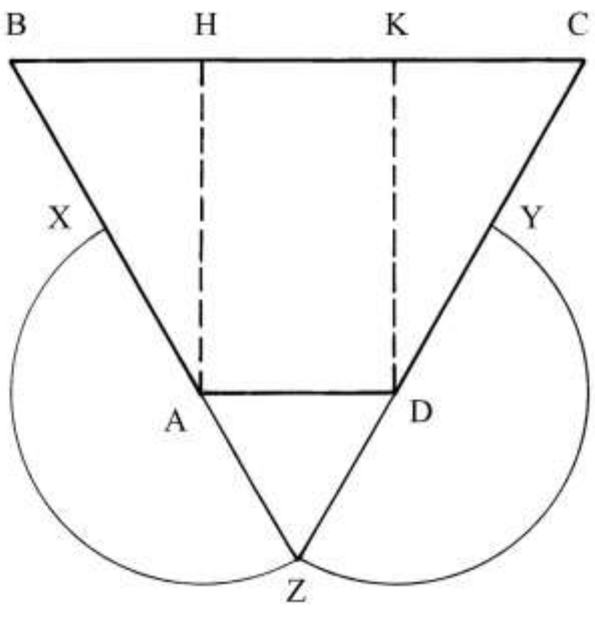
- APPROFONDIMENTO -

L'Autore ha calcolato l'area del trapezio come se essa fosse equivalente a quella del triangolo rettangolo BAH' che ha cateti lunghi: BA = 12 braccia e AH' = AH = (10 + 1/3) braccia:



%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Tentiamo la ricostruzione per via grafica dell'origine del trapezio.



Determinare i punti medi dei lati AB e DC: sono rispettivamente X e Y.

Dato che AB = CD = 12 braccia, i segmenti BX, XA, CY e YD sono tutti lunghi 6 braccia. Questi quattro segmenti hanno la stessa lunghezza della base minore AD.

Prolungare verso il basso i lati BA e CD: le due linee così tracciate si incontrano in un punto, Z.

Fare centro nei punti A e B e con raggio AX = DY disegnare due semicirconferenze che si intersecano nel punto Z.

Il segmento BZ ha lunghezza data da:

BZ = BA + AZ = 12 + 6 = 18 braccia, che è la lunghezza della base maggiore BC.

Per le stesse ragioni, anche il segmento CZ è lungo 18 braccia: ne consegue che ZBC è un triangolo equilatero con lati lunghi 18 braccia.

Il trapezio isoscele ABCD è stato generato dal sezionamento di ZBC lungo il segmento AD mediante l'asportazione del triangolo equilatero ZAD che ha lati lunghi 6 braccia.

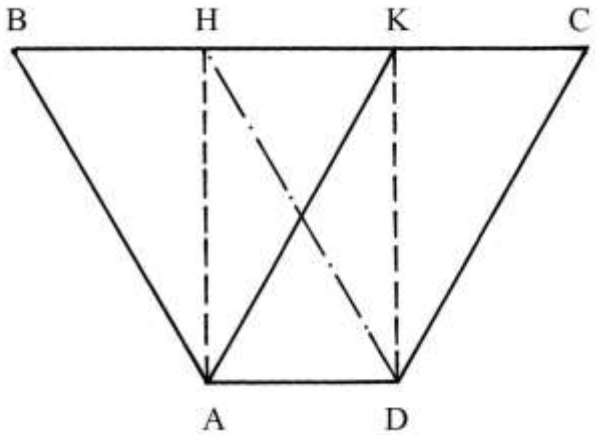
La forma del triangolo originario ZBC giustifica l'uso del termine *scudo* per il trapezio isoscele ABCD.

Ricordiamo la lunghezza di AH, correttamente calcolata dal Maestro Umbro:

$AH = BK = \sqrt{108}$.

Riconsideriamo il triangolo equilatero ABK

Tracciare i segmenti AK e DH:



Applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo AHK si ha:

$AK^2 = AH^2 + HK^2 = (\sqrt{108})^2 + 6^2 = 108 + 36 = 144$.

Ne consegue $AK = \sqrt{144} = 12$ braccia.

Ricordiamo che ABK è un triangolo equilatero con lati lunghi 12 braccia.

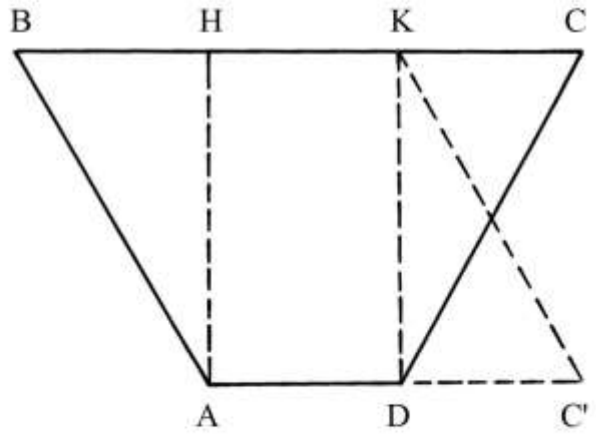
Il segmento AK divide il trapezio ABCD in tre poligoni:

* il triangolo equilatero ABK;
* i triangoli rettangoli ADK e DKC.

Questi ultimi hanno lati lunghi come segue:

* AD = KC = 6 braccia;
* AK = DC = 12 braccia;
* $DK = \sqrt{108}$ braccia.

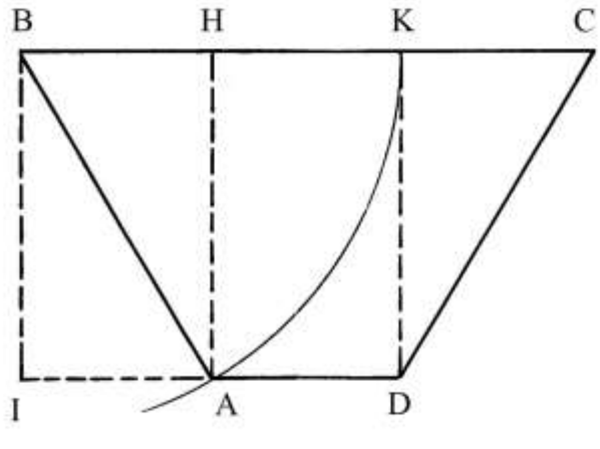
I due triangoli rettangoli hanno aree uguali che entrambe equivalgono a metà di quella del triangolo equilatero ABK; con un'opportuna trasformazione, il triangolo DKC viene spostato fino ad assumere la posizione definita dai vertici D, K e C':



Anche AKC’ è un triangolo equilatero, che ha la stessa superficie di quello ABK.
L’area di ABCD è data dalla somma delle aree dei triangoli equilateri ABK e AKC’.

A questo punto, calcoliamo l’area del triangolo equilatero ABK:
Area ABK = AH * (BK/2) = AH * BH = ($\sqrt{108}$) * 6 ≈ (10 + 1/3) * 6 ≈ 62 braccia^2.
L’area del trapezio è uguale al doppio di quella di ABK:
Area ABCD = 2 * Area ABK ≈ 2 * 62 ≈ 124 braccia^2.
Un’ulteriore verifica di questo risultato è data dall’applicazione della nota formula che calcola l’area di un trapezio mediante il prodotto della semisomma delle basi per l’altezza:
Area ABCD = [(AD + BC)/2] * AH ≈ [(6 +18)/2] * (10 + 1/3) ≈
≈ 12 * (10 + 1/3) ≈ 124 braccia^2.
Il Maestro Umbro ha calcolato solo l’area di metà del trapezio, 62 braccia^2, con la formula
Area ABCD = AB * AH/2.

Vediamo in che cosa consiste l’errore.
La figura che segue trasforma il trapezio ABCD nel rettangolo equivalente IBKD:



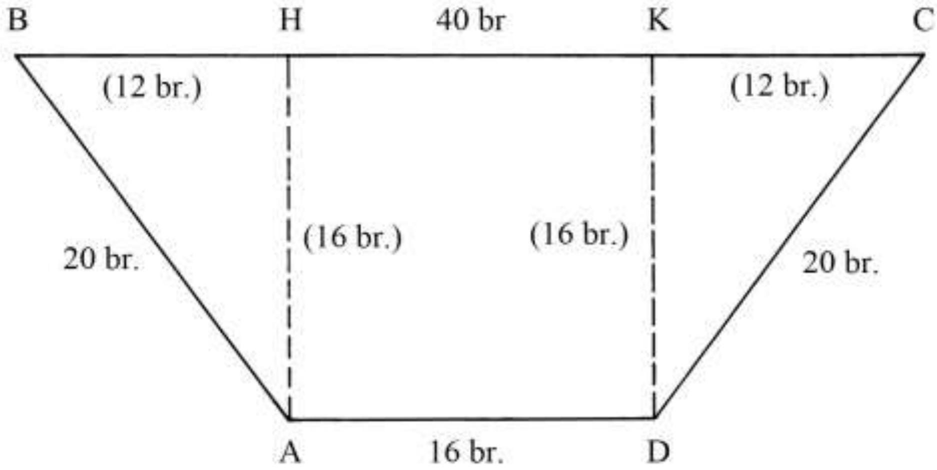
Il rettangolo ha il lato BK lungo quanto AB e BI è lungo quanto l’altezza AH. La sua area è:
Area IBKD = BK * BI = AB * AH = 12 * (10 + 1/3) ≈ 124 braccia^2.

Il Maestro Umbro ha commesso un errore perché ha diviso per 2 il prodotto (AB * AH).

- -

[41] Scudo a forma di trapezio isoscele

Uno *scudo* ha la forma di un trapezio isoscele: la base maggiore è lunga 40 braccia, quella minore 16 e i due lati obliqui sono 20 braccia.



Il problema chiede l'area dello scudo.

La procedura impiegata è piuttosto complessa e poco comprensibile ed è la seguente:

* trarre il *quadro* più grande che è possibile inscrivere nello scudo con lato 16 braccia;
* sottrarre 16 [il Maestro Umbro non indica il *minuendo* ma soltanto il *sottraendo* (16) e la differenza (32) per cui il minuendo è (16 + 32) = 48, cifra della quale l'Autore non indica l'origine]: [48] – 16 = 32;
* moltiplicare la lunghezza di un lato obliquo per sé stessa: 20 * 20 = 400;
* dividere 32 per 2: 32 : 2 = 16;
* moltiplicare per sé stesso: 16 * 16 = 256;
* sottrarre l'ultimo prodotto da 400: 400 – 256 = 144;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{144}$ = 12 braccia, altezza del trapezio [il dato è errato, come vedremo più oltre];
* dividere per 2: 12 : 2 = 6;
* moltiplicare l'altezza per la base minore: 12 * 16 = 192 braccia^2, area del cosiddetto *quadro* [AHKD, che l'Autore ritiene erroneamente essere un *rettangolo*];
* moltiplicare 6 per 32: 6 * 32 = 192;
* sommare gli ultimi due prodotti: 192 + 192 = 384 braccia^2, area dello scudo.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Le altezze AH e DK dividono il trapezio in *tre* poligoni: i triangoli rettangoli ABH e DKC (che hanno uguali dimensioni) e il quadrilatero AHKD.

La lunghezza di BH (uguale a quella di KC) è:

BH = KC = (BC – HK)/2 = (BC – AD)/2 = (40 – 16)/2 = 24/2 = 12 braccia.

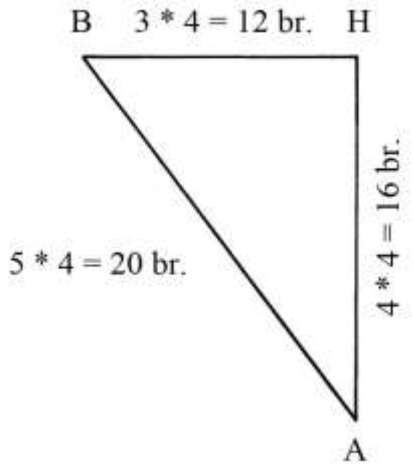
L'altezza AH è un cateto del triangolo rettangolo ABH e la sua lunghezza è data da:

$AH^2 = AB^2 – BH^2 = 20^2 – 12^2 = 400 – 144 = 256$ da cui consegue

AH = $\sqrt{256}$ = 16 braccia.

Il quadrilatero AHKD è un *quadrato* con lati lunghi 16 braccia e non un *rettangolo* come scritto dal Maestro Umbro.

È opportuno notare che i triangoli rettangoli ABH e DKC hanno lati lunghi secondo la terna pitagorica 3-4-5 moltiplicata per il fattore 4:



Le aree dei tre poligoni che compongono ABCD sono:

* Area $_{ABH}$ = (BH * AH)/2 = (12 *16)/2 = 96 braccia^2 ;
* l'Area di DKC è anch'essa 96 braccia^2 ;
* Area $_{AHKD}$ = AH * AD = 16 * 16 = 256 braccia^2.

L'area del trapezio è la somma delle aree dei tre poligoni:

Area $_{ABCD}$ = 96 + 96 + 256 = 448 braccia^2.

L'area del trapezio isoscele può essere calcolata moltiplicando la semisomma delle basi per l'altezza:

Area $_{ABCD}$ = [(AD + BC)/2] * AH = [(40 + 16)/2] * 16 = 28 * 16 = 448 braccia^2.

Il risultato ottenuto dal Maestro Umbro è errato per difetto di ben 64 braccia^2.

\- APPROFONDIMENTO -

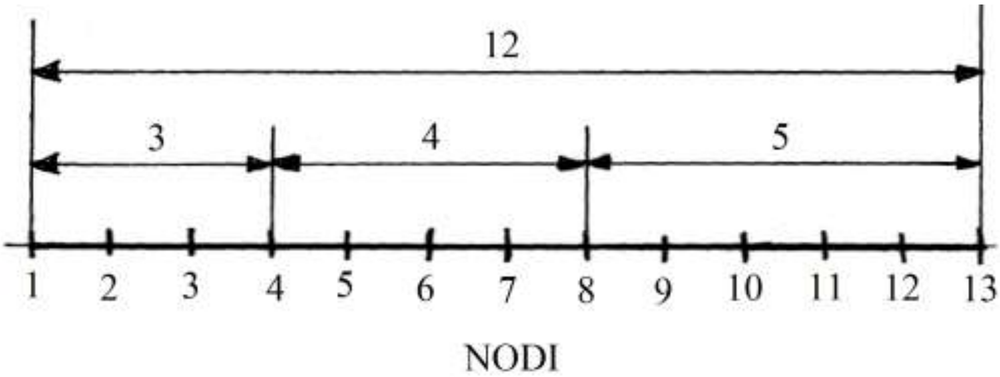
Le terne pitagoriche

Cinque fra i precedenti problemi (quelli contrassegnati con i numeri 36, 37, 38, 39 e 41) chiamano in causa il triangolo pitagorico 3-4-5.

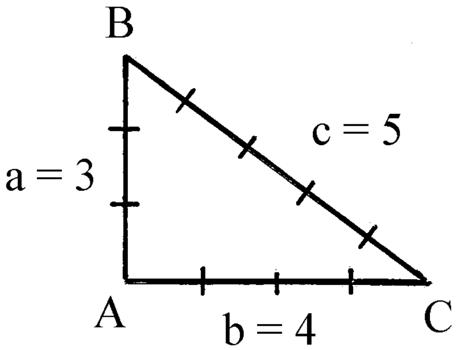
Sarebbe interessante ricostruire le ragioni della presenza di questo triangolo rettangolo: le notevoli dimensioni delle figure nelle quali esso compare possono suggerire che si tratti delle misurazioni di particelle di terreni ricavate da triangolazioni effettuate da agrimensori. È solo un'ipotesi.

Per la sua origine storica il triangolo rettangolo 3-4-5 fu chiamato *egiziano* (o *egizio*) da parte di Vitruvio (Marco Pollio Vitruvio, architetto romano vissuto nel I secolo a.C., autore del trattato *De Architectura*).

Una corda recante 13 nodi e divisa in 12 parti uguali dava origine al triangolo egiziano:



Con la corda veniva realizzato il triangolo rettangolo ABC:



La facile trasportabilità di questa corda e la possibilità di costruire con essa sul terreno un angolo retto ne facevano uno strumento essenziale per i rilievi effettuati dagli agrimensori.

La terna 3-4-5 è una *terna pitagorica* perché

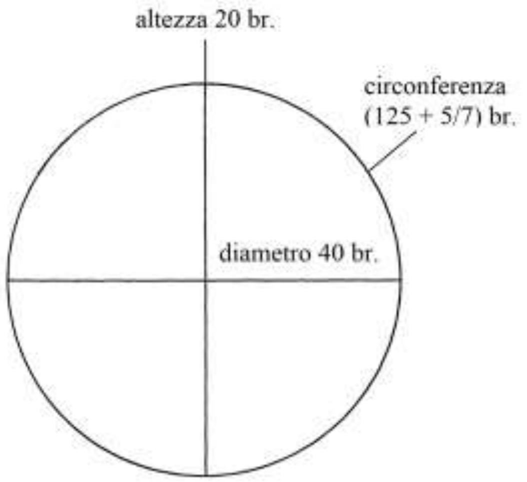
$$3^2 + 4^2 = 5^2 \quad \text{e cioè} \quad 9 + 16 = 25 .$$

- -

<u>4° CAPITOLO</u>
<u>PROBLEMI SUGLI ALBERI</u>

[42] <u>Taglio di un albero</u>

Un albero è alto 20 braccia e a ogni taglio si piega di 1 braccio. Il problema chiede il numero dei tagli che occorrono per farlo cadere a terra.



l'albero cade dopo (31 + 3/7) colpi

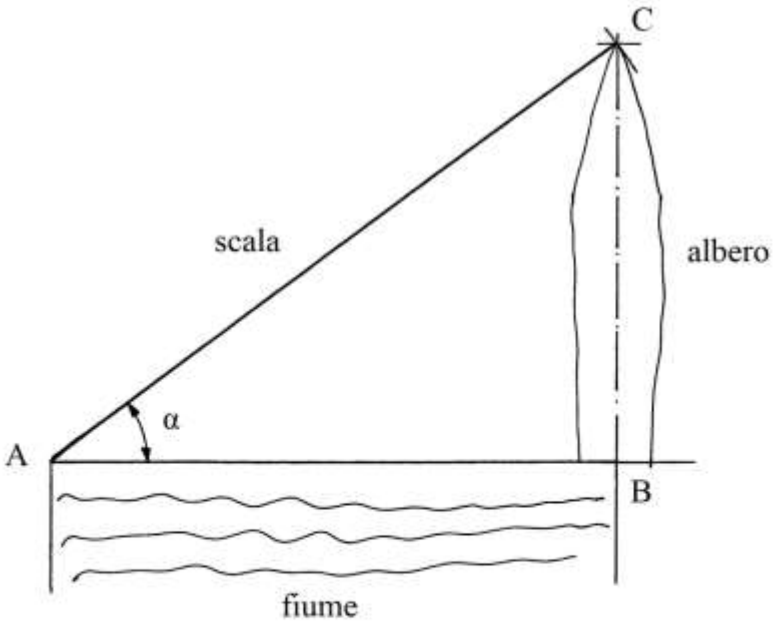
Il problema è piuttosto oscuro, come lo è la soluzione:

* moltiplicare per 2 l'altezza: 20 * 2 = 40, diametro di un cerchio;
* moltiplicare per (3 + 1/7): 40 * (3 + 1/7) = (125 + 5/7) braccia;
* dividere per 4: (125 + 5/7)/4 = (31 + 3/7) numero dei colpi necessari per far cadere l'albero.

[43] <u>Scala e albero</u>

Un fiume è largo (12 + ½) braccia e su di una riva è piantato un albero del quale non si conosce l'altezza.

Deve essere costruita una scala che vada dalla riva opposta fino alla cima dell'albero, superando il corso d'acqua.



L'impostazione del problema è piuttosto confusa e lo è anche la soluzione.

L'altezza dell'albero è incognita e deve essere calcolata.

L'Autore impiega la seguente procedura:

* moltiplicare la larghezza del fiume [AB] per ¼: (12 + ½) * ¼ = (3 + 1/8);
* sommare alla larghezza del fiume: (3 + 1/8) + (12 + ½) = (15 + 5/8) braccia, lunghezza della scala;

sottrarre ¼ dalla larghezza del fiume: (12 + ½) – (3 + 1/8) = (9 + 3/8) braccia, altezza dell'albero.

Pur senza essere citata, la soluzione richiama la terna primitiva 3-4-5. Vale la proporzione:

CB : AB : AC = 3 : 4 : 5

(9 + 3/8) : (12 + ½) : (15 + 5/8) = 3 : 4 : 5.

ABC è un triangolo rettangolo è l'angolo CAB = α possiede le seguenti proprietà:

cos α = AB/AC = (12 + ½)/(15 + 5/8) = 4/5 = 0,8

sen α = CB/AC = (9 + 3/8)/(15 + 5/8) = 3/5 = 0,6

tg α = CB/AB = (9 + 3/8)/(12 + ½) = sen α/cos α = 0,6/0,8 = ¾ = 0,75.

L'angolo α è ampio: α ≈ 37°.

Infine, l'Autore offre una riprova:

* moltiplicare la larghezza del fiume per sé stessa: (12 + ½) * (12 + ½) = (156 + ¼);
* moltiplicare l'altezza dell'albero per sé stessa: (9 + 3/8) * (9 + 3/8) = (87 + 57/64);
* sommare i due quadrati: (156 + ¼) + (87 + 57/64) = (244 + 9/64);
* estrarre la radice quadrata: √(244 + 9/64) = (15 + 5/8) braccia, lunghezza della scala [AB].

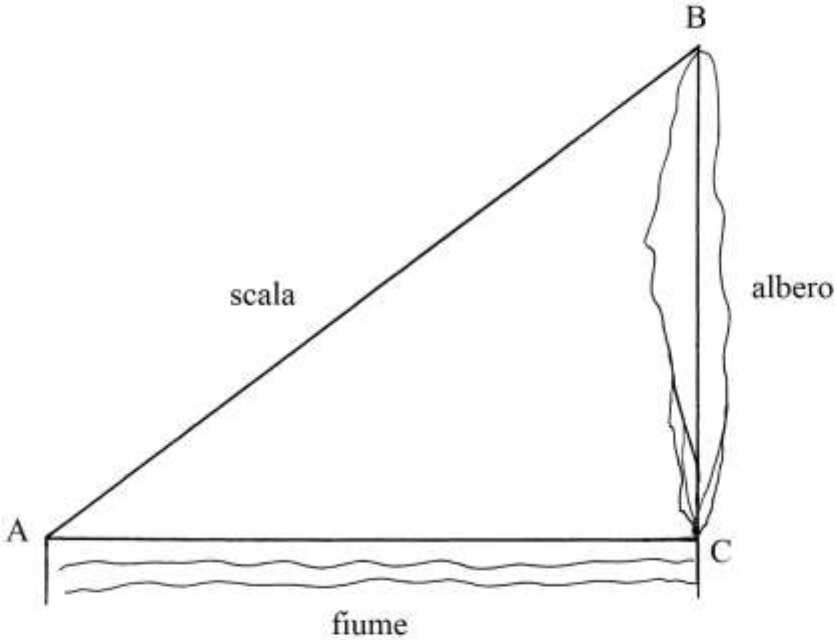
[44] Scala su di un corso d'acqua

Il problema è in qualche modo collegato al precedente.

L'albero è piantato sulla riva di un fiume. Sulla sua cima è poggiata una scala che ha il piede sulla riva opposta.

L'albero è alto (25 + 4/5) braccia.

Il problema chiede la larghezza del fiume e la lunghezza della scala.



La procedura usata dal Maestro Umbro prevede i seguenti passi:

* dividere per 3 l'altezza dell'albero: (25 + 4/5)/3 = (8 + 3/5);
* sommare all'altezza dell'albero: (8 + 3/5) + (25 + 4/5) = (34 + 2/5) braccia, larghezza del fiume;
* dividere per 4 la larghezza del fiume: (34 + 2/5)/4 = (8 + 3/5);
* sommare alla larghezza del fiume: (8 + 3/5) + (34 + 2/5) = 43 braccia, lunghezza della scala.

L'Autore ha poi proposto una verifica del risultato:

* moltiplicare l'altezza dell'albero per sé stessa: (25 + 4/5) * (25 + 4/5) = (665 + 16/25);
* moltiplicare la larghezza del fiume per sé stessa: (34 + 2/5) * (34 + 2/5) = (1183 + 9/25);
* sommare i due ultimi quadrati: (665 + 16/25) + (1183 + 9/25) = 1849;
* estrarre la radice quadrata: √1849 = 43 braccia, lunghezza della scala.

L'Autore ha di nuovo utilizzato la proporzione 3 : 4 : 5:

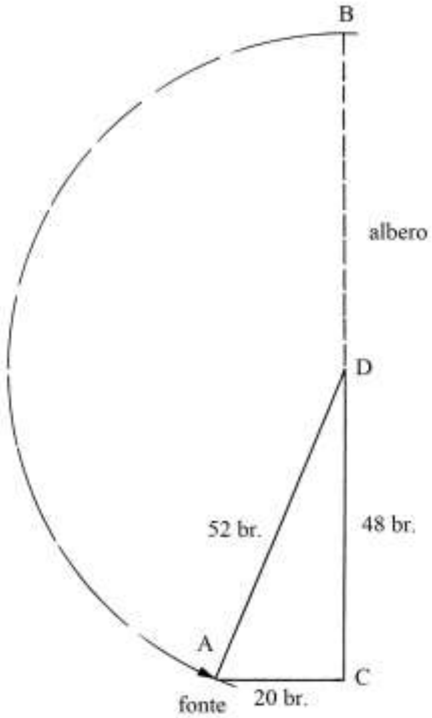
BC : 3 = AC : 4 = AB : 5.

[45] <u>Albero che cade in una fonte</u>

In un giardino vi è un albero alto 100 braccia e una fonte che dista 20 braccia dal piede dell'albero.

La cima dell'albero cade nella fonte, ma non si stacca dal tronco.

Il problema chiede la lunghezza della parte di albero che si è rotta.



La procedura usata dal Maestro Umbro è la seguente:

* moltiplicare per sé stessa la distanza fra la fonte e il piede dell'albero: 20 * 20 = 400;
* a questo punto l'Autore introduce, senza alcun calcolo, la lunghezza di 48 braccia per l'altezza del tronco rimasto in piedi [è DC nello schema qui sopra];
* moltiplicare 48 per sé stesso: 48 * 48 = 2304;
* sommare con 400: 2304 + 400 = 2704;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{2704}$ = 52 braccia, lunghezza del tratto di albero che si è piegato.

- APPROFONDIMENTO -

La soluzione del problema può essere ottenuta con semplici operazioni algebriche.

BD è la lunghezza incognita: BD = AD = x.

DA è l'ipotenusa del triangolo rettangolo ADC ed è lunga quanto BD:

$DC = BC – BD = 100 – x$.

La lunghezza di DA è data da:

$DA^2 = AC^2 + DC^2 = BD^2$

$AC^2 + DC^2 = BD^2$ e sostituendo i dati si ha:

$20^2 + (100 – x)^2 = x^2$

$400 + 10000 – 200 * x + x^2 = x^2$

$10400 – 200 * x = 0$

$x = 10400/200 = 52$ braccia = BD = AD.

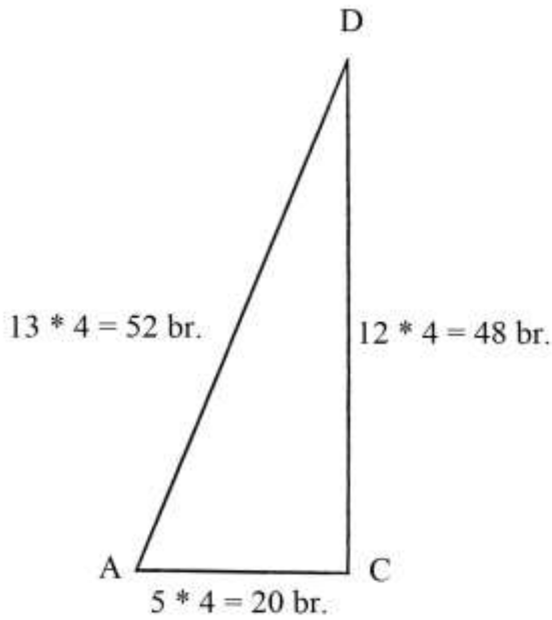
Ne consegue:

$DC = 100 – 52 = 48$ braccia.

La procedura risolutiva del Maestro Umbro è corretta, anche se priva di qualche passaggio.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

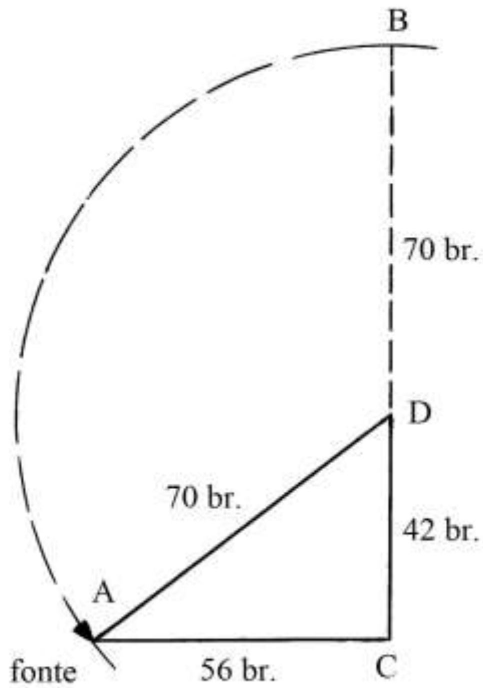
Il triangolo ADC è rettangolo e i suoi lati hanno lunghezze che formano una terna derivata, 20-48-52, che è multipla di un fattore 4 della seconda terna primitiva, quella 5-12-13.



- -

[46] Cima di un albero caduta in una fonte

Un albero si spezza e, ruotando, la sua cima cade in una fontana.



La porzione di albero che si è spezzata [DB] è lunga 70 braccia: il problema chiede la sua altezza e la distanza fra il piede dell'albero stesso e la fonte.

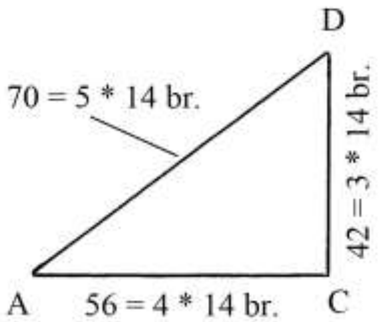
La procedura impiegata dall'Autore è la seguente:

* moltiplicare per sé stessa la lunghezza 70: 70 * 70 = 4900;

* moltiplicare 70 per 4/5: 70 * 4/5 = 56 braccia, distanza fra la fonte e il piede dell'albero;
* moltiplicare per sé stesso: 56 * 56 = 3136;
* sottrarre l'ultimo quadrato da 4900: 4900 – 3136 = 1764;
* estrarre la radice quadrata: √1764 = 42 braccia, altezza della parte di albero rimasta in piedi [CD];
* sommare 42 e 70: 42 + 70 = 112 braccia, altezza originaria dell'albero.

- APPROFONDIMENTO -

In questo problema compare di nuovo una terna derivata dalla primitiva 3-4-5:



ADC è un triangolo rettangolo i cui lati hanno lunghezze in proporzione alla terna derivata 42-56-70:

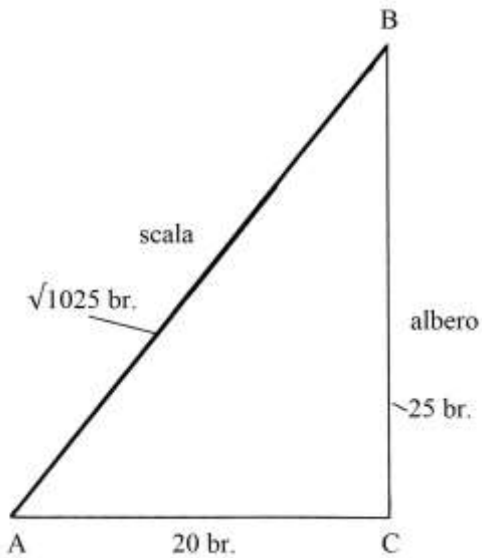
DC : AC : AD = 42 : 56 : 70 = 3*14 : 4*14 : 5*14 = 3 : 4 : 5.

- -

[47] Scala appoggiata a un albero

Una scala è inclinata ed è poggiata sulla cima di un albero. Il suo piede è distante 20 braccia da quello dell'albero.

Il problema chiede la lunghezza della scala e l'altezza dell'albero.



La soluzione del problema è piuttosto oscura:
* moltiplicare 20 per sé stesso: 20 * 20 = 400;

* trovare un numero che moltiplicato per sé stesso e sommato a 400 dia un risultato la cui radice è un numero intero: 15 * 15 = 225;
* sommare con 400: 225 + 400 = 625;
* estrarre la radice quadrata: √625 = 25 braccia, altezza dell'albero.

In via alternativa, l'Autore suggerisce una seconda soluzione:
* dividere per 4 la distanza di 20 braccia: 20/4 = 5;
* sommare con 20: 5 + 20 = 25 braccia, altezza dell'albero.

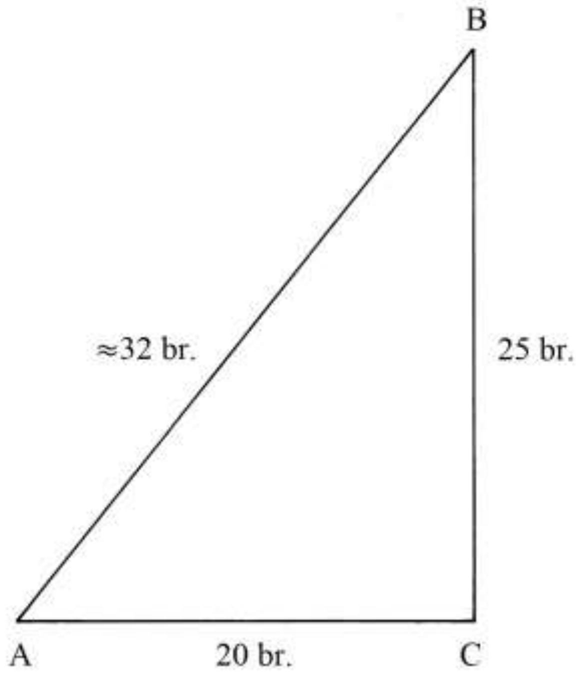
Il numero 15 corrisponde a ¾ della lunghezza di 20 braccia: l'Autore non spiega perché sceglie questo numero.

ABC è un triangolo rettangolo: AB è la scala e la sua lunghezza è data da:

$AB^2 = AC^2 + BC^2 = 20^2 + 25^2 = 400 + 625 = 1025$ e

$AB = \sqrt{1025} \approx 32{,}01$ braccia → 32 braccia.

Le lunghezze dei tre lati del triangolo ABC non formano alcuna terna:



Infatti i rapporti fra le lunghezze dei tre lati del triangolo rettangolo ABC sono i seguenti:

AC : CB : AB = 20 : 25 : 32 = 4*5 : 5*5 : 4*8.

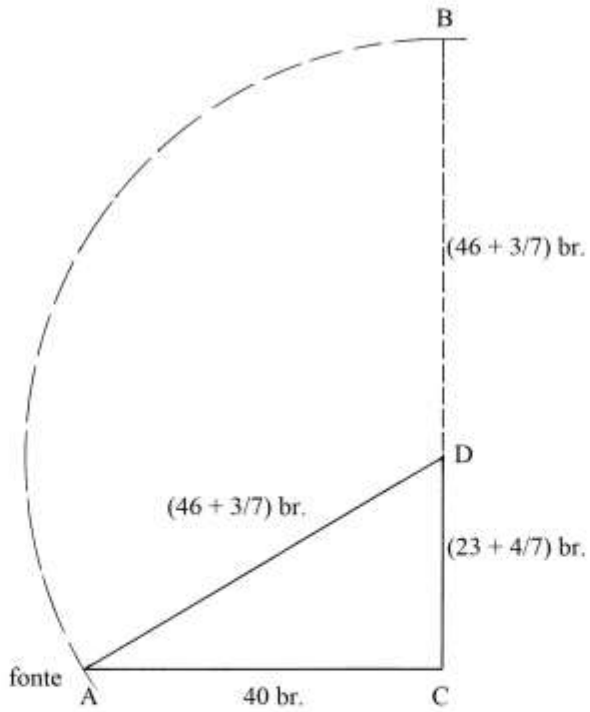
Forse, ma è solo un'ipotesi, l'Autore pensava a una terna derivata da quella 3-4-5: un indizio in tal senso può essere il fatto che abbia calcolato l'altezza dell'albero come i 5/4 della distanza fra il piede dell'albero e quello della scala.

[48] <u>Cima di un albero in una fonte</u>

Un albero è alto 70 braccia e nel terreno, a distanza di 40 braccia, è situata una fonte. L'albero si rompe e la sua cima cade nella fonte.

Il problema chiede la lunghezza dei due tratti dell'albero.

È evidente l'affinità con il problema [45].



La soluzione impiegata dall'Autore umbro contiene i seguenti passi:

* moltiplicare l'altezza per sé stessa: 70 * 70 = 4900;
* moltiplicare la distanza per sé stessa: 40 * 40 = 1600;
* sottrarre da 4900: 4900 – 1600 = 3300;
* dividere per 2: 3300/2 = 1650;
* dividere per l'altezza dell'albero: 1650/70 = (23 + 4/7) braccia, altezza della parte dell'albero rimasta in piedi [CD];
* sottrarre dall'altezza dell'albero: 70 – (23 + 4/7) = (46 + 3/7) braccia, lunghezza del tratto dell'albero che si è rotto.

La procedura può essere sintetizzata nella formula che segue:

$$CD = (BC^2 – AC^2)/(2 * BC).$$

- APPROFONDIMENTO -

Risolviamo il problema con il metodo già impiegato nell'APPROFONDIMENTO inserito nella soluzione del problema [45].

CD è la lunghezza incognita: CD = x.

BD è lungo:

$$BD = BC – CD = 70 – x.$$

ADC è un triangolo rettangolo.

$$AD^2 = AC^2 + CD^2$$

Ma AD = BD = (70 – x) ; ne consegue:

$$(70 – x)^2 = 40^2 + x^2$$

$$4900 – 140 * x + x^2 = 1600 + x^2$$

$$3300 = 140 * x \quad \text{da cui}$$

$$x = 3300/140 = (23 + 4/7) \text{ braccia, lunghezza di CD.}$$

La lunghezza di BD è:

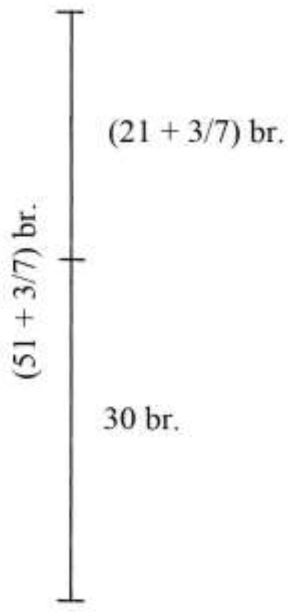
$$BD = 70 – (23 + 4/7) = (46 + 3/7) \text{ braccia.}$$

- -

[49] Altezza di un albero

Un albero ha altezza sconosciuta ma la somma delle due frazioni 1/3 e ¼ vale 30 braccia. L'altezza è l'incognita x

(1/3 + ¼) * x = 30



Con una semplice proporzione si ha:

x = 30/(1/3 + ¼) = 30/(7/12) = 30 * 12/7 = (51 + 3/7) braccia, altezza dell'albero.

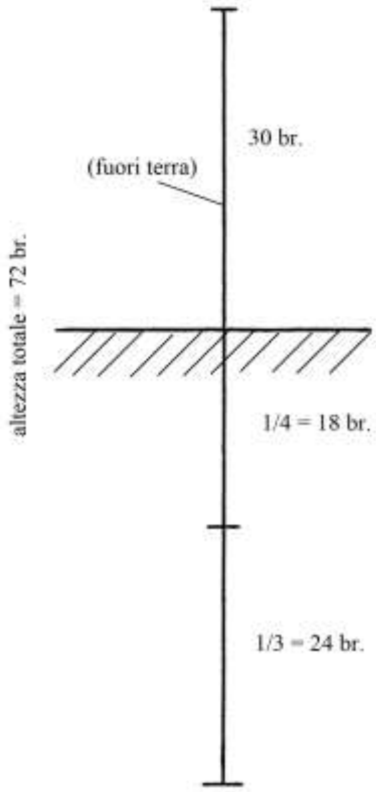
L'Autore utilizza una procedura un po' oscura che porta a un risultato corretto:

* sommare 1/3 e ¼: (1/3 + ¼) = 7/12;
* moltiplicare 12 per 30: 12 * 30 = 360;
* dividere per 7: 360/7 = (51 + 3/7) braccia, altezza dell'albero.

[50] Altezza totale di un albero

La parte interrata di un albero è uguale a (1/4 + 1/3) della sua altezza totale e la parte esterna è lunga 30 braccia.

Il problema chiede l'altezza dell'intero albero, comprensiva della parte interrata.



Il quesito ricalca il precedente problema e anche la soluzione è simile:

* sommare 1/3 e 1/4 : (1/3 + ¼) = 7/12;
* sottrarre 7/12 da 1: 1 – 7/12 = 5/12;
* moltiplicare 12 per l'altezza 30: 12 * 30 = 360;
* dividere per 5: 360/5 = 72 braccia, altezza totale dell'albero.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Verifichiamo l'esattezza della soluzione. L'altezza totale dell'albero è l'incognita x.

(1/3 + ¼) * x = x – 30
7/12 * x = x – 30
30 = 5/12 * x
x = (12 * 30)/5 = 72 braccia.

La soluzione del Maestro Umbro è corretta.

[51] Problema di rami, nidi e uova

Il problema non è geometrico.

Un albero ha 100 rami e in ciascun ramo sono 100 nidi. In ogni nido sono 100 uova e in ciascun uovo sono 100 (l'Autore non dice di che cosa si tratta).

La somma di tutte queste entità è 101010100.

[52] Albero che giace in terra

Un albero è lungo 40 braccia e giace sul terreno.

Viene sollevato di 1 braccio al giorno.
Il problema chiede di calcolare il numero dei giorni occorrenti per riportarlo in verticale.
La soluzione contiene i seguenti passi:

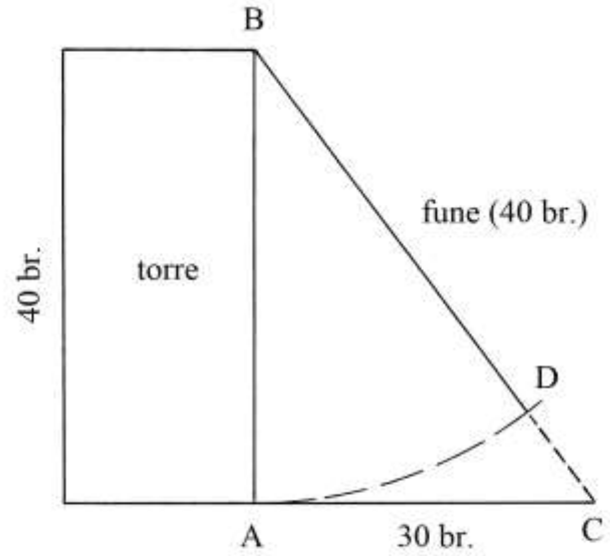
* moltiplicare 40 per sé stesso: $40 * 40 = 1600$;
* moltiplicare per 2: $1600 * 2 = 3200$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{3200} \approx 56,56$ [l'Autore scrive "55 pocho meno"].

Con alcuni successivi passi piuttosto oscuri, sono indicati in 55 i giorni occorrenti per rialzare l'albero.

<ins>5° CAPITOLO</ins>
<ins>PROBLEMI SULLE TORRI</ins>

[53] <ins>Fune tirata da una torre</ins>

Una torre è alta 40 braccia e dalla sua cima è tirata una una corda lunga 40 braccia verso un punto del terreno che è a 30 braccia dal piede della torre. In teoria, il capo della corda non tocca il terreno.



Il problema chiede la distanza fra il capo della corda e il punto del terreno e cioè la lunghezza di DC.

La procedura contiene i seguenti passi:

* moltiplicare 40 per sé stesso: 40 * 40 = 1600;
* moltiplicare 30 per sé stesso: 30 * 30 = 900;
* sommare i due quadrati: 1600 + 900 = 2500;
* estrarre la radice quadrata: √2500 = 50 braccia [lunghezza di BC];
* sottrarre la lunghezza della fune: 50 – 40 = 10 braccia, distanza fra il capo della fune e il terreno [DC].

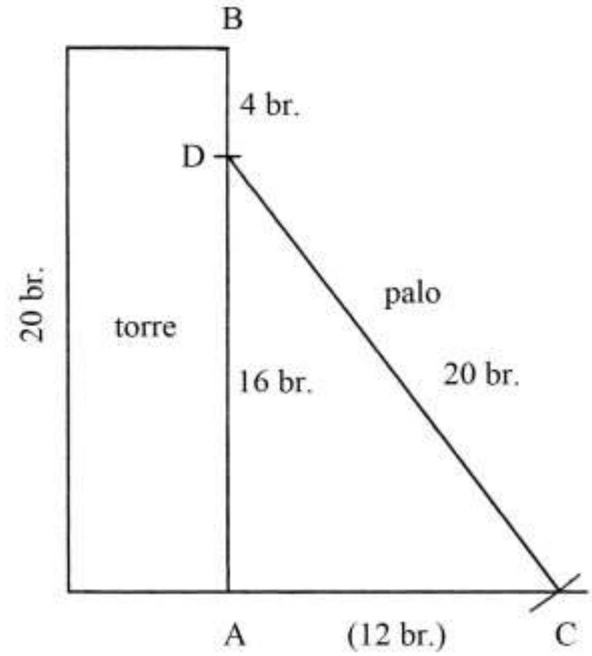
ABC è un triangolo rettangolo che ha lati lunghi secondo la terna derivata 30-40-50, chiaramente multipla della primitiva 3-4-5.

[54] <ins>Torre e leno</ins>

L'Autore usa il termine *leno* che nel Medioeva aveva il significato di *debole*: forse nel volgare perugino significava *flessibile*? Si trattava di una canna?

Qui di seguito si è usata la dizione *palo (flessibile*).

Una torre è alta 20 braccia e un palo di uguale altezza è poggiato ad essa risultando abbassato di 4 braccia dalla cima: il problema chiede la distanza del piede del palo dalla base della torre.



La procedura è la seguente:

- * moltiplicare 20 per sé stesso: 20 * 20 = 400;
- * sottrarre 4 [lunghezza di BD] dall'altezza della torre [BA]: 20 – 4 = 16;
- * moltplicare per sé stesso: 16 * 16 = 256;
- * sottrarre da 400: 400 – 256 = 144;
- * estrarre la radice quadrata: √144 = 12 braccia, distanza fra il piede del palo e la base della torre [AC].

ADC è un triangolo rettangolo i cui lati hanno lunghezze che formano la terna derivata 12-16-20, ottenuta moltiplicando per 4 gli elementi della primitiva 3-4-5.

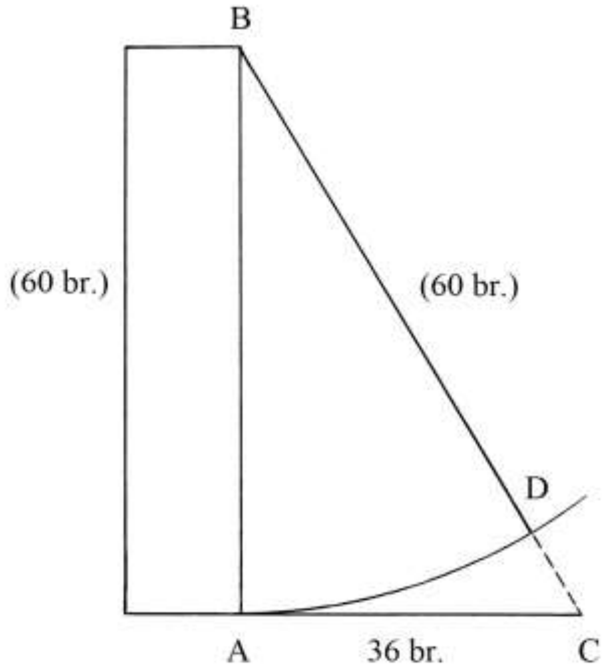
[55] <u>Torre e corda di uguale lunghezza</u>

Una corda è legata alla cima della torre: entrambe hanno la stessa lunghezza che è incognita.

La corda è tirata verso un punto del terreno che è posizionato a 36 braccia dalla base della torre.

Il problema è simile a quello affrontato nella precedente Ragione [53].

Questo nuovo esercizio chiede l'altezza della torre e la distanza dal capo della fune al punto del terreno a 36 braccia dalla torre.



La soluzione proposta dal Maestro Umbro è:

* moltiplicare 36 per sé stesso: 36 * 36 = 1296;
* scegliere un numero il cui quadrato sia addizionato a formare un numero che sia un quadrato perfetto: 48;
* moltiplicare per sé stesso: 48 * 48 = 2304;
* sommare i due quadrati: 1296 + 2404 = 3600;
* estrarre la radice quadrata: √3600 = 60 braccia, altezza della torre e lunghezza della corda.

Risolviamo il problema in altro modo. BA e BD hanno uguale lunghezza che l'Autore stabilisce in 60 braccia.

ABC è un triangolo rettangolo. La lunghezza dell'ipotenusa BC è data da:

$BC^2 = BA^2 + AC^2 = 60^2 + 36^2 = 3600 + 1296 = 4896$ e

$BC = \sqrt{4896} \approx 69{,}97$ braccia.

Il risultato non è un numero intero.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Un'ipotesi che sembra più realistica è quella che prevede due lunghezze:

* AC = 36 braccia;
* BC = 60 braccia.

L'altezza della torre, BA, che è il cateto verticale del triangolo rettangolo ABC, è data da:

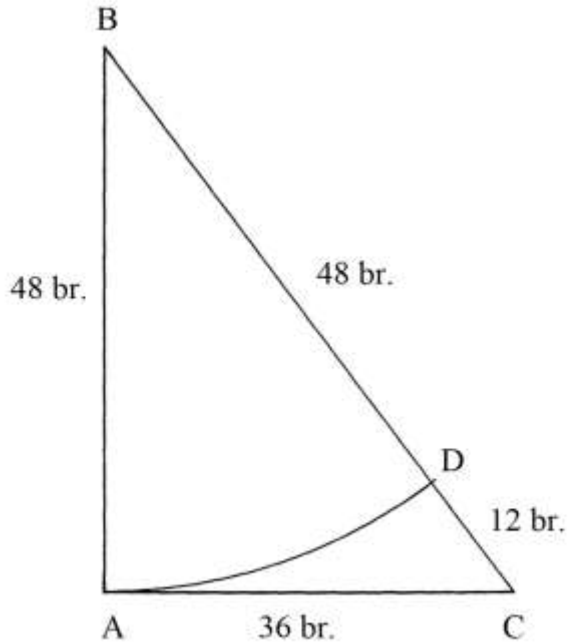
$BA^2 = BC^2 - AC^2 = 60^2 - 36^2 = 3600 - 1296 = 2304$ e

$BA = \sqrt{2304} = 48$ braccia, altezza della torre e lunghezza della corda.

Con questa ipotesi, riappare il numero 48 che il Maestro Umbro ha introdotto senza una chiara spiegazione.

Il segmento DC è ora lungo:

$DC = BC - BD = 60 - 48 = 12$ braccia.

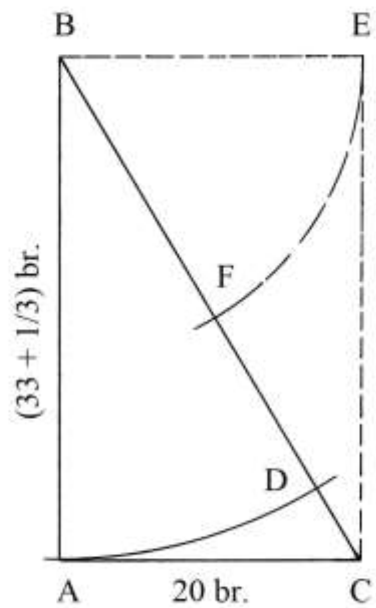


Il triangolo rettangolo ABC ha lati con lunghezze che formano la terna derivata 36-48-60, ottenuta moltiplicando per 12 i componenti della primitiva 3-4-5.

[56] Una torre e una fune

L'altezza di una torre è uguale alla lunghezza di una fune: questa ultima ha un capo legato alla cima della torre e l'altro mira a un punto del terreno che dista 20 braccia dal piede della torre.

Il problema chiede la distanza fra il capo della fune e il punto sul terreno [DC nello schema che segue].



Il problema è simile al precedente. I dati forniti sono piuttosto oscuri.

La soluzione dell'Autore è la seguente:

* dividere per 3 la distanza di 20 braccia: 20/3 = (6 + 2/3);
* sommare a 20: (6 + 2/3) + 20 = (26 + 2/3);

* dividere per 4: $(26+ 2/3)/4 = (6 + 2/3)$;
* sommare con $(26 + 2/3)$: $(6 + 2/3) + (26 + 2/3) = (33 + 1/3)$ braccia, altezza della torre e lunghezza della corda;
* sottrarre 20: $(33 + 1/3) – 20 = (13 + 1/3)$ braccia, distanza fra il capo della corda e il punto sul terreno [DC].

Lo schema qui sopra tenta di ricostruire la procedura del Maestro Umbro. ABC è un triangolo rettangolo. Il cateto AC è lungo 20 braccia e quello AB è (33 + 1/3).

Occorre definire i rapporti fra le lunghezze dei due cateti: l'Autore ha calcolato la lunghezza di AB come segue:

$$AB = (AC * 4/3) * 5/4 = 20 * 4/3 * 5/4 = 20 * 5/3 = 100/3 = (33 + 1/3) \text{ braccia.}$$

La presenza dei due numeri – 3 e 4 – ai denominatori delle frazioni può far pensare alla presenza del triangolo 3-4-5.

ABEC è un rettangolo costruito sui cateti AC e AB.

Fare centro in B e con raggio BE (= AC = 20) tracciare un arco che interseca l'ipotenusa BC in F: BF è lungo 20 braccia.

L'ipotenusa BC è lunga:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = (33+1/3)^2 + 20^2 = 1111{,}1111 + 400 = 1511{,}1111 \quad \text{e}$$

$$BC = \sqrt{1511{,}1111} \approx 38{,}87 \text{ braccia.}$$

Il segmento DC è:

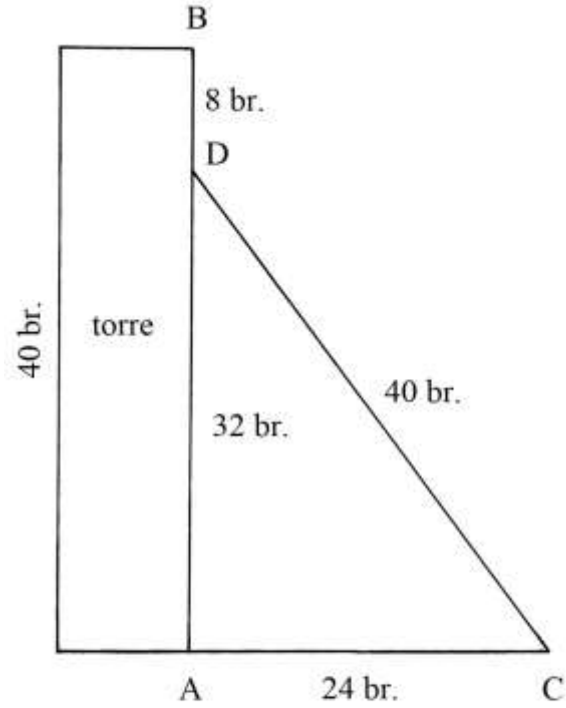
$$DC = BC – BD = 38{,}87 – (33 + 1/3) \approx 5{,}536 \text{ braccia.}$$

Dato che i risultati non sono numeri interi, il problema presenta alcuni dubbi.

[57] <u>Una torre e un palo</u>

Una torre è alta 40 braccia e di fianco ad essa vi è un palo pure alto 40 braccia. Questo ultimo è scostato di 24 braccia dalla base della torre ed è poggiato a una sua parete.

Il problema chiede la lunghezza dell'abbassamento della cima del palo [BD nello schema che segue].



La procedura usata dall'Autore è:

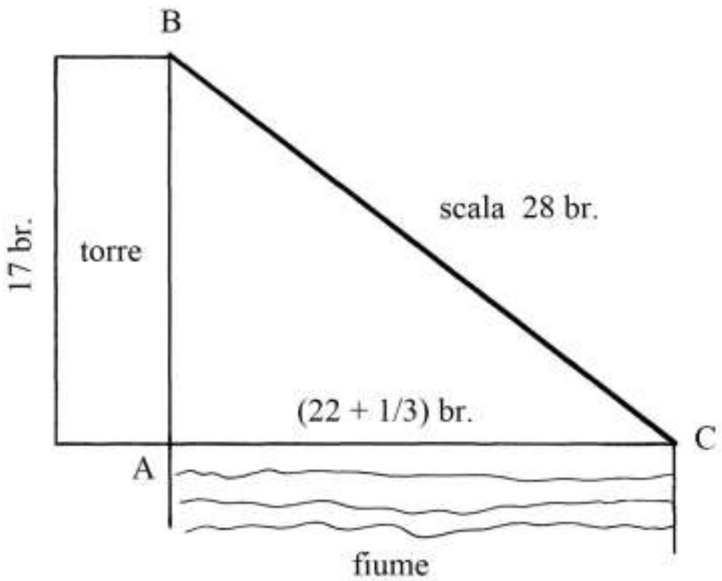
* moltiplicare per sé stessa l'altezza della torre: 40 * 40 = 1600;
* moltiplicare per sé stessa la distanza di 24: 24 * 24 = 576;
* sottrarre il secondo quadrato dal primo: 1600 – 576 = 1024;
* estrarre la radice quadrata: √1024 = 32 braccia [lunghezza del cateto DA];
* sottrarre da 40: 40 – 32 = 8 braccia, abbassamento della cima del palo [BD].

ADC è un triangolo rettangolo i cui lati hanno lunghezze che formano la terna derivata 24-32-40: in essa è evidente la presenza della primitiva 3-4-5 i cui componenti sono moltiplicati per 8.

[58] <u>Torre e scala per scavalcare un fiume</u>

Una torre è alta 17 braccia: ai suoi piedi scorre un fiume di cui non è nota la larghezza.

Per superare il fiume è collocata una scala che va dalla cima della torre alla riva opposta del fiume: il problema chiede la larghezza del fiume e la lunghezza della scala.



La procedura usata è la seguente:

* dividere l'altezza della torre per 3: 17/3 = (5 + 1/3);
* sommare all'altezza della torre: (5 + 1/3) + 17 = (22 + 1/3) braccia, larghezza del fiume;
* dividere la larghezza del fiume per 4: (22 + 1/3)/4 = (5 + 2/3);
* sommare con (22 + 1/3): (5 + 2/3) + (22 + 1/3) = 28 braccia, lunghezza della scala [l'Autore calcola (28 + 1/3)].

Con una piccola approssimazione, i lati del triangolo rettangolo ABC hanno lunghezze che stanno nella proporzione 3:4:5:

AB : 3 = AC : 4 = BC : 5.

Ciò spiega l'uso delle frazioni 1/3 e ¼ usate dall'Autore nella soluzione.

[59] <u>Costruzione di una torre</u>

Un committente chiede a quattro maestri di costruirgli una torre.

Il primo propone di realizzarla in 4 *dìne*, il secondo in 3, il terzo in 2 e il quarto in 1.

Nel volgare umbro-perugino, *dìne* sta per *giorno*?

Il problema chiede quanto tempo serve per costruire la torre facendo lavorare insieme i quattro maestri.

La soluzione è la seguente:

* sommare i tempi espressi in dìne: 4 + 3 + 2 + 1 = 10;
* calcolare ½ di 10: 10 * ½ = 5;
* calcolare 1/3 di 10: 10 * 1/3 = (3 + 1/3);
* calcolare ¼ di 10: 10 * ¼ = (2 + ½);
* [calcolare 1/1 di 10: 10 * 1/1 = 10];
* sommare gli ultimi quattro numeri: 5 + (3 + 1/3) + (2 + ½) + 10 = (20 + 5/6);
* dividere 10 per (20 + 5/6): 10/(20 + 5/6) = (1/2 – 1/25).

In meno di mezzo *dìne* è costruita la torre.

Nel mondo reale, sarà occorso ben più di mezza giornata per costruire la torre.

[60] Due uomini lungo una torre

Una torre è alta 40 braccia. Due uomini sono lungo il fianco della torre: uno è sopra e l'altro è sotto.

Il secondo uomo sale di giorno per 1/5 di braccio e di notte scende di 1/6.

Il primo uomo sale 1/3 di braccio al giorno e scende di ¼ ogni notte.

Il problema chiede quando si incontreranno.

La soluzione è la seguente:

* moltiplicare i denominatori delle due frazioni relative al primo uomo: 3 * 4 = 12;
* moltiplicare i denominatori delle due frazioni relative al secondo uomo: 5 * 6 = 30;
* moltiplicare i due ultimi numeri: 12 * 30 = 360;
* moltiplicare per al'altezza della torre: 360 * 40 = 14400;
* calcolare 1/12 di 360: 1/12 * 360 = 30;
* calcolare 1/30 di 360: 1/30 * 360 = 12;
* sommare i due ultimi quozienti: 30 + 12 = 42;
* dividere 14400 per 42: 14400/42 = (342 + 6/7) giorni

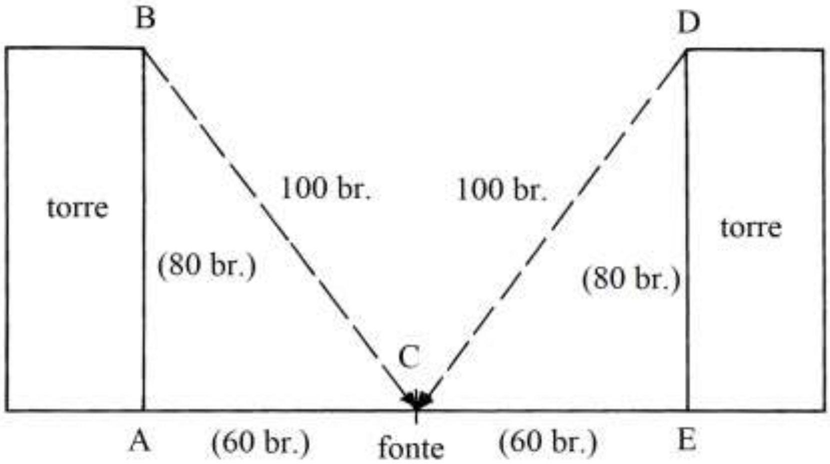
[l'Autore fornisce il risultato (343 – 1/7) giorni che è equivalente].

[61] Due torri e due colombi

Due torri hanno uguale altezza che non è conosciuta. Nel terreno fra di esse vi è una fonte.

Due colombi si muovono dalle cime delle due torri e, dopo aver percorso in linea retta 100 braccia, giungono contemporaneamente alla fonte.

Il problema chiede l'altezza delle due torri e la loro distanza.



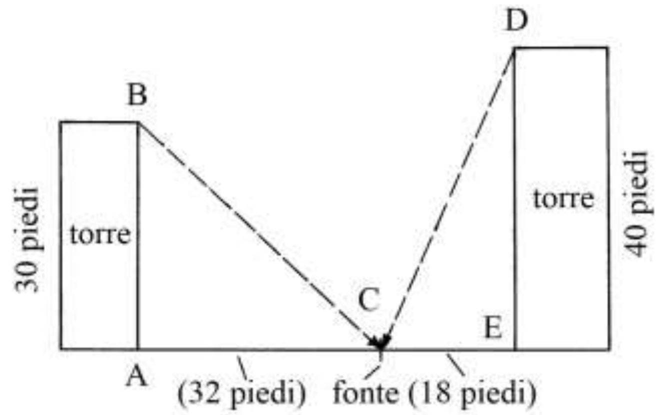
La procedura risolutiva contiene i seguenti passi:

* moltiplicare 100 per sé stesso: 100 * 100 = 10000;
* dividere per 5 la distanza di 100: 100/5 = 20;
* sottrarre da 100: 100 – 20 = 80 braccia, altezza delle due torri;
* moltiplicare 80 per sé stesso: 80 * 80 = 6400;
* sottrarre l'ultimo quadrato da 10000: 10000 – 6400 = 3600;
* estrarre la radice quadrata: √3600 = 60 braccia, distanza di ciascuna torre dalla fonte;
* moltiplicare per 2: 60 * 2 = 120 braccia, distanza fra le due torri.

L'Autore ha di nuovo impiegato il triangolo rettangolo 3-4-5. Infatti, ABC e CDE sono due triangoli rettangoli che hanno lati lunghi secondo la terna derivata 60-80-100 che proviene dalla primitiva 3-4-5 moltiplicando per 20 i suoi componenti.

[62] Due torri e due uccelli

In una pianura si trovano due torri: una è alta 30 *piedi* e l'altra 40 *piedi*.
Le due torri sono distanti 50 *piedi*.
Nel terreno fra le due torri è collocata la solita fonte.
Dalla cima delle torri, due uccelli volano verso la fonte che raggiungono nello stesso istante.
Il problema chiede la distanza della fonte dalle due torri.



La procedura contiene i seguenti passi:

*	sommare le altezze delle torri:	30 + 40 = 70;
*	dividere per 2:	70/2 = 35;
*	dividere per 2 la distanza fra le torri:	50/2 = 25;
*	sottrarre dall'altezza della torre più bassa:	30 – 25 = 5;
*	moltiplicare per 35:	5 * 35 = 175;
*	dividere per 25:	175/25 = 7;
*	sommare con 25:	7 + 25 = 32 piedi, distanza della fonte dalla torre più bassa;
*	sottrarre 7 da 25:	25 – 7 = 18 piedi, distanza della fonte dalla torre più alta.

- APPROFONDIMENTO -

ABC e CDE sono due triangoli rettangoli. Le loro ipotenuse BC e CD sono i percorsi compiuti in linea retta dai due uccelli in volo verso la fonte: esse hanno uguale lunghezza.

Sia AC l'incognita "x". La lunghezza di CE è:

$CE = AE – AC = 50 – x$.

Nel triangolo ABC si ha:

$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 30^2 + x^2$.

Nel triangolo CDE si ha:

$CD^2 = DE^2 + CE^2 = 40^2 + (50 – x)^2$.

Ma BC = CD e $BC^2 = CD^2$, per cui:

$30^2 + x^2 = 40^2 + (50 – x)^2$

$900 + x^2 = 1600 + 2500 – 100 * x + x^2$

$100 * x = 3200$

$x = 3200/100 = 32$ piedi = AC.

Ne consegue:

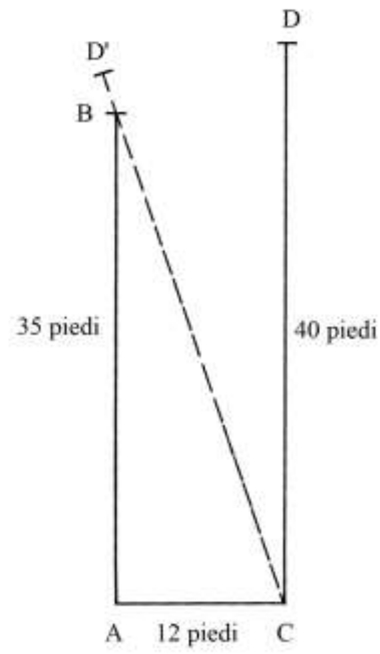
$CE = 50 – 32 = 18$ piedi.

- -

[63] Due aste verticali

Due aste verticali sono conficcate nel terreno a una distanza di 12 piedi e sono alte 35 e 40 piedi.

Se l'asta più lunga ruota e cade su quella più corta, il problema chiede di quanto essa la supera.

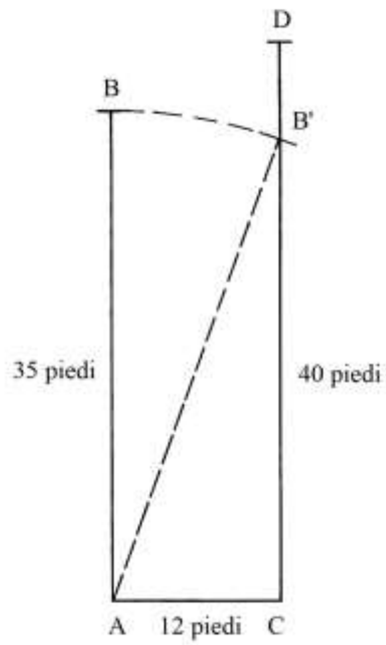


La soluzione del Maestro Umbro è la seguente:

* moltiplicare la distanza fra le due aste per sé stessa: 12 * 12 = 144;
* moltiplicare la lunghezza dell'asta più corta per sé stessa: 35 * 35 = 1225;
* sommare i due quadrati: 144 + 1225 = 1369;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{1369}$ = 37 piedi [lunghezza dell'ipotenusa CB];
* sottrarre da 40: 40 – 37 = 3 piedi, lunghezza della parte dell'asta più lunga che supera quella più corta [è BD' nella figura].

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

L'Autore presenta una seconda ipotesi: l'asta più corta ruota e cade su quella più lunga.



La soluzione è:

* sottrarre il quadrato di 12 dal quadrato di 35: $1225 - 144 = 1081$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{1081} \approx (32 + 10/11)$ piedi [lunghezza di CB’];
* sottrarre dalla lunghezza dell’asta CD: $40 - (32 + 10/11) = (7 + 1/11)$ piedi [lunghezza di B’D].

AB’C è un triangolo rettangolo: l’ipotenusa AB’ è lunga quanto AB e cioè 35 piedi.

6° CAPITOLO

Le unità di misura

Il capitolo contiene alcune Ragioni di natura aritmetica che sono estranee al campo della Geometria pratica.

Di seguito sono descritte soltanto le Ragioni di contenuto geometrico, focalizzate sulle unità di misura usate a Perugia, ad Assisi e a Gubbio.

Le Ragioni non sono numerate ma sono indicate le pagine del manoscritto: *r* (*recto*) e *v* (*verso*), con i numeri progressivi ricavati dalla trascrizione di Andrea Bocchi.

I singoli Comuni dell'Umbria usavano un ventaglio di unità di misura estremamente variegato: secoli dopo, le "Tavole di Ragguaglio" pubblicate dal Regno d'Italia nel 1877 mostravano molti secoli dopo la composizione del "*Livero de l'Abbecho*" la persistenza in Umbria di moltissime unità di misura locali, come mostrano le tre tabelle che seguono, riprodotte dalle "Tavole", con le unità lineari e superficiali.

PROVINCIA DI PERUGIA

CIRCONDARIO DI PERUGIA

COMUNI	MISURE LOCALI		MISURE METRICHE	
	DENOMINAZIONE	VALORE in MISURE METRICHE	DENOMINAZIONE	VALORE in MISURE LOCALI
	MISURE DI LUNGHEZZA			
TUTTI I COMUNI DEL CIRCONDARIO	Canna mercantile romana	Metri 1,991897	Metro	Canne 0,502034
	Canna mercantile	1,985129	Id.	0,503746
	Braccio lungo	0,667725	Id.	Braccia 1,497623
	Braccio corto	0,598922	Id.	1,669667
	Canna architettonica romana	2,234218	Id.	Canne 0,447584
PERUGIA	Canna mercantile	2,008500	Id.	0,497884
	Braccio da tela	1,004250	Id.	Braccia 0,995768
	Braccetto da nastri	0,627656	Id.	Braccetti 1,593229
	Canna agrimensoria	5,452500	Id.	Canne 0,183402
	Passetto	0,727000	Id.	Passetti 1,375516
	Piede da legname e da fabbriche	0,363500	Id.	Piedi 2,751032
BETTONA, CASTIGLION DEL LAGO, CORCIANO, UMBERTIDE, DERUTA, LISCIANO NICCONE, MAGIONE, MARSCIANO, PANICALE, PASSIGNANO, TORGIANO, TUORO	Canna agrimensoria	5,483970	Id.	Canne 0,182770
TODI, BASCHI, COLLAZZONE, FRATTA DI TODI, MASSA MARTANA, MONTECASTELLO DI VIBIO	Canna agrimensoria	5,324887	Id.	0,187797
TODI	Passetto da tela	1,473750	Id.	Passetti 0,678541
	Piede da legname	0,372000	Id.	Piedi 2,688172
	Piede da fabbrica	0,333860	Id.	2,995267
BASTIA	Canna agrimensoria	2,718300	Id.	Canne 0,367876
	Piede da legname	0,365000	Id.	Piedi 2,739726
BETTONA	Canna agrimensoria	4,803569	Id.	Canne 0,208179
CITERNA	Canna	7,850794	Id.	0,127375
CITTÀ DI CASTELLO, PIETRALUNGA, S. GIUSTINO	Canna	7,372926	Id.	0,135634
GUBBIO, COSTACCIARO	Canna (misura antica)	2,943000	Id.	0,339789
GUBBIO, SCHEGGIA, PASCELUPO	Canna (misura nuova)	3,239646	Id.	0,308678
GUBBIO	Braccio	0,640727	Id.	Braccia 1,560727
	Mezza canna	0,995947	Id	Mezze Canne 1,004069
	Piede di Campidoglio	0,322257	Id.	Piedi 3,103111

COMUNI	MISURE LOCALI		MISURE METRICHE	
	DENOMINAZIONE	VALORE in MISURE METRICHE	DENOMINAZIONE	VALORE in MISURE LOCALI
Massa Martana	Passo	Metri 1,340531	Metro	Passi 0,745973
Montone	Canna	5,445907	Id.	Canne 0,183624
Valfabrica	Canna	3,165142	Id.	0,315942

La Canna mercantile si divide in 8 Palmi.
Il Braccio da tela di Perugia è la metà della Canna.
Il Braccetto da nastri è di Palmi 2 ½.
La Canna agrimensoria di Perugia si divide in 15 Piedi, il Piede in 12 Once.
Il Passetto corrisponde a 2 Piedi.
La Canna di Todi si divide in 10 Piedi, il Piede in 10 Once, l'Oncia in 10 Minuti.
La Canna di Bastia si divide in 5 Piedi, il Piede in Once 29 ⅓, l'Oncia in 5 Minuti.
La Canna di Bettona si divide in 10 Piedi, il Piede in Once 25 ⅘, l'Oncia in 5 Minuti.
La Canna di Citerna si divide in 10 Braccia, il Braccio in 2 Piedi, il Piede in 12 Once.
La Canna di Città di Castello si divide in 22 Piedi, il Piede in 18 Once, l'Oncia in 4 Minuti.
La Canna di Gubbio a misura antica si divide in 9 Piedi, il Piede in 12 Once.
La Canna di Gubbio a misura nuova si divide in 10 Piedi, il Piede in 10 Once.
Il Passo di Massa Martana si divide in 6 Palmi.
La Canna di Montone si divide in 15 Piedi, il Piede in Once 19 ⅓, l'Oncia in 5 Minuti.
La Canna di Valfabrica si divide in 10 Piedi.
Nel Comune di Valfabrica si usava pure la misura perugina.
Nei Comuni di Bastia, Citerna, Valfabrica, e forse qualche altro la Canna mercantile romana si considerava eguale esattamente a due metri.

MISURE DI SUPERFICIE

COMUNI	DENOMINAZIONE	VALORE in MISURE METRICHE	DENOMINAZIONE	VALORE in MISURE LOCALI
Perugia	Mina	Ettare 0,445946	Ettara	Mine 2,242423
Corciano, Castiglione del Lago, Deruta, Umbertide, Lisciano Niccone, Magione, Marsciano, Panicale, Passignano, Torgiano, Tuoro	Mina	0,451109	Id.	2,216759
Todi, Collazzone, Baschi, Fratta di Todi, Massa Martana, Montecastrello di Vibio	Quartengata	0,283544	Id.	Quartengate 3,526789
Bastia	Modiolo	0,295566	Id.	Modioli 3,383339
Bettona	Modiolo	0,230743	Id.	4,333826
Citerna	Staio	0,369840	Id.	Staia 2,704094
Città di Castello, Pietralunga, S. Giustino	Staio	0,326160	Id.	3,065980
Gubbio, Costacciaro	Mina (antica)	0,332592	Id.	Mine 3,006687
Gubbio, Pascelupo, Scheggia	Mina (nuova)	0,343490	Id.	2,913838
Montone	Rubbio	1,779474	Id.	Rubbia 0,561964
Valfabrica	Mina	0,388703	Id.	Mine 2,572658

Provincia di PERUGIA Circondario di PERUGIA

COMUNI	MISURE LOCALI		MISURE METRICHE	
	DENOMINAZIONE	VALORE in MISURE METRICHE	DENOMINAZIONE	VALORE in MISURE LOCALI

La Mina di Perugia si divide in 150 Tavole,
la Tavola in 225 Piedi quadrati.
La Quartengata di Todi si divide in 100 Pertiche,
la Pertica in 100 Piedi quadrati.
Il Modiolo di Bastia e quello di Bettona si dividono in 10 Staia,
lo Staio in 10 Pugilli,
il Pugillo in 100 Piedi quadrati.
Lo Staio di Citerna si divide in 60 Tavole,
la Tavola in 100 Braccia quadrate.
Lo Staio di Città di Castello si divide in 60 Tavole,
la Tavola in 484 Piedi quadrati.
La Mina di Gubbio a misura antica si divide in 96 Tavole,
la Tavola in 4 Canne quadrate,
la Canna quadrata in 81 Piedi quadrati.
La Mina di Gubbio a misura nuova si divide in 327 Canne quadrate,
la Canna quadrata in 100 Piedi quadrati.
Il Rubbio di Montone si divide in 4 Staia,
lo Staio in 16 Coppe,
la Coppa in Tavole 9 e piedi quadrati 84,375,
la Tavola in 225 Piedi quadrati.
La Mina di Valfabrica si divide in 97 Tavole,
la Tavola in 4 Canne quadrate,
la Canna quadrata in 100 Piedi quadrati.

175 recto

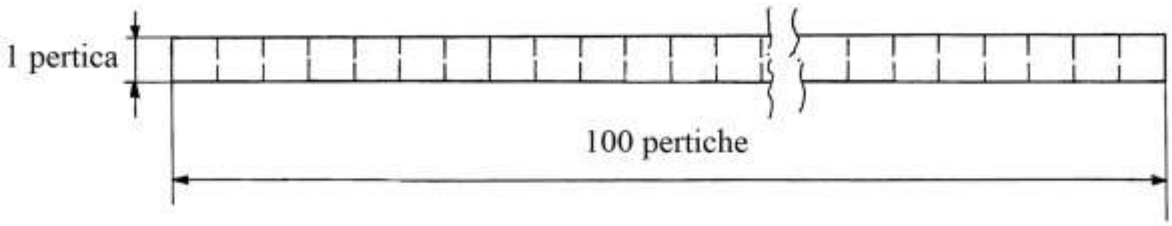
Sono descritte le unità di misura superficiali in uso a Perugia per misurare i terreni:

* 1 modiuolo = 10 staia;
* 1 staio = 10 puegle o mesure o p(er)teche [pertiche];
* 1 pueglo (o puelo, oppure puello) = 10 once;
* 1 oncia = 10 ponte o punte [forse punti];
* 1 ponte = 10 attame.

Un passaggio del manoscritto merita una certa attenzione:

"… e me-
surasse quanto è p(er) pe(r)techa lunga e qua(n)to
chogle p(er) anpio è-ne uno puello: la p(er)techa da
uno chanto e 100 p(er)teche de p(er) lungo, da lato,
sonno uno mudiolo. Puniam[o] che una t(er)-
ra sia 10 p(er)teche p(er) lungo e p(er) ampio; m(ultip)licha-
ta 10 via 10, che fa 100, e chetante puegle
sonno un modiuolo…".

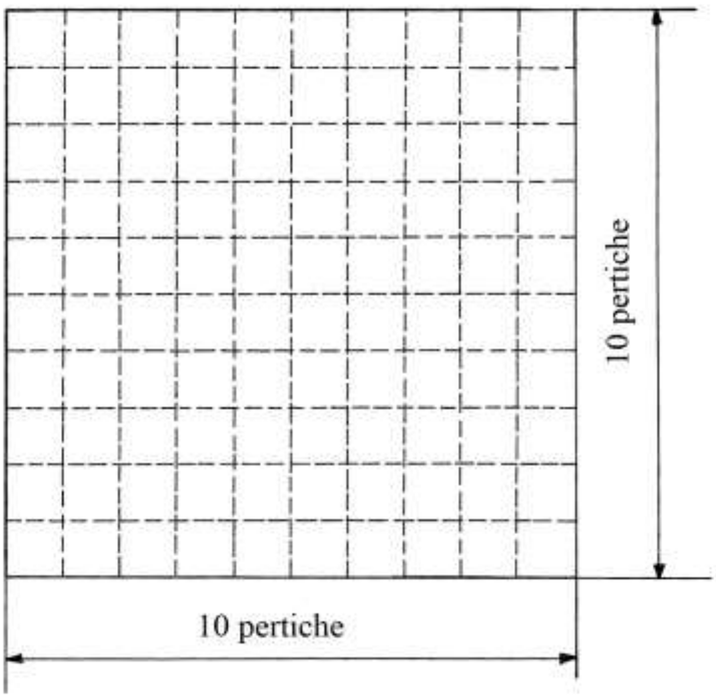
Il testo considera due esempi di terreni: il primo ha la forma di un rettangolo formato da 100 pertiche in lunghezza e largo 1 pertica:



La sua area è 100 pertiche, ma si tratta di pertiche^2: è evidente la confusione fra la pertica, unità di misura lineare, e la pertica^2 (pertica quadrata o quadra), unità di misura della superficie. Questa confusione fra unità lineari, superficiali e volumetriche portanti lo stesso nome caratterizza altri trattati medievali.

Le 100 pertiche^2 equivalgono a 10 staia o a 1 modiuolo.

Il secondo esempio è quello di un terreno che ha la forma di un quadrato e ha lati lunghi 10 pertiche:



Questo secondo terreno ha superficie A che vale:

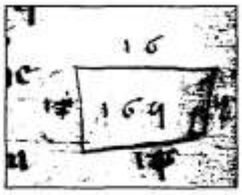
$$A = (10 \text{ pertiche})^2 = 100 \text{ pertiche}^2 = 10 \text{ staia} = 1 \text{ modiuolo}.$$

Benché siano di forme diverse, i due terreni hanno uguale superficie.

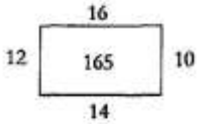
È da notare che le unità di misura superficiali usate a Perugia erano in *base 10*.

175r b

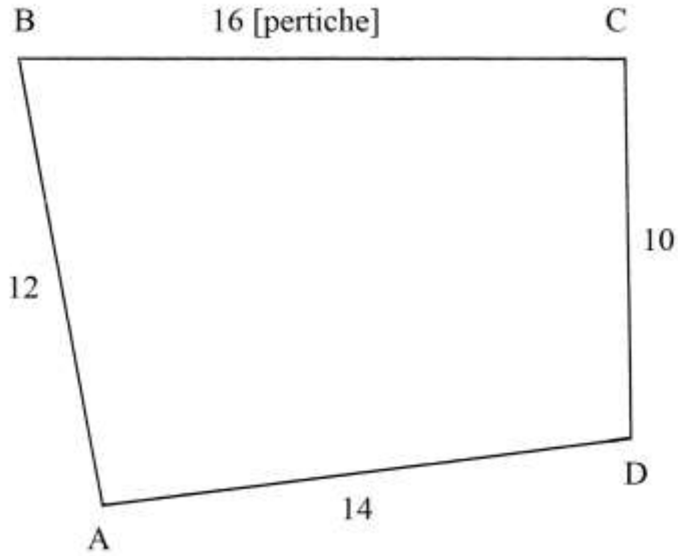
Un terreno ha le dimensioni nello schema che nell'originale (da Bocchi) è:



175rb



Lo schema è errato perché la figura non è un rettangolo ma un *quadrilatero*:



L'Autore non indica l'unità di misura, ma dalle successive conversioni si può dedurre che si tratti di pertiche lineari.

Egli calcola l'area con una procedura che può essere sintetizzata con la formula che segue:

$A_{ABCD} = (AB + CD)/2 * (AD + BC)/2 = (12 + 10)/2 * (14 + 16)/2 = 11 * 15 = 165$ [pertiche^2].

Ha moltiplicato le semisomme delle lunghezze dei lati opposti: ha impiegato l'errata e antichissima *formula degli agrimensori*.

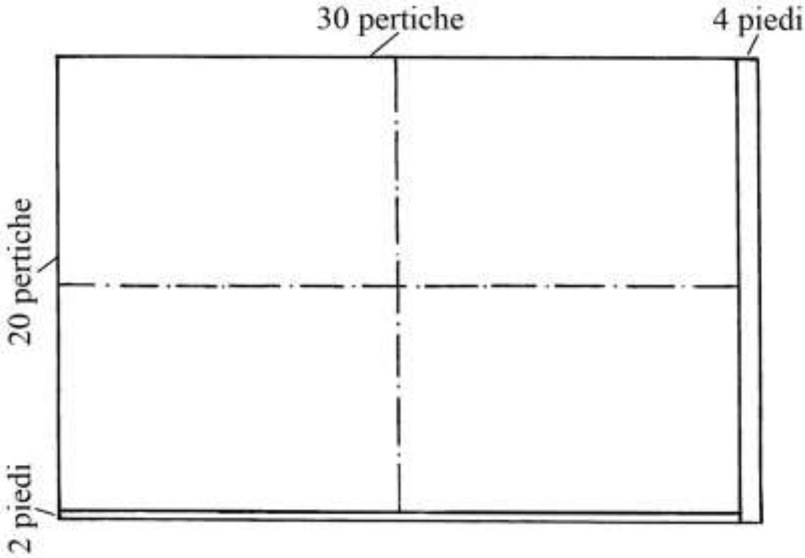
Poi ha convertito il risultato:

165 [pertiche^2] = 16 staia + 5 pertiche^2 = 1 modiuolo + 6 staia + 5 pertiche^2.

Riguardo all'uso della formula degli agrimensori è possibile che il Maestro Umbro sia stato influenzato dai testi dei *Gromatici Romani*, disponibili nel Medioevo.

175r c

L'Autore presenta l'esempio di un terreno posto ad Assisi: esso è largo (20 pertiche + 2 piedi) ed è lungo (30 pertiche + 4 piedi).



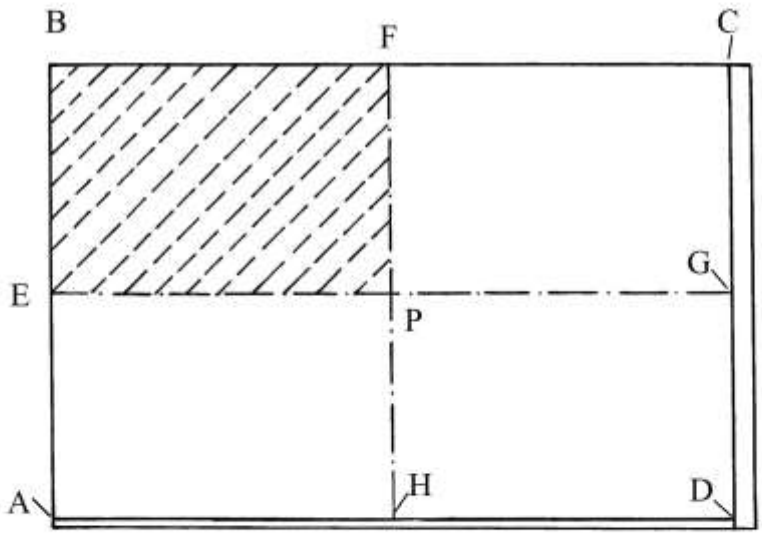
Il calcolo della sua area distingue fra *pertiche* e *piedi*:

* dividere 20 per 2: $20/2 = 10$;
* dividere 30 per 2: $30/2 = 15$;
* moltiplicare gli ultimi due quozienti: $10 * 15 = 150$ [pertiche^2];
* moltiplicare 4 piedi per 10 [pertiche]: $4 * 10 = 40$ once;
* moltiplicare 2 piedi per 15 [pertiche]: $2 * 15 = 30$ once;
* sommare le once: $40 + 30 = 70$ once = 7 puegle [o pertiche^2];
* moltiplicare 2 piedi per 4 piedi: $2 * 4 = 8$ punte;
* convertire 150 pertiche[^{2}]: 150 pertiche^2 = 15 staia = 1 modiuolo + 5 staia.

L'area totale è: 1 modiuolo + 5 staia + 7 puegle + 8 ponte.

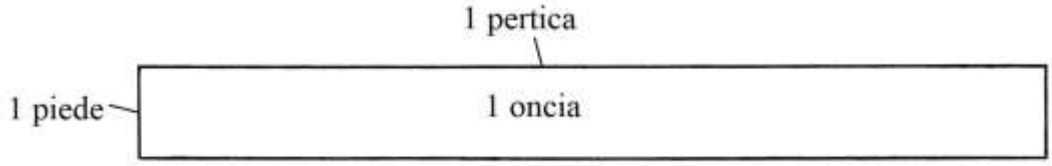
Il Maestro Umbro non spiega perché calcola l'area del terreno moltiplicando metà della lunghezza per metà della larghezza: era forse un uso di Assisi?

L'area da lui calcolata è quella del rettangolo EBFP che è esattamente *un quarto* di quella di ABCD.



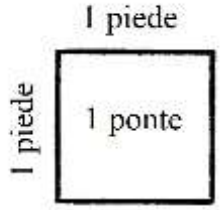
Dalla procedura emergono alcuni dati:

*	l’area di un rettangolo largo 1 piede e lungo 1 pertica è uguale a 1 oncia e quindi a 1/100 di staio:



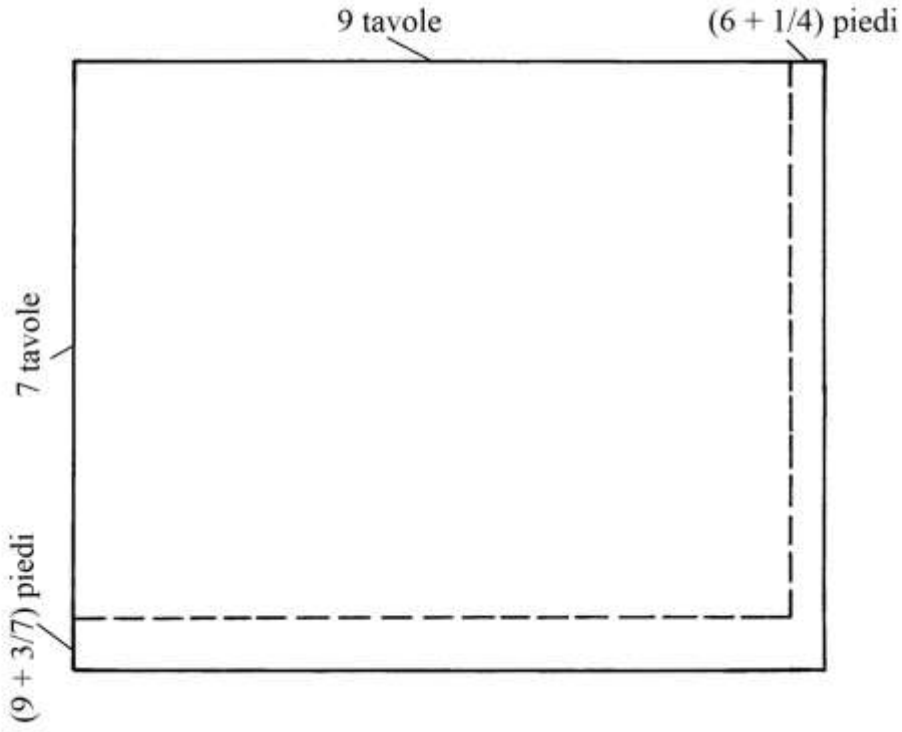
;

*	l’area di un quadrato di lato 1 piede è 1 ponte e cioè 1/10 di oncia:



175v a

Un terreno ha larghezza di 7 tavole + (9 + 3/7) piedi ed è lungo 9 tavole e (6 + ½) piedi. Il problema chiede l’area di tutto il terreno.



L’Autore fissa alcune regole per moltiplicare:

*	tavole per tavole;
*	piedi per tavole: il risultato è espresso in once;
*	frazioni di piede per tavole: il risultato è in once;
*	piedi per piedi: sono piedi^2.

Il risultato dei suoi calcoli (che non sono mostrati) è:

Area = 72 tavole + 6 once + (7 + 11/12) ponte.

I prodotti parziali danno i seguenti dati:

63 tavole + (130 + 5/14) once + (61 + 2/7) piedi^2. L'equiparazione fra i due risultati è di difficile comprensione.

Infine, l'Autore chiede di valutare il terreno secondo una stima di *30 libbre* al *modiuolo*.

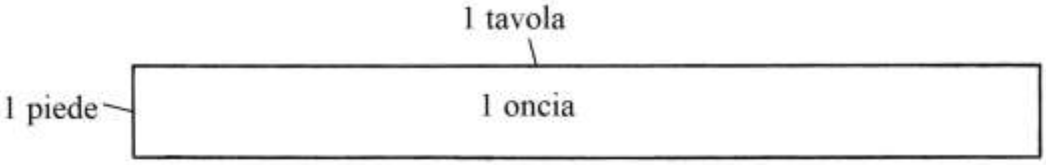
Probabilmente, *libbra* sta per *lira*. La vera e propria libbra era un'unità di misura del peso (o massa). In origine il peso in argento di una libbra era diviso in 240 denari di argento.

La procedura usata per calcolare il valore del terreno è la seguente:

* moltiplicare 30 (libbre) per 72 (tavole): 30 * 72 = 2160 "tavole";
* 6 once per 30 tavole: 6 * 30 = 180;
* dividere per 10: 180/10 = 18 "libbre";
* 7 ponte per 30: 7 * 30 = 210 "libbre";
* moltiplicare 30 per 11/12 ponte: 30 * 11/12 = (27 "libbre" + 10 soldi);
* sommare con 210: (27 "libbre" + 5 soldi) + 210 "libbre" = (237 "libbre" + 10 soldi [ma dovrebbero essere "5" soldi];
* dividere per 100: (237 "libbre" + 10 soldi)/100 = (2 "libbre" + 7 soldi + 6 denari) È la libbra o lira è correttamente scomposta in 20 soldi e il soldo vale 12 denari, per la "libbra" equivale a 240 denari];
* sommare con 2160 [che l'Autore ora chiama "libbre" mentre nel primo passo della procedura ha misurato 2160 come "tavole"]:
  il risultato è (2180 "libbre" + 7 soldi + 6 denari);
* dividere per 100: (2180 "libbre" + 7 soldi + 6 denari)/100 = 2 "libbre" + (16 + 9/10) soldi, valore del terreno.

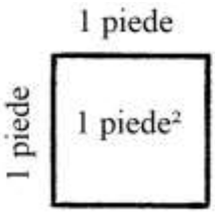
Dalla procedura emergono alcuni dati:

* l'area di un rettangolo largo 1 piede e lungo 1 tavola è uguale a 1 oncia e quindi a 1/100 di staio:



;

* l'area di un quadrato di lato 1 piede è uguale a 1 piede^2:



176r a

Il problema è basato sul modiuolo di Gubbio: mentre quello usato ad Assisi (e anche a Perugia) aveva sottomultipli in base 10, a Gubbio i sottomultipli erano in base 12, come spiega il seguente elenco:

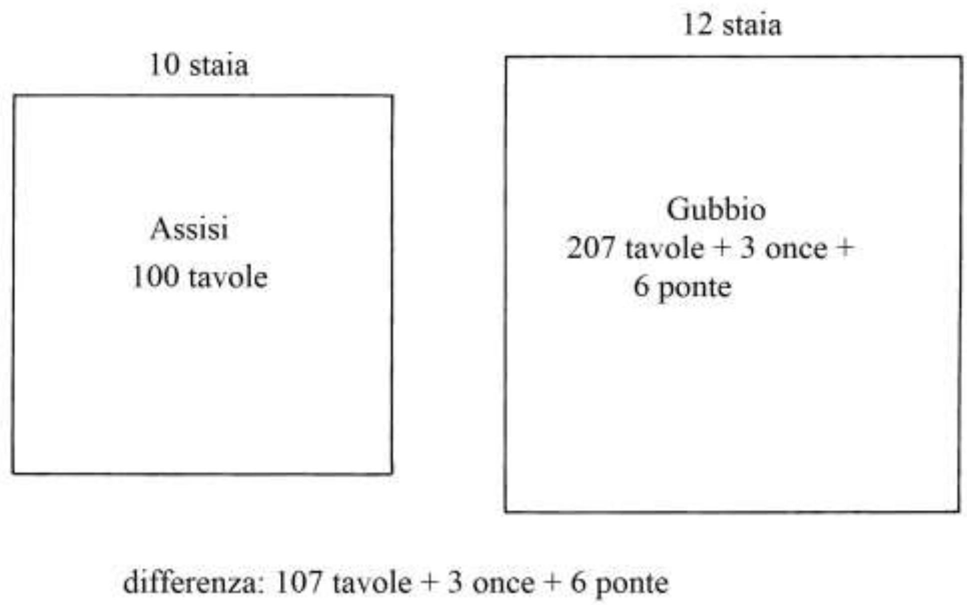
*	1 modiuolo = 12 staia;
*	1 staio = 12 tavole;
*	1 tavola = 12 once;
*	1 oncia = 12 ponte.

Il problema chiede quanto il modiuolo di Gubbio è maggiore di quello di Assisi.

La procedura usata è la seguente:

*	moltiplicare 12 per 12: 12 * 12 = 144 once;
*	moltiplicare per 12: 144 * 12 = 1728 ponte;
*	dividere per 10: 1728/10 = (172 once + 8 ponte);
*	dividere per 10: (172 once + 8 ponte)/10 = (17 tavole + 2 once + 8 ponte);
*	moltiplicare per 12 le 17 tavole: 12 * 17 = 204;
*	moltiplicare le 2 once per 12: 2 * 12 = 96 once + 6 ponte;
*	sommare tutti i parziali: 1 modiuolo di Gubbio = (207 tavole + 3 once + 6 ponte).

Il modiuolo di Gubbio è più grande di quello di Assisi di (107 tavole + 3 once + 6 ponte).



<u>176v a</u>

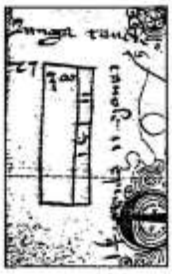
Il modiuolo vecchio di Perugia valeva 14 piedi e il nuovo 15 piedi. La conversione fra le due unità è ottenuta con i seguenti passi:

*	moltiplicare 14 per sé stesso: 14 * 14 = 196;
*	moltiplicare 15 per sé stesso: 15 * 15 = 225;
*	sottrarre 196 da 225: 225 – 196 = 29 piedi;
*	moltiplicare per 100: 29 * 100 = 2900;
*	dividere per 196: 2900/196 = (14 + 39/49).

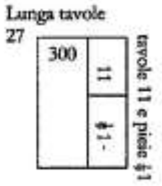
L'Autore indica [(14 + 156/196) tavole + 156 ponte].

<u>176v b</u>

Un terreno ha lunghezza di 27 braccia e area uguale a 3 modiuoli, come mostra lo schema che segue riprodotto da Bocchi:



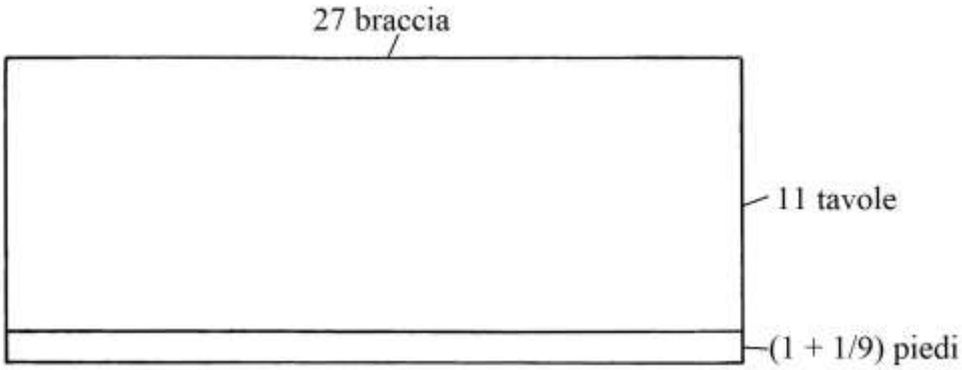
176vb



Implicitamente, il Maestro Umbro utilizza il rapporto: 1 modiuolo = 100 tavole e i 3 modiuoli equivalgono a 300 tavole.

Dividere 300 per 27: 300/27 = 11 tavole + (1 + 1/9) piedi: è la larghezza del terreno.

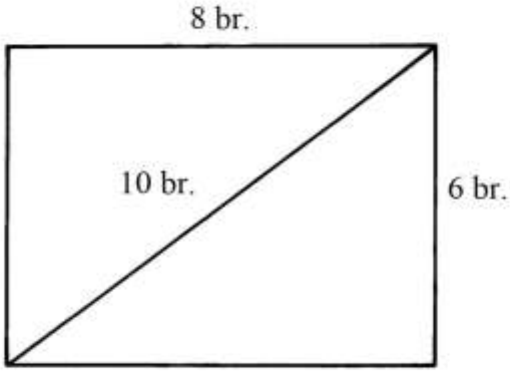
L'Autore ha scambiato la lunghezza con la larghezza.



176v c

Un terreno ha la forma di un rettangolo che ha lunghezza di 8 braccia e larghezza di 6 braccia.

Il problema chiede la lunghezza della diagonale.



La procedura è la seguente:

* moltiplicare 8 per sé stesso: 8 * 8 = 64;
* moltiplicare 6 per sé stesso: 6 * 6 = 36;
* sommare i due quadrati: 64 + 36 = 100;
* estrarre la radice quadrata: √100 = 10 braccia, lunghezza della diagonale.

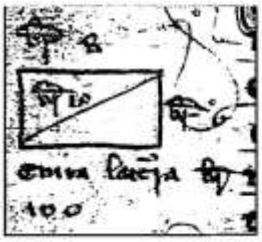
L’area del rettangolo è: $8 * 6 = 48$ braccia^2.

Il testo si conclude con una considerazione:

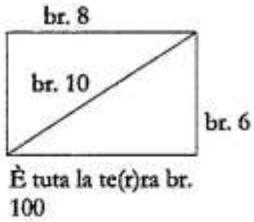
"…*E se ne fosse d(ic)to qua(n)te br. quadre è tutto, sì '1 devemo are-chare a mesura de schudo, e chusì fa' le se-meglante ragione*…".

Nello schema allegato (riprodotto da Bocchi), sotto la figura è scritto:

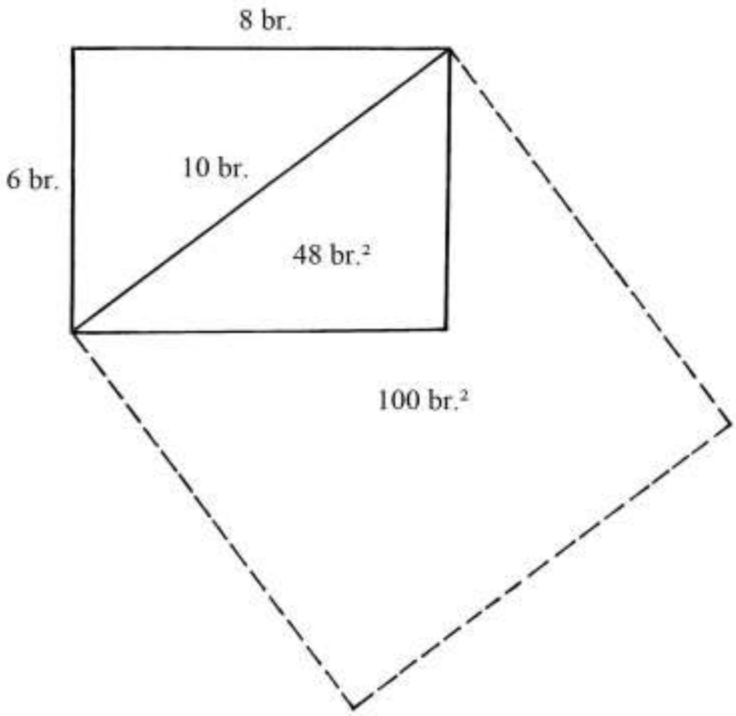
"*E' tuta la te(r)ra br.100*".



176vc



Il Maestro Umbro non ha correttamente calcolato l’area del rettangolo, ma quella del quadrato costruito sulla diagonale lunga 10 braccia, area che è 100 braccia^2:

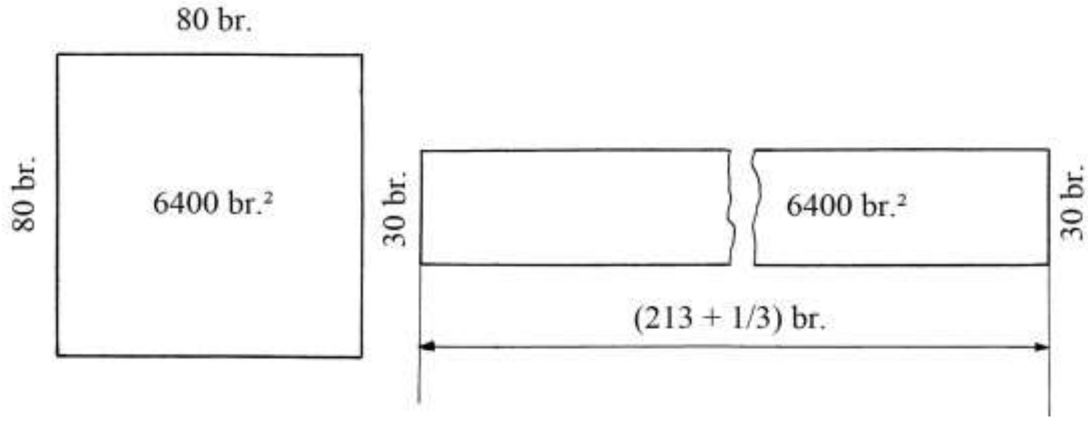


L’Autore ha chiamato in causa lo *scudo*: questo termine indica un triangolo o un trapezio, ma il poligono costruito sulla diagonale del rettangolo è un quadrato.

<u>176v d</u>

Un terreno ha forma quadrata con lati lunghi 80 braccia.

Un secondo terreno ha larghezza di 30 braccia e deve avere la stessa superficie del primo: il problema chiede la sua lunghezza:

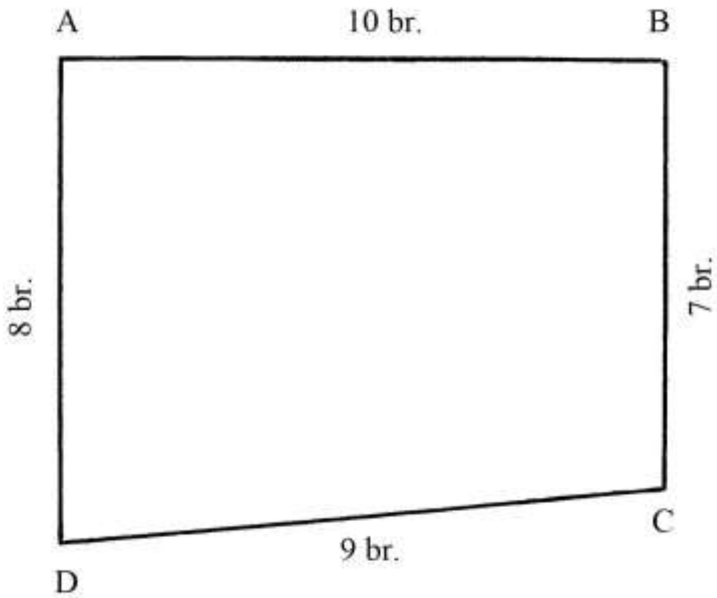


La soluzione è:

*	moltiplicare per sé stessa la lunghezza di un lato del primo terreno:
	80 * 80 = 6400 braccia^2, area del primo terreno;
*	dividere per 30:	6400/30 = (213 + 1/3) braccia, lunghezza del secondo terreno.

<u>177r a</u>

Un'abitazione ha forma di un quadrilatero con le dimensioni espresse in braccia riportate sulla figura:



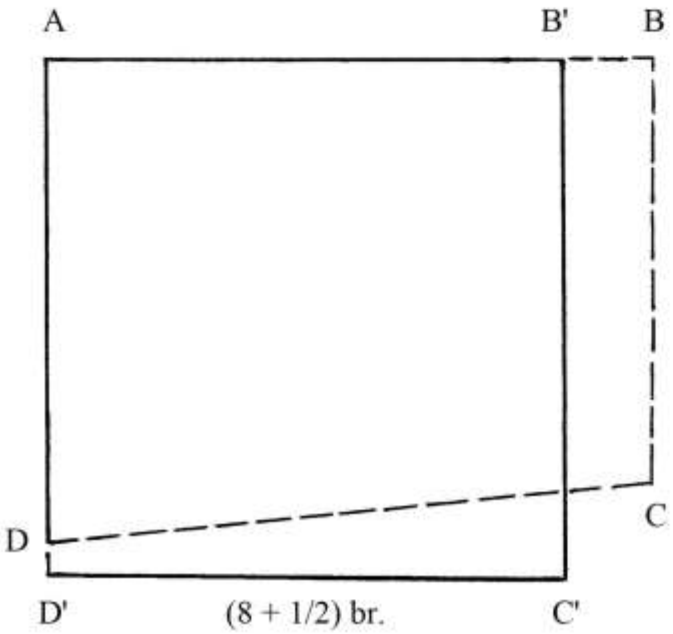
Per semplificare la soluzione del problema, nello schema sopra disegnato l'angolo BAD è *retto*.

La procedura usata è la seguente:

*	sommare le due lunghezze:	10 + 9 = 19;
*	dividere per 2:	19/3 = (9 + ½);
*	sommare le due larghezze:	8 + 7 = 15;
*	dividere per 2:	15/2 = (7 + ½);
*	moltiplicare le due semisomme:	(9 + ½) * (7 + ½) = (71 + ¼) braccia^2, area convenzionale dell'abitazione.

L'Autore ha di nuovo applicata l'erronea formula degli agrimensori. Forse, consapevole degli errori derivanti dal suo impiego, il Maestro Umbro propone di convertire l'area calcolata in quella di un quadrato di area equivalente: a tal fine, egli estrae la radice quadrata dell'area:

$\sqrt{(71 + 1/4)} \approx (8 + 1/2)$ braccia, lunghezza dei lati del quadrato equivalente.



Lo schema confronta il quadrato equivalente AB'C'D' con il quadrilatero originario ABCD.

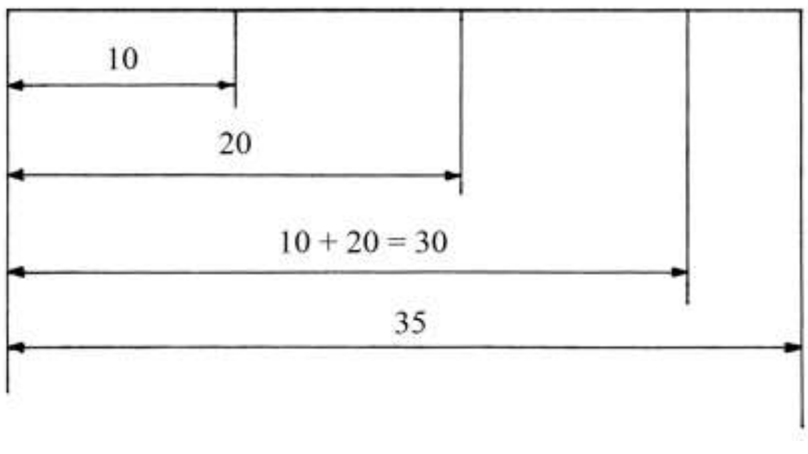
<u>177r b</u>

Nella pagina si trovano due schemi di triangoli: solo il secondo è oggetto di un problema descritto nel testo.

Il primo triangolo avrebbe lati lunghi 10, 20 e 35, con un'altezza lunga 12: il triangolo è *impossibile* perché la somma delle lunghezze di due lati deve essere maggiore di quella del terzo; invece si ha:

$10 + 20 < 35$

$30 < 35$.

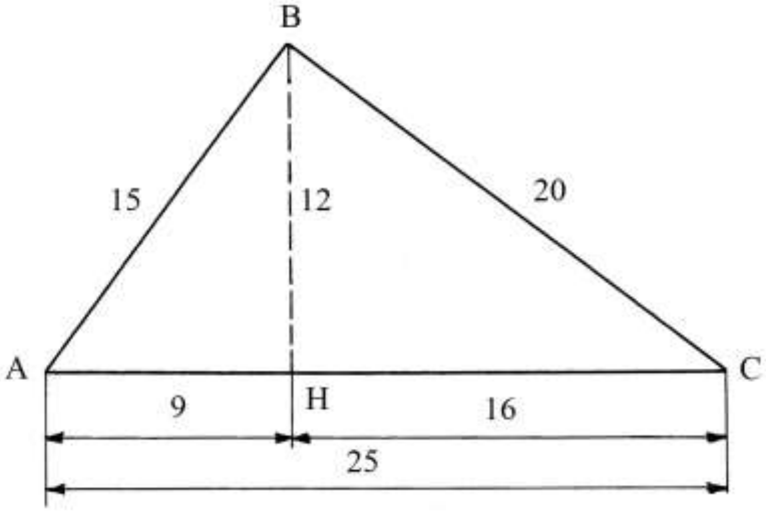


%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Il secondo triangolo ha lati lunghi 15-20-25: anche per questo poligono l'Autore non indica alcuna unità di misura.

Le lunghezze dei lati di questo triangolo formano una terna derivata dalla primitiva 3-4-5: esso ha un'altezza [BH] che è lunga un numero intero, 12 e anche l'area, 150, è espressa da un numero intero.

Grazie al possesso di queste proprietà, il triangolo – come quello con lati lunghi 3-4-5 – è un *triangolo di Erone* (I secolo d.C.).



Il problema chiede l'area di questo triangolo. La procedura usata è la seguente:

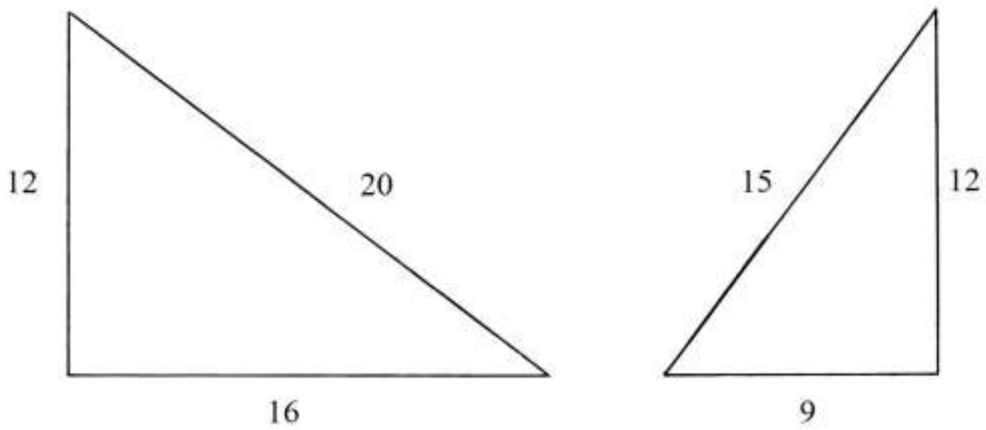
* moltiplicare la lunghezza di [AC] per sé stessa: 25 * 25 = 625;
* moltiplicare la lunghezza di [AB] per sé stessa: 15 * 15 = 225;
* sommare i due prodotti: 625 + 225 = 850;
* moltiplicare la lunghezza di [BC] per sé stessa: 20 * 20 = 400;
* sottrarre da 850: 850 – 400 = 450;
* dividere per 2: 450/2 = 225;
* dividere per la lunghezza di [AC]: 225/25 = 9 [lunghezza di AH];
* sottrarre dalla lunghezza di [AC]: 25 – 9 = 16 [lunghezza di HC];
* moltiplicare la lunghezza di [AH] per sé stessa: 9 * 9 = 81;
* sottrarre dal quadrato di [AB]: 225 – 81 = 144;
* estrarre la radice quadrata: √144 = 12 [lunghezza dell'altezza BH];
* moltiplicare la lunghezza di [BH] per quella di [AH]: 12 * 9 = 108;
* dividere per 2: 108/2 = 54 area di [ABH];
* moltiplicare la lunghezza di [BH] per quella di [HC]: 12 * 16 = 192;
* dividere per 2: 192/2 = 96 [area di BHC]:
* sommare 54 e 96: 54 + 96 = 150, area dell'intero triangolo [ABC].

177v a

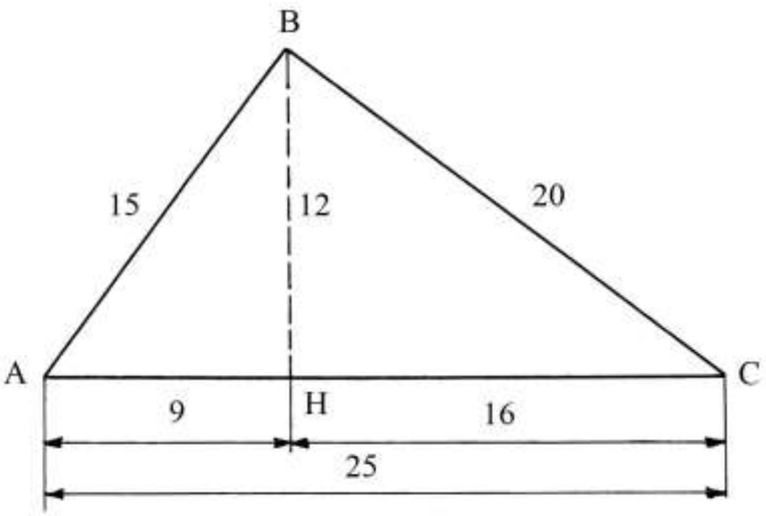
Gli schemi che Andrea Bocchi segnala a pagina 177 verso non sono accompagnati da alcun testo esplicativo.

I due triangoli rettangoli hanno lati con lunghezze che formano terne derivate dalla primitiva 3-4-5.

Inoltre i cateti verticali dei due triangoli hanno uguale lunghezza, 12.



Se i due triangoli vengono uniti lungo i cateti verticali, essi danno vita al triangolo rettangolo che ha lati lunghi 15-20-25:



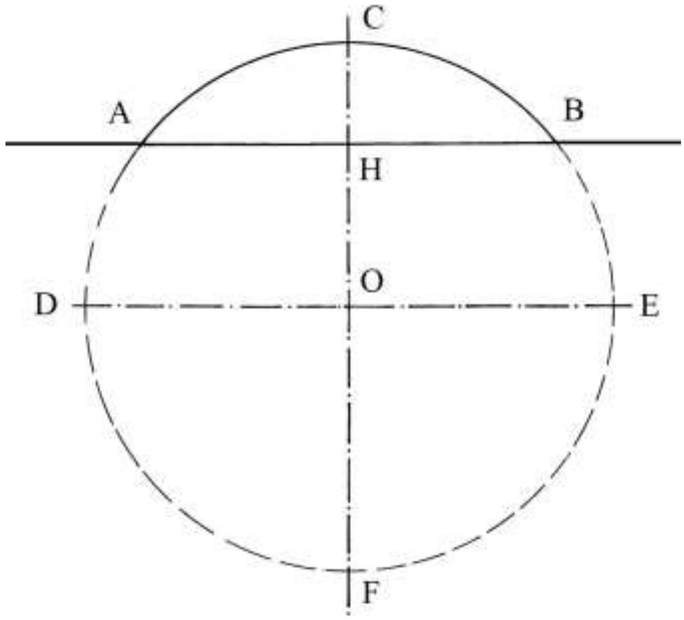
[]

<u>178r a</u>

Una colonna di forma circolare è parzialmente interrata nel senso della lunghezza: dal terreno emerge un solido la cui parte visibile è la sezione di un segmento circolare: di esso sono note le lunghezze della corda [AB] (10 + 9/10) e quella dell'arco [ACB] (20 + ½).

Non è indicata alcuna unità di misura.

Il problema chiede la lunghezza del diametro e quella dell'intera circonferenza.



L’Autore presenta una serie di operazioni piuttosto oscure – e forse errate – e giunge alla conclusione che il diametro della colonna [DE = CF] è lungo 14 e la circonferenza 44.

Fra gli altri passi, egli moltiplica la lunghezza di metà della corda per sé stessa: egli la indica in (4 + 19/20): se l’intera corda è lunga (10 + 9/10) la sua metà è lunga (5 + 9/20) e non (4 + 19/20).

Il fatto che egli moltiplichi per sé stessa la lunghezza della metà della corda può forse far pensare a un’applicazione del *teorema delle corde*.

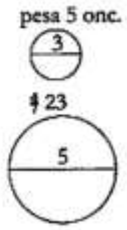
<u>178v a</u>

L’ultimo problema considera due sfere di *cera*.

La prima ha diametro 3 e pesa 5 once. La seconda sfera ha diametro lungo 5: il problema chiede il suo peso.

La figura che segue è riprodotta da Bocchi:

178va



La soluzione originale è la seguente:

* moltiplicare il diametro della prima sfera per sé stesso tre volte: 3 * 3 * 3 = 27;
* moltiplicare il diametro della seconda sfera per sé stesso tre volte: 5 * 5 * 5 = 125.

Il testo non procede oltre: sullo schema riprodotto qui sopra, sul cerchio più grande è scritto “4/7 (+) 23”: se per il Maestro Umbro è questo il peso della seconda sfera vi è un evidente errore.

Il peso (o massa) di una sfera è direttamente proporzionale al cubo del raggio (e del diametro).

Il volume di una sfera è dato da:

$$V_{\text{SFERA}} = 4/3 * \pi * r^3 = 4/3 * \pi * (d/2)^3 = 4/3 * 22/7 * (d/2)^3 = 88/21 * (d/2)^3.$$

Indichiamo con *d* il diametro della prima sfera e con *D* quello della seconda e con P_1 il peso della prima e con P_2 quello della seconda. Possiamo utilizzare la seguente proporzione:

$$P_1 : P_2 = d^3 : D^3.$$

Ricaviamo P_2:

$P_2 = (P_1 * D^3)/d^3 = (3 * 125)/27 = (13 + 8/9)$ once, valore assai diverso da quello (23 + 4/7) scritto sullo schema originale.

- APPENDICE -

I testi dei problemi geometrici contenuti nel 6° capitolo forniscono alcune indicazioni sulle unità di misura usate a Perugia, ad Assisi e a Gubbio.

Il problema di cui a pagina <u>*175r c*</u> presenta i seguenti rapporti:

1. Un rettangolo che è lungo 1 pertica (lineare) e 1 piede (lineare) ha area di 1 oncia^2:

   1 pertica (lineare) * 1 piede (lineare) = 1 oncia^2.
2. Un quadrato che ha lato lungo 1 piede (lineare) ha area di *1 ponte*:

   1 piede (lineare) * 1 piede (lineare) = 1 ponte.

Nel problema <u>*175v a*</u> sono presenti i seguenti rapporti:

1. Un rettangolo lungo 1 tavola e largo 1 piede (lineare) ha area di 1 oncia^2:

   1 tavola (lineare?) * 1 piede = 1 oncia^2.

A questo punto si può ragionevolmente introdurre l'uguaglianza che segue:

1 pertica (lineare) * 1 piede (lineare) = 1 tavola (lineare?) * 1 piede (lineare) e semplificando si ha:

1 pertica (lineare) = 1 tavola (lineare?).

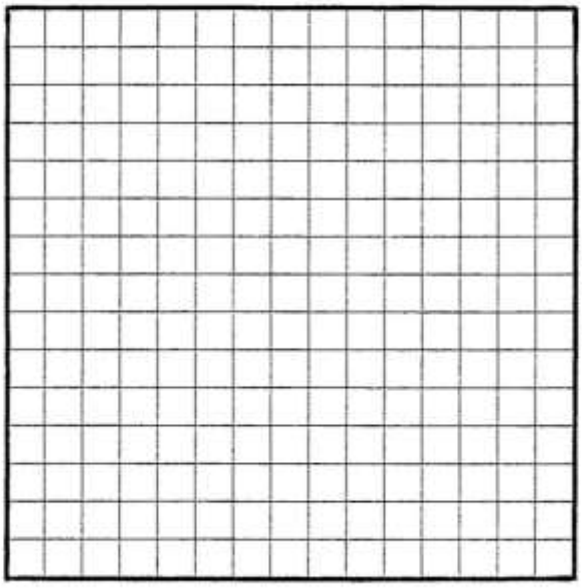
2. Un quadrato che ha lati lunghi 1 piede ha area:

   1 piede (lineare) * 1 piede (lineare) = 1 piede^2.

Si può proporre una seconda uguaglianza:

1 piede (lineare) * 1 piede (lineare) = 1 ponte = 1 piede^2.

Nel problema <u>*176v a*</u>, il modiuolo nuovo di Perugia era l'area di un quadrato con lati lunghi 15 piedi:



Nel problema *176v b* il modiuolo di Perugia vale 100 tavole e, di conseguenza, vi è la seguente relazione:

1 modiuolo = 100 tavole = 225 piedi^2 e

1 tavola = (2 + ¼) piedi^2.

Nella pagina *175 recto* sono descritte alcune unità di misura superficiali usate a Perugia:

* 1 modiuolo = 10 staia;
* 1 staio = 10 puegle o mesure o p(er)teche [pertiche].

Stando a questa iniziale definizione si ha:

1 modiuolo = 10 staia = 100 pertiche.

Comparando questa relazione con quella utilizzata nella pagina *176v b* si ottiene la seguente uguaglianza:

1 modiuolo = 100 pertiche = 100 tavole e

1 pertica (superficiale) = 1 tavola (superficiale).

Infine, si possono ipotizzare i seguenti rapporti:

* 1 oncia (lineare) = 1/12 di piede;
* 1 pertica (lineare) = 5 braccia.

È bene tenere presente un dato di fatto: molte unità di misura medievali sono state usate nei secoli successivi, ma il loro valore si è spesso modificato.

- -

Bibliografia

1. Arrighi Gino (a cura di), “Maestro Umbro (sec. XIII) – Livero de l’Abbecho” (Cod. 2404 della Biblioteca Riccardiana di Firenze), in “Bollettino della Deputazione di Storia Patria per l’Umbria”, Volume LXXXVI (1989), Perugia, 1989, pp. 137.
2. Arrighi Gino (a cura di), “Maestro umbro (sec. XIII) – Amastramento de l’arte de la geometria” (Cod. 2404 della Biblioteca Riccardiana di Firenze), in “Bollettino della Deputazione di Storia Patria per l’Umbria”, volume LXXXVIII, Perugia, 1991, pp. 31.
3. Bocchi Andrea, “Dal «Liber Abaci» ai Libri d’Abaco: errori, fraintendimenti, ristrutturazioni”, in “Scienze e rappresentazioni”. Studi in onore di Pierre Souffrin, Firenze, Olschki, 2015, pp. 447 – 457.
4. Bocchi Andrea (a cura di), “Lo livero de l’abbecho”, Pisa, Edizioni ETS, Vol. I – Introduzione e testo critico, 2017, pp. 524.
5. Chiovelli Renzo, “Tecniche costruttive murarie medievali”. La Tuscia, Roma, L’Erma di Bretschneider, 2007, pp. 496.
6. Martini Angelo, “Manuale di Metrologia: ossia Misure, Pesi e Monete in Uso Attualmente e Anticamente presso Tutti i Popoli”, Loescher, Torino-Roma-Firenze, 1883, pp. VIII-904.
7. “Tavole di Ragguaglio dei pesi e delle misure già in uso nelle varie provincie del Regno col peso metrico decimale”, R.D. 20 maggio 1877 n. 3836, Roma, Stamperia Reale, 1877, pp. VIII+768.
8. Zupko Ronald Edward, “Italian Weights and measures from the Middle Ages to the Nineteenth Century”, Philadelphia, American Philosophical Society, 1981, pp. lxxxiv+339.