sergio(punto)calzolani(at)outlook(punto)it

Edizione rivista e corretta

Parole chiave: valore approssimato di π; problemi sul cerchio e sulla circonferenza; quadrati inscritti e circoscritti; scudi quali triangoli isosceli e equilateri; triangoli inscritti; problemi sui triangoli; triangolo 3-4-5; problemi sui trapezi.

INTRODUZIONE

Il testo reca il titolo "*Amastramento de l'arte de la geometria*", è scritto in umbro (perugino) ed è attribuito a uno sconosciuto "Maestro Umbro".

Il trattato è conservato nel Codice 2404 della Biblioteca Riccardiana di Firenze.

Il manoscritto contiene pure un più ampio trattato aritmetico dal titolo "*Livero de l'Abbecho"* di cui l'*Amastramento* forma la parte finale.

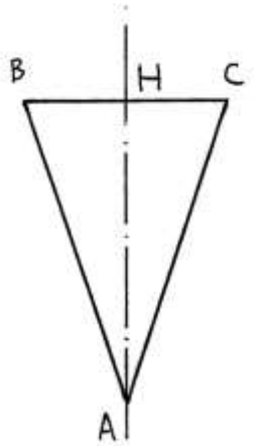
Nel suo complesso, il manoscritto è datato al 1288 - 1290 perché nel *Livero* è contenuto un esempio di conto corrente intestato a un certo *messer Ranieri della Terza*, con alcune operazioni registrate fra il gennaio e l'agosto del 1288.

Entrambi i testi sono stati trascritti e pubblicati da Gino Arrighi nei due studi indicati in bibliografia.

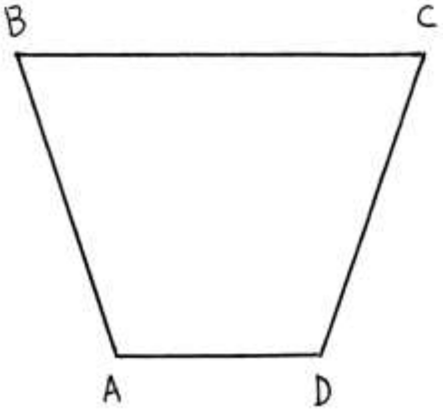
L'*Amastramento* è diviso in sei capitoli di cui solo i primi cinque hanno contenuto geometrico e il sesto aritmetico (che Gino Arrighi non ha considerato nella sua trascrizione).

Il Maestro Umbro usa una serie di termini per indicare alcune entità geometriche:

* *façia* è il lato di un poligono;
* *piaça* è l'area di una superficie piana;
* *chupo* sta per *profondo*;
* *rotondo* è il nome di un cerchio;
* *rotondo vogle d'entorno* sta per circonferenza;
* *schudo* è un triangolo isoscele (ma anche equilatero), con il vertice nel quale convergono i lati di uguale lunghezza che è collocato in basso:



* gli ultimi due problemi del 3° capitolo si riferiscono a trapezi isosceli con la base maggiore collocata superiormente e anch'essi chiamati *schudo*:



* *diametro de meço* è l'altezza di un triangolo isoscele (HA nella prima figura) o equilatero relativa al lato orizzontale (BC);

* *lina de sopre* è il terzo lato, orizzontale, di un triangolo (BC, sempre nella prima figura).

Note:

I. Il titolo di ciascun problema è preceduto da un numero progressivo per distinguere le varie *ragioni*.

II. I problemi sono chiamati *ragioni*, termine introdotto in Italia nel Medioevo con il significato di conto: il termine è stato impiegato nei trattati d'abaco e da esso sono derivati i termini *Ragioneria* e *Ragioniere*.

III. Fra parentesi quadre sono aggiunte ulteriori spiegazioni relative a alcuni passaggi delle procedure risolutive impiegato dal Maestro Umbro.

IV. I disegni che accompagnano le soluzioni di alcuni problemi sono dell'Autore di questo articolo e recano le lettere ai vertici dei segmenti.

V. Il Maestro Umbro usa una notazione particolare per scrivere i *numeri misti* (contenenti una parte intera e una frazionaria): egli antepone la parte frazionaria all'intero e non collega le due parti con alcun simbolo aritmetico, come ad esempio (2/3 8) invece di (2/3 + 8) oppure di (8 + 2/3). Nella descrizione di alcuni problemi saranno usati numeri reali in formato decimale invece dell'equivalente numero misto, come ad esempio 38,5 invece di "38 + ½".

VI. I numeri misti sono qui di seguito racchiusi fra parentesi tonde (assenti nel Trattato) per non creare confusione, come ad esempio (8 + 2/3) invece di 8 + 2/3.

VII. Per π egli usa l'approssimazione 22/7 che scrive nella forma "1/7 3" invece di "3 + 1/7".

VIII. Nel trattato non è fatto cenno ad alcuno strumento, tranne al compasso (*seste*).

IX. In questo articolo sono presi in considerazione i problemi di geometria piana contenuti nei capitoli 1° e 3°.

Le unità di misura

L'Anonimo impiega un'unità di misura di lunghezza, il *braccio,* e i suoi derivati *braccio*^{2} e *braccio*^{3}.

Egli non usa alcun multiplo del braccio, quali la canna agrimensoria e la canna mercantile: ciò starebbe a indicare che il Maestro Umbro non era un agrimensore di professione.

La tabella che segue, tratta dal Martini (citato in bibliografia) riassume le antiche unità di misura di lunghezza di Perugia:

Misure di lunghezza	metri
Canna agrimensoria = 15 Piedi	**5,452500**
Canna mercantile = 8 Palmi .	**2,008500**
Braccio da tela = 4 Palmi . .	**1,004250**
Passetto = 2 Piedi	**0,727000**
Braccetto da nastri = 2 1/2 Palmi	**0,627656**
Piede da legname e da fabbriche = 12 Once	**0,363500**
Palmo	**0,251062**
Oncia	**0,030292**

Le formule relative alla circonferenza e al cerchio

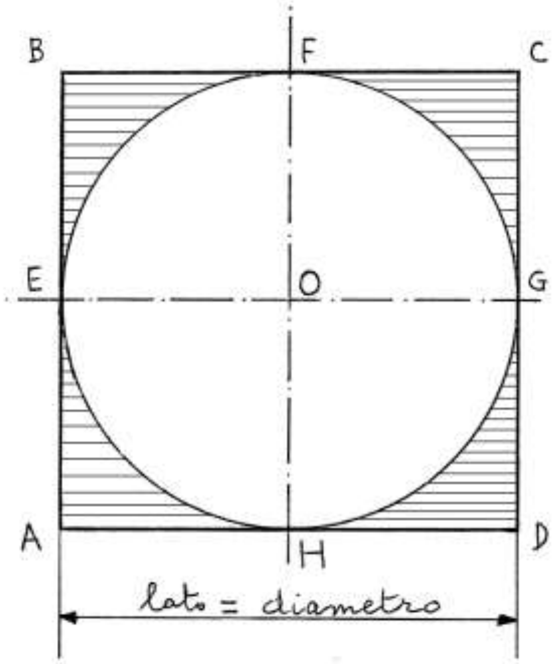
I testi matematici medievali contengono almeno una parte dedicata alla geometria: è questo il caso dell'opera del Maestro Umbro. Pochi trattati sono dedicati alla geometria.

Tutti sono accomunati dall'uso per π dell'approssimazione (3 + 1/7) = 22/7 che risale ad Archimede.

Il valore di π è 3,141592653589…, mentre quello di 22/7 è 3,(142857)142857142857… e quindi questo secondo valore è leggermente approssimato per eccesso.

Inoltre, in questo ultimo numero si ripete all'infinito il blocco di *sei* cifre racchiuso fra parentesi tonde: (142857). Infatti 1/7 = 0,142857…Il numero è *periodico*.

Il cerchio della figura che segue è inscritto nel quadrato ABCD che ha lato lungo quanto il diametro del cerchio:



L’area del cerchio è data da:

$$\text{Area}_{\text{CERCHIO}} = \pi * r^2 = \pi * (d/2)^2 = \pi * d^2/4.$$

Il diametro è indicato con *d* e il raggio con *r*.

Sostituendo a π il valore 22/7, la formula precedente diviene:

$$\text{Area}_{\text{CERCHIO}} = (22/7) * d^2/4 = 22/28 * d^2 = 11/14 * d^2.$$

L’area del quadrato ABCD è:

$$\text{Area}_{\text{QUADRATO}} = \text{lato}^2 = AD^2 = d^2.$$

La differenza fra l’area del quadrato e quella del cerchio è:

$$\text{differenza} = \text{Area}_{\text{QUADRATO}} - \text{Area}_{\text{CERCHIO}} = d^2 - 11/14 * d^2 = (3/14) * d^2.$$

Essa è la superficie compresa dar il quadrato e il cerchio, che è formata dai quattro identici poligoni mistilinee che hanno i vertici nei punti A, B, C e D, che sono tratteggiati in figura.

La formula dell’area di un cerchio può essere scritta nel modo che segue:

$$\text{Area}_{\text{CERCHIO}} = \pi * d^2/4 = (\pi * d) * (d/4).$$

Ma (π * d) è la lunghezza della *circonferenza*, *c*, per cui la formula diviene:

$$\text{Area}_{\text{CERCHIO}} = c * d/4.$$

Peraltro, la lunghezza della circonferenza è approssimabile a

$$c = \pi * d = (22/7) * d.$$

Sostituendo questo ultimo valore nella formula dell’area del cerchio si ottiene

$$\text{Area}_{\text{CERCHIO}} = (d * 22/7) * d/4 = (22/28) * d^2 = (11/14) * d^2.$$

Fra l’area del quadrato e quella del cerchio intercorre la relazione

$$\text{Area}_{\text{QUADRATO}} : \text{Area}_{\text{CERCHIO}} = d^2 : (11/14) + d^2 = 1 : 11/14.$$

Quindi, vale la segue proporzione:

$$\text{Area}_{\text{QUADRATO}} : \text{Area}_{\text{CERCHIO}} = 1 : 11/14 = 14 : 11.$$

Conoscendo l’area di un cerchio è facile ricavare l’area del quadrato circoscritto e la lunghezza del suo lato:

$$\text{Area}_{\text{QUADRATO}} = \text{Area}_{\text{CERCHIO}} * (14/11).$$

Il lato del quadrato è lungo:

$$\text{lato} = \sqrt{\text{Area cerchio} \cdot \frac{14}{11}}.$$

Esprimendo le aree delle due figure in relazione a quella del cerchio, si ha:

differenza = Area $_{QUADRATO}$ – Area $_{CERCHIO}$ = (14/11) * Area $_{CERCHIO}$ – Area $_{CERCHIO}$ =

= (3/11) * Area $_{CERCHIO}$.

Le soluzioni di alcuni problemi presenti nell' "*Amastramento de l'arte de la geometria*" e relativi al cerchio e alla circonferenza contengono operazioni con le costanti (3 + 1/7), 3/11, 3/14, 11/14 e 14/11.

1° CAPITOLO

[1] **Circonferenza di un cerchio**

Un cerchio ha diametro lungo 10 braccia: il problema chiede di calcolare la circonferenza.

La soluzione è data dal prodotto del diametro per la costante (3 + 1/7):

circonferenza = 10 * (3 + 1/7) = 31 + 3/7 braccia.

Il Maestro Umbro usa una procedura un po' più lunga come è chiarito dal seguente passaggio:

"…*devemo multiplicare quisto 10 per 1/7 3 e dire: 3 via 10 che fa 20 e una via 10/7 che fa 10/7 che 1 sano 3/7. Ed avemo br. 3/7 31…*".

Il termine *via* sta per *per*, (e cioè *moltiplica*) e *sano* significa *intero*.

L'Autore suggerisce un metodo un po' più lungo per moltiplicare o dividere con numeri misti: evidentemente i destinatari del suo lavoro avevano poca familiarità con le frazioni.

[2] **Diametro di un cerchio**

Un cerchio ha circonferenza lunga 60 braccia: il problema chiede di calcolare il diametro.

La soluzione è: dividere la circonferenza per (3 + 1/7).

Ecco i passi della procedura impiegata:

* moltiplicare 60 per 7: 60 * 7 = 420 ;
* moltiplicare 7 per (3 + 1/7): 7 * (3 + 1/7) = 22 ;
* dividere 420 per 22: 420 : 22 = 19 + 1/11 braccia, diametro del cerchio.

[3] **Area di un cerchio**

Un cerchio ha la circonferenza lunga 22 braccia. Il problema chiede di calcolarne l'area.

Per prima cosa occorre ricavare la lunghezza del *diametro de meço*, e cioè il diametro, dividendo la circonferenza per la costante (3 + 1/7):

* moltiplicare 22 per 7: 22 * 7 = 154 ;
* moltiplicare 7 per (3 + 1/7): 7 * (3 + 1/7) = 22 ;
* dividere 154 per 22: 154 : 22 = 7 braccia, diametro del cerchio;
* dividere per 2 la circonferenza: 22 : 2 = 11 ;
* dividere per 2 il diametro: 7 : 2 = 3,5 ;
* moltiplicare i due ultimi quozienti: 11 * 3,5 = 38,5 braccia^2, area del cerchio.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Una soluzione alternativa è poi descritta: moltiplicare la circonferenza per il diametro e dividere per 4:

$$\text{Area} = \frac{\text{circonferenza}}{2} * \frac{\text{diametro}}{2} = \frac{22}{2} * \frac{7}{4} = \frac{22 * 7}{4} = \frac{154}{4} = 38{,}5 \text{ braccia}^2$$

[4] <u>Circonferenza di un cerchio</u>

Un cerchio ha area 154 braccia^2: deve essere calcolata la lunghezza della circonferenza.

Ecco la procedura:

* calcolare i 3/11 dell'area: 154 * 3/11 = 42 ;
* sommare l'ultimo prodotto all'area: 42 + 154 = 196 ;
* estrarre la radice quadrata: √196 = 14 braccia, diametro del cerchio

[Il Maestro Umbro calcola l'area del quadrato *circoscritto* al cerchio che ha lato lungo quanto il diametro: il rapporto fra le due aree è:

Area $_{\text{QUADRATO}}$: Area $_{\text{CERCHIO}}$ = 14/11 : 1];

* moltiplicare il diametro per la costante (3 + 1/7): 14 * (3 + 1/7) = 44 braccia, circonferenza del cerchio.

[5] <u>Area di un cerchio</u>

Un cerchio ha diametro 10 braccia: il problema chiede di calcolare la sua area.

La procedura impiegata è la seguente:

* moltiplicare il diametro per se stesso: 10 * 10 = 100 ;
* calcolare i 3/14 di 100: (3/14) * 100 = 21 + 3/7 ;
* sottrarre l'ultimo prodotto da 100: 100 – (21 + 3/7) = 78 + 4/7 braccia^2, area del cerchio

[Il Maestro Umbro ha impiegato lo stesso metodo usato per risolvere il precedente problema:

Area $_{\text{CERCHIO}}$ = Area $_{\text{QUADRATO circoscritto}}$ * (1 – 3/14) = Area $_{\text{QUADRATO circoscritto}}$ * 11/14].

[6] <u>Divisione di un cerchio in 4 cerchi</u>

Un cerchio ha circonferenza lunga 22 braccia: devono essere ricavati *quattro* cerchi di uguali dimensioni la cui superficie totale è uguale a quella del cerchio originario.

La soluzione è molto semplice:

* dividere per 2 la lunghezza della circonferenza del cerchio iniziale: 22 : 2 = 11 braccia, circonferenza di ciascuno dei quattro cerchi

[la soluzione è corretta: l'area di un cerchio è proporzionale al quadrato del diametro e quindi della circonferenza; dimezzando la circonferenza, il suo quadrato si riduce a ¼]:

* dividere 11 per la costante (3 + 1/7): 11 : (3 + 1/7) = 3 + ½ braccia, diametro dei quattro più piccoli cerchi;
* dividere per 2: (3 + ½) : 2 = 1 + ¾ ;
* dividere per 2 la circonferenza di uno dei quattro cerchi: 11 : 2 = 5 + ½ ;
* moltiplicare gli ultimi due quozienti: (1 + ¾) * (5 + ½) = 9 + 5/8 braccia^2, area di ciascuno dei quattro cerchi;
* moltiplicare l'ultimo prodotto per 4: (9 + 5/8) * 4 = 38,5 braccia^2, area del cerchio di partenza.

[7] <u>Unione di due cerchi</u>

Due cerchi hanno uguali dimensioni: il loro è lungo 15 braccia e la circonferenza è lunga (47 + 1/7) braccia.

Il problema chiede di unire i due cerchi in un cerchio più grande che abbia superficie uguale alla somma dei due e di calcolare la sua area.

La procedura contiene i seguenti passi:

* sommare i due diametri: 15 + 15 = 30 ;
* moltiplicare per la costante (3 + 1/7): 30 * (3 + 1/7) = 94 + 2/7 braccia, lunghezza della circonferenza del cerchio somma;
* dividere per 2: (94 + 2/7) : 2 = 47 + 1/7 ;
* moltiplicare per la metà di 30: (47 + 1/7) * 15 = 707 + 1/7 braccia^2, che è la *doppia* area del cerchio unione;
* dividere 15 per 2: 15 : 2 = 7 + ½ ;
* dividere (47 + 1/7) per 2: (47 + 1/7) : 2 = 23 + 4/7 ;
* moltiplicare gli ultimi due quozienti: (7 + ½) * (23 + 4/7) = 176 + 11/14 braccia^2, area di ciascuno dei due cerchi;
* moltiplicare per 2: (176 + 11/14) * 2 = 353 + 4/7 braccia^2, area del cerchio nato dall'unione

[La soluzione è esatta perché l'area di un cerchio iniziale è data da:

$$\text{Area cerchio} = \frac{\text{diametro}}{2} \cdot \frac{\text{circonferenza}}{2} =$$
$$= \frac{15}{2} \cdot \left(\frac{47 + \frac{1}{7}}{2}\right)^2 = 353 + \frac{4}{7} \text{ braccia}^2$$

].

[8] <u>Divisione di un cerchio in tre cerchi uguali</u>

Un cerchio ha area di 33 braccia^2: devono essere tracciati tre più piccoli cerchi di uguali dimensioni e con la stessa superficie totale.

La procedura è la seguente:

* dividere per 3 l'area: 33 : 3 = 11 [che è l'area di ciascuno dei tre cerchi piccoli] ;
* moltiplicare per 3/11: 11 * (3/11) = 3 ;
* sommare i due ultimi dati: 11 + 3 = 14 ;
* estrarre la radice quadrata √14 braccia, diametro dei tre cerchi più piccoli [dato che il risultato dell'estrazione di radice è un *numero irrazionale*, il Maestro Umbro lo arrotonda per eccesso a (3 + 7/9)];
* moltiplicare la radice per la costante (3 + 1/7): (3 + 7/) * (3 + 1/7) = 11 + 55/63 braccia^2, misura della superficie approssimata per eccesso di ciascuno dei tre piccoli cerchi: il risultato è errato per eccesso di 55/63 braccia^2].

[9] <u>Divisione di un cerchio in cinque cerchi uguali</u>

Un cerchio ha superficie di 55 braccia^2 e deve essere diviso in *cinque* cerchi di area equivalente.

La procedura impiegata è la seguente:

* dividere l'area per 5: 55 : 5 = 11 braccia^2, area di ciascuno dei cinque più piccoli cerchi;
* calcolare i 5/11 di 11: (5/11) * 11 = 5 ;
* sommare i due ultimi dati: 11 + 5 = 16 ;
* estrarre la radice quadrata: √16 = 4 braccia, diametro dei cinque piccoli cerchi.

Nota: il risultato è errato per eccesso, perché ha moltiplicato l'area di 11 braccia^2 per la frazione 5/11 invece che per la corretta costante 3/11. L'area di un cerchio è data da:

Area = d/2 * circonferenza/2 = d/2 * (22/7 * d)/2 = d^2 * 11/14 , dalla quale deriva la lunghezza del diametro d:

$$d = \sqrt{\frac{14}{11} \cdot Area}$$

Nel caso di uno dei cinque cerchi di area 11 braccia^2, il suo diametro d vale:

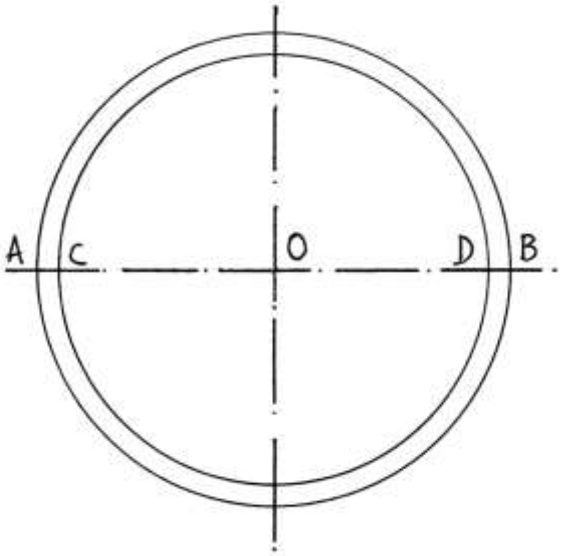
$$d = \sqrt{\frac{14}{11} \cdot 11} = \sqrt{14} \text{ braccia}$$

Ma √14 corrisponde a 3,74 braccia, mentre la lunghezza di 4 braccia rappresenta la radice quadrata di 16.

[10] Cerchi concentrici

Un cerchio ha circonferenza lunga 100 braccia e al suo interno deve essere tracciato un secondo cerchio, concentrico, con circonferenza lunga 90 braccia.

Il problema chiede di conoscere la distanza fra le due circonferenze (AC = DB):



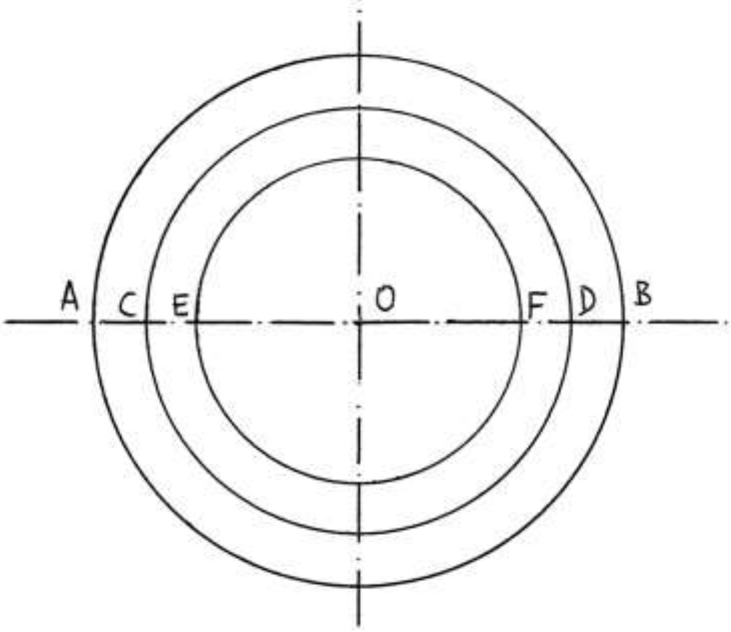
La procedura usata è la seguente:

* dividere la circonferenza esterna per la costante (3 + 1/7): 100 : (3 + 1/7) = 31 + 9/11 braccia, diametro del cerchio più grande
  [Il Maestro Umbro impiega una soluzione un po' più lunga per non operare con troppe frazioni: "… *devemo rechare a sano* …". Egli utilizza i seguenti passi:
  * moltiplicare 100 per 7: 100 * 7 = 700 ;
  * moltiplicare 7 per la costante (3 + 1/7): 7 * (3 + 1/7) = 22 ;
  * dividere il primo prodotto per il secondo: 700 : 22 = 31 + 9/11 braccia, che è il risultato corretto];
* dividere la circonferenza interna per la costante (3 + 1/7): 90 : (3 + 1/7) = 28 + 1/7 braccia, diametro del cerchio interno;
* sottrarre il secondo diametro dal primo: (31 + 9/11) – (28 + 7/11) = 3 + 2/11 braccia [Il Maestro Umbro dà il risultato errato di 3 + 7/11];

* dividere per 2: (3 + 2/11) : 2 = 1 + 13/22 braccia,
lunghezza dei segmenti AC e DB [nel testo il risultato è errato: 1 + 17/22].

[11] Cerchi concentrici

Il problema costituisce un'evoluzione del precedente.
Sono dati tre cerchi concentrici che hanno circonferenze lunghe 100, 80 e 60 braccia (e quindi in progressione aritmetica con ragione 20).
È chiesto di calcolare le distanze fra le tre circonferenze.



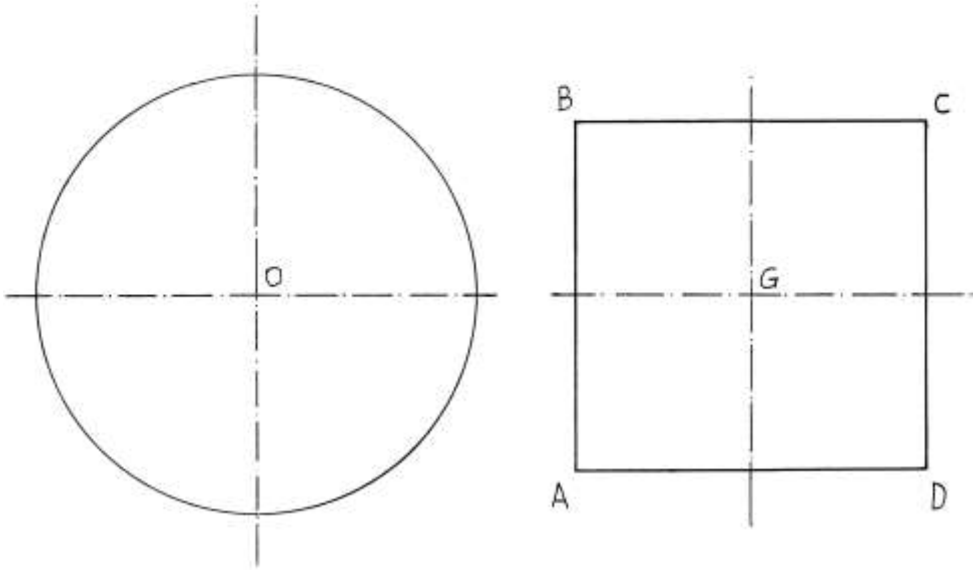
La procedura contiene i seguenti passaggi:

* dividere 100 per la costante (3 + 1/7): 100 : (3 + 1/7) = 31 + 9/11 braccia, diametro della circonferenza più esterna;
* dividere 80 per (3 + 1/7): 80 : (3 + 1/7) = 25 + 5/11 braccia, diametro della circonferenza intermedia;
* dividere 60 per (3 + 1/7): 60 : (3 + 1/7) = 19 + 1/11 braccia, diametro della circonferenza più interna;
* sottrarre il diametro del cerchio intermedio intermedio da quello del cerchio esterno:
(31 + 9/11) – (25 + 5/11) = 6 + 4/11 braccia;
* dividere per 2: (6 + 4/11) : 2 = 3 + 2/11 braccia, distanza fra il cerchio esterno e quello intermedio (AC = DB);
* sottrarre il diametro del cerchio più interno da quello del cerchio intermedio:
(25 + 5/11) – (19 + 1/11) = 6 + 4/11 braccia
[il testo contiene il valore errato (6 + 5/11)];
* dividere per 2: (6 + 4/11) : 2 = 3 + 2/11 braccia che è la distanza fra la circonferenza intermedia e quella più interna (CE = FD).

Come è evidente dai calcoli le distanze fra le tre circonferenze sono uguali e cioè (3 + 2/11) braccia: quella passante per C e per D è equidistante da quella più esterna (per i punti A e B) e da quella più interna (per i punti E e F).

[12] Confronto fra un cerchio e un quadrato

Un cerchio ha la circonferenza lunga 80 braccia e un quadrato ha lato 20 braccia.
Il problema chiede di determinare quale delle due figure abbia superficie maggiore:



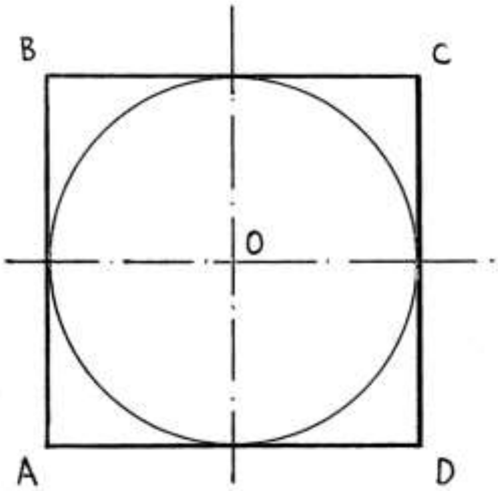
La procedura impiegata contiene i seguenti passi:

* dividere la lunghezza della circonferenza per (3 + 1/7): 80 : (3 + 1/7) = 25 + 4/11 braccia, diametro del cerchio;
* dividere per 2: (25 + 4/11) : 2 = 12 + 15/22 braccia, raggio della circonferenza [nel trattato il risultato è errato (12 + 8/11);
* dividere per 2 la lunghezza della circonferenza: 80 : 2 = 40 ;
* moltiplicare gli ultimi due quozienti: (12 + 15/22) * 40 = 507 + 3/11 braccia^2, area del cerchio;
* moltiplicare il lato del quadrato per se stesso: 20 * 20 = 400 braccia^2, area del quadrato;
* sottrarre l'area del quadrato da quella del cerchio: (507 + 3/11) – 400 = 107 + 3/11 braccia^2, differenza fra le aree delle due figure.

Chiaramente, il cerchio ha superficie maggiore di quella del quadrato.

[13] Cerchio inscritto in un quadrato

Un quadrato ha lato (*façia* nel testo in umbro) lungo 7 braccia.

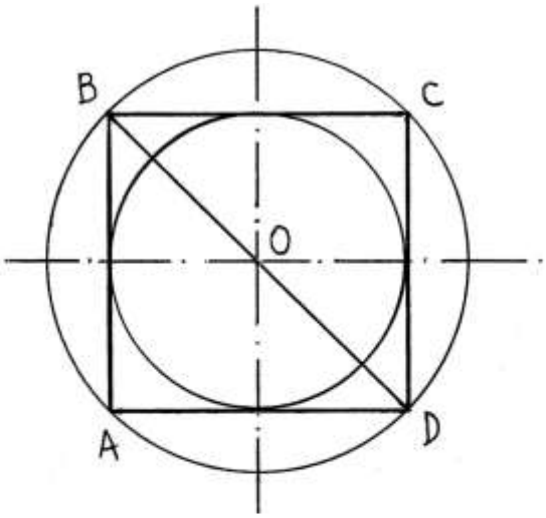


Al suo interno è inscritto un cerchio il cui diametro è lungo quanto il lato del quadrato.
Il problema chiede di calcolare l'area del cerchio e la differenza con quella del quadrato.
La procedura utilizzata è la seguente:

* moltiplicare il braccio per la costante (3 + 1/7): 7 * (3 + 1/7) = 22 braccia, lunghezza della circonferenza;
* dividere per 2: 22 : 2 = 11 ;
* dividere per 2 il diametro: 7 : 2 = 3,5 ;
* moltiplicare gli ultimi due quozienti: 11 * 3,5 = 38,5 braccia^2, area del cerchio inscritto;
* moltiplicare il lato del quadrato per se stesso: 7 * 7 = 49 braccia^2, area del quadrato;
* sottrarre l'area del cerchio da quella del quadrato: 49 – 38,5 = 10,5 braccia^2.

[14] <u>Rapporto fra l'area di un cerchio e quella di un quadrato</u>

Il problema costituisce un approfondimento della situazione descritta nel precedente paragrafo ([13]).



Il Maestro Umbro richiama preliminarmente alcune regole:

* l'area (*piaça* in perugino) di un cerchio è data dal prodotto della metà del diametro per la metà della circonferenza;
* l'area di un cerchio inscritto in un quadrato è uguale a 11/14 di quella di questo ultimo.

L'Autore presenta degli esempi numerici:

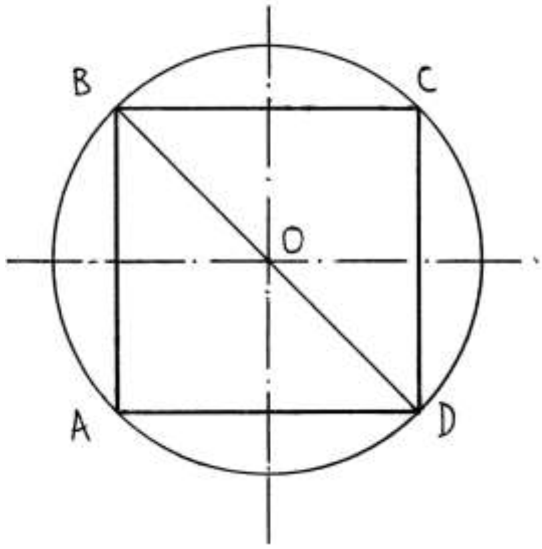
a) un cerchio ha diametro 14 *misure* e circonferenza lunga 44 *misure*; la sua area è data da
7 * 22 = 154 [il trattato non indica alcuna esplicita unità di misura di superficie né chiarisce che cosa intenda con il termine *misure*];

b) un quadrato è inscritto nel precedente cerchio e ha diagonale BD lunga quanto il diametro e cioè 14;
L'area del quadrato è 98 e cioè 7/11 dell'area del cerchio in cui è inscritto:
(7/11) * 154 = 98.

c) Nel quadrato è inscritto un secondo cerchio: la sua area è 11/14 di quella del quadrato e cioè:
(11/14) * 98 = 77: esso ha area uguale a *metà* di quello esterno.

[15] Cerchio e quadrato inscritto

La circonferenza di un cerchio è lunga (62 + 6/7) braccia e ha diametro 20 braccia.
Il quadrato inscritto ha diagonale lunga quanto il diametro del cerchio:

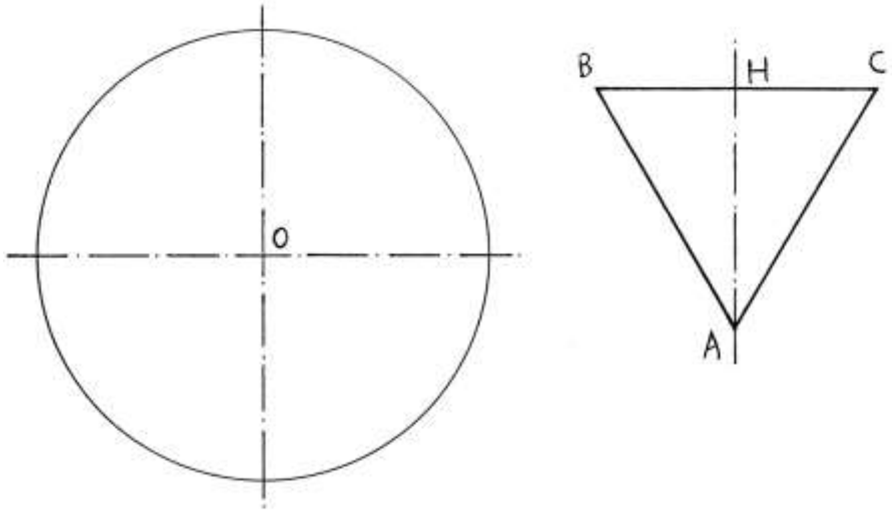


Il problema chiede la lunghezza del lato del quadrato e la differenza fra le due aree.
La procedura impiegata è la seguente:

* moltiplicare il diametro per se stesso: $20 * 20 = 400$;
* dividere per 2: $400 : 2 = 200$ braccia^2, area del quadrato;
* moltiplicare (14 + 1/7) per se stesso: $(14 + 1/7) * (14 + 1/7) = 200 + 1/49$ braccia^2
  [Il Maestro Umbro conosce già la lunghezza del lato che è data dalla radice quadrata di 200, che approssima a (14 + 1/7) e verifica il risultato moltiplicando la radice per se stessa, fino a ricavare il valore approssimato per eccesso uguale a (200 + 1/7)] ;
* moltiplicare per 2: $(200 + 1/49) * 2 = 400 + 2/49$, che il valore approssimato per eccesso del quadrato del diametro;
* moltiplicare metà del diametro per metà della circonferenza:
  $(20/2) * (1/2) * (62 + 6/7) = 314 + 2/7$ braccia^2, area del cerchio;
* sottrarre l'area del quadrato da quella del cerchio:
  $(314 + 2/7) – (200 + 1/49) = 114 + 13/49$ braccia^2, differenza fra le aree del cerchio e del quadrato inscritto.

[16] Aree di un cerchio e di un triangolo equilatero

Un cerchio ha circonferenza lunga 50 braccia. Un triangolo equilatero ha lati lunghi 10 braccia.



Il problema chiede di conoscere la differenza fra l'area del cerchio e quella del triangolo.

Il Maestro Umbro chiama il triangolo equilatero *scudo*, lo stesso termine usato nei trattati di Jacopo da Firenze, Paolo dell'Abbaco e Orbetano da Montepulciano, fra gli altri.

Uno *scudo* è quasi sempre disegnato con il lato orizzontale collocato superiormente, come è il caso di BC nella figura precedente.

Ecco la procedura impiegata:

* dividere la lunghezza della circonferenza per la costante (3 + 1/7): 50 : (3 + 1/7) = 15 + 10/11 braccia, diametro del cerchio;
* dividere per 2: (15 + 10/11) : 2 = 7 + 21/22 ;
* dividere la circonferenza per 2: 50 : 2 = 25 ;
* moltiplicare gli ultimi due quozienti: (7 + 21/22) * 25 = 198 + 19/22 braccia^2, area del cerchio [nel testo è scritto erroneamente (298 + 19/22) e i successivi calcoli sono basati sul valore corretto];
* moltiplicare il lato del triangolo per se stesso: 10 * 10 = 100 ;
* dividere per 4: 100 : 4 = 25 ;
* sottrarre l'ultimo quoziente da 100: 100 – 25 = 75 [è applicato il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo ABH];
* estrarre la radice quadrata: √75 ≈ 8 + 2/3 braccia, valore approssimato per eccesso del *diametro* o altezza AH del triangolo equilatero;
* dividere per 2 la lunghezza de *la line de sopre*, il lato BC: 10 : 2 = 5 ;
* moltiplicare l'ultimo quoziente per l'altezza: 5 * (8 + 2/3) = 43 + 1/3 braccia^2, area del triangolo equilatero;
* sottarre l'area del triangolo equilatero da quella del cerchio: (198 + 19/22) – (43 + 1/3) = 155 + 35/66 braccia^2, differenza fra le aree delle due figure.

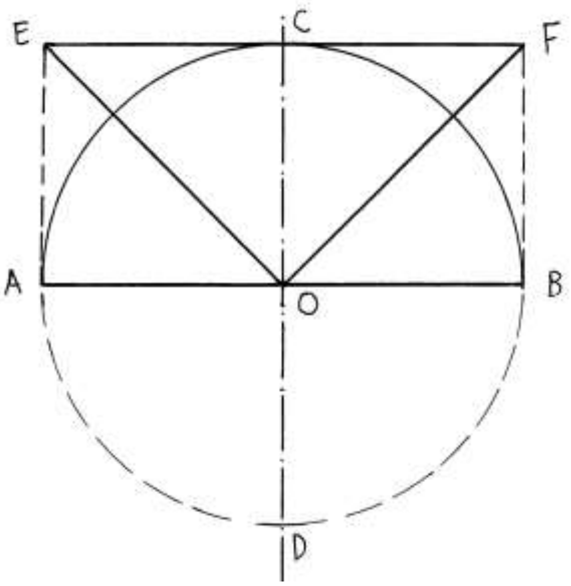
Nota: la soluzione di questo problema mostra che il triangolo equilatero non è inscritto nel cerchio.

[17] <u>Triangolo rettangolo isoscele inscritto in un semicerchio</u>

Un cerchio ha diametro lungo 12 braccia ed è tagliato a metà lungo un diametro.

Il problema chiede di inscrivere nel semicerchio uno *scudo* e di calcolarne l'area.

Standando alla lettura dei dati del problema, il triangolo è isoscele e rettangolo e non è del tutto inscritto nel semicerchio.



È dato il semicerchio ACB, ritagliato dal cerchio di centro O e raggio 6 braccia.

Il problema fissa alcuni dati:

* la distanza dalla punta dello scudo [O] al punto medio del lato di sopra [C] è 6 braccia e cioè è quanto il raggio del semicerchio;
* il raggio [OC] è anche l'altezza dello scudo;
* metà della lunghezza del lato di sopra [EC] è 6 braccia per cui l'intero lato [EF] è lungo 12 braccia e cioè quanto il diametro.

Ecco la procedura usata:

* moltiplicare per se stessa l'altezza OC: $6 * 6 = 36$;
* moltiplicare per se stessa metà della lunghezza di EF: $6 * 6 = 36$;
* sommare i due prodotti: $36 + 36 = 72$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{72} \approx 8 + ½$ braccia, lunghezza del lato EO (e di quello FO) [il Maestro Umbro ha applicato il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo OEC];
* moltiplicare le lunghezze di OC e di EC: $6 * 6 = 36$ braccia^2, area del triangolo rettangolo EFO.

[La descrizione del problema contiene un errore di scrittura: all'inizio il diametro è indicato erroneamente in 22 braccia invece di 12.]

La procedura procede con altri passi:

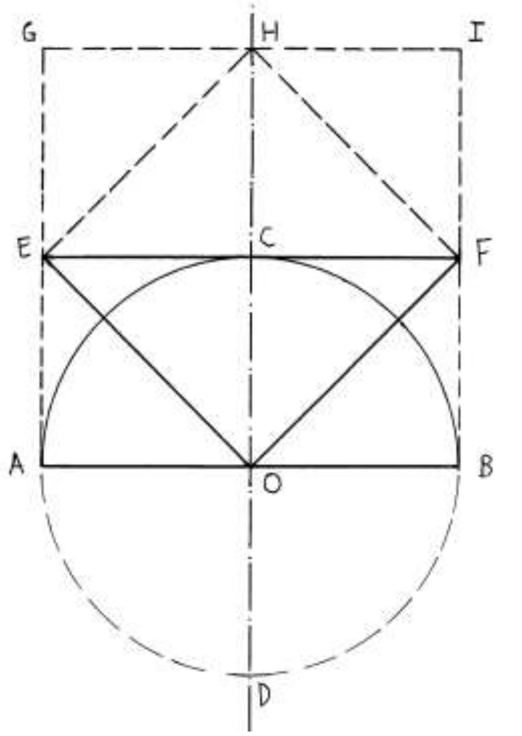
* moltiplicare il diametro per se stesso: $12 * 12 = 144$;
* calcolare i 3/14: $(3/14) * 144 = 30 + 6/7$;
* sottrarre da 144: $144 – (30 + 6/7) = 113 + 1/7$ braccia^2, area dell'intero cerchio
  [i tre ultimi passi possono essere sostituiti con l'applicazione della formula
  Area cerchio = $(11/14) *$ diametro^2];
* dividere per 2: $(113 + 1/7) : 2 = 56 + 4/7$ braccia^2, area del semicerchio;
* sottrarre l'area dello scudo da quella del semicerchio: $(56 + 4/7) – 36 = 20 + 4/7$ braccia^2, differenza fra l'area del semicerchio e quella dello scudo.

- APPROFONDIMENTO -

Il triangolo EOF è metà del quadrato OEHF: l'ipotenusa del triangolo rettangolo OEF è la diagonale del quadrato OEHF.

OE e OF sono lati sia del quadrato sia dello scudo.

Dalle due figure risulta che il triangolo rettangolo OEF *non* è inscritto nel semicerchio.

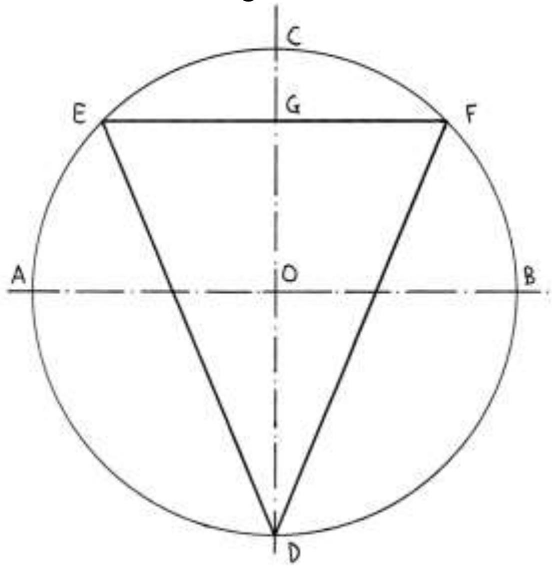


- -

[18] Triangolo isoscele inscritto in un cerchio

Un cerchio ha la circonferenza lunga 44 braccia e deve esservi inscritto il più grande scudo possibile, che ha forma di triangolo isoscele.

Il problema chiede l'area del triangolo isoscele.

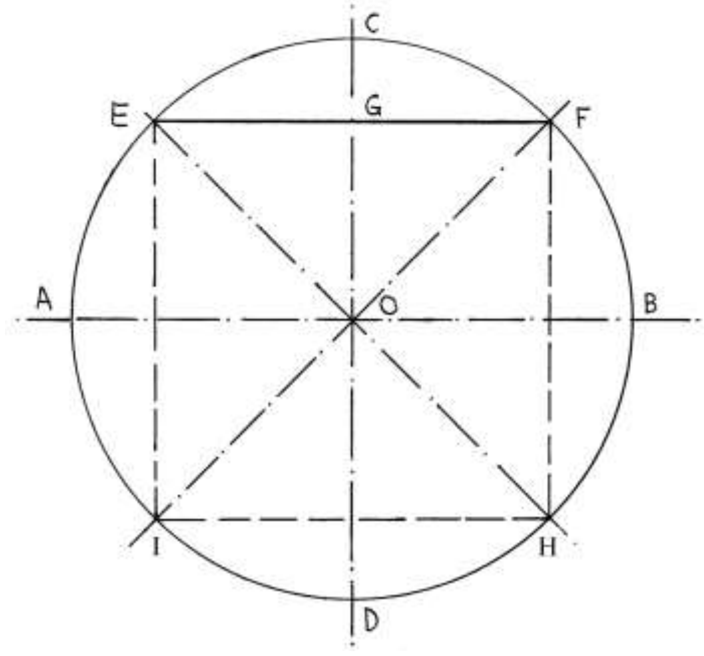


La procedura impiegata è la seguente:

* calcolare la lunghezza del diametro:
  circonferenza : (3 + 1/7) = 44 : (3 + 1/7) = 14 braccia;
* moltiplicare il diametro per se stesso: 14 * 14 = 196 ;
* dividere per 2: 196 : 2 = 98 ;
* estrarre la radice quadrata: √98 ≈ 9 + 9/10 braccia, lunghezza del lato del triangolo isoscele [EF];
* dividere per 2: (9 + 9/10) : 2 = 4 + 19/20 ;
* moltiplicare per se stesso: $(4 + 19/20)^2$ = 24 + 201/400 ;
* sottrarre l'ultimo prodotto dal penultimo: 196 – (24 + 201/400) = 171 + 199/400 [che il Maestro Umbro arrotonda per difetto a 171] ;
* estrarre la radice quadrata: √171 ≈ 13 + 1/9 braccia, altezza del triangolo isoscele [GD nella figura] ;
* dividere per 2: (13 + 1/9) : 2 = 6 + 5/9 ;
* moltiplicare per metà della lunghezza del lato di sopra: (6 + 5/9) * (4 + 19/20) = 32 + 9/20 $braccia^2$, area delllo scudo a forma di triangolo isoscele.

- APPROFONDIMENTO -

Il Maestro Umbro non giustifica il metodo impiegato per calcolare la lunghezza del lato orizzontale, quello superiore (EF) del triangolo isoscele.



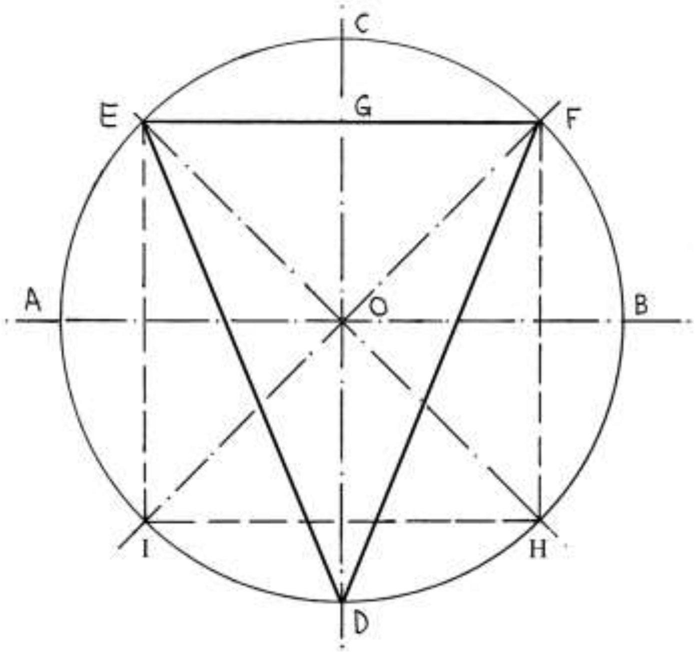
Il segmento EF è un lato del quadrato EFIH, inscritto nel cerchio come spiega la figura qui sopra.

EF è anche l'ipotenusa del triangolo rettangolo isoscele EFO e la sua lunghezza è data da:

$EF^2 = OE^2 + OF^2 = 2 * (14/2)^2 = 2 * (196/4) = 98$, da cui

EF = √98 ≈ 9 + 9/10 braccia.

Il grafico che segue completa la precedente figura con l'inserzione dello scudo EFD:

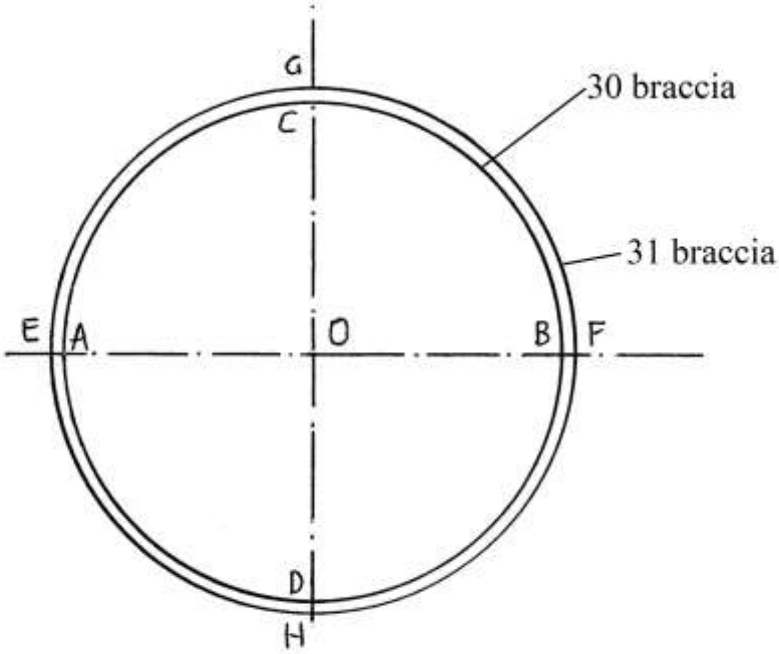


Nella descrizione del problema contenuta nel manoscritto sembrerebbe che i lati obliqui del triangolo isoscele (ED e FD) fossero lunghi quanto il diametro del cerchio, ma ciò è impossibile: ED e FD sono due *corde* e non passano per il centro O. Solo un diametro, che è una corda massima, passa per O.

- -

[19] <u>Cerchio più grande di un altro</u>

Un cerchio ha circonferenza lunga 30 braccia e deve esserne costruito un secondo, concentrico al primo, con circonferenza lunga 31 braccia.



Il problema chiede di calcolare l'aumento di superficie.

Ecco i passi della procedura:

* dividere la circonferenza del cerchio interno per la costante (3 + 1/7):

$$30 : (3 + 1/7) \approx 9 + 6/11 \text{ braccia, diametro del cerchio;}$$

* dividere per 2: $(9 + 6/11) : 2 = 4 + 17/22$;
* dividere per 2 la circonferenza del cerchio interno: $30 : 2 = 15$;
* moltiplicare per metà della lunghezza della circonferenza:
  $15 * (4 + 17/22) = 70 + 12/22$ braccia^2, area del cerchio interno;
* dividere la circonferenza del secondo cerchio per la costante $(3 + 1/7)$:
  $31 : (3 + 1/7) = 9 + 19/22$, diametro del cerchio esterno;
* dividere per 2: $(9 + 19/22) : 2 = 4 + 41/44$;
* dividere per 2 la circonferenza del cerchio esterno: $31 : 2 = 15 + ½$;
* moltiplicare i due ultimi quozienti: $(4 + 41/44) * (15 + ½) = 76 + 39/88$ braccia^2, area del cerchio esterno;
* sottrarre l'area del cerchio interno da quella del cerchio esterno:
  $(76 + 39/88) – (70 + 12/22) = 5 + 19/88$ braccia^2, differenza fra le aree dei due cerchi (e cioè area della corona circolare).

[20] Cerchio più ampio di un altro

Un primo cerchio ha area di 153 braccia^2 e un secondo cerchio ha superficie leggermente superiore, 154 braccia^2.

Il problema chiede di calcolare la differenza fra le lunghezze delle due circonferenze.

Ecco la procedura impiegata:

* calcolare i 3/11 dell'area del primo cerchio: $(3/11) * 153 = 41 + 8/11$;
* sommare a 153: $153 + (41 + 8/11) = 194 + 8/11$;
* estrarre la radice quadrata
  $\sqrt{194 + \frac{8}{11}} = 13 + \frac{19}{20}$ braccia, diametro del primo cerchio;
* moltiplicare per la costante $(3 + 1/7)$: $(13 + 19/20) * (3 + 1/7) = 43 + 59/70$ braccia, lunghezza della circonferenza del primo cerchio;
* moltiplicare 3/11 per l'area del secondo cerchio: $(3/11) * 154 = 42$;
* addizionare l'ultimo prodotto a 154: $42 + 154 = 196$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{196} = 14$ braccia, diametro del secondo cerchio;
* moltiplicare il diametro per la costante $(3 + 1/7)$: $14 * (3 + 1/7) = 44$ braccia, lunghezza della circonferenza del secondo cerchio;
* sottrarre la lunghezza della prima circonferenza da quella della seconda:
  $44 – (43 + 59/70) = 11/70$ che il Maestro Umbro arrotonda a 1/7 braccio.

[21] Differenza fra le aree di due cerchi

Un cerchio ha circonferenza lunga 44 braccia e diametro 14 braccia.

Un secondo cerchio ha diametro 15 braccia.

Il problema chiede di calcolare la differenza fra le due aree.

Ecco la procedura:

* moltiplicare 15 per la costante $(3 + 1/7)$: $15 * (3 + 1/7) = 47 + 1/7$ braccia, circonferenza del secondo cerchio;
* dividere per 2 il diametro del primo cerchio: $14 : 2 = 7$;
* dividere per 2 la circonferenza del primo cerchio: $44 : 2 = 22$;
* moltiplicare gli ultimi due quozienti: $7 * 22 = 154$ braccia^2, area del primo cerchio;

* dividere per 2 il diametro del secondo cerchio: 15 : 2 = 7 + ½ ;
* dividere per 2 la circonferenza del secondo cerchio: (47 + 1/7) : 2 = 23 + 9/14 [23 + 4/7 nel testo];
* moltiplicare i due ultimi quozienti: (7 + ½) * (23 + 9/14) = 176 + 67/88 braccia^2, area del secondo cerchio;
* sottarre l'area del primo cerchio da quella del secondo:
  (176 + 67/88) – 154 = 22 + 67/88 braccia^2, differenza fra le aree dei due cerchi.

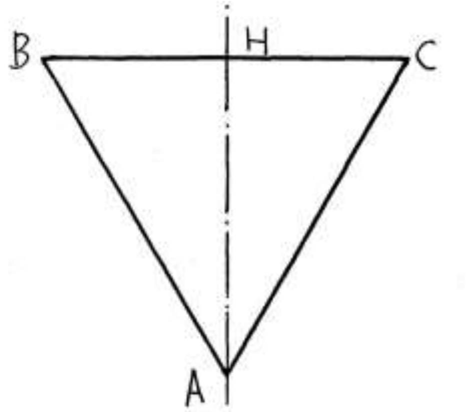
Nota il 2° capitolo non è qui considerato perché dedicato a problemi relativi a pozzi, pescaie e cisterne.

<u>3° CAPITOLO</u>

<u>LE REGOLE DELLO SCUDO E DEL TRIANGOLO</u>

[32] <u>Altezza di un triangolo equilatero</u>

Un *eschudo,* e cioè un triangolo che in questo caso è *equilatero,* ha lati lunghi 10 braccia. Il problema chiede di calcolare l'altezza.



La procedura impiegata è la seguente:

* moltiplicare la lunghezza del lato per se stessa: 10 * 10 = 100 ;
* moltiplicare per ¼: 100 * ¼ = 25 ;
* sottrarre 25 da 100: 100 – 25 = 75 ;
* estrarre la radice quadrata: √75 ≈ 8 + 2/3 braccia, altezza HA del triangolo equilatero

[Come già visto nella soluzione del precedente problema numero [16], il Maestro Umbro approssima √75 = √3*25 = 5 * √3, che è un numero irrazionale, al *numero misto* (8 + 2/3) che più gli si avvicina. Infatti √75 ≈ 8,6602 e (8 +2/3) ≈ 8,(66): le cifre racchiuse fra parentesi tonde (66), dopo la virgola, sono la *stringa* che si ripete all'infinito perché il numero è periodico].

%%%%%%%%%%%%%%%%%

Il problema presenta una variante: un secondo triangolo equilatero ha lati lunghi 9 braccia: il testo chiede l'altezza e l'area del triangolo.

La procedura applicata è la seguente:

* moltiplicare la lunghezza del lato per se stessa: 9 * 9 = 81 ;
* dividere per 2 la lunghezza del lato: 9 : 2 = 4 + ½ ;
* moltiplicare per se stesso: (4 + ½) * (4 + ½) = 20 + ¼ ;
* sottrarre l'ultimo prodotto da 81: 81 – (20 + ¼) = 60 + ¾ ;
* estrarre la radice quadrata:

$$\sqrt{60 + \frac{3}{4}} \cong 7 + \frac{4}{5} \text{ braccia}$$

, altezza del triangolo equilatero [HA nella precedente figura];

* moltiplicare l'altezza per la metà del lato: (7 + 4/5) * (4 + ½) = 35 + 1/10 braccia^2, area di questo secondo triangolo equilatero.

Nota: il Maestro Umbro giustifica l'approssimazione a un numero misto delle radici quadrate quando sono *sorde*: una radice è *sorda* o irrazionale quando non può essere espressa con un numero razionale, come è il caso di √2 e di √3.

[33] Altezza di un triangolo equilatero

È nota l'altezza di un triangolo equilatero: essa è lunga 13 braccia.
Il problema chiede di ricavare la lunghezza dei suoi lati.
La procedura usata è la seguente:

* moltiplicare l'altezza per se stessa: 13 * 13 = 169 ;
* dividere per 3: 169 : 3 = 56 + 1/3 ;
* sommare l'ultimo quoziente a 169: (56 + 1/3) + 169 = 225 + 1/3 ;*
estrarre la radice quadrata:

$$\sqrt{225 + \frac{1}{3}} \cong 15 + \frac{1}{15} \text{ braccia}$$

, lunghezza di ciascuno dei tre lati.

- APPROFONDIMENTO -

La procedura del Maestro Umbro è riassunta con la formula che segue:

$$\text{lato} = \sqrt{(\text{altezza}^2 + 1/3 * \text{altezza}^2)} = \text{altezza} * 2/\sqrt{3} = \text{altezza} * 2 * \sqrt{(3)}/3$$

Essa è la formula inversadi quella che fornisce la lunghezza dell'altezza conoscendo quella del lato:

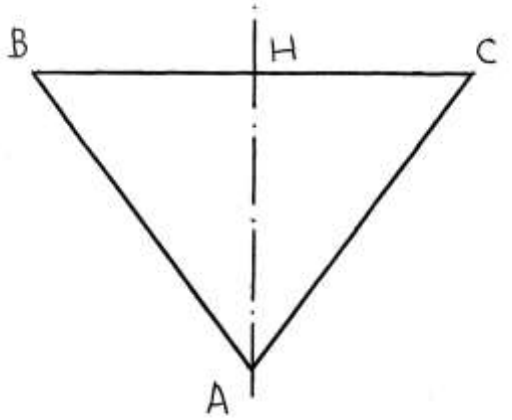
$\text{altezza} = \sqrt{(\text{lato}^2 - \text{lato}^2/4)} = \text{lato} * \sqrt{(3)}/2$ dalla quale si ha:

$\text{lato} = 2 * \text{altezza}/\sqrt{3} = 2 * /\sqrt{3} * \text{altezza}/3$, che è la formula sottostante alla procedura impiegata dal Maestro Umbro.

- -

[34] Un triangolo isoscele

Uno scudo ha la forma di un triangolo isoscele:

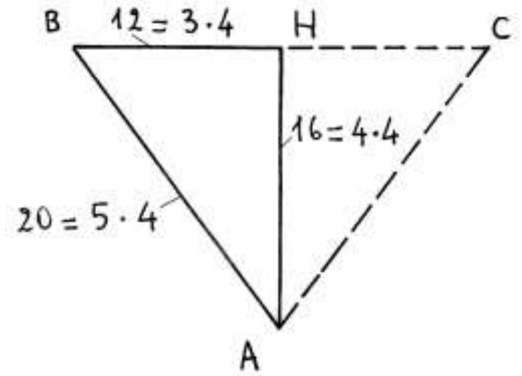


Il lato di sopra, BC, è lungo 24 braccia e l'altezza AH è 16 braccia.
Il problema chiede di calcolare la lunghezza dei due lati obliqui (AB e AC) e l'area.
Ecco la procedura:

* dividere per 2 la lunghezza del *lato di sopra*: 24 : 2 = 12 ;
* moltiplicare per se stesso: 12 * 12 = 144 ;
* moltiplicare per se stessa l'altezza: 16 * 16 = 256 ;
* sommare i due ultimi prodotti: 144 + 256 = 400 ;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{400}$ = 20 braccia, lunghezza dei due lati obliqui;

* moltiplicare metà della lunghezza del lato di sopra per l'altezza: 12 * 16 = 192 braccia^2, area del triangolo isoscele.

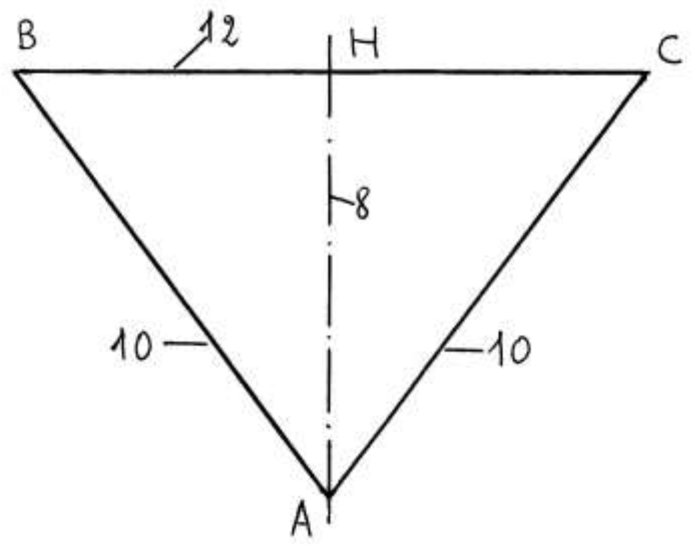
Nota: il triangolo isoscele ABC è scomposto dall'altezza AH in due triangoli rettangoli di uguali dimensioni:



Ciascuno dei due triangoli ha i lati con lunghezze che formano la terna pitagorica 3-4-5 moltiplicata per il fattore 4.

[35] Triangolo isoscele

La descrizione di questo problema è piuttosto conttorta e di difficile interpretazione. La descrizione che segue e la successiva soluzione sono soltanto un'ipotesi.



Uno scudo ha un lato lungo 12 braccia: è il lato di sopra (BC).

Senza fornire ulteriori informazioni, il Maestro Umbro chiede di determinare la lunghezza dei due lati obliqui e la sua area.

La procedura messa in atto nel trattato è la seguente:

* calcolare 1/6 della lunghezza del lato di sopra: 12 : 6 = 2 ;
* sottrarre 2 da 12: 12 – 2 = 10 braccia, lunghezza dei due lati obliqui (AB e AC);
* dividere per 3 la lunghezza del lato di sopra: 12 : 3 = 4 ;
* sottrarre l'ultimo quoziente dalla lunghezza del lato di sopra: 12 – 4 = 8 braccia, altezza del triangolo (AH);

* moltiplicare l’altezza per metà della lunghezza del lato di sopra:

$8 * (12/2) = 8 * 6 = 48$ braccia^2, area del triangolo.

Il Maestro Umbro effettua poi una verifica dei risultati ottenuti con i seguenti passaggi:

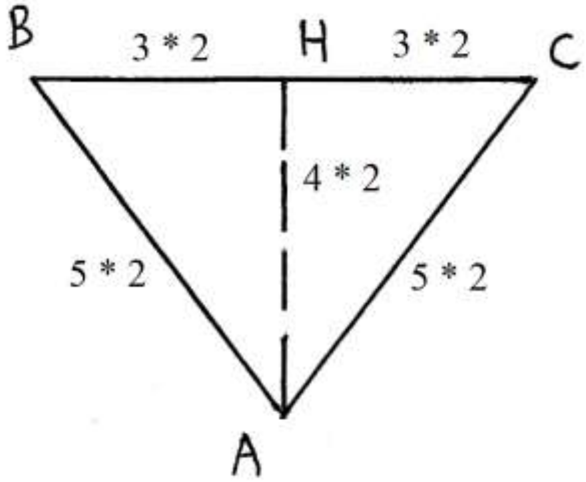
* moltiplicare la lunghezza della metà del lato di sopra per se stessa: $(12/2) * (12/2) = 6 * 6 = 36$;
* moltiplicare l’altezza per se stessa: $8 * 8 = 64$;
* sommare i due prodotti: $36 + 64 = 100$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{100} = 10$ braccia, lunghezza dei due lati obliqui (AB e AC nella figura).

Nota: non sono spiegati i motivi che stanno alla base dei primi quattro passi della precedente procedura. L’Autore non fornisce alcuna indicazione.

Le lunghezze dell’altezza, dei lati obliqui e del lato superiore formano una *progressione aritmetica* di ragione 2: $8 \rightarrow 10 \rightarrow 12$.

È ragionevole ritenere che nel manoscritto sia stato omesso un paragrafo.

Il triangolo ABC è scomponibile in due triangoli rettangoli, ABH e AHC, i cui lati formano la terna pitagorica 3-4-5 moltiplicata per il fattore 2:



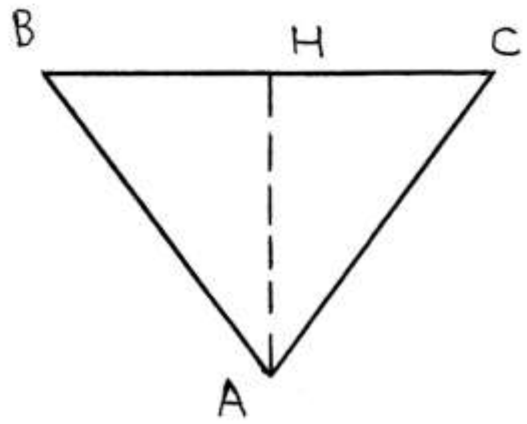
-

I lati del triangolo isoscele di questo problema hanno dimensioni lunghe la *metà* dei corrispondenti lati del precedente problema [34].

[36] <u>Triangolo isoscele dato un lato</u>

Il *lato di sopra* di un triangolo isoscele è lungo 37 braccia.

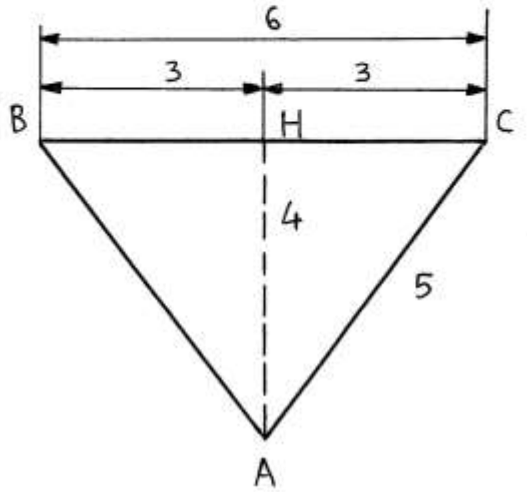
Il problema chiede in maniera implicita di calcolare la lunghezza dei lati obliqui e l’area.



Ecco la procedura:

* calcolare 1/6 di 37: 37 * 1/6 = 6 + 1/6 ;
* sottrarre da 37: 37 – (6 + 1/6) = 30 + 5/6 braccia, lunghezza dei due lati obliqui;
* calcolare 1/3 di 37: 37 * 1/3 = 12 + 1/3 ;
* sottrarre dalla lunghezza del lato di sopra: 37 – (12 + 1/3) = 24 + 2/3 braccia, altezza del triangolo.

Nota: anche in questo caso è evidente la mancanza di un paragrafo con le spiegazioni occorrenti per avviare la procedura risolutiva.
Le lunghezze dei lati del triangolo ripropongono, con una piccola *approssimazione*, la terna pitagorica 3-4-5 incontrata nel precedente problema:



Infatti, le lunghezze del lato di sopra BC, dell’altezza AH e dei lati obliqui AB e AC, sono proporzionali a 6, 4 e 5. L’altezza AH divide il triangolo isoscele in due triangoli rettangoli, ABH e AHC, che hanno lati lunghi in proporzione alla terna 3-4-5.

Due dubbi possono essere avanzati: alla fine del XIII secolo esisteva in Umbria uno standard relativo ai rapporti fra le dimensioni degli scudi, che coinvolgeva la terna pitagorica 3-4-5? Le dimensioni di questi *scudi* erano troppo grandi per essere portatili, dato che il *braccio da tela* di Perugia equivaleva a 1,00425 metri: che cosa erano in realtà questi scudi?

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Il Maestro Umbro sviluppa poi una verifica con i seguenti passi:

* dividere per 2 la lunghezza del lato di sopra: 37 : 2 = 18 + ½ ;

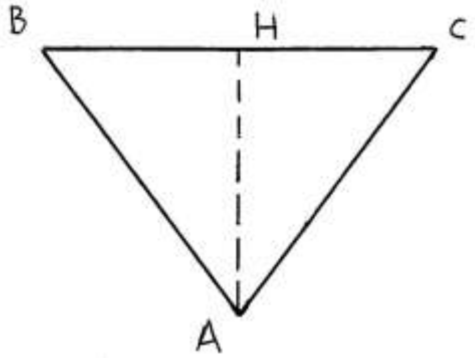
*	moltiplicare per se stesso:	(18 + ½) * (18 + ½) = 342 + ¼ ;
*	moltiplicare l'altezza per se stessa:	(24 + 2/3) * (24 + 2/3) = 608 + 4/9 ;
*	sommare i due ultimi prodotti:	(342 + ¼) + (608 + 4/9) = 950 + 25/36 ;
*	estrarre la radice quadrata:

$$\sqrt{950 + \frac{25}{36}} \cong 30 + \frac{5}{6} \text{ braccia}$$

, lunghezza dei due lati obliqui del triangolo isoscele;
*	moltiplicare metà della lunghezza del lato di sopra per l'altezza:
(37/2) * (24 + 2/3) = 456 + 1 /3 braccia^2, area del triangolo isoscele.

[37]	<u>Triangolo isoscele data l'altezza</u>

Un triangolo isoscele ha altezza lunga 10 braccia.
Il problema chiede di calcolare la sua area.



La procedura usata è la seguente:
*	dividere per 2 l'altezza:	10 : 2 = 5 ;
*	addizionare il precedente quoziente all'altezza:	5 + 10 = 15 braccia, lunghezza del lato di sopra [BC];
*	dividere la lunghezza del lato di sopra [BC] per 6:	15 : 6 = 2 + 1/2 ;
*	sottrarre l'ultimo quoziente dalla lunghezza del lato di sopra:	15 – (2 + ½) = 12 + ½ braccia, lunghezza dei due lati obliqui [AB e AC].

Nota: anche in questo problema compare la terna pitagorica 3-4-5. Infatti le lunghezze dei lati dei due triangoli rettangoli ABH e AHC stanno nella seguente proporzione:
BH : AH : AB = 7,5 : 10 : 12,5 = 3 : 4 : 5.

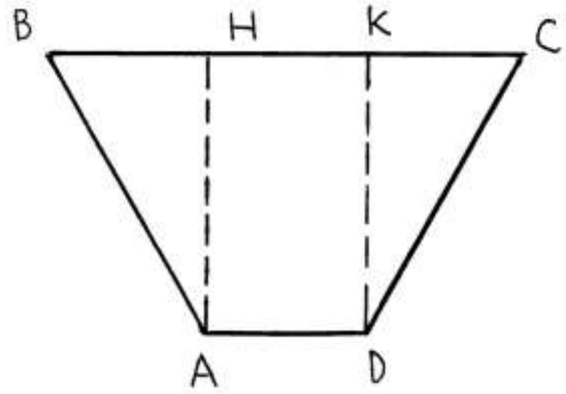
La verifica dei risultati descritta nel trattato è articolata sui seguenti passi:
*	dividere per 2 la lunghezza del lato di sopra:	15 : 2 = 7 + ½ ;
*	moltiplicare per se stesso:	(7 + ½) * (7 + ½) = 56 + ¼ ;
*	moltiplicare l'altezza per se stessa:	10 * 10 = 100 ;
*	sommare gli ultimi due prodotti:	(56 + ¼) + 100 = 156 + ¼ ;
*	estrarre la radice quadrata:

$$\sqrt{156,25} = 12,5 \text{ braccia}$$

, lunghezza dei due lati obliqui [AB e AC].

[38] Trapezio isoscele

Uno *scudo* ha la forma di un trapezio isoscele:



La base superiore è la più lunga ed è 18 braccia, mentre la base minore è 6 braccia. I due lati obliqui, AB e DC, sono lunghi 12 braccia.

La base superiore è detta *façia de sopra*, i lati obliqui sono le *façie da lato* e la base minore la *testa de sotta*.

Il problema domanda la superficie del trapezio.

La procedura impiegata è la seguente:

* moltiplicare per se stessa la lunghezza di un lato obliquo: 12 * 12 = 144 ;
* dividere per 4: 144 : 4 = 36 ;
* sottrarre da 144: 144 – 36 = 108 ;
* estrarre la radice quadrata:

$$\sqrt{108} \cong 10 + \frac{1}{3} \text{ braccia}$$, altezza [AH] del trapezio;

* dividere per 2 la lunghezza di un lato obliquo: 12 : 2 = 6 ;
* moltiplicare per l’altezza:

$$6 \cdot \left(10 + \frac{1}{3}\right) = 62 \text{ braccia}^2$$, area del trapezio.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

La procedura impiegata dal Maestro Umbro può essere sintetizzata come segue:

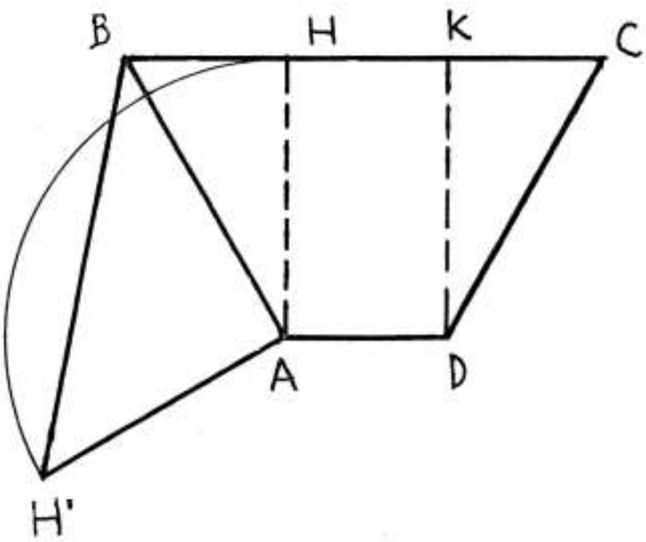
AB = CD = l (lati obliqui); AH = h (altezza).

$$h = \sqrt{\frac{3}{4}\ell^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \ell$$;

$$Area_{ABCD} = \frac{\ell}{2} \cdot h = \frac{\ell}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \ell = \ell^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$$

- APPROFONDIMENTO -

L’Autore ha calcolato l’area del trapezio come se essa fosse equivalente a quella del triangolo rettangolo BAH’ che ha cateti lunghi: BA = 12 braccia e AH’ = AH = (10 + 1/3) braccia:

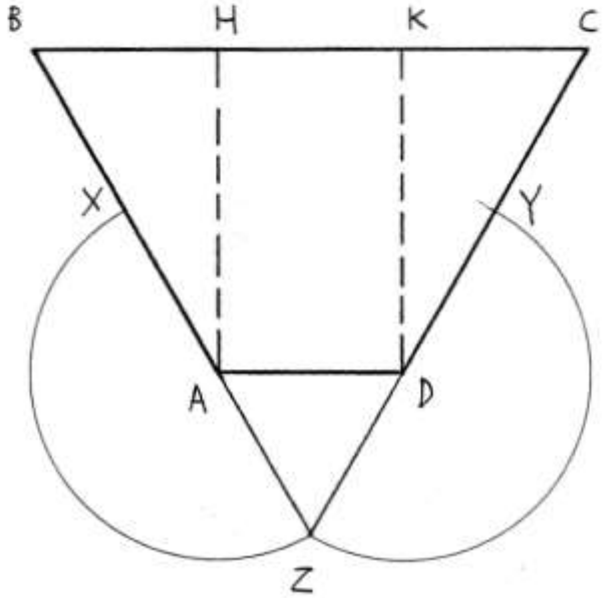


Le lunghezze dei lati del trapezio sono multiple di 3:

AD : 6 = AB : 12 = BC : 18.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Tentiamo la ricostruzione per via grafica dell’origine del trapezio.



Determinare i punti medi dei lati AB e DC: sono rispettivamente X e Y.

Dato che AB = CD = 12 braccia, i segmenti BX, XA, CY e YD sono tutti lunghi 6 braccia.

È utile notare che questi quattro segmenti hanno la stessa lunghezza della base minore AD.

Prolungare verso il basso i lati BA e CD: le due linee così tracciate si incontrano in un punto, Z.

Fare centre nei punti Ae B e con raggio AX = DY disegnare due semicirconferenze che si intersecano nel punto Z.

Il segmento BZ ha lunghezza data da BZ = BA + AZ = 12 + 6 = 18 braccia, che è la lunghezza della base maggiore BC.

Per le stesse ragioni, anche il segmento CZ è lungo 18 braccia: ne consegue che ZBC è un triangolo equilatero con lati lunghi 18 braccia.

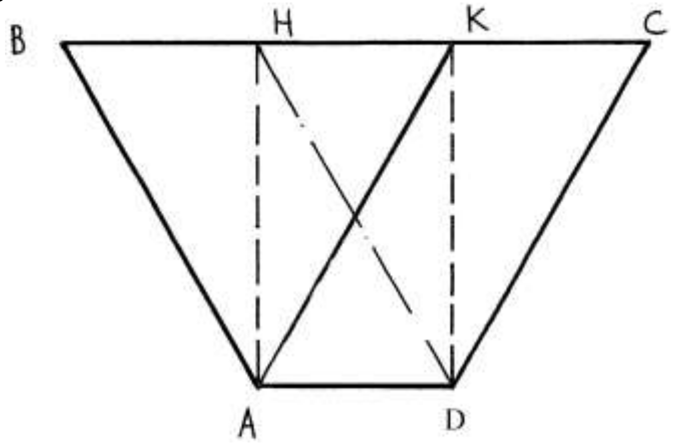
Il trapezio isoscele ABCD è stato generato dal sezionamento di ZBC lungo il segmento AD mediante l'asportazione del triangolo equilatero ZAD che ha lati lunghi 6 braccia.

La forma del triangolo originario ZBC giustifica l'uso del termine *scudo* per il trapezio isoscele ABCD.

Ricordiamo la lunghezza di AH, correttamente calcolata dal Maestro Umbro:

$AH = BK = \sqrt{108}$.

Tracciare i segmenti AK e BH:



Applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo AHK si ha:

$AK^2 = AH^2 + HK^2 = (\sqrt{108})^2 + 6^2 = 108 + 36 = 144$.

Ne consegue $AK = \sqrt{144} = 12$ braccia.

ABK è un triangolo equilatero con lati lunghi 12 braccia.

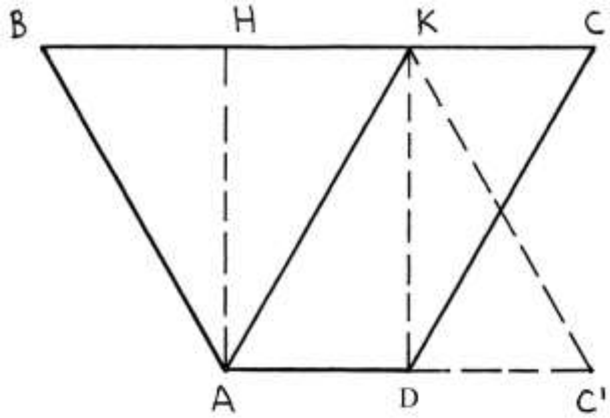
Il segmento AK divide il trapezio ABCD in tre poligoni:

* il già visto triangolo equilatero ABK;
* i triangoli rettangoli ABK e BKC.

Questi ultimi hanno lati lunghi come segue:

* AB = KC = 6 braccia;
* AK = BC = 12 braccia;
* $BK = \sqrt{108}$ braccia.

I due triangoli rettangoli hanno aree uguali che, prese ciascuna per sé, equivalgono a metà di quella del triangolo equilatero ABK; con un'opportuna trasformazione, il triangolo BKC viene spostato fino ad assumere la posizione definita dai vertici B, K e C':



Anche AKC' è un triangolo equilatero, che ha la stessa superficie di quello ABK.

L'area di ABCD è data dalla somma delle aree dei triangoli equilateri ABK e AKC'.

A questo punto, calcoliamo l’area del triangolo equilatero ABK:

Area ABK = AH * (BK/2) = AH * BH = (√108) * 6 ≈ (10 + 1/3) * 6 ≈ 62 braccia^2.

L’area del trapezio è uguale al doppio di quella di ABK:

Area ABCD = 2 * Area ABK ≈ 2 * 62 ≈ 124 braccia^2.

Un’ulteriore verifica di questo risultato è data dall’applicazione della nota formula che calcola l’area di un trapezio con il prodotto della semisomma delle basi per l’altezza:

Area ABCD = [(AD + BC)/2] * AH ≈ [(6 +18)/2] * (10 + 1/3) ≈

≈ 12 * (10 + 1/3) ≈ 124 braccia^2.

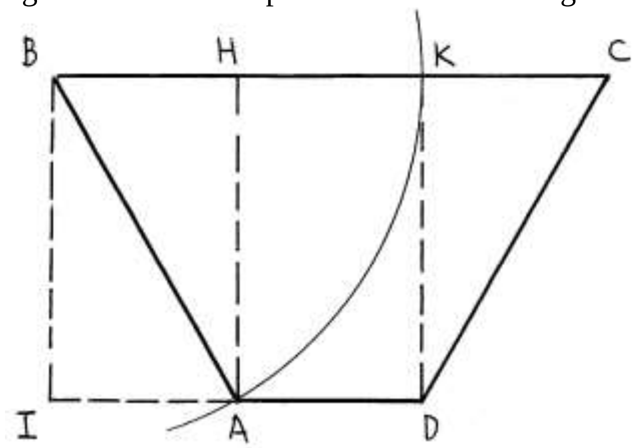
Il Maestro Umbro ha calcolato solo l’area di metà del trapezio, 62 braccia^2, con la formula

$$\text{Area}_{ABCD} = \frac{AB \cdot AH}{2}$$

.

Vediamo in che cosa consiste l’errore.

La figura che segue trasforma il trapezio ABCD nel rettangolo equivalente IBKD:



Il rettangolo ha il lato BK lungo quanto AB e BI è lungo quanto l’altezza AH. La sua area è:

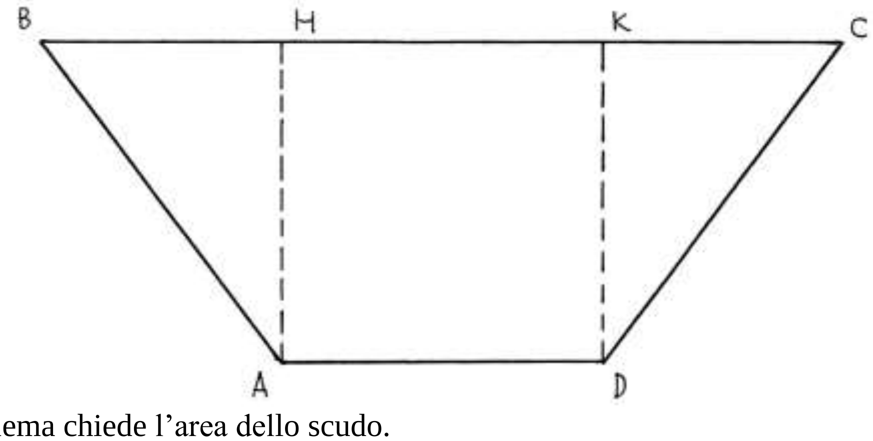
Area IBKD = BK * BI = AB * AH = 12 * (10 + 1/3) ≈ 124 braccia^2.

Il Maestro Umbro ha commesso un errore perché ha diviso per 2 il prodotto (AB * AH).

- -

[39] <u>Scudo a forma di trapezio isoscele</u>

Uno *scudo* ha la forma di un trapezio isoscele: la base maggiore è lunga 40 braccia, quella minore 16 e i due lati obliqui sono 20 braccia.



Il problema chiede l’area dello scudo.

La procedura impiegata è piuttosto complessa e poco comprensibile ed è la seguente:

* trarre il *quadro* più grande che è possibile inscrivere nello scudo con lato 16 braccia;
* sottrarre 16 [il Maestro Umbro non indica il *minuendo* ma soltanto il *sottraendo* (16) e la differenza (32) per cui il minuendo è (16 + 32) = 48, cifra della quale l'Autore non indica l'origine]: [48] – 16 = 32 ;
* moltiplicare la lunghezza di un lato obliquo per se stessa: 20 * 20 = 400 :
* dividere 32 per 2: 32 : 2 = 16 ;
* moltiplicare per se stesso: 16 * 16 = 256 ;
* sottrarre l'ultimo prodotto da 400: 400 – 256 = 144 ;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{144} = 12$ braccia, altezza del trapezio [il dato è errato, come vedremo più oltre];
* dividere per 2: 12 : 2 = 6 ;
* moltiplicare l'altezza per la base minore: 12 * 16 = 192 braccia^2, area del cosiddetto *quadro* [AHKD, che l'Autore ritiene erroneamente essere un *rettangolo*];
* moltiplicare 6 per 32: 6 * 32 = 192 ;
* sommare gli ultimi due prodotti: 192 + 192 = 384 braccia^2, area dello scudo.

%%%%%%%%%%%%%%%%%

Le altezze AH e DK dividono il trapezio in *tre* poligoni: i triangoli rettangoli ABH e DKC (che hanno uguali dimensioni) e il quadrilatero AHKD.

La lunghezza di BH (uguale a quella di KC) è:

$$BH = KC = (BC – HK)/2 = (BC – AD)/2 = (40 – 16)/2 = 24/2 = 12 \text{ braccia.}$$

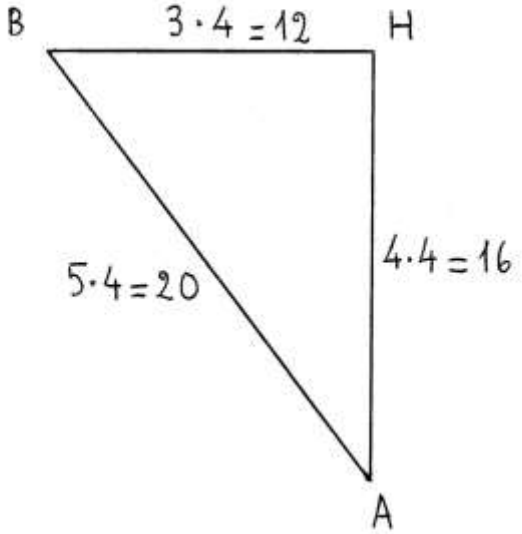
L'altezza AH è un cateto del triangolo rettangolo ABH e la sua lunghezza è data da:

$$AH^2 = AB^2 – BH^2 = 20^2 – 12^2 = 400 – 144 = 256 \text{ da cui consegue}$$

$$AH = \sqrt{256} = 16 \text{ braccia.}$$

Il quadrilatero AHKD è un *quadrato* con lati lunghi 16 braccia e non un *rettangolo* come scritto dal Maestro Umbro.

È opportuno notare che i triangoli rettangoli ABH e DKC hanno lati lunghi secondo la terna pitagorica 3-4-5 moltiplicata per il fattore 4:



Le aree dei tre poligoni che compongono ABCD sono:
* Area $_{ABH}$ = (BH * AH)/2 = (12 *16)/2 = 96 braccia^2 ;
* l'Area di DKC è anch'essa 96 braccia^2 ;
* Area $_{AHKD}$ = AH * AD = 16 * 16 = 256 braccia^2.

L'area del trapezio è la somma delle aree dei tre poligoni:

Area $_{ABCD}$ = 96 + 96 + 256 = 448 braccia^2.

L’area del trapezio isoscele può essere calcolata moltiplicando la semisomma delle basi per l’altezza:

$$\text{Area}_{ABCD} = [(AD + BC)/2] * AH = [(40 + 16)/2] * 16 = 28 * 16 = 448 \text{ braccia}^2.$$

Il risultato ottenuto dal Maestro Umbro è errato per difetto di ben 64 braccia^2.

- APPROFONDIMENTO -

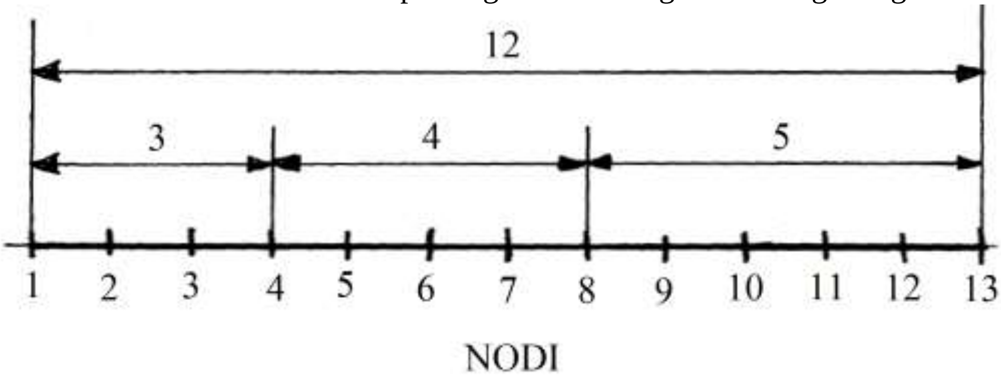
<u>Le terne pitagoriche</u>

Cinque fra i precedenti problemi (quelli contrassegnati con i numeri 34, 35, 36, 37 e 39) chiamano in causa il triangolo pitagorico 3-4-5.

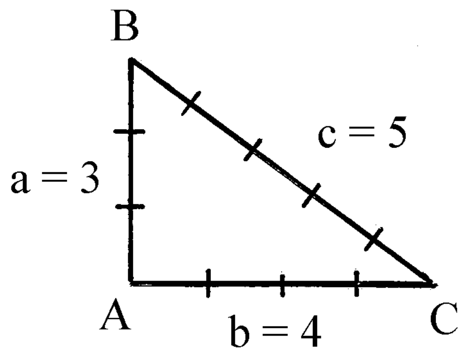
Sarebbe interessante ricostruire le ragioni della presenza di questo triangolo rettangolo: le notevoli dimensioni delle figure nelle quali esso compare possono suggerire che si tratti delle misurazioni di particelle di terreni ricavate da triangolazioni effettuate da agrimensori. È solo un’ipotesi.

Per la sua origine storica il triangolo rettangolo 3-4-5 fu chiamato *egiziano* (o *egizio*) da parte di Vitruvio (Marco Pollio Vitruvio, architetto romano vissuto nel I secolo a.C., autore del trattato *De Architectura*).

Una corda recante 13 nodi e divisa in 12 parti uguali dava origine al triangolo egiziano:



Con la corda veniva realizzato il triangolo rettangolo ABC:



La facile trasportabilità di questa corda e la possibilità di costruire con essa sul terreno un angolo retto ne facevano uno strumento essenziale per i rilievi effettuati dagli agrimensori.

La terna 3-4-5 è una *terna pitagorica* perché

$$3^2 + 4^2 = 5^2 \quad \text{e cioè} \quad 9 + 16 = 25 .$$

- -

Nota: il 4° capitolo è dedicato ai problemi sulle misurazioni degli alberi e il 5° è riservato a problemi di misura delle torri. Tutte queste *ragioni* non sono state prese in considerazione in questo articolo.

Bibliografia

1. Arrighi Gino (a cura di), “Maestro Umbro (sec. XIII) – Livero de l’Abbecho” (Cod. 2404 della Biblioteca Riccardiana di Firenze), in “Bollettino della Deputazione di Storia Patria per l’Umbria”, Volume LXXXVI (1989), Perugia, 1989, pp. 137.
2. Arrighi Gino (a cura di), “Maestro umbro (sec. XIII) – Amastramento de l’arte de la geometria” (Cod. 2404 della Biblioteca Riccardiana di Firenze), in “Bollettino della Deputazione di Storia Patria per l’Umbria”, volume LXXXVIII, Perugia, 1991, pp. 31.
3. Bocchi Andrea, “Dal «Liber Abaci» ai Libri d’Abaco: errori, fraintendimenti, ristrutturazioni”, in “Scienze e rappresentazioni”. Studi in onore di Pierre Souffrin, Firenze, Olschki, 2015, pp. 447 – 457.
4. Martini Angelo, “Manuale di Metrologia: ossia Misure, Pesi e Monete in Uso Attualmente e Anticamente presso Tutti i Popoli”, Loescher, Torino-Roma-Firenze, 1883, pp. VIII-904.