sergio(punto)calzolani(at)outlook(punto)it

Parole chiave: area di un panno per vestiti, aree di Firenze e di Lucca, confronto fra le aree di grandi terreni, *corba* unità di misura per i liquidi, diametro e circonferenza, area di un cerchio, copertura di finestre circolari con panni, volume pozzo cilindrico, volume pozzo troncoconico, cerchio inscritto in un quadrato, quadrato inscritto in un cerchio, spessore muri, segmento circolare, teorema delle corde, diagonale di un quadrato, area di un quadrato, 4 cerchi inscritti in un quadrato, bislungo, perimetri delle torri, triangolo equilatero, altezza di un triangolo equilatero, triangolo 13-14-15, formula di Erone, triangolo equilatero inscritto in un cerchio, cerchio inscritto in un triangolo equilatero.

Il *Libro di conti e mercatanzie* pare essere basato su libri di abaco di sicura origine toscana e compilato in area emiliana.

È conservato nella Biblioteca Palatina di Parma come Ms. Pal. 312.

È anonimo e risalirebbe al XV secolo.

Silvano Gregori e Lucia Grugnetti hanno curato la pubblicazione del manoscritto (citata in bibliografia) e alle pp. XI-XII dell'Introduzione hanno così individuata l'epoca di compilazione:

"…Le soluzioni che il nostro autore riporta per le equazioni 12 e 13 [qui non riprodotte], trattate come equazioni di secondo grado, sono le stesse che si trovano frequentemente nei trattati d'algebra dei secoli XIV e XV, a partire dal ***Libro di ragioni*** di Paolo Gherardi (1328); identiche soluzioni sono suggerite nel ***Trattato dell'alcibra amuchabile*** di anonimo (sec. XIV). Le coincidenze con quest'ultimo trattato non si limitano a questi due casi di equazione: 19 tipi di equazione proposti nel ***Libro di conti e mercatanzie*** coincidono con quelli contenuti nel trattato suddetto e anche gli esempi numerici sono talvolta identici e a loro volta ripresi dal ***Libro di ragioni*** di Paolo Gherardi o dalle ***Questioni d'Algebra*** di Gilio da Siena (1384). Le somiglianze notevoli con i manoscritti del XIV secolo e l'assenza di equazioni di quinto grado, presenti invece nella ***Regula sopra l'algebra almuchabile*** di Francesco Giovanni Sitoni (sec. XVI) ci permettono di ipotizzare una collocazione cronologica del nostro manoscritto tra la fine del XIV e l'inizio del XV sec.; tale ipotesi è rafforzata dalla presenza, nella terza parte del trattato, di ragioni di compagnie e meriti nelle quali si propongono esempi numerici riferiti agli anni che vanno dal 1389 al 1393 (ragioni #22v 1, #23 4, #34v 2 - #40v 1) [anche queste qui non riprodotte]...".

Jens Høyrup è uno storico della matematica danese ed è fra i maggiori studiosi dei trattati d'abaco italiano.

Nel suo studio, citato in bibliografia, anche Høyrup attribuisce il *Libro di conti e mercatanzie* a circa il 1395 e ritiene che il suo Autore abbia subita l'influenza dell'abacista fiorentino Paolo Gherardi, operante a Montpellier nei primi decenni del Trecento. Gli sono attribuiti due trattati: il *Libro di ragioni* composto a Montpellier nel 1328 e un precedente *Liber habaci*. Sempre stando a Høyrup, l'Anonimo si sarebbe servito della conoscenza del *Libro di ragioni* di Gherardi.

La parte finale del manoscritto contiene problemi di geometria piana e alcuni di geometria solida, sicuramente ripresi da esercizi contenuti in precedenti trattati di abaco.

Sugli schemi geometrici, l'Anonimo ha spesso scritto i dati di partenza e a volte i risultati dei calcoli, come mostrano gli esempi.

Alcune figure sono riprodotte dalla pubblicazione di Silvano Gregori e Lucia Grugnetti (citata in precedenza) e altre sono state ridisegnate dall'autore di questo articolo.

La progressione dei problemi relativi alle figure piane è la seguente:

* cerchi e circonferenze;
* quadrilateri;
* triangoli.

In questo articolo sono presi in considerazione soltanto i *problemi geometrici*.

Panno occorrente per un vestito

Una persona vuole farsi un vestito con un panno largo (3 + 2/3) braccia e scopre che in lunghezza gliene occorrono (8 + ½) braccia.

Trova un'altra pezza di un panno che è più stretto del precedente e che in larghezza misura (2 + 5/6) braccia.

Il problema chiede di calcolare la lunghezza della stoffa occorrente per realizzare il vestito con la seconda pezza.

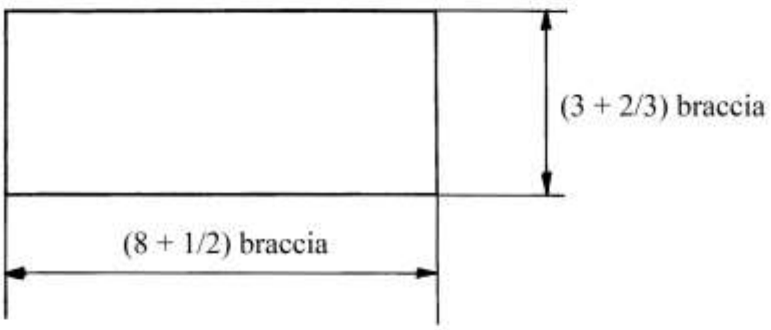
Le due stoffe devono avere uguale superficie.

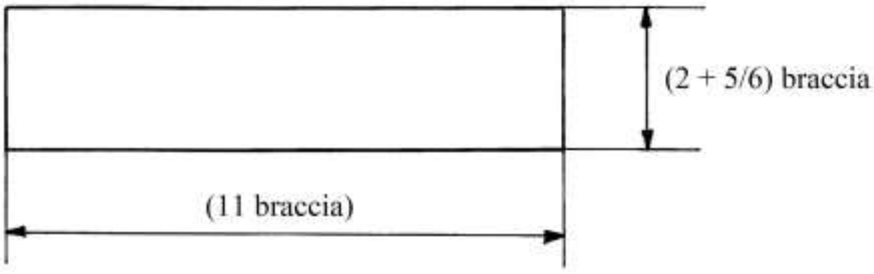
L'area del primo panno è:

$$\text{Area}_{\text{PRIMO}} = (3 + 2/3) * (8 + ½) = 187/6 \text{ braccia}^2.$$

La lunghezza della stoffa ricavata dalla seconda pezza è data da:

$$(\text{Area}_{\text{PRIMO}})/(\text{larghezza seconda pezza}) = (187/6)/(2 + 5/6) = 187/17 = 11 \text{ braccia}.$$





Confronto fra le aree di Firenze e di Lucca

Un problema simile era stato presentato da Paolo dell'Abbaco (1282-1374): egli indicò in 7 miglia la lunghezza delle mura di Firenze e in 2 miglia quella delle mura di Città di Castello.

L'Anonimo ha ripreso gli stessi dati conservando la lunghezza delle mura fiorentine in 7 miglia e fissando la lunghezza di quelle di Lucca in 2 miglia.

Il problema chiede di calcolare quante volte l'area urbana di Lucca entri in quella di Firenze.

Le aree sono proporzionali al quadrato dei raggi, dei diametri e delle lunghezze delle circonferenze.

La soluzione qui adottata è uguale a quella utilizzata da Paolo dell'Abbaco:

* moltiplicare la lunghezza delle mura di Firenze per sé stessa: 7 * 7 = 49;
* moltiplicare la lunghezza delle mura di Lucca per sé stessa: 2 * 2 = 4;
* dividere il primo quadrato per il secondo: 49/4 = (12 + ¼), numero di volte che Lucca entra in Firenze.

Questo esempio, come altri che incontreremo in seguito, può confermare l'influenza esercitata dagli abacisti toscani del Medioevo su questo anonimo Autore: questi era forse un artigiano o un mercante lucchese trapiantato a Bologna (visti i rapporti dell'industria della seta intercorsi fra Lucca e Bologna)?

L'Autore chiarisce la forma che egli attribuisce alle due città confrontate: i suoi dati sono da lui ritenuti corretti se esse hanno entrambe forma circolare o quadrata-rettangolare.

Nota: l'antico miglio fiorentino valeva (2833 + 1/3) braccia da panno, equivalenti a 1653,607 m.

- APPROFONDIMENTO -

Come già fatto da Paolo dell'Abbaco, anche l'Anonimo trascura i problemi di isoperimetria e di equiestensione delle due piante.

Firenze e Lucca non avevano forme regolari, quadrate o circolari. Mentre le piante di Lucca mostrano una struttura quasi rettangolare (con le mura fortunatamente conservate), nel caso di Firenze la situazione era ed è più complessa a causa della presenza del corso cittadino dell'Arno.

La figura che segue mostra le ultime due cerchie delle mura: quella più esterna fu progettata nel 1284 e terminata nel 1333 (fonte: Mario Lopes Pegna). Sciaguratamente, gran parte delle mura fiorentine furono abbattute nel corso dell'Ottocento.

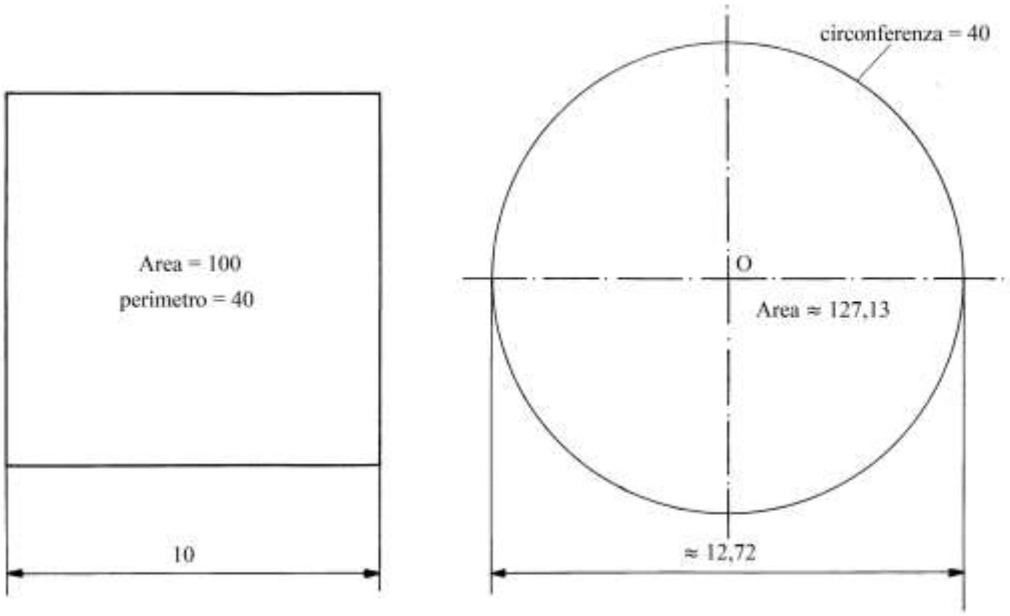
Fig. 135. - Le ultime cerchie murarie fiorentine (1172 e 1284).

Inoltre, l’ultima cerchia delle mura di Firenze era più lunga dei 7 km degli esempi: 8,5 km.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Approfondiamo la questione delle figure isoperimetriche e equiestese: le prime hanno uguale perimetro e le seconde uguale area.

Un quadrato ha lati lunghi 10 e perimetro 40; un cerchio ha circonferenza lunga 40. Le due figure sono *isoperimetriche*:



Il quadrato ha area:

Area $_{QUADRATO}$ = 10^2 = 100 unità^2.

Nel caso del cerchio, conoscendo la lunghezza della sua circonferenza, *c*, possiamo ricavare quella del diametro, *d*:

c = π * d ≈ 22/7 * d, da cui:

d = c * (7/22) ≈ 40 * 7/22 ≈ 12,(72) unità.

L'area del cerchio è:

Area $_{CERCHIO}$ = π * raggio^2 = π * (d/2)^2 ≈ 22/7 * (12,72/2)^2 ≈ 127,13 unità^2.

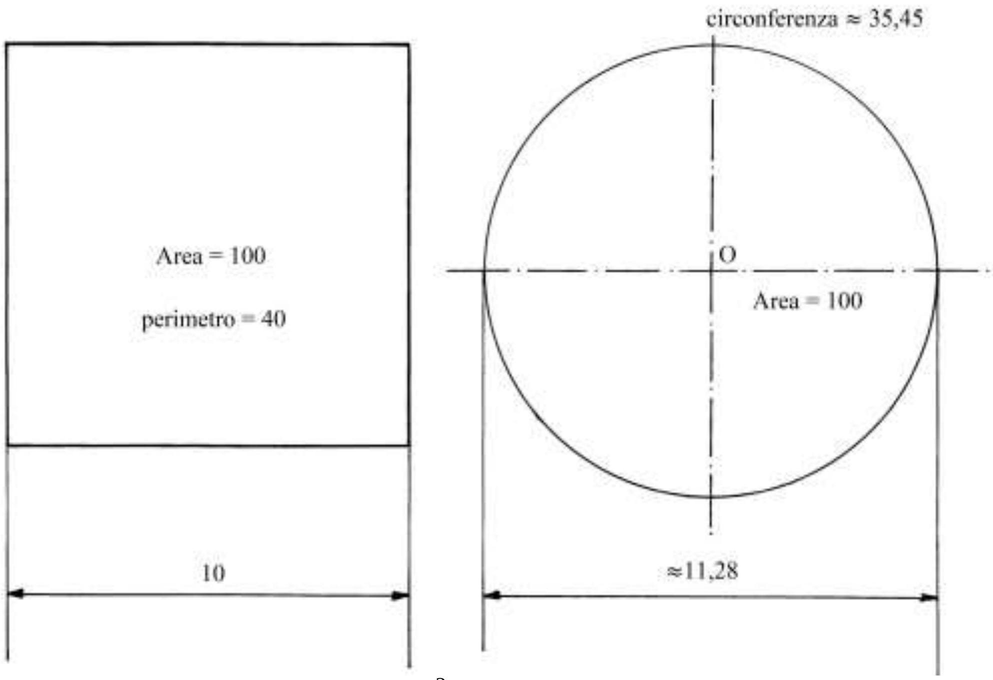
L'area poteva essere calcolata direttamente usando il valore della lunghezza della circonferenza:

Area $_{CERCHIO}$ ≈ c^2 * 7/88 .

A parità di perimetro, la circonferenza racchiude un'area maggiore di quella delimitata dal quadrato.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Consideriamo ora il caso di un quadrato e di un cerchio con aree uguali:



Il quadrato ha area uguale a 100 unità^2 e lo stesso accade al cerchio. Dobbiamo determinare la lunghezza del diametro e della circonferenza.

L'area di un cerchio è data da:

$\text{Area}_{\text{CERCHIO}} = \pi * \text{raggio}^2 = \pi * (d/2)^2 \approx 22/7 * d^2/4 \approx 22/28 * d^2 \approx 11/14 * d^2$.

Da cui:

$d^2 \approx 14/11 * \text{Area}_{\text{CERCHIO}}$ e

$d \approx \sqrt{(14/11) * 100)} \approx 11{,}28$ unità.

La circonferenza *c* è lunga:

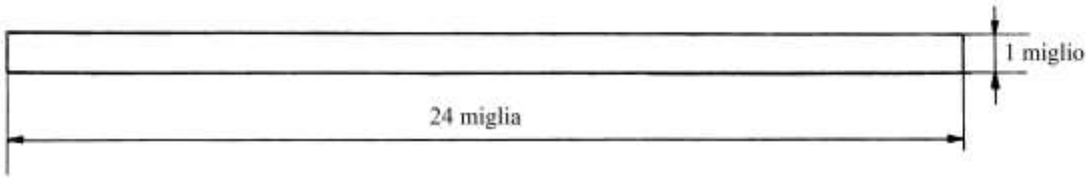
$c = \pi * d \approx 22/7 * 11{,}28 \approx 35{,}45$ unità.

Il quadrato e il cerchio sono figure *equiestese*.

- -

<u>Confronto fra due terre</u>

Due terre hanno la forma e le dimensioni mostrate in figura:



La prima è rettangolare e la seconda è quadrata.

Il problema mira a dimostrare che la seconda occupa un'area (2 + 2/3) più grande di quella della prima.

La prima terra ha area:

$$\text{Area}_{\text{PRIMA}} = 24 * 1 = 24 \text{ miglia}^2.$$

La seconda ha area:

$$\text{Area}_{\text{SECONDA}} = 8^2 = 64 \text{ miglia}^2.$$

Il rapporto fra l'area della seconda e quella della prima vale:

rapporto = 64/24 = 8/3 = (2 + 2/3).

Poligoni e cerchi concentrici

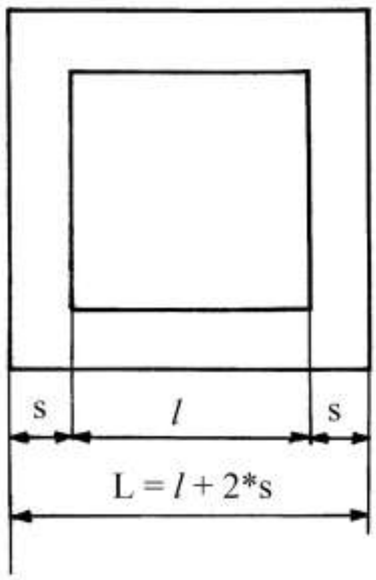
Questo paragrafo è dedicato dall'Autore a chiarire un problema che riguarda i perimetri di poligoni e cerchi concentrici. Ecco il suo testo riprodotto dalla carta 8 *verso* 1:

> E sono molti ch'ànno in vulgare e dicono la cotal terra gira 5 migla dentro e di fuori gira 7 migla e non sanno quello che si dicono. La ragione si è questa, che ogni terra che sia quadra gira

8 cotanti la larghessa delle fossa in fino dove misura di fuori più di fuori che drento imperché, siando quadra la terra, ella à 4 cantony e ogni cantone à 2 volte, sicché sono 8 volte. E se la terra fusse tonda, ella gira più di fuori che drento 6 volte 2/7 la larghessa per infine dove misurj di fuori e questo è provato che ogni tondo che fae 1 di larghessa crescie di giro 3 1/7 e perché quello si crescie da du' lati, debba crescere 6 volte 2/7. Se la terra stesse in scudo o a modo di nave o per altra forma, tanti cantoni quanti l'altra avesse 2 cotanti girerebbe la larghessa delle fosse e di quello ti farò sperientia più inanti in questo libbro.

Cerchiamo di interpretare il significato contenuto nel testo.

Due quadrati concentrici sono distanziati da uno spessore costante, *s*:



Il lato del quadrato interno è lungo ℓ e il suo perimetro è dato da:

perimetro $_{INTERNO} = 4 * \ell$.

Il lato del quadrato esterno è:

$L = \ell + 2*s$.

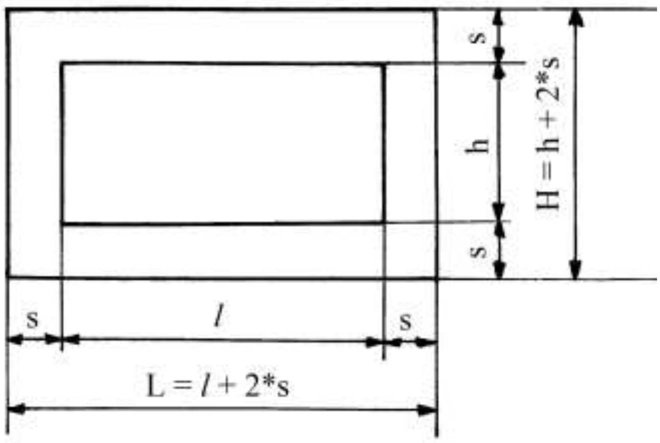
Il perimetro del quadrato esterno vale:

perimetro $_{ESTERNO} = 4 * L = 4 * (\ell + 2*s) = 4*\ell + 8*s$.

La differenza fra le lunghezze dei due perimetri è uguale a 8*s, perché i vertici del poligono sono *quattro* e lo spessore *s* influenza volte ciascun vertice.

%%%%%%%%%%%%%%%%%

Nel caso dei rettangoli concentrici si ha:



Il rettangolo interno ha dimensioni ℓ*h e il suo perimetro vale:

perimetro $_{INTERNO}$ = 2*ℓ + 2*h = 2*(ℓ + h).

Il rettangolo esterno ha lati lunghi:

L = ℓ + 2*s e H = h + 2*s.

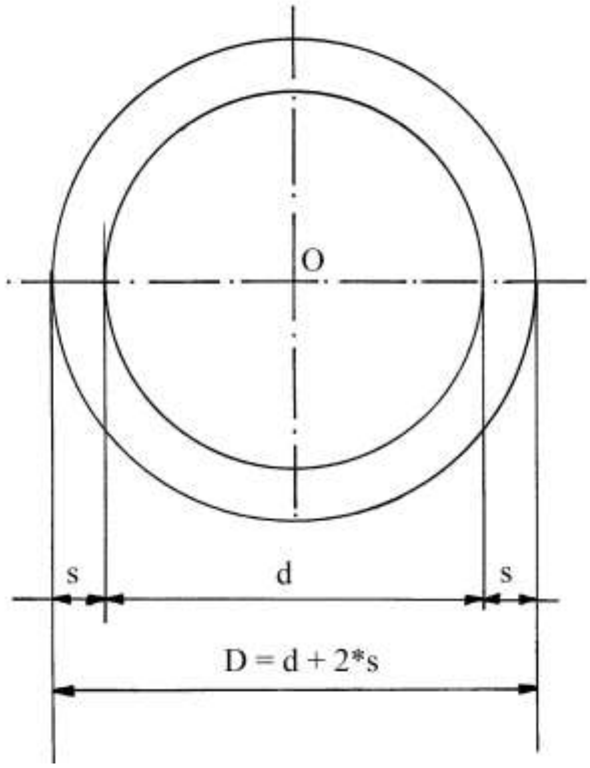
Il suo perimetro vale:

perimetro $_{ESTERNO}$ = 2*L + 2*H = 2*(ℓ +2*s) + 2*(h + 2*s) = 2*(ℓ + h) + 8*s =
= (perimetro $_{INTERNO}$) + 8*s .

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Nel caso di due cerchi concentrici separati da uno spessore costante lungo *s*, i due diametri sono così legati:

D = d + 2*s.



La circonferenza del cerchio interno, *c*, è lunga:

c = π * d ≈ (3 + 1/7) * d .

La circonferenza del cerchio esterno, *C*, è:

$C = \pi * D \approx (3 + 1/7) * D \approx (3 + 1/7) * (d + 2*s) \approx (3 + 1/7) * d + (3 + 1/7) * 2 * s \approx$
$\approx (3 + 1/7) * d + (6 + 2/7) * s$.

La differenza fra le lunghezze delle due circonferenze è:

$C – c = [(3 + 1/7) * d + (6 + 2/7) * s] – (3 + 1/7) * d = (6 + 2/7) * s$.

Nel caso di s = 1, la differenza fra le lunghezze delle due circonferenze si riduce a:

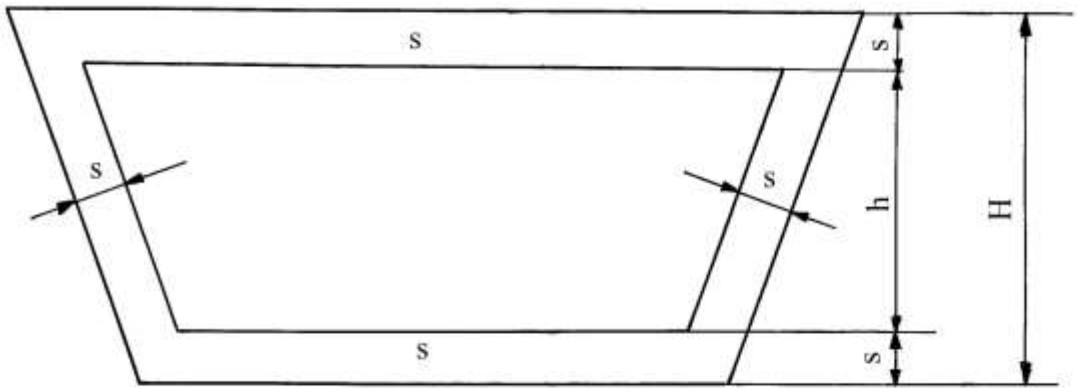
$(6 + 2/7) * 1 = (6 + 2/7)$.

- APPROFONDIMENTO -

L’Anonimo conclude il paragrafo facendo un cenno a terreni a forma di *scudo* (e cioè triangolari) e a *modo di nave*, probabilmente un trapezio isoscele che può rappresentare il profilo stilizzato di una nave: sembrerebbe che la regola valida per i quadrilateri valesse pure per i triangoli. C’è motivo per dubitarne.

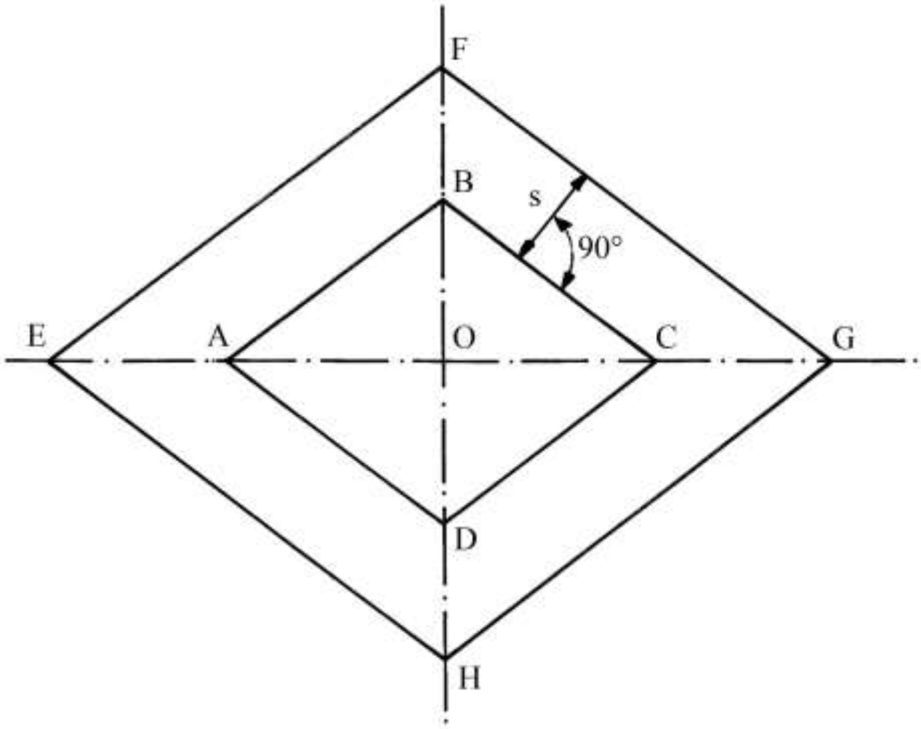
Affrontiamo due ulteriori quadrilateri: il trapezio isoscele (la *nave*) e il rombo.

Nella figura che segue sono rappresentati due trapezi isosceli concentrici e simili, distanziati da uno spessore costante, *s*:

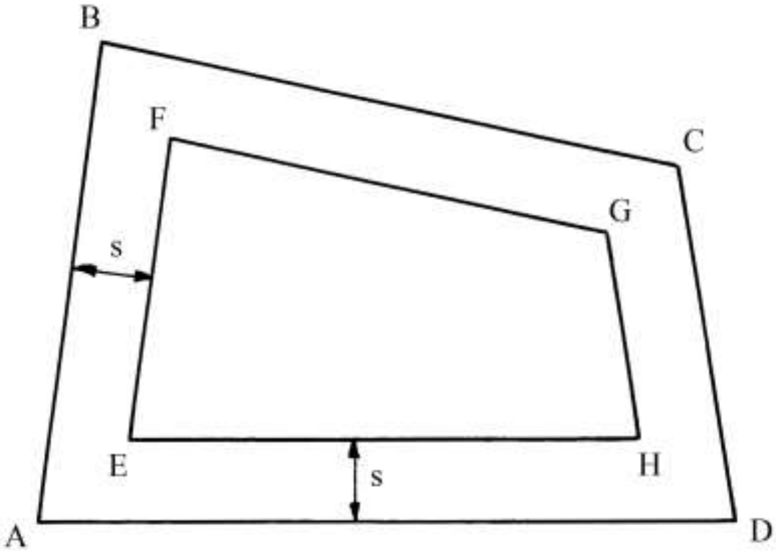


Sembra potersi affermare che la differenza fra la lunghezza del perimetro esterno e quella del perimetro interno sia uguale a 8*s.

Anche nel caso dei rombi concentrici e simili, come per gli altri quadrilateri, la differenza fra le lunghezze dei due perimetri, esterno e interno, sia uguale a 8*s.



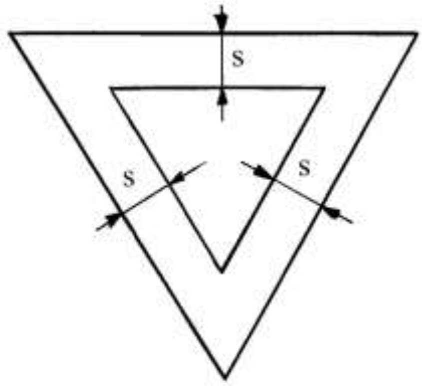
La regola sembra valere anche per i quadrilateri generici:



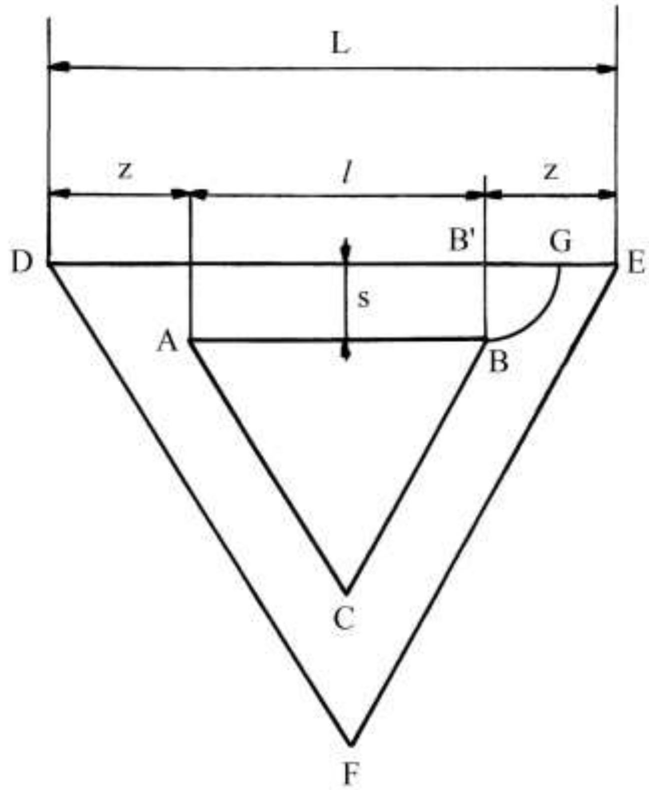
I due quadrilateri sono concentrici, simili e posizionati a distanza costante *s*.
La differenza fra le lunghezze dei due perimetri, esterno e interno, è uguale a 8*s.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Nel caso dei triangoli equilateri concentrici non sembra che la differenza fra le lunghezze dei perimetri dei due triangoli sia uguale a 6 volte lo spessore *s*:



Approfondiamo il caso dei triangoli equilateri:



Il perimetro del triangolo interno è:

$p_{\text{INTERNO}} = 3 * \ell$.

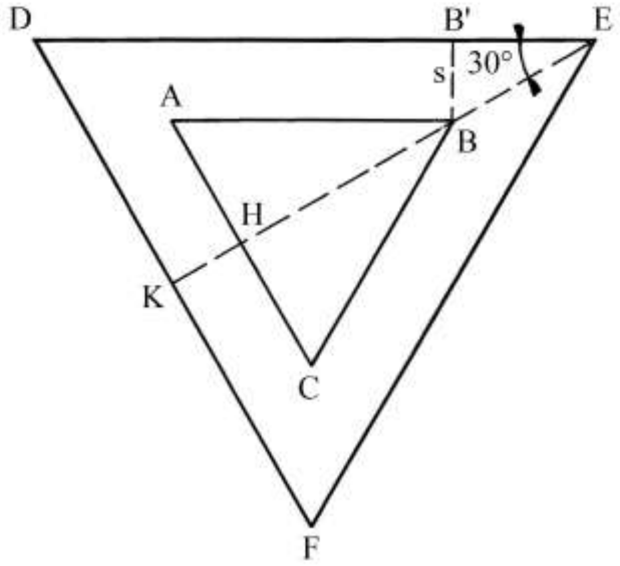
Il perimetro del triangolo esterno è lungo:

$p_{\text{ESTERNO}} = 3 * L = 3 * (z + \ell + z) = 3 * \ell + 6 * z$.

Fare centro nel punto B' e con raggio B'B = *s* tracciare un arco da B fino a incontrare il lato DE nel punto G: il segmento B'G è lungo quanto lo spessore *s* ma è più corto del segmento B'E = *z*. Ciò dimostra che la differenza fra le lunghezze dei due perimetri è maggiore di 6 * *s* e vale:

$p_{\text{ESTERNO}} - p_{\text{INTERNO}} = (3 * \ell + 6 * z) - (3 * \ell) = (6 * z) > (6 * s)$.

Cerchiamo di chiarire la situazione:



BH è un'altezza del triangolo interno e EK lo è del triangolo esterno. Entrambe le altezze giacciono sulla stessa retta.

L'altezza di un triangolo equilatero è lunga:

altezza = (√3)/2 * lato.

I segmenti BH e EK sono lunghi:

* BH = (√3)/2 * ℓ ;
* EK = (√3)/2 * L = (√3)/2 * (ℓ + 2*z).

La differenza fra le lunghezze delle due altezze è:

EK – BH = (√3)/2 * (ℓ + 2*z) – (√3)/2 * ℓ = (√3)/2 * 2 * z = √3 * z.

Consideriamo il triangolo B'BE: esso è rettangolo nel vertice B' e l'angolo B'EB è ampio 30°.

B'B è un cateto ed è lungo *s* mentre l'altro cateto, B'E, è lungo *z*.

La lunghezza dell'ipotenusa è:

BE = √[(BB')^2 + (B'E)^2] = √(s^2 + z^2).

Peraltro, il segmento BE è lungo:

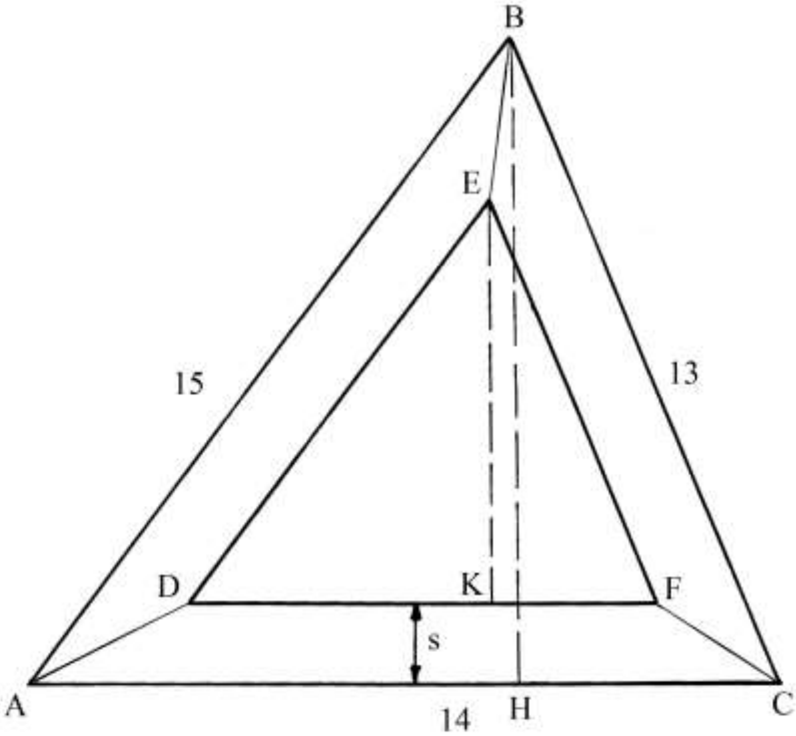
BE = EK – BK = EK – (BH + HK) = (√3)/2 * L – [(√3)/2 * ℓ + s] =
= [(√3)/2 * (ℓ + 2 * z)] – [(√3)/2 * ℓ + s] = (√3 * z – s).

Ma BE = √(s^2 + z^2), per cui eguagliando ile due formule si ha:

√(s^2 + z^2) = (√3 * z – s)
s^2 + z^2 = (√3 * z – s)^2
s^2 + z^2 = 3*z2 + s2 – 2*√3 * z * s
2*z^2 – 2*√3 * z * s = 0
z – √3 * s = 0
z = √3 * s .

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Il caso del famoso triangolo scaleno 13-14-15 è presentato nella figura:



Le dimensioni del triangolo esterno ABC sono scritte sui suoi lati.

All'interno è inscritto un secondo triangolo, DEF, che ha lati paralleli a quelli di ABC. I due triangoli sono distanziati da uno spessore costante *s*.

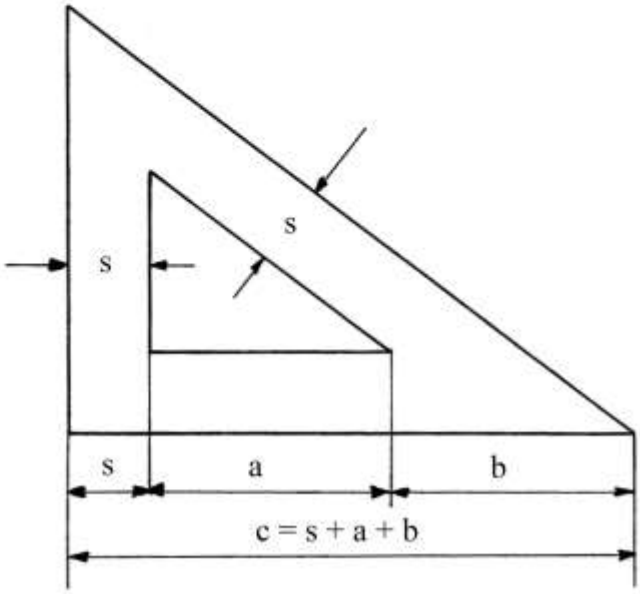
Dato che i due triangoli sono simili, anche i lati di DEF hanno lunghezze proporzionali alla terna 13-14-15.

Come accade agli altri triangoli, la differenza fra le lunghezze dei perimetri di ABC e di DEF non è multipla di *s* di un ordine 6, ma è maggiore.

Infine, i segmenti AD, BE e CF dividono lo spazio esistente fra i due triangoli in tre trapezi scaleni.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Nell'esempio dei due triangoli rettangoli, concentrici e simili, è evidente l'impossibilità di verificare l'esistenza di un rapporto – uguale a 6*s – fra le lunghezze dei due perimetri:

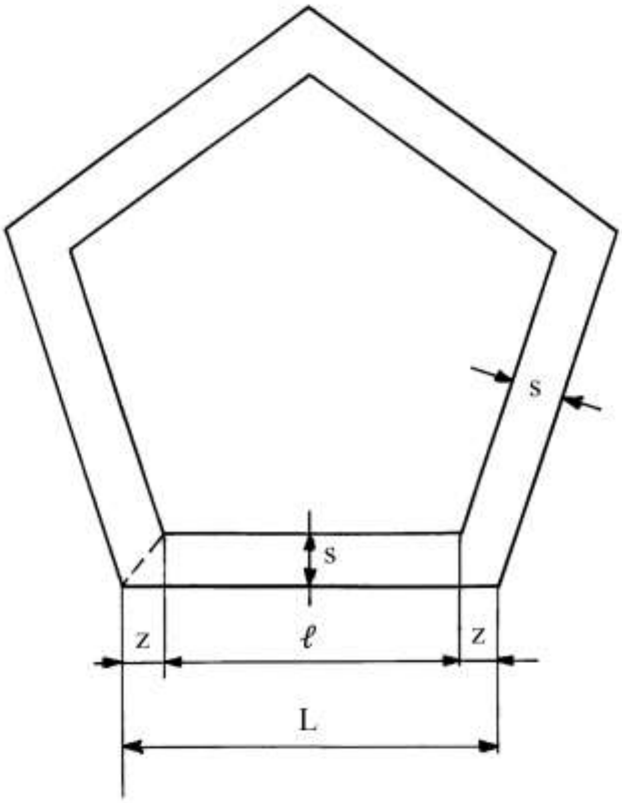


I lati dei due triangoli rettangoli concentrici hanno lunghezze proporzionali alla terna 3-4-5.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Concludiamo con due esempi di poligoni regolari concentrici, tutti scomponibili in triangoli isosceli.

Nel caso dei pentagoni si ha:



Il perimetro interno è lungo:

$p_{INTERNO} = 5 * \ell$ e quello esterno è:

$p_{ESTERNO} = 5 * L = 5 * (z + \ell + z) = 5 * (\ell + 2*z)$.

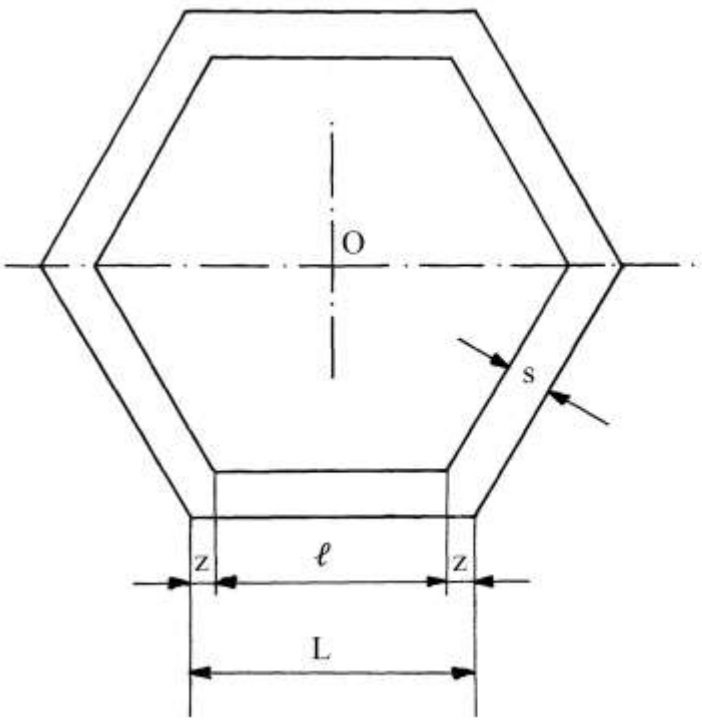
La differenza fra le lunghezze dei due perimetri è:

$p_{ESTERNO} – p_{INTERNO} = 5 * 2 *z = 10 * z$.

Chiaramente, il segmento *z* è più corto dello spessore *s*: di conseguenza $10*z < 10*s$.

Per i pentagoni non vale la regola trovata per i quadrilateri.

Vediamo il caso degli esagoni regolari concentrici:



La differenza fra le lunghezze dei due perimetri vale:

$p_{ESTERNO} – p_{INTERNO} = 6*L – 6*\ell = 6 * (z + \ell + z) – 6 * \ell = 12*z$.

Dalla figura risulta con chiarezza che $12*z < 12*s$.

Probabilmente la regola valida per i quadrilateri non è applicabile ai poligoni con numeri di lati diversi da *quattro*.

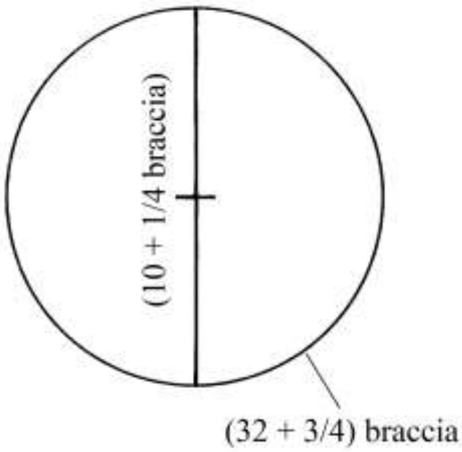
- -

<u>Circonferenza di un cerchio</u>

Un cerchio ha diametro *d* lungo (10 + ¼) braccia.

Deve essere calcolata la lunghezza *c* della sua circonferenza:

c = (10 + ¼) * (3 + 1/7).



Per la costante π, l'Autore usa la consueta approssimazione: $\pi \approx (3 + 1/7) = 22/7$.
Il risultato è calcolato correttamente con una serie di passaggi intermedi:

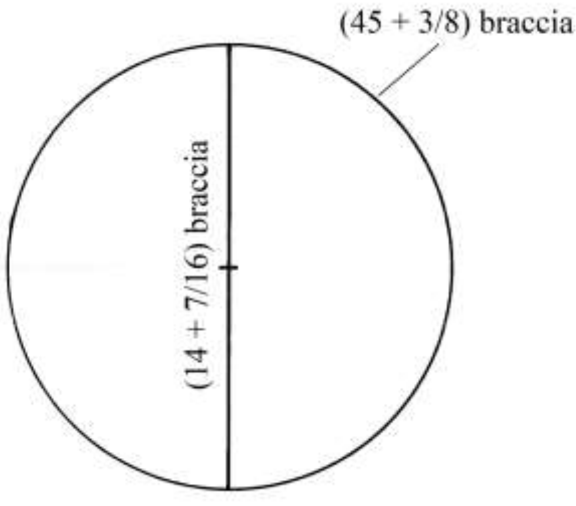
c = (32 + 3/14) braccia.

Diametro di un cerchio

Il problema è inverso al precedente: è data la lunghezza della circonferenza:

c = (45 + 3/8) braccia.

Deve essere ricavata la lunghezza del diametro.



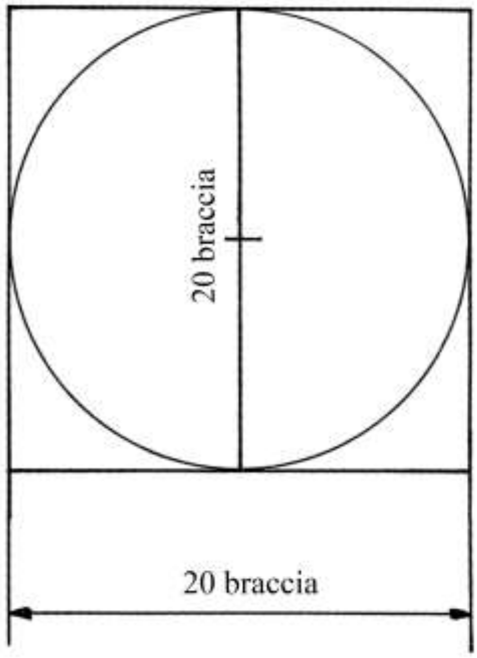
Occorre dividere la lunghezza della circonferenza per la costante 22/7. L'autore prima moltiplica per 7 e poi divide il risultato parziale per 22:

* (45 + 3/8) * 7 = (317 + 5/8)
* (317 + 5/8)/22 = (14 + 7/16) braccia.

Area di un cerchio

Un cerchio ha diametro lungo 20 braccia.

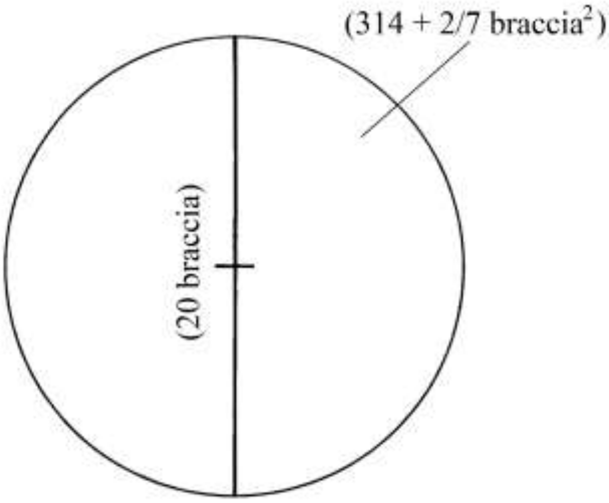
L'Autore precisa che l'area di un cerchio è uguale a 11/14 di quella di un quadrato che ha lati lunghi quanto il diametro del cerchio stesso.



L'area del quadrato è:

Area $_{\text{QUADRATO}}$ = lato^2 = diametro^2 = 20^2 = 400 braccia^2.

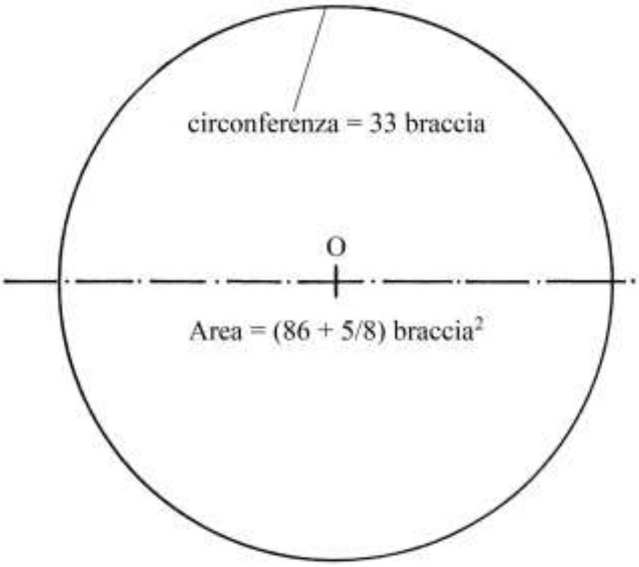
Area $_{\text{CERCHIO}}$ = 11/14 * Area $_{\text{QUADRATO}}$ = 11/14 * 400 = (314 + 2/7) braccia^2.



Nota: non sempre l'Autore distingue correttamente fra il braccio lineare e quello quadrato: in questa trascrizione sarà rispettata la distinzione fra le due unità.

Area di un cerchio data la circonferenza

Il problema si rifà a una variante del precedente esempio. Un cerchio ha circonferenza lunga 33 braccia e deve essere calcolata la sua area.



La procedura usata contiene i seguenti passi:

* dividere la lunghezza della circonferenza per la costante (3 + 1/7):
  33/(3 + 1/7) = (10 + ½) braccia, lunghezza del diametro;
* moltiplicare per sé stessa: (10 + ½)*(10 + ½) = (110 + ¼);
* moltiplicare per 11/14: (110 + ¼) * 11/14 = (86 + 5/8) braccia^2, area del cerchio.

Diametro di un cerchio

Un cerchio ha area 100 braccia^2.

Il problema chiede di calcolare il suo diametro.

La soluzione è:

* dividere l'area per la costante 11/14: 100/(11/14) = 1400/11 = (127 + 3/11) braccia^2 [area del quadrato che ha lati lunghi quanto il diametro];
* estrarre la radice quadrata: √(127 + 3/11) ≈ (11 + 2/7) braccia, diametro del cerchio.

L'Autore non estrae la radice quadrata.

Problema inverso del precedente

Il problema si propone di verificare l'esattezza del risultato ottenuto con la soluzione del precedente esempio.

Un cerchio ha diametro lungo √(127 + 3/11) braccia: occorre calcolare la sua area.

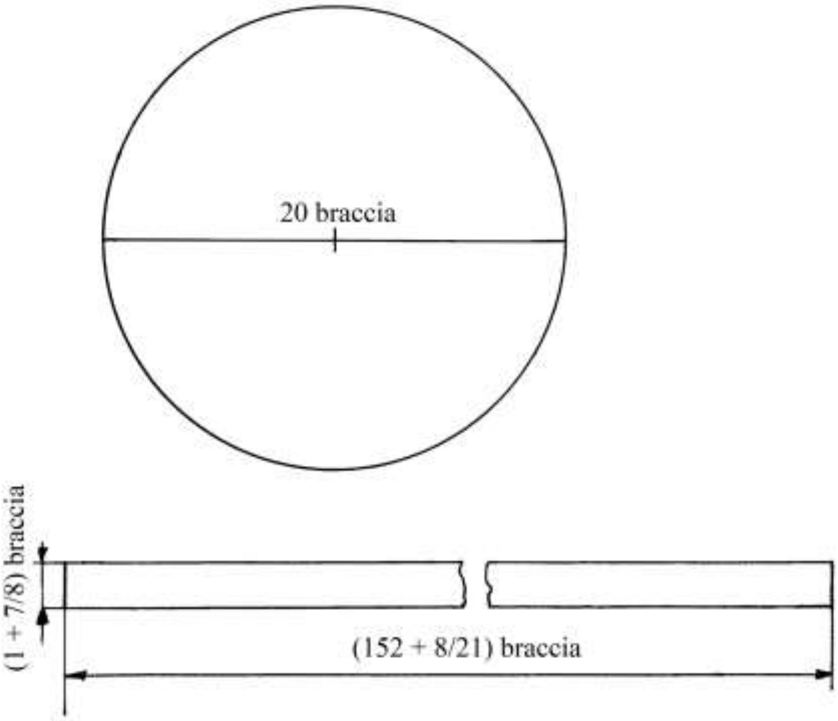
La procedura contiene i seguenti passi:

* moltiplicare la lunghezza del diametro per sé stessa:
  √(127 + 3/11) * √(127 + 3/11) = (127 + 3/11) braccia^2, area del quadrato che ha lati lunghi quanto il diametro del cerchio;
* moltiplicare per 11: (127 + 3/11) * 11 = 1400;
* dividere per 14: 1400/14 = 100 braccia^2, area del cerchio.

Chiusura di una finestra rotonda

Una finestra circolare ha diametro lungo 20 braccia. Deve essere coperta con un panno che è largo (1 + 7/8) braccia.

Il problema chiede di calcolare la lunghezza del panno occorrente.



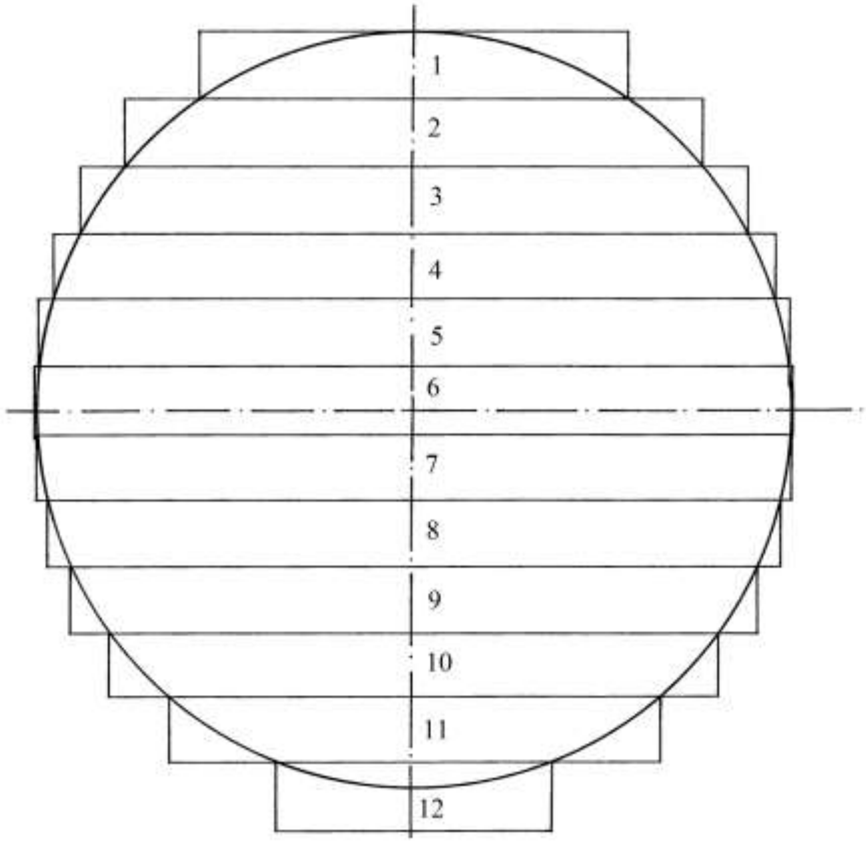
La procedura impiegata contiene i seguenti passi:

* moltiplicare la lunghezza del diametro per sé stessa: 20*20 = 400;
* moltiplicare per 11/14: 400 * (11/14) = (314 + 2/7) braccia^2, area del cerchio;
* dividere per la larghezza del panno: (314 + 2/7)/((1 + 7/8) = (152 + 8/21) braccia, lunghezza del panno occorrente.

L’Autore fornisce un risultato errato per eccesso: (167 + 13/21) braccia: forse ha tenuto conto della difficoltà geometrica messa in evidenza con il grafico che segue?

La soluzione dell’Autore è del tutto teorica perché occorre una maggiore lunghezza di panno per coprire completamente la finestra.

Lo schema che segue mostra le *dodici* strisce di panno occorrenti per completare la copertura e sono evidenti i consistenti sprechi di panno che emergono:



Finestra circolare coperta con un panno

Una finestra circolare è coperta con un panno largo (2 + 4/5) braccia e lungo 100 braccia.

Il problema chiede il diametro della finestra.

La procedura risolutiva comprende i seguenti passi:

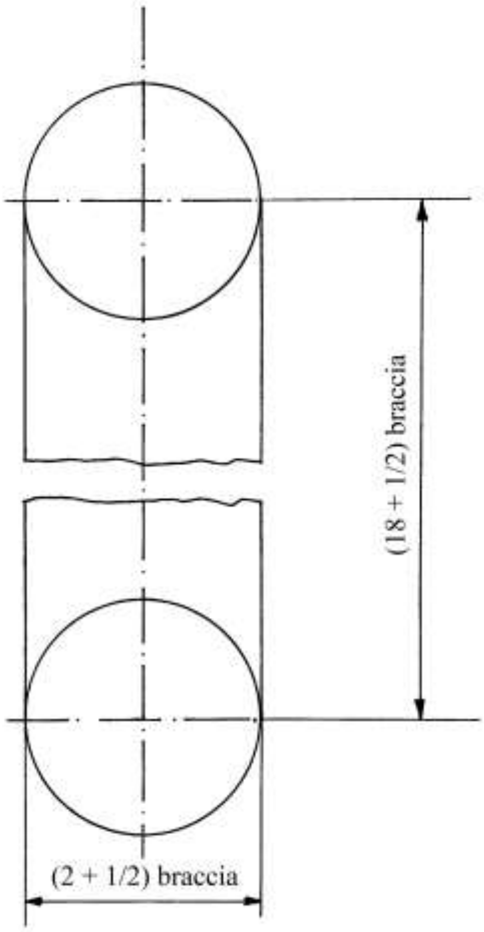
* calcolare l'area del panno impiegato: (2 + 4/5) * 100 = 280 braccia^2 [area del cerchio coperto dal panno];
* dividere per 11/14: 280/(11/14) 0 280 + 14/11 = (356 + ¼) braccia^2, area di un quadrato equivalente;
* estrarre la radice quadrata: √(356 + ¼) = (18 + 7/8) braccia, diametro della finestra circolare.

Come spiegato nella descrizione del precedente problema, la soluzione ricavata dall'Autore è puramente teorica perché per coprire la finestra del diametro di (18 + 7/8) braccia occorre una maggiore quantità di panno.

Pozzo circolare

Un pozzo circolare è profondo (18 + ½) braccia ed è largo alla bocca e al fondo (2 + ½) braccia.

Stando a quanto affermato dall'Autore, il pozzo conteneva *olio*.



Il problema chiede di calcolare il volume dell'*olio* contenuto nel pozzo, espresso in *corbe*: sia consentito avanzare dubbi sulle reali dimensioni e sulla natura di questo solido (un pozzo invece di una botte?) che appaiono eccessive per contenere del prezioso olio.

La procedura contiene i seguenti passi:

* moltiplicare la lunghezza del diametro per sé stessa: (2 + ½) * (2 + ½) = (6 + ¼);
* moltiplicare per la costante 11/14: (6 + ¼) * (11/14) = (4 + 51/56) braccia^2, area della sezione circolare;
* moltiplicare per la profondità del pozzo: (4 + 51/56) * (18 + ½) = (90 + 95/112) braccia^3, volume del pozzo;
* moltiplicare per 3: (90 + 95/112) * 3 = (272 + 61/112) *corbe*, volume dell'olio contenuto nel pozzo.

- APPROFONDIMENTO -

La corba

La *corba* era un'unità di misura del volume dei liquidi usata in molte città dell'Emilia Romagna.

Secondo lo Zupko, il suo equivalente era compreso fra 69,1 e 90,6 litri: a Bologna valeva 78,6 litri o dm^3.

Stando all'Anonimo autore di questo *Libro* la corba valeva *3 braccia quadre* (e cioè *braccia cubiche*).

Sempre a Bologna erano usate due unità di misura della lunghezza:

* il braccio mercantile equivalente a 0,640039 m;
* il braccio agrimensorio corrispondente a 0,380098 m.

È probabile che come avveniva a Firenze e in altri Comuni italiani, il braccio agrimensorio venisse impiegato solo nelle misurazioni dei terreni.

Nel vecchio Circondario di Bologna la corba corrispondeva a 78,5931 litri.

Data l'equivalenza citata dall'Autore si ha:

1 braccio cubico = 3 corbe = 3*78,5931 ≈ 235,8 litri = 0,2358 m^3.

Possiamo ora ricavare la lunghezza del braccio lineare che è la base del braccio cubico:

$$\text{braccio lineare} = \sqrt[3]{0{,}2358} = 0{,}6178 \text{ m}$$

Questo valore è leggermente inferiore a quello della lunghezza del braccio mercantile di Bologna.

- -

<u>Scavo di un pozzo</u>

Un pozzo circolare usato per contenere olio, acqua o vino deve avere la capacità di 1000 corbe e un diametro costante di 5 braccia.

Il problema chiede la profondità del pozzo.

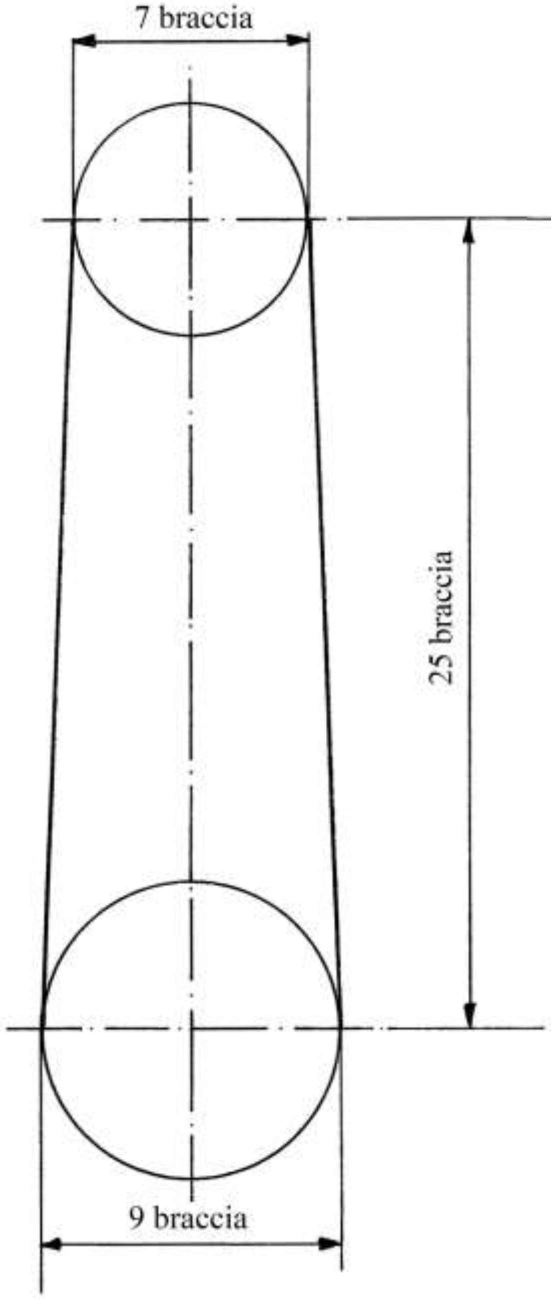
La procedura prevede i seguenti passi:

* dividere 1000 per 3: 1000/3 = (333 + 1/3) braccia cubiche, volume del pozzo;
* moltiplicare la lunghezza del diametro per sé stessa: 5*5 = 25;
* moltiplicare per 11/14: 25 * (11/14) = (19 + 9/14) $braccia^2$, area della sezione circolare del pozzo;
* dividere il volume per l'area: (333 + 1/3)/(19 + 9/14) = (16 + 32/33) braccia, profondità del pozzo.

<u>Pozzo troncoconico</u>

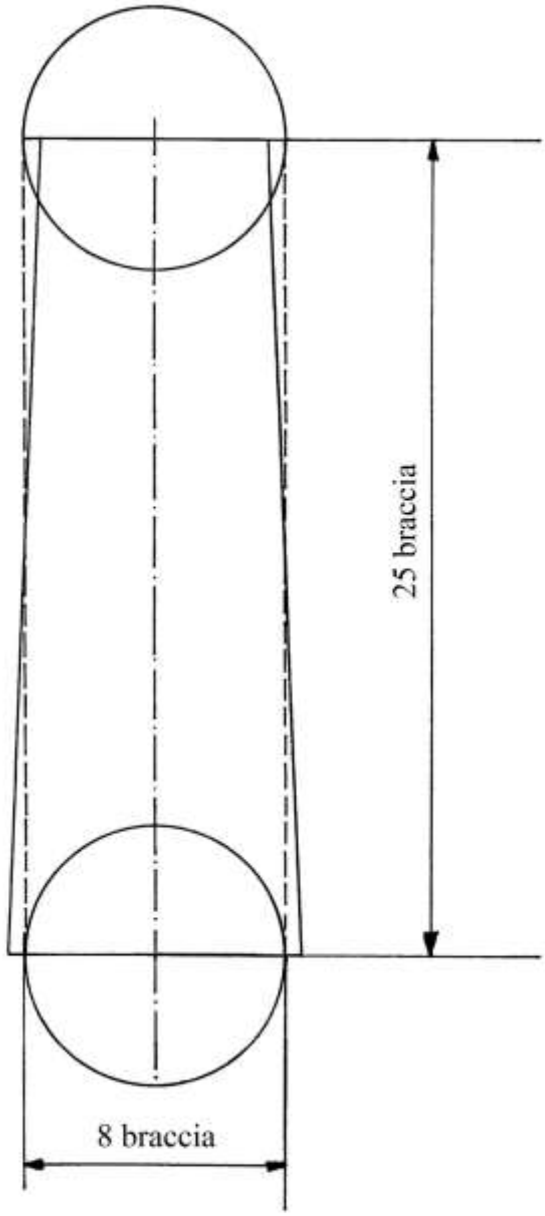
Un pozzo circolare è profondo 25 braccia, alla bocca è largo 7 e al fondo 9 braccia.

Il problema chiede di calcolare il volume dell'olio che può contenere, espresso in *corbe*.



La procedura impiegata contiene i seguenti passi:

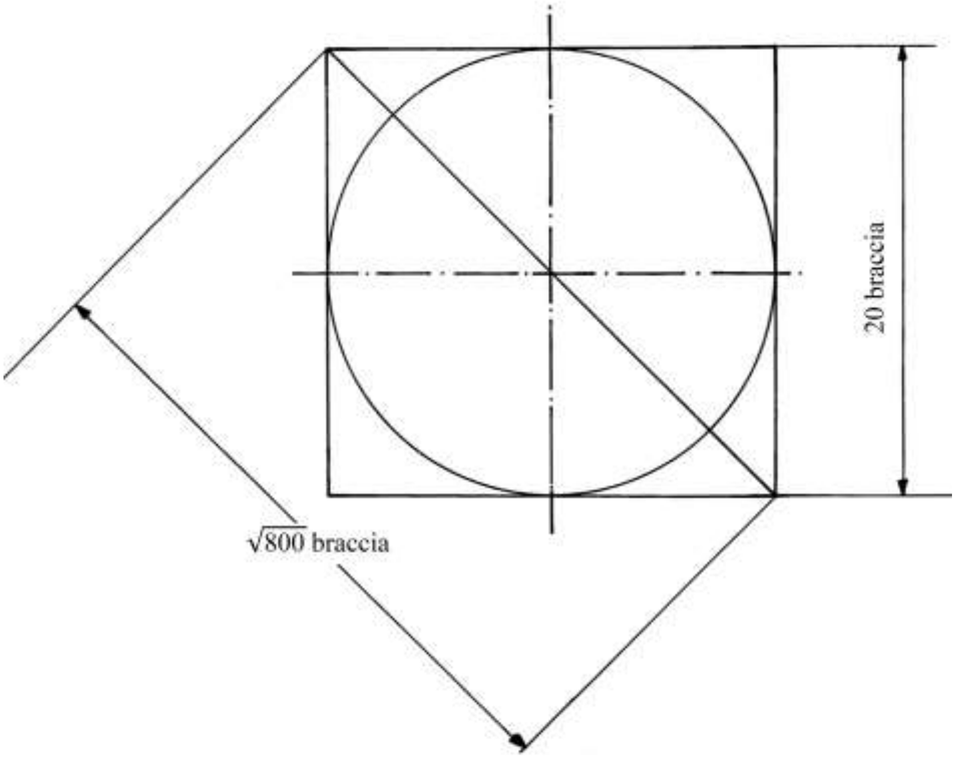
* sommare le lunghezze dei due diametri: 7 + 9 = 16;
* dividere per 2: 16/2 = 8 braccia [diametro del cilindro equivalente al tronco di cono];



*	moltiplicare per sé stesso:	$8*8 = 64$;
*	moltiplicare per la costante 11/14: area della sezione circolare del cilindro equivalente;	$64*(11/14) = (50 + 2/7)$ braccia^2,
*	moltiplicare per la profondità del pozzo: volume del cilindro equivalente al pozzo;	$(50 + 2/7)*25 = (1257 + 1/7)$ braccia cubiche,
*	moltiplicare per 3:	$(1257 + 1/7) * 3 = (3771 + 3/7)$ *corbe*.

Quadrato circoscritto a un cerchio

Un cerchio ha diametro 20 braccia. Il problema chiede di calcolare la lunghezza di una diagonale del più piccolo quadrato circoscritto.



Il lato del quadrato è lungo quanto il diametro del cerchio.
La procedura impiega i seguenti passi:

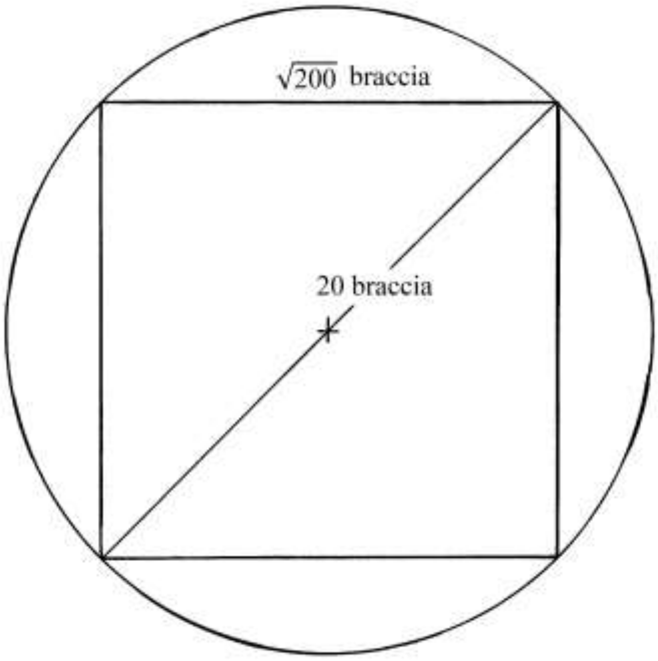
* moltiplicare la lunghezza del lato (o del diametro) per sé stessa: 20*20 = 400;
* moltiplicare per 2: 400 * 2 = 800;
* estrarre la radice quadrata: √800 braccia, lunghezza di una diagonale del quadrato.

L'Autore chiama *diamitro del quadro* la diagonale del quadrato.

Quadrato inscritto

Un cerchio ha diametro lungo 20 braccia: deve inscriversi il più grande quadrato possibile.
Il problema chiede di calcolare la lunghezza del lato o *faccia* del quadrato.
Il diametro del cerchio è lungo quanto le diagonali del quadrato.
La soluzione è la seguente:

* moltiplicare la lunghezza del diametro per sé stessa: 20*20 = 400;
* dividere per 2: 400/2 = 200:
* estrarre la radice quadrata di 200: √200 braccia, lunghezza dei lati del quadrato.

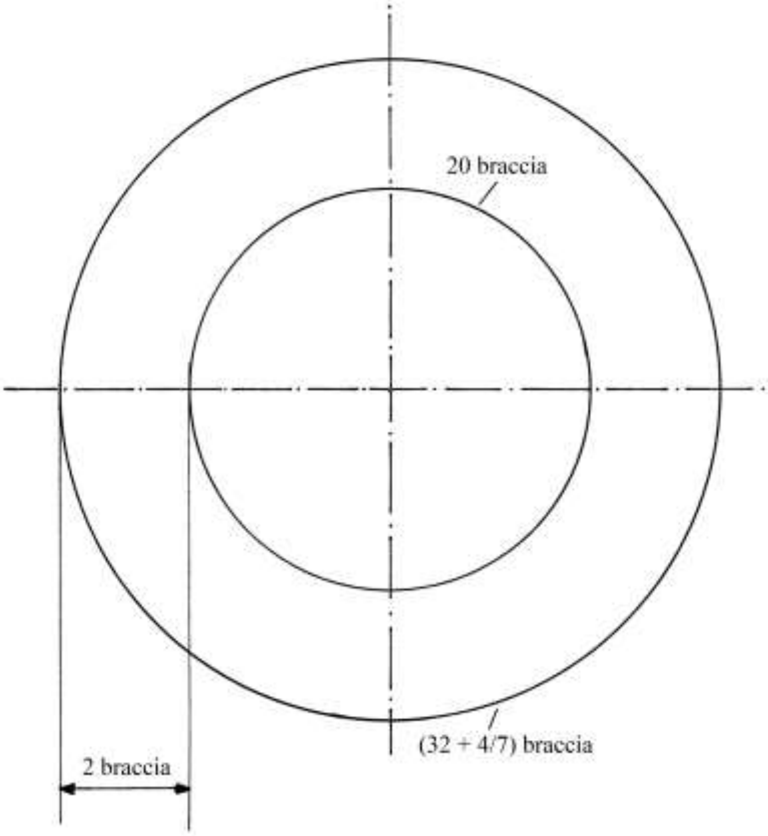


Nota: già Paolo dell'Abbaco chiamava *faccia* il lato di un poligono. Tutto ciò è un indizio che conferma l'influenza dei maestri d'abaco toscani su questo Autore.

Circonferenza esterna di una torre

Una torre circolare ha la circonferenza interna lunga 20 braccia ed è fatta con un muro spesso 2 braccia.

Il problema chiede la lunghezza della circonferenza esterna.



L'Autore avanza una semplice considerazione: aumentando il raggio di 2 braccia, la lunghezza della circonferenza aumenta di:

incremento = 2 * π * spessore muro ≈ 2 * 22/7 * 2 = 88/7 = (12 + 4/7) braccia.

La circonferenza esterna è lunga:

circonferenza esterna = circonferenza interna + incremento =
= 20 + (12 + 4/7) = =32 + 4/7) braccia.

Spessore del muro di una torre circolare

Una torre circolare ha la circonferenza interna lunga (22 + ¼) braccia e quella esterna 40 braccia.

Il problema chiede di determinare lo spessore del muro.

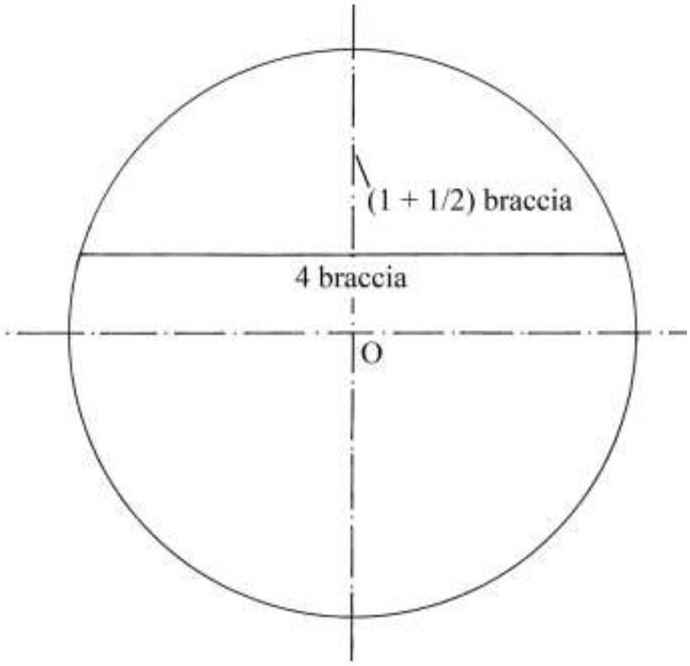
La procedura impiegata ha i seguenti passi:

* sottrarre la lunghezza della circonferenza interna da quella della circonferenza esterna: 40 – (22 + ¼) = (17 + ¾);
* dividere per (2 * π) ≈ 2 * 22/7 = 44/7: (17 + ¾)/(44/7) = (2 + 145/176) braccia, spessore del muro.

Segmento circolare

Un segmento circolare ha la *corda* lunga 4 braccia e la freccia (*saetta*) lunga (1 + ½) braccia.

Deve essere tracciato il cerchio da cui è stato ricavato il segmento circolare.

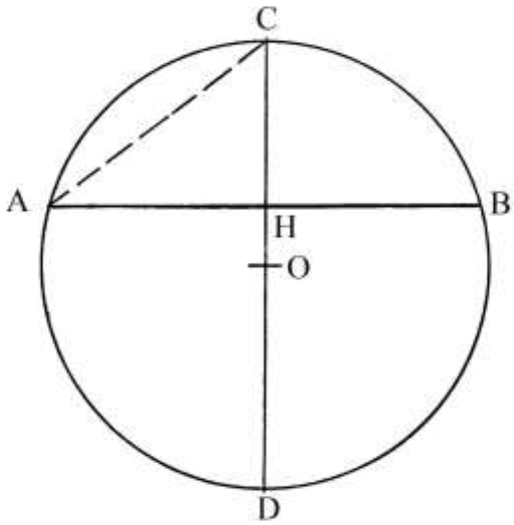


Per disegnare il cerchio occorre calcolare la lunghezza del suo diametro.
La procedura usata dall'Autore è la seguente:

* dividere per 2 la lunghezza della corda: $4/2 = 2$;
* moltiplicare per sé stessa: $2*2 = 4$;
* dividere per la lunghezza della freccia: $4/(1 + ½) = 8/3 = (2 + 2/3)$;
* sommare alla lunghezza della freccia: $(2 + 2/3) * (1 + ½) = (4 + 1/6)$ braccia,

lunghezza del diametro del cerchio.

L'Autore ha applicato il *teorema delle corde*:



Esso è espresso dalla proporzione:

$CH : AH = HB : HD$,

$CH : AH = AH : HD$, da cui

$HD = AH^2/CH$, per cui applicandola al caso concreto si ha:

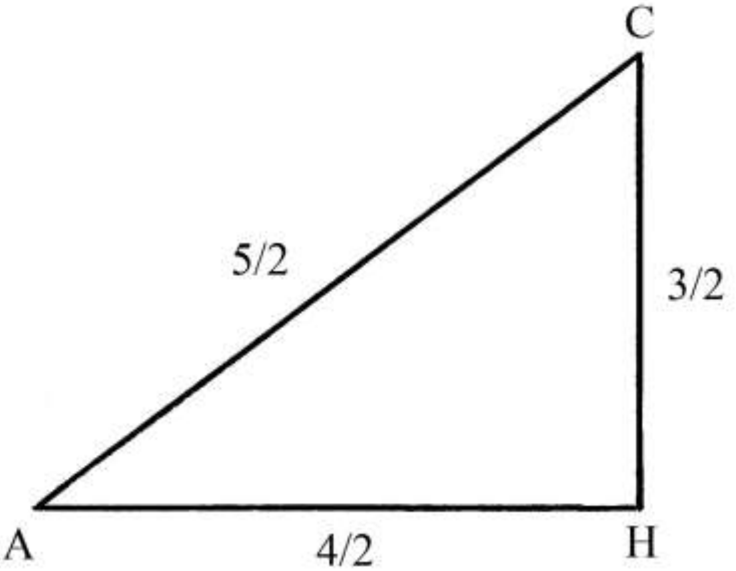
$HD = (AB/2)^2/(CH) = (4/2)^2/(1 + ½) = 4/(1 + ½) = (2 + 2/3/$ braccia.

Il diametro CD è lungo:

$CD = CH + HD = (1 + ½) + (2 + 2/3) = (4 + 1/6)$ braccia.

Il teorema delle corde era già stato impiegato da Paolo dell'Abbaco alla soluzione di problemi simili.

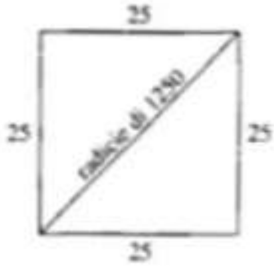
Per la precisione, il triangolo ACH è rettangolo e i suoi lati hanno lunghezze proporzionali ai componenti della terna primitiva 3-4-5:



<u>Diagonale di un quadrato</u>

Il problema è così presentato nel testo originale:

E gl'è 1 quadro che è per ogni verso lungo e largho 25 braccia. Domando quanto si' il suo diamitro. Defi così fare. Dei multiplicare la lunghessa per se medesmo, cioè 25 via 25: fa 625. Hora dei multiplicare la larghessa per se medesmo, cioè 25 via 25: fa 625. Ora dei giungiere insieme 625 e 625: fa 1250 e la radice di 1250 si' il suo diamitro o voglamo dire linea. E nota: quando chiami alcuna cosa quadra, s'intende che sia tanto lungha come largha. E nota: siando chosì, si chiamere' bislunga ogni volta che fusse più lungha che largha.



La soluzione è corretta.

La presentazione del problema si conclude con una citazione: il *bislungo*, termine che nei dialetti toscani usati dai maestri d'abaco significava *rettangolo formato da due quadrati identici*. Fra gli Autori che usarono questo termine con il significato di rettangolo doppio quadrato vanno citati Paolo Gherardi, Paolo dell'Abbaco e Tommaso della Gazzaia.

Quadrato data la diagonale

Un quadrato ha le diagonali lunghe 25 braccia. Deve essere calcolata la lunghezza dei lati.

La soluzione è:

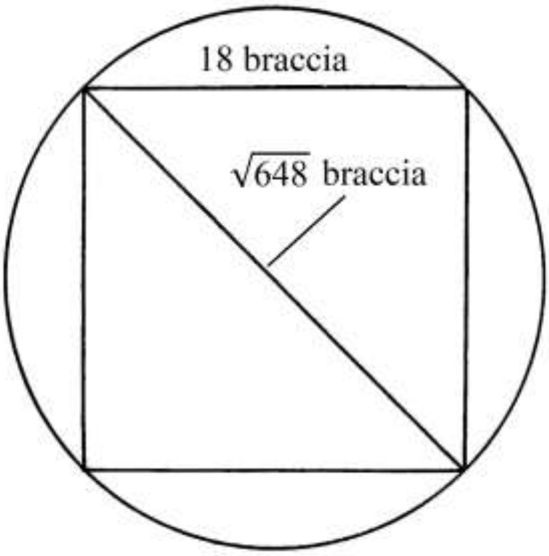
* moltiplicare la lunghezza della diagonale per sé stessa: $25*25 = 625$;
* dividere per 2: $625/2 = (312 + ½)$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{(312 + ½)}$ braccia, lunghezza dei lati.

L'Autore non estrare la radice quadrata: la lunghezza dei lati vale ≈ 17,678 braccia.

Cerchio circoscritto a un quadrato

Un quadrato ha lati lunghi 18 braccia e deve essere inscritto nel cerchio più piccolo possibile.

Il problema domanda la lunghezza del diametro del cerchio.

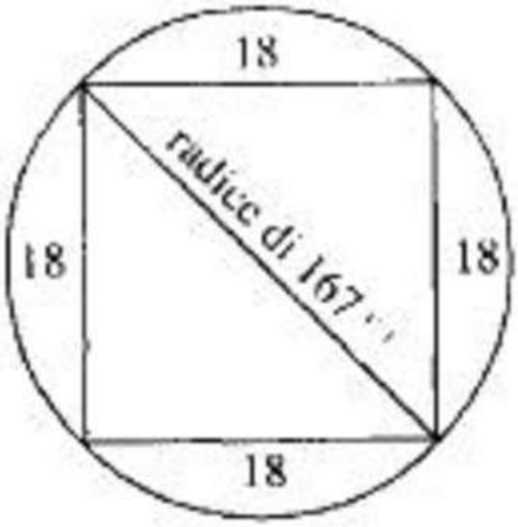


La procedura è semplice:

* moltiplicare la lunghezza di un lato per sé stessa: $18*18 = 324$;
* moltiplicare per 2: $324 * 2 = 648$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{(648)}$ braccia, lunghezza del diametro e della diagonale del quadrato.

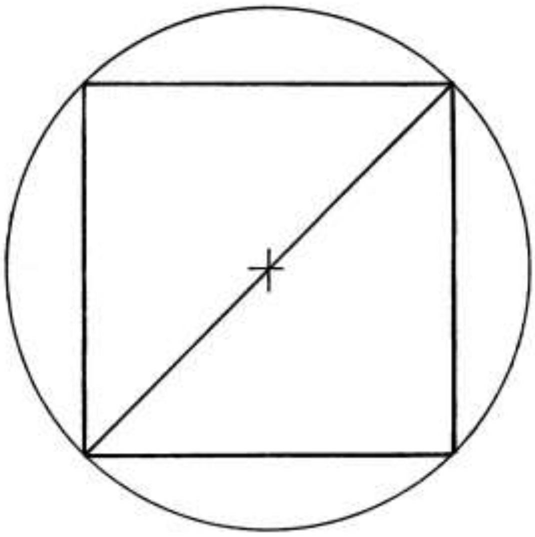
Come ha fatto nella soluzione di molti problemi, l'Autore non estrae la radice quadrata.

Inoltre, nel suo schema indica un valore errato per la lunghezza del diametro: $\sqrt{(167 +}$ illeggibile) invece di $\sqrt{648}$:



<u>Cerchio circoscritto a un quadrato</u>

Un quadrato ha lati lunghi 15 braccia. Il problema chiede di calcolare il diametro del cerchio.

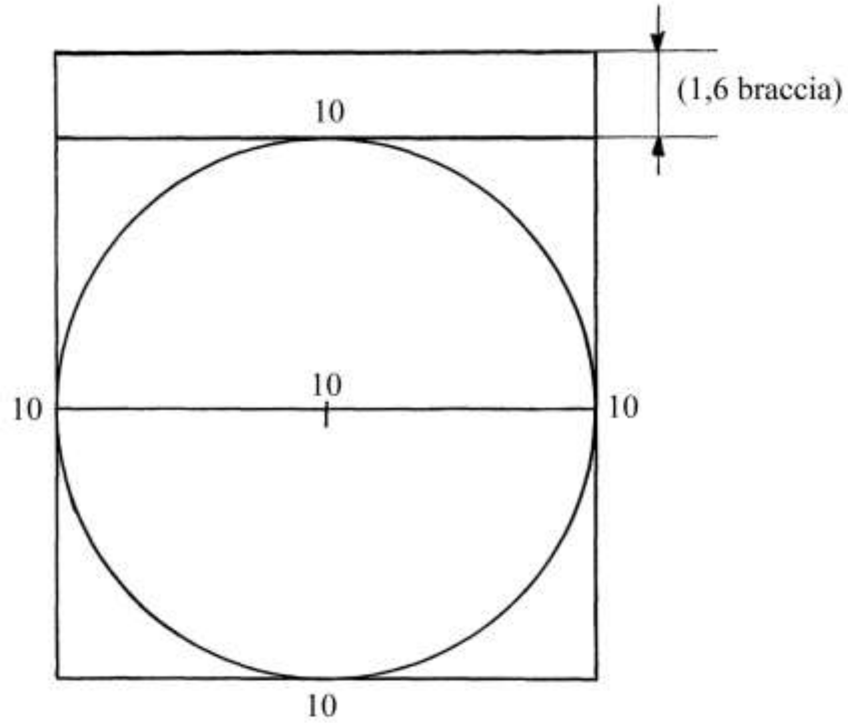


La soluzione è:

* moltiplicare la lunghezza di un lato del quadrato per sé stessa: 15*15 = 225;
* moltiplicare per 2: 225*2 = 450;
* estrarre la radice quadrata: √450 braccia, lunghezza del diametro del cerchio circoscritto e di una diagonale del quadrato.

<u>Cerchio inscritto in un quadrato</u>

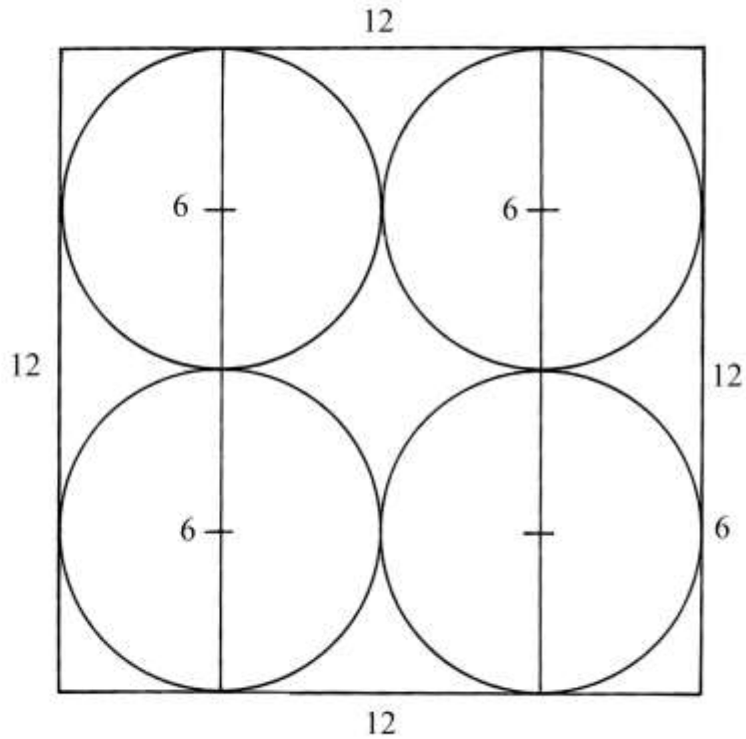
Un quadrato ha lati lunghi 10 braccia e deve esservi inscritto il più grande cerchio possibile. La figura usata dall’Autore è un po’ strana, perché il quadrato è sovrastato da una striscia rettangolare che ha larghezza corrispondente a 1,6 braccia e non è chiaro a che cosa essa equivalga:



La soluzione è ovvia: la lunghezza del diametro del cerchio è uguale a quella di un lato del quadrato.

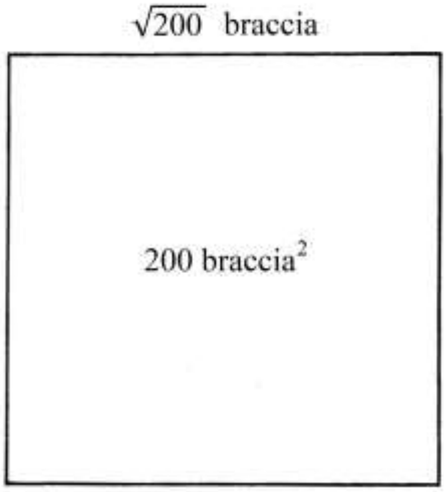
<u>Cerchi inscritti in un quadrato</u>

Un quadrato ha lati lunghi 12 braccia e devono esservi inscritti quattro cerchi: per massimizzare lo sfruttamento dello spazio disponibile è evidente che essi sono quattro, di uguali dimensioni e con diametro lungo 12/2 = 6 braccia:



Lunghezza incognita dei lati di un quadrato

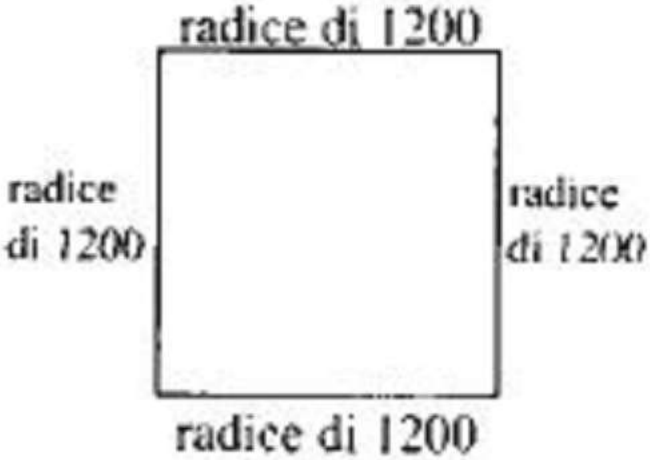
Un quadrato ha area 200 braccia^2:



I suoi lati sono lunghi:

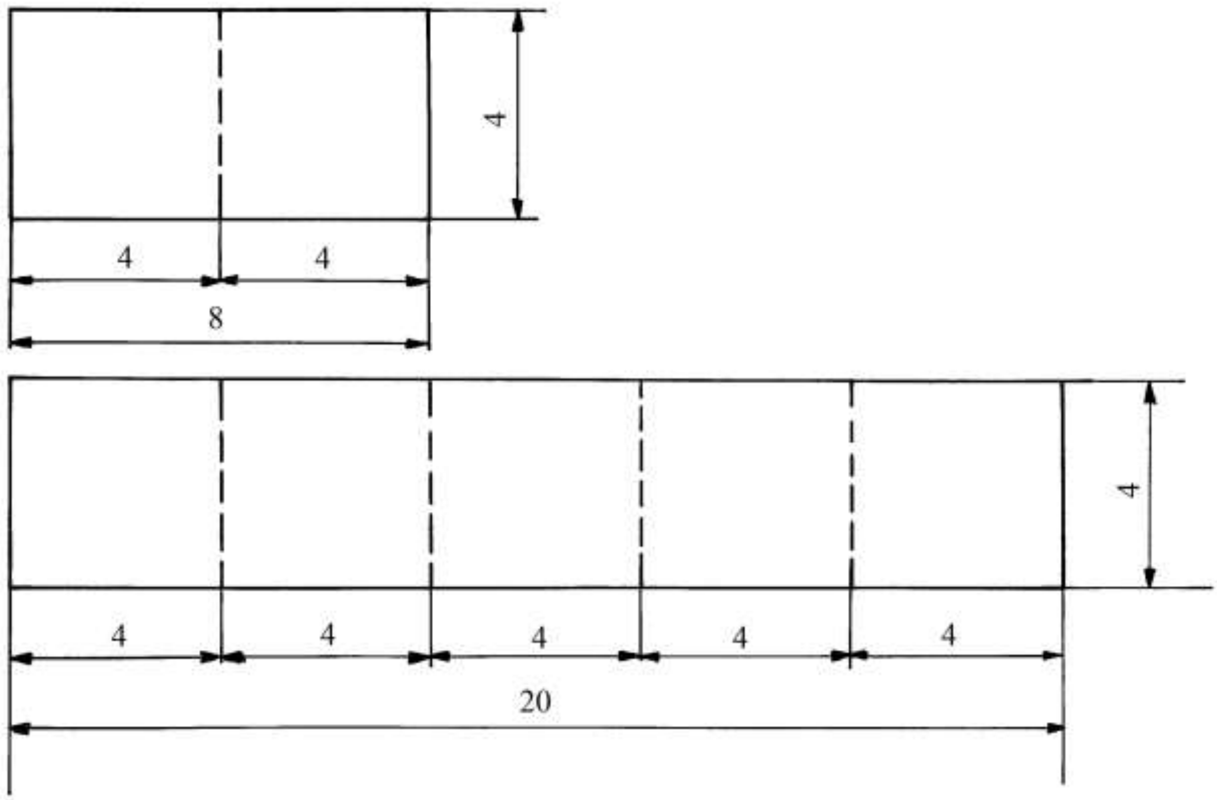
lati = √200 .

Il disegno contenuto nel manoscritto è errato perché su tutti i lati indica la lunghezza uguale a √(1200):



Rettangolo o bislungo

Un *bislungho* è lungo 20 braccia ed è largo 4: l'Autore attribuisce questo nome a un rettangolo formato da ben 5 quadrati.

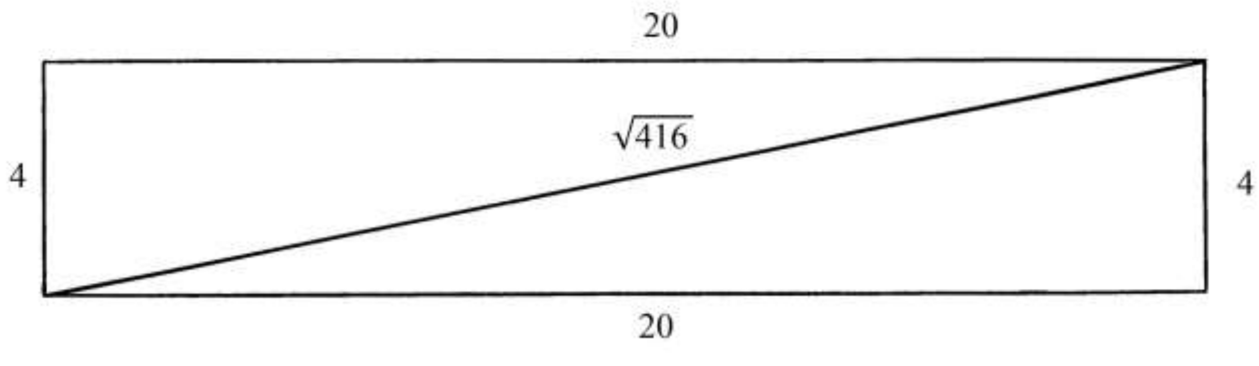


In alto è mostrato un originario *bislungo* formato da due quadrati di uguali dimensioni uniti lungo un lato; in baso è il *bislungho* dell'Anonimo.

Il problema chiede di calcolare la lunghezza di un suo *diametro* e cioè di una diagonale.

Per il teorema di Pitagora:

diagonale = $\sqrt{(20^2 + 4^2)} = \sqrt{416}$ braccia.

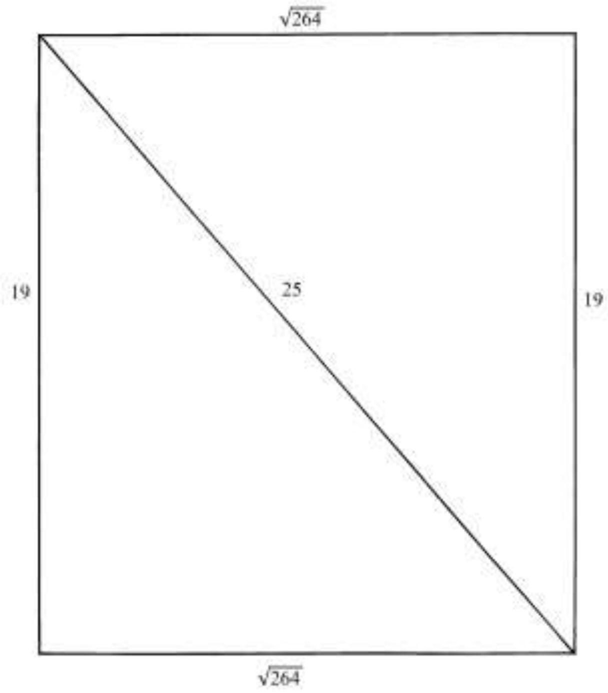


<u>Altro bislungo</u>

Un secondo bislungo ha il lato maggiore lungo 19 braccia e una diagonale è 25 braccia. Deve essere calcolata la lunghezza del lato più corto.

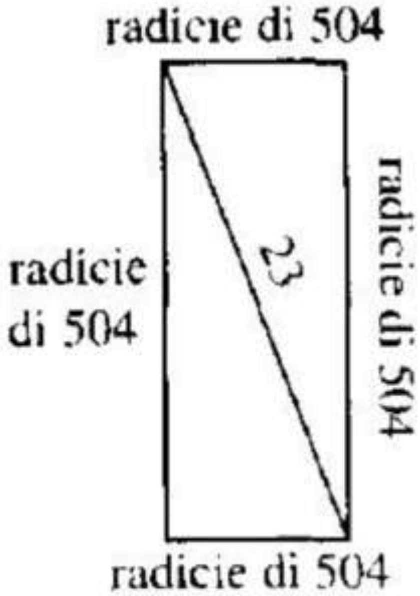
Anche in questo caso, la soluzione è data dall'applicazione del teorema di Pitagora:

lato corto = $\sqrt{(\text{diagonale}^2 - \text{lato lungo}^2)} = \sqrt{(25^2 - 19^2)} = \sqrt{(625 - 361)} = \sqrt{264}$ braccia, lunghezza del lato più corto.



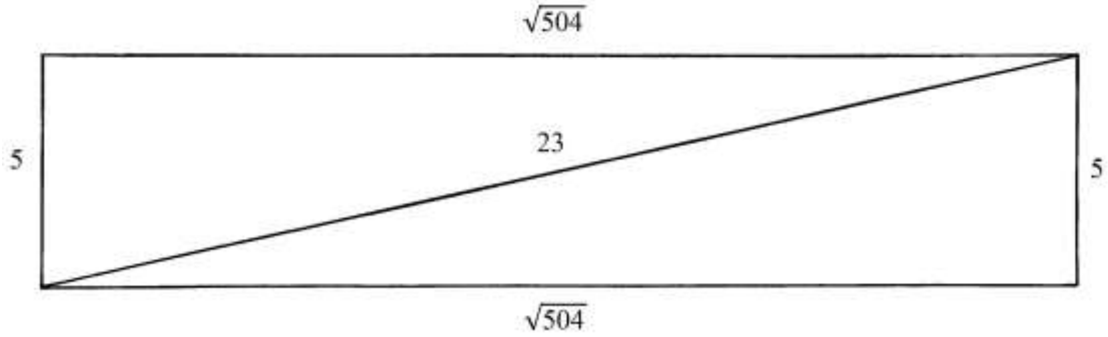
<u>Terzo bislungo</u>

Un terzo bislungo ha la diagonale lunga 23 braccia e il lato più corto è 5.
Lo schema originale è errato:



Deve essere calcolata la lunghezza del lato maggiore del rettangolo. La soluzione è data da:

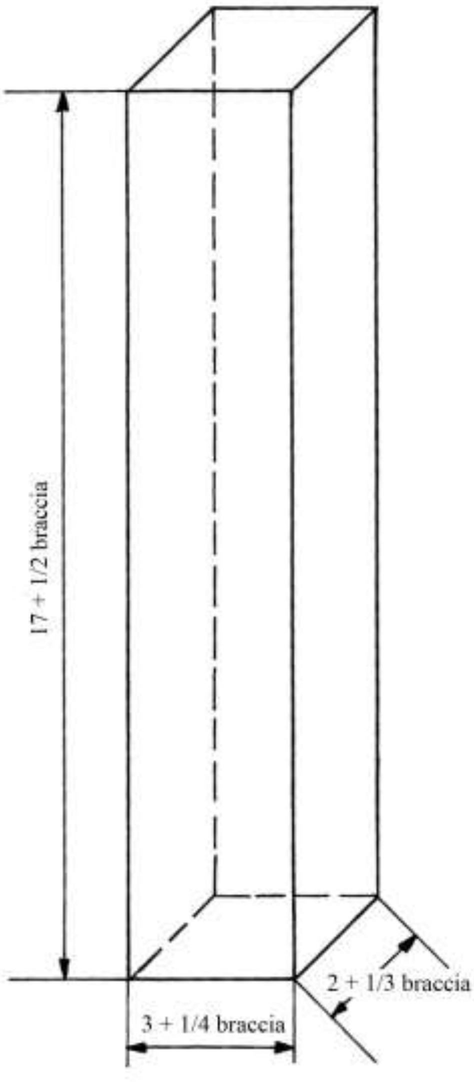
lato maggiore = $\sqrt{(\text{diagonale}^2 - \text{lato corto}^2)} = \sqrt{(23^2 - 5^2)} = \sqrt{(529 - 25)} = \sqrt{504}$ braccia.



Pozzo rettangolare

Il problema presenta un pozzo con sezione rettangolare di dimensioni (3 + ¼) per (2 + 1/3) braccia e profondo (17 + ½) braccia.

È chiesto il volume del pozzo da usare per contenere olio, acqua o vino, espresso in *corbe*.



La procedura prevede i seguenti passi:

* moltiplicare la lunghezza per la lunghezza della sezione del pozzo: (3 + ¼)*(2 + 1/3) =
= 91/12 = (7 + 7/12) braccia^2, area;

*	moltiplicare l'area per la profondità del pozzo:

$$91/12 * (17 + ½) = (132 + 17/24) \text{ braccia}^3, \text{ volume del pozzo}$$

[per misurare il volume l'Autore usa l'unità di misura "*braccia*" senza alcuna qualificazione, ma trattasi di braccia cubiche];

*	moltiplicare il volume per 3: (132 + 17/24) * 3 = (398 + 1/8) *corbe*.

Pozzo quadrato

Deve essere costruito un pozzo a base rettangolare [che l'Autore definisce "*quadro*"] che contenga 1000 *corbe* di olio.

La sezione orizzontale ha dimensioni (2 + ¾) per (3 + 1/6) braccia.

Il problema chiede di calcolare la sua profondità.

La soluzione è la seguente:

*	dividere il volume in *corbe* per 3: 1000/3 = (333 + 1/3) braccia^3;
*	moltiplicare le due dimensioni della sezione orizzontale:

$$(2 + ¾) * (3 + 1/6) = 209/24 = (8 + 17/24) \text{ braccia}^2, \text{ area};$$

*	dividere il volume espresso in braccia^3 per l'area:

$$(333 + 1/3)/(8 + 17/24) = (38 + 58/209) \text{ braccia, profondità del pozzo.}$$

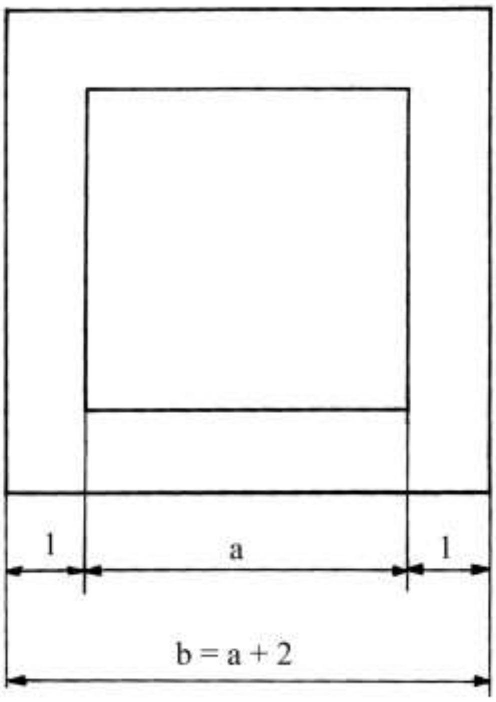
Torre a base quadrata

Una torre a base quadrata ha perimetro interno lungo (22 + ¼) braccia e lo spessore *s* del muro è (2 + 1/3) braccia.

Il problema chiede di calcolare il perimetro del quadrato esterno.

La questione è stata affrontata in precedenza nel paragrafo "*Poligoni e cerchi concentrici*".

Il principio che l'Autore richiama è: se aumenta di 1 braccio lo spessore del muro, aumenta di 8 braccia il perimetro del quadrato.



Infatti, se *a* è la lunghezza del lato del quadrato interno, il suo perimetro è:

$p_{INTERNO} = 4 * a$.

Il lato del quadrato esterno *b* è lungo:

$b = 1 + a + 1 = a + 2$.

Il suo perimetro vale:

$p_{ESTERNO} = 4 * b = 4 * (a + 2) = 4*a + 8 = p_{INTERNO} + 8$.

Nel caso del problema in esame risulta:

$p_{INTERNO}$ = (22 + ¼) braccia

spessore muro = *s* = (2 + 1/3) braccia

$p_{ESTERNO} = p_{INTERNO} + 8*s$ = (22 + ¼) + 8 * (2 + 1/3) = (40 + 11/12) braccia.

<u>Spessore del muro di una torre</u>

Il problema è inverso rispetto al precedente.

Una torre a base quadrata ha perimetro esterno lungo 50 braccia e perimetro interno (29 + 1/3) braccia.

Deve essere ricavato lo spessore del muro.

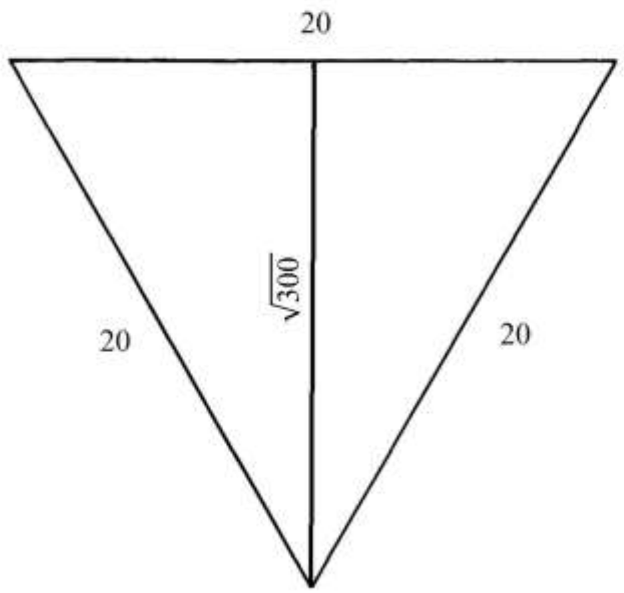
La soluzione prevede i seguenti passi:

* sottrarre la lunghezza del perimetro interno da quella del perimetro esterno: (50 – (29 + 1/3) = (20 + 2/3);
* dividere per 8: (20 + 2/3)/8 = (2 + 7/12) braccia, spessore del muro.

<u>Triangolo equilatero</u>

Uno *scudo*, termine usato per indicare un triangolo, ha lati (le *facce*) di uguale lunghezza: 20 braccia.

Il problema chiede di calcolare il *diametro* o *linea* e cioè l'*altezza*.



La soluzione è:

* moltiplicare per sé stessa la lunghezza di un lato: 20*20 = 400;
* moltiplicare per ¾: 400 * ¾ = 300;
* estrarre la radice quadrata: √300 braccia, altezza del triangolo equilatero.

Come ha spesso fatto, l'Autore non riduce la radice quadrata, infatti:

$\sqrt{300} = 10 * \sqrt{3}$.

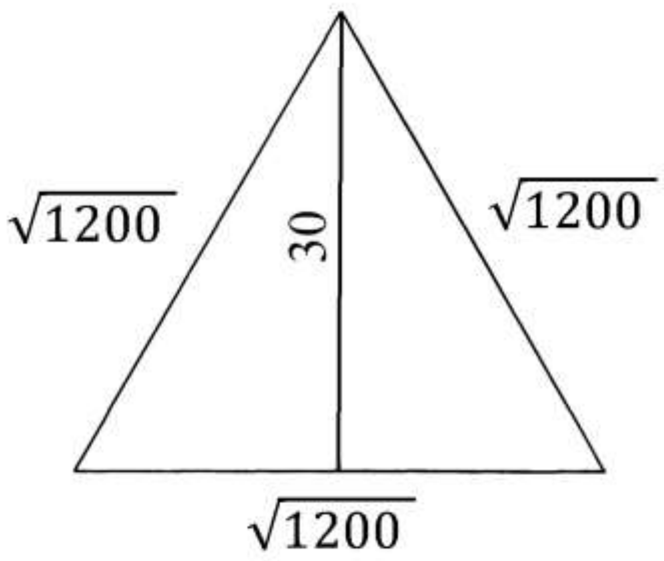
La procedura impiegata, peraltro corretta, può essere sintetizzata come segue:

$$\text{altezza} = \sqrt{[\text{lato}^2 - (\text{lato}/2)^2]} = \text{lato} * \sqrt{[(4-1)/4]} = 20 * \sqrt{(3)}/2 = 10 * \sqrt{3}\ .$$

Triangolo equilatero di cui è nota l'altezza

Un triangolo equilatero ha *diamitro* (e cioè *altezza*) lungo 30 braccia.

Il problema chiede di calcolare la lunghezza dei lati:



La soluzione è la seguente:

* moltiplicare la lunghezza dell'altezza per sé stessa: 30*30 = 900;
* dividere per 3: 900/3 = 300;
* sommare con 900: 300 + 900 = 1200;
* estrarre la radice quadrata: √1200 braccia, lunghezza dei lati.

Ma √1200 può essere semplificata come segue:

$$\sqrt{1200} = \sqrt{(3 * 400)} = \sqrt{(3 * 20^2)} = 20 * \sqrt{3} \text{ braccia.}$$

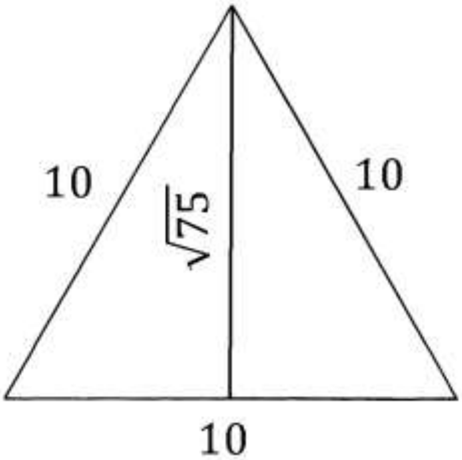
La procedura può essere riassunta nella formula che segue, con ℓ, lunghezza del lato, e h dell'altezza:

$$h^2 = [\ell^2 - (\ell/2)^2] = \tfrac{3}{4} * \ell^2, \text{ da cui}$$
$$\ell^2 = 4/3 * h^2$$
$$\ell = \sqrt{(4/3 * 30^2)} = \sqrt{1200}.$$

Area di un triangolo equilatero

Un triangolo equilatero ha lati lunghi 10 braccia.

Il problema chiede di calcolare la sua area.



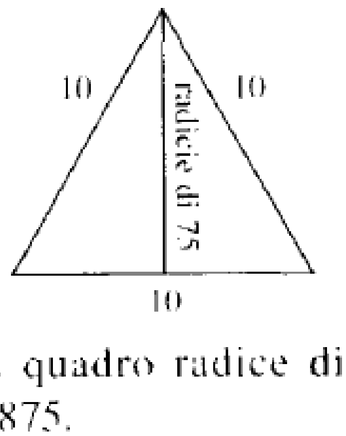
La soluzione contiene i seguenti passi:

* moltiplicare la lunghezza di un lato per sé stessa: $10*10 = 100$;
* moltiplicare per ¾: $100 * ¾ = 75$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{(75)}$ [$= 5*\sqrt{3}$] braccia, altezza del triangolo;
* moltiplicare la lunghezza di un lato per la metà di quella dell'altezza:

$10 * (\sqrt{75})/2 = 5 * \sqrt{75}$ [$= 25 * \sqrt{3}$] braccia^2, area del triangolo.

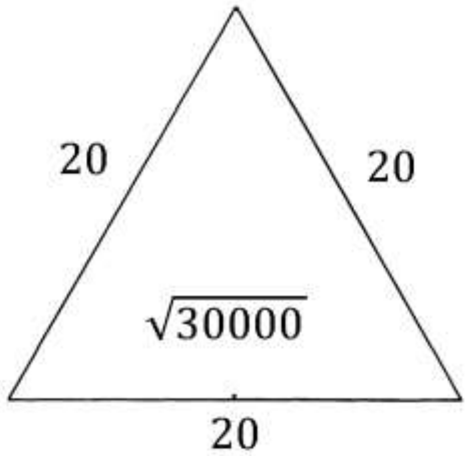
L'Autore ha inutilmente complicato i calcoli portando "10/2 = 5" all'interno della radice quadrata. Essa può essere facilmente semplificata come segue:

$5 * \sqrt{75} = \sqrt{(5^2 * 75)} = \sqrt{1875} = \sqrt{(3 * 625)} = \sqrt{(3 * 25^2)} = 25 * \sqrt{3}$.



<u>Area di un triangolo equilatero</u>

Un triangolo equilatero ha lati lunghi 20 braccia. Deve esserne calcolata l'area.



La soluzione adottata utilizza la nota formula di Erone per il calcolo dell'area di un triangolo generico, senza citarla espressamente e senza fare alcun riferimento allo stesso Erone.

Ecco i passi della procedura:

* sommare le lunghezze dei tre lati: 20 + 20 + 20 = 60 braccia [perimetro];
* dividere per 2: 60/2 = 30 braccia [semiperimetro];
* sottrarre la lunghezza di un lato dall'ultimo quoziente: 30 – 20 = 10;
* moltiplicare in successione la lunghezza di ciascun lato per 10:
  30 * 10 = 300;
  300 * 10 = 3000;
  3000 * 10 = 30000;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{30000}$ braccia^2, area del triangolo equilatero.

L'Autore non ha semplificato il risultato:

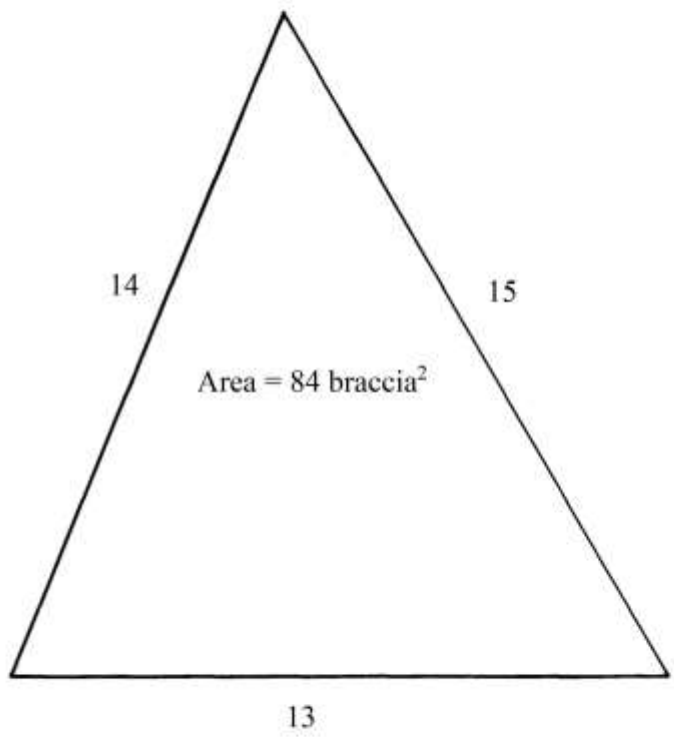
$$\sqrt{30000} = \sqrt{(3 * 10000)} = 100 * \sqrt{3}.$$

Chiamando *2*p* il perimetro, con *p* il semiperimetro e con *ℓ* la lunghezza di un lato, la procedura è riassunta con la formula di Erone:

$$\text{Area}_{\text{TRIANGOLO}} = \sqrt{[p*(p-\ell)*(p-\ell)*(p-\ell)]} = \sqrt{[p * (p-\ell)^3]}.$$

Il triangolo 13-14-15

Questo triangolo scaleno è un classico di tutti trattati d'abaco che contengono capitoli dedicati alla geometria pratica. Fra i primi a studiarne le proprietà fu Erone di Alessandria (I secolo d.C.). Una sua interessante proprietà è quella di avere le lunghezze dei lati, il perimetro, il semiperimetro e l'area espressi da numeri interi.



Il triangolo ha lati lunghi 13, 14 e 15 braccia, con lunghezze in progressione aritmetica di ragioni uno.

Il problema chiede la sua area.

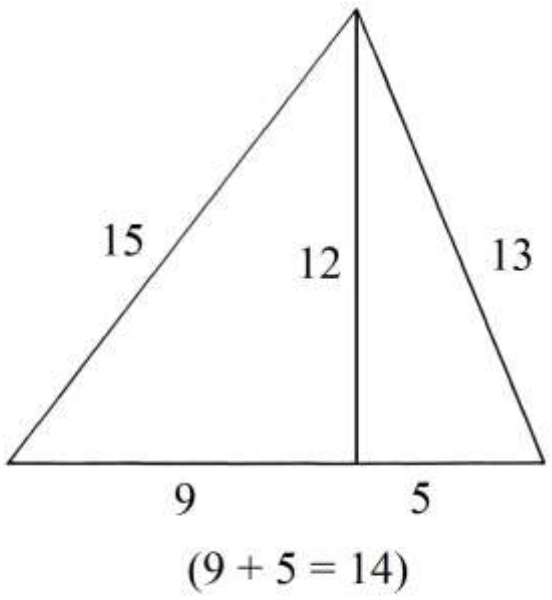
L'Autore applica di nuovo la già citata formula di Erone.

La procedura riprende i passi usati per risolvere il precedente problema:

* sommare le lunghezze dei tre lati: 13 + 14 + 15 = 42;
* dividere per 2: 42/2 = 21;
* sottrarre da 21 la lunghezza del lato più corto: 21 – 13 = 8;
* sottrarre da 21 la lunghezza del secondo lato: 21 – 14 = 7;
* infine, sottrarre da 21 la lunghezza del terzo lato: 21 – 15 = 6;
* moltiplicare in successione:
  21 * 8 = 168;
  168 * 7 = 1176;
  1176 * 6 = 7056;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{7056}$ = 84 braccia^2, area del triangolo [in questo caso l'Autore ha risolto la radice quadrata].

Questo triangolo avrebbe meritato una descrizione delle sue interessanti proprietà: l'altezza relativa al lato lungo 14 lo divide in due triangoli rettangoli scaleni:

* un triangolo con lati lunghi 5, 12 e 13;
* un triangolo con lati lunghi 9, 12 e 15.



Il primo triangolo ha lati lunghi quanto la seconda terna primitiva, mentre il secondo ha lati lunghi secondo un multiplo 3 della prima terna primitiva e cioè 3*(3-4-5) = (9-12-15).

Con la tracciatura dell'altezza relativa al lato lungo 14, la soluzione del problema sarebbe risultata più semplice:

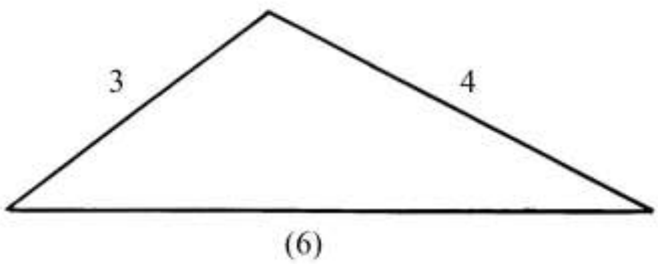
$$\text{Area}_{\text{TRIANGOLO}} = (\text{lato} * \text{altezza})/2 = (14 * 12)/2 = 84 \text{ braccia}^2.$$

<u>Triangolo 30-20-10</u>

Si tratta di un triangolo impossibile perché la somma delle lunghezze dei due lati più corti (10 e 20) deve superare la lunghezza del lato maggiore (30).

<u>Lato incognito di un triangolo</u>

Un triangolo ha due lati lunghi rispettivamente 3 e 4 braccia e area uguale a 6 braccia^2.



Il problema chiede la lunghezza del terzo lato.

L'Autore applica di nuovo la formula di Erone sull'area dei triangoli, introducendo un'incognita che, secondo l'usanza degli abacisti medievali, chiama *cosa*.

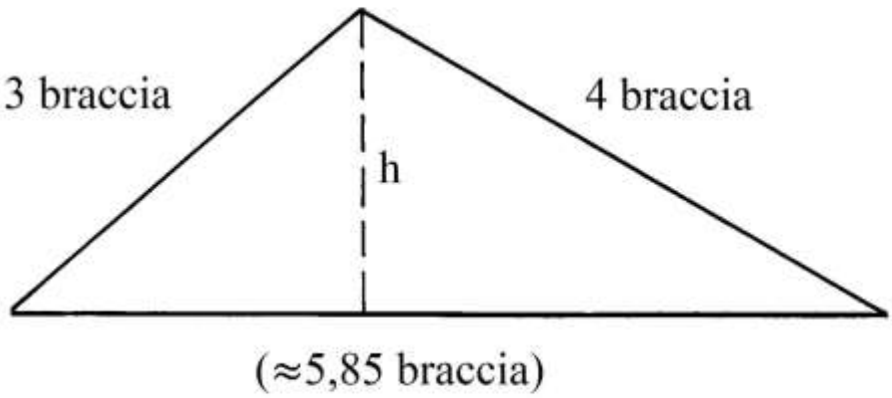
La soluzione offerta dall'Autore è errata perché il terzo lato non può essere lungo 6 braccia. Verifichiamo il suo risultato:

* il perimetro *2*p* è: 3 + 4 + 6 = 13;
* il semiperimetro *p* è: 13/2 = 6,5 (o 6 + ½);

*	la formula di Erone dà:

$$\text{Area}_{\text{TRIANGOLO}} = \sqrt{[p*(p-3)*(p-4)*(p-6)]} = \sqrt{[6{,}5*(6{,}5-3)*(6{,}5-4)*(6{,}5-6)]} =$$
$$= \sqrt{(6{,}5 * 3{,}5 * 2{,}5 * 0{,}5)} = \sqrt{(28{,}4375)} \approx 5{,}33268 \text{ braccia}^2.$$

Con ogni probabilità, il triangolo che ha due lati lunghi 3 e 4 braccia e area uguale a 6 braccia^2, ha il lato incognito lungo ≈ 5,85 braccia e un'altezza ad esso relativa più lunga di quella calcolabile per il triangolo dell'Anonimo:

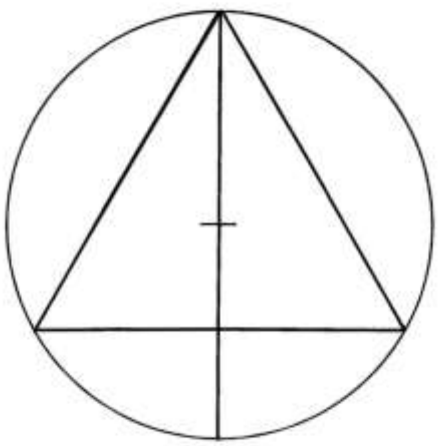


L'altezza *h* del secondo triangolo vale:

$$h = 2 * \text{Area}_{\text{TRIANGOLO}}/\text{lato base} = 2 * 6/5{,}85 \approx 2{,}05 \text{ braccia}.$$

<u>Cerchio circoscritto a un triangolo equilatero</u>

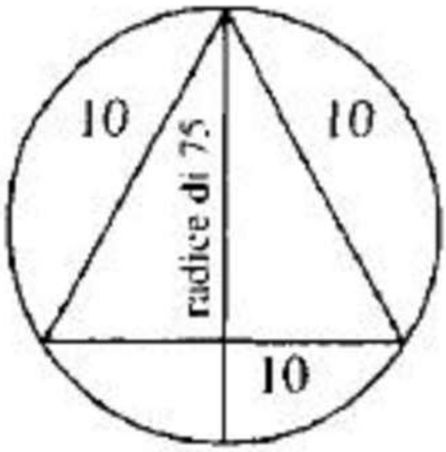
Un triangolo equilatero ha lati lunghi 10 braccia. Deve essere inscritto nel più piccolo cerchio possibile e il problema chiede di calcolarne il diametro.



La soluzione contiene i seguenti passi:

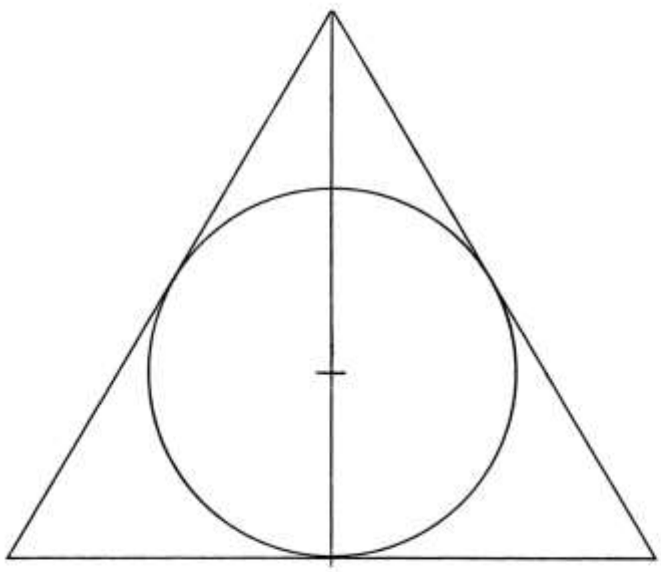
*	moltiplicare la lunghezza di un lato per sé stessa: 10*10 = 100;
*	dividere per 3: 100/3;
*	sommare a 100: 100 + 100/3 = (133 + 1/3);
*	estrarre la radice quadrata: √(133 + 1/3) [≈ 11,547] braccia, diametro del cerchio.

Sulla figura originale è pure indicata l'altezza del triangolo equilatero, con il corretto valore di √75:



Cerchio inscritto in un triangolo equilatero

Un triangolo equilatero ha lati lunghi √48 braccia. Deve esservi inscritto il cerchio più grande possibile:



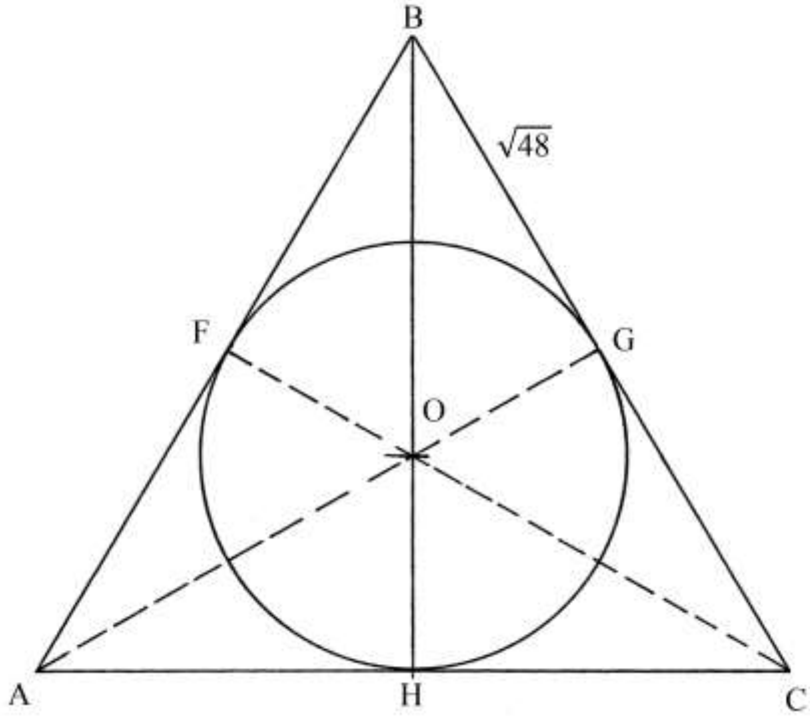
La procedura risolutiva è:

*	moltiplicare per sé stessa la lunghezza di un lato:	√48 * √48 = 48;
*	dividere per 3:	48/3 = 16;
*	estrarre la radice quadrata:	√16 = 4 braccia, diametro

del cerchio inscritto.

Verifichiamo la correttezza della procedura.

I punti di tangenza fra il triangolo equilatero e il cerchio sono tre e sono i *piedi* delle tre altezze: F, G e H.



Il punto O è collocato a distanza di 2/3 * BH dal punto B e a 1/3 * BH da H.

Nel triangolo equilatero le altezze coincidono con le bisettrici dei tre angoli interni, con le mediane e con gli assi dei tre lati.

Il punto O è:

* ortocentro, perché è l'incontro delle tre altezze;
* incentro, quale intersezione delle bisettrici e centro del cerchio inscritto;
* baricentro, perché è l'incrocio delle tre mediane.

In questo triangolo le bisettrici si tagliano reciprocamente in due segmenti proporzionali a *due* e a *uno*.

A questo stadio dobbiamo calcolare la lunghezza di BH:

$BH^2 = AB^2 – AH^2 = (\sqrt{48})^2 – [\sqrt{(48)}/2]^2 = 48 – 48/4 = 48 – 12 = 36$, da cui:

$BH = \sqrt{36} = 6$ braccia.

Il raggio del cerchio, OH, è lungo:

OH = 1/3 * BH = 1/3 * 6 = 2 braccia.

Il diametro *d* del cerchio è:

d = 2 * OH = 2 * 2 = 4 braccia.

La procedura usata dall'Anonimo è corretta.

<u>Triangolo equilatero di area nota</u>

Un triangolo equilatero ha area uguale a 200 braccia^2. Deve essere calcolata la lunghezza dei lati.

L'Autore applica, all'inverso, la formula di Erone, senza mai citarla e citarlo.

La lunghezza cercata è l'incognita *x*.

La soluzione è:

* sommare le lunghezze dei tre lati: x + x + x = 3*x [= 2*p], perimetro;

*	dividere per 2:	$(3*x)/2$ [= p], semiperimetro;

*	risolvere l'equazione:

$A_{\text{TRIANGOLO}} = \sqrt{[p*(p - x)*(p - x)*(p-x)]}$

$200 = \sqrt{[3*x/2 * (3*x/2 - x) * (3*x/2 - x) * (3*x/2 - x)]}$

$200 = \sqrt{\{3*x/2 * [(3*x - 2*x)2]^3\}}$.

$200 = \sqrt{(3*x/2 * x^3/8=}$

$200 = \sqrt{(3*x^4/16)}$

$200^2 = 3/16 * x^4$

$40000 = 3/16 * x^4$

$x^4 = 40000*16/3$

$x^4 = 640000/3$

$x^4 = (213333 + 1/3)$

La soluzione dell'equazione è $x \approx 21{,}49$ braccia.

L'Autore indica come risultato:

lato = $\sqrt{(21333 + 1/3)}$, ma la soluzione esatta è:

$$\sqrt[4]{(213333 + 1/3)}$$

Una soluzione più alla portata dell'Anonimo è la seguente:

*	porre $x^2 = y$;

*	ne consegue: $x^4 = y^2$ e $y^2 = (213333 + 1/3)$, da cui:

*	$y = \sqrt{(21333 + 1/3)}$;

*	$x = \sqrt{y}$.

Bibliografia

1. Anonimo (sec. XV), “Libro di conti e mercatanzie”, dal Ms. Pal. 312 della Biblioteca Palatina di Parma, a cura e con introduzione di Silvano Gregori e Lucia Grugnetti, Università degli Studi di Parma, Parma, 1998, pp. XV+133.
2. Høyrup Jens, “What Did the Abbacus Teachers Really Do When (Sometimes) Ended Up Doing Mathematics?”, Roskilde University, Copenaghen, 2007, pp. 27.
3. Lopes Pegna Mario, “Firenze dalle origini al Medioevo”, Firenze, Del Re, seconda edizione, 1974, pp. 459.
4. Martini Angelo, “Manuale di Metrologia: ossia Misure, Pesi e Monete in Uso Attualmente e Anticamente presso Tutti i Popoli”, Loescher, Torino-Roma-Firenze, 1883, pp. VIII-904.
5. Zupko Ronald Edward, “Italian Weights and measures from the Middle Ages to the Nineteenth Century”, Philadelphia, American Philosophical Society, 1981, pp. lxxxiv+339.