sergio(punto)calzolani(at)outlook(punto)it

Parole chiave: geometria Babilonesi, tavolette di argilla, approssimazioni di π (3 e 3,125), sistema sessagesimale, costanti geometriche, numeri periodici, unità di misura lineari e di superficie dei Sumeri e dei Babilonesi, area cerchio, area semicerchio, area triangoli, area rombo, aree figure piane, aree lunule e lenti, area segmenti circolari, quadrato concavo, triangolo equilatero concavo, terne babilonesi, tavolette matematiche di Susa, aree di poligoni regolari inscritti, rapporti la geometria di Erone, contatti con la civiltà dell'Indo.

Note: 1. questo articolo ha finalità esclusivamente divulgative. Per approfondire gli argomenti è utile consultare i testi citati nella bibliografia.
2. Sono affrontati solo problemi di *geometria piana*.

COSTANTI GEOMETRICHE BABILONESI

Più di 2000 fra le almeno 500.000 tavolette mesopotamiche di argilla recuperate in Iraq, Siria e Iran sono di contenuto matematico, geometrico, aritmetico, astronomico o metrologico.

Nelle tavolette matematiche di contenuto geometrico sono usate numerose differenti *costanti geometriche*, per definire i rapporti quali quello fra la diagonale e il lato di un quadrato, quello fra l'altezza e il lato di un triangolo equilatero e quelle intercorrenti nel cerchio e nella circonferenza.

Secondo Maurice Caveing (p. 20 del suo testo) i testi matematici babilonesi possono essere distinti in due classi:

a) tavolette con le costanti numeriche;
b) tavolette contenenti enunciati di problemi accompagnati o non dalle soluzioni.

Questa seconda classe è a sua volta scomponibile in tre sottoclassi:

1. Problemi che riguardano lavori di terrazzamento, di irrigazione, di costruzioni e di questioni commerciali o finanziarie;
2. Problemi geometrici relativi a figure piane o solide, per essere risolti richiedono dei calcoli;
3. Problemi che risolvono equazioni espresse in termini numerici.

Alcune tavolette contengono problemi strutturati secondo uno stile ben definito:

* i dati inziali sono enunciati usando la prima persona al singolare;
* per le successive operazioni da effettuare per risolvere il problema è usata la seconda persona.

La procedura babilonese è riapparsa, oltre tre millenni dopo, nei trattati degli abacisti toscani del Medioevo: anch'essi proponevano le soluzioni dei problemi indicando in rigorosa successione le operazioni da compiere.

I pioneri: Neugebauer e Thureau-Dangin

Una citazione dall'importante studio storico di George Gheverghese Joseph (a pagina 105 dell'edizione italiana):

"La scrittura cuneiforme dei Sumeri fu decifrata già verso -la metà del XIX secolo grazie agli sforzi di due pionieri, George Frederick Grotefend (1775-1853) e Henry Creswicke Rawlinson (1810-1895), ma i testi furono oggetto di studi sistematici solo a partire dal 1930. Questo ritardo può essere in parte spiegato con i metodi diversi che un matematico e un filologo utilizzano nell'approccio alla letteratura primitiva. Il matematico solitamente, a meno che non si trovi in presenza di un testo che si situa entro i limiti dl ciò che viene percepito come "matematica", ha poco tempo per il passato; è raro cieli desiderio di conoscenza storica venga risvegliato dall'insegnamento della matematica. Il filologo cerca di far rivivere il passato per indagare sull'ascesa e sul declino delle antiche civiltà; d'altra parte se non è provvisto di una preparazione specifica, ha raramente interesse per la matematica antica. Perciò i testi matematici babilonesi rimasero indecifrati e non interpretati fino all'opera pionieristica di Otto Neugebauer, che pubblicò la sua *Mathematische Keilschrift-Texte* in tre volumi nel periodo 1935- 1937, e di François Thureau-Dangin, la cui opera completa, intitolata *Textes mathématiques babyloniens,* fu data alle stampe nei 1938. Da quel momento le nuove testimonianze e le interpretazioni hanno continuato a essere pubblicate anche in anni recenti…".

- APPROFONDIMENTO -

Che cosa è l'Assiriologia

Per una consolidata tradizione, è chiamata *Assiriologia* la scienza che si occupa della cultura, della storia, della religione, dell'economia, della tecnologia e delle scienze e dell'archeologia delle civiltà della Mesopotamia e dei popoli delle regioni confinanti che impiegarono la *scrittura cuneiforme* creata dai Sumeri.

La successione cronologica dei tre popoli più importanti della Mesopotamia è la seguente:

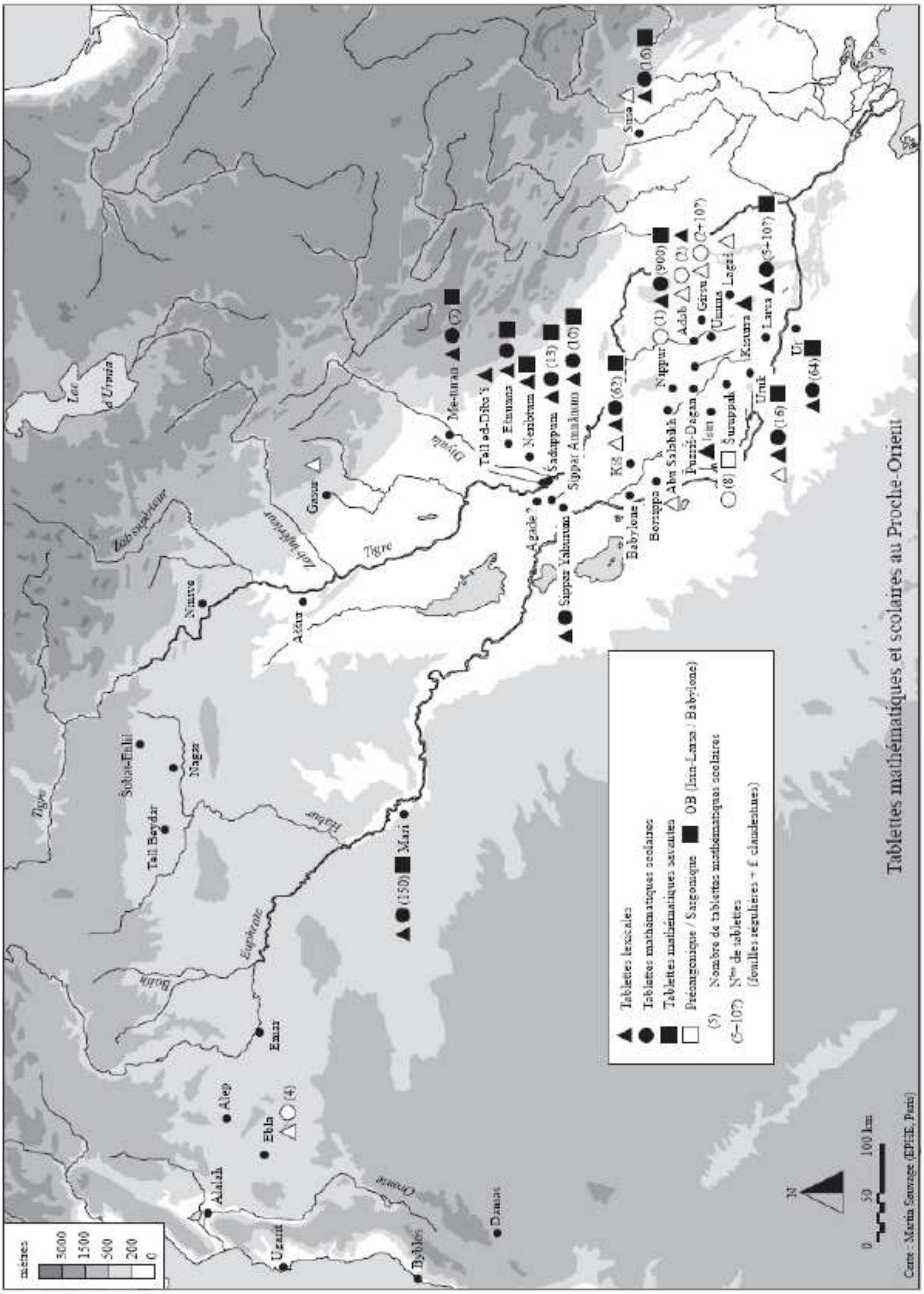
Sumeri → Babilonesi → Assiri.

I Sumeri non erano Semiti, mentre lo erano i Babilonesi e gli Assiri che parlavano due dialetti dell'*accadico*, lingua strettamente imparentata pure con l'*eblaita*, la lingua parlata nella città distrutta di Ebla nell'odierna Siria, e con altre lingue semitiche.

Spesso i testi che contengono studi specialistici sulle civiltà mesopotamiche (compresa la civiltà dei Sumeri) si riferiscono genericamente ai Babilonesi.

- -

La mappa che segue è stata realizzata dall'archeologo francese Martin Sauvage ed è a pagina 281 del testo di Chistine Proust, "Tablettes mathématiques de Nippur". Accanto ai vari siti è indicato il numero delle tavolette di contenuto matematico o scolastico.



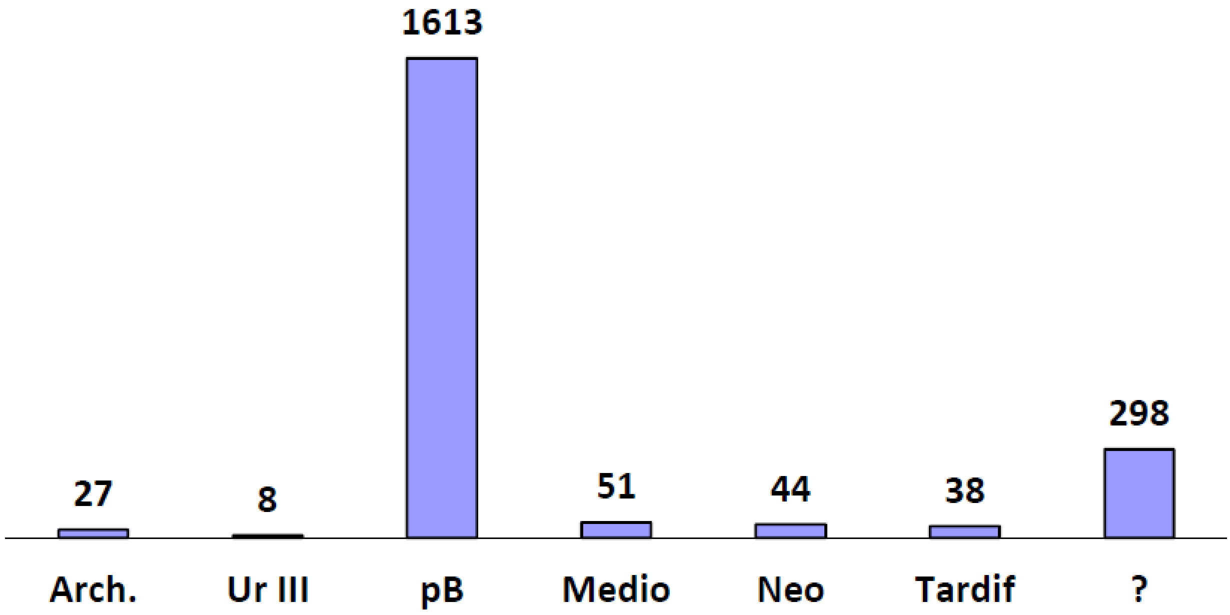
Tablettes mathématiques et scolaires au Proche-Orient

All’indirizzo Internet http://opacc.org/dccmt è il sito “Digital Corpus of Cuneiform Mathematical Texts” nel quale sono catalogate 1392 tavolette cuneiformi.

Nelle pagine che seguono sono presentati alcuni esempi di *costanti geometriche*.

Il principale testo di riferimento su questo argomento è “Mesopotamian Mathematics, 2100-1600 BC” di Eleanor Robson, citato in bibliografia.

Il grafico qui riprodotto (da Christine Proust [9] mostra la ripartizione aggiornata a settembre 2015 dal CDLI (**Cuneiform Digital Library Initiative**) dell’origine delle tavolette matematiche per periodi storici:



Legenda: Arch = periodo arcaico (2500-2100 a.C.), Ur III = terza dinastia di Ur (2100-2000); pB = periodo paleo-babilonese (2000-1600); Medio = periodi medio-babilonese e medio-assiro (1600-1100); Neo = periodi neo-babilonese e neo-assiro (911-539); Tardif = periodi achemenide e ellenistico (547-63 a.C.); ? = datazione non identificata, ma in gran parte da attribuire al periodo paleo-babilonese.

Nota: per facilitare i calcoli gli scribi Babilonesi avevano realizzato tavole di reciproci, di quadrati, di cubi, tavole di moltiplicazioni, di somme di quadrati e di cubi e tabelle con le costanti matematiche e geometriche che erano usate nei calcoli contenuti nelle tavolette cuneiformi.

Cerchio e circonferenza

L’area del cerchio veniva calcolata con la formula, in *sessagesimale*:

Area = 0; 05 * c^2 , nella quale *c* è la lunghezza della circonferenza e [0; 05] è un’espressione aritmetica che vale:

$$0;\ 05_{(60)} = 0*60^0 + 5*60^{-1} = 0 + 5/60 = 1/12_{(10)}\ .$$

La formula usata dai Babilonesi moltiplicava il quadrato della circonferenza per la costante 1/12.

Nota: in questo articolo sarà quasi sempre usata la numerazione in base 10.

La precedente formula scritta in base decimale è:

Area = 1/12 * c^2 .

Dato che $A = \pi * r^2 = \pi * (c/2 * \pi)^2 = c^2 * 1/4*\pi$, per i Babilonesi la costante 1/12 equivale a $1/4*\pi$.

In realtà, $1/4*\pi \approx 0{,}0796$ e $1/12 \approx 0{,}08(33)$.

Nota: 0,0833 è un *numero periodico* e per distinguerlo sono usati due differenti metodi: racchiudere fra parentesi tonde le cifre che si ripetono oppure disegnare sopra ad esse una linea orizzontale. Vedere l'APPROFONDIMENTO che segue.

La costante usata dai Babilonesi forniva un valore dell'area del cerchio approssimato *per difetto*.

Eguagliando le due costanti si ha:

$$1/12 \approx 1/4*\pi \quad \text{da cui} \quad 1/3 \approx 1/\pi \qquad e \; 3 \approx \pi \,.$$

Quindi per i Babilonesi il valore di π veniva approssimato *per difetto* a 3.

Da questa formula deriva un'altra costante:

diametro = 1/3 * circonferenza e all'inverso

circonferenza = 3 * diametro.

L'area di un cerchio è data da

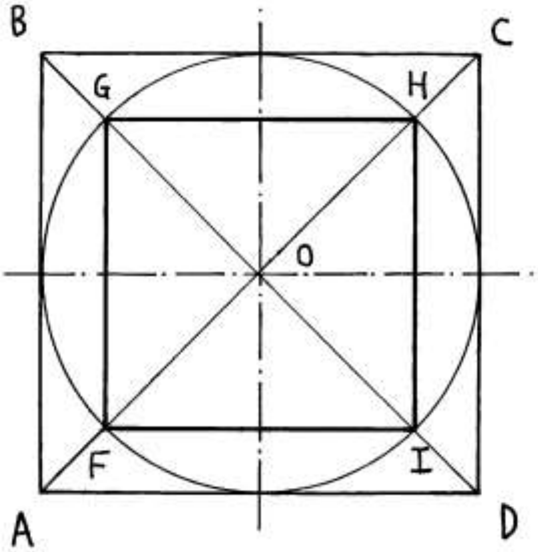
$\text{Area} = \pi * d^2/4$ e sostituendo a π il valore approssimato 3, la formula babilonese diviene:

$$\text{Area} = ¾ * d^2 = 0{,}75 * d^2 \,.$$

0,75 è un'altra costante geometrica.

<u>L'origine dell'approssimazione π ≈ 3</u>

Riguardo all'approssimazione π ≈ 3, Caveing suggerisce a pagina 206 del suo studio che gli scribi babilonesi calcolassero l'area del cerchio quale *media aritmetica* fra le aree del quadrato circoscritto e del quadrato inscritto nel cerchio.



Il quadrato ABCD ha lato lungo ℓ e il cerchio inscritto ha diametro lungo ℓ e raggio ℓ/2.

AC e BD sono le diagonali del quadrato ABCD: esse tagliano la circonferenza nei punti F, G, H e I che sono i vertici del quadrato FGHI inscritto nel cerchio.

Questo secondo quadrato ha diagonali, FG e HI, lunghe quanto il diametro del cerchio.

Consideriamo il triangolo rettangolo isoscele FGI: conosciamo la lunghezza dell'ipotenusa, $GI = \ell$, ma non quella dei cateti FG e GH, che sono uguali perché lati adiacenti dello stesso quadrato. Per il teorema di Pitagora si ha:

$GI^2 = FG^2 + GH^2 = 2 * FG^2$ da cui

$FG = GI * (\sqrt{2})/2 = \ell * (\sqrt{2})/2$.

L'area di ABCD è:

$\text{Area}_{ABCD} = AB^2 = \ell^2$ e quella di FGHI è:

$\text{Area}_{FGHI} = FG^2 = \ell^2/2$.

L'area del cerchio è:

$\text{Area}_{CERCHIO} = \pi * r^2 = \pi * \ell^2/4$.

La *media aritmetica* fra le aree dei due quadrati è:

$\text{Area}_{MEDIA} = (\text{Area}_{ABCD} + \text{Area}_{FGHI})/2 = (\ell^2 + \ell^2/2)/2 = (3/4) * \ell^2$.

Eguagliando l'Area $_{MEDIA}$ e quella del cerchio si ha:

$(3/4) * \ell^2 = \pi * \ell^2/4$ da cui consegue $3 = \pi$.

Il valore di π presso gli Ebrei

Nella Bibbia, nel *Libro dei Re* (1 Re 7, 23) è contenuto il seguente versetto relativo alla vita del Re Salomone:

"*Fece un mare di bronzo fuso di dieci cubiti da un orlo all'altro, rotondo; la sua altezza era di cinque cubiti e la sua circonferenza di trenta cubiti.*"

È evidente che il rapporto fra la circonferenza (30 cubiti) e il diametro (10 cubiti) è 3: in ciò gli Ebrei subirono l'influenza dei matematici Babilonesi.

Per la precisione: un *cubito* equivaleva a 44,5 cm.

- APPROFONDIMENTO -

I numeri periodici

Un numero decimale *periodico* è un numero razionale che scritto sotto forma di notazione decimale mostra una *stringa* di cifre poste dopo la virgola: da una certa posizione in poi la stringa si ripete all'infinito.

La stringa è chiamata *periodo*: la frazione

$\frac{5}{3}$ è rappresentata in notazione decimale sotto la forma 1,6666...

La stringa scritta a destra della virgola – 6666 – è il periodo e si ripete all'infinito.

Per semplificare la scrittura di questi numeri sono usate due diverse convenzioni che hanno lo stesso significato:

* le cifre che formano il periodo sono scritte con un segmento orizzontale sovrastante:

$$\frac{5}{3} = 1,\overline{66}$$;

* una seconda convenzione racchiude le cifre del periodo fra *parentesi tonde*:

$$\frac{5}{3} = 1,(66)$$.

Una parte dei numeri periodici possiede una seconda stringa di cifre che non si ripetono e che precedono la stringa del periodo: si tratta dell'*antiperiodo*, come mostrato nell'esempio che segue:

$$\frac{17}{6} = 2{,}8333\ldots = 2{,}\underbrace{8}_{\text{antiperiodo}}\underbrace{(333)}_{\text{periodo}}$$

Un altro metodo consiste nel porre un *trattino orizzontale* sulle cifre del periodo:

$$\frac{17}{6} = 2{,}8333\ldots = 2{,}8(333) = 2{,}8\overline{333} = 2{,}8\bar{3}\bar{3}\bar{3}$$

Questa seconda soluzione non è però indicata per nel caso della rappresentazione dei numeri contenuti nelle tavolette mesopotamiche perché molti storici della matematica e assiriologi usano questa simbologia per indicare l'*inverso* di un numero, ad esempio:

$$\frac{1}{4} = \overline{4}$$

Nelle tavolette sono spesso contenute tavole numeriche di due diversi tipi:

* *tavole di moltiplicazione*, con almeno due colonne

a	$a \cdot n$

con *a* e *n* numeri da moltiplicare;

* *tavole di inversi*, con almeno due colonne:

a	$\frac{1}{a}$

I Babilonesi non effettuavano direttamente le divisioni, ma cercavano l'inverso del *divisore* (1/a) in una tavola di inversi.

La divisione fra il *dividendo b* e il *divisore a* era trasformata in una equivalente moltiplicazione:

$$\frac{b}{a} = b \cdot \frac{1}{a}$$

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Il numero 60 possiede ben *dodici* divisori: 1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 6 – 10 – 12 – 15 – 20 – 30 e 60.

Invece il numero 10 ne ha soltanto 4: 1 – 2 – 5 e 10.

L'uso della base 60 riduce la generazione di *numeri decimali periodici*.

Nella base 10, la frazione $(1/3)_{10}$ dà il numero periodico $0,(333)_{10}$, mentre usando la base 60, la frazione dà il seguente risultato:

$(1/3)_{60} = 1/3 * 60 = 20_{60}$.

Il divisore 9 di un numero in base 60 può *non* generare un numero periodico. Facciamo un esempio, ricordando che secondo la convenzione più usata il ";" separa la parte intera da quella frazionaria e la "," separa le potenze sia della parte intera che di quella frazionaria:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & , & 0 & ; & 0 \\ | & & | & & | \\ 60^2 & , & 60^1 & ; & 60^0 \end{array} = 3600_{10}$$

La divisione di 1 , 0 ; 0 per 9 fornisce il seguente risultato:

$$\frac{1,0;0}{0;9} = 6^1;40 = 400_{10}$$

Il risultato non è un numero periodico.

Gli Egizi e i Romani

Il metodo della sovrascrittura con un trattino, impiegato dagli storici della matematica mesopotamica ha almeno due predecessori.

Gli Egizi scrivevano in geroglifico i simboli numerici sovrapponendo ad essi una piccola ellisse (che significava *parte*), come spiega l'esempio che segue:

$$\overset{\circ}{3} = \frac{1}{3}$$

I Romani (e forse anche i loro maestri Etruschi) usarono un sistema di numerazione che impiegava *sette* simboli rappresentanti da lettere maiuscole dell'alfabeto latino:

I = 1
V = 5
X = 10
L = 50
C = 100
D = 500
M = 1.000

Sovrascrivendo un trattino sui simboli romani, il loro valore era moltiplicato per 1.000:

$\overline{\text{I}}$ = 1.000

$\overline{\text{V}}$ = 5.000

$\overline{X}$ = 10.000

$\overline{L}$ = 50.000

$\overline{C}$ = 100.000

$\overline{D}$ = 500.000

$\overline{M}$ = 1.000.000

Infine, scrivendo un doppio trattino sui simboli, il loro valore veniva moltiplicato per *un milione*:

$\overline{\overline{I}}$ = 1.000.000

$\overline{\overline{V}}$ = 5.000.000

$\overline{\overline{X}}$ = 10.000.000

$\overline{\overline{L}}$ = 50.000.000

$\overline{\overline{C}}$ = 100.000.000

$\overline{\overline{D}}$ = 500.000.000

$\overline{\overline{M}}$ = 1.000.000.000

- -

La costante $\pi = 3,125$

Stando a quanto ha affermato lo storico della matematica giapponese Kazuo Muroi, i Babilonesi conoscevano pure un altro valore approssimato di π. Esso valeva 3,125 e era ricavato dalla divisione di $\pi = 3$ per la costante 24/25 (o della moltiplicazione di 3 per l'inverso 25/24(*)):

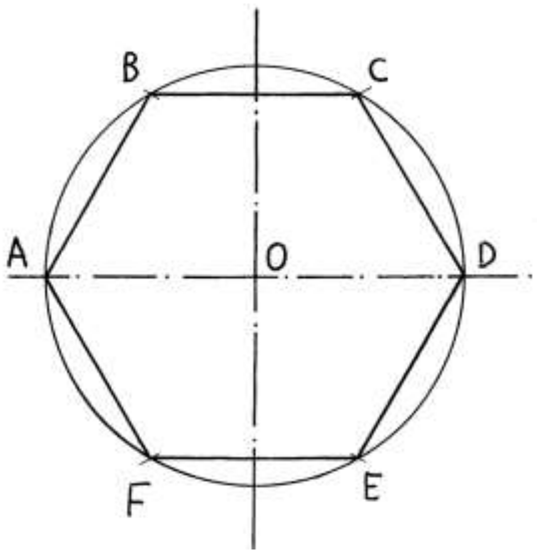
$$3 : 24/25 = 3 * 25/24 = 25/8 = 3,125 = 3 + 1/8 .$$

Impiegando questa costante l'area di un cerchio era ottenuta con la formula

Area = $2/25 * c^2$, nella quale con *c* è indicata la circonferenza: la formula può essere scritta come Area = $1/12,5 * c^2$.

Sempre secondo Kazuo Muroi questa costante era usata nel calcolo dell'area della base circolare di un cilindro, quale un tronco di legno.

Forse, questa costante $\pi = 3,125$ è stata ricavata dai Babilonesi dal confronto fra la lunghezza della circonferenza di un cerchio e il perimetro di un esagono inscritto:



Infatti il perimetro *p* dell'esagono è:

p = 6 * raggio = 3 * diametro.

La lunghezza della circonferenza è chiaramente maggiore del perimetro dell'esagono: con una misura anche approssimata della circonferenza *c* di un cerchio di raggio di lunghezza convenzionale 1, gli scribi babilonesi possono accertato il valore 6,5 al confronto del perimetro dell'esagono inscritto nello stesso cerchio e lungo 6.

Il dato c = 6,25 equivale a *costante * diametro* da cui

Costante = 6,25/diametro = 6,25/2 = 3,125 = 3 + 1/8 ≈ π .

Con π = 3, la lunghezza della circonferenza *c* è: c = 2 * 3 * raggio = 6 * raggio da cui deriva un'altra costante, 1/6: raggio = 1/6 * c .

La costante π è presente in due differenti relazioni:

* costante (π) = circonferenza/diametro = 3 ;
* costante (π) = area cerchio/quadrato raggio = 3 .

Per i Babilonesi le due costanti erano differenti; fu Archimede (III secolo a.C.) a dimostrare la loro uguaglianza:

circonferenza/diametro = area cerchio/quadrato raggio .

In precedenza abbiamo già incontrato la costante 1/12: essa deriva dalla formula inversa

costante (1/12) = area cerchio/quadrato circonferenza.

Nota: sembra che per gli Egizi le due costanti (π) erano identiche.

- -

(*) Infatti 3 * 25/24 = 25/8 = 3,125 = 3 + 1/8.

<u>Le unità di misura di lunghezza e di superficie usate dai Sumeri e dai Babilonesi</u>

Prima i Sumeri poi i Babilonesi hanno usato in Mesopotamia unità di misura di lunghezza lineare basate su una unità base, il *cubito* (kush).

I Babilonesi conservarono le unità create dai Sumeri e in generale si limitarono a tradurre nella loro lingua semitica i nomi sumerici delle unità.

I nomi sumerici delle unità di lunghezza sono:

dito	SU.SI
cubito	KUSH
canna	GI
2 canne	NINDA
60 ninda	UŠ

I nomi sumerici delle unità di superficie sono:

SAR	1 ninda^2
IKU	100 SAR
EŠE	6 IKU
BUR	18 IKU
SHAR	60 BUR

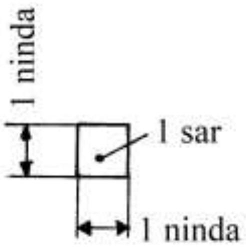
La tabella che segue descrive i rapporti fra le unità lineari:

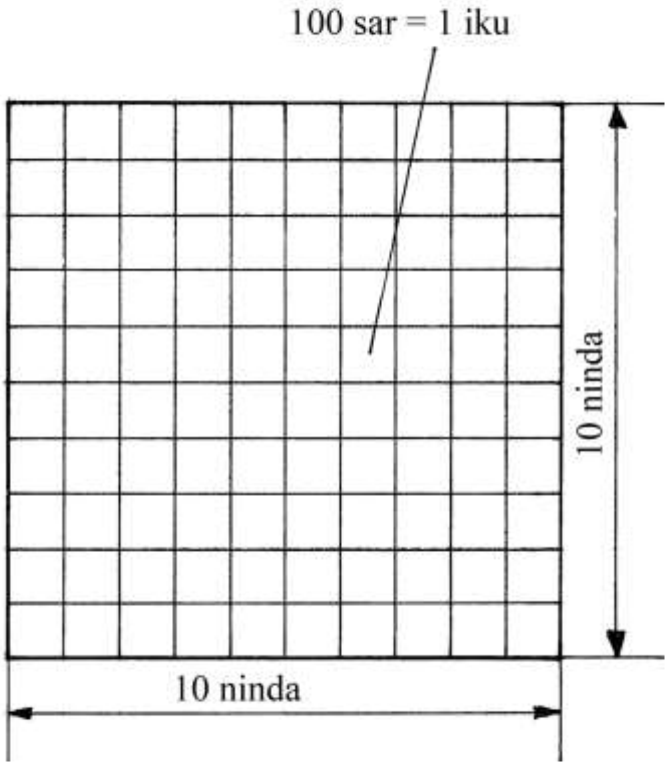
nome	rapporto con il cubito	lunghezza
dito	1/30 cubito = 1/10 piede	1,65 cm
piede	1/3 cubito = 10 dita	16,5 cm
spanna	½ cubito	24,75 cm
cubito (kush)		49,5 cm
canna	6 cubiti	2,97 m
nindan (o ninda o gar)	12 cubiti	5,94 m

I rapporti fra le unità di superficie sono i seguenti:

unità di misura	equivalenti a m^2	arrotondamento per eccesso, in m^2
1 sar (= 1 ninda^2)	35,2836	36
1 iku = 100 sar	3 528,36	3 600
1 eše = 6 iku	21 170,16	21 600
1 bûr = 3 eše	63 510,48	64 800
1 šar = 6 bur'u	3 810 628,8	3 888 000

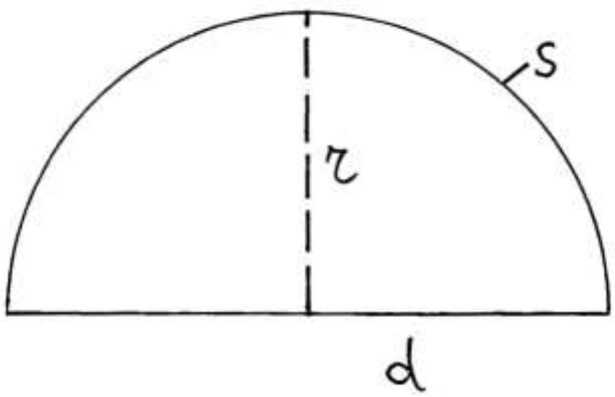
I grafici che seguono mostrano la natura delle due unità di misura della superficie: *sar* e *iku*:





Semicerchio

Nella figura che segue, *s* è la lunghezza della semicirconferenza, *r* il raggio e *d* il diametro.



Le formule usate dai Babilonesi per calcolare l'area dei semicerchi derivano da quelle per i cerchi.

Nelle tavolette sono incise diverse formule fra loro equivalenti:

$Area_{semicerchio} = s * d/4 = ¼ * s * d$

$Area_{semicerchio} = 1/6 * s^2$ da cui deriva $s^2 = 6 * Area$

$Area_{semicerchio} = ¾ * r * d$.

Considerando che π è approssimato a 3, la semicirconferenza *s* è lunga

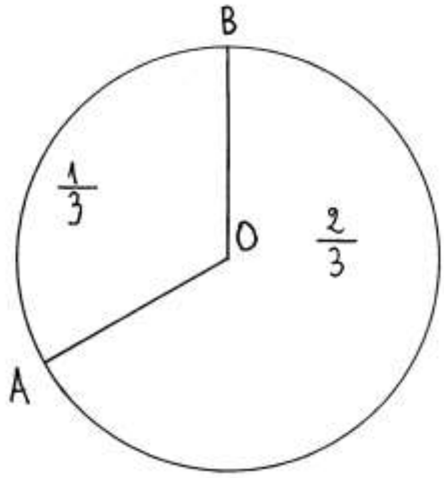
S = 3 * r = 3/2 * d , da cui d = 2/3 * s e il raggio è

r = d/2 = ½ * (2/3 * s) = 1/3 * s .

L'area del semicerchio è:

Area semicerchio = ½ * Area cerchio = ½ * (1/12 * circonferenza^2) = 1/24 * circonferenza^2 .

La figura che segue mostra un cerchio diviso in due settori circolari: il più piccolo ha area uguale a 1/3 di quella dell'intero cerchio.



L'area del settore ampio 1/3 è A e vale

A = 1/3 * Area cerchio = 1/3 *(1/12 * circonferenza^2) = 1/36 * c^2 (*c* sta per circonferenza).

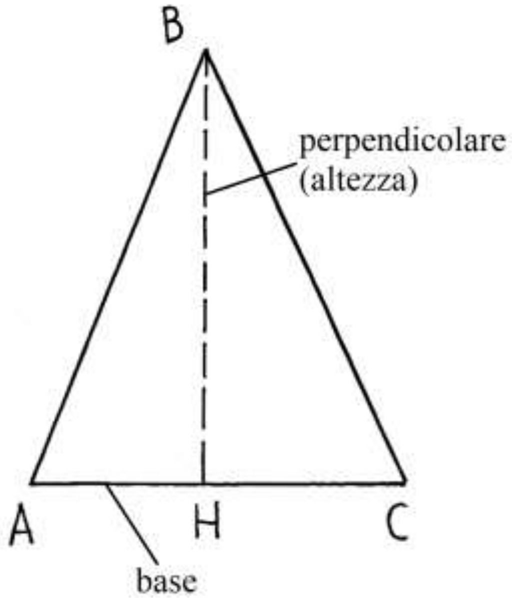
Da questa ultima formula deriva c^2 = 36 * A .

Sono state individuate altre costanti geometriche.

Nota: per chiarire meglio i concetti, sulle figure sono scritte le lettere dei vertici significativi, seguendo la consuetudine dell'uso delle MAIUSCOLE.

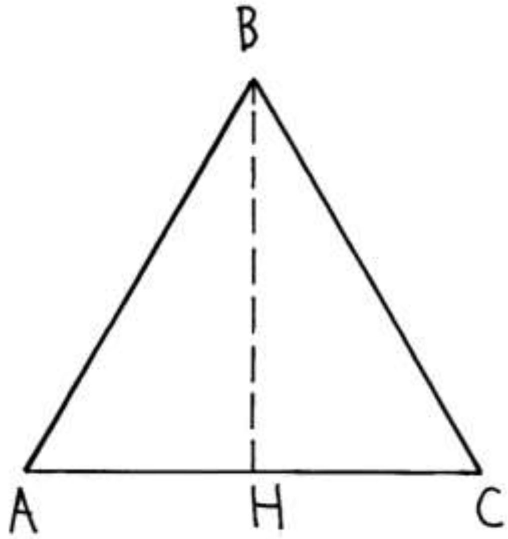
Triangoli

L'area di un triangolo qualsiasi è ricavata dal semiprodotto della *base* per la *perpendicolare* (o *altezza*).



La formula è: Area = ½ * base * altezza . In questa formula è presente la costante ½.

Nel caso del *triangolo equilatero*, due tavolette (BM 96957 e VAT 6598) risalenti alla fase più antica della matematica babilonese (2100 – 1600 a.C.) anticipano il metodo approssimato per il calcolo dell'area poi attribuito a Erone di Alessandria (I secolo d.C.).



Il triangolo equilatero ABC è scomposto dall'altezza BH in due identici triangoli rettangoli: ABH e BHC.

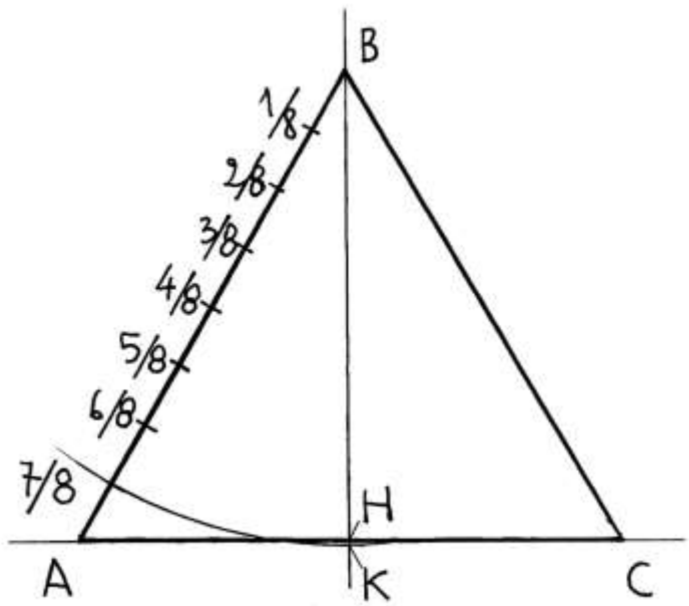
La lunghezza *convenzionale* dei lati del triangolo è 1.

Consideriamo uno dei due triangoli rettangoli, ad esempio quello ABH: la sua ipotemusa AB è lunga 1 e il cateto AH è ½.

L'altezza BH è il secondo cateto del triangolo rettangolo e la sua lunghezza veniva calcolata dai Babilonesi come segue:

$BH = 1 – (AH^2)/2 = 1 – (1/2)^2/2 = 0,875$.

La formula può essere interpretata con la figura che segue:



AH è lunga ½ di AC e cioè ½ * 1 = ½ .

L'espressione $(1/2)^2/2$ vale 1/8.

Il lato AB è diviso in *otto* parti uguali: fare centro nel vertice B e con raggio uguale alla lunghezza convenzionale 7/8 tracciare un arco dal punto corrispondente allo stesso 7/8. BK è lungo 7/8 del lato: il punto K è leggermente spostato verso il basso rispetto alla posizione di H.

L'altezza BH è lunga: $BH = (\sqrt{3})/2 * lato = (\sqrt{3})/2 * 1 \approx 0,8(66)$.

La differenza fra le due costanti – 0,875 e 0,8(66) – è mimima.

L'area del triangolo equilatero veniva calcolata con la formula approssimata che usava la costante 0,875:

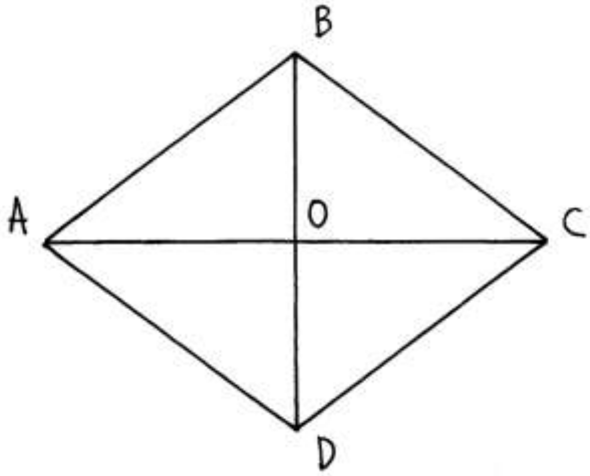
$$Area = altezza * base/2 = 0,875 * 1 * ½ = 0,4375.$$

0,4375 è un'altra costante geometrica impiegata per calcolare l'area di qualunque triangolo equilatero:

Area triangolo equilatero = $0,4375 * lato^2$.

Rombo

Il rombo ABCD costituisce una ripetuta applicazione della terna pitagorica 3-4-5:



Ciascuno dei *quattro* triangoli rettangoli uguali che lo formano ha lati lunghi in proporzione a 3, a 4 e a 5.:

$$OB : 3 = OA : 4 = AB : 5 .$$

Le ipotenuse dei quattro triangoli rettangoli – AB, BC, CD e AD – sono i quattro lati del rombo. Esse hanno lunghezza *convenzionale* 1.

Le lunghezze dei cateti sono ricavate dalle proporzioni

$OB = 3/5 * AB = 3/5 * 1 = 3/5$;

$OA = 4/5 * AB = 4/5 * 1 = 4/5$.

L'area di uno dei triangoli rettangoli è data da

$$Area_{ABO} = OA * OB/2 = 4/5 * 3/5 * ½ = 12/50 = 0,24 .$$

L'area dell'intero rombo può essere calcolata in due modi differenti:

a) con il semiprodotto delle due diagonali e cioè
$Area_{ABCD} = AC * BD/2 = (AO + OC) * OB = 2 * AO * OB = 2 * 4/5 * 3/5 = 24/25 = 0,96$;

b) moltiplicando per 4 l'area del triangolo ABO e cioè
$Area_{ABCD} = 4 * Area_{ABO} = 4 * 0,24 = 0,96$.

0,24 è una *costante geometrica* utilizzata nel calcolo dell'area di un triangolo rettangolo con lati lunghi proporzionalmente ai componenti della terna 3-4-5.

I Sumeri e il sistema sessagesimale

Si deve alla civiltà dei Sumeri il primo impiego della numerazione in base 60. Questo numero possiede alcune importanti proprietà:

- è il prodotto di tutti i numeri interi da 3 a 5: 3 * 4 * 5 = 60;
- ha molti divisori: 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20 e 30.

I Babilonesi continuarono ad usare il sistema sessagesimale dei Sumeri.

Da queste civiltà della Mesopotamia è derivata la odierna divisione della misura del tempo in sottomultipli di 60:

1 ora = 60 minuti; 1 minuto = 60 secondi.

La stessa divisione vale per il grado sessagesimale per la misura degli angoli:

1 angolo giro = 360°; 1° = 60 minuti (’); 1 minuto = 60 secondi (’’).

Un numero scritto con questa base è così formato:

$$\text{parte intera} + \frac{m}{60^1} + \frac{n}{60^2} + \frac{o}{60^3} + \cdots$$

- APPROFONDIMENTO -

La rappresentazione dei numeri sessagesimali

Molti fra gli storici della matematica che studiano i testi cuneiformi dei Sumeri e dei Babilonesi usano il simbolo del *punto e virgola* (;) per separare la parte intera da quella frazionaria dei numeri in base 60 e spazi per separare le componenti frazionarie:

parte intera ; m n o …

Fu lo storico della matematica austro-americano Otto Eduard Neugebauer (1899 – 1990) a introdurre questa convenzione.

Forse, potrebbe rendere più chiara la lettura di un numero sessagesimale l’inserzione di *virgole* (,) separatrici fra le diverse componenti frazionarie come nell’esempio che segue:

parte intera ; m, n, o, …

Prima di lui, il matematico Leonardo da Cremona (attivo almeno fra il 1404 e il 1438) misurò l’area di un triangolo isoscele uguale a 9,625 che egli indicò in *base sessagesimale* come:

Area = $9{,}625_{(10)} = 9 + 37^{\text{minuti}} + 30^{\text{secondi}}$.

Più di recente, lo storico della matematica danese Jens Høyrup ha proposto di usare i termini:

* grado (°) per indicare la parte intera;
* l’apice (') per rappresentare i sessantesimi;
* il doppio apice (' ') per indicare la parte frazionaria divisa per 60^2 = 3600.

Un numero in base 60 viene così scritto

2° 1' 40" che equivale a 2*60 + 1/60 + 40/3600 = 120 + 1/36 in base *dieci*.

Il metodo suggerito da Høyrup si può prestare a delle incomprensioni, come è facile dedurre dagli esempi contenuti nella pagina 13 del suo testo citato in bibliografia.

Le unità di capacità usate all’epoca della sumerica Ur III e del periodo paleobabilonese sono le seguenti:

unità di capacità	equivalenti a litri
1 sila	1
1 ban = 10 sila	10
1 PI = 1 bariga = 6 ban	60
1 gur = 5 bariga	300

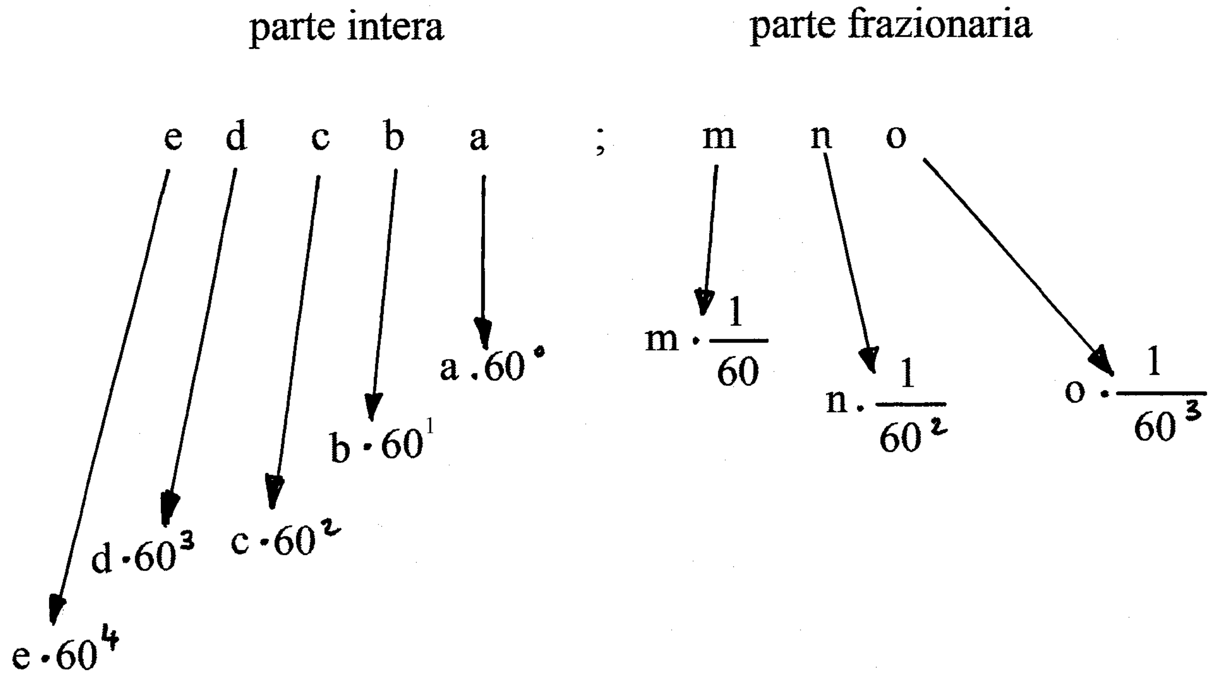
Høyrup usa la seguente simbologia basata sull'impiego ripetuto del simbolo del singolo apice ('):

* 1 BÁN = 10 SÌLA ;
* 1 PI = 1' SÌLA [l'apice (') moltiplica per 60] ;
* 1 GUR = 5' SÌLA [l'apice (') moltiplica per 60] .

In conclusione, Høyrup sembra impiegare i simboli (') e (' ') sia per i multipli che per i sottomultipli.

- -

Seguendo Neugebauer, la struttura di un numero in base 60 è così organizzata:



Ad esempio il numero 1; 24 51 10 è il risultato di $\sqrt{2}$ espresso in base 60:

$$\sqrt{2} \cong 1,414221356237\ldots_{(10)} \cong$$

$$\cong 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{3600} + \frac{10}{216\,000} \ (_{60}) =$$

$$= 1;\ 24\ 51\ 10_{(60)}$$

Leonardo Cremonese utilizzò sia il sistema decimale che quello sessagesimale.

Per chiarire il metodo usato per la conversione da una base all'altra, riprendiamo l'esempio dell'area del settore circolare OFG, calcolato in 9,625 unità:

- 9 è la parte intera in entrambi i sistemi di numerazione;
- la parte frazionaria in base 10, 0.625, è moltiplicata per 60. Dal risultato – 37,5 – viene tolta la parte intera – 37 – che rappresenta i minuti ed è presa la parte frazionaria, 0,5, a sua volta moltiplicata per 60;
- il risultato intero, 30, rappresenta il numero dei minuti.

Il grafico seguente descrive le operazioni di conversione dalla base 10 a quella 60:

$$9{,}625_{(10)} - 9 = 0{,}625$$

$$0{,}625 \times 60 = 37{,}5$$

$$37{,}5 - 37 = 0{,}5$$

$$0{,}5 \times 60 = 30$$

$$30 - 30 = 0$$

$$9;37,30$$

$$9{,}625_{(10)} = 9;37,30_{(60)}$$

A titolo di riprova, nel grafico che segue è effettuata l'operazione inversa di conversione dalla base 60 a quella 10:

$$9;37,30_{(60)} = 9 \cdot 1 + \frac{37}{60} + \frac{30}{60^2} =$$

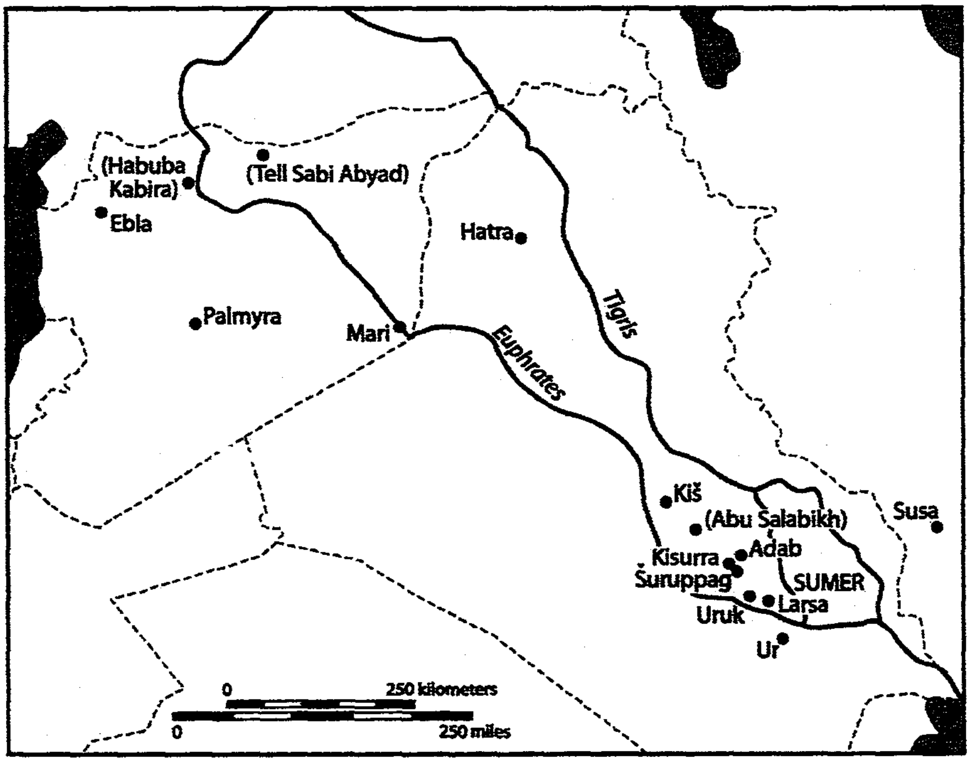
$$= 9 + \frac{37}{60} + \frac{30}{3600} = 9 + \frac{37 * 60 + 30}{3600} =$$

$= 9 + 0{,}625 = 9{,}625_{(10)}$.

Un sito, in inglese, http://baptiste.meles.free.fr/site/mesocalc.html contiene, fra le altre cose, una calcolatrice per la conversione dei numeri dalla base 10 a quella 60 e viceversa (sito visitato il 25 agosto 2017).

Nota: in questo articolo è quasi sempre usata la notazione decimale.

La mappa che segue (da Eleanor Robson, "Mathematics in Ancient Iraq", citata in bibliografia) mostra la posizione di alcuni dei più importanti siti della Mesopotamia:



Le linee tratteggiate indicano i confini degli attuali Stati.

La tavoletta BM 15285

La tavoletta BM 15285 è parzialmente danneggiata e contiene grosso modo 40 problemi geometrici centrati su quadrati nei quali sono inscritti altri quadrati, rettangoli, triangoli o cerchi. 31 di quei problemi si sono conservati in tutto o in parte.

Le sue dimensioni originali sono stimate in 30 * 50 cm.

Sulla tavoletta sono utilizzate entrambe le facce.

Risale al periodo paleobabilonese, circa il 1750 a.C., e proviene dall'antica città sumera di Larsa, nel sud dell'odierno Iraq.

È conservata a Londra, nel British Museum.

- APPROFONDIMENTO -

Recto e *verso* sono termini che indicano le due facce di un foglio che fa parte di un codice o di un libro.

Le monete emesse dagli Stati europei che hanno adottato l'*euro* hanno alcune proprietà: presentano una faccia comune a tutte le emissioni nazionali ed è il *rovescio* o *verso* (*reverse* in inglese). Il *dritto* o *recto* (*obverse*) è l'altra faccia delle monete ed è personalizzata per i singoli Stati.

Le due facce di una tavoletta cuneiforme sono definite con i termini inglesi *observe* (il diritto) e *reverse* (rovescio).

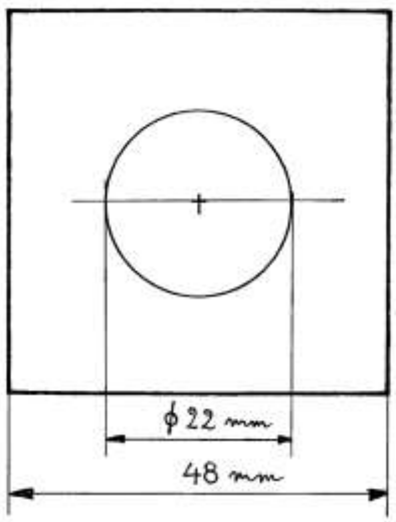
- -

Le proprietà dei disegni della tavoletta

Eleanor Robson (a p. 208 di "Mesopotamian Mathematics…") fornisce alcune informazioni sulle caratteristiche geometriche dei disegni incisi.

I quadrati hanno lati lunghi 48 mm e cioè grosso modo *3 dita*: 1 dito equivale a 16,5 mm e 3 dita dovrebbero valere 49,5 mm.

I quadrati contenuti in alcuni grafici hanno lati lunghi 22 mm e i cerchi hanno raggio 11 mm (e diametro 22 mm). Sembra ragionevole ritenere che la lunghezza dei lati dei quadrati inscritti e dei diametri dei cerchi sia stata scelta dallo scriba quale metà della lunghezza del lato dei quadrati esterni?



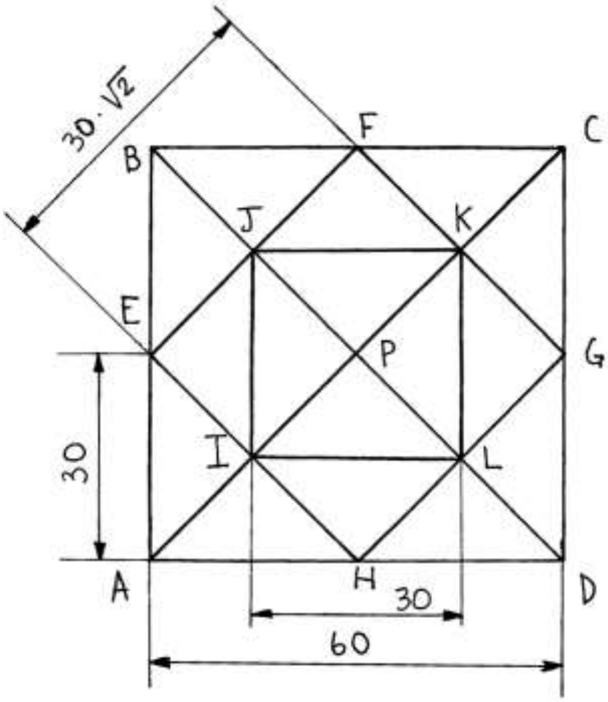
Gli schemi che seguono sono disegnati nel rispetto di questa ipotesi: il diametro dei cerchi e il lato dei quadrati inscritti sono lunghi metà del lato dei quadrati esterni.

Gli esercizi contenuti nella tavoletta sono abbastanza teorici: le dimensioni dei lati di tutti i quadrati esterni che compaiono nelle figure sono molto grandi, 1 UŠ e cioè *60 ninda*, equivalenti a 356,4 metri.

I problemi contenuti nella tavoletta sono soltanto enunciati e mai risolti.

Sulle figure che seguono sono apposte le lettere ai vertici significativi.

Lo schema contenuto nella prossima figura contiene una griglia con le dimensioni in ninda ed è l'esercizio numero XII dell'*obverse* della tavoletta:

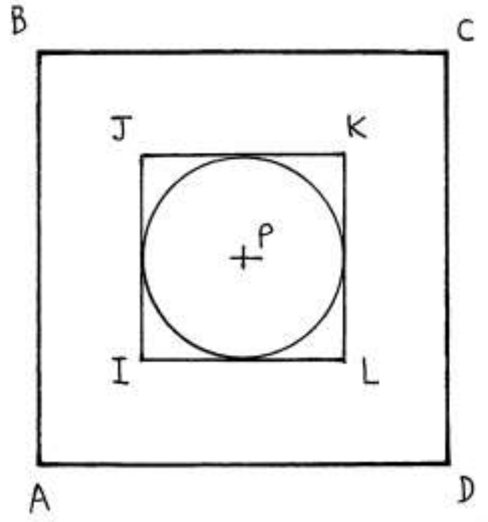


Nei paragrafi che seguono sono descritti quattro problemi e le loro soluzioni.

Nel testo citato della Robson, i diversi problemi sono numerati usando – secondo l'uso anglo-sassone – i *numeri romani minuscoli*: il problema presentato nella precedente figura è indicato come "xii" invece di "XII" come usa in Italia.

Il problema II

Nel quadrato ABCD è inscritto il quadrato concentrico IJKL che ha lati lunghi 30 ninda e cioè la metà di quelli di ABCD.



All’interno del secondo quadrato è inscritto un cerchio che diametro 30 ninda.
Il problema chiede di calcolare le aree delle diverse figure.
L’area del quadrato ABCD è:

$$\text{Area}_{\text{ABCD}} = AB^2 = (60 \text{ ninda})^2 = 3600 \text{ SAR.}$$

L’area di IJKL è:

$$\text{Area}_{\text{IJKL}} = (30 \text{ ninda})^2 = 900 \text{ SAR.}$$

L’area interposta fra i due quadrati è data dalla differenza delle loro aree:

$$\text{Area}_{\text{ABCD}} – \text{Area IJKL} = 3600 – 900 = 2700 \text{ SAR.}$$

Il cerchio interno ha diametro 30 ninda e circonferenza *c* uguale a:

$c = \pi * d \approx 3 * 30 \approx 90$ ninda, con π approssimato a 3.

L’area del cerchio è data da:

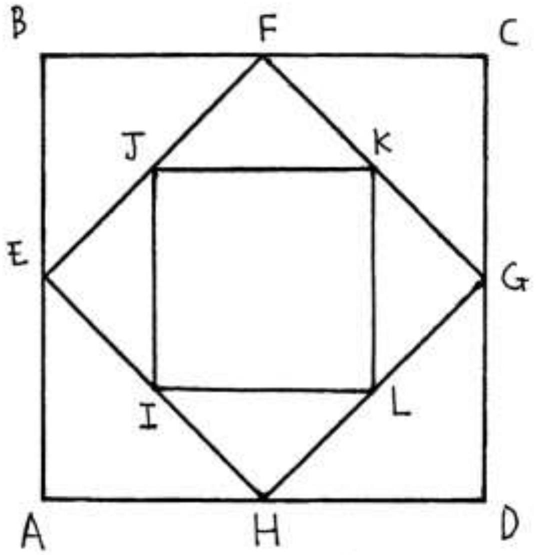
$$\text{Area}_{\text{CERCHIO}} = 1/12 * c^2 = 1/12 * 90^2 = 675 \text{ SAR.}$$

L’area compresa fra il quadrato IJKL e il cerchio è:

$$\text{Area} = \text{Area}_{\text{IJKL}} – \text{Area}_{\text{CERCHIO}} \approx 900 – 675 \approx 225 \text{ SAR.}$$

Problema XI

Avendo già calcolata le loro aree nel precedente paragrafo, conosciamo già quelle dei quadrati ABCD e IJKL.



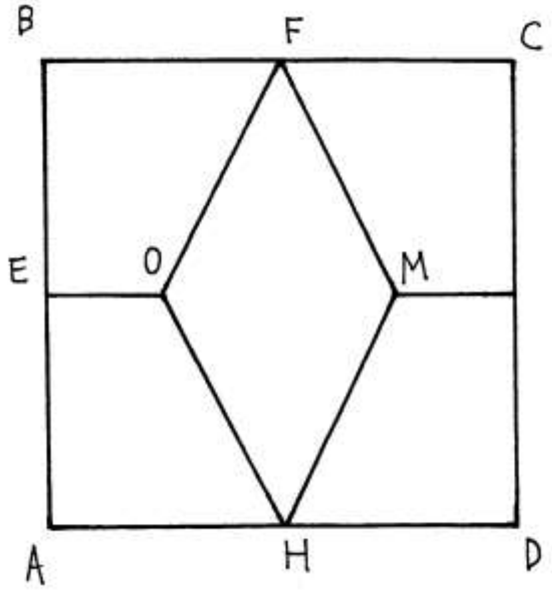
Nella figura compare un terzo quadrato, EFGH, che ha superficie uguale a metà di quella di ABCD:

Area $_{EFGH}$ = $EF^2 = (30 * \sqrt{2})^2 = 900 * 2 = 1800$ SAR.

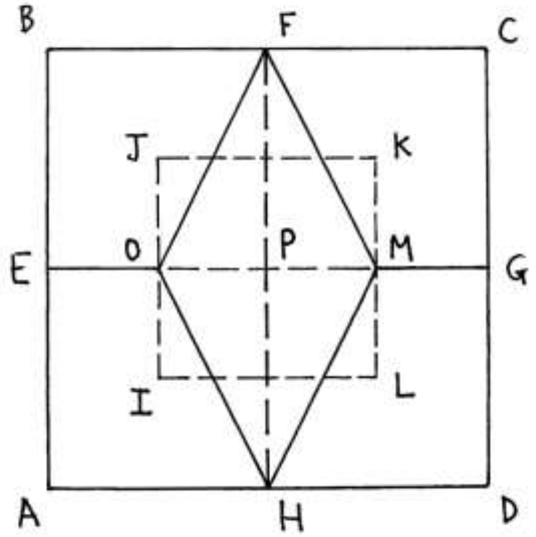
In precedenza è stata calcolata l'area del quadrato IJKL che è 900 SAR.

La conclusione è che il quadrato EFGH ha area doppia di quella di IJKL.

Problema XIII



La figura contiene due nuovi punti, O e M, che rispettivamente sono i medi dei lati IJ e KL:



Il quadrato ABCD è ora scomposto in quattro trapezi rettangoli di uguali dimensioni (AEOH, EBFO, FCGM e HMGD) e due triangoli isosceli (OFM e OMH) anch'essi di uguali dimensioni, che uniti lungo il lato comune OP formano il rombo OFMH.

L'esercizio chiede di calcolare le superfici dei diversi poligoni.

È preliminarmente opportuno fissare le dimensioni dei diversi segmenti che delimitano i vari poligoni:

* AB = 60 ninda;
* AE = 30 ninda;
* EO = MG = AH/2 = 15 ninda;
* OM = EG/2 = 30 ninda;
* FP = BE = 30 ninda.

L'area del rombo OFMH può essere ricavata in due modi: con il semiprodotto delle diagonali (OM e FH) o con il calcolo dell'area di uno dei due triangoli isosceli che lo formano, da raddoppiare. Scegliamo questa seconda soluzione.

L'area del triangolo OFM è

$$\text{Area}_{OFM} = OM * FP/2 = 30 * 30/2 = 450 \text{ SAR}.$$

L'area del rombo è:

$$\text{Area } OFMH = \text{Area}_{OFM} + \text{Area}_{OMH} = 2 * \text{Area}_{OFM} = 2 * 450 = 900 \text{ SAR}.$$

L'area di uno dei quattro trapezi può essere calcolata in due modi diversi: dividendo per 4 l'area risultante dalla differenza fra quella di ABCD e quella del rombo OFMH oppure moltiplicando la semisomma delle basi di un trapezio per la sua altezza. Scegliamo la prima soluzione:

$$\text{Area}_{4\ TRAPEZI} = \text{Area}_{ABCD} - \text{Area}_{OFMH} = 3600 - 900 = 2700 \text{ SAR}.$$

L'area di un singolo trapezio, ad esempio quello AEOH, è:

$$\text{Area}_{AEOH} = \text{Area}_{4\ TRAPEZI}/4 = 2700/4 = 675 \text{ SAR}.$$

La seconda soluzione dà un risultato identico:

$$\text{Area}_{AEOH} = AE * (AH + EO)/2 = 30 * (30 + 15)/2 = 675 \text{ SAR}.$$

Quale dei due metodi sarà stato impiegato nella "Scuola degli Scribi" per risolvere il problema?

Infine, si può ipotizzare che qualche scriba o allievo della Scuola degli Scribi di Larsa calcolasse l'area del trapezio AEOH con l'erronea *formula degli agrimensori*:

$$\text{Area}_{AEOH} = (AH + EO)/2 * (AE + OH)/2 .$$

Il problema che sorgeva era dato dalla lunghezza *incognita* del lato obliquo OH: gli scribi babilonesi conoscevano certamente il teorema di Pitagora, come è dimostrato sia dalla presenza in questa tavoletta di problemi con quadrati di superficie doppia o metà di quello ABCD, sia dal contenuto della tavoletta nota come tavoletta Plimpton 322 (anch'essa ritrovata a Larsa e risalente al XIX-XVIII secoli a.C.).

La lunghezza del lato OH è:

$$OH = \sqrt{(AH^2 + EO^2)} = \sqrt{(30^2 + 15^2)} = \sqrt{(900 + 225)} = \sqrt{(1125)} \approx 33{,}54 \text{ ninda}.$$

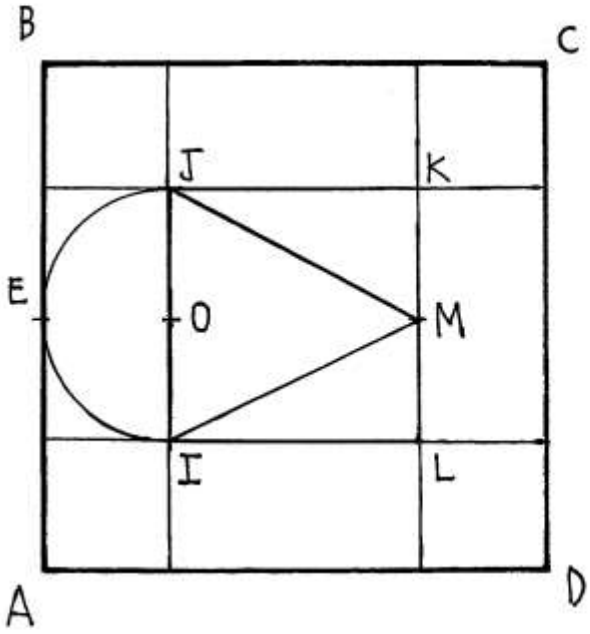
L'area del trapezio è così calcolata:

$$\text{Area}_{AEOH} \approx (30 + 15)/2 * (30 + 33{,}54)/2 \approx 45/2 * 63{,}54/2 \approx 714{,}825 \text{ SAR}.$$

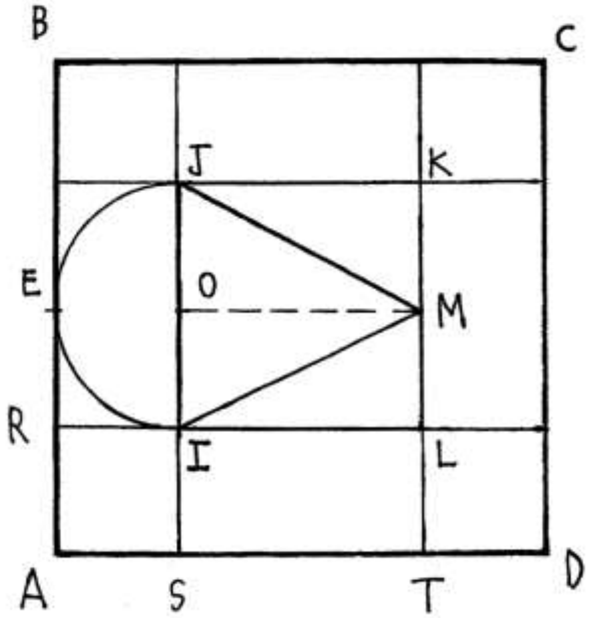
Il risultato, *errato*, è ovviamente maggiore di quello corretto, 675 SAR.

Problema XXXI

Il consueto quadrato ABCD contiene ora il quadrato IJKL al cui interno sono costruiti in triangolo isoscele IJM (definito *cono*), quattro rettangoli (all'interno di uno dei quali è disegnato il semicerchio IEJ) e quattro piccoli quadrati collocati ai vertici A, B, C e D.



Il problema chiede le aree dei singoli poligoni.



I quattro rettangoli hanno tutti le dimensioni di quello SILT: ST = 30 ninda e SI = 15 ninda. L'area di SILT è:

Area $_{SILT}$ = ST * SI = 30 * 15 = 450 SAR.

I quattro piccoli quadrati ai vertici hanno tutti la stessa superficie di quello ARIS il cui lato è lungo AS = 15 ninda e l'area è:

Area $_{ARIS}$ = AS^2 = 15^2 =225 SAR.

L'area del semicerchio IEJ è data da:

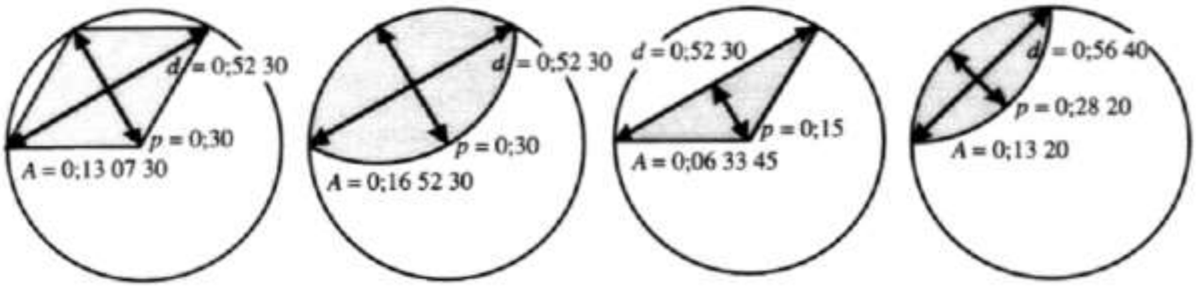
Area $_{IEJ}$ = ¾ * raggio * diametro = ¾ * OJ * IJ = ¾ * 15 * 30 = 337,5 SAR.

Infine, il triangolo isoscele IJM ha area

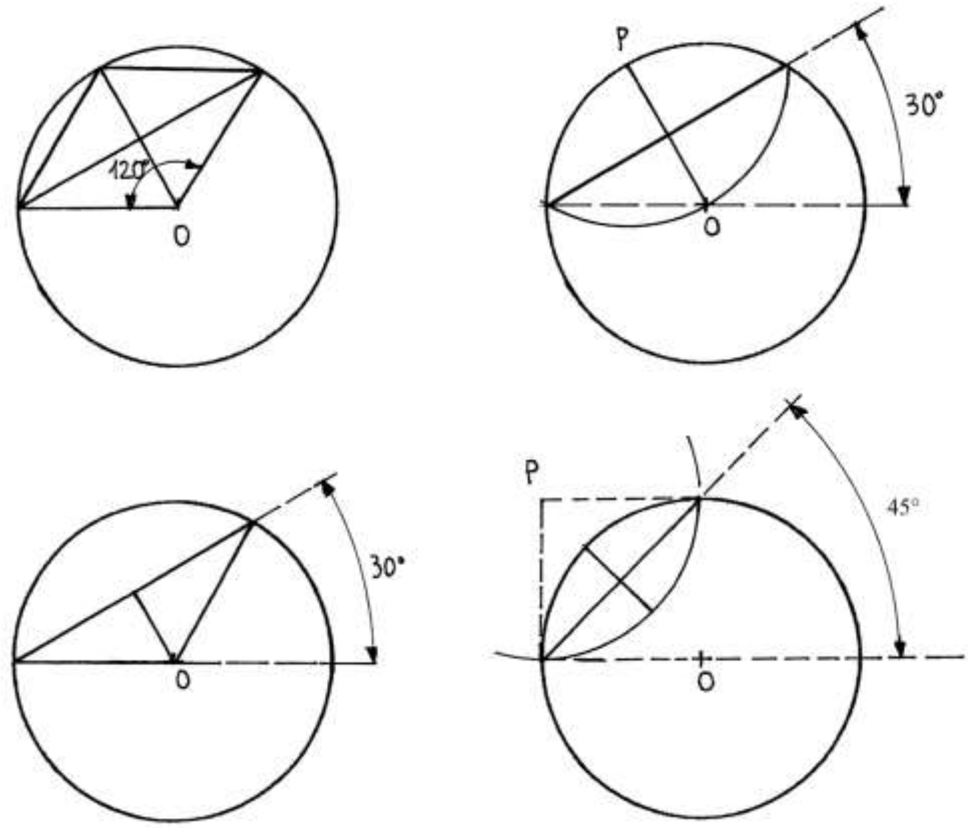
Area $_{IJM}$ = IJ * OM/2 = 30 * 30/2 = 450 SAR.

SETTORI E SEGMENTI CIRCOLARI

La figura che segue è tratta da pagina 46 del fondamentale studio di Eleanor Robson ("Mesopotamian Mathenatics" del 1999):



Le prime tre figure sono inscritte in cerchi e sono sviluppate su angoli di 120° o di 30° mentre la quarta figura è collegata a un quadrante e il suo angolo di riferimento è ampio 45°: in altri termini, le prime tre figure interessano 1/3 di cerchio e la quarta 1/4.



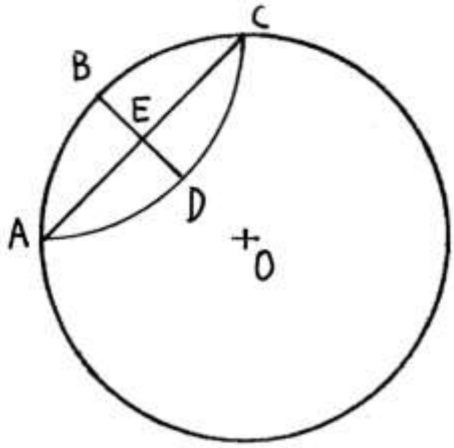
Tutti gli archi sottesi dalle quattro figure hanno lunghezza *convenzionale* uguale a 1 (uno).

Nelle figure successive sono aggiunte le lettere ai punti significativi.

Per affrontare con maggiore precisione l'argomento, si ritiene opportuno descrivere le *lunule*.

Le lunule

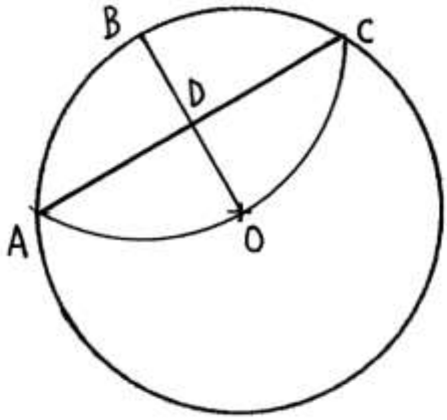
Lo schema che segue deriva dalla quarta figura della tavola iniziale di questo capitolo.



In geometria, la figura curva ABCD è una *lente*.

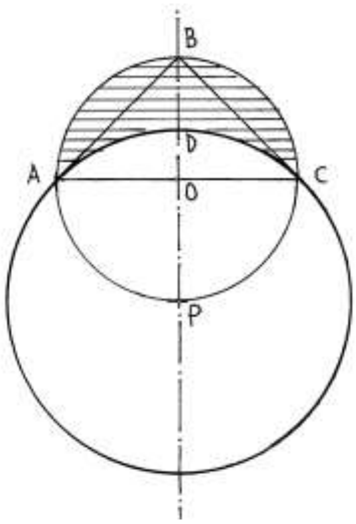
- APPROFONDIMENTO -

I Babilonesi chiamavano *occhio di bue* la *lente* ABCD (*):



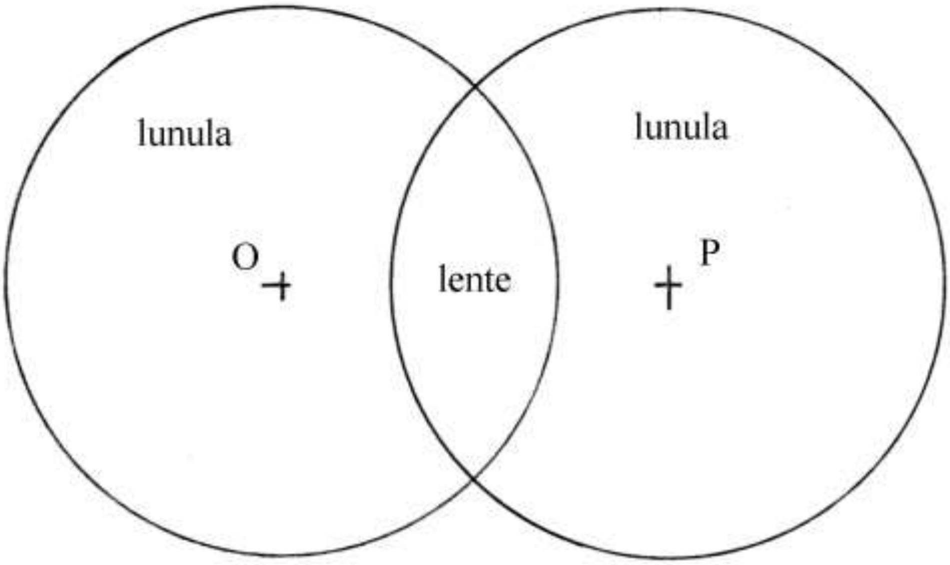
Quella figura è strettamente collegata a un'altra entità geometrica: la *lunula*.

Una *lunula* è la superficie piana compresa fra due cerchidi centri O e P, che si intersecano in due punti, A e C:

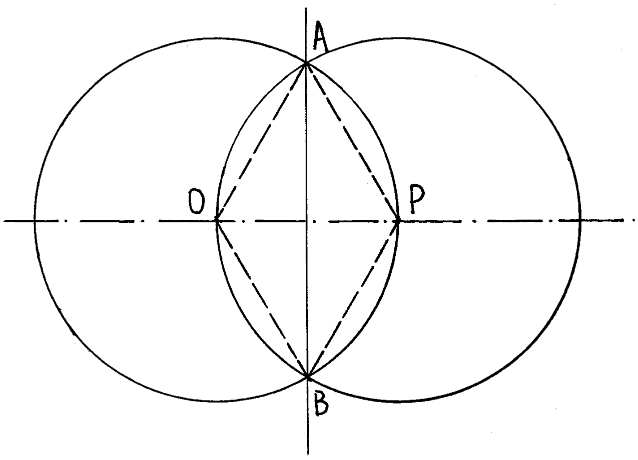


La lunula è delimitata dagli archi ABC e ADC: essa è evidenziata con il tratteggio orizzontale.

Nel caso che i due cerchi abbiano raggio uguale, sono distinguibili due lunule e la superficie comune ai due cerchi è la *lente*:



Un caso particolare di lente è la *vesica pisces*:



La *lente* OAPB è delimitata da due cerchi di raggio OP: il centro di un cerchio giace su di un punto della circonferenza dell'altro.

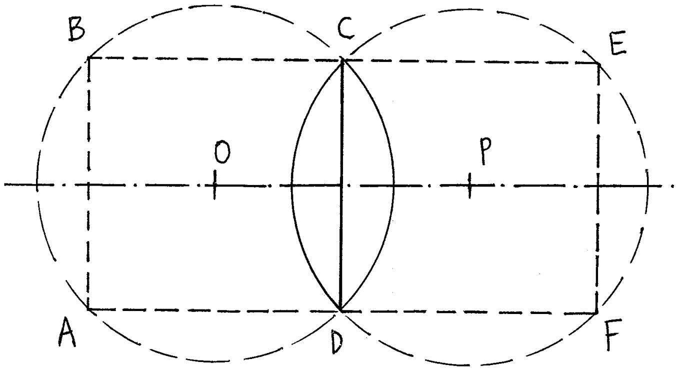
La costruzione fu usata per molti scopi fin dai tempi più antichi: dalla costruzione dell'asse AB della retta passante per i punti O e P alla tracciatura del triangolo equilatero dato il lato OP (due triangoli nella figura, OAP e OPB).

Nel Medioevo il personaggio principale di un'immagine sacra veniva ritratto all'interno di una *lente* chiamata *mandorla*.

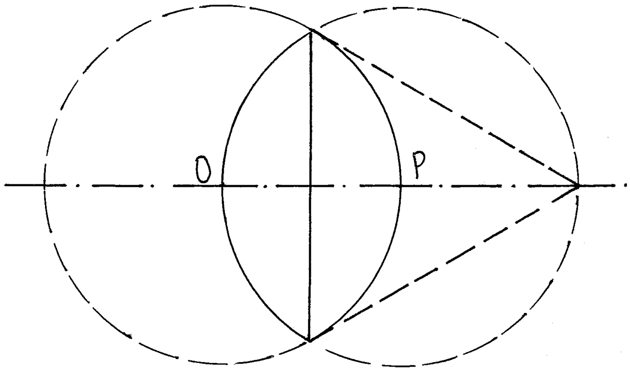
%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Due figure stilizzate compaiono nei problemi geometrici babilonesi: si tratta del *chicco d'orzo* e dell'*occhio di bue*.

Il *chicco d'orzo* è una *lente* generata dall'intersezione di due cerchi di uguale raggio, con i centri O e P la cui distanza OP è uguale alla lunghezza dei lati dei due quadrati ABCD e CEFD inscritti nei cerchi stessi: OP = AB.



L'*occhio di bue* è anch'esso una *lente* originata dall'intersezione di due cerchii di uguale raggio i cui centri O e P sono collocati sulla circonferenza dell'altro e la loro distanza OP è uguale al raggio dei due cerchi:



- -

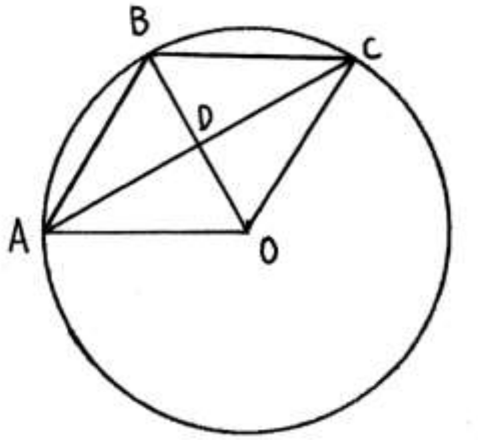
(*) Non possedendo specifici termini tecnici per definire le entità geometriche, Sumeri e Babilonesi utilizzarono espressioni prese dai nomi attribuiti a figure simili di parti di animali domestici, quali ad esempio, *occhio di bue* e *naso di mucca*.

Oggi è chiamato *occhio di bue* un pasticcino rotondo guarnito con un cerchio di marmellata, come è il caso della figura che segue (dal volantino ESSELUNGA per i supermercati della Toscana, valido per il periodo 6-15 novembre 2017):

- -

La prima figura

Nella figura che segue, derivata dalla prima delle quattro precedenti, OA, OB e OC sono tre raggi del cerchio:



La circonferenza *c* è lunga: c = 2 * π * raggio, ma i Babilonesi usavano quasi sempre l'approssimazione π ≈ 3 e quindi c = 2 * 3 * raggio = 6 * r.

L'arco ABC è lungo 1 ed è lungo 1/3 della circonferenza. Ne consegue:

c = 3 * ABC = 3 * 1 = 3 .

Il raggio OA = OB = OC = *r* è lungo: r = c/6 = 3/6 = 0,5 .

ABCD è un rombo formato da due triangoli equilateri, ABO e BOC, uniti lungo il lato OB che è anche la *diagonale minore* del rombo e un raggio del cerchio.

I lati del rombo e dei due triangoli equilateri sono lunghi quanto il raggio del cerchio e cioè 0,5.

AC è la *diagonale maggiore* del rombo ed è una corda lunga quanto le altezze dei due triangoli equilateri uniti:

AC = AD + DC = 2 * AD = 2 * DC .

Come vedremo meglio nel successivo paragrafo, la corda AC è anche un lato del triangolo equilatero inscritto ACE (non disegnato nella figura qui sopra).

Fra le costanti geometriche approssimate usate dai Babilonesi vi è quella che definisce il rapporto fra l'altezza del triangolo equilatero e un lato: 0,875.

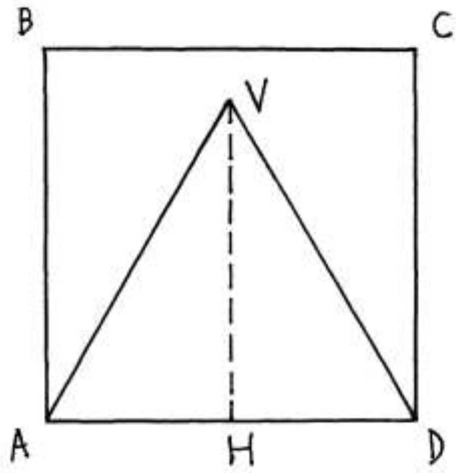
La corda AC è: AC = 2 * (0,875 * 0,5) = 0,875 .

L'area del rombo è uguale alla somma delle aree uguali dei due triangoli equilateri:

$\text{Area}_{ABCD} = 2 * \text{Area}_{ABO} = 2 * (0{,}875/2) * \text{lato}^2 = 2 * 0{,}4375 * 0{,}5^2 = 0{,}21875$.

Forse i Babilonesi non conoscevano la formula dell'area del rombo che oggi è calcolata con il semiprodotto delle due diagonali?

Anche 0,4375 è una costante geometrica, impiegata per calcolare l'area di un triangolo equilatero:

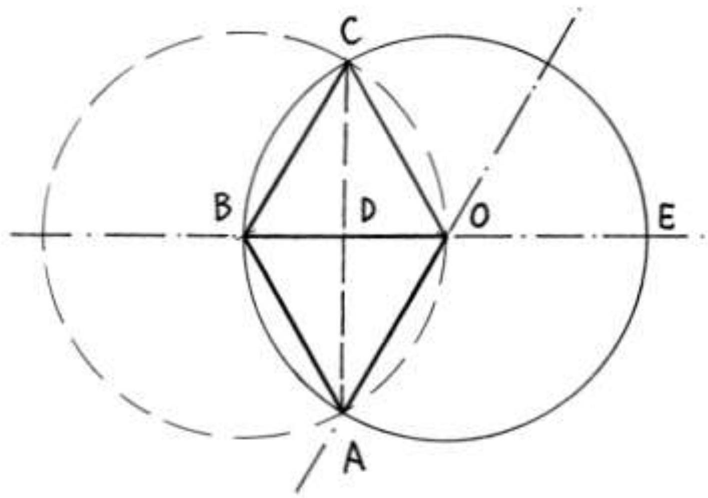


L’area del quadrato ABCD è: Area $_{ABCD}$ = AD^2, mentre quella del triangolo equilatero AVD è:

$$\text{Area}_{AVD} = AD * VH/2 \approx AD * 0{,}875 * AD/2 \approx 0{,}4375 * AD^2 .$$

Il rapporto fra l’area del triangolo equilatero e quella del quadrato aventi lati della stessa lunghezza è uguale alla costante approssimata 0,4375.

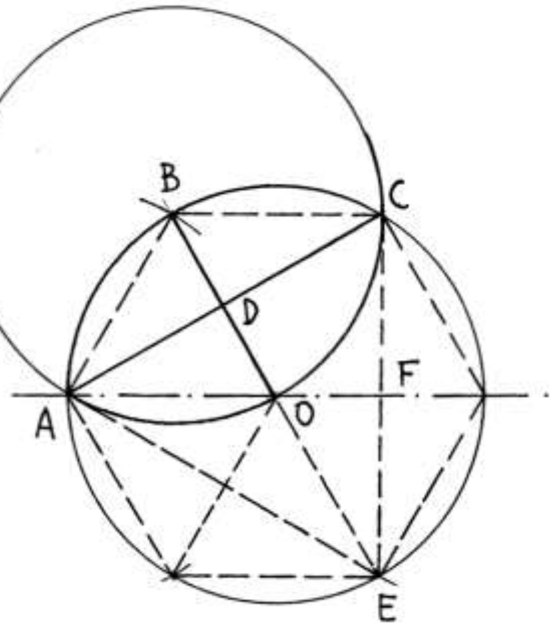
La figura è derivata dalla costruzione della *vesica pisces* come spiega la figura che segue:



O e B sono i centri dei due cerchi di raggio OB che si intersecano nei punti A e C: ABCO è il rombo formato da due triangoli equilateri (ABO e BCO) uniti lungo il lato comune BO. Ruotando la figura in senso orario di 60° intorno al punto O si riottiene la figura iniziale di questo paragrafo.

La seconda figura

La *lente* ABCO è originata dall'intersezione di due cerchi di raggio OB e centri in O e in B:



Anche in questo caso, il raggio del cerchio è lungo 0,5.

Come anticipato, la lunghezza *convenzionale* dell'arco ABC è 1.

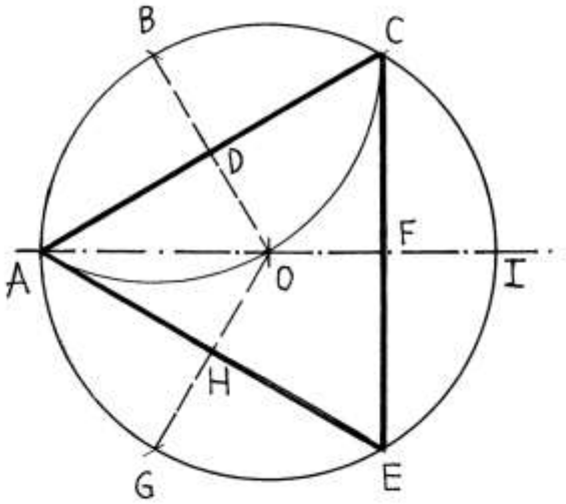
AC è una corda la cui lunghezza è stata calcolata nel precedente paragrafo perché essa è la diagonale maggiore del rombo ABCO ed è lunga 0,875.

La *lente* ABCO è formata dall'unione di due identici segmenti circolari (ABCD e ADCO) uniti lungo la comune corda AC.

Essi hanno *frecce* BD e DO di uguale lunghezza:

f = BD = DO = BO/2 = 0,5/2 = 0,25 .

Nella figura che segue è evidenziato il triangolo equilatero inscritto ACE:



I suoi lati sono tre corde del cerchio che hanno uguale lunghezza.

La differenza fra l'area del cerchio e quella del triangolo è data da tre segmenti circolari: ABCD, CIEF e EGAH.

Occorre ora calcolare l'area dei tre segmenti circolari.

L'area del cerchio è (con $\pi \approx 3$):

$$\text{Area}_{\text{cerchio}} = \pi * r^2 \approx 3 * 0{,}5^2 \approx 0{,}75 .$$

L'area del triangolo ACE è data dal semiprodotto del lato per l'altezza:

Area $_{ACE}$ = CE * AF/2 = AC * AF/2 .

Dal precedente paragrafo conosciamo la lunghezza di AC, che è 0,875.

I Babilonesi calcolavano l'area di un triangolo equilatero usando la costante approssimata 0,875 (rapporto fra l'altezza e il lato), per cui

Area $_{ACE}$ ≈ AC * (AC + 0,875)/2 ≈ $0{,}875^3/2$ ≈ 0,335.

Insieme, i tre segmenti circolari hanno area:

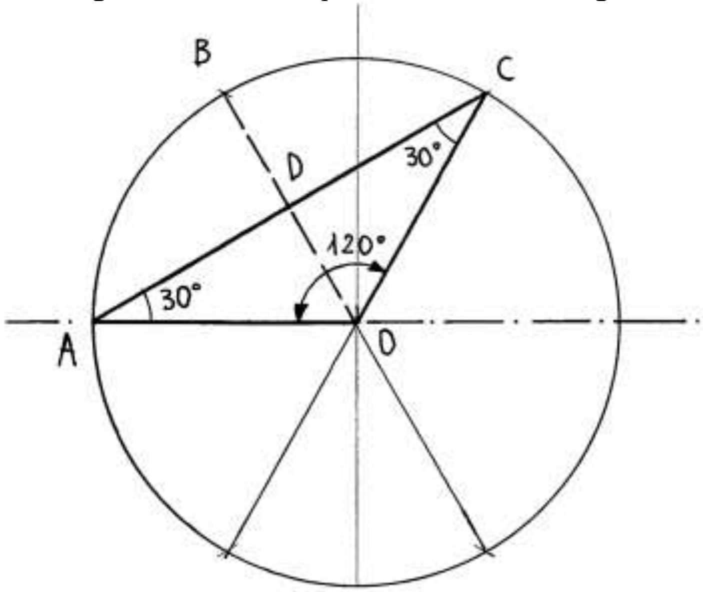
Area $_{3\ segmenti}$ = Area $_{cerchio}$ – Area $_{ACE}$ ≈ 0,75 – 0,335 ≈ 0,415 .

La *lente* ABCO è formata da due segmenti circolari e la sua area è uguale a 2* 1/3 = 2/3 di quella della somma delle aree dei tre segmenti appena calcolata:

Area $_{ABCO}$ ≈ 2/3 * 0,415 ≈ 0,2766 .

La terza figura

ACO è un triangolo isoscele del quale sono note le lunghezze dei lati:



OA e OC sono due raggi del cerchio e misurano 0,5. Come già calcolato nella descrizione delle due precedenti figure, la corda AC è lunga 0,875.

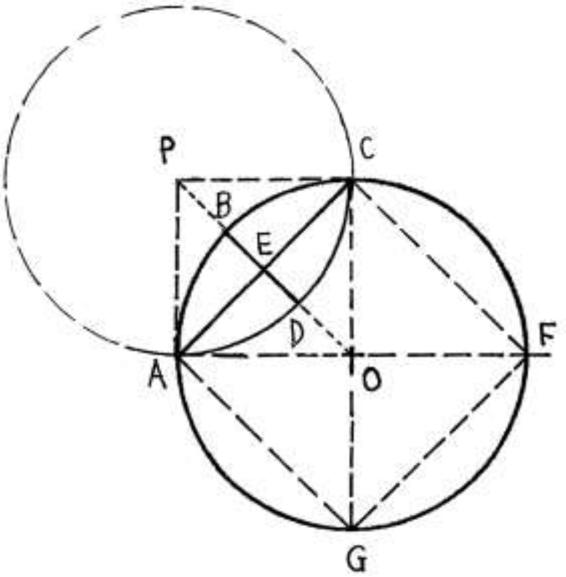
L'altezza OD è metà del raggio OB ed è 0,25.

L'area del triangolo ACO è:

Area $_{ACO}$ = OD * AC/2 ≈ 0,25 * 0,875/2 ≈ 0,109375 .

La quarta figura babilonese

La corda AC è un lato del quadrato inscritto ACFG ed è anche la diagonale del quadrato APCO:



La lente ABCD è racchiusa fra due cerchi di raggio uguale a OA e centri in O e in P.

L'arco ABC è *convenzionalmente* lungo 1 e sottende un angolo AOC ampio 90°. L'intera circonferenza, *c*, è lunga

$c = 4 * ABC = 4 * 1 = 4$.

Con il valore convenzionale $\pi = 3$, la circonferenza è lunga $c = 6 *$ raggio . Ne consegue che il raggio OA vale: $OA = c/6 = 4/6 = 2/3 = 0,(66)$ e il diametro d = AF è lungo il doppio e cioè 4/3.

La corda AC è lunga: $AC = \sqrt{2} * OA = A = \sqrt{2} * 2/3 \approx 0,9428$; essa è un lato del quadrato ACFG la cui area è:

$\text{Area}_{\text{quadrato ACFG}} = AC^2 = (\sqrt{2} * 2/3)^2 = 8/9 \approx 0,(888)$.

Occorre determinare la lunghezza di PB e di BE: per evidenti ragioni di simmetria, i segmenti DO e ED sono lunghi rispettivamente quanto PB e BE.

Il segmento PE è lungo quanto EO ed entrambi sono metà della diagonale PO che, a sua volta, è lunga quanto la corda AC, perché sono le diagonali dello stesso quadrato APCO.

La lunghezza di PB è:

$PB = PO - BO = AC - \text{raggio } OB = \sqrt{2} * 2/3 - 2/3 = (\sqrt{2} - 1) * 2/3 \approx 0,276$.

La lunghezza di BE è data da:

$BE = PE - PB = ½ * AC - PB = ½ * (\sqrt{2} * 2/3) - (\sqrt{2} - 1) * 2/3 \approx$

$\approx 0,471 - 0,276 \approx 0,195$.

Ne consegue che

$PB = DO \approx 0,276$ e $BE = ED \approx 0,195$,

L'area della lente ABCD è data dalla somma delle aree, uguali, dei due segmenti circolari che la formano:

$\text{Area}_{\text{lente ABCD}} = \text{Area}_{\text{segmento ABCE}} + \text{Area}_{\text{segmento ADCE}} = 2 * \text{Area}_{\text{segmento ABCE}}$.

Attualmente, l'area di un *segmento circolare*, ad esempio quello ABCE, è calcolata con la formula

$$\text{Area}_{ABCE} = \frac{\text{raggio} \cdot (\text{arco} - \text{corda}) + \text{corda} \cdot \text{freccia}}{2} =$$

$$= \frac{OB \cdot (\widehat{ABC} - AC) + AC \cdot BE}{2} =$$

$$= \frac{2/3 \cdot (1 - 0{,}9428) + 0{,}9428 \cdot 0{,}195}{2} \cong$$

$$\cong 0{,}110923$$

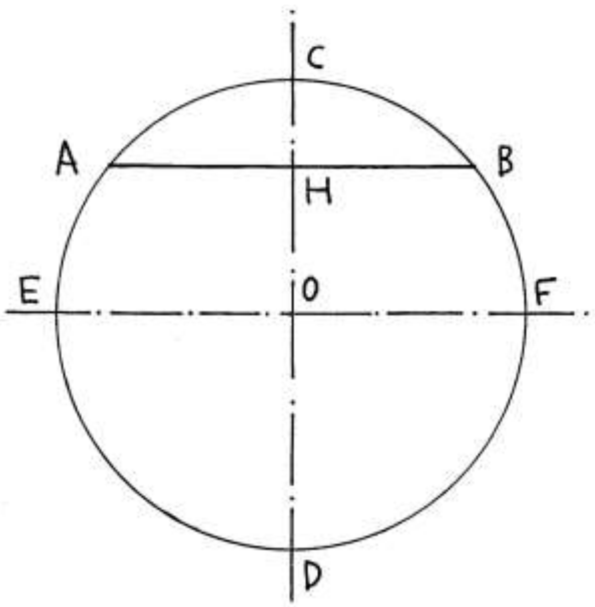
L'area dell'intera lente è il doppio:

Area $_{\text{lente ABCD}}$ = Area $_{\text{segmento ABCE}}$ ≈ 2 * 0,110923 ≈ 0,221846 .

\- APPROFONDIMENTO -

Il segmento circolare secondo gli scribi Babilonesi

La figura che segue rappresenta un *segmento circolare* ricavato da un cerchio di centro O e raggio OA = OB = OC.



I Babilonesi conoscevano una formula che regolava il rapporto fra le lunghezze del diametro *d* del cerchio originario, la freccia *f* e la corda *c*.

Nella figura sono: EF = CD = d CH = f e AB = c .

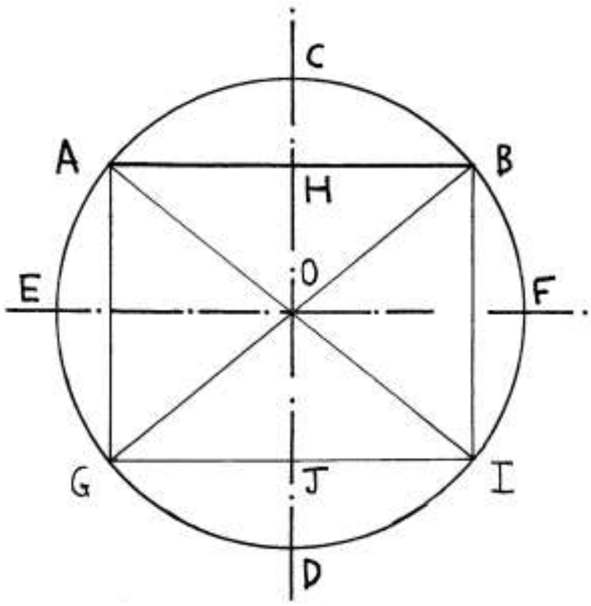
La formula babilonese è:

$$(d - 2*f)^2 + c^2 = d^2$$

[da Bruins – Rutten, "*Textes mathématiques de Suse*", p. 32].

La dimostrazione che segue conferma la validità della formula babilonese.

Tracciare i diametri AI e BG e le corde AG, BI e GI:



ABG è un triangolo rettangolo inscritto nel cerchio. Il cateto AB è la corda *c*. Il cateto AG è lungo quanto HJ:

AG = HJ = CD – CH – JD , ma essendo JD = CH, la formula diviene

AG = CD – 2*CH = d – 2*f .

L'ipotenusa AI è un diametro del cerchio: AI = d .

Applicando il teorema di Pitagora al triangolo ABG si ha:

$GB^2 = AG^2 + AB^2 \quad \rightarrow \quad AG^2 + AB^2 = GB^2$ che può essere scritta

$(d - 2*f)^2 + c^2 = d^2$, che è esattamente la formula babilonese.

Gli scribi babilonesi erano giunti a questa formula applicando il teorema di Pitagora?

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Una conferma delle dimostrazioni appena descritte viene dai problemi XX e XXI della tavoletta BM 85194: essa proviene dall'antica città, prima sumerica e poi babilonese, di Sippar e risale al periodo paleo-babilonese; nel suo insieme, la tavoletta a contiene 35 problemi di geometria piana e solida con le relative soluzioni. Essa fa parte di un gruppo di sette tavolette firmate da uno scriba di nome Iškur-mansum. Le tavolette sono oggi custodite in tre differenti musei di tre diverse città.

Il problema XX domanda la lunghezza della corda *c* di un segmento circolare: sono note la lunghezza, *p*, della circonferenza e quella della freccia *f* (CH nelle due ultime figure).

Il diametro è calcolato dividendo la lunghezza della circonferenza per la costante 3 (approssimazione di π):

d = p/3 .

La procedura usata dallo scriba contiene i seguenti passi:

*	moltiplicare per 2 la freccia:	2 * f ;
*	sottrarre l'ultimo prodotto dal diametro:	d – 2*f ;
*	calcolare il quadrato del diametro:	d^2 ;
*	elevare al quadrato (d – 2 * f):	$(d - 2 * f)^2$;
*	sottrarre l'ultimo quadrato da quello del diametro:	$d^2 - (d - 2 * f)^2$;
*	estrarre la radice quadrata dell'ultimo risultato: è la lunghezza della corda *c*.	

La procedura è sintetizzata con la formula

$$c = \sqrt{d^2 - (d - 2 \cdot f)^2}$$

che ripropone il risultato ottenuto in precedenza.

L'ultima figura sopra descrive la soluzione.

Nota: lo scriba chiama *trasversale* sia la corda che il diametro del cerchio. Forse ciò è dovuto al dato di fatto geometrico per una corda è *sempre* parallela a un diametro. Il termine *trasversale* veniva usato anche per designare una linea parallela alla base di un triangolo o di un trapezio.
La freccia era spesso chiamata *perpendicolare* [alla corda].

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Il problema XXI è l'inverso del precedente. Sono note la lunghezza della circonferenza, *p*, e quella della corda, *c*: il problema chiede la lunghezza della freccia *f* (CH nelle due ultime figure).

La procedura impiegata dallo scriba contiene i seguenti passi:

* elevare al quadrato il diametro (già calcolato nella soluzione del precedente problema XX): d^2 ;
* elevare al quadrato la corda: c^2 ;
* sottrarre l'ultimo quadrato dal primo: $d^2 - c^2$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{(d^2 - c^2)}$;
* sottrarre l'ultima risultato da d: $d - \sqrt{(d^2 - c^2)}$;
* dividere per 2: $\frac{1}{2} * (d - \sqrt{(d^2 - c^2)})$: è la lunghezza della freccia *f*.

La procedura è riassunta con la formula che segue:

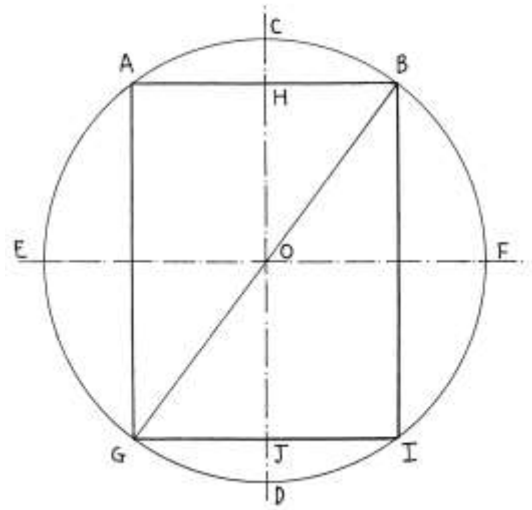
$$f = \frac{d - \sqrt{d^2 - c^2}}{2}$$

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

I dati usati dallo scriba babilonese nei problemi XX e XXI sono i seguenti (in notazione *decimale*):

* lunghezza circonferenza: p = 60 ;
* diametro: d = 1/3 * p = 20 ;
* corda (AB): c = 12 ;
* freccia (CH): f = 2.

La figura che segue riproduce, in scala, la situazione affrontata dai due problemi:



I triangoli ABG e GBI sono rettangoli perché inscritti nei due semicerchi che formano il cerchio di centro O e hanno uguali dimensioni.

I cateti AB e GI sono lunghi quanto la corda $c = 12$.

I cateti AG e BI hanno la stessa lunghezza di HJ che è lungo

$$HJ = CD – CH – JD .$$

Dato che CH è lungo quanto lo è JD e cioè quanto la freccia *f*, la formula precedente diviene:

$$HJ = d – f – f = d – 2 * f = 20 – 2*2 = 16 = AG = BI.$$

L'ipotenusa GB è comune ai due triangoli rettangoli ed è lunga quanto il diametro $d = 20$.

Pertanto i due triangoli rettangoli hanno lati lunghi 12, 16 e 20: si tratta della terna pitagorica 3-4-5 i cui componenti sono moltiplicati per 4.

Per entrambi vale la relazione $AB^2 + AG^2 = GB^2$ che può essere scritta come

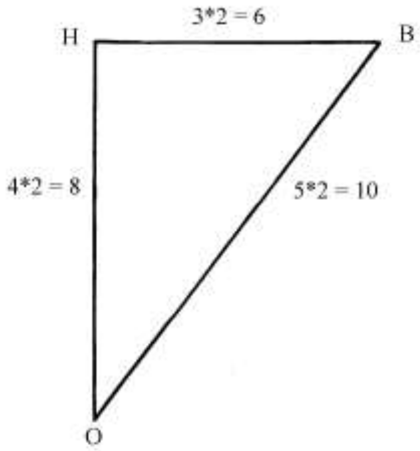
$$c^2 + (d – 2*f)^2 = d^2 .$$

Da questa ultima formula derivano quelle, già incontrate, per ricavare le lunghezze della corda *c* e della freccia *f*.

Infine, lo scriba dimostra di conoscere l'angolo retto inscritto in un semicerchio e cioè comprende che un triangolo inscritto in un semicerchio è sempre *rettangolo*, in ciò anticipando Il lavoro di Talete (Talete di Mileto, secoli VII-VI a.C.).

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Il triangolo rettangolo OHB ha lati lunghi 8-6-10 o, in altri termini, si tratta di un triangolo con lati lunghi quanto la terna pitagorica 3-4-5 moltiplicata per 2, come spiega la figura:



Maurice Caveing ha avanzato l’ipotesi che gli scribi babilonesi conoscessero il c.d. *teorema di Pitagora* ma lo applicassero solo a *triangoli razionali* (come quelli basati sulla terna 3-4-5) e cioè aventi lati con lunghezze rappresentate da numeri interi o da frazioni sessagesimali finite.

Sempre Caveing (a p. 187 del suo monumentale testo) suggerisce che lo scriba abbia usato, senza renderla esplicita, una procedura aritmetica per fissare le lunghezze dei lati del triangolo rettangolo OHB.

La formula $c^2 + (d - 2*f)^2 = d^2$ viene trasformata in $(d - 2*f)^2 = d^2 - c^2$ da cui discende la seguente: $\sqrt{(d^2 - c^2)} = d - 2*f$

A questo punto egli avrebbe introdotto il numero ausiliario $n = 2*f$.

Ciò avrebbe per conseguenza l’uguaglianza

$d - 2*f = n*(n + 1) - n$ che, semplificando, diviene $(d - 2*f) = n^2$.

Dato che il diametro *d* e la freccia *f* sono lunghi rispettivamente 20 e 2, la formula precedente diviene:

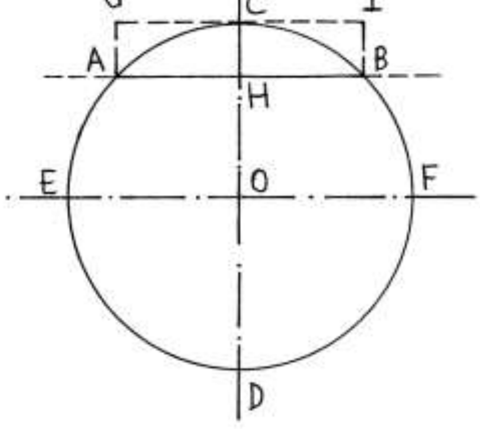
$$(20 - 2*2) = 16 = n^2 .$$

Ulteriori operazioni aritmetiche effettuate su n = 4 avrebbero portato lo scriba a costruire il triangolo rettangolo 2*(3-4-5):

$d/2 = 10 = 5 * (4/2) = 5 * (n/2)$
$c/2 = 6 = 3 * (4/2) = 3 * (n/2)$
$(d/2) - f = 10 - 2 = 8 = 2 * n = 4 * (n/2)$.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Il problema XXIX della tavoletta BM 85194 considera un segmento circolare di cui chiede l’area:



In *notazione decimale*, l'arco ACB = *a* è lungo 60 e la corda AB = *c* è lunga 50.

La soluzione del problema è basata su di una approssimazione: la lunghezza della freccia CH = *f* è calcolata come differenza fra quelle dell'arco e della corda:

CH = ACB – AB → f = a – c .

La procedura impiegata dallo scriba contiene i seguenti passi:

* calcolare la *differenza* fra le lunghezze dell'arco e della corda: a – c = f
  60 – 50 = 10 ;
* moltiplicare la *differenza* per la corda: f * c = 10 * 50 = 500 ;
* elevare al quadrato la *differenza*: $f^2 = 10^2 = 100$;
* sottrarre il secondo prodotto dal precedente: 500 – 100 = 400, area del segmento circolare.

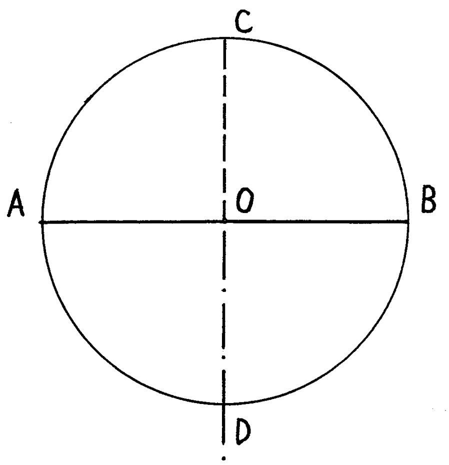
- APPROFONDIMENTO -

La precedente procedura può essere sintetizzata con le seguenti formule:

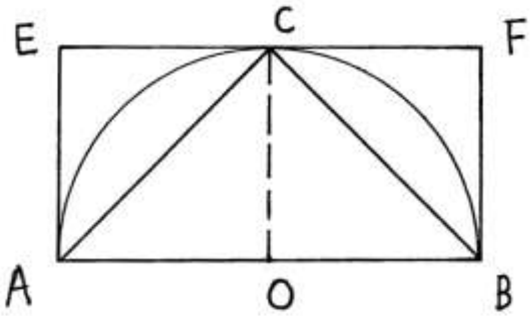
a – c = f

Area = $(a – c) * c – (a – c)^2/2$.

Per approfondire il senso di questa formula, Caveing la applica a un semicerchio ricavato dal cerchio diviso a metà lungo il diametro AB:



Il semicerchio ACB è inscritto nel rettangolo AEFB:



L'arco ACB è lungo *a*, AB è il diametro *d* e la freccia OC è un raggio *r*.

Applicando la formula usata dallo scriba per calcolare l'area del segmento circolare ACB si ha:

Area = $(\pi * r – 2 * r) * 2*r – (\pi + r – 2 * r)^2/2$.

Sostituendo a π il valore approssimato 3, la precedente espressione diviene:

$A = (3*r – 2*r) * 2*r – (3*r – 2*r)^2/2 = 2*r^2 – r^2/2 = (3/2) * r^2$.

Ma $2*r^2$ è l'area del rettangolo AEFB e $r^2/2$ è l'area del triangolo rettangolo isoscele AOC.

Infatti:

$$\text{Area}_{AEFB} = AB * AE = 2*r * r = 2*r^2 \quad \text{e}$$
$$\text{Area}_{AOC} = AO * OC/2 = r * r/2 = r^2/2 \ .$$

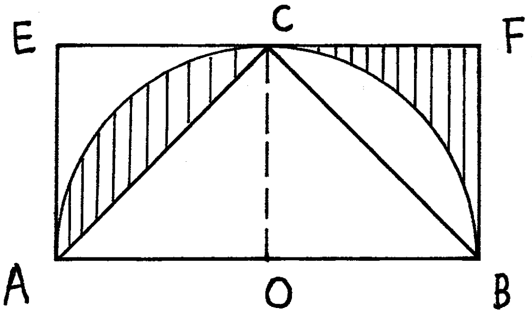
L'espressione $A = (3/2) * r^2$ può quindi essere scritta come

$$(3/2) * r^2 = \text{Area}_{AEFB} - \text{Area}_{AOC} \ .$$

Infine, l'area del triangolo rettangolo ACB è

$$\text{Area}_{ACB} = AB * OC/2 = 2*r * r/2 = r^2 \ .$$

Caveing giustifica questa formula con l'ipotesi (implicita nella procedura dello scriba) che l'area del segmente circolare AC (tratteggiato nella figura che segue) sia equivalente a quella del triangolo curvilineo BFC (anch'esso tratteggiato):



Questa ipotesi avrebbe portato lo scriba a calcolare l'area del semicerchio (che è considerato come un segmento circolare) come la *media aritmetica* fra l'area del rettangolo AEFB e quella del triangolo ACB:

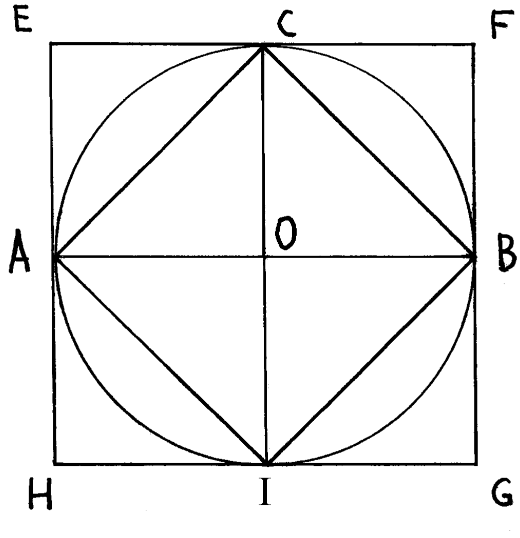
$$\text{Area}_{SEMICERCHIO} = (\text{Area}_{AEFB} + \text{Area}_{ACB})/2 = (2*r^2 + r^2)/2 = (3/2) * r^2 \ .$$

L'area di un semicerchio è data da:

$$\text{Area}_{SEMICERCHIO} = \tfrac{1}{2} * \pi * r^2 \ .$$

Confrontando le due ultime dell'area del semicerchio si conferma $\pi = 3$.

Ma AEFB è metà di un quadrato e lo è pure ACB come mostra la figura che segue:



Come anticipato alle pagine 4-5, nel paragrafo "*L'origine dell'approssimazione $\pi \approx 3$*", l'area del cerchio veniva stimata Babilonesi come la *media aritmetica* fra le aree del quadrato circoscritto (HEFG) e del quadrato inscritto (ACBI).

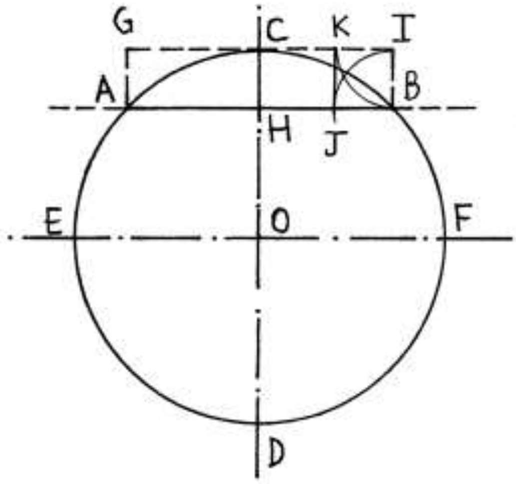
Per analogia, l'area del semicerchio ACB è uguale alla media aritmetica fra le aree del rettangolo (doppio quadrato) AEFB e del triangolo isoscele ACB.

- -

Il prodotto f * c equivale all’area del rettangolo AGIB:

Area $_{AGIB}$ = AB * AG = AB * CH = c * f .

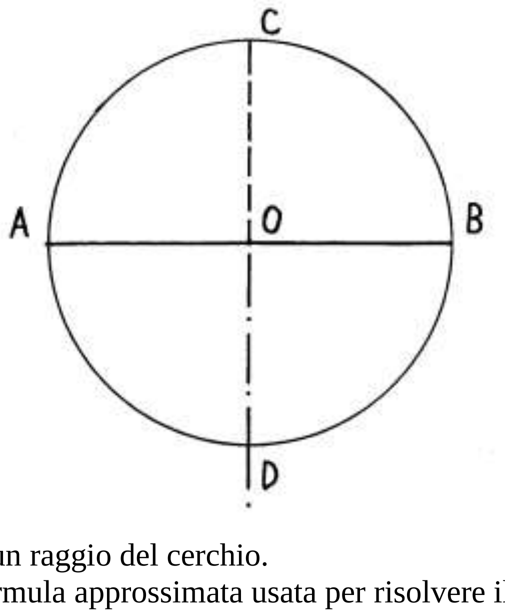
Lo scriba calcola l’area del segmento circolare ACBH sottraendo l’area del quadrato IBJK da quella del rettangolo AGIB: l’area del segmento circolare è equiparata a quella del rettangolo AGKJ.



%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

La formula approssimata usata per risolvere il problema XXIX della tavoletta BM 85194 può forse avere una giustificazione.

Nel caso della figura che segue il segmento circolare ACB è delimitato da una *semicirconferenza* e dal diametro AB, a sua volta formato dai due raggi AO e OB, perfettamente allineati: in realtà ACBO è un *settore circolare*.



La *freccia* OC è un raggio del cerchio.

Applicando la formula approssimata usata per risolvere il precedente problema, si ottiene:

OC = ACB – AB .

Ma l’arco ACB è lungo

ACB = ½ * circonferenza = ½ * 3 * diametro = ½ * 6 * raggio = 3 * raggio.

Il diametro AB è lungo d = 2 * raggio.

Sostituendo questi valori nella formula approssimata si ha:

OC = f = 3 * raggio – 2 * raggio = raggio: la freccia è lunga quanto il raggio.

L’uso del valore 3 quale approssimazione di π ha forse portato gli scribi babilonesi ad usare la formula approssimata freccia = arco – corda ?

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Un metodo approssimato più vicino alla soluzione esatta del problema relativo al calcolo dell’area di un segmento circolare fu impiegato dall’abacista fiorentino Paolo Gherardi nel suo trattato “*Liber habaci*”, composto probabilmente prima del 1328.

Gherardi recepì la costante approssimata 11/14 quale rapporto fra l’area di un cerchio e quella di un quadrato ad esso circoscritto, costante risalente a Archimede.

La formula di Gherardi per calcolare l’area di un segmento circolare è:

$$\text{Area}_{\text{SEGMENTO}} = 11/14 * \text{corda} * \text{freccia} .$$

La formula assume che l’area del segmento circolare ACBH sia uguale a 11/14 di quella del rettangolo AGIB.

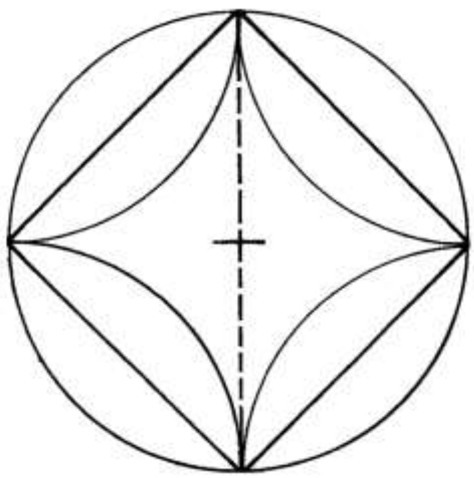
Applicandola al segmento del problema XXIX il risultato è:

$\text{Area}_{\text{SEGMENTO}} = 11/14 * 50 * 10 \approx 392{,}857$, valore che si discosta poco dal risultato ottenuto dallo scriba babilonese (400).

- -

Origine del quadrato concavo

In Mesopotamia, fin dal VI millennio a.C. si è diffusa la figura geometrica nota con il termine accadico *apsamikkum* e consistente in un quadrato concavo:

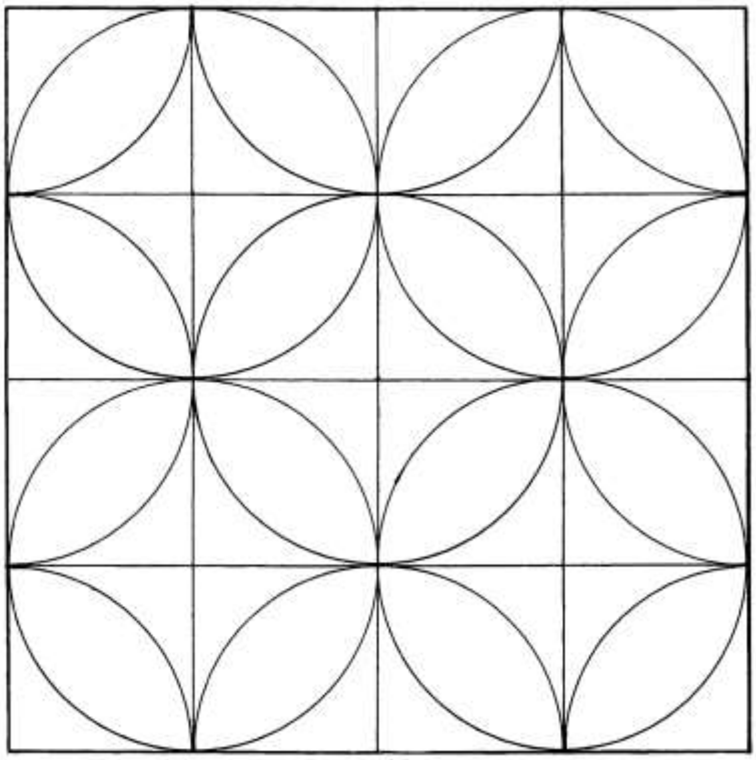


La figura fu inizialmente incisa su vasi risalenti all’epoca della *cultura di Halaf* e in seguito ampiamente riprodotto su altri manufatti.

Alcune tavolette di natura matematica presentano il quadrato concavo. Ne è esempio lo schema indicato con la sigla “xl” (“XL” secondo le convenzioni usate in Italia), contenuto nella tavoletta paleobabilonese BM 15825, conservata a Londra, probabilmente risalente al XVIII secolo a.C. e creata nell’antica città sumerica di Larsa, nell’attuale Iraq meridionale.

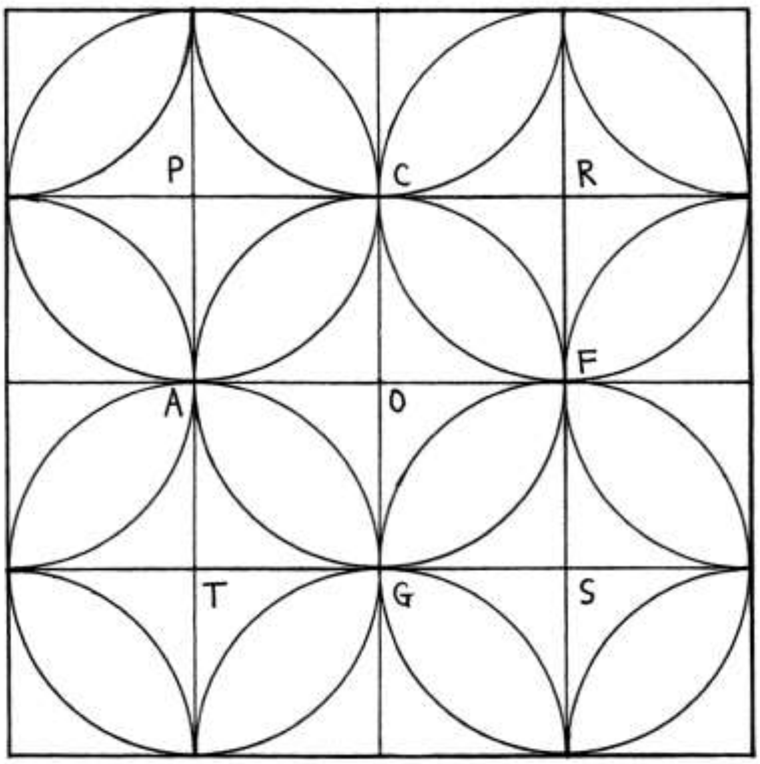
La tavoletta conteneva 40 o 41 problemi geometrici relativi a divisioni di figure piane e a calcoli delle loro aree. Si trattava di una specie di manuale geometrico, forse destinato a artigiani e costruttori.

Lo schema che segue riproduce il grafico numero “xl” [“XL”]:

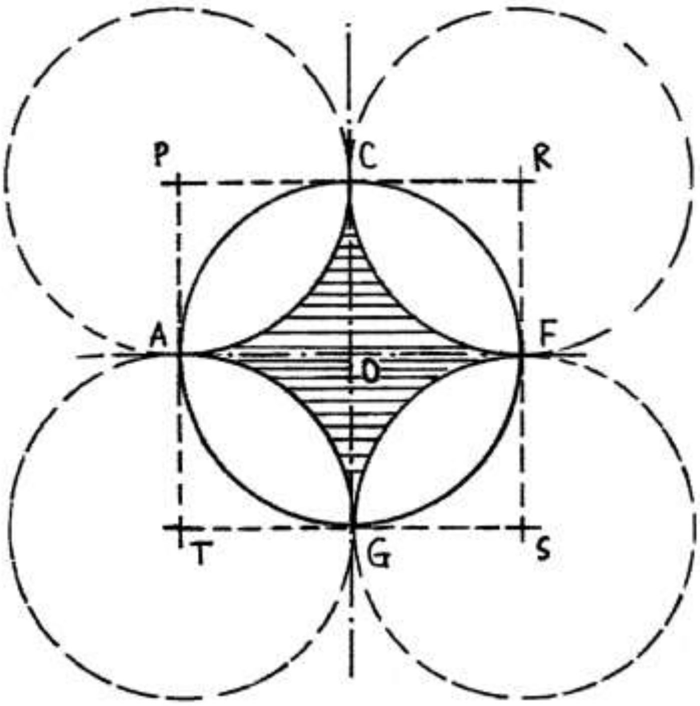


In una matrice quadrata formata da 4x4 quadratini sono disegnati (4 + 1) identici quadrati concavi che si intersecano con quello centrale.

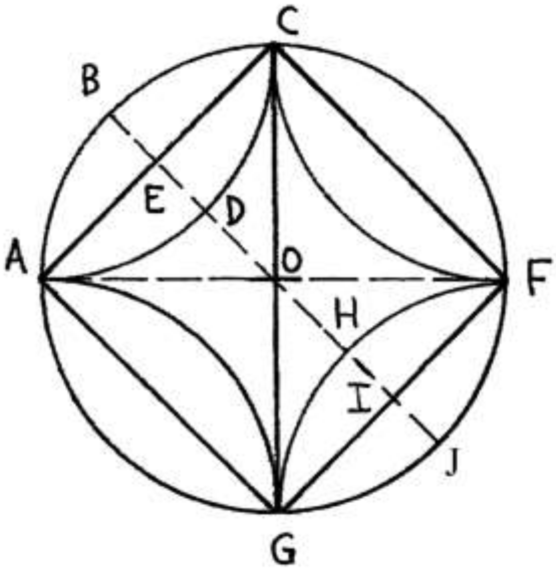
Consideriamo uno dei cinque quadrati concavi: quello ACFG che ha centro in O ed è inscritto nel cerchio centrale, a sua volta inscritto nel quadrato PRST:



Il quadrato concavo è evidenziato nella figura che segue il tratteggio orizzontale:



Prolungare verso l'interno il raggio BO (già tracciato nell'ultima figura del precedente paragrafo) fino a determinare i punti H, I e J:



Nella figura è tracciato il quadrato inscritto ACFG che ha area (già calcolata in 8/9), uguale a metà di quella di PRST.

Il *quadrato concavo* ACFG ha le dimensioni massime rappresentate dai diametri AF e CG e dimensioni minime uguali a DH.

Come anticipato in precedenza, gli archi di circonferenza che delimitano il quadrato concavo sono tutti lunghi quanto quello ABC e cioè, *convenzionalmente*, 1.

Abbiamo già calcolato le lunghezze di alcuni dei segmenti tracciati nella figura.

Il segmento DH è lungo il doppio di DO e cioè

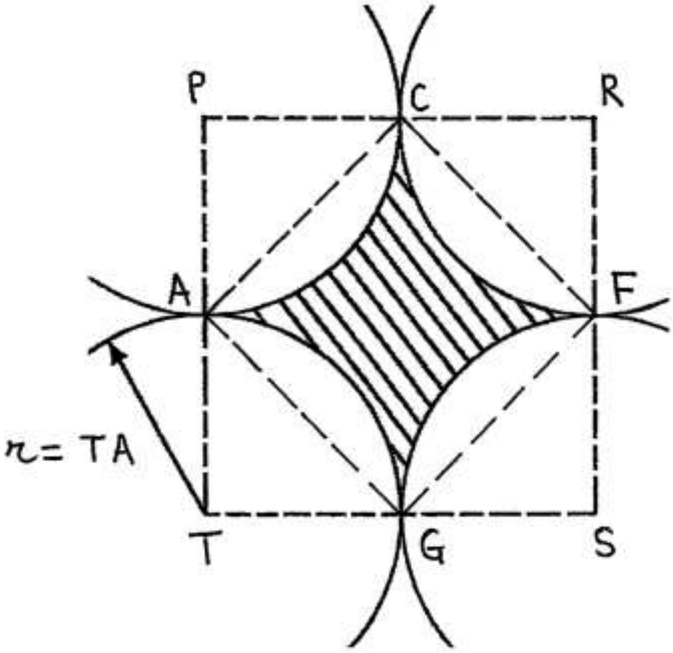
$$DH = 2 * DO \approx 2 * 0{,}276 \approx 0{,}552 .$$

La lunghezza di DH può essere determinata in altro modo:

$DH = PS – PD – HS = \sqrt{2} * BJ – 2 * PD = \sqrt{2} * d – d = d * (\sqrt{2} – 1) =$
$= 4/3 * (\sqrt{2} – 1) \approx 4/3 * 5/12 \approx 5/9$: gli scribi Babilonesi arrotondarono a 5/12 l'espressione $(\sqrt{2} – 1)$: $(\sqrt{2} – 1) \approx 5/12$.

L'area del *quadrato concavo* ACFG è uguale a quella del quadrato PRST *meno* le aree dei quattro segmenti circolari (che sottendono angoli di 90°), tracciati facendo centro nei vertici del quadrato:

$\text{Area}_{\text{concavo ACFG}} = \text{Area}_{\text{PRST}} – 4 * \text{Area}_{\text{lente ABCD}} = 2 * \text{Area}_{\text{quadrato inscritto ACFG}} – 4 * \text{Area}_{\text{lente ABCD}}$.



Dato che in precedenza abbiamo già calcolato l'area del quadrato inscritto ACFG, possiamo sostituire il suo valore (8/9) nell'ultima formula:

$\text{Area}_{\text{concavo ACFG}} \approx 2 * 8/9 – 4 * 0{,}221849 \approx 1(77) – 0{,}887386 \approx 0{,}80904$.

La formula dell'area del quadrato concavo ACFG può essere scritta in altro modo. Fissiamo alcuni parametri:

* *a* è la lunghezza dei quattro archi AC, CF, FG e GA e vale *convenzionalmente* 1;
* *r* è il raggio dei quattro archi di circonferenza di centro P, R, S e T.

L'area di uno dei *quattro quadranti*, ad esempio quello TAG, è:

$\text{Area}_{\text{quadrante TAG}} = \pi * TA^2/4 = \pi * r^2/4$.

L'area del quadrato PRST è:

$\text{Area}_{\text{quadrato PRST}} = TP^2 = (2 * r)^2 = 4 * r^2$.

L'area dei *quattro quadranti* equivale a quella di un cerchio di raggio *r*:

$\text{Area}_{\textit{quattro quadranti}} = 4 * \text{Area}_{\text{quadrante TAG}} = 4 * (\pi * r^2/4) = \pi * r^2$.

Per differenza, l'area del quadrato concavo ACFG è data da:

$\text{Area}_{\text{concavo ACFG}} = \text{Area}_{\text{quadrato PRST}} – \text{Area}_{\textit{quattro quadranti}} = 4 * r^2 – \pi * r^2 = r^2 * (4 – \pi)$.

La circonferenza *c* di un cerchio di raggio *r* è lunga: $c = 2 * \pi * r$.

Come già più volte ricordato, gli archi ABC = ADC sono lunghi 1 e rappresentano *un quarto* della lunghezza della circonferenza di raggio OA: $c = 4 * a = 2 * \pi * r$, da cui risulta

$2 * \pi * r = 4 * 1$ e

$r = c/(2 * \pi) = 4/(2 * \pi) = 2/\pi$.

Sostituendo questo ultimo valore nella formula dell'area del quadrato concavo si ha:

Area $_{\text{concavo ACFG}} = 4 * (2 * a/\pi)^2 - \pi * (2 * a/\pi)^2 = 16 * a^2/\pi^2 - 4 * a^2/\pi =$
$= a^2 * (16/\pi^2 - 4/\pi)$.

L'espressione racchiusa fra parentesi è una *costante, k*

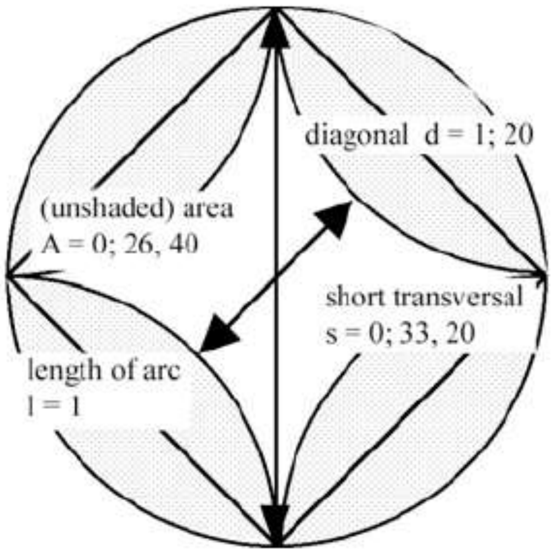
$k = (16/\pi^2 - 4/\pi)$.

Dato che i Babilonesi usavano quasi sempre l'approssimazione $\pi = 3$, la costante k diviene:

$k = 16/9 - 4/3 = (16 - 12)/9 = 4/9$.

In modo approssimato, l'area del quadrato concavo ACFG equivale a 4/9 dell'area del quadrato PRST.

Nella numerazione sessagesimale, 4/9 equivale a 0; 26 40, come calcolato dagli scribi Babilonesi e come è riportato nella figura che segue, rielaborata da Eleanor Robson (2008, p. 214).



La figura riporta le lunghezze e le aree, espresse in notazione sessagesimale, del quadrato concavo fin qui descritto.

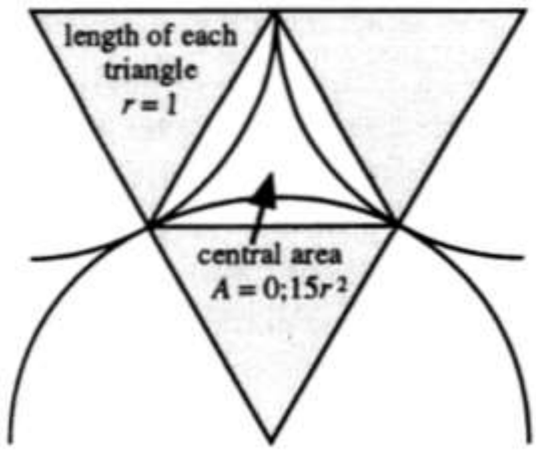
Conclusioni

La soluzione di questi complessi problemi da parte degli scribi Babilonesi fa comprendere quanto elevate fossero le loro conoscenze matematiche.

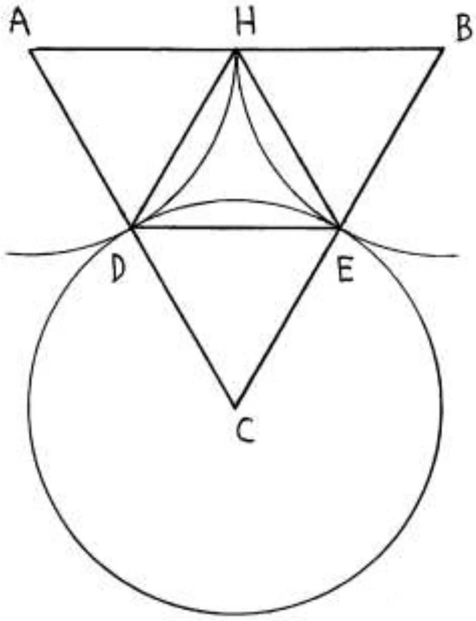
Le tavolette mesopotamiche forniscono le lunghezze di archi, corde e segmenti e delle aree da essi delimitate ma non descrivono i metodi impiegati per conseguire quei risultati.

TRIANGOLI EQUILATERI

La tavoletta IM 52916 proveniente da Tell Harmal in Iraq (l'antica Shaduppum, città paleobabilonese situata presso Baghdad) contiene fra l'altro il triangolo equilatero concavo che è anch'esso chiamato *apsamikkum* dalla Robson (a pagina 53 del suo studio del 1999), come i *quadrati concavi* già incontrati:



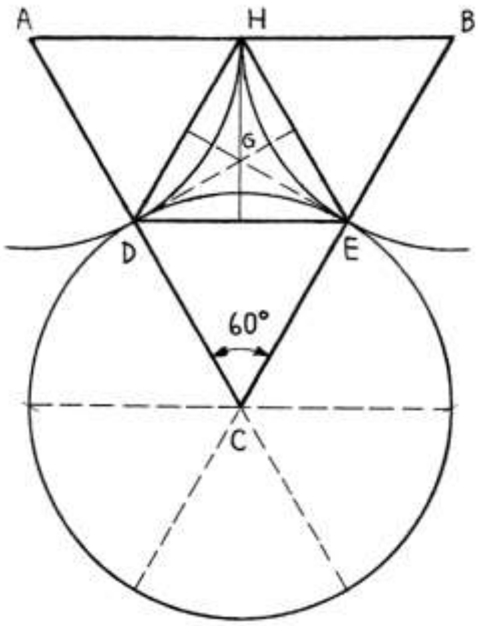
Il triangolo equilatero ABC è scomposto in *quattro* triangoli equilateri di uguali dimensioni:



I lati di ciascuno dei quattro più piccoli triangoli equilateri sono *convenzionalmente* lunghi 1 e quelli del triangolo ABC sono lunghi 2.

Con raggio AH fare centro nei vertici A, B e C e disegnare tre archi di circonferenza: essi delimitano il triangolo equilatero *concavo* DHE.

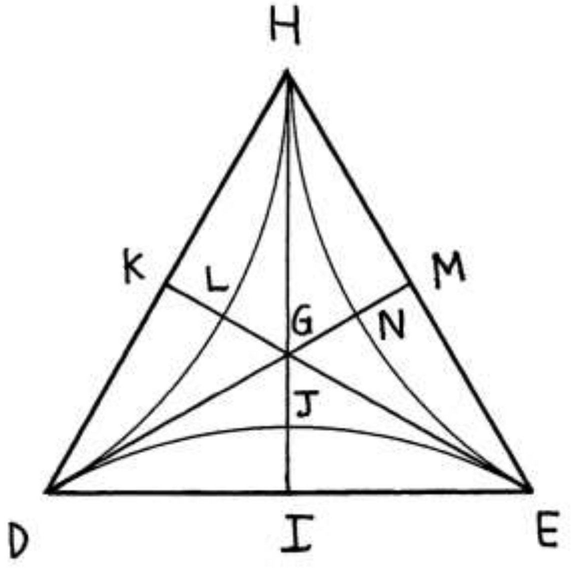
La costruzione è poi ampliata:



L’angolo DEC è ampio 60° e cioè 1/6 dell’angolo giro. DE è un lato dell’esagono inscritto nel cerchio di centro C.

Consideriamo il triangolo equilatero DHE: il punto G è l’incrocio delle sue altezze (e delle mediane, delle bisettrici e degli assi dei lati).

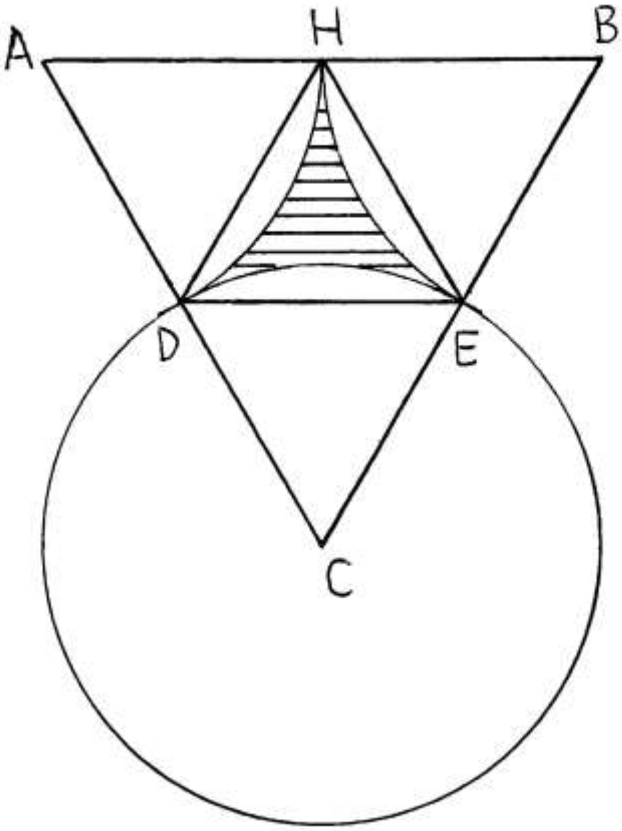
Nella figura che segue sono disegnate tutte le altezze di DHE: HI, EK e DM.



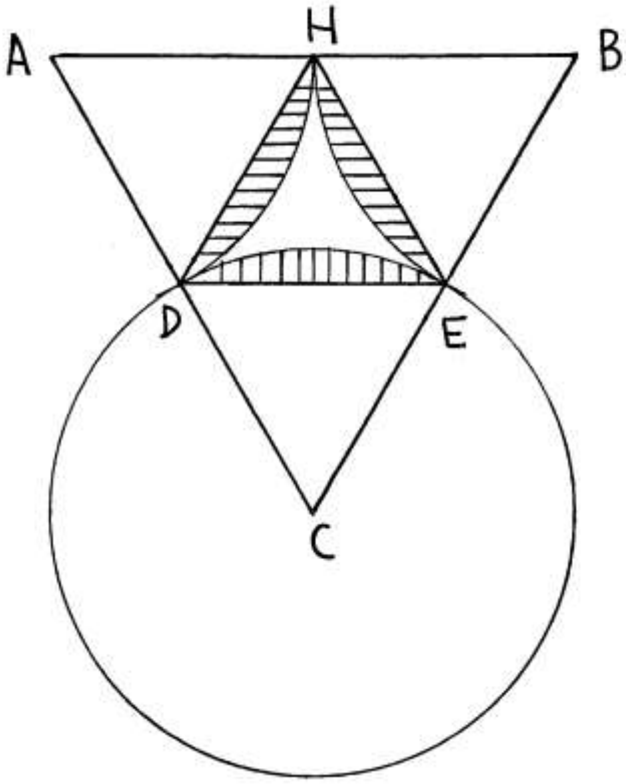
I punti J, L e N sono le intersezioni degli archi con le altezze.

La figura DLHNEJ è il *triangolo equilatero concavo* di cui gli scribi Babilonesi calcolarono l’area.

Il tratteggio mette in evidenza l’area occupata dal triangolo equilatero concavo:



La sua area è data da quella del triangolo equilatero DHE dalla quale vanno *sottratte* le aree dei tre segmenti circolari tratteggiati nella figura che segue:



L'area del triangolo equilatero DHE era calcolata dai Babilonesi impiegando la costante approssimata 0,875 quale rapporto fra l'altezza e un lato:

Area $_{DHE}$ = HI * DE/2 = (0,875 * DE) * DE/2 = (0,875 * 1) * ½ = 0,4375 = Area $_{\text{triangolo CDE}}$.

L'area di uno dei tre segmenti circolari, ad esempio quello DJEI, è data dalla differenza fra l'area del settore circolare CDE e quella del triangolo equilatero CDE, che ha le stesse dimensioni del triangolo DHE.

L'area del settore CDJE è:

$$\text{Area}_{\text{settore CDJE}} = 1/6 * \text{Area}_{\text{cerchio}} = 1/6 * \pi * r^2 \approx 1/6 * 3 * 1^2 \approx 0{,}5 .$$

Pertanto, l'area di DJEI è:

$$\text{Area}_{\text{segmento DJEI}} = \text{Area}_{\text{settore CDJE}} - \text{Area triangolo CDE} = 0{,}5 - 0{,}4375 = 0{,}0625 .$$

L'area complessiva dei tre segmenti da sottrarre dall'area del triangolo DHE è:

$$3 * 0{,}0625 = 0{,}1875 .$$

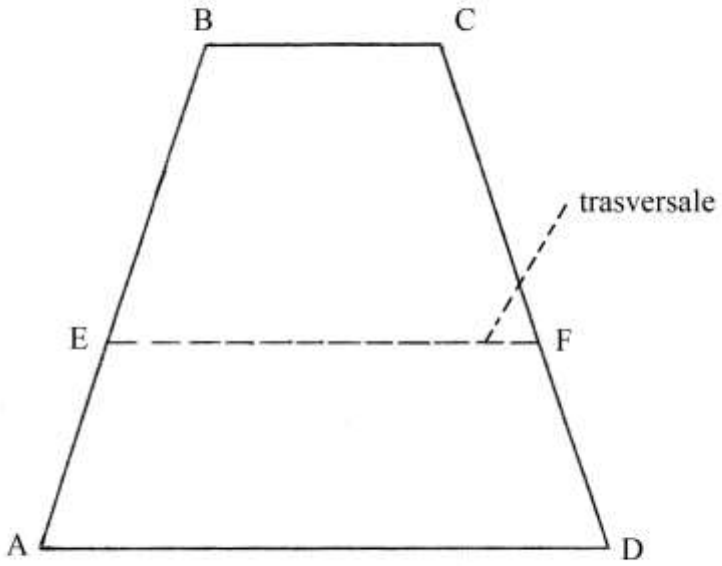
Il triangolo concavo DHE ha superficie uguale a

$$\text{Area}_{\text{triangolo concavo DHE}} = \text{Area}_{\text{triangolo DHE}} - 3 * \text{Area}_{\text{segmento DJEI}} =$$
$$= 0{,}4375 - 0{,}1875 = 0{,}25 .$$

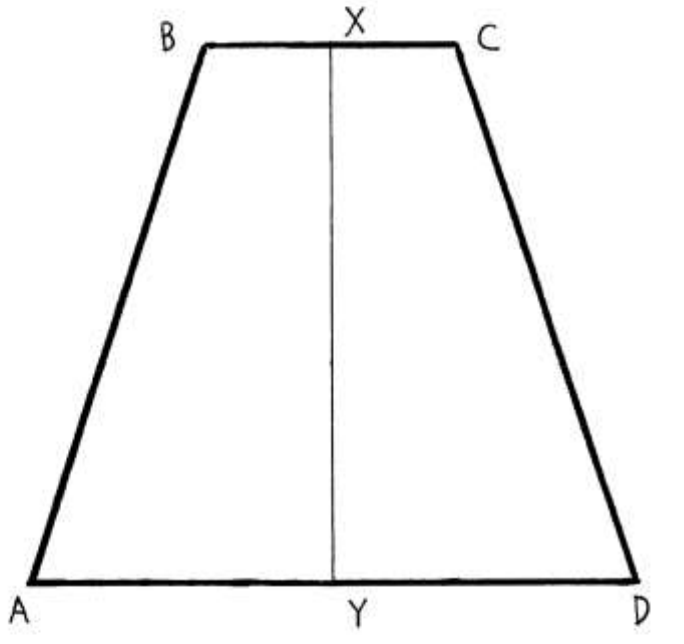
TERNE BABILONESI

Divisione di un trapezio isoscele

Il trapezio isoscele ABCD deve essere diviso in due parti di uguale superficie con una *trasversale*, EF, parallela alle due basi:



Il problema sarebbe risultato di più semplice soluzione nel caso mostrato nella figura che segue:

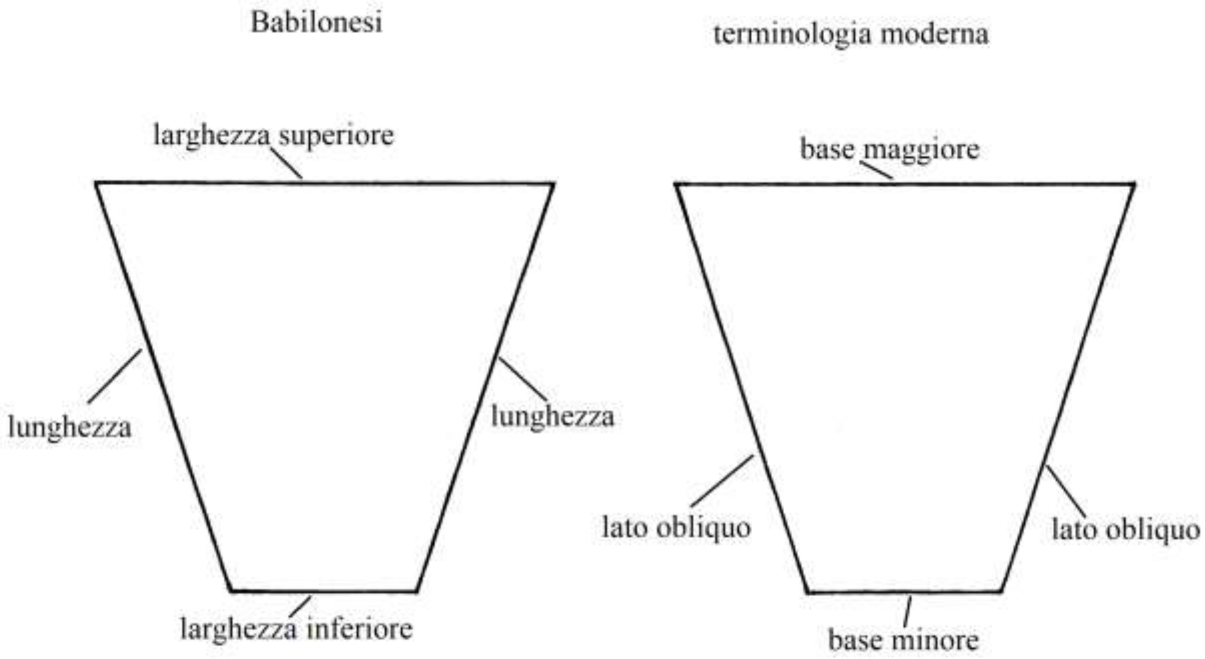


Il segmento XY è la mediana del trapezio isoscele e un suo asse di simmetria. Esso collega i punti medi delle due basi, X e Y.

XY divide il trapezio isoscele ABCD in due *trapezi rettangoli*, ABXY e YXCD, che hanno uguale superficie.

- APPROFONDIMENTO -

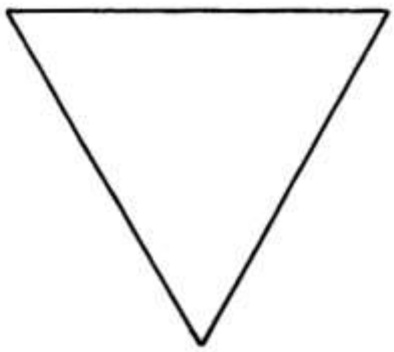
Per indicare i lati di un trapezio i Babilonesi usavano dei termini geometrici differenti da quelli oggi impiegati. La figura che segue mette a confronto le due diverse terminologie:



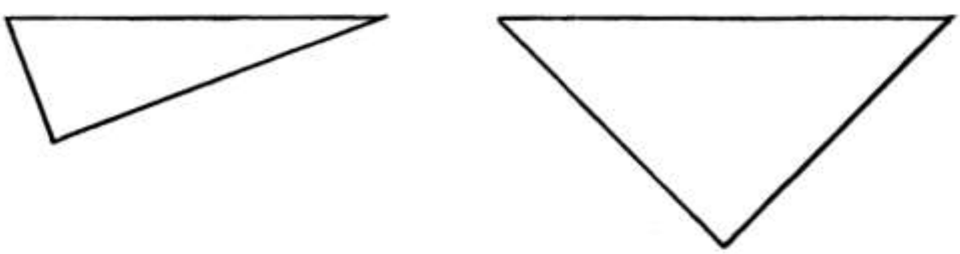
Nel precedente paragrafo, il trapezio è stato disegnato con la base maggiore in basso e quella minore in alto: invece, i Babilonesi disegnavano il trapezio con la base maggiore in alto, come è mostrato nella figura qui sopra.

Il trapezio era chiamato *fronte di un bue*.

Il triangolo isoscele era disegnato come nella figura che segue:

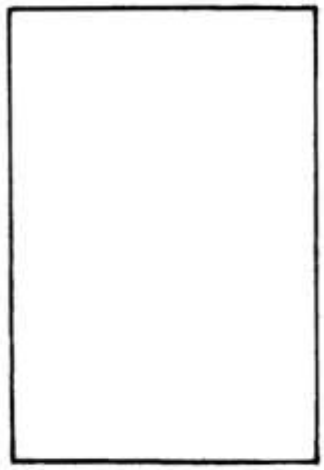


A sinistra è un triangolo rettangolo scaleno e a destra un triangolo rettangolo isoscele:

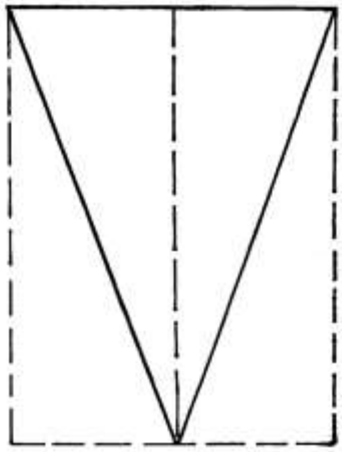


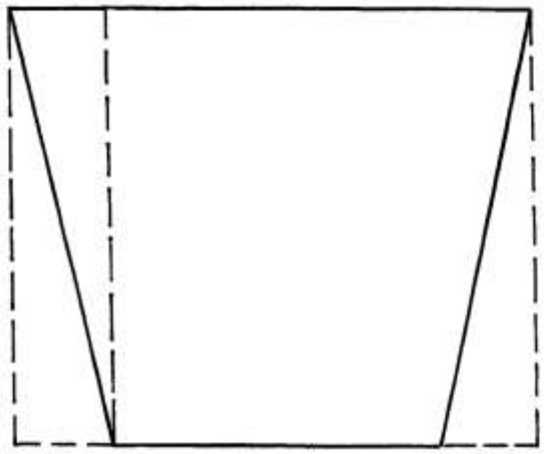
In entrambi i casi l'ipotenusa era tracciata orizzontalmente e posizionata in alto.

Un rettangolo veniva spesso disegnato con i lati corti disposti orizzontalmente e i lati più lunghi verticali:



Nei tempi più antichi, i geometri Babilonesi consideravano l’altezza di un triangolo o di un trapezio come il lato più corto, verticale, del rettangolo nel quale essi erano inscrivibili:





- -

La descrizione che segue è basata sul problema geometrico contenuto nella *tavoletta IM 58045*, un tempo conservata nel Museo di Baghdad in Iraq.

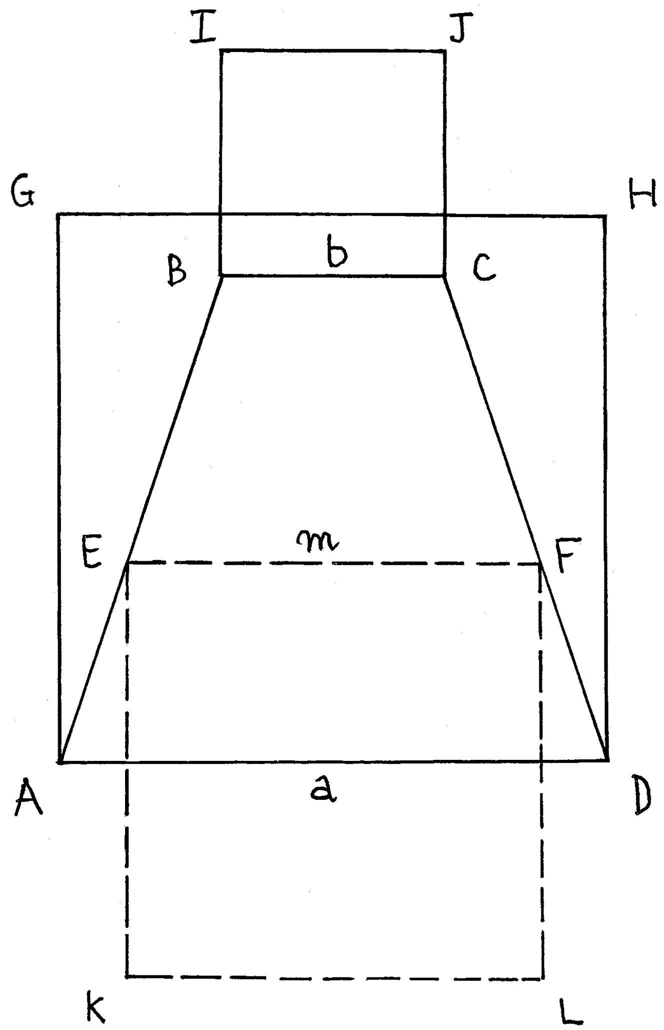
La tavoletta è stata ritrovata fra i resti del tempio dedicato a Enlil, a Nippur in Mesopotamia e risalirebbe a circa il 2340-2200 a.C.

Evidentemente, lo stato dei luoghi (presenza di canali di irrigazione, di sentieri oppure di un pozzo) imponeva agli agrimensori Babilonesi la divisione dei terreni a forma di trapezio con una trasversale come quella rappresentata da EF.

<u>Divisione del trapezio isoscele</u>

La figura che segue riproduce il trapezio ABCD con alcune aggiunte.

Sui lati AD, EF e BC sono stati costruiti i relativi quadrati.



La base maggiore AD è indicata con *a*, la base minore BC è *b* e la trasversale EF è *m*.

Le aree dei trapezi AEFD e EBCF sono uguali soltanto se fra i quadrati costruiti sulle *tre* basi dei tre trapezi (i due citati AEFD e EBCF e quello ABCD) esistono le seguenti relazioni:

$AD^2 – EF^2 = EF^2 – BC^2$ e, in lettere,

$a^2 – m^2 = m^2 – b^2$.

Da cui: $2 * m^2 = a^2 + b^2$ e

$m^2 = (a^2 + b^2)/2$.

Nel caso specifico, $a = 17$ e $b = 7$, per cui la lunghezza di m vale

$m^2 = (17^2 + 7^2)/2 = 338/2 = 169$ e

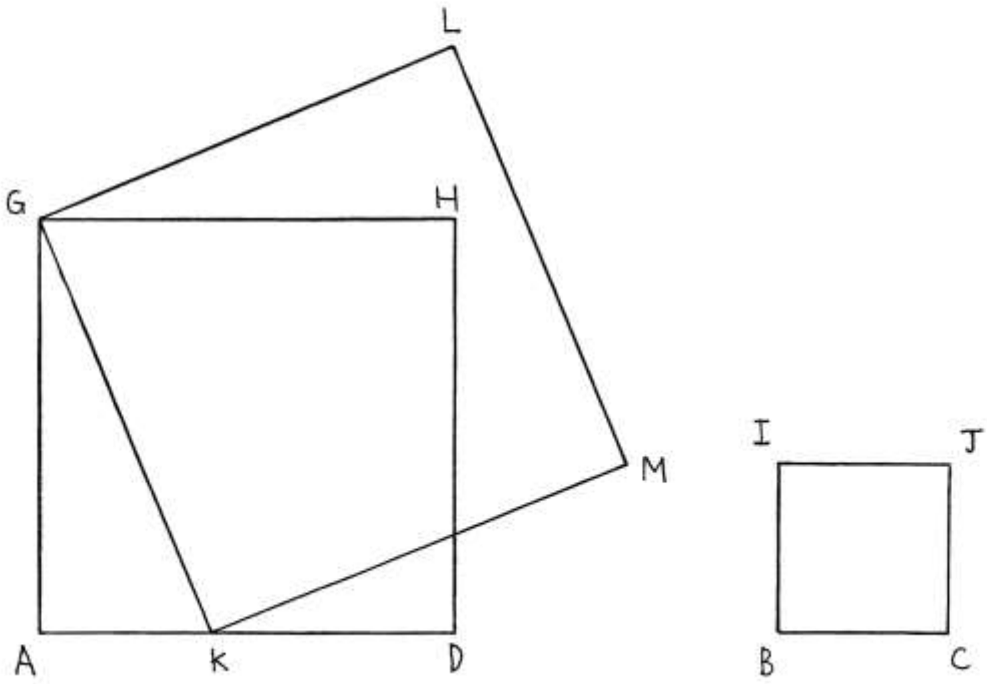
$m = \sqrt{169} = 13$.

I numeri 17, 13 e 7 formano una *terna babilonese,* argomento sul quale torneremo in un successivo paragrafo.

------------------------ APPROFONDIMENTO --------------------------

Le costruzioni che seguono applicano il *2° teorema di Euclide*, per verificare l'esattezza del calcolo aritmetico della lunghezza della trasversale EF.

AGHD e BIJC sono due quadrati costruiti sulle due basi del trapezio ABCD. Essi devono essere uniti per formare un nuovo quadrato.



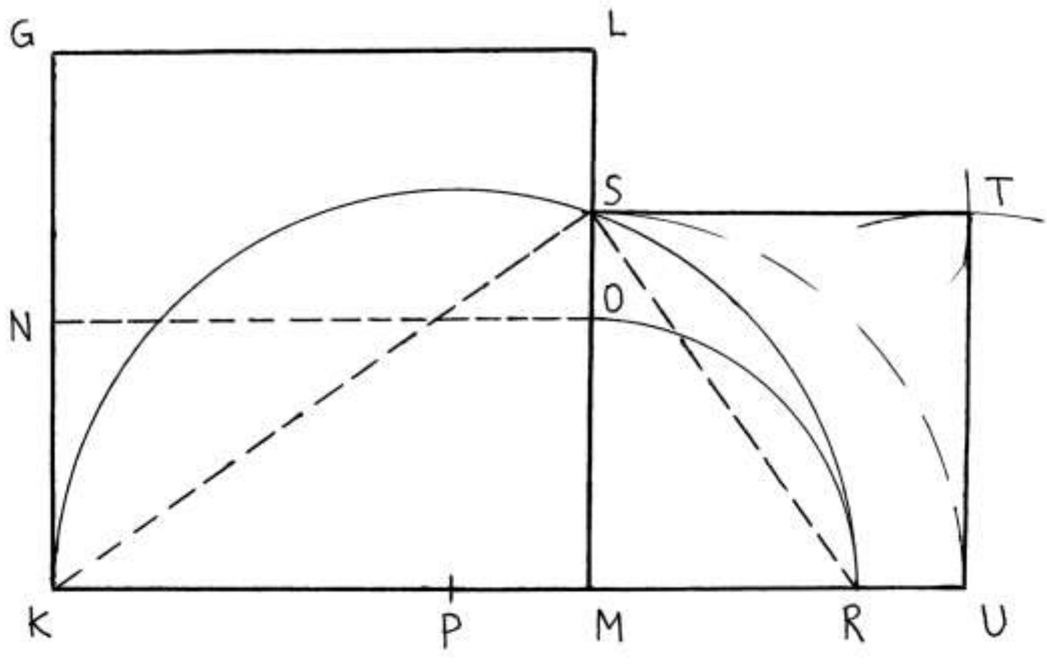
A partire da A, riportare sul lato AD la lunghezza di BC e tracciare la corda GK: essa è l'*ipotenusa* del triangolo rettangolo AGK i cui cateti sono lunghi

$$AG = AD = a \quad e \quad AK = BC = b .$$

Costruire il quadrato KGLM: esso ha area uguale a

$$KG^2 = a^2 + b^2 = 2 * m^2.$$

Riprodurre il quadrato KGLM:



Prolungare verso destra il lato KM. Tracciare la *mediana* NO: i rettangoli KNOM e NGLO hanno aree uguali e pari a metà di quella di KGLM e cioè m^2 .

Fare centro nel punto M e con raggio MO disegnare un arco da M fino a intersecare il prolungamento di KM nel punto R.

Determinare il punto medio di KR: è P.

Con centro in P e raggio PK = PR tracciare una semicirconferenza da K a R: essa taglia il lato ML in un punto, S.

KSR è un triangolo rettangolo inscritto nel semicerchio di centro OP.

Costruire il quadrato MSTU.

Per il 2° teorema di Euclide, il segmento SM è *medio proporzionale* fra le lunghezze delle proiezioni (KM e MR) dei cateti sull'ipotenusa (KR):

$$KM : SM = SN : MR .$$

Ma $KM = \sqrt{(2*m^2)} = m * \sqrt{2}$ e

$$MR = MO = KM/2 = m * \sqrt{2}/2 .$$

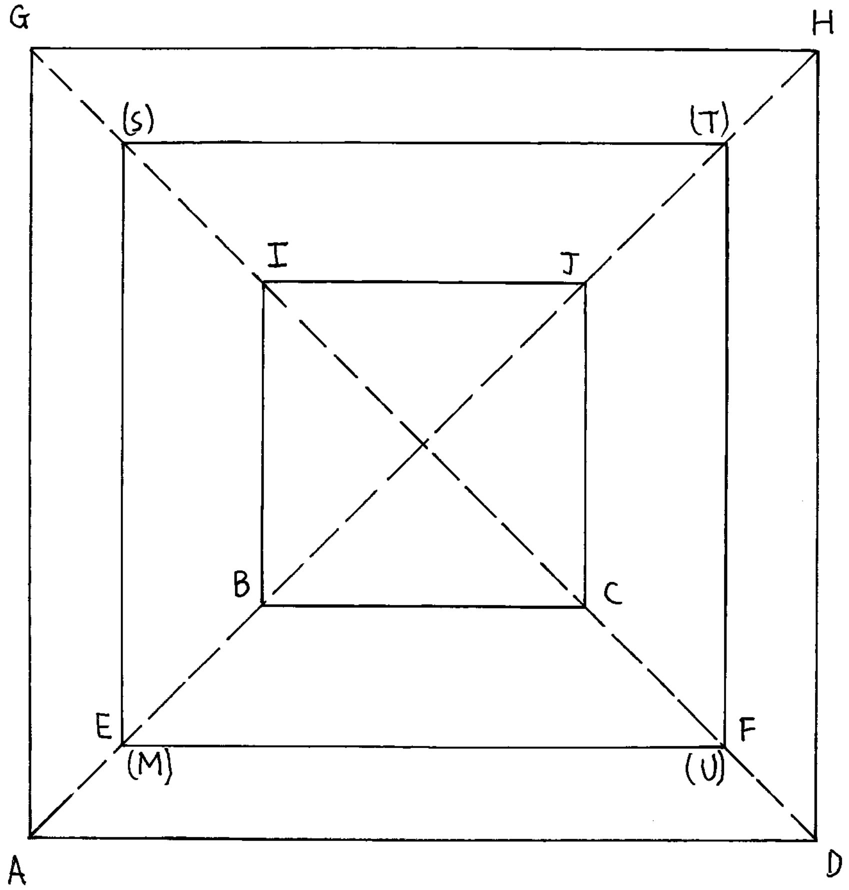
Ne consegue che

$$SM^2 = KM * MR = (m * \sqrt{2}) * m * \sqrt{2}/2 = m^2 * 2/2 = m^2 .$$

Il segmento SM è lungo *m* e cioè è lungo quanto la trasversale EF che divide a metà il trapezio originario ABCD.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Il grafico che segue è ricavato dalla fusione di alcuni precedenti diagrammi.



AGHD è un quadrato costruito sulla base maggiore AD e BIJC è realizzato sulla base minore BC del trapezio isoscele ABCD.

Il quadrato E(S)(T)(F) è disegnato sulla trasversale EF.

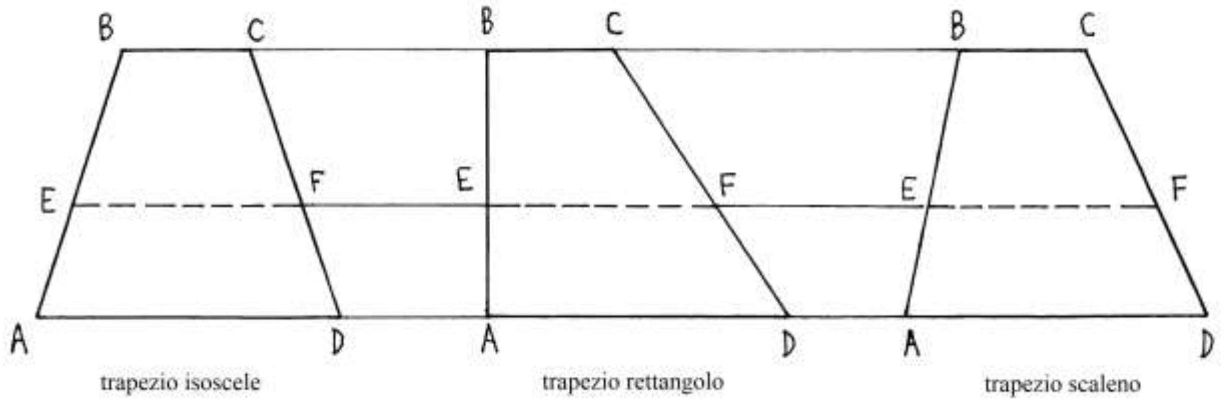
AH e GD sono le diagonali dei tre quadrati concentrici.

La figura contiene *otto* trapezi isosceli di area uguale a metà di quella del trapezio origine ABCD.

Gli otto trapezi sono: AEFD, EBCF, AE(S)G, E(S)IB, GH(T)(S), (S)(T)JI, HDF(T) e J(T)FC.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Le stesse regole valgono per i trapezi isosceli, rettangoli e scaleni, purché abbiano uguali altezze e le loro basi corrispondenti siano di uguale lunghezza, come è il caso dei tre trapezi equivalenti della figura che segue:



Anche le tre trasversali, EF, dividono i tre trapezi in due quadrilateri di uguale superficie.

- -

Le terne babilonesi

I geometri Babilonesi usarono delle *terne* formate da numeri interi per calcolare la lunghezza delle linee *trasversali* usate per dividere un trapezio in due parti di uguale superficie.

Quelle terne sono chiamate *babilonesi*.

Le ricerche di alcuni storici della matematica (Jöran Friberg, Jens Høyrup, Christine Proust e Eleanor Robson, fra gli altri) hanno chiarito le relazioni di quelle terne con quelle pitagoriche.

La tabella che segue confronta *quattro* terne pitagoriche e le corrispondenti terne babilonesi.

I numeri *x*, *y* e *z* formano una terna pitagorica mentre *a*, *b* e *m* sono i componenti della corrispondente terna babilonese:

	Terne pitagoriche			**Terne babilonesi**		
n - numero d'ordine	**x**	**y**	**z**	**a**	**b**	**m**
1	**3**	**4**	**5**	**7**	**1**	**5**
2	**5**	**12**	**13**	**17**	**7**	**13**
3	**7**	**24**	**25**	**31**	**17**	**25**
4	**9**	**40**	**41**	**49**	**31**	**41**

La generazione delle terne babilonesi è determinata dalle seguenti regole:

$a = y + x$
$b = y – x$
$m = z$.

Infine, all’interno delle terne babilonesi vale la relazione (già incontrata):

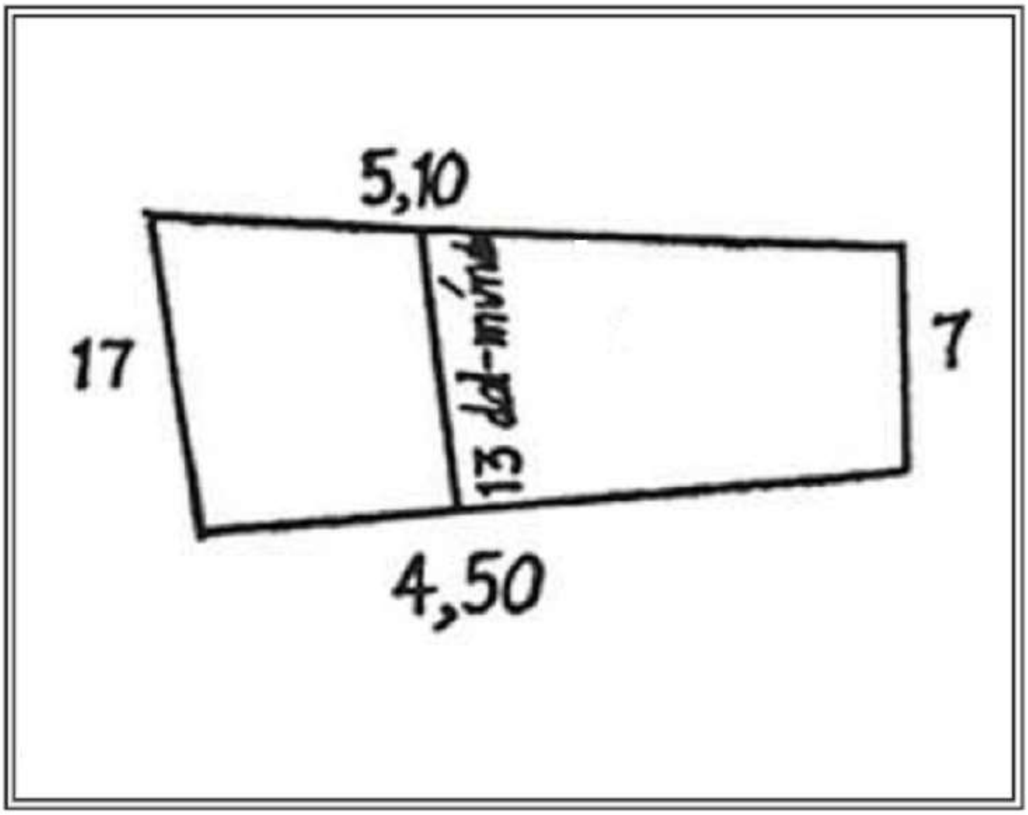
$$a^2 + b^2 = 2 * m^2 .$$

La conclusione è ovvia: i Babilonesi conoscevano il c.d. “teorema di Pitagora” almeno dalla fine del 3° millennio a.C.

La tavoletta YBC 4675

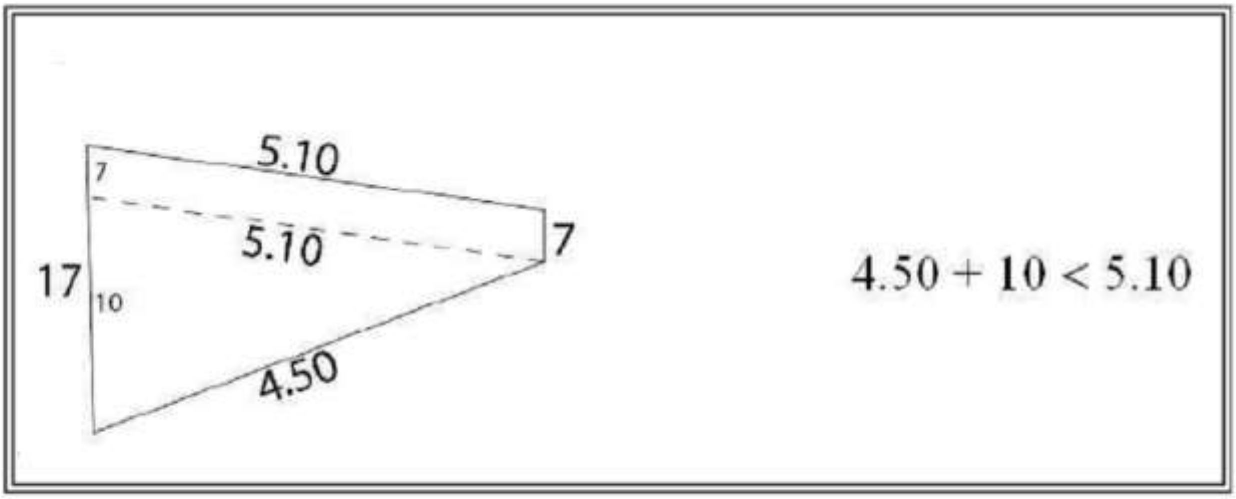
Un problema collegato al precedente della già citata tavoletta IM 58045 è contenuto nella YBC 4675, probabilmente proveniente da Larsa.

Un quadrilatero ha lati lunghi come in figura (da Christine Proust):



La Proust ha utilizzato come separatore fra la parte intera e quella frazionaria dei numeri in base 60 la *virgola*, invece del più comune *punto e virgola*.

Sempre dallo stesso articolo della Proust è riprodotto il grafico che segue:



Il trapezio è scomposto in due poligoni: un triangolo con lati lunghi 10 – 5;10 e 4; 50 nindan e un parallelogramma con lati lunghi 5; 10 e 7 nindan. Il disegno è evidentemente *fuori scala*.

Anche soltanto in modo intuitivo la figura è impossibile: il triangolo non può essere costruito con quelle dimensioni perché la somma delle lunghezze di due lati

5; 10 + 4; 50 = 10 nindan è uguale alla lunghezza del terzo lato, 10 nindan.

La tavoletta utilizza la *formula degli agrimensori* per calcolare l'area del quadrilatero:

Area = (AB + CD)/2 * (AD + BC)/2 .

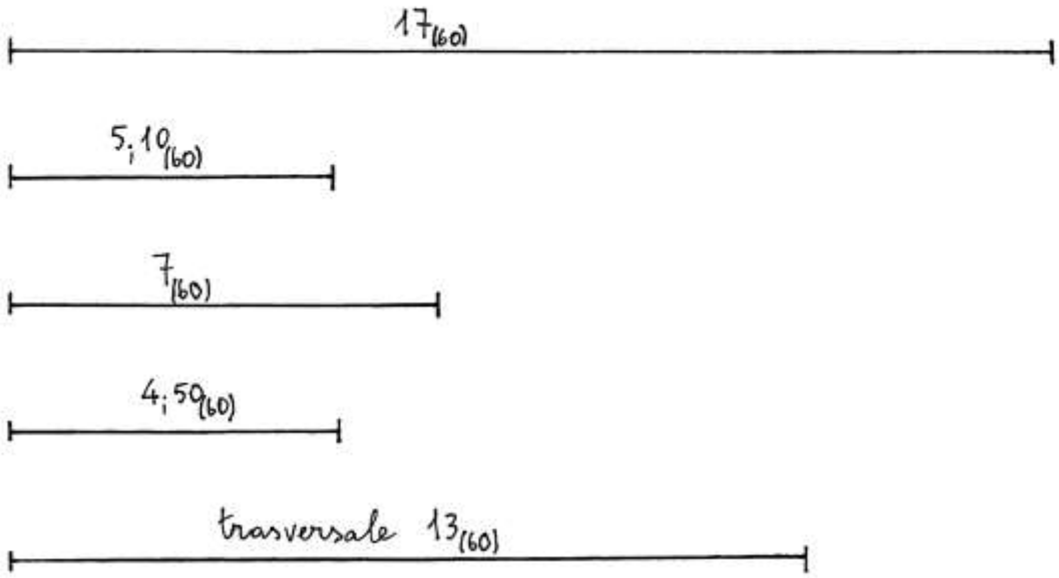
Infine, il testo calcola correttamente la lunghezza della trasversale EF che divide in due parti uguale superficie il quadrilatero:

$EF^2 = (AB^2 + CD^2)/2 = (17^2 + 7^2)/2 = (289 + 49)/2 = 169$ da cui

$EF = \sqrt{169} = 13$ *nindan*.

È riapparsa la relazione fra le lunghezze dei tre segmenti (17, 13 e 7 nindan) già incontrata nel caso della tavoletta IM 58045.

Il grafico che segue mette a confronto le lunghezze dei cinque segmenti:



LE TAVOLETTE MATEMATICHE DI SUSA

In frammenti di tavolette provenienti da Susa nell'Elam (attuale Iran meridionale), civiltà legata a quelle contemporanee della Mesopotamia, e risalenti a un periodo anteriore al regno babilonese di Hammurabi (circa 1810 – 1750 a.C.) sono descritti alcuni problemi geometrici.

Stando a quanto emerge dal contenuto di quelle tavolette, la matematica degli Elamiti era legata a quella dei Babilonesi ed entrambe le culture usavano il sistema di numerazione sessagesimale. Gli scribi elamiti spesso aggiungevano nelle tavolette di carattere matematico un esplicito riferimento ai metodi dei loro vicini.

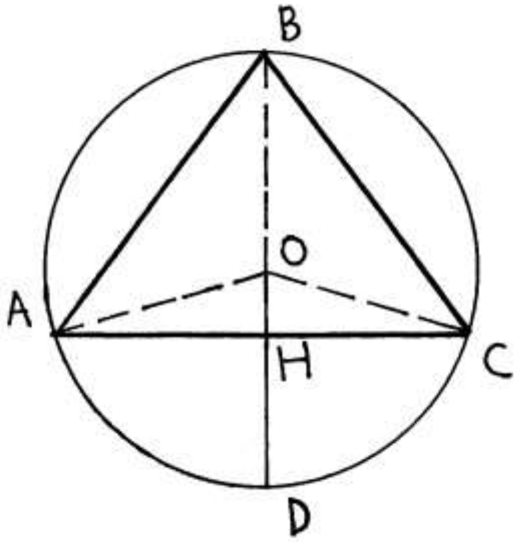
Quante sono le tavolette di Susa

Stando ai dati forniti da Christine Proust, gli scavi di Susa avrebbero fornito *sedici* tavolette di natura matematica.

Nel lavoro di Bruins e Rutten, i testi elamiti sono contrassegnati con numeri romani, da I a XXVI.

Triangolo isoscele inscritto – Testo I

La tavoletta contenente il testo I reca il disegno di un triangolo isoscele inscritto in un cerchio:



Sono note le lunghezze dei tre lati:

* AB = BC = 50 ;
* AC = 60 .

Il problema chiede di calcolare la lunghezza del raggio OA.

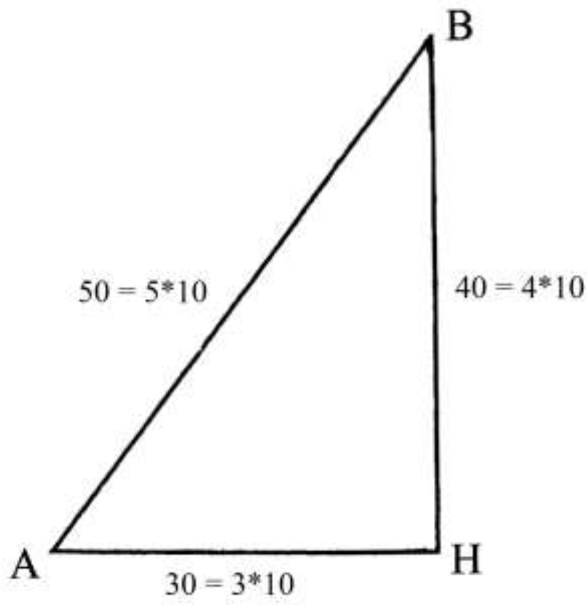
L'altezza BH divide il triangolo ABC in due triangoli rettangoli di uguali dimensioni: ABH e BHC.

L'altezza BH è data da:

$BH^2 = AB^2 – AH^2 = AB^2 – (AC/2)^2 = 50^2 – 30^2 = 2500 – 900 = 1600$. Da cui $BH = \sqrt{(1600)} = 40$.

I triangoli ABH e BHC hanno lati in proporzione alla terna 3-4-5 moltiplicata per il fattore – 10:

$$30\text{-}40\text{-}50 \rightarrow 10*(3\text{-}4\text{-}5) .$$



Consideriamo i due triangoli rettangoli AOH e OHC: *r* è il raggio incognito OA.
Valgono le seguenti relazioni:

$OA^2 = OH^2 + AH^2$

$r^2 = OH^2 + 30^2$.

Ma $OH = BH – BO = 40 – r$.

Sostituendo questo ultimo valore nella precedente formula si ha:

$r^2 = (40 - r^2) + 30^2$

$r^2 = 1600 – 80*r + r^2 + 900$

$80*r = 2500$

$r = 2500/80 = 31,25$

OH è lungo: $OH = 40 – 31,25 = 8,75$.

- APPROFONDIMENTO -

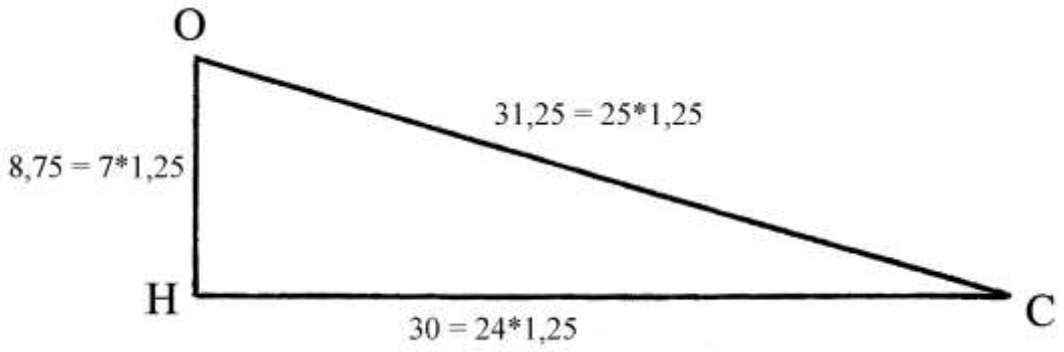
Il triangolo rettangolo OHC ha lati lunghi:

* OH = 8,75 ;
* HC = 30 ;
* OC 0 31,25 .

Dividendo le lunghezze dei tre lati per la stessa costante 1,25 (o 5/4) si ha:

* OH = 7 * 1,25 ;
* HC = 24 * 1,25 ;
* OC = 25 * 1,25 .

Il triangolo OHC ha lati lunghi in proporzione alla *terna pitagorica* 7-24-25.



Quindi, nella costruzione mostrata nella precedente figura sono preseti ben *due* terne pitagoriche.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%

La tavoletta I contiene al *verso* e al *recto* una serie di costanti (sono ben 70) relative a tre diversi ambiti:

* costanti fisse per le figure geometriche;
* costanti fisse per i lavori e per i mattoni impiegati nelle costruzioni;
* costanti fisse per i diversi materiali.

Sia sopra sia di seguito sono descritte solo le costanti usate per le figure geometriche piane, che sono scritte al *verso* della tavoletta.

In generale, una *costante* è un numero per il quale occorre moltiplicare il risultato di un calcolo parziale per ricavare il valore della grandezza cercata.

Ecco tre esempi di costanti:

* 1/12: per calcolare l'area di un cerchio conoscendone la circonferenza;
* 1/3: rapporto approssimato fra diametro e circonferenza;
* 1/6: rapporto fra raggio e circonferenza.

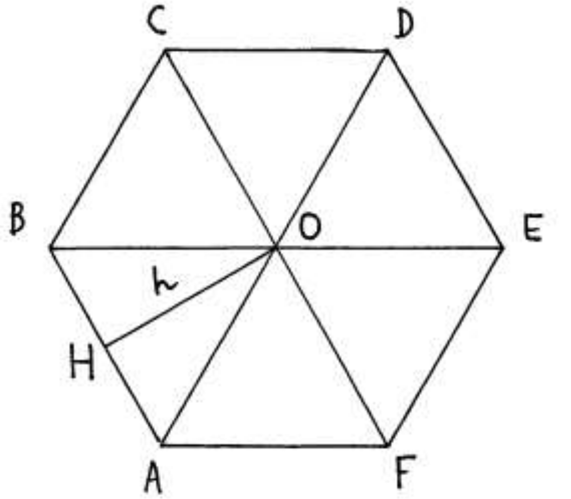
- -

Testo II

Il testo contiene su di una faccia la figura di un esagono e sul rovescio quella di un ettagono.

Area di un esagono

L'esagono regolare è scomposto in sei triangoli equilateri:



Nel triangolo ABO è tracciata l'altezza relativa al lato OH.

Il problema fornisce la lunghezza dei lati dell'esagono e dei triangoli: 30.

L'altezza *h* è calcolata moltiplicando la lunghezza del lato del triangolo per la costante 0,875, approssimazione usata dagli scribi della Mesopotamia per l'espressione

$$(\sqrt{3})/2 \approx 0{,}866 .$$

Fra le formule approssimate proposte da Erone di Alessandria nel I secolo d.C. vi è la seguente per il calcolo dell'altezza del triangolo equilatero di lato *l*:

$$h = \text{lato} - [(\text{lato}/2)^2/2*\text{lato}) = 7/8 * \text{lato}.$$

La frazione 7/8 vale esattamente 0,875: in Erone si trova questa traccia dell'antica matematica babilonese.

L'area del triangolo ABO è:

$$\text{Area}_{\text{ABO}} = OH * AB/2 = 0{,}875*30^2/2 = 393{,}75 .$$

L'area dell'intero esagono è *sei* volte l'area di ABO:

$$\text{Area}_{\text{ESAGONO}} = 6 * 393{,}75 = 2362{,}5 .$$

Le costanti geometriche

Come già affermato, il testo III della tavoletta I contiene una tabella delle costanti fisse che offre una composizione più sistematica di quella dei simili testi babilonesi.

Le prime tre costanti sono ben definite: $1/(4*\pi)$, $1/\pi$ e $1/(2*\pi)$, con $\pi \approx 3$

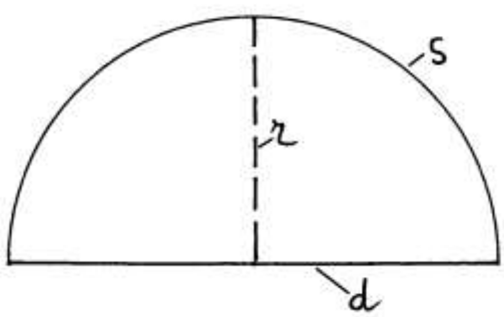
Con un cerchio che ha perimetro (circonferenza) uguale a 1, la prima costante vale 1/12.

La seconda costante rappresenta il rapporto fra il diametro e la circonferenza e vale 1/3.

La terza costante vale 1/6 ed è il rapporto fra le lunghezze del raggio e della circonferenza.

Le due successive righe della tavoletta non sono state decifrate.

Nel caso del semicerchio sono presentate *tre* costanti (che derivano da quelle del cerchio):



L'arco *s* è lungo convenzionalmente 1: la corda o diametro *d* è lunga

$d = 2/\pi * s = 2/3$.

La freccia è lunga quanto il raggio *r*:

$r = 1/\pi * s = 1/3$.

La superficie del semicerchio è calcolata come segue:

A = ¼ * arco * diametro = ¼ * 1 * 1/3 = 1/12.

Testo III

L'area di un cerchio con circonferenza lunga *c* era calcolata con la formula di origine babilonese

$A = 1/12 * c^2$.

Ciò comportava l'attribuzione, anche presso gli scribi elamiti, a $1/4*\pi$ del valore 1/12 e quindi $\pi = 3$.

Questa tavoletta contiene una seconda formula che usa una più precisa approssimazione di π: 3 + 1/8 = 3,125.

Usando questo ultimo valore, la formula dell'area del cerchio, A, veniva corretta moltiplicando il precedente risultato per la costante 24/25:

$A = 1/12 * c^2 * 24/25$.

Il prodotto delle due frazioni, 1/12 e 24/25, dà il seguente risultato:

1/12 * 24/ 25 = 2/25 .

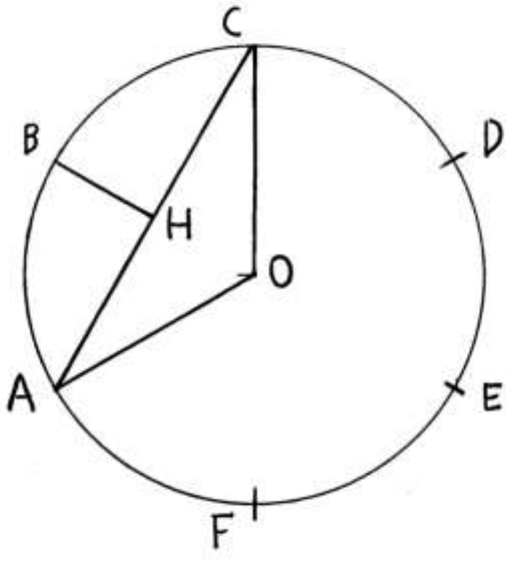
Questo ultimo valore corrisponde a $1/4*\pi$:

$1/4*\pi = 2/25$, da cui si ricava

$\pi = 25/8 = 3{,}125$.

Terzo di un cerchio

L'arco ABC delimita un settore circolare ampio un terzo del cerchio:



I punti A, B, C, D, E e F sono i vertici di un esagono inscritto, ma non disegnato.

L'arco ABC è convenzionalmente lungo 1 e la circonferenza *c* è lunga:

c = 3 * ABC = 3 .

Il raggio OA è lungo:

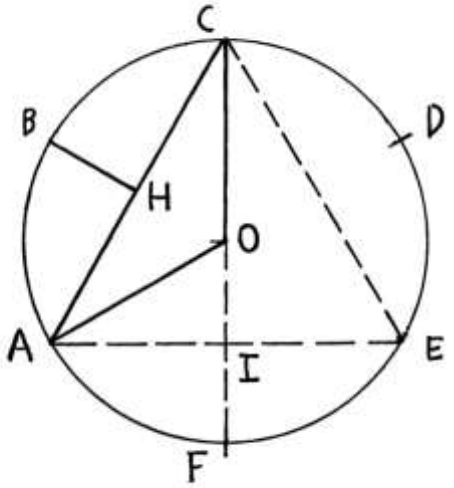
$OA = r = c/2*\pi = 3/2*3 = 0,5$ con l'approssimazione $\pi = 3$.

La freccia $f = BH$ è lunga metà del raggio r:

$f = r/2 = 0,5/2 = 0,25$.

La corda AC è un lato del triangolo equilatero inscritto ACE.

Con l'aiuto dello schema contenuto nella figura che segue possiamo calcolare la lunghezza della corda AC:



AC è lungo quanto AE e CE.

AOI è un triangolo rettangolo e il cateto AI è dato da:

$AI = \sqrt{(AO^2 - OI^2)} = \sqrt{(r2 - (r/2)^2)} = \sqrt{3} * r/2$.

Il lato AE è lungo il doppio di AI:

$AE = 2 * AI = (\sqrt{3} * r/2) * 2 = \sqrt{3} * r = \sqrt{3} * 0,5 = (\sqrt{3})/2$.

L'area del cerchio è:

$\text{Area}_{\text{CERCHIO}} = 1/12 * c^2 = 1/12 * 3^2 = 1/12 * 9 = 3/4$.

L'area del triangolo equilatero ACE è:

$\text{Area}_{\text{ACE}} = AE * CI/2$.

Come già spiegato in precedenza, convenzionalmente gli scribi mesopotamici calcolavano l'altezza di un triangolo equilatero moltiplicando il lato per la costante 0,875. Pertanto l'area è:

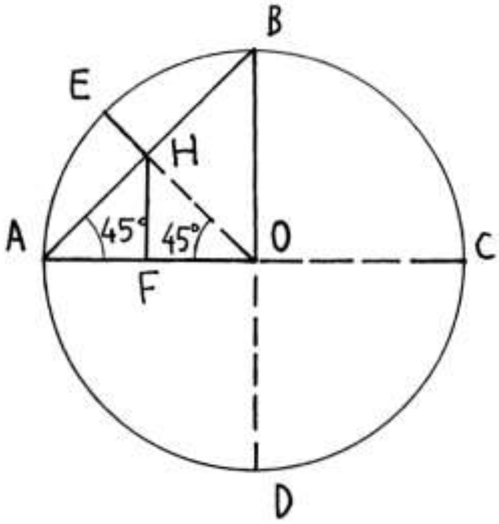
$\text{Area}_{\text{ACE}} = \text{lato} * (\text{lato} * 0,875)/2 = ((\sqrt{3})/2)^2 * 0,875/2 = 21/64$.

L'area del settore circolare ABC è uguale a 1/3 della differenza fra l'area del cerchio e quella del triangolo equilatero:

$\text{Area}_{\text{ABC}} = (\text{Area}_{\text{CERCHIO}} - \text{Area}_{\text{ACE}})/3 = (3/4 - 21/64)/3 = (27/64)/3 = 9/64$.

Quarto di un cerchio

Un settore circolare occupa un quarto di cerchio:



La lunghezza dell'arco AEB è fissata convenzionalmente in 1.

La circonferenza *c* è lunga:

c = 4 * AEB = 4 * 1 = 4 .

La lunghezza convenzionale del raggio *r* è:

r = c/2*π = 4/2*3 = 4/6 = 2/3 .

ABO è un triangolo rettangolo isoscele e la sua area è:

A_{ABO} = OA * OB/2 = (2/3 * 2/3)/2 = 2/9 .

Occorre ora determinare la lunghezza della corda AB: essa è l'ipotenusa del triangolo rettangolo ABO ed è lunga:

$$AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{4}{9}} =$$

$$= \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{3}$$

Serve conoscere la lunghezza della freccia HE. OE è un raggio del cerchio e occorre calcolare la lunghezza di OH che è l'ipotenusa del triangolo rettangolo isoscele OFH.

OF è lungo quanto FH ed è metà del raggio OA:

$$OH = \sqrt{OF^2 + FH^2} = \sqrt{\left(\frac{r}{2}\right)^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{6}\right)^2 + \left(\frac{2}{6}\right)^2} =$$

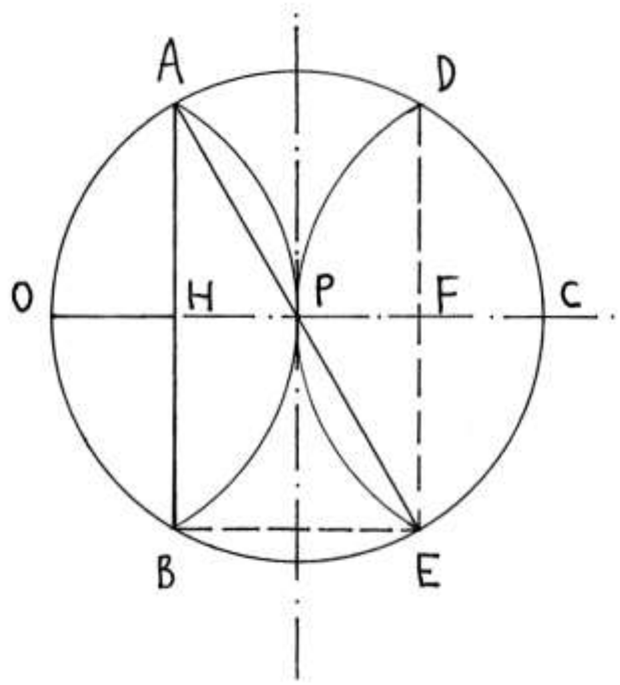
$$= \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{9}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

La freccia HE è lunga:

HE = OE – OH = 2/3 – (√2)/3 = 1/3 * (2 – (√2).

Occhio di bue

Anche gli scribi elamite conoscevano la figura nota presso gli scribi babilonesi con l'espressione "*occhio di bue*":



Nella figura, le superfici delimitate dagli archi di circonferenza e cioè OAPB e PDCE sono due *occhi di bue* di uguali dimensioni.

BOA è un segmento circolare che, a sua volta, è metà della superficie dell'occhio di bue OAPB.

AB è la corda, *c*, e OH è la freccia, *f*.

ABE è un triangolo rettangolo: AB è il cateto maggiore e BE è quello minore (che a sua volta è un lato dell'esagono inscritto OADCEB, non disegnato).

L'ipotenusa AE è un diametro del cerchio.

BE è lungo HF; la lunghezza di questo ultimo è:

$$HE = OC – OH – FC = d – f – f = d – 2*f .$$

L'ipotenusa AE è lunga:

$$AE^2 = AB^2 + BE^2 = c^2 + (d – 2*f)^2 .$$

Ma AE è lunga *d*, per cui risulta:

$$c^2 + (d – 2*f)^2 = d^2 \quad \rightarrow \quad c^2 + d^2 – 4*f*d + 4*f^2 = d^2 \quad \rightarrow \quad 4*f^2 + c^2 = 4*f*d$$

e $\quad d = (4*f^2 + c^2)/(4*f)$.

- APPROFONDIMENTO -

Le formule approssimate di Erone

Erone di Alessandria (I secolo d.C.) scrisse diverse opere di matematica applicata, geometria e meccanica.

Nei capitoli 18-20 della *Metrica* introdusse una serie di formule *approssimate* per calcolare l'area dei più comuni *poligoni regolari*.

La tabella che segue le descrive:

poligoni regolari	area (A)	Valore coefficienti
triangolo equilatero	$A = \frac{13}{30}$ lato^2	$\frac{13}{30} = 0,4\overline{3}$
pentagono	$A = \frac{12}{7}$ lato^2 (*) oppure $A = \frac{5}{3}$ lato^2	$\frac{12}{7} = 1,7143$ (*) $\frac{5}{3} = 1,\overline{66}$
esagono	$A = \frac{13}{5}$ lato^2 deriva da 6*$A_{\text{triangolo equilatero}}$ = $6 \cdot \frac{13}{30}$ lato^2 = $= \frac{13}{5}$ lato^2	$\frac{13}{5} = 2,6$
ettagono	$A = \frac{43}{12}$ lato^2	$\frac{43}{12} = 3,583$
ottagono	$A = \frac{29}{6}$ lato^2	$\frac{29}{6} = 4,833$
ennagono	$A = \frac{51}{8}$ lato^2	$\frac{51}{8} = 6,375$
decagono	$A = \frac{15}{2}$ lato^2	$\frac{15}{2} = 7,5$
endecagono	$A = \frac{66}{7}$ lato^2	$\frac{66}{7} = 9,428$
dodecagono	$A = \frac{45}{4}$ lato^2	$\frac{45}{4} = 11,25$

(*) Forse questa soluzione, 12/7, non è attribuibile a Erone.

- -

Poligoni regolari

Le tavolette elamite studiano le proprietà di tre poligoni regolari: pentagono, esagono e ettagono, tutti aventi lati *convenzionalmente lunghi* 1.

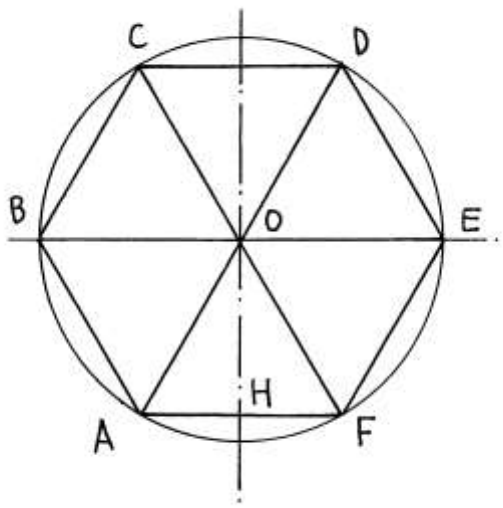
Il perimetro *p* di un poligono regolare di *n* lati di lunghezza *a* è:

$p = n * a.$

Con un numero di lati molto grande, il perimetro tende alla lunghezza della circonferenza del cerchio in cui è inscritto:

$p = n * a \approx 2 * \pi * r \approx 6 * r .$

L'esagono è scomposto in *sei* triangoli equilateri:



OH è l’altezza del triangolo AOF rispetto al lato AF.

La lunghezza di OH è data da:

$OH = \sqrt{(OA^2 - AH^2)}$.

Ma $AH = AF/2 = 1/2 = 0,5$.

Quindi OH è lungo:

$OH = \sqrt{(1^2 - 0,5^2)} = (\sqrt{3})/2$.

L’area del triangolo AOF è:

$Area_{AOF} = OH*AF/2 = OH*AH = (\sqrt{3})/2 * ½ = (\sqrt{3})/4$.

Bruins e Rutten danno questa traduzione della riga 29 della tavoletta: lo scriba elamita ha applicato il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo AOH per ricavare l’altezza OH, invece di calcolarla moltiplicando il lato per la costante 0,875.

L’area dell’esagono è ricavata moltiplicando per *sei* quella di AOF:

$Area_{ESAGONO} = 6 * Area_{AOF} = 6 * (\sqrt{3})/4 = 3*(\sqrt{3})/2$, espressione che corrisponde a circa 2,598.

Per calcolare l’area dell’esagono Erone usò la formula approssimata

$Area_{ESAGONO} = 13/5 * lato^2 \approx 2,6 * 1^2 \approx 2,6$, valore praticamente uguale al risultato dello scriba di Susa.

Anche nel caso delle aree del pentagono e dell’ettagono (descritti nei successivi paragrafi) i valori calcolati dagli scribi elamiti si ritrovano nelle costanti approssimate usate da Erone e contenute nella tabella qui sopra: è questa un’ulteriore prova dell’influenza esercitata dalla matematica della Mesopotamia su quella greca: Erone poteva essere un *egizio* che scriveva nella più usata lingua scientifica dell’epoca, il greco.

La tavoletta offre la possibilità di calcolare il valore approssimato π =3.125. Il perimetro *p* dell’esagono inscritto e la circonferenza *c* sono legati da una relazione:

$p = 0,96 * c = 24/25 * c$.

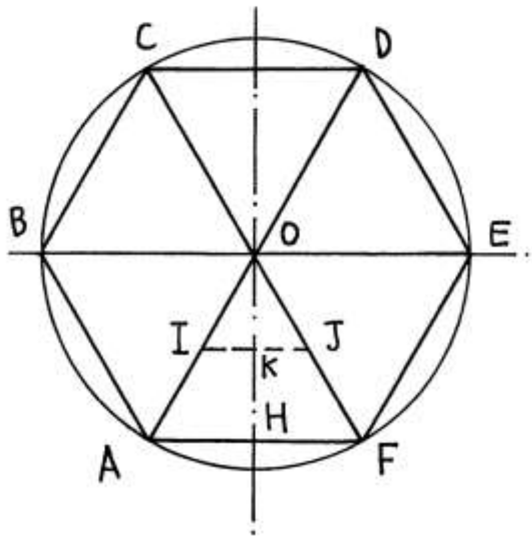
Dato che

$p = (3/\pi) * c$ possiamo eguagliare le due espressioni del perimetro *p*:

$24/25 * c = (3/\pi) * c$ da cui

$\pi = 3/(24/25) = 3 * (245/24) = 25/8 = 3.125 = 3 + 1/8$.

La stessa tavoletta contiene infine un accenno a un *triangolo centrale* la cui sarebbe *un quarto* di quella di uno dei triangoli equilateri che compongono l’esagono:



Il triangolo *dovrebbe* essere quello IOJ: i suoi lati sono lunghi la metà di quelli di AOF:

L’area di IOJ è quindi $(½)^2 = ¼$ di quella di AOF:

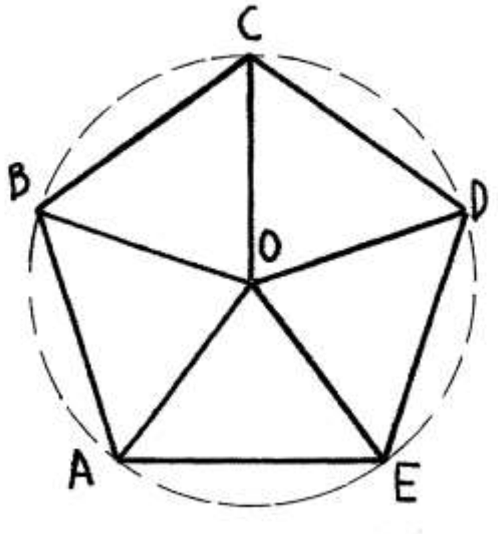
$Area_{IOJ} = ¼ * (\sqrt{3})/4 = (\sqrt{3})/16$.

Pentagono

Applicando la formula generale incontrata nel precedente paragrafo, per il pentagono si ha:

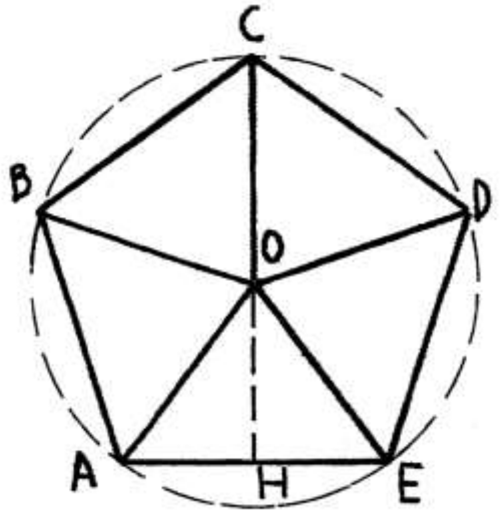
perimetro = 5 * lato ≈ 2*π*r ≈ 6*r .

Ne consegue che il lato è lungo lato = (6/5) * r e r = 5/6 * r .



Il pentagono è diviso in cinque *triangoli isosceli* di uguali dimensioni.

Il segmento OH è l'altezza del triangolo AOE che divide in due triangoli rettangoli di uguali dimensioni: sono AOH e OHE.



La tavoletta fissa le dimensioni dei lati dei due triangoli rettangoli che sarebbero:

AE = 6 AH = AE = 3 OA = 5 e OH = 4 .

I due triangoli hanno lati lunghi secondo la terna pitagorica 3-4-5.

L'area del triangolo isoscele AOE è:

$$\text{Area}_{AOE} = AE * OH/2 = AH*OH = 3 * 4 = 12 .$$

L'area del pentagono è *cinque* volte quella di AOE:

$$\text{Area}_{PENTAGONO} = 5 * \text{Area}_{AOE} = 5 * 12 = 60 .$$

%%

Ricordando che il lato del pentagono è *convenzionalmente* lungo 1, le lunghezze dei lati del triangolo AOE divengono:

AE = 1 AH = AE = 0,5 OA = 5/6 e OH = 4/6 .

L'area di AOE è:

Area $_{AOE}$ = AH *OH = 0,5 * 4/6 = 2/6 = 1/3 .

L'area del pentagono è *cinque* volte quella di AOE:

Area $_{PENTAGONO}$ = 5 * Area $_{AOE}$ = 5 * 1/3 = 5/3 .

Come visto sopra, Erone calcolò l'area approssimata del pentagono con la formula

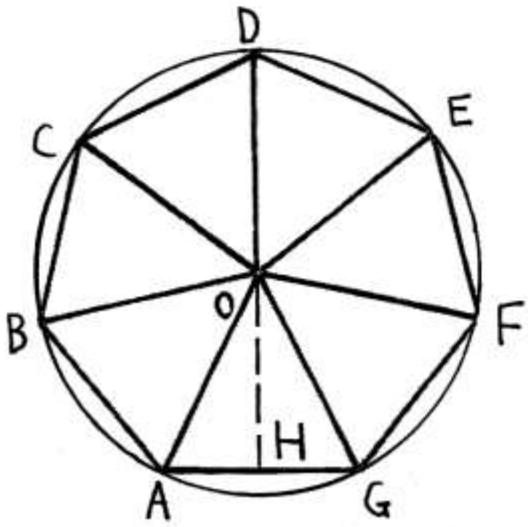
Area $_{PENTAGONO}$ = 5/3 * lato^2 = 5/3 * 1^2 = 5/3 , che è lo stesso risultato dello scriba elamita.

Ettagono

Applicando la formula al caso dell'ettagono si ha:

perimentro = 7 * lato ≈ 2*π*r ≈ 6*r .

Ma lato = 1 e quindi   6*r = 7   da cui r = 7/6 * lato 7/6 * 1 = 7/6 .



Il triangolo AOG è isoscele e OH è l'altezza relativa al lato AG.

L'altezza OH è lunga:

$OH^2 = OA^2 – AH^2 =(7/6)^2 – (1/2)^2$ = 49/36 – ¼ =

(49 – 9)/36 = 40/36 = 10/9 e

OH = √(10/9) = √(10)/3

L'area di AOG è:

Area $_{AOG}$ = AH * OH = √(10)/3 * ½ = √(10)/6 .

L'area dell'ettagono è *sette* volte quella di AOG:

Area $_{ETTAGONO}$ = 7 * Area $_{AOG}$ = 7 * √(10)/6 ≈ 3,689 .

L'area calcolata da Erone con la sua costante approssimata è:

Area $_{ETTAGONO}$ = 43/12 * lato^2 = 43/12 * 1^2 ≈ 3,58(33), valore non troppo lontano dal risultato dello scriba di Susa.

Le costanti relative ai poligoni regolari inscritti

I matematici elamiti fissarono queste costanti:

* per il pentagono, raggio = 5/6 * lato: 5/6 ≈ 0,8(3) è una costante *approssimata*;
* per l'esagono: raggio = lato = 1 ;
* per l'ettagono: raggio = 7/6 * lato: 7/6 ≈ 1.(16) * raggio: 1,(16) è una costante *approssimata*.

La tabella che segue propone le costanti dei geometri elamiti relative ai tre poligoni regolari inscritti in un cerchio:

poligono	lato/raggio cerchio circoscritto	raggio cerchio circoscritto/lato
pentagono	6/5	5/6 ≈ 0,8(33)
esagono	1	1
ettagono	6/7 ≈ 0,85714	7/6 ≈ 1,1(6)

La tabella che segue riassume le corrette costanti:

poligono	lato/raggio cerchio circoscritto	raggio cerchio circoscritto/lato
pentagono	≈ 1.176 (*)	≈ 0,85034 (*)
esagono	1	1
ettagono	≈ 0,868 (*)	≈ 1,15207 (*)

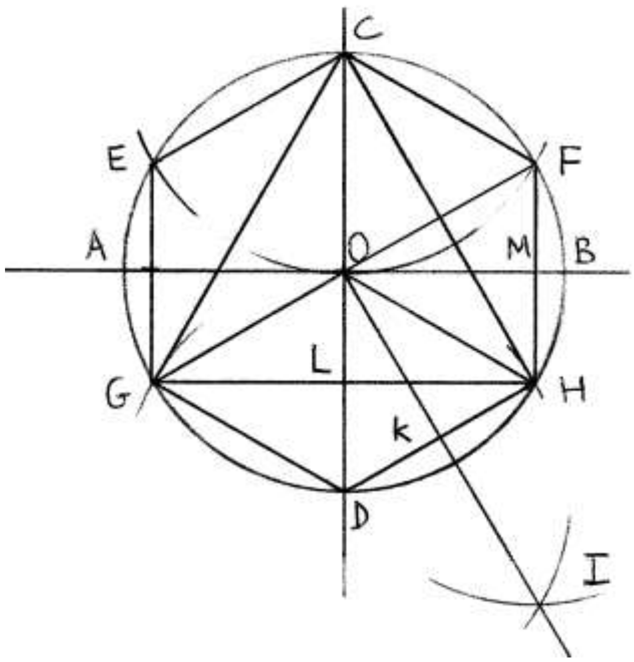
(*) Valori leggermente approssimati.

Gli scostamenti fra le costanti usate dai matematici elamiti e quelle corrette sono minimi.

Millenni dopo, nel I secolo d.C., Erone di Alessandria propose una costruzione *approssimata* dell'ettagono inscritto, come spiega l'APPROFONDIMENTO che segue. Egli subì l'influenza dei matematici e dei geometri mesopotamici?

- APPROFONDIMENTO -

La figura che segue mostra la costruzione del triangolo equilatero (GCH) e dell'esagono regolare GECFHD) inscritti in una circonferenza di centro O e raggio OA, utili per la successiva costruzione dell'ettagono:



AB e CD sono due diametri fra loro perpendicolari.

I raggi OF, OG e OH danno vita a due triangoli equilateri: rispettivamente OFH, OGD e OHD. Un esagono regolare può essere scomposto in *sei* triangoli equilateri uguali.

Costruire la bisettrice dell'angolo DOH: essa passa per il punto esterno I e taglia DH nel punto K.

La lunghezza del segmento OM è chiaramente uguale a quella del segmento LH: entrambi sono le *altezze* di due triangoli equilateri uguali (OFH e ODH). Ma essi sono anche l'*apotema* dell'esagono GECFHD. Inoltre, il segmento LH è la metà del lato GH del triangolo equilatero GCH.

In conclusione, l'apotema OM dell'esagono è lungo quanto la metà del lato del triangolo equilatero inscritto nella stessa circonferenza.

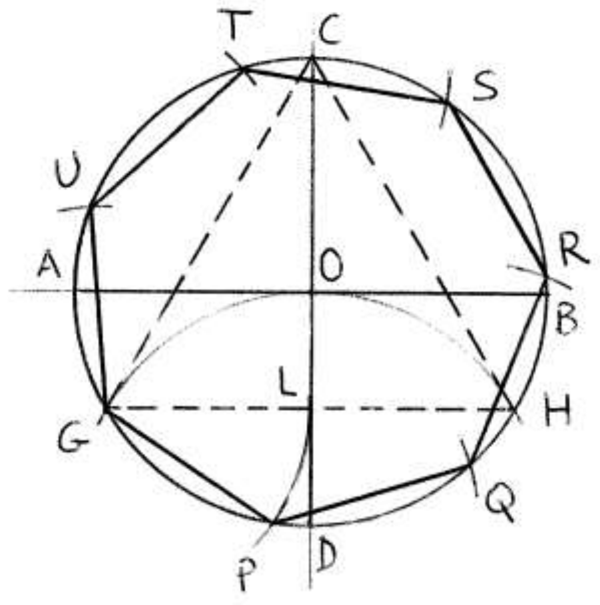
L'apotema OM è anche l'altezza del triangolo equilatero OFH e cioè:

$$OM^2 = OF^2 – FM^2 = OF^2 – (1/2 * OF)^2 = ¾ * OF^2 .$$

Da cui: $OM = (\sqrt{3})/2 * OF$.

La costante $(\sqrt{3})/2$ vale $\approx 0{,}866$.

Erone usò la precedente figura per costruire l'ettagono approssimato inscritto: il suo lato è, con un'approssimazione di 0,2%, lungo quanto l'apotema dell'esagono:



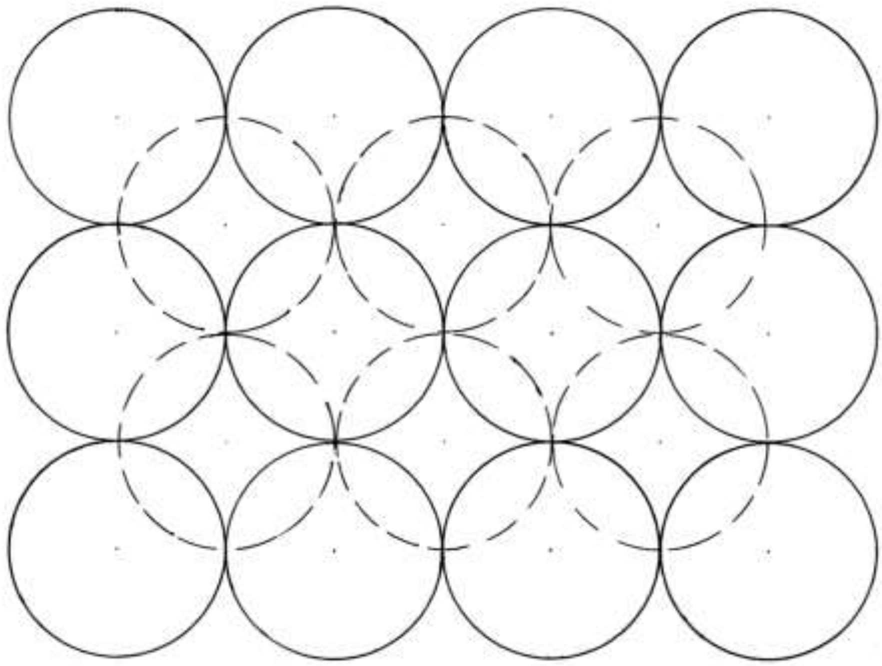
Fare centro in G e, con raggio GL, tracciare un arco che taglia la circonferenza in P. Riportando la stessa lunghezza sulla circonferenza, si ottiene l'ettagono approssimato GPQRSTU.

La civiltà della Valle dell'Indo

La civiltà della Valle dell'Indo (circa 300-1500 a.C.) ha fornito, fra gli altri, una serie di manufatti.

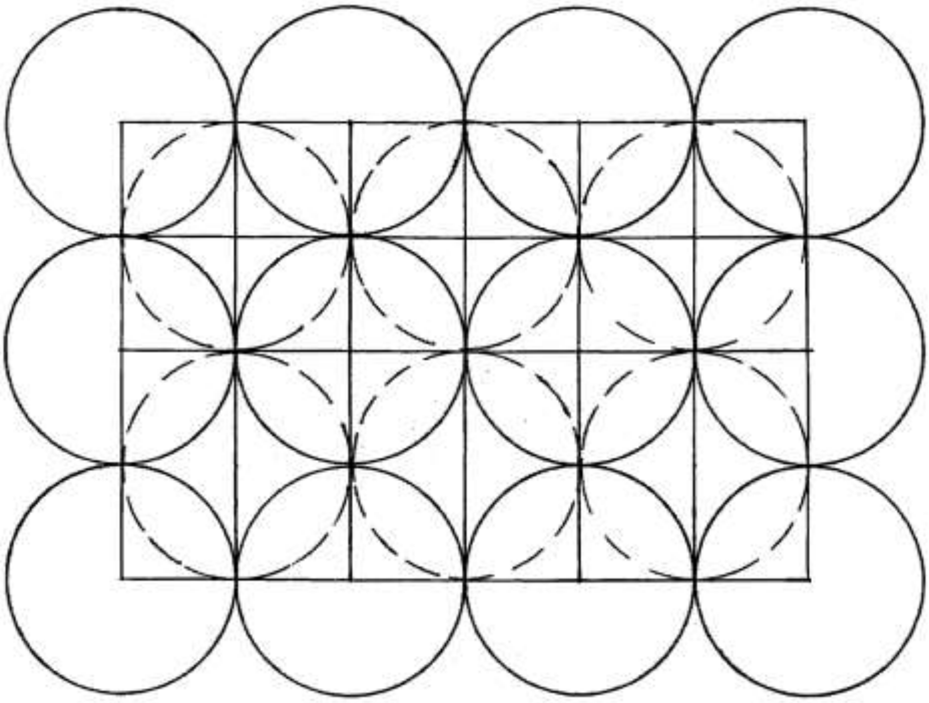
Un disegno ricorrente è quello del quadrato concavo, l'*apsamikkum* delle culture Sumerica e Babilonese.

La struttura di partenza è quella disegnata nella figura che segue:



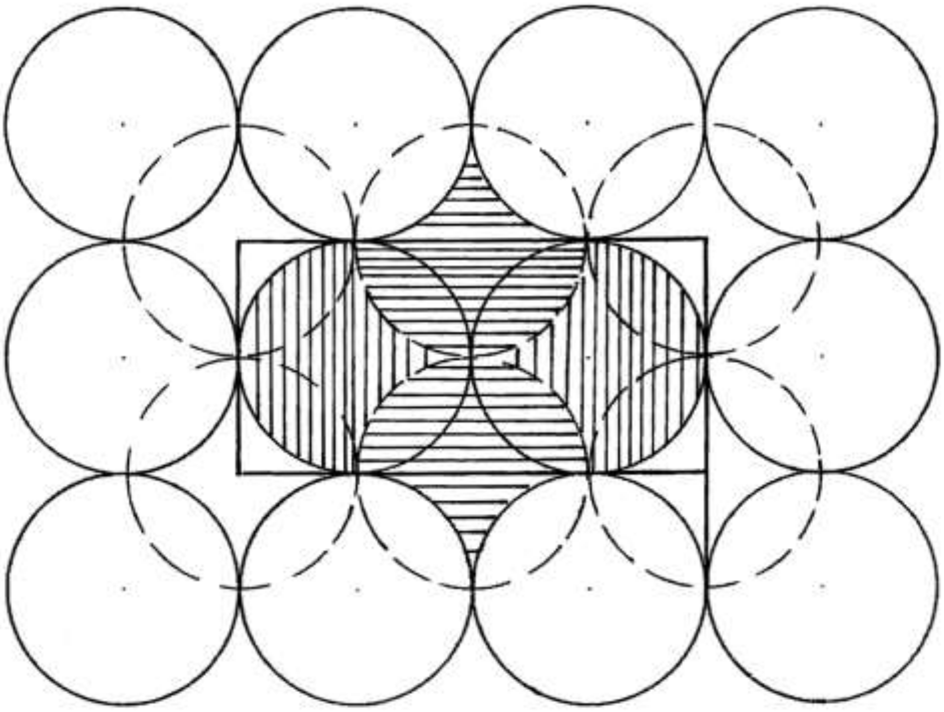
Si tratta di una serie di cerchi di uguali dimensioni fra loro tangenti.

Una seconda struttura di forma quadrata è costruita collegando i centri dei cerchi: il lato dei quadrati è lungo quanto il doppio del raggio. Ciascun quadrato è poi diviso in quattro quadrati che hanno lato uguale al raggio:

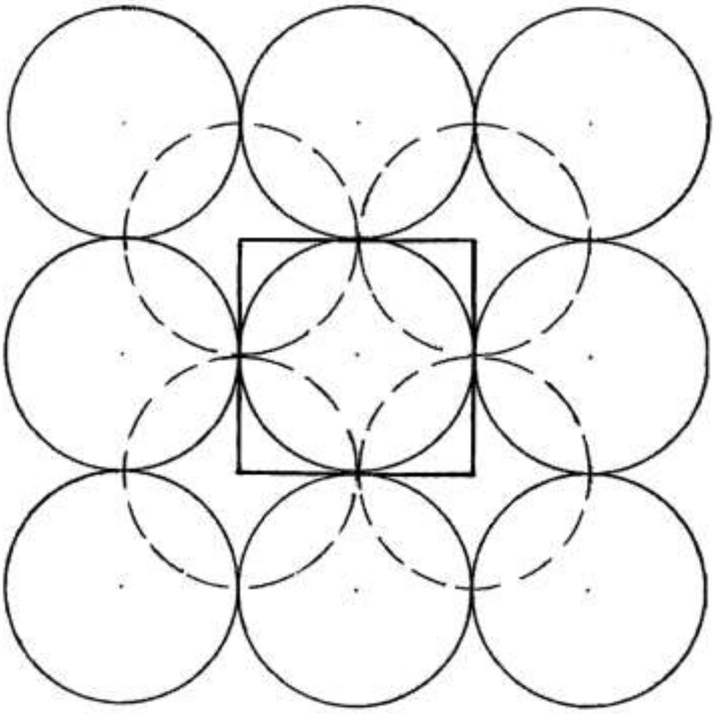


Nei punti che sono generati dalle divisioni dei quadrati di lato 2*raggio, fare centro con raggio uguale a quello della prima serie di cerchi e disegnare un secondo reticolo di cerchi tangenti. Questi nuovi cerchi sono tracciati con le circonferenze tratteggiate.

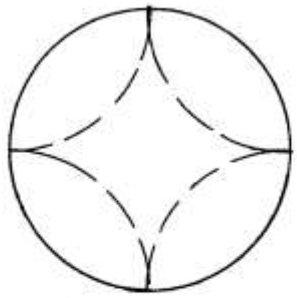
Le intersezioni delle due serie di cerchi danno vita a *quadrati concavi* e a *lenti* come è mostrato nella figura:

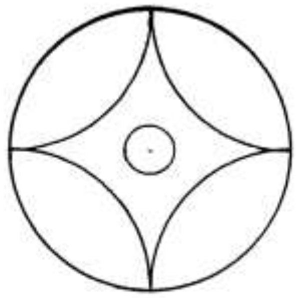


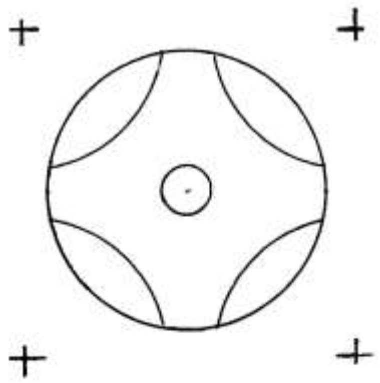
Il quadrato evidenziato nella figura che segue ha lati lunghi quanto il doppio del raggio dei cerchi: al suo interno i cerchi delimitano un *apsamikkum* e quattro *lenti*:



In generale, la cultura della Valle dell'Indo fornisce diversi esempi di composizioni geometriche basate sul quadrato e sul cerchio come gli esempi contenuti nella figura:







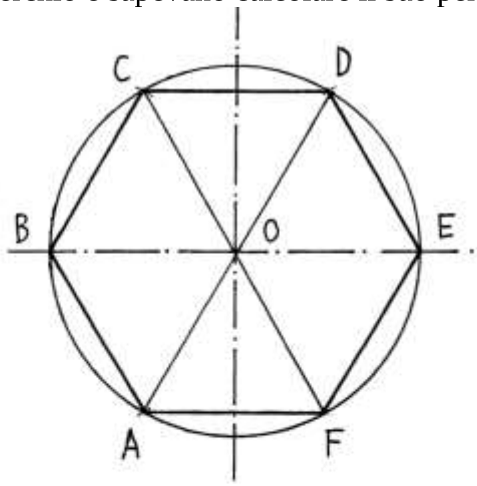
Queste composizioni comuni alle civiltà della Mesopotamia e della Valle dell’Indo indicano possibili importanti contatti fra quelle diverse culture?

APPENDICE A

Un'ipotesi sull'origine dell'approssimazione $\pi = 3{,}125$

Il ricercatore francese Jean Brette (1946-2017), nell'articolo citato in bibliografia, ha proposto una serie di ipotesi per spiegare l'origine dell'approssimazione $\pi = (3 + 1/8)$.

Egli è partito da un dato di fatto: i Babilonesi conoscevano la costruzione dell'esagono regolare inscritto in un cerchio e sapevano calcolare il suo perimetro.



perimetro $_{\text{ESAGONO}}$ = 6 * lato = 6 * AB = 6 * r   dove *r* è il raggio del cerchio (OA in figura).

L'arco AB è più lungo della corda AB (che è un lato dell'esagono).

La circonferenza *c* è lunga $c = 2 * \pi * r$.

Dividendo la circonferenza per il perimetro *p* dell'esagono si ha:

$c/p = (2 * \pi * r)/(6 * r) = \pi/r$.

A questo punto, Brette introduce il valore approssimato $\pi = 22/7$ che verrà proposto oltre un millennio più tardi da Archimede (valore probabilmente sconosciuto ai Babilonesi). La proporzione diviene:

$\pi/r = (22/7)/3 = 22/21$.

Mentre per noi è naturale stimare la lunghezza ignota della circonferenza a partire dalla lunghezza nota del perimetro dell'esagono inscritto, i Babilonesi agivano al contrario e fornivano il rapporto inverso:

$p/c = 0{,}956$.

Questo rapporto è abbastanza vicino all'inverso di 22/21:

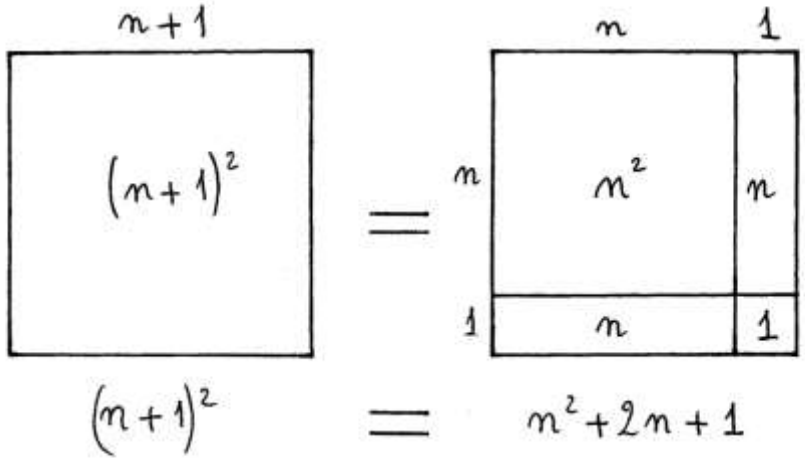
$21/22 = 0{,}9(54)$.

Brette suggerisce due ipotesi:

1. I Babilonesi conoscevano il teorema di Pitagora: semplicemente essi non lo dimostrarono e si limitarono a impiegarlo (come è confermato, fra le altre, dalla famosa tavoletta Plimpton 322).
2. I Babilonesi sapevano costruire triangoli rettangoli con lati lunghi numeri interi e in particolare quelli con ipotenusa e un cateto lunghi quanto *numeri consecutivi*.

I Babilonesi conoscevano l'equazione

$(n + 1)^2 = n^2 + 2*n + 1$, che è rappresentata dal grafico che segue:



L’espressione può essere scritta come

$(n + 1)^2 = n^2 + (2*n + 1)$.

Secondo Brette era necessario che l’espressione (2*n + 1) fosse il *quadrato* di un numero intero, k:

$(2*n + 1) = k^2$.

L’espressione $(n + 1)^2$ può essere trasformata nella seguente:

$n^2 + (2*n + 1) = n^2 + k^2$.

Dato che (2*n + 1) è sicuramente un numero *dispari*, k può assumere solo valori dispari: 3, 5, 7, 9 …

Brette non spiega in modo esplicito che i valori di k sono i numeri più piccoli delle terne pitagoriche che a suo avviso creavano i Babilonesi.

Vediamo ora i singoli casi.

Per k = 3, la formula diviene $(2*n + 1) = 3^2$ da cui

$N = (3^2 – 1)/2 = (9 – 1)/2 = 4$.

3 e 4 sono i cateti del triangolo rettangolo. Per l’ipotesi numero 2, l’ipotenusa *i* e un cateto (quello maggiore) hanno lunghezze rappresentate da numeri consecutivi, per cui:

i = cateto maggiore + 1 = 4 + 1 = 5 .

La riprova è data dai seguenti passi (basati sull’applicazione del teorema di Pitagora):

$i^2 = 3^2 + 4^2 = k^2 + (k + 1)^2$

$i^2 = k^2 + k^2 + 2*k + 1$

$i^2 = 2*k^2 + 2*k + 1 = 2*3^2 + 2*3 + 1 = 18 + 6 + 1 = 25$ e

$i = \sqrt{25} = 5$.

Da questo primo esempio è possibile ricavare le seguenti regole:

* *k* rappresenta la lunghezza del cateto più corto;
* *n* quella del cateto lungo;
* *i*, l’ipotenusa, che è data da i = (n + 1).

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Il secondo caso è k = 5:

$2*n + 1 = 5^2$ da cui $n = (5^2 – 1)/2 = (25 – 1)/2 = 12$, che è la lunghezza del secondo cateto.

L’ipotenusa *i* è lunga: i = cateto maggiore + 1 = 12 + 1 = 13 .

Anche il triangolo 5-12-13 forma una terna pitagorica.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Il terzo caso ha k = 7 (che, come già detto in precedenza) è la lunghezza del cateto più corto.

Applicando la precedente formula si ha:

$2*n + 1 = 7^2$ da cui $n = (7^2 – 1)/2 = (49 – 1)/2 = 24$, lunghezza del cateto maggiore.

L'ipotenusa *i* è lunga: i = cateto maggiore + 1 = 24 + 1 = 25 .

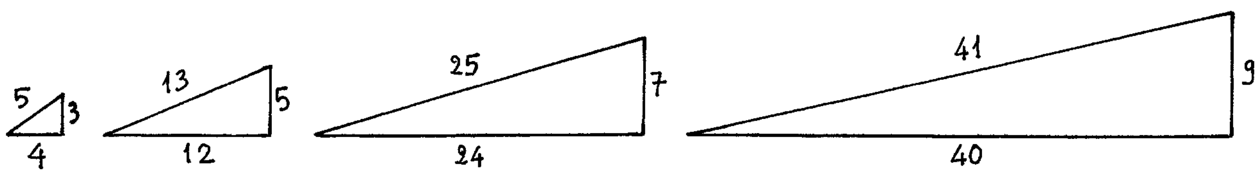
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Infine, nel quarto caso k = 9:

$2*n + 1 = 9^2$ da cui $n = (9^2 – 1)/2 = (81 – 1)/2 = 40$, lunghezza del cateto maggiore.

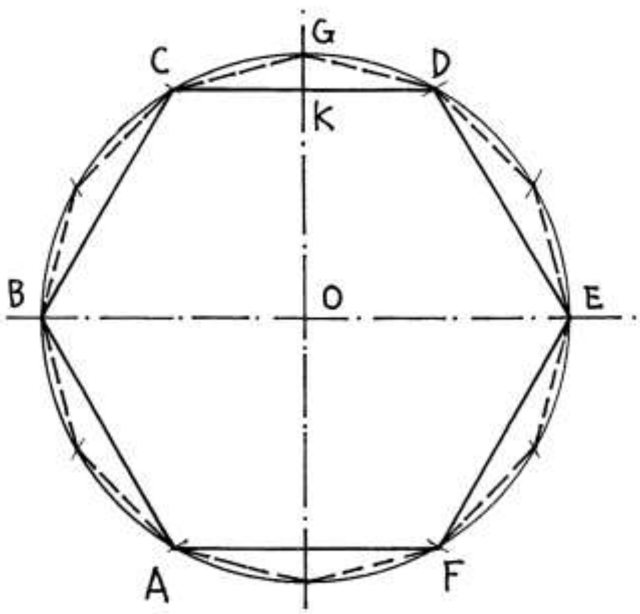
L'ipotenusa *i* è data da: i = cateto maggiore + 1 = 40 + 1 = 41 .

La figura che segue riassume le lunghezze dei quattro triangoli rettangoli:

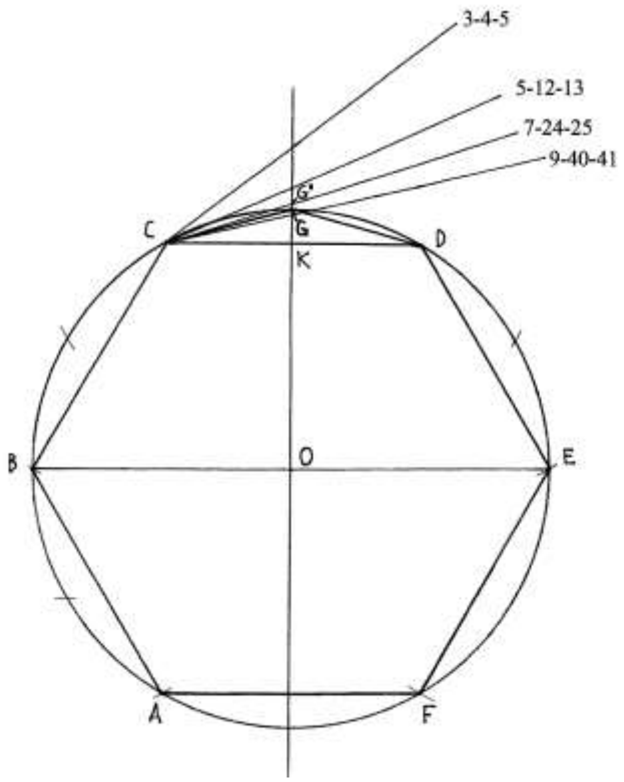


%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Tutto questo complesso calcolo sarebbe servito a sostituire ciascun lato dell'esagono con due lati del dodecagono inscritto nello stesso cerchio:

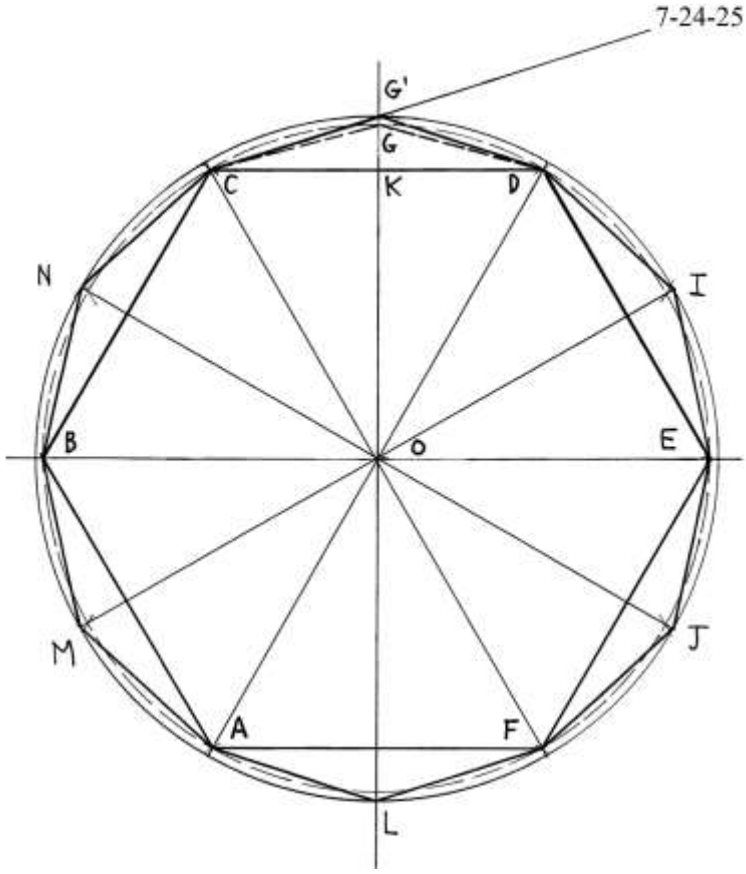


Brette sovrappone i quattro precedenti triangoli rettangoli a quello CKG:



Il più vicino al triangolo CKG è quello che ha lati lunghi 7-24-25: la sua ipotenusa taglia il prolungamento del diametro verticale nel punto G'.

Nella figura che segue, ciascun lato dell'esagono è sostituito con *due* lati di un dodecagono *non regolare*:



La figura è ottenuta disegnando due circonferenze concentriche in O e raggi OG e OG': su quella interna sono i vertici dell'esagono ABCDEF e questi vertici sono comuni al dodecagono.

Altri sei vertici del dodecagono (G', I, J, L, M e N) giacciono sulla circonferenza esterna.

Il dodecagono non regolare è AMBNCG'DIEJFL: il poligono ha lati di uguale lunghezza ma i suoi angoli interni non sono uguali perché CG' è più lungo di CG.

Se il raggio OG è lungo *convenzionalmente* 1, le frecce GK e G'K sono lunghe:

GK = 1 – (√3)2 ≈ 0,134 e

G'K = 7/48 ≈ 0,146 .

Il perimetro del dodecagono non regolare è:

perimetro $_{DODECAGONO}$ = 12 * CG' e quello dell'esagono è:

perimetro $_{ESAGONO}$ = 6 * CD = 6 * (2 * CK) = 12 * CK .

Il rapporto fra il perimetro dell'esagono e quello del dodecagono non regolare è:

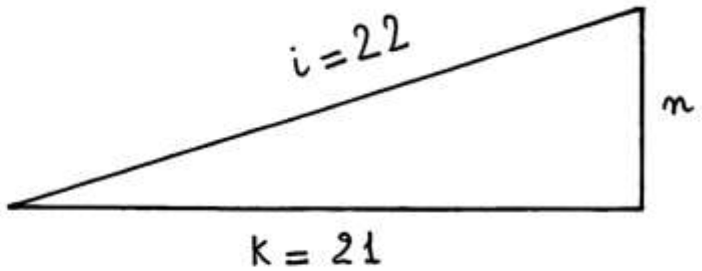
perimetro $_{ESAGONO}$/ perimetro $_{DODECAGONO}$ = 12 * CK/12 * CG' = CK/CG' = 24/25 .

Il rapporto inverso

CG'/CK = 25/24 è un'ottima approssimazione del rapporto π/3 .

Usando l'ipotenusa del triangolo 5-12-13 si avrebbe un dodecagono non regolare con lati più lunghi di quelli generati con il triangolo 7-24-25 e implicitamente un valore di π uguale a (3 + ¼) e quindi meno preciso di (3 + 1/8).

Impiegando il metodo proposto da Jean Brette con le sue due ipotesi, i Babilonesi non avrebbero potuto usare una terna contenente i due numeri consecutivi 21 e 22, frutto – come già spiegato all'inizio di questo paragrafo – dell'introduzione dell'approssimazione π = 22/7 nella divisione π/r = (22/7)/3 = 22/21.



Il cateto minore *n* ha lunghezza data da:

$$n^2 = i^2 - k^2 = 22^2 - 21^2 = 484 - 441 = 43 .$$

La radice di 43 non è un numero intero: √43 ≈ 6,557 .

La terna n-21-22 non è pitagorica e non soddisfa le due ipotesi di Brette.

È fondata su dati di fatto la proposta di Brette?

\- APPROFONDIMENTO -

<u>Origine delle terne pitagoriche primitive secondo Pitagora</u>

Il matematico e ingegnere egiziano Erone (I secolo d.C.) e il matematico bizantino Proclo (412 – 485) attribuirono a Pitagora (circa 570 – 495 a.C.) una regola per la generazione di triangoli rettangoli con numeri interi *dispari* e diversi da 1.

La regola parte dalla scelta di un numero intero *dispari*, indicato con *n*, che corrisponde alla lunghezza del cateto più corto.

Facciamo un esempio e scegliamo il numero *n = 3*: esso rappresenta la lunghezza del cateto più corto del triangolo rettangolo equivalente.

La lunghezza del secondo cateto è data dalla formula:

$$\text{cateto maggiore} = \frac{n^2 - 1}{2} = \frac{3^2 - 1}{2} = 4$$

.

Infine, l'ipotenusa è data da

$$\text{ipotenusa} = \left(\frac{n^2 - 1}{2}\right) + 1 = 4 + 1 = 5$$

.

L'ipotenusa è stata calcolata sommando 1 alla lunghezza del cateto maggiore.

Il triangolo che ne risulta è la terna pitagorica primitiva 3-4-5.

Facciamo un altro esempio per chiarire le idee e scegliamo il numero primo 5 quale lunghezza del cateto più corto.

Il cateto maggiore è lungo

$$\frac{5^2 - 1}{2} = \frac{25 - 1}{2} = 12$$

e l'ipotenusa è lunga: 12 + 1 = 13 .

La terna pitagorica che ne risulta è 5-12-13 che è la seconda terna primitiva.

- -

APPENDICE B

Il pensiero di Neugebauer

Neugebauer pubblicò negli Stati Uniti la prima edizione di "*The Exact Sciences in Antiquity*" nel 1952. L'opera è stata successivamente ripubblicata.

La traduzione italiana è basata sulla seconda edizione americana del 1957.

I passi che seguono sono estratti dalle pp. 79-82 dell'edizione italiana:

"… Non sono passati più di cent'anni da quando la scrittura cuneiforme tornò a essere intelligibile; e solo poco prima dell'inizio del secolo presente fu riconosciuto universalmente il fatto fondamentale che il sumerico è una lingua a sé, anche se scritta con gli stessi caratteri del suo successore semitico, l'accadico. Ma mentre la decifrazione e l'interpretazione procedeva[no] a passi lenti, i testi vennero trovati fin dall'inizio in grandissima quantità. La prima raccolta di rilievi e tavolette arrivò in Francia nel 1846, tre anni dopo essere stata portata in luce durante gli scavi eseguiti tra le rovine di Khorsabad, vicino a Mossul, dal console francese Botta. Nel 1849-1850 Layard trovò nelle rovine di Ninive, allora chiamata Kuyunjik, la prima biblioteca annessa a un palazzo reale; nel 1853 seguì la scoperta della biblioteca di Assurbanipal, a opera di Hormuzd Rassam. Circa 20 000 tavolette possedute dal British Museum di Londra recano ora la lettera di inventario K (per Kuyunjik) o Rm. (per Rassam). Forse un quarto circa di queste due collezioni è oggi edito.

"… Questa proporzione tra i testi esistenti e quelli editi può sembrare piuttosto esigua. In realtà è insolitamente alta, ed è dovuta soltanto al fatto che essa rappresenta il risultato di un secolo di lavoro fatto su una tra le più famose scoperte compiute nel Vicino Oriente. Nel frattempo parecchie decine di migliaia di tavolette sono finite nei musei, fornendo una massa di materiali che richiederebbero parecchi secoli per venire pubblicati anche se a ciò venissero rivolti gli sforzi concentrati di tutti gli assiriologi viventi.

"… A questo punto può essere utile inserire alcune osservazioni generali sugli scavi e sulla pubblicazione dei testi, dal momento che su questi problemi scarse sono le conoscenze che si hanno al di fuori del gruppo ristretto degli iniziati.

"… Uno scavo moderno è un'impresa molto complessa. Un personale composto di architetti, disegnatori, fotografi, epigrafisti e filologi è necessario per assistere l'archeologo nel suo lavoro sul campo. Ma questa è soltanto la prima fase di uno scavo, la più facile. Il preservamento delle rovine, la conservazione degli oggetti trovati, e, soprattutto, la pubblicazione dei risultati, rimane il compito finale rispetto al quale il lavoro sul campo costituisce soltanto il passo preliminare.

"… Qui dobbiamo raccontare una storia molto triste. Mentre il lavoro sul campo è stato portato nel corso degli ultimi cinquant'anni a un altissimo livello di perfezione, la seconda fase, quella della pubblicazione, è stata trascurata in misura tale che molti scavi fatti in località della Mesopotamia hanno avuto come risultato soltanto la distruzione, perpetrata con metodi scientifici, di ciò che era rimasto ancora indistrutto dopo parecchie migliaia di anni. Le ragioni di questo fatto sono futili. Il tempo richiesto per la pubblicazione dei risultati è un multiplo delle esigenze necessarie al lavoro sul campo. I soldi disponibili di solito sono tutti già stati spesi quando si è completata soltanto una frazione dello scavo originariamente progettato, è difficile trovare mecenati disposti a pagare molti anni di lavoro senza risultati tangibili o spettacolari, e gli stessi studiosi finiscono con l'interessarsi ad aspetti particolari del problema in questione o vanno alla ricerca di nuovi materiali invece di eseguire il lavoro noioso di pubblicare le migliaia di particolari venuti in luce nel corso degli scavi. Il risultato non è molto diverso da quello ottenuto con la mentalità da caccia al tesoro dei primi scavatori.

"… Molti scavi, se non tutti, dovettero essere interrotti prima di venire completati o dovettero essere limitati fin dall'inizio a poche fosse scavate attraverso le rovine nella speranza di ottenere un'idea generale del carattere della stratificazione. Poi si fecero oggetto di studi molto dettagliati l'uno o l'altro edificio, che promettevano risultati particolarmente interessanti. Il risultato è costituito

da rovine, abbandonate con profonde ferite, facile preda per gli indigeni che possono così estrarre tutti i mattoni portati in luce, scavare per toglierne altri senza troppe difficoltà, e avere accesso agli strati più profondi e così continuare gli "scavi" a loro modo e a proprio vantaggio. In tal modo gli indigeni devono avere trovato migliaia di tavolette che vennero poi vendute ad alto prezzo da antiquari proprio a quegli stessi musei che avevano speso le prime somme per rimuovere tonnellate di sabbia e di detriti.
"… Fino al 1951 per nessun testo astronomico o matematico si era riusciti a stabilire la provenienza sulla base degli scavi. L'unica eccezione apparente è costituita da un certo numero di tavole di moltiplicazione provenienti da Nippur o Sippar, ma nessuno sa dove esattamente siano stati rinvenuti questi testi fra le rovine. Di conseguenza è assolutamente impossibile sapere, ad esempio, se questi testi provenissero da un tempio, da un palazzo reale o da una casa privata. Non si sa neppure in quale strato furono rinvenuti, cosa che contribuirebbe a darne una datazione più precisa. In altre parole, se quei testi che vennero " scavati" in modo ufficiale fossero stati trovati dagli Arabi, non ci troveremmo in una situazione peggiore di quella in cui siamo ora. Ma mentre gli Arabi, nel loro lavoro "clandestino," scavarono solo fosse relativamente piccole, gli scavi condotti con metodi scientifici hanno distrutto al di là di ogni speranza tutte le tracce della località dove sono stati trovati i testi. Così ora non abbiamo altro che i testi e dobbiamo determinarne l'origine sulla base di prove interne, che sono spesso molto difficili da interpretare.
"… Ci sarebbe molto da dire sui "metodi" per ottenere le informazioni necessarie. Testi che erano rimasti abbandonati per più di 50 anni nei magazzini di un grande museo poterono ottenere una datazione relativa sulla base della carta da giornale in cui erano avvolti. Ciò permise di stabilire una data plausibile per la " spedizione " che aveva trovato i testi e pertanto un'indicazione del luogo in cui erano stati scavati.
"… Una intera classe di testi venne identificata nel modo seguente. Una spedizione tedesca organizzata prima del 1914 aveva svolto lavori nella città di Uruk, una località della massima importanza poiché le sue rovine coprono l'arco di tempo che va dall'epoca più antica fino al tempo dei Seleucidi. Colà i Tedeschi devono avere trovato i resti di un archivio dal quale, però, tutte le tavolette buone erano state asportate dagli Arabi. Queste tavolette finirono per raggiungere le collezioni di Berlino, Parigi e Chicago, formando uno dei gruppi più importanti di testi per lo studio dell'astronomia seleucidica. Gli Arabi non erano interessati a piccoli frammenti. Questi vennero lasciati sul luogo e successivamente furono accuratamente recuperati e fotografati dal personale della spedizione. Per gentile concessione del British Museum, ottenni copie di queste fotografie … che mostravano i frammenti disposti con ordine su un tavolo della spedizione. I documenti relativi al luogo in cui erano stati trovati andarono nel frattempo perduti. Anche i frammenti stessi andarono perduti. Per mezzo di calcoli molto lunghi riuscii, però, a stabilire la connessione di questi brandelli coi pezzi più grossi finiti nei succitati musei. Fu così possibile ricostruire intere tavolette, le cui parti si trovano ora in luoghi lontani tra loro, da una parte e dall'altra dell'Atlantico. Infine, gli stessi piccoli frammenti vennero di nuovo riscoperti a Istanbul. Ma la questione principale circa il luogo esatto da cui provengono continua a essere priva di risposta.
"… Il suolo della Mesopotamia ha conservato migliaia e migliaia di tavolette per migliaia di anni. Non sarà così nel clima dei paesi in cui esse sono oggi conservate. Molte tavolette sono ricoperte di incrostazioni di sali … Un cambiamento di umidità produce cristalli che rompono la superficie delle tavolette, cancellando così rapidamente ciò che vi è scritto. Ho visto " tavolette " ridotte a semplice polvere, accuratamente conservate in vetrine da esposizione. Per prevenire ciò, è necessario cuocere lentamente le tavolette ad alta temperatura e poi metterle a bagno per rimuovere il sale. Ma soltanto grandi musei posseggono l'equipaggiamento necessario e un personale esperto, per non parlare del fatto che questi metodi di conservazione furono spesso tenuti celati come segreti di museo. Parecchie migliaia di tavolette sono state acquistate ad alto prezzo da collezioni più o meno grandi, solo perché andassero distrutte senza essere mai lette o registrate in alcun modo.
"… La pubblicazione di tavolette è un compito di per se stesso difficile. Innanzitutto si devono trovare i testi che riguardano il particolare campo in questione. E questa non è affatto una cosa da

nulla. Soltanto piccolissime frazioni di ciò che è posseduto da collezioni e musei sono state catalogate…”.

Benché siano trascorsi alcuni decenni dalla prima pubblicazione del testo di Neugebauer, pare che la situazione non sia molto migliorata.

Bibliografia

1. Bernal Martin, “Atena nera”. Le radici afroasiatiche della civiltà classica, trad. it., Milano, Il Saggiatore, 2011, pp. 504.
2. Brette Jean, “Promenade mathématique en Mésopotamie”, http://images.math.cnrs.fr/Promenade-mathematique-en.html?lang=fr
3. Bruins Evert Marie – Rutten Marguerite, “Textes mathématiques de Suse”, Parigi, Librairie Orientaliste Paul Geuthner, 1961, pp. 205 [il testo è comunemente citato con la sigla TMS].
4. Caveing Maurice, “Essai sur le savoir mathématique dans la Mésopotamie et l’Égypte anciennes”, Lille, Presses Universitaire de Lille, 1994, pp. 417.
5. Friberg Jöran, “Amazing Traces of a Babylonian Origin in Greek Mathematics”, Singapore, World Scientific, 2007, pp. xiv-476.
6. Friberg Jöran – Al-Rawi Farouk N.H., “New Mathematical Cuneiform Text”, Cham (Svizzera), Springer, 2016, pp. xvii-553.
7. Gherveghese Joseph George, “C’era una volta un numero”. La vera storia della matematica, trad. it., Milano, Il Saggiatore, 2000, pp. 444.
8. Høyrup Jens, “L’algèbre au temps de Babylone”, Parigi, Vuibert, 2010, pp. XIV-162.
9. Muroi Kazuo, “The oldest example of $\pi \approx 3 + 1/8$ in Sumer’s Calculation of the area of a circular plot”, 1610.03380.pdf (https://arxiv.org/abs/1610.03380) .
10. Neugebauer Otto Eduard, “Le scienze esatte nell’antichità”, trad. it., Milano, Feltrinelli, 1974, pp. 296.
11. Proust Christine et alii, “Tablettes mathématiques de Nippur”, Parigi, 2007, De Boccard Éditions, pp. 394.
12. Proust Christine, “Problèmes de partage: des cadastres à l’arithmétique” http://culturemath.ens.fr/content/probl%C3%A8mes-de-partage-des-cadastres-%C3%A0-larithm%C3%A9tique
13. Proust Christine, “Mathématiques en Mésopotamie: étranges ou familières?”, 2015, https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01515635/document .
14. Robson Eleanor, “Mesopotamian Mathematics, 2100-1600 BC. Technical Constants in Bureaucracy and Education”, Oxford, Clarendon Press, 1999, pp. xvi-334.
15. Robson Eleanor, “3. Geometrical coefficients”, 1999, http://www.helsinki.fi/~whiting/coefficients01.pdf [si tratta del capitolo n. 3 del precedente volume].
16. Robson Eleanor, “Mesopotamian Mathematics”, in “The Mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India, and Islam”, a cura di Victor J. Katz, Princeton, Princeton University Press, 2007, pp. 57-186.
17. Robson Eleanor, “The Long Career of a Favorite Figure: The *apsamikku* in Neo-Babylonian Mathematics”, in “From The Banks of the Euphates: Studies in Honor of Alice Louise Slotsky” , Winona Lake, Eisenbrauns, 2008, pp. 213-227.
18. Robson Eleanor, “Mathematics in Ancient Iraq”. A Social history, Princeton, Princeton University Press, 2008, pp. xxvii-441.
19. Sinha Sitabra – Yadav Nisha – Vahia Mayank, “In Square Circle: Geometric Knowledge of the Indus Civilization”, arXiv:1112.6232v1 [math.OH], 29 Dec 2011.