sergio(punto)calzolani(at)outlook(punto)it

Parole chiave: autori Gromatici, groma, misura con l'unità piede, misurazioni di triangoli e di poligoni, Epafrodito, Vitruvio Rufo, numeri figurati, formule approssimate per l'area di triangoli, poligoni regolari, cerchio e semicerchio, uso della iugero e della tavola per le misure dei campi, metrologia romana

Gli Autori dei trattati Gromatici

I trattati dei Gromatici furono scritti in buona parte fra il 75 e il 120 d.C.

Essi raccolgono le regole e le pratiche degli Agrimensori che risalivano almeno al 300 a.C., data intorno alla quale i Romani iniziarono a fondare le loro *colonie* in Italia.

Le date attribuite ai trattati sono state desunte dalle dediche agli Imperatori romani in carica o da loro citazioni.

Fra i principali autori sono i seguenti:

- Sesto Giulio Frontino, vissuto nel I secolo.
- Igino Gromatico, attivo a cavallo dell'anno 100.
- Agenio Urbico (*Agennius Urbicus*), operante fra l'81 e il 96.
- Balbo, scrisse fra il 102 e il 106.
- Marcus Iunius Nipsus, forse vissuto nel II secolo.
- Pseudo Igino, vissuto alla fine del II secolo.
- Siculo Flacco (*Siculus Flaccus*), attivo fra il 96 e il 291. Più probabilmente visse verso la fine del IV secolo.

Altri più piccoli trattati sono anonimi.

Tutti i manoscritti originali sono andati perduti. I loro testi furono raccolti in una collezione compilata nel corso del V secolo (o verso la fine di questo secolo) e conosciuta con l'espressione latina "*Corpus Agrimensorum Romanorum*" (o "*Gromatici Veteres*"). La collezione sarebbe stata redatta a Ravenna, in epoca bizantina. Da questo testo iniziale deriverebbero i manoscritti presenti in alcune biblioteche italiane, europee e americane.

Quattro manoscritti sono illustrati con delle *miniature* per un insieme di circa 350 disegni di differenti tipologie: si va da semplici primitivi schizzi a più complesse mappe a colori di città o territori centuriati. I metodi grafici impiegati sono assonometrie e prospettive a volo d'uccello.

I trattati contenuti in quella raccolta furono ripetutamente copiati in Europa a partire dal VI secolo e fino almeno al XVII secolo. Subirono inoltre continui rimaneggiamenti.

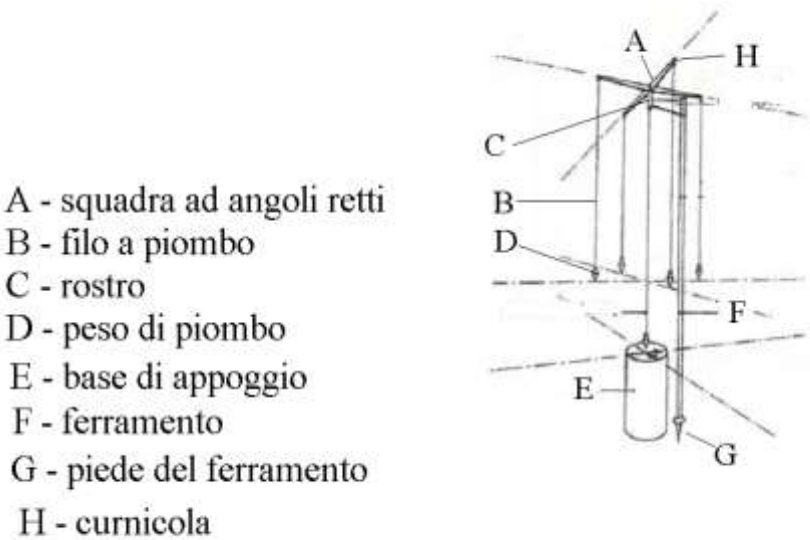
I testi conservati in varie Biblioteche europee contengono molte illustrazioni che descrivono città e luoghi centuriati: esse sono state disegnate con una forma di *assonometria cavaliera* o *militare*.

La groma

Il nome "Gromatici" fu loro attribuito perché il loro principale strumento di lavoro era la *groma*.

La groma era formata da un'asta chiamata *ferramento* da conficcare verticalmente nel terreno. Il termine latino *ferramentum* derivava dal fatto che il piede dell'asta era fatto di *ferro*. Nei trattati dei Gromatici, la groma è chiamata poche volte con questo nome e molto spesso *ferramentum*.

La struttura della groma era poggiata sul terreno per mezzo di una *base* rigida, di legno o di pietra: sul suo punto centrale veniva posizionata l'estremità di un filo a piombo pendente dal centro della squadra.



Nella parte superiore il ferramento terminava con un supporto sporgente, il *rostro*, recante due estremità cilindriche cave: nella seconda cavità era conficcato il perno che reggeva la *squadra* orizzontale con bracci ad angolo retto. Il rostro poteva ruotare in un piano orizzontale, senza ostacolare l'uso dello strumento. Anche la squadra poteva ruotare, sempre in un piano orizzontale.

Alle estremità (*curnicula*) di ciascun braccio era legato un filo recante all'estremo inferiore un peso di piombo necessario per tendere il filo stesso.

L'altezza della groma (dal piede del ferramento fino alla squadra) è stata stimata fra 180 e 190 cm: in questo modo l'agrimensore poteva *vedere* traguardando comodamente due fili appesi a *curnicula* opposte. I bracci della squadra della groma erano lunghi circa 46 cm (a partire dal perno centrale).

Non sono giunti a noi degli esemplari completi di groma, perché essa era fatta con materiali deperibili o con materiali metallici recuperati. La sua forma è stata ricavata dai resti rinvenuti nel

1912 in scavi effettuati a Pompei nella bottega di un fabbricante di utensili: *Verus*. Altre importanti indicazioni sono venute da alcune lastre tombali di agrimensori romani, che vollero farsi incidere gli strumenti del loro lavoro.

IL PODISMUS

Premessa

Alcuni manoscritti composti con gli opuscoli dei Gromatici contengono in successione:

* un piccolo testo noto come *Podismus* perché tutte le dimensioni vi sono definite in *piedi*;
* un trattato attribuito a Epafrodito e a Vitruvio Rufo;
* un trattato anonimo sulla misura degli iugeri.

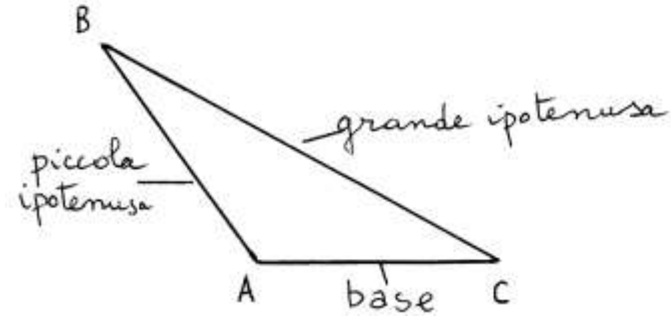
In passato il Podismus è stato attribuito a uno scrittore del II secolo d.C., Marcus Iunius Nipsus, ma oggi è ritenuto di autore anonimo.

Questo articolo si basa sul lavoro di Jean-Yves Guillaumin, citato in bibliografia, al punto 1.

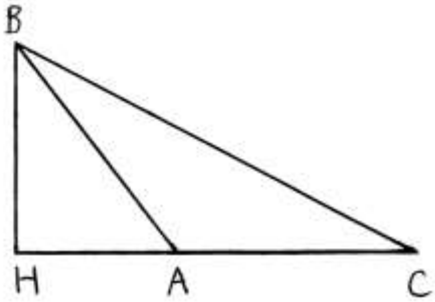
Triangolo ottusangolo

Il triangolo ABC ha lati lunghi:

* la *piccola ipotenusa* AB = 10 piedi;
* la *grande ipotenusa* BC = 17 piedi;
* la *base* AC = 9 piedi.



Determinare l'altezza relativa al lato AC: prolungare verso sinistra il lato AC e dal vertice B abbassare la perpendicolare che fissa il punto H:



BH è l'altezza relativa a AC che cade all'esterno del triangolo.

Il problema affrontato dall'Autore è: calcolare la lunghezza del prolungamento di AC e cioè HA.

La procedura seguita ha i seguenti passi:

* calcolare i quadrati delle lunghezze dei tre lati;
* sottrarre dal quadrato della *grande ipotenusa* i quadrati degli altri due lati: $BC^2 – AB^2 – AC^2 = 17^2 – 10^2 – 9^2 = 289 – 100 – 81 = 108$;
* dividere per 2: $108 : 2 = 54$;
* dividere l'ultimo quoziente (54) per la lunghezza della *base*: $54 : 9 = 6$ piedi che è la lunghezza del segmento HA.

Infine, l'altezza BH è ricavata con il teorema di Pitagora applicato al triangolo rettangolo BHA:

$$BH = \sqrt{AB^2 - HA^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{64} = 8 \text{ piedi}$$

L'area del triangolo ABC è:

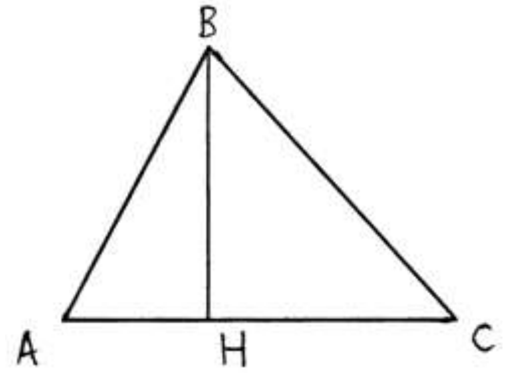
$$Area_{ABC} = \frac{BH \cdot AC}{2} = \frac{8 \cdot 10}{2} = 40 \text{ piedi}^2$$

La procedura sopra esposta implica l'applicazione di una formula risalente a Erone:

$$HA = \frac{BC^2 - AB^2 - AC^2}{2 \cdot AC} = 6 \text{ piedi}$$

Erone creò la formula per calcolare le lunghezze dei segmenti originati sul lato di un triangolo dalla proiezione su di esso dell'altezza relativa, come è il caso di BH proiettata sul prolungamento del lato AC.

La formula di Erone vale per tutti i triangoli, anche per quelli nei quali un'altezza cade all'interno del poligono:



%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

L'altezza BH dà origine a due triangoli rettangoli: HBA e HBC.
Indichiamo con x la lunghezza di HA. Valgono le seguenti relazioni:

$BH^2 = AB^2 – HA^2 = 10^2 –x^2 = 100 – x^2$.

Ma $BH^2 = BC^2 – HC^2 = BC^2 – (HA + AC)^2 = 17^2 – (x – 9)^2 = 289 – x^2 – 18*x – 81$.

Eguagliando le due espressioni si ha:

$100 – x^2 = 289 – x^2 – 18*x – 81$

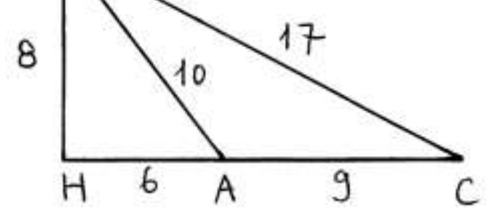
$100 – 289 + 81 = – 18*x$

$18*x = 108$ da cui

$$x = \frac{108}{18} = 6 \text{ piedi}$$

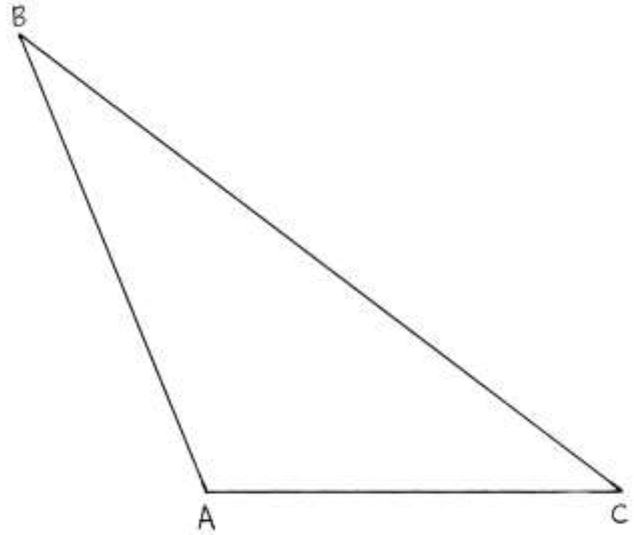
.

La figura che segue riporta tutte le dimensioni dei tre triangoli (ABC, BHA e BHC):



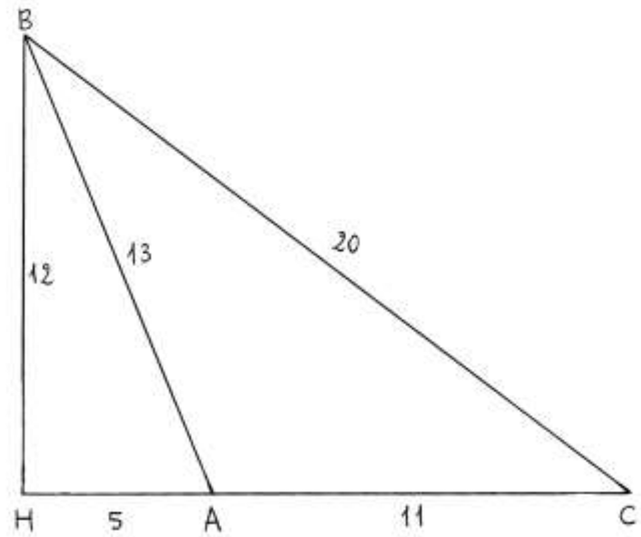
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Un esempio simile a quello sopra descritto è attribuito a Erone: si tratta del *triangolo ottusangolo* con lati lunghi 11, 13 e 20.



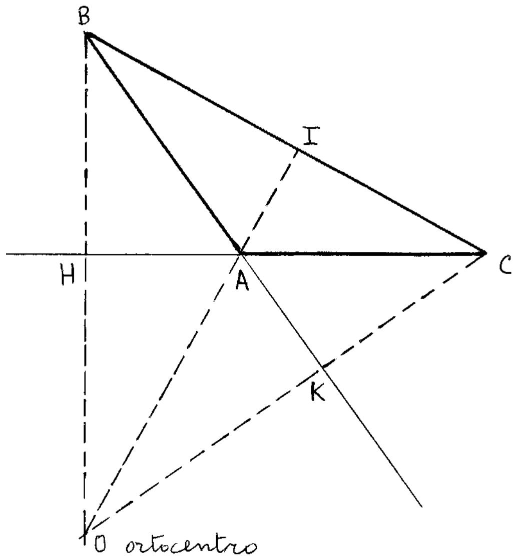
L'altezza BH cade sul prolungamento del lato AC. Applicando le formule di Erone sono ricavate le dimensioni di BH e del segmento HA.

La figura che segue mostra tutte le dimensioni:



- APPROFONDIMENTO -

Nel triangolo ottusangolo studiato nel Podismus e illustrato in precedenza, due delle tre altezze, BH e CK, cadono fuori del poligono, rispettivamente sui prolungamenti dei lati AC e AB che formano l'angolo ottuso BAC:



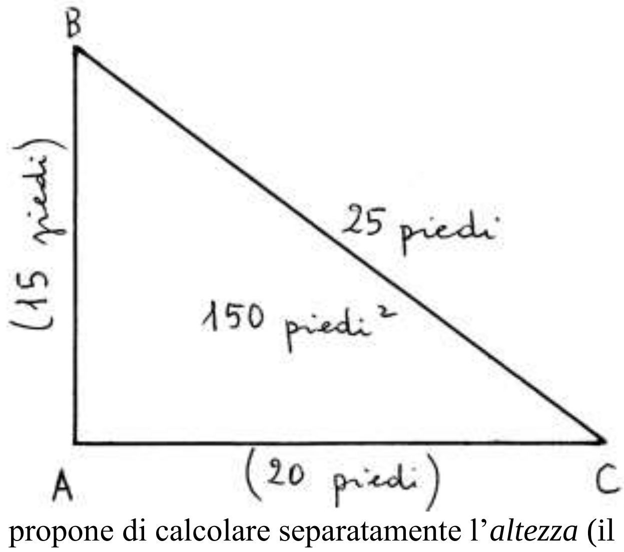
Il punto di incontro delle tre altezze (BH, CK e AI) è l'*ortocentro* O che è esterno al triangolo.

- -

Triangolo rettangolo

Del triangolo rettangolo ABC sono note la lunghezza dell'ipotenusa (BC = 25 piedi) e l'area (150 piedi^2).

Sono ignote le lunghezze dei due cateti, che devono essere calcolate: nella figure esse sono scritte fra parentesi tonde.



La procedura si propone di calcolare separatamente l'*altezza* (il cateto AB) e la *base* (il cateto AC). I suoi passi sono i seguenti:

* moltiplicare l'ipotenusa per se stessa: 25*25 = 625 ;
* moltiplicare l'area per 4: 150*4 = 600 ;
* sommare i due prodotti: 625 + 600 = 1225 ;
* estrarre la radice quadrata:

$$\sqrt{1225} = 35$$;

* dal quadrato dell'ipotenusa (625) sottrarre 4 volte l'area del triangolo (150): 625 – 4*150 = 25 ;

* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{25} = 5$;
* sommare le due radici quadrate: $35 + 5 = 40$;
* dividere per 2: $40 : 2 = 20$ piedi che è la lunghezza del cateto AC;
* sottrarre 5 da 20: $20 – 5 = 15$ piedi che è la lunghezza del cateto AB.

La soluzione è corretta. Il triangolo ABC ha lati multipli di quelli della terna 3-4-5 di un fattore 5.

- APPROFONDIMENTO -

La soluzione viene oggi ricavata con alcuni passaggi algebrici.
Fissiamo AB = x e AC = y.
L'ipotenusa BC è lunga:

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = 25 \text{ piedi}$$

L'area del triangolo è data da:

$$Area_{ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{x \cdot y}{2} = 150 \text{ piedi}^2$$

Sono date *due* equazioni con *due* incognite, x e y. Ricaviamo y dalla seconda:

$$y = \frac{2 \cdot 150}{x} = \frac{300}{x} .$$

Elevare al quadrato la prima equazione:

$$\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 = 25^2$$ che produce $x^2 + y^2 = 625$.

In questa equazione sostituire a y il valore calcolato sopra:

$$x^2 + \left(\frac{300}{x}\right)^2 = 625$$

$$x^2 + \frac{90000}{x^2} = 625$$

Per semplificare i calcoli, sostituire x^2 con la variabile z, per cui la precedente equazione si trasforma in

$$z + \frac{90000}{z} = 625$$

Semplificando, l'equazione diviene:

$z^2 + 90000 = 625*z$ e $z^2 – 625*z + 90000 = 0$.

Il valore di z è

$$z = \frac{+625 \pm \sqrt{625^2 - 4 \cdot 300^2}}{2} =$$

$$= \frac{625 \pm \sqrt{390.625 - 360.000}}{2} =$$

$$= \frac{625 \pm \sqrt{30625}}{2} =$$

$$= \frac{625 \pm 175}{2} = \begin{cases} z_1 = 400 \\ z_2 = 225 \end{cases}$$

Ricordando che $z = x^2$ e estraendo le radici quadrate di z_1 e di z_2 si ha:

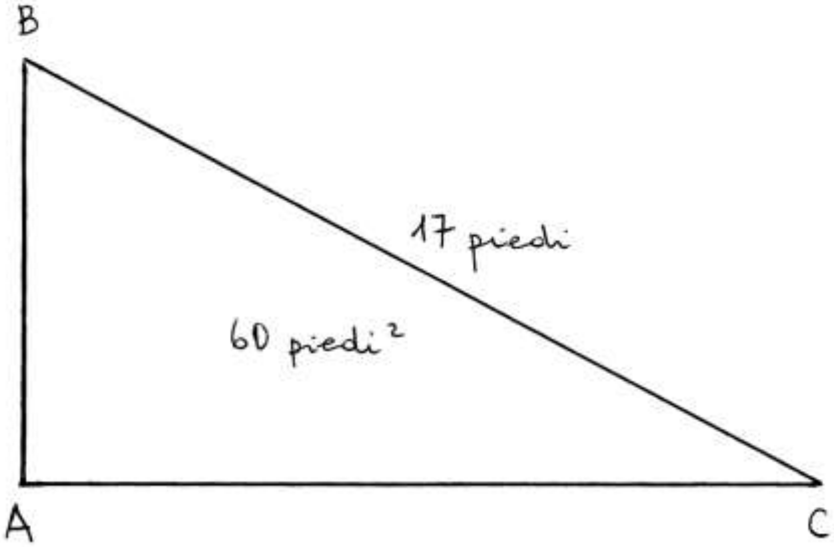
* $x_1 = \sqrt{z_1} = \sqrt{400} = 20$ piedi, che è la lunghezza del cateto AC;
* $x_2 = \sqrt{z_2} = \sqrt{225} = 15$ piedi, che è la lunghezza del cateto AB.

- -

Triangolo rettangolo 2

È dato un triangolo rettangolo di cui sono noti i seguenti dati:

* la somma delle lunghezze dei due cateti (AB + AC) è 23 piedi;
* l'ipotenusa BC è lunga 17 piedi;
* l'area è 60 piedi^2.

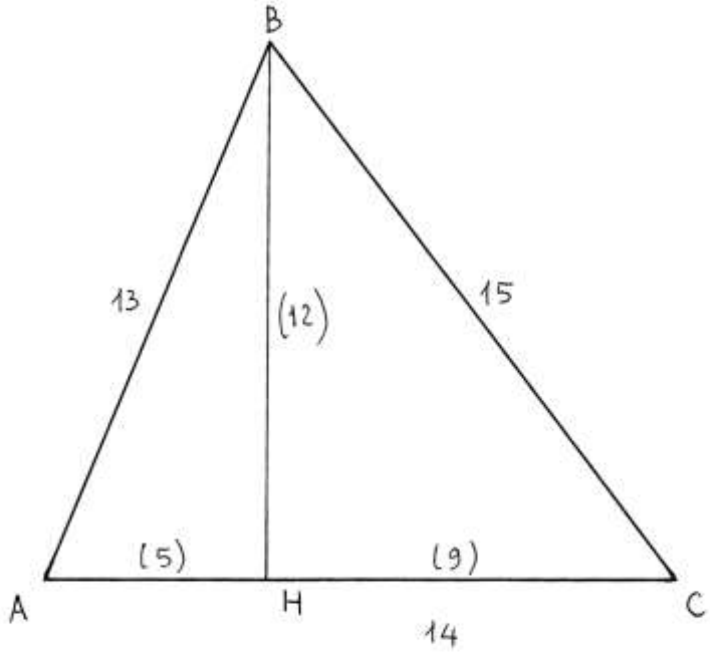


Occorre determinare le lunghezze dei due cateti. Ecco i passi della procedura impiegata:

* moltiplica l'altezza per se stessa: 17*17 = 289 ;
* sottrarre da questo numero 4 volte l'area del triangolo: 289 – 4*60 = 289 – 240 = 49 ;
* estrarre la radice quadrata di 7: $\sqrt{49} = 7$;
* aggiungere la radice alla somma dei cateti: 7 + 23 = 30 ;
* dividere per 2: 30 : 2 = 15 piedi, che è la lunghezza del cateto AC ;
* sottrarre 15 dalla somma 23: 23 – 15 = 8 piedi, che è la lunghezza del cateto AB.

Triangolo acutangolo

Un triangolo acutangolo ha la base lunga 14 piedi e i due lati obliqui sono lunghi 13 e 15 piedi:



Il problema richiede la determinazione della lunghezza dell'altezza BH e quella dei segmenti (AH e HC) nei quali il punto H divide AC.

Si tratta del classico triangolo scaleno studiato da Erone (e dopo di lui da molti altri importanti geometri, come è spiegato in dettaglio nell'*Approfondimento* che segue); la soluzione esposta nel *Podismus* non richiede l'uso della formula di Erone per calcolare l'area.

Il metodo applicato risale alla geometria euclidea.

La soluzione è scandita dai passi della procedura che segue:

*	moltiplicare la lunghezza di AB per se stessa:	13*13 = 169 ;
*	moltiplicare la lunghezza di AC per se stessa:	14*14 = 196 ;
*	sommare i due quadrati:	169 + 196 = 365 ;
*	moltiplicare la lunghezza di BC per se stessa:	15*15 = 225 ;
*	sottrarre l'ultimo quadrato dalla somma dei primi due:	365 – 225 = 140 ;
*	dividere per 2:	140 : 2 = 70 ;
*	dividere l'ultimo quoziente per la lunghezza di AC:	70 : 14 = 5 piedi che è la
	lunghezza della proiezione di AB su AC e cioè AH.	

La procedura ha impiegato la seguente formula:

$$AH = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AC}$$

Il segmento HC è dato dalla differenza HC = AC – AH = 14 – 5 = 9 piedi.

L'altezza BH è calcolata applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo ABH:

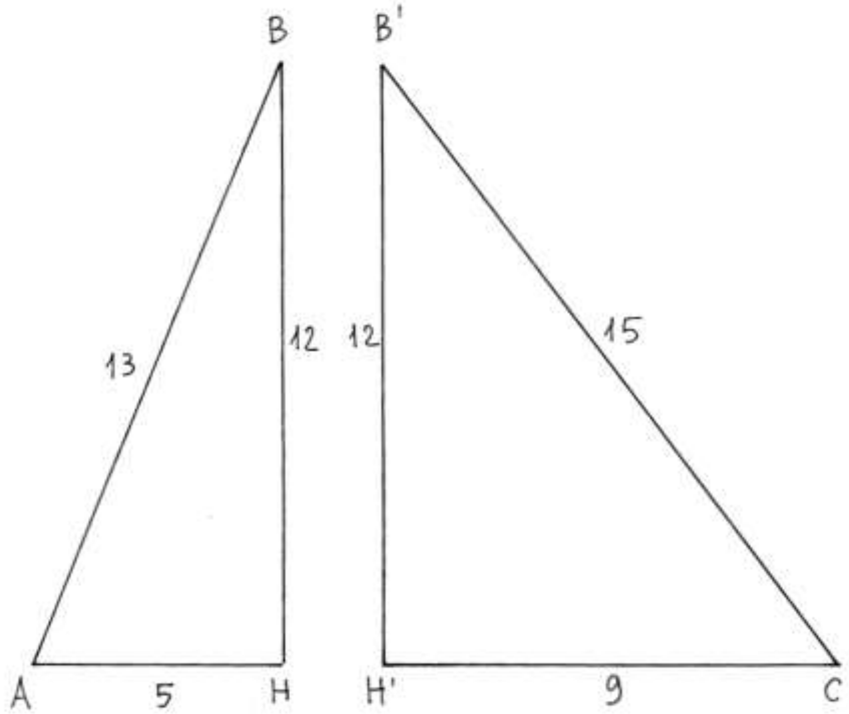
$$BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} =$$

$$= \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12 \text{ piedi}$$

- APPROFONDIMENTO -

Il triangolo scaleno 13 – 14 – 15 è un *triangolo di Erone*.

Esso è generato da due triangoli rettangoli con lati aventi lunghezze che formano due terne pitagoriche e con un cateto di uguale lunghezza (BH = B'H' = 12): i due triangoli sono uniti lungo il cateto comune, BH e B'H' nella figura che segue:



Questo particolare triangolo fu utilizzato da

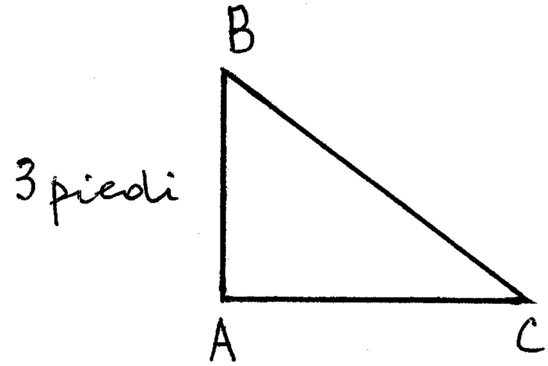
- Erone;
- Varrone;
- i Gromatici *Marcus Iunius Nipsus* (II secolo d.C.) e Epafrodito (II – III secolo);
- Boezio;
- forse Gerberto;
- Leonardo Fibonacci (*Practica Geometrie)*;
- Piero della Francesca, nel *Trattato d'abaco* (fogli 80 *recto,* 80 *verso,* 81 *recto*-a, 81 *verso,* 82 *recto*);
- Giorgio Valla (1447 – 1500) nel "*De expetendis et fugiendis rebus opus*", pubblicato a Venezia nel 1501;
- Niccolò Fontana, detto Tartaglia (circa 1499 – 1557).

La costanza nel tempo e presso numerosi e importanti geometri dell'uso di questo triangolo può essere spiegata con le sue interessanti proprietà geometriche (lunghezze dei lati e aree rappresentate da numeri interi) che evitavano il ricorso a complesse operazioni quali l'estrazione di radici quadrate.

- -

Triangolo rettangolo 3 – 4 – 5

Dato un *numero dispari*, 3, costruire un triangolo rettangolo:



AB è il primo cateto che è lungo 3 piedi.

Ecco la procedura impiegata:

* calcolare il quadrato di 3: $3^2 = 9$;
* sottrarre 1: $9 - 1 = 8$;
* dividere per 2: $8 : 2 = 4$ piedi che è la lunghezza della base AC;
* aggiungere 1 alla lunghezza della base: $4 + 1 = 5$ piedi che è la lunghezza dell'ipotenusa.

L'autore del *Podismus* ha impiegato due formule:

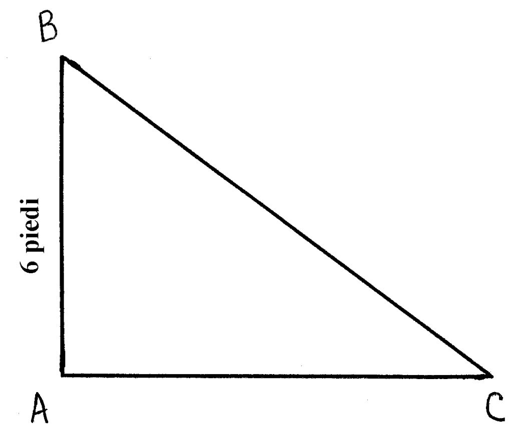
$$AC = \frac{AB^2 - 1}{2}$$

$$BC = AC + 1$$

La procedura è stata impiegata per disegnare il classico triangolo 3-4-5 e cioè la più semplice *terna pitagorica*.

Triangolo rettangolo 6-8-10

Dato un *numero pari*, ad esempio 6, costruire un triangolo rettangolo con un cateto lungo 6 piedi.



La procedura proposta nel *Podismus* è la seguente:

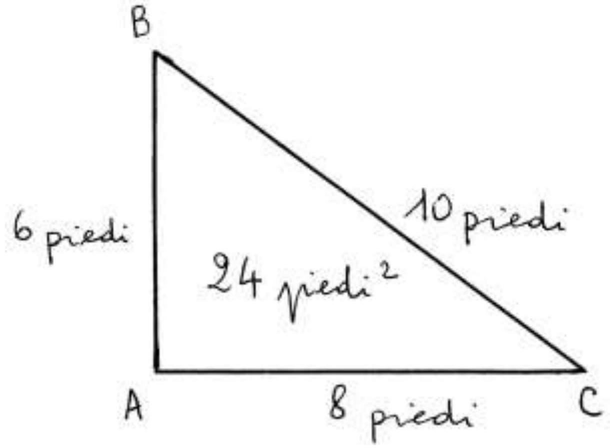
* dividere per 2 il numero dato: $6 : 2 = 3$;
* moltiplicare questo quoziente per se stesso: $3*3 = 9$;
* sottrarre 1: $9 - 1 = 8$ piedi che è la lunghezza della *base* AC del triangolo.

La procedura del *Podismus* si arresta a questo ultimo passo.

Il segmento lungo 6 piedi è il cateto verticale AB e la lunghezza dell'ipotenusa è calcolabile con due differenti metodi:

a) sommare 1 al quadrato di 3, già calcolato in precedenza: 3*3 + 1 = 9 + 1 = 10 piedi, che è la lunghezza dell'ipotenusa BC;
b) applicare il teorema di Pitagora al triangolo ABC:

$$AC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \text{ piedi} .$$



Misurare un triangolo qualunque

Pur senza citarlo espressamente l'autore del *Podismus* fa riferimento a Erone e alla sua formula per calcolare l'area di un triangolo generico.

A titolo di esempio, il trattato riconsidera il triangolo rettangolo 6-8-10 descritto nel precedente paragrafo.

Ecco i passi della procedura impiegata:

* calcolare il perimetro: 6 + 8 + 10 = 24 ;
* dividere per 2: 24 : 2 = 12 ;
* sottrarre dal semiperimetro le lunghezze dei tre lati:
  12 – 6 = 6 ;
  12 – 8 = 4 ;
  12 – 10 = 2 ;
* moltiplicare le tre differenze: 6*4*2 = 48 ;
* moltiplicare l'ultimo prodotto per il semiperimetro 12: 48*12 = 576 ;
* estrarre la radice quadrata dell'ultimo prodotto: √576 = 24 piedi^2 che è l'area del triangolo rettangolo.

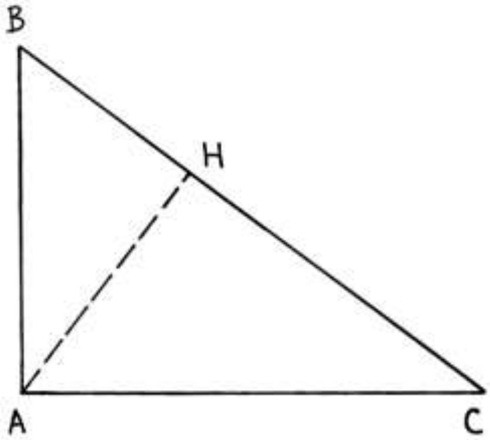
La descrizione equivale all'applicazione della formula di Erone nella quali il semiperimetro *m* è uguale a 12 piedi:

$$Area_{ABC} = \sqrt{m \cdot (m-6) \cdot (m-4) \cdot (m-2)}$$

Triangolo rettangolo e altezza relativa all'ipotenusa

È dato un triangolo rettangolo con lati lunghi:

* AB = 7,5 piedi ;
* AC = 10 piedi ;
* BC = 12,5 piedi.



Per inciso, questo triangolo ha i lati con lunghezze multiple di un fattore 2,5 di quelle dei lati del triangolo rettangolo 3-4-5.

Il problema chiede la determinazione della lunghezza della perpendicolare uscente dal vertice dell’angolo retto (in A) verso l’ipotenusa BC e cioè dell’altezza AH.

Ecco i passi della procedura:

* moltiplicare le lunghezze dei due cateti: 7,5*10 = 75 ;
* dividere questo prodotto per l’ipotenusa: 75 : 12,5 = 6 piedi che è la lunghezza della perrpendicolare AH.

La procedura applica la regola per il calcolo dell’area di un triangolo rettangolo che è data dalle due formule seguenti, equivalenti:

$$Area_{ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{AH \cdot BC}{2}$$

Semplificando le due formule si ottiene:

2*Area ABC = AB*BC = AH*BC e quindi AB*BC = AH*BC.

Conoscendo le lunghezze dei tre lati del triangolo, l’altezza BH è data da:

$$AH = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{7,5 \cdot 10}{12,5} = 6 \text{ piedi}$$

Il punto H divide l’ipotenusa in due segmenti: BH e HC.

Per ricavare la lunghezza di HC il *Podismus* propone di applicare il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo AHC:

$$HC = \sqrt{AC^2 - AH^2} = \sqrt{100 - 36} = 8 \text{ piedi}$$

Per differenza, il segmento BH è lungo: BH = BC – HC = 12,5 – 8 = 4,5 piedi.

Le formule di Frontino per l'area dei poligoni regolari

Sesto Giulio Frontino (vissuto fra il 30 e il 104 circa) è stato un importante scrittore romano di agrimensura, di idraulica e di strategia militare.

A Frontino risalirebbero alcune formule *approssimate* per calcolare l'area dei poligoni regolari: le formule furono riprodotte in diversi manoscritti degli agrimensori romani (ad esempio da Vitruvio Rufo) e usate fino all'epoca medievale e rinascimentale. La loro fonte è data dai *numeri figurati,* argomento che sarà successivamente affrontato in questo contributo.

Per il triangolo equilatero con lato lungo l, la formula era:

$$A_{triangolo} = \frac{l^2 + l}{2}$$

Per il pentagono regolare:

$$A_{pentagono} = \frac{3l^2 - l}{2}$$

Per l'esagono regolare:

$$A_{esagono} = \frac{4l^2 - l}{2}$$

Per i poligoni con numero di lati n maggiore di 6 era proposta una formula di carattere generale:

$$A = \frac{(n-2) \cdot l^2 - (n-4) \cdot l}{2}$$

- APPROFONDIMENTO -

Le formule errate

Per calcolare l'area del pentagono e dell'esagono erano talvolta usate le due seguenti formule, *errate*:

$$\text{Area pentagono} = \frac{3l^2 + l}{2}$$

$$\text{Area esagono} = \frac{4l^2 + l}{2}$$

L'uso della *formula inversa* (vedere il successivo paragrafo) per ricavare la lunghezza del lato dei due poligoni a partire dalla loro area dimostra l'erroneità delle due formule che differiscono da quelle corrette soltanto per l'addizione invece della sottrazione della lunghezza l del lato al numeratore delle formule.

- -

Le opere di Epafrodito e di Vitruvio Rufo

Fra i manoscritti contenenti i testi dei Gromatici romani è compresa un'opera attribuita congiuntamente a due autori, *non coetanei*: Epafrodito e Vitruvio Rufo.

Il loro testo è diviso in 3 parti:

I. La prima contiene alcune indicazioni metrologiche e una raccolta di problemi concreti relativi alla divisione dei campi.

II. La seconda parte fornisce una serie di formule approssimate per il calcolo della superficie di poligoni regolari (dal triangolo equilatero al dodecagono) e di aree circolari.

III. La terza è la più corta ed è riservata a problemi concreti di natura stereometrica (e cioè ai volumi di solidi).

La prima parte è opera di un agrimensore, mentre la seconda è attribuita a un geometra pratico che non si occupava della misura dei campi.

La prima parte potrebbe essere opera dell'agrimensore Epafrodito e la seconda e la terza sarebbero state curate da Vitruvio Rufo, che si definì "architetto".

Epafrodito sarebbe vissuto fra il II e il III secolo e Vitruvio Rufo nel II.

La tabella che segue riassume le formule usate da Vitruvio Rufo: nella terza colonna sono inserite le *formule inverse* usate per ricavare la lunghezza del lato **l** conoscendo l'area **A** del poligono e il suo numero dei lati, **n**.

Le formule inverse per il *pentagono* e l'*esagono* derivano dalla seguente:

$$\ell = \frac{\sqrt{8 \cdot A \cdot (n-2) + (n-4)^2} - (n-4)}{2 \cdot (n-2)}$$

Per il *triangolo equilatero* e per gli altri poligoni, dall'*ettagono* a quelli con un ancor maggiore numero di lati, la formula generale è la seguente:

$$\ell = \frac{\sqrt{8 \cdot A \cdot (n-2) + (n-4)^2} + (n-4)}{2 \cdot (n-2)}$$

La differenza fra le due formule generali è minima: cambia solo il segno davanti all'espressione (n – 4) al numeratore della frazione.

poligoni regolari	area (A)	formula inversa per calcolare la lunghezza del lato **l** , data l'area **A**
triangolo equilatero	$A = \frac{\ell^2 + \ell}{2}$	$\ell = \frac{\sqrt{8A+1} - 1}{2}$
pentagono	$A = \frac{3\ell^2 - \ell}{2}$	$\ell = \frac{\sqrt{24A+1} - 1}{6}$
esagono	$A = \frac{4\ell^2 - 2\ell}{2} = 2\ell^2 - \ell$	$\ell = \frac{\sqrt{32A+4} - 2}{8}$
ettagono	$A = \frac{5\ell^2 - 3\ell}{2}$	$\ell = \frac{\sqrt{40A+9} + 3}{10}$
ottagono	$A = \frac{6\ell^2 - 4\ell}{2} = 3\ell^2 - 2\ell$	$\ell = \frac{\sqrt{48A+16} + 4}{12}$
ennagono	$A = \frac{7\ell^2 - 5\ell}{2}$	$\ell = \frac{\sqrt{56A+25} + 5}{14}$
decagono	$A = \frac{8\ell^2 - 6\ell}{2} = 4\ell^2 - 3\ell$	$\ell = \frac{\sqrt{64A+36} + 6}{16}$
endecagono	$A = \frac{9\ell^2 - 7\ell}{2}$	$\ell = \frac{\sqrt{72A+49} + 7}{18}$
dodecagono	$A = \frac{10\ell^2 - 8\ell}{2} = 5\ell^2 - 4\ell$	$\ell = \frac{\sqrt{80A+64} + 8}{20}$

Le formule per il calcolo delle aree derivano dalla formula generale fornita alla fine del precedente paragrafo.

Per la misura delle aree di alcuni poligoni regolari, Vitruvio Rufo impiegò le formule di origine greca per il calcolo dei *numeri poligonali* e cioè adottò formule basate su *progressioni aritmetiche* (somme).

Le aree dei poligoni crescono in *progressione geometrica* (prodotti) dato che esse sono in funzione della lunghezza del lato elevata al quadrato (l^2), quadrato che deve poi essere moltiplicato per una costante caratteristica di ciascun poligono.

La *forma poligonale* degli schemi rappresentanti i numeri poligonali trasse in inganno i Gromatici e i loro successori.

Le formule per il calcolo delle aree derivano dalla formula generale, già presentata in precedenza:

$$A = \frac{(n-2)\cdot \ell^2 - (n-4)\cdot \ell}{2}$$

Per la misura delle aree di alcuni poligoni regolari, Vitruvio Rufo impiegò le formule di origine greca per il calcolo dei *numeri poligonali* e cioè adottò formule basate su *progressioni aritmetiche* (somme).

Le aree dei poligoni crescono in *progressione geometrica* (prodotti) dato che esse sono in funzione della lunghezza del lato elevata al quadrato (l^2), quadrato che deve poi essere moltiplicato per una costante caratteristica di ciascun poligono.

La *forma poligonale* degli schemi rappresentanti i numeri poligonali trasse in inganno i Gromatici e i loro successori.

Prima di affrontare i contenuti del trattato di Epafrodito e di Vitruvio Rufo è necessaria una breve introduzione sui *numeri figurati*.

I numeri figurati

Per capire meglio il senso delle critiche di Gerberto al metodo proposto da Boezio è necessario approfondire l'argomento.

I *numeri figurati* sono numeri interi rappresentati con delle entità geometriche (punti, cerchietti o quadratini) disposte a formare degli schemi geometrici regolari nel piano oppure nello spazio. Trattandosi delle aree dei poligoni che sono figure piane, saranno tralasciati i numeri figurati nello spazio.

I primi matematici che si occuparono dell'argomento furono gli appartenenti alla Scuola pitagorica.

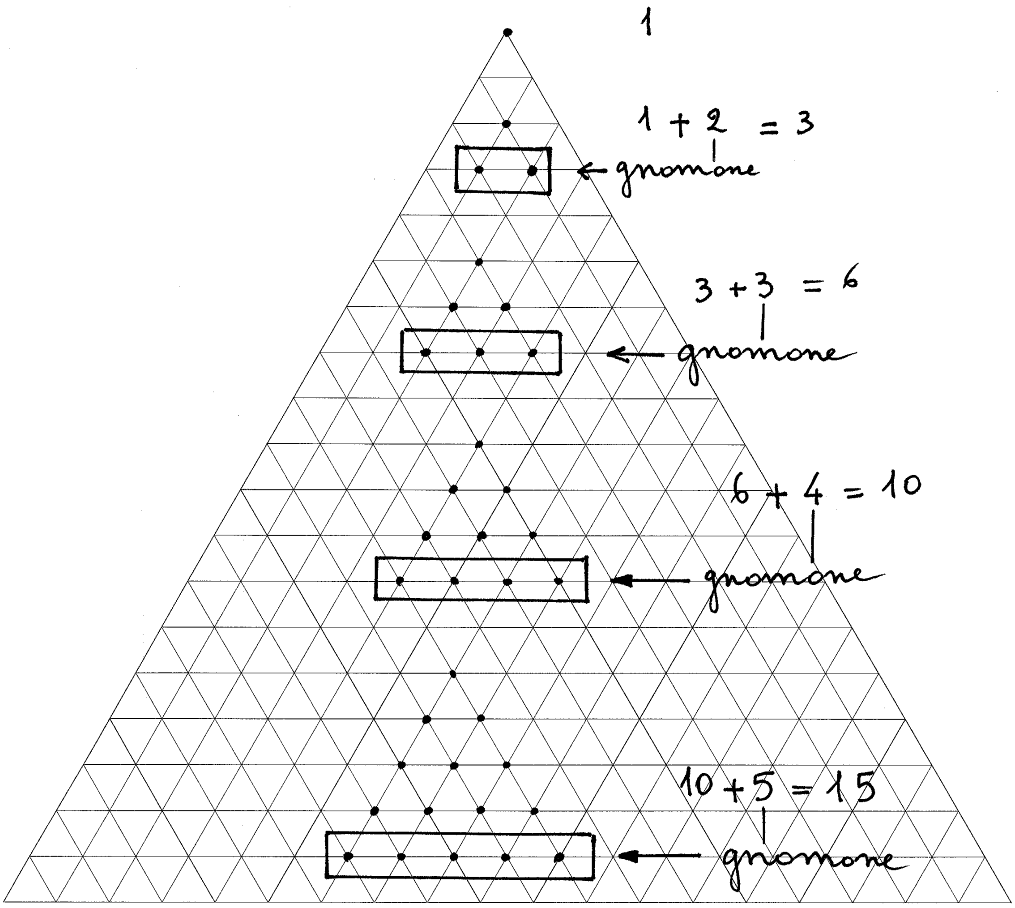
I *numeri poligonali* sono una categoria dei numeri figurati: la loro denominazione è dovuta alla disposizione di una serie ordinata di punti che formano i vertici di poligoni regolari.

Un numero poligonale forma un *poligono regolare* costituito da un certo numero *intero* di entità geometriche.

Le formule usate dai Pitagorici per calcolare il numero degli oggetti formanti i numeri poligonali furono successivamente applicate, in maniera *erronea*, dai Gromatici romani, da Boezio e da tanti geometrici e pratici dell'Alto medioevo al calcolo dell'area dei corrispondenti poligoni regolari: è ciò che, come abbiamo già visto, Gerberto rimproverava per il caso dell'area del triangolo equilatero.

Nel precedente paragrafo abbiamo incontrato i più semplici numeri poligonali: i *numeri triangolari*. Approfondiamo la conoscenza di questi più semplici numeri.

Il numero triangolare 3 è formato dal numero 1 e da uno *gnomone* uguale a 2, come spiega lo schema che segue; il numero triangolare successivo, 6, è formato dal precedente numero, 3, al quale è aggiunto uno *gnomone* uguale a 3.

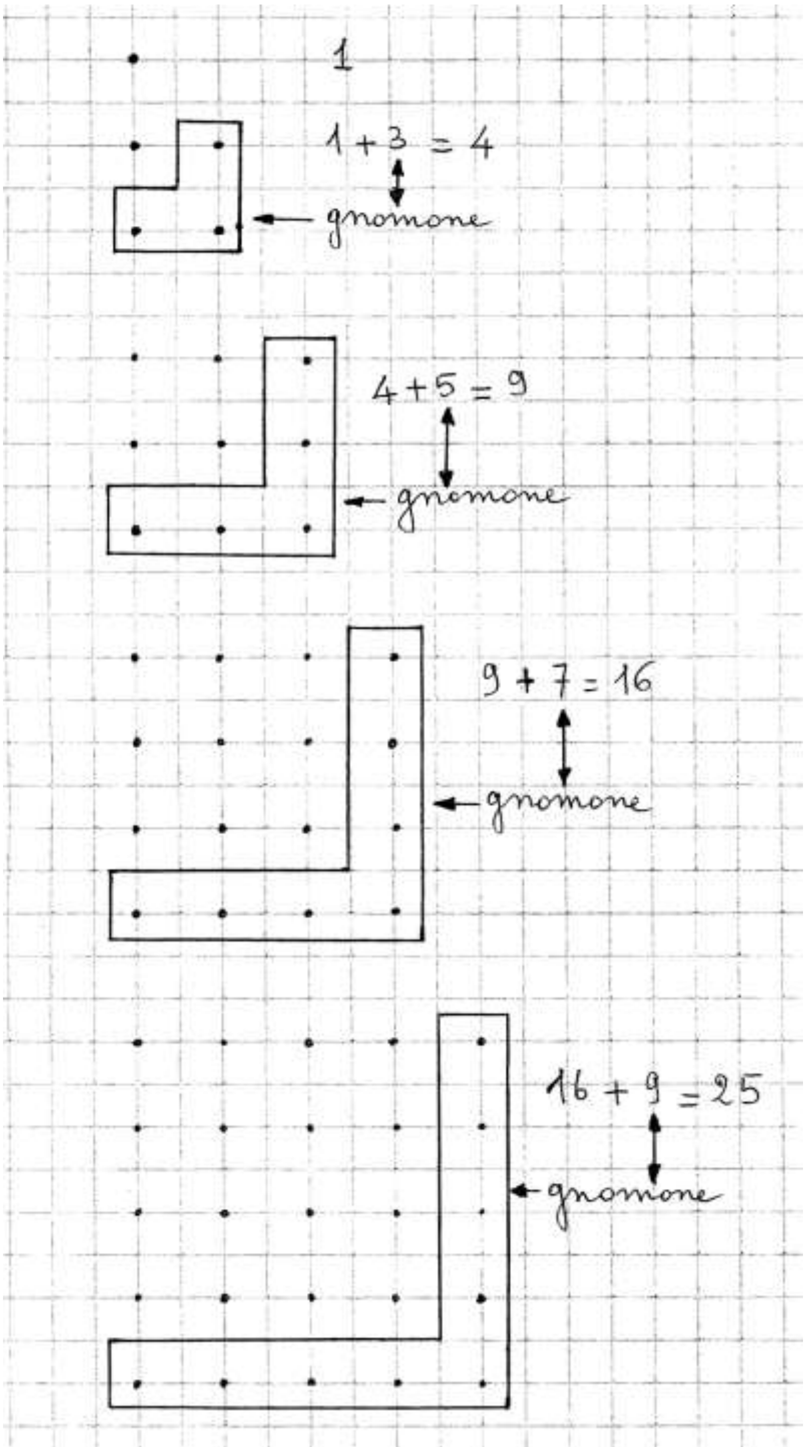


La tabella che segue riassume la successione dei primi sei numeri triangolari:

numeri triangolari	gnomone aggiuntivo	numeri triangolari successivi
0	1	1
1	2	3
3	3	6
6	4	10
10	5	15
15	6	21

La successione degli *gnomoni* aggiuntiva è una *progressione aritmetica* di *ragione 1*.

Nel caso dei *numeri quadrati* lo gnomone ha la forma di una squadra ad angolo retto con braccia di uguale lunghezza, come mostra lo schema che segue:



Gli gnomoni aggiuntivi formano una progressione aritmetica formata da *numeri dispari* con ragione uguale a 2.

I numeri quadrati sono dati dalla successione dei quadrati dei *numeri naturali*, come riassume la tabella che segue:

numeri quadrati	gnomone aggiuntivo	numeri quadrati successivi
0	1	$1 = 1^2$
1	3	$4 = 2^2$
4	5	$9 = 3^2$
9	7	$16 = 4^2$
16	9	$25 = 5^2$
25	11	$36 = 6^2$

La differenza fra un numero quadrato e il precedente (o il successivo) è sempre un *numero dispari*.

La tabella che segue riassume le proprietà dei primi sei *numeri pentagonali*:

numeri pentagonali	gnomone aggiuntivo	numeri pentagonali successivi
0	1	1
1	4	5
5	7	12
12	10	22
22	13	35
35	16	51

Gli gnomoni aggiuntivi formano una *progressione aritmetica* di *ragione 3*.

Infine, la tabella che segue contiene le proprietà dei primi sei numeri esagonali:

numeri esagonali	gnomone aggiuntivo	numeri esagonali successivi
6	0	6
6	9	15
15	13	28
28	17	45
45	21	66
66	25	91

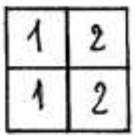
Gli gnomoni aggiuntivi formano una *progressione aritmetica* di ragione 4.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

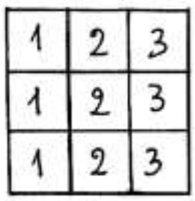
Crescendo il numero degli oggetti aumentano le dimensioni e la complessità dei poligoni. Gli schemi geometrici che possono assumere i numeri poligonali sono infiniti.

La figura che segue mostra gli schemi dei primi tre *numeri quadrati*:

totale 1



totale 4



totale 9

Le figure che seguono descrivono i tre successivi numeri quadrati:

1	2	3	4
1	2	3	4
1	2	3	4
1	2	3	4

totale 16

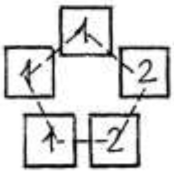
1	2	3	4	5
1	2	3	4	5
1	2	3	4	5
1	2	3	4	5
1	2	3	4	5

totale 25

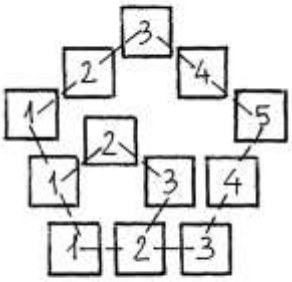
1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6

totale 36

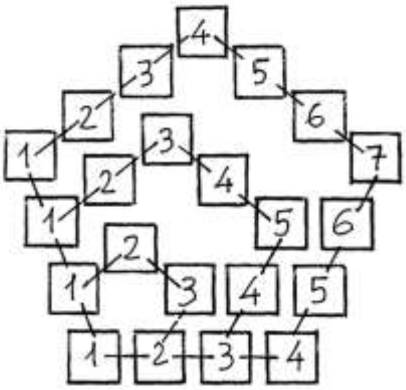
Le figure che seguono presentano gli schemi dei *numeri pentagonali*:



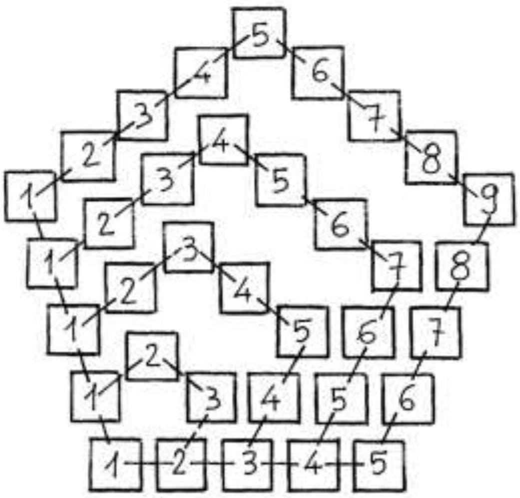
totale 5



totale 12

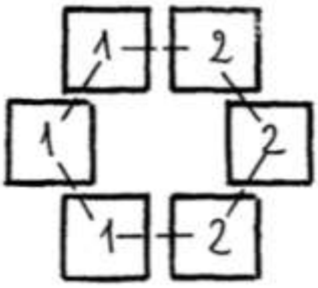


totale 22

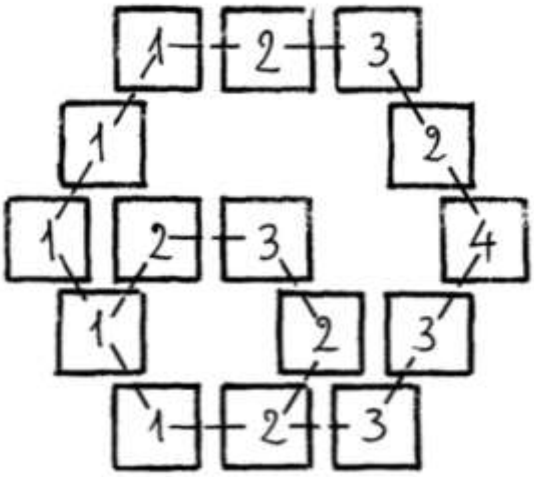


totale 35

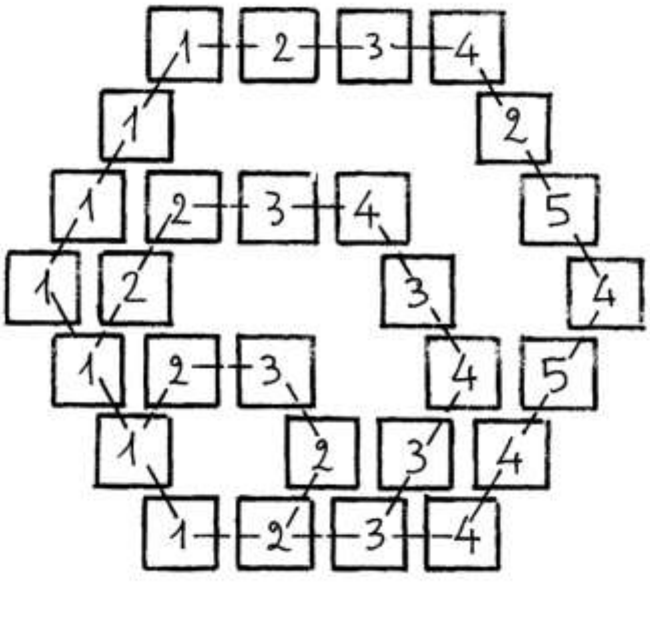
Infine, le figure che seguono descrivono gli schemi dei primi *numeri esagonali*:



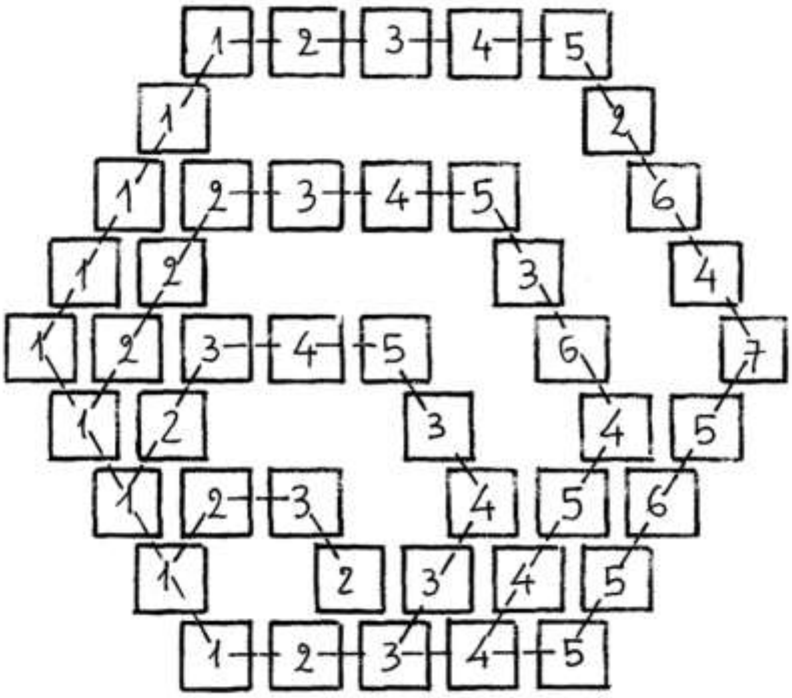
totale 6



totale15



totale 28



totale 45

- APPROFONDIMENTO -

<u>Le formule relative ai numeri poligonali</u>

La tabella che segue contiene i numeri poligonali con valori compresi fra 1 e 12 per gli schemi poligonali dal triangolo equilatero al dodecagono regolare e le relative formule:

numeri poligonali	formule	numero elementi degli schemi (N)									
triangolari	$\frac{N^2+N}{2}$	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55
Quadrati	N^2	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
pentagonali	$\frac{3N^2-N}{2}$	1	5	12	22	35	51	70	92	117	145
esagonali	$2N^2-N$	1	6	15	28	45	66	91	120	153	190
ettagonali	$\frac{5N^2-3N}{2}$	1	7	18	34	55	81	112	148	189	235
ottagonali	$3N^2-2N$	1	8	21	40	65	96	133	176	225	280
ennagonali	$\frac{7N^2-5N}{2}$	1	9	24	46	75	111	154	204	261	325
decagonali	$4N^2-3N$	1	10	27	52	85	126	175	232	297	370
endecagonali	$\frac{9N^2-7N}{2}$	1	11	30	58	95	141	196	260	333	415
dodecagonali	$5N^2-4N$	1	12	33	64	105	156	217	288	369	460
ragioni delle progressioni aritmetiche		0	1	3	6	10	15	21	28	36	45

Le singole formule derivano da una formula generale che proviene da quelle relative alle *progressioni aritmetiche*:

$$somma = \frac{(2 \cdot P + lato) \cdot (n+1)}{6}$$

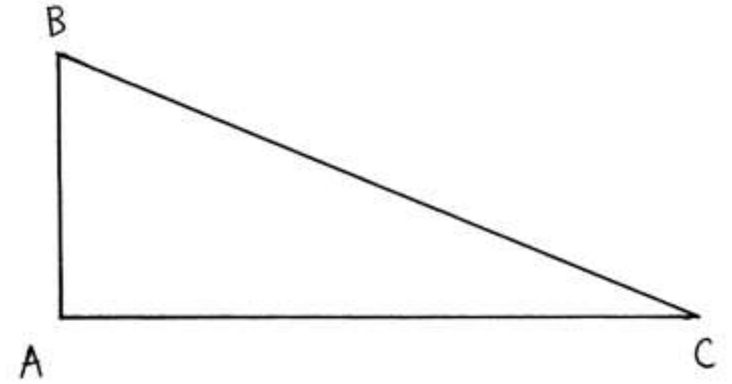
P è il numero poligonale di ordine n e *lato* indica il numero degli elementi che formano ciascun lato del poligono figurato.

- -

ALCUNI PROBLEMI DAL TRATTATO DI EPAFRODITO E DI VITRUVIO RUFO

Triangolo rettangolo

Di un triangolo rettangolo sono noti la lunghezza di un cateto, AB = 5 piedi, e quella dell’ipotenusa BC = 13 piedi.



La lunghezza del cateto AC è correttamente calcolata:

$$AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} =$$
$$= 12 \text{ piedi}$$

La procedura seguita da Epafrodito e Vitruvio Rufo contiene alcuni passi:

* moltiplicare l’ipotenusa per se stessa: 13*13 = 169 ;
* moltiplicare l’”altezza”, e cioè il cateto minore AB per se stesso: 5*5 = 25 ;
* sottrarre il secondo quadrato dal primo: 169 – 25 = 144 ;
* estrarre la radice quadrata di 144: √144 = 12 piedi che è la lunghezza del cateto orizzontale AC.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Per lo stesso triangolo è descritto un problema inverso al precedente: sono note le lunghezze dei due cateti (AB = 5 piedi e AC = 12 piedi); la lunghezza dell’ipotenusa è ricavata con la formula

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{25 + 144} =$$
$$= \sqrt{169} = 13 \text{ piedi}$$

che è un’applicazione del teorema di Pitagora.

La procedura messa in opera dai due Gromatici per calcolare la lunghezza dell’ipotenusa BC contiene i seguenti passi:

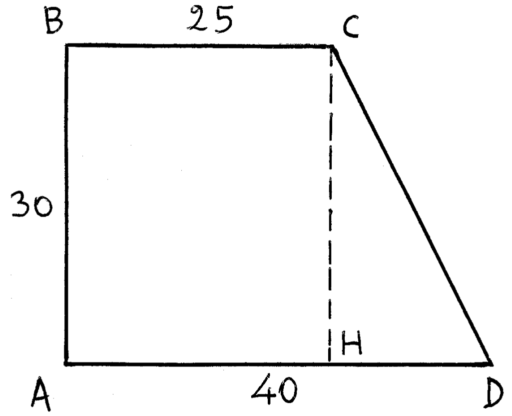
* moltiplicare l’”altezza” per se stessa: 5*5 = 25 ;
* moltiplicare il cateto orizzontale per se stesso: 12*12 = 144 ;
* sommare i due quadrati: 25 + 144 = 169 ;
* estrarre la radice quadrata: √169 = 13 piedi che è la lunghezza dell’ipotenusa.

La superficie è calcolata moltiplicando i due cateti (la base e l’altezza) e dividendo il risultato per 2:

$$Area_{ABC} = \frac{AC \cdot AB}{2} = \frac{12 \cdot 5}{2} = 30 \text{ piedi}^2$$

Trapezio rettangolo

Un trapezio rettangolo ha le dimensioni indicate sulla figura:



Per calcolarne l'area i Gromatici seguirono questa procedura:

* sommare le due basi (la maggiore AD e la *sommità* BC): 40 + 25 = 65 ;
* dividere per 2 il risultato: 65 : 2 = 32,5 ;
* moltiplicare la semisomma per l'altezza AB: 32,5*30 = 975 piedi^2 che è l'area del trapezio.

Il lato obliquo CD è chiamato *ipotenusa*; per determinarne la lunghezza, il testo propone la seguente procedura:

* calcolare i quadrati della base maggiore, dell'altezza e della base minore e sommarli:
  $AD^2 + AB^2 + BC^2 = 40^2 + 30^2 + 25^2 = 3125$;
* moltiplicare fra loro le due basi e poi per 2: AD*BC*2 = 40*25*2 = 2000 ;
* sottrarre l'ultimo prodotto dalla somma dei quadrati:
  $(AD^2 + AB^2 + BC^2)$* AD*BC*2 = 3125 – 2000 = 1125 ;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{1125} \approx 33{,}54$ piedi che è la lunghezza del lato CD.

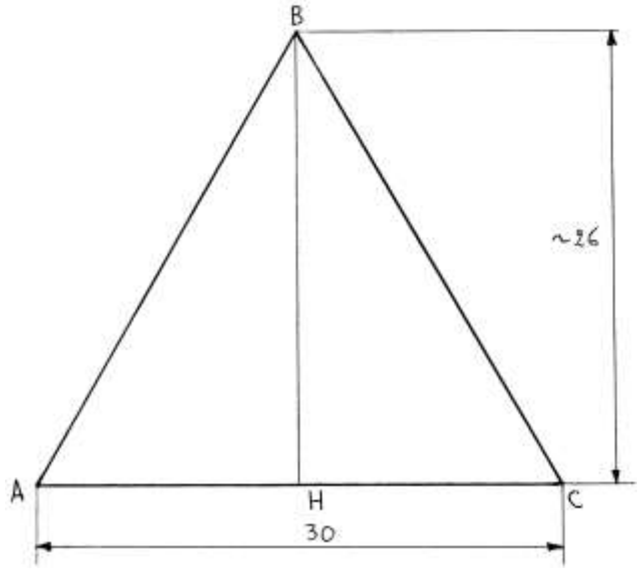
La formula corretta per calcolare CD è:

$$CD^2 = CH^2 + HD^2 = AB^2 + (AD - BC)^2 = 30^2 + (40 - 25)^2 = 900 + 225 = 1125.$$

Il metodo impiegato e il risultato ottenuto dai Gromatici sono esatti.

Triangolo equilatero

Il problema ha per oggetto un triangolo equilatero con lati lunghi 30 piedi:



Ecco la procedura usata da questi Gromatici per calcolarne l’area: essa mira in primo luogo a determinare l’altezza BH (o *linea mediana*):

* moltiplicare il lato per se stesso: $30*30 = 900$;
* moltiplicare metà del lato per se stesso:

$$\frac{30}{2} \cdot \frac{30}{2} = 15 \cdot 15 = 225$$

;

* sottrarre questo ultimo risultato dal primo: $900 – 225 = 675$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{675} \approx 26$ piedi, altezza approssimata del triangolo equilatero.

La radice quadrata di 675 non è esattamente 26, perché $26^2 = 676$, ma $\approx 25{,}98$.

L’area è calcolata moltiplicando l’altezza per la metà del lato di base:

$$\text{Area} = \text{altezza} \cdot \frac{\text{lato}}{2} = 26 \cdot \frac{30}{2} =$$

$$= 26 \cdot 15 = 390 \text{ piedi}^2$$

I Gromatici hanno applicato il teorema di Pitagora a uno dei due triangoli rettangoli ABH e BHC:

$$BH = \sqrt{AB^2 - AH^2}$$

Fra le formule approssimate proposte da Erone vi è quella relativa all’area del triangolo equilatero:

$$\text{Area} = \frac{13}{30} \cdot \text{lato}^2$$

che può essere scritta anche nella forma che segue:

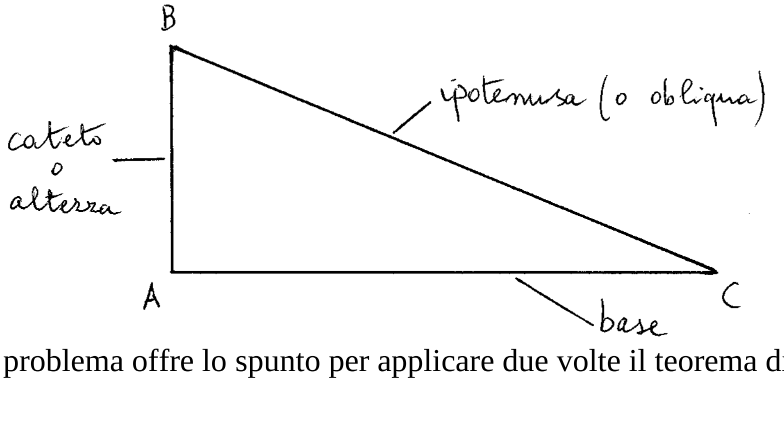
$$\text{Area} = \frac{26}{2} \cdot \frac{1}{30} \cdot \text{lato}^2$$

Erone e i Gromatici hanno in comune l’uso di un triangolo equilatero con lato lungo 30 unità?

Ben prima dei Gromatici, Erone potrebbe aver ricavato la sua formula approssimata da questo particolare triangolo equilatero?

<u>Triangolo rettangolo</u>

I lati di un triangolo rettangolo sono definiti con i termini riportati nella figura:



Questo problema offre lo spunto per applicare due volte il teorema di Pitagora.

Sono note le lunghezze dei due cateti: AB = 5 e AC = 12 piedi. Ecco i passi seguiti per ricavare la lunghezza dell'ipotenusa BC:

* calcolare i quadrati dei due cateti e sommarli: $AB^2 + AC^2 = 5^2 + 12^2 = 169$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{169} = 13$ piedi che è la lunghezza dell'ipotenusa BC.

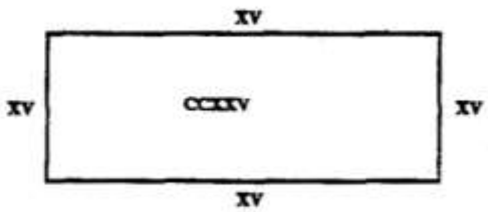
La seconda applicazione del teorema di Pitagora è contenuta nella soluzione di un problema inverso al precedente. Sono note le lunghezze del cateto maggiore (AC = 12 piedi) e dell'ipotenusa (BC = 13 piedi). Ecco la procedura per ricavare la lunghezza del cateto minore AB:

* sottrarre il quadrato della base da quello dell'ipotenusa:
  $BC^2 – AC^2 = 13^2 – 12^2 = 169 – 144 = 25$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{25} = 5$ piedi, lunghezza del cateto AB.

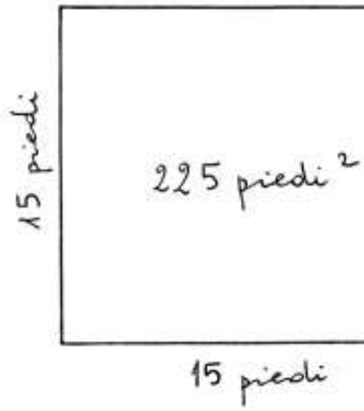
Area di un quadrilatero con angoli retti

Per tutti i quadrilateri con tutti gli angoli retti, l'area si ottiene moltiplicando la lunghezza per l'altezza e cioè due lati *consecutivi*.

L'esempio fornito è quello di un quadrato con lati lunghi 15 piedi e area di 225 piedi^2, erroneamente disegnato come un rettangolo:



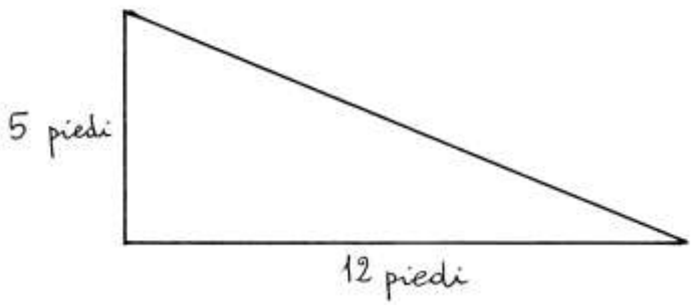
La figura corretta è la seguente:



Area di un triangolo rettangolo

I Gromatici offrono un metodo generale per calcolare l'area di un generico triangolo rettangolo.

Essi usano l'esempio di un triangolo che ha cateti lunghi 5 e 12 piedi (e ipotenusa lunga 13 piedi che però non viene presa in considerazione).



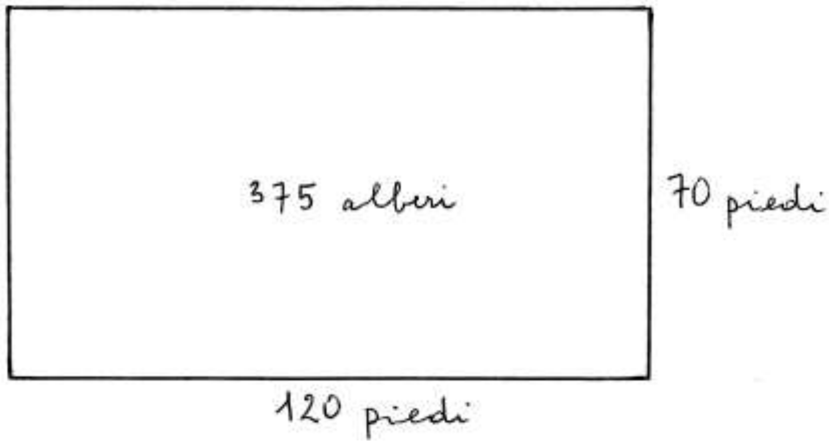
Il metodo prevede due soluzioni simili:

* moltiplicare fra loro i due cateti e dividere per 2 il risultato:
  5*12 = 60 ; 60 : 2 = 30 piedi^2 che è l'area del triangolo;
* moltiplicare la metà dell'"altezza" (il cateto minore) per la "base" (il cateto maggiore):
  5 : 2 = 2,5 ; 2,5*12 = 30 piedi^2 che è l'area del triangolo rettangolo.

<u>Un campo rettangolare</u>

Un campo rettangolare è lungo 120 piedi e largo 70 piedi.

Al suo interno sono piantati alberi a distanza di 5 piedi:



Il problema da risolvere è: quanti alberi vi sono.

Calcolare la *quinta* parte delle due dimensioni: 120 : 5 = 24 e 70 : 5 = 14.

Considerato che gli alberi sono piantati anche lungo il perimetro, occorre aggiungere 1 unità a entrambi i quozienti: 24 + 1 = 25 ; 14 + 1 = 15 .

Moltiplicare questi ultimi due numeri:

25* 15 = 375 che è il numero degli alberi piantati.

<u>Un altro campo rettangolare</u>

Il problema è l'inverso del precedente.

Un campo è lungo 120 piedi e vi sono piantati 375 alberi a distanza di 5 piedi.

Viene richiesta la lunghezza del campo.

Ecco i passi della procedura seguiti nel Trattato:

* dividere per 5 la lunghezza: 120 : 5 = 24 ;
* aggiungere 1 al quoziente appena calcolato: 24 + 1 = 25 ;
* sottrarre 11: 25 – 11 = 14 ;
* moltiplicare per 5: 14*5 = 70 piedi che è la larghezza del campo.

<u>Un terzo problema sui campi alberati</u>

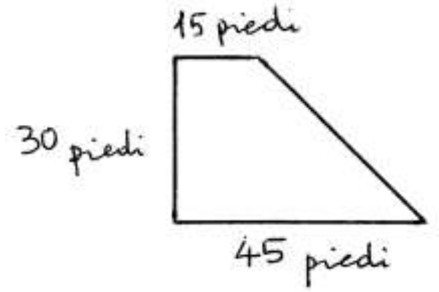
Un campo lungo 240 piedi ha larghezza sconosciuta. Al suo interno, a distanza di 5 piedi, sono disposti 525 alberi del diametro di 2 piedi.

La procedura impiegata per calcolare la larghezza è la seguente:

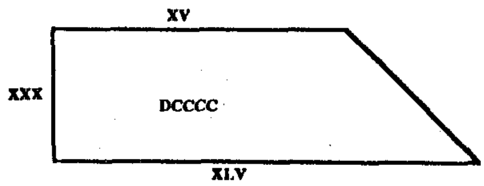
* addizionare 5 piedi (la distanza fra due alberi) alla lunghezza: 240 + 5 = 245 ;
* aggiungere alla distanza di 5 piedi il diametro di un albero: 5 + 2 = 7 ;
* dividere 245 per 7: 245 : 7 = 35 ;
* dividere il numero degli alberi per 35: 525 : 35 = 15 ;
* moltiplicare 15 per 7: 15*7 = 105 ;
* da questo prodotto sottrarre la distanza fra due alberi: 105 – 5 = 100 piedi che è la larghezza cercata.

Area di un trapezio rettangolo

Un trapezio rettangolo ha le dimensioni indicate in figura; deve esserne calcolata l'area:



Il disegno contenuto nel trattato è completamente fuori scala:



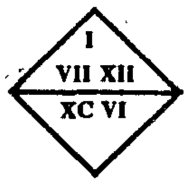
La soluzione segue questi passi:

* sommare le due basi: 15 + 45 = 60 ;
* dividere a metà: 60 : 2 = 30 ;
* moltiplicare questo quoziente per l'altezza: 30*30 = 900 piedi^2 che è l'altezza del trapezio rettangolo.

Il metodo e il risultato sono corretti.

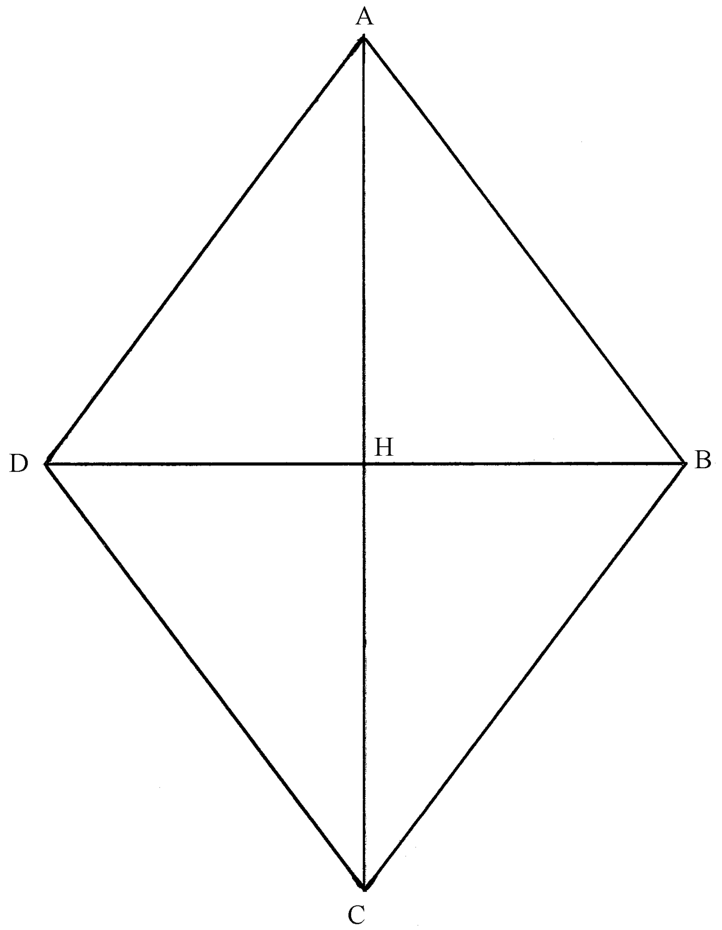
Rombo

Un rombo ha lati lunghi 10 piedi e la diagonale minore lunga 12 piedi:



Il disegno è del tutto spreciso perché il quadrilatero è disegnato come un quadrato con una diagonale orizzontale.

La figura corretta è la seguente (DB è la diagonale minore):



Il problema chiede di determinare l'altezza" del rombo e cioè la semidiagonale maggiore AH (o quella HC).

Ecco la procedura applicata:

* dividere per 2 la diagonale minore: HB = DB : 2 = 12 : 2 = 6 ;
* elevare al quadrato: $6^2 = 36$;
* elevare al quadrato la lunghezza del lato AB: $AB^2 = 10^2 = 100$;
* dal quadrato di AB sottrarre quello di HB: 100 – 36 = 64 ;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{64} = 8$ piedi lunghezza di AH che è l'*altezza* del rombo.

È evidente che i Gromatici hanno applicato il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo AHB.

Per calcolare l'area del rombo, il testo propone di moltiplicare la base minore (DB) per l'*altezza* AH:

Area = DB*AH = 12*8 =96 $piedi^2$.

I risultati sono corretti.

<u>I tipi di triangoli</u>

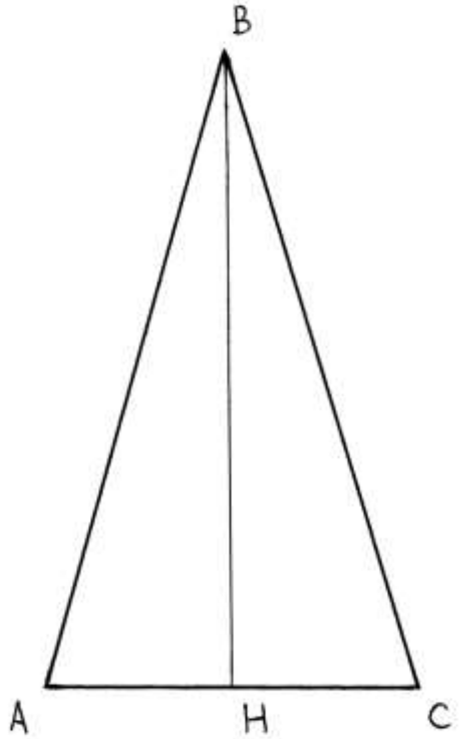
Secondo gli autori del Trattato, esistono *sei* tipi di triangoli:

* isoscele;
* parallelogramma;
* scaleno;
* rettangolo;
* equilatero;
* acutangolo.

In realtà esistono solo *quattro* tipi di triangoli perché il parallelogramma non vi rientra e il triangolo acutangolo, come pure quello ottusangolo, possono essere isosceli o scaleni.

<u>Triangolo isoscele</u>

Un triangolo isoscele ha lati lunghi 25 piedi e la base 14 piedi:



Devono essere calcolate l'altezza e l'area.

La soluzione segue questi passaggi:

* calcolare il quadrato della base: 14 : 2 = 7 ; $7^2 = 49$;
* calcolare il quadrato della lunghezza di un lato: $25^2 = 625$;
* sottrarre da questo ultimo quadrato il precedente: 625 – 49 = 576 ;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{576} = 24$ piedi che l'altezza BH.

Anche in questo caso i Gromatici applicano il teorema di pitagora a uno dei due triangoli rettangoli formati dall'altezza: ABH e BHC.

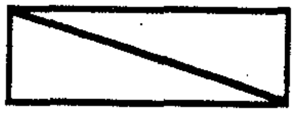
Anche l'area è calcolata correttamente:

Area = AH*BH = 7*24 = piedi^2.

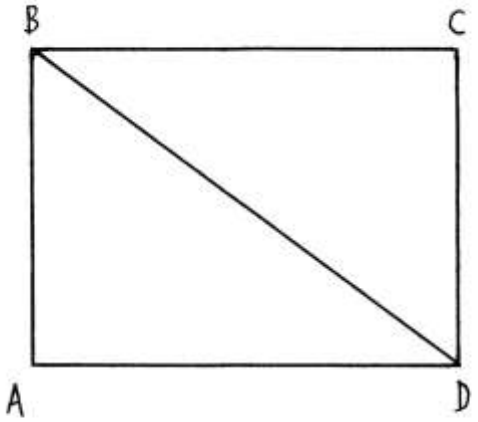
<u>Triangolo – parallelogramma rettangolo</u>

Il problema studia un poligono che è chiamato "*triangolo parallelogramma rettangolo*", ma che è un rettangolo con tracciata una diagonale: quindi non è né un triangolo né un parallelogramma.

La lunghezza è 80 piedi e la larghezza 60 piedi: il disegno contenuto nel Trattato non rispetta le proporzioni:



Deve essere ricavata la lunghezza della diagonale BD:



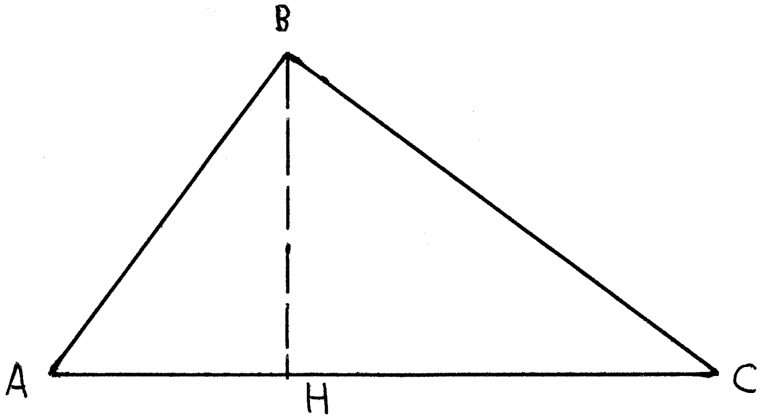
I passi sono i seguenti:

*	moltiplicare la lunghezza per se stessa:	AD^2 = 80*80 = 6400 ;
*	calcolare il quadrato della larghezza:	AB^2 = 60*60 = 3600 ;
*	sommare i due quadrati:	6400 + 3600 = 10000 ;
*	estrarre la radice quadrata:	√10000 = 100 piedi, lunghezza della diagonale BD.

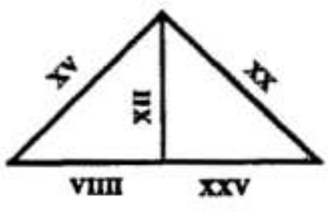
Anche in questo caso è stato applicato il teorema di Pitagora.

<u>Triangolo scaleno acutangolo</u>

Il triangolo non è propriamente *acutangolo* ma *rettangolo* nel vertice B:



Nel trattato, il triangolo è disegnato con grande imprecisione come se esso fosse rettangolo e isoscele:



Il triangolo ha lati con lunghezze che sono un multiplo di un fattore 5 della terna pitagorica 3-4-5: AB = 15 BC = 20 e AC = 25 piedi.

Il testo chiede di calcolare l'altezza relativa alla base AC (e cioè la lunghezza del segmento BH) e l'area.

La procedura impiegata è la seguente:

*	calcolare il quadrato del lato obliquo più corto:	$AB^2 = 15^2 = 225$;
*	calcolare il quadrato della base:	$AC^2 = 25^2 = 625$;
*	sommare i due quadrati:	225 + 625 = 850 ;

* calcolare il quadrato del lato obliquo più lungo: $BC^2 = 20^2 = 400$;
* sottrarre questo ultimo quadrato dalla somma dei primi due: 850 – 400 = 450 ;
* dividere per 2: 450 : 2 = 225 ;
* dividere questo quoziente per la lunghezza del lato di base: 225 : 25 = 9 piedi, lunghezza del segmento AH;

[Fino a questo ultimo passo, la procedura risponde all'applicazione della formula

$$AH = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AC}$$

che è una formula di Erone]

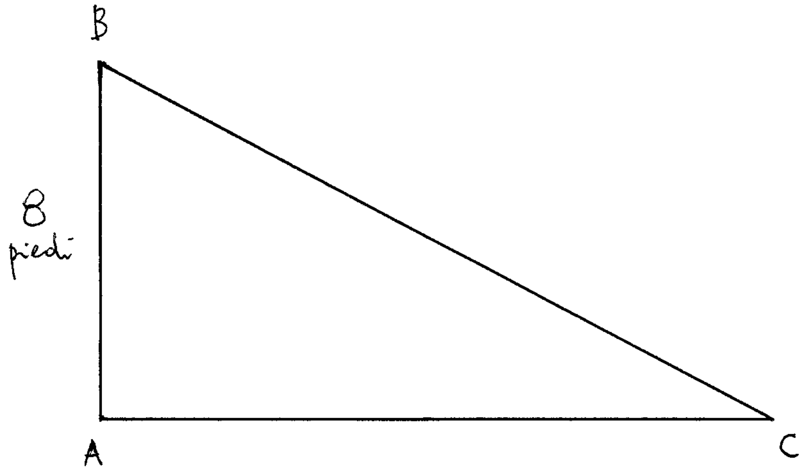
[La procedura prosegue con l'applicazione del teorema di Pitagora al triangolo rettangolo ABH per ricavare la lunghezza dell'altezza BH]

* elevare al quadrato la lunghezza di AH: $AH^2 = 9^2 = 81$;
* sottrarre questo quadrato da quello del lato obliquo AB: 225 – 81 = 144 ;
* estrarre la radice quadrata di 144: $\sqrt{144}$ = 12 piedi, lunghezza dell'altezza BH;
* per calcolare l'area moltiplicare la base per l'altezza e dividere il risultato per 2:

Area = (25*12) : 2 = 300 : 2 = 150 piedi^2.

<u>Triangolo rettangolo</u>

Un triangolo rettangolo ha il cateto verticale AB lungo un *numero pari*, quale è 8:



Devono essere ricavate le lunghezze del secondo cateto e dell'ipotenusa e l'area.
La procedura seguita ha alcuni passi:

* dividere per 2 la lunghezza di AB: AB : 2 = 8 : 2 = 4 ;
* moltiplicare 4 per se stesso: 4*4 = 16 ;
* sottrarre 1 da questo quadrato: 16 – 1 = 15 piedi, lunghezza della base AC ;
* addizionare 2 alla lunghezza di AC [oppure sommare 1 al quadrato 16]:

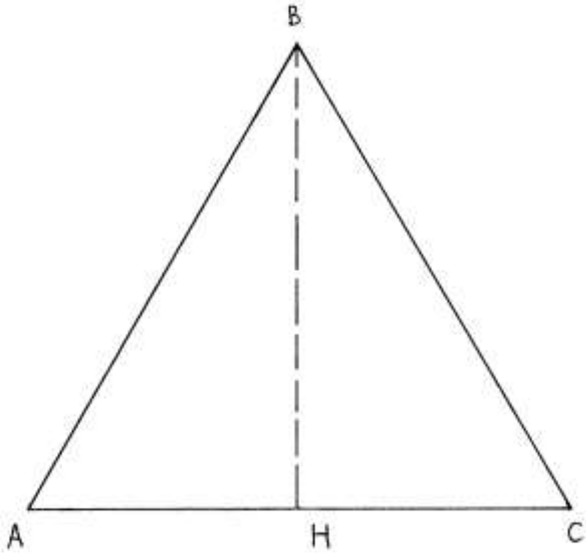
15 + 2 = 17 piedi, lunghezza dell'ipotenusa AC;

* calcolare l'area moltiplicando la metà della base AC per l'altezza AB:

$$\frac{AC}{2} \cdot AB = \frac{15}{2} \cdot 8 = 7{,}5 \cdot 8 =$$
$$= 60 \text{ piedi}^2$$

Triangolo equilatero

Un triangolo equilatero ha lati lunghi 28 piedi:



Il problema chiede di conoscere la sua area.

La procedura impiegata è la seguente:

* elevare al quadrato la lunghezza del lato: $28^2 = 784$;
* addizionare la lunghezza del lato: $784 + 28 = 812$;
* dividere per metà: $812 : 2 = 406$ piedi^2 che è l'area del triangolo equilatero.

Il risultato è errato *per eccesso*: l'area corretta è 339,48 piedi^2.

L'errore è da imputare all'applicazione della formula attribuita a Frontino:

$$Area = \frac{l^2 + l}{2}$$

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

La seconda parte del paragrafo affronta il problema inverso: data l'area – 406 piedi^2 – ricavare la lunghezza del lato. La procedura inversa ha i seguenti passi:

* moltiplicare per 8 l'area: $8 * 406 = 3248$;
* aggiungere 1: $3248 + 1 = 3249$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{3249} = 57$;
* sottrarre 1 dalla radice: $57 – 1 = 56$;
* dividere per 2: $56 : 2 = 28$ piedi che è la lunghezza di un lato.

Questa procedura è un'applicazione della formula

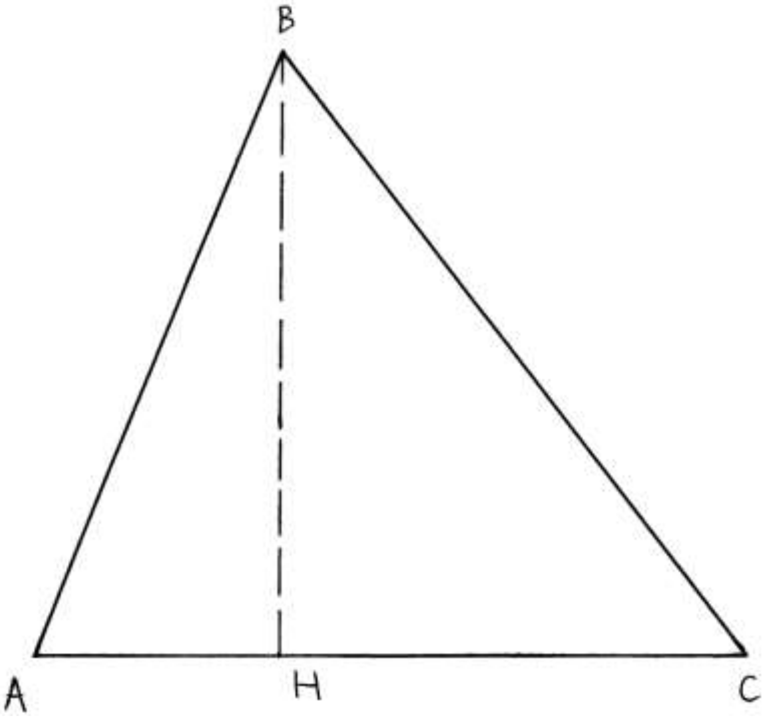
$$lato = \frac{\sqrt{8 \cdot A + 1} - 1}{2}$$

già incontrata in una precedente tabella.

Triangolo acutangolo

Un triangolo scaleno ha lati obliqui lunghi 13 e 15 piedi e la base 14 piedi.

Sono richieste l'altezza relativa alla base e l'area.



Per l’altezza, la procedura proposta è la seguente:

* moltiplicare il lato più corto (AB) per se stesso: 13*13 = 169 ;
* elevare al quadrato la base AC: 14*14 = 196 ;
* sommare i due quadrati: 169 + 196 = 365 ;
* elevare al quadrato il lato obliquo più lungo, BC: $15^2 = 225$;
* sottrarre l’ultimo quadrato dalla somma dei primi due: 365 – 225 = 140 ;
* dividere per 2: 140 : 2 = 70 ;
* dividere l’ultimo quoziente per la lunghezza della base AC: 70 : 14 = 5 piedi che è la lunghezza di AH, proiezione del lato AB sulla base AC;

[La procedura può essere sintetizzata con la formula di Erone incontrata nel precedente paragrafo dedicato al *Triangolo scaleno acutangolo*:

$$AH = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AC}$$

]

La procedura prosegue con altri passi:

* elevare al quadrato la lunghezza di AH: $5^2 = 25$;
* sottrarre questo quadrato da quello del lato AB: 169 – 25 = 144 ;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{144} = 12$ piedi, altezza BH.

Per ottenere questo risultato, gli autori del trattato hanno applicato il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo ABH.

Infine, per calcolare l’area sono usati i seguenti passi:

* dividere per 2 la lunghezza della base: 14 : 2 = 7 ;
* moltiplicare questo quoziente per l’altezza BH: 7*12 = 84 piedi^2, area del triangolo ABC.

<u>Pentagono regolare</u>

Nota: tutti i poligoni regolari descritti nel trattato, dal pentagono al dodecagono, hanno lati lunghi 10 piedi.

La figura contenuta nel trattato è del tutto errata: il disegno mostra un pentagono irregolare:

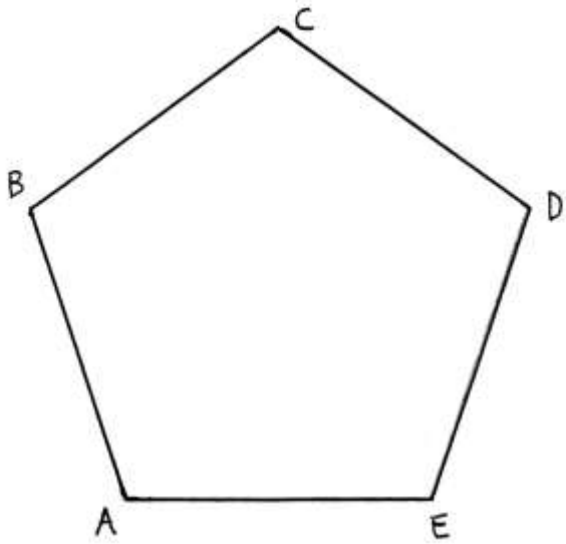
La procedura usata per calcolare l'area del pentagono impiega una formula approssimata ed *errata*: invece di usare la formula

$$Area = \frac{3l^2 - l}{2}$$

gli Autori utilizzarono la formula *errata*

$$Area = \frac{3l^2 + l}{2}$$

Il pentagono regolare ABCDE ha lati lunghi 10 piedi:



Ecco i passi della procedura:

*	moltiplicare la lunghezza del lato per se stesso:	10*10 = 100 ;
*	moltiplicare per 3:	100*3 = 300 ;
*	aggiungere al prodotto la lunghezza del lato:	300 + 10 = 310 ;
*	dividere per 2:	310 : 2 = 155 piedi^2 che è

l'area del pentagono.

La procedura ha applicato la formula errata citata sopra:

$$Area = \frac{3 \cdot 10^2 + 10}{2} = \frac{310}{2} = 155 \text{ piedi}^2 .$$

Usando la formula più corretta, il risultato sarebbe stato

$$Area = \frac{3 \cdot 10^2 - 10}{2} = \frac{290}{2} = 145 \text{ piedi}^2 .$$

Impiegando la formula approssimata di Erone, l'area sarebbe

$$Area = \frac{5}{3} \cdot lato^2 = \frac{5}{3} \cdot 100 = 166,\overline{66} \text{ piedi}^2 .$$

La formula approssimata più corretta oggi usata ricorre al *numero fisso* che per il pentagono è F = 1,72:

Area = F * lato^2 = 1,72 * 10^2 = 172 piedi^2.

Dal confronto fra i diversi risultati risulta che le formule usate dai Gromatici (influenzati dai *numeri figurati*) forniscono risultati grandemente approssimati per difetto: il dato calcolato con la formula di Erone è quello che si avvicina di più al valore corretto di 172 piedi^2.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Il testo affronta poi il problema inverso: data l'area di un pentagono regolare (155 piedi^2) calcolare la lunghezza del lato. Ecco i passi della procedura:

* moltiplicare la superficie per 24: 155*24 = 3720 ;
* addizionare 1: 3720 + 1 = 3271 ;
* estrarre la radice quadrata: √3271 = 61 ;
* sottrarre 1: 61 – 1 = 60 ;
* dividere per 6: 60 : 6 = 10 piedi che è la lunghezza del lato del pentagono.

La procedura è basata sull'applicazione della formula inversa presentata in precedenza:

$$\text{lato} = \frac{\sqrt{8 \cdot \text{Area} \cdot (n-2) + (n-4)} + (n-4)}{2 \cdot (n-2)} = \frac{\sqrt{24 \cdot \text{Area} + 1} - 1}{6}$$

Nella formula, n è il numero dei lati che nel caso del pentagono è n = 5. La formula deriva da quella proposta da Diofanto (III – IV secolo) per i numeri poligonali.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Il paragrafo relativo al *pentagono* affronta, in maniera molto oscura, un problema legato ai *numeri figurati*: nel suo lavoro dedicato ai gromatici Balbo, Epafrodito e Vitruvio Rufo – nella traduzione fattane da Jean-Yves Guillaumin (alle pp. 165 – 173 e nelle note contenute in calce a queste pagine) nel volume "Balbus ..." citato in bibliografia, viene spiegato il significato del problema:

"*... calcolare la somma dei numeri figurati pentagonali con lunghezza del lato da 1 a 10...*".

Lo stesso problema è poi proposto per i successivi numeri figurati dall'ordine 6 a quello 12.

La tabella che segue riproduce una precedente e la completa con l'ultima colonna a destra: essa contiene le somme di tutti i dieci numeri figurati:

numeri poligonali	formule	numero elementi degli schemi (N)										Totali:
triangolari	$\frac{N^2+N}{2}$	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	220
Quadrati	N^2	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	385
pentagonali	$\frac{3N^2-N}{2}$	1	5	12	22	35	51	70	92	117	145	550
esagonali	$2N^2-N$	1	6	15	28	45	66	91	120	153	190	715
ettagonali	$\frac{5N^2-3N}{2}$	1	7	18	34	55	81	112	148	189	235	880
ottagonali	$3N^2-2N$	1	8	21	40	65	96	133	176	225	280	1045
ennagonali	$\frac{7N^2-5N}{2}$	1	9	24	46	75	111	154	204	261	325	1210
decagonali	$4N^2-3N$	1	10	27	52	85	126	175	232	297	370	1375
endecagonali	$\frac{9N^2-7N}{2}$	1	11	30	58	95	141	196	260	333	415	1540
dodecagonali	$5N^2-4N$	1	12	33	64	105	156	217	288	369	460	1705
ragioni delle progressioni aritmetiche		0	1	3	6	10	15	21	28	36	45	

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Ecco i passi della procedura per calcolare la somma dei primi *dieci* numeri pentagonali:

* moltiplicare il decimo numero pentagonale, 145, per 2: 145*2 = 290 ;
* aggiungere la lunghezza del *lato* del pentagono: 290 + 10 = 300 ;
* moltiplicare per la lunghezza addizionata a 1:
  300*(10 + 1) = 300*11 = 3300 ;
* dividere per 6: 3300 : 6 = 550, che è la somma cercata e confermata dalla sua presenza nella precedente tabella.

La somma dei primi dieci numeri pentagonali è data dalla formula (implicitamente impiegata nella procedura appena descritta) che segue:

$$\text{somma } \underline{n} \text{ numeri poligonali} = \frac{(2 \cdot P + \text{lato}) \cdot (n+1)}{6}$$

P è il numero poligonale (in questo caso pentagonale) di ordine n e n è un numero intero. Applicando la formula al caso dei numeri pentagonali, la somma dei primi dieci è data da:

$$\frac{(2 \cdot 145 + 10) \cdot (10+1)}{6} = \frac{(290+10) \cdot 11}{6} =$$

$$= \frac{300 \cdot 11}{6} = 550$$

che è il risultato ottenuto dai Gromatici.

La formula della somma degli n numeri poligonali ha validità generale.

\- APPROFONDIMENTO -

La formula inversa usata per ricavare la lunghezza del lato del pentagono non è utilizzabile con i valori dell'area calcolati con la formula di Erone e con quella che applica il numero fisso F. Di seguito sono riportati i risultati:

$$\text{Area}_{\text{ERONE}} = 166,\overline{66} = \frac{500}{3} \text{ piedi}^2$$

$$\text{Area}_{\text{numero fisso}} = 172 \text{ piedi}$$

$$\text{lato} = \frac{\sqrt{24 \cdot A + 1} - 1}{6}$$

$$\text{lato}_{\text{Erone}} = \frac{\sqrt{\frac{24 \cdot 500}{3} + 1} - 1}{6} =$$

$$= \frac{\sqrt{4000 + 1} - 1}{6} = \frac{\sqrt{4001} - 1}{6} =$$

$$\cong \frac{63,25 - 1}{6} \cong 10,3755 \text{ piedi}$$

$$\text{lato}_{\text{numero fisso}} = \frac{\sqrt{24 \cdot 172 + 1} - 1}{6} =$$

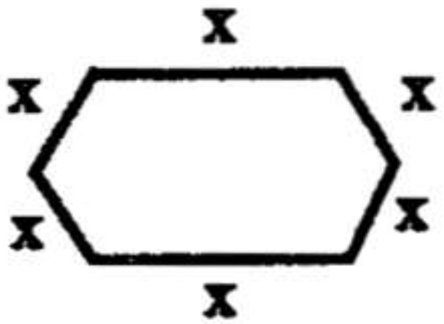
$$= \frac{\sqrt{4128 + 1} - 1}{6} = \frac{\sqrt{4129} - 1}{6} =$$

$$\cong 10,5428 \text{ piedi}$$

\- -

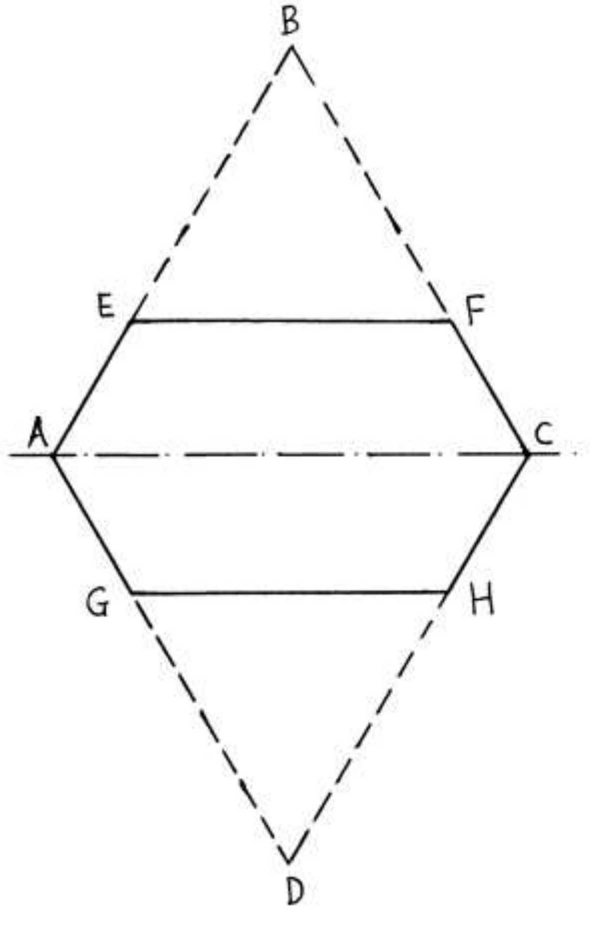
Esagono regolare

Un esagono regolare ha lati lunghi 10 piedi. La figura contenuta nel trattato dei Gromatici è del tutto deformata perché i due lati orizzontali sono lunghi il *doppio* degli altri quattro obliqui:



Gli angoli interni hanno tutti ampiezza di 120°

La probabile origine di questo esagono non regolare è ricostruita con la figura che segue:



Disegnare due triangoli equilateri identici ABC e ACD, uniti per la base comune AC.

Sui lati obliqui fissare i punti E, F, G e H a distanza uguale a ⅓ della lunghezza dei lati a partire dai punti A e C.

I lati EF e GH risultato lunghi 2/3 della lunghezza dei lati dei due triangoli e quindi il *doppio* di quella dei lati AE, FC, AG e CH, ciò che corrisponde a EF = GH = 2*AE = 2*10 = 20 piedi.

La procedura impiegata per calcolare l'area dell'esagono ha i seguenti passi:

* moltiplicare il lato per se stesso: 10*10 = 100 ;
* moltiplicare il prodotto per 4: 100*4 = 400 ;

* all’ultimo prodotto addizionare il doppio del lato: 400 + (2*10) = 420 ;
* dividere a metà: 420 : 2 = 210 piedi^2, che è l’area dell’esagono, secondo i Gromatici.

In sintesi, la procedura ha applicato la formula

$$Area = \frac{4 \cdot lato^2 + 2 \cdot lato}{2} = 2 \cdot lato^2 + lato$$

La formula è *errata*; quella di Erone fornisce un risultato diverso:

$$Area = \frac{13}{5} \cdot lato^2 = \frac{13}{5} \cdot 100 = 260 \text{ piedi}^2$$

Usando la formula corretta con il numero fisso F = 2,598, si ricava un risultato quasi uguale a quello di Erone:

Area = 2,598*10^2 = 259,8 piedi^2.

La formula impiegata dai Gromatici offre un risultato grandemente errato per difetto.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Il testo affronta poi il problema inverso: conoscendo l’area dell’esagono (210 piedi^2), ricavare la lunghezza del lato.

Ecco i passi seguiti:

* moltiplicare l’area per 32: 210*32 = 6720 ;
* aggiungere 4: 6720 + 4 = 6724 ;
* estrarre la radice quadrata: √6724 = 82 ;
* sottrarre 2: 82 – 2 = 80 ;
* dividere per 8: 80 : 8 = 10 piedi, lunghezza del lato dell’esagono.

In sintesi, i Gromatici hanno usato la seguente formula:

$$lato_{esagono} = \frac{\sqrt{32 \cdot Area + 4} - 2}{8}$$

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Infine, il testo descrive il metodo per sommare i primi *dieci* numeri esagonali (1, 6, 15, 28, 45, 66, 91, 120, 153 e 190). Ecco i passi impiegati:

* moltiplicare il *decimo* numero esagonale, 190, per 2: 190*2 = 380 ;
* sommare la lunghezza del lato dell’esagono: 380 + 10 = 390 ;
* addizionare 1 alla lunghezza del lato: 10 + 1 = 11 ;
* moltiplicare 390 per 11: 390*1 = 4290 ;
* dividere il prodotto per 6: 4290 : 6 = 715 che è la somma dei primi *dieci* numeri esagonali.

La formula applicata nella procedura è la seguente, che è identica a quella usata per sommare i primi dieci numeri pentagonali:

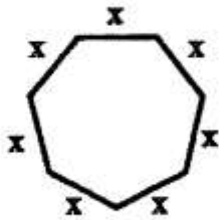
$$somma_{10 \text{ numeri esagonali}} = \frac{(2 \cdot P + lato) \cdot (n+1)}{6}$$

La formula fornisce il seguente risultato:

$$\frac{(2\cdot 190 + 10)\cdot(10+1)}{6} = \frac{390\cdot 11}{6} = 715$$ che è la somma dei primi dieci numeri esagonali.

Ettagono regolare

Un ettagono regolare ha lati lunghi 10 piedi.



La sua area è calcolata con la procedura che segue:

*	moltiplicare il lato per se stesso:	10*10 = 100 ;
*	moltiplicare per 5:	100*5 = 500 ;
*	moltiplicare il lato per 3:	10*3 = 30 ;
*	sottrarre 30 da 500:	500 – 30 = 470 ;
*	dividere per 2:	470 : 2 = 235 piedi^2 che è l’area dell’ettagono.

La formula approssimata di Erone dà un risultato diverso:

$$Area_{ettagono} = \frac{43}{12}\cdot lato^2 = \frac{43}{12}\cdot 100 = 358,\overline{33}\ piedi^2$$

La formula con il numero fisso F è:

Area = F * lato^2 = 3,636*10^2 = 363,6 piedi^2.

Le formule di Erone e quella con il numero fisso danno risultati vicini: la formula dei Gromatici fornisce un dato gravemente errato per difetto.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Il problema inverso è: data l’area (235 piedi^2) ricavare la lunghezza del lato dell’ettagono regolare. Ecco la procedura:

*	moltiplicare l’area per 40:	235*40 = 9400 ;
*	addizionare 9:	9400 + 9 = 9409 ;
*	estrarre la radice quadrata:	√9409 = 97 ;
*	sommare 3 alla radice:	97 + 3 = 100 ;
*	estrarre la radice quadrata:	√100 = 10 piedi, lunghezza del lato dell’ettagono regolare.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

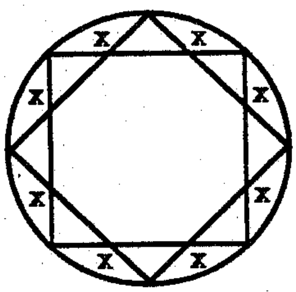
Infine, per calcolare la somma dei primi *dieci* numeri ettagonali, il testo propone la seguente procedura:

*	moltiplicare il decimo numero ettagonale (235) per 2:	235*2 = 470 ;
*	sommare la lunghezza del lato:	470 + 10 = 480 ;
*	addizionare 1 al rango del numero poligonale (10):	10 + 1 = 11 ;
*	moltiplicare gli ultimi due numeri:	480*111 = 5280 ;
*	dividere per 6:	5280 : 6 = 880 che è la somma dei primi dieci numeri ettagonali.

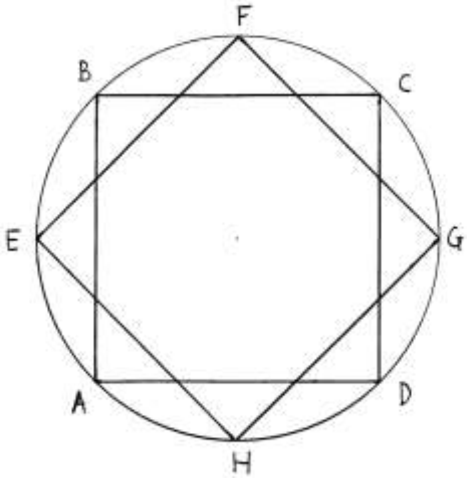
La formula impiegata è quella già vista in precedenza.

Ottagono regolare

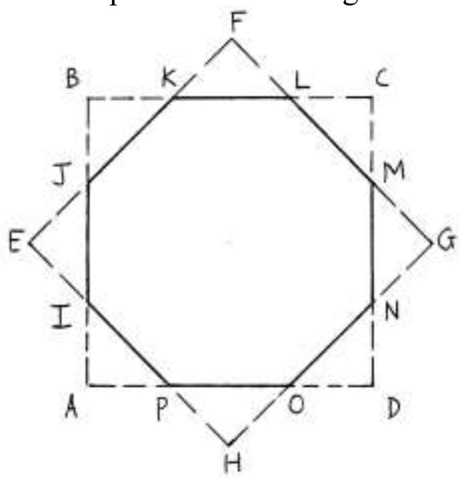
Un ottagono regolare ha lati lunghi 10 piedi.



In un cerchio sono inscritti due quadrati (ABCD e EFGH) di identiche dimensioni, ruotati fra loro di 45°:



L’intersezione dei due quadrati crea l’ottagono IJKLMNOP:



Il testo calcola l’area dell’ottagono con i seguenti passi:

* moltiplicare il lato per se stesso: 10*10 = 100 ;
* moltiplicare per 6: 6*100 = 600 ;
* moltiplicare per 4 la lunghezza del lato: 4*10 = 40 ;
* sottrarre 40 da 600: 600 – 40 = 560 ;
* dividere per 2: 560 : 2 = 280 piedi^2, area

dell’ottagono.
Il risultato è grandemente errato per difetto.
La formula approssimata di Erone dà:

$$Area_{ottagono} = \frac{29}{6} \cdot lato^2 = \frac{29}{6} \cdot 100 = 483,\overline{33}\ piedi^2$$

Con il numero fisso F = 4,828, l’area è:
Area = 4,828 * $lato^2$ = 4,828*100 = 482,8 $piedi^2$.

%%

Il probema inverso fornisce l’area (280 $piedi^2$) e chiede di calcolare la lunghezza del lato. Ecco la procedura:

*	moltiplicare per 48 l’area:	280*48 = 13440 ;
*	aggiungere 16:	13440 + 16 = 13456 ;
*	estrarre la radice quadrata:	√13456 = 116 ;
*	addizionare 4:	116 + 4 = 120 ;
*	dividere per 12:	120 : 12 = 10 piedi, lunghezza

del lato.

%%

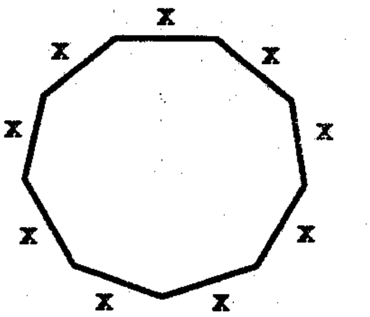
Calcolare la somma dei primi 10 numeri ottagonali. Ecco i passi:

*	moltiplicare il decimo numero ottagonale (280) per 2:	280*2 = 560 ;
*	aggiungere 10:	560 + 10 = 570 ;
*	moltiplicare per (10 + 1):	570*11 = 6270 ;
*	dividere per 6:	6270 : 6 = 1045 che è la somma

dei primi dieci numeri ottagonali.

<u>Ennagono regolare</u>

Un ennagono regolare ha lati lunghi 10 piedi:



I Gromatici ne calcolano l’area con i seguenti passi:

*	moltiplicare il lato per se stesso:	10*10 = 100 ;
*	moltiplicare per 7:	100*7 = 700 ;
*	sottrarre 5 volte la lunghezza del lato (5*10):	700 – 50 = 650 ;
*	dividere per 2:	650 : 2 = 325 $piedi^2$ che è l’area

dellll’ennagono.

Con la formula di Erone il risultato è:

$$\text{Area ennagono} = \frac{51}{8} \cdot \text{lato}^2 = \frac{51}{8} \cdot 100 = 637{,}5 \text{ piedi}^2$$

Con il numero fisso F = 6,182 l'area vale:
Area = 6,182 * lato^2 = 6,182 * 100 = 618,2 piedi^2.
Il risultato fornito dai Gromatici è gravemente errato per difetto.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Il problema inverso è: conoscendo l'area dell'ennagono (325 piedi^2), calcolare la lunghezza del lato del poligono. La procedura si sviluppa con i seguenti passi:

* moltiplicare l'area per 56: 325*56 = 18200 ;
* aggiungere 25: 18200 + 25 = 18225 ;
* estrarre la radice quadrata: √18225 = 135 ;
* addizionare 5: 135 + 5 = 140 :
* dividere per 14: 140 : 14 = 10 piedi che è la lunghezza del lato dell'ennagono.

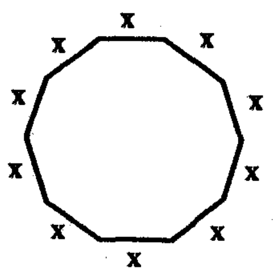
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Infine, come di consueto in questo Trattato, viene calcolata la somma dei primi dieci numeri ennagonali a partire dal decimo che è 325. Ecco la procedura seguita:

* moltiplicare il decimo numero per 2: 325*2 = 650 ;
* addizionare 10: 650 + 10 = 660 ;
* moltiplicare per (10 + 1): 660*11 = 7260 ;
* dividere per 6: 7260 : 6 = 1210 che è la somma dei primi dieci numeri ennagonali.

<u>Decagono regolare</u>

Un decagono regolare ha lati lunghi 10 piedi:



Per calcolarne l'area i Gromatici applicarono la seguente procedura:

* moltiplicare la lunghezza del lato per se stessa: 10*10 = 100 ;
* moltiplicare per 8: 100*8 = 800 ;
* moltiplicare la lunghezza del lato per 6: 10*6 = 60 ;
* sottrarre 60 da 800: 800 – 60 = 740 ;
* dividere per 2: 740 : 2 = 370 piedi^2 che è l'area del decagono.

La formula di Erone dà un risultato differente:

$$\text{Area} = \frac{15}{2} \cdot \text{lato}^2 = \frac{15}{2} \cdot 100 = 750 \text{ piedi}^2$$

Con il numero fisso F = 7,694 l'area è:
Area = 7,694 * lato^2 = 7,694*100 = 769,4 piedi^2.

Il dato fornito dalla formula dei Gromatci è grandemente sbagliato perché è grosso modo la metà del dato effettivo.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

La soluzione del problema inverso muove dalla conoscenza dell'area del decagono (370 piedi^2) per ricavare la lunghezza del lato:

* moltiplicare l'area per 64: 370*64 = 23680 ;
* addizionare 36: 23680 + 36 = 23716 ;
* estrarre la radice quadrata: √23716 = 154 ;
* aggiungere 6 alla radice: 154 + 6 = 160 ;
* dividere per 16: 160 : 16 = 10 piedi che è la lunghezza del lato del decagono.

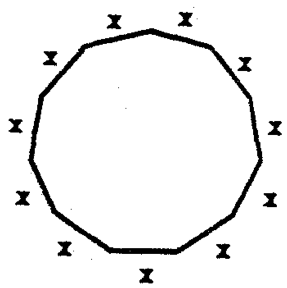
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

L'ultima operazione è il calcolo della somma dei primi dieci numeri decagonali a partire dal decimo che è 370:

* moltiplicare il decimo numero per 2: 370*2 = 740 ;
* addizionare la lunghezza del lato: 750 + 10 = 750 ;
* sommare 1 alla lunghezza 10: 10 + 1 = 11 ;
* moltiplicare 750 per 11: 750*11 = 8250 ;
* dividere per 2: 8250 : 6 = 1375 che è la somma dei primi dieci numeri decagonali.

<u>Endecagono regolare</u>

L'endecagono regolare ha lati lunghi 10 piedi:



La dua area è calcolata con i seguenti passi:

* moltiplicare la lunghezza del lato per se stessa: 10*10 = 100 ;
* moltiplicare per 9: 100*9 = 900 ;
* sottrarre 7*10: 900 – 70 = 830 ;
* dividere per 2: 830 : 2 = 415 piedi^2 che è l'area dell'endecagono regolare.

La formula di Erone e quella con il numero fisso offrono risultati ben più attendibili:

* con la formula di Erone

$$\text{Area endecagono} = \frac{66}{7} \cdot \text{lato}^2 = \frac{66}{7} \cdot 100 = 942{,}85 \text{ piedi}^2$$;

* con il numero fisso F = 9,366 l'area è:

  Area endecagono = 9,366 * lato^2 = 9,366 + 100 = 936,6 piedi^2.

Il dato di Erone è leggermente errato per *eccesso* ma, di nuovo, la formula dei Gromatici ha fornito un risultato falsato che equivale a meno della metà della superficie effettiva dell'endecagono.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Il problema inverso, conoscendo l'area (415 piedi^2) ricavare la lunghezza del lato, viene risolto con i seguenti passi:

* moltiplicare l'area per 72: 415*72 = 29880 ;
* addizionare 49: 29880 + 49 = 29929 ;
* estrarre la radice quadrata: √29929 = 173 ;
* sommare 7: 173 + 7 = 180 ;
* dividere per 18: 180 : 18 = 10 piedi, lunghezza del lato dell'endecagono.

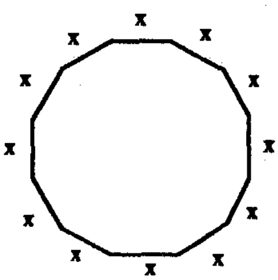
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Il decimo numero figurato endecagonale è 415. Per calcolare la somma dei primi dieci numeri endecagonali è seguita questa procedura:

* moltiplicare per 2 il decimo numero: 415*2 = 830 ;
* aggiungere 10: 830 + 10 = 840 ;
* moltiplicare per (10 + 1): 840*11 = 9240 ;
* dividere per 6: 9240 : 6 = 1540 che è la somma dei primi dieci numeri endecagonali.

Dodecagono regolare

Un dodecagono regolare ha lati lunghi 10 piedi:



La superficie è calcolata dai Gromatici con la seguente procedura:

* moltiplicare la lunghezza del lato per se stessa: 10*10 = 100 ;
* moltiplicare il prodotto per 10: 100*10 = 1000 ;
* sottrarre da questo ultimo prodotto il lato moltiplicato per 8: 1000 – (10*8) = 1000 – 80 = 920 :
* dividere a metà: 920 : 2 = 460 piedi^2 che è l'area del dodecagono regolare.

Con la formula approssimata di Erone, l'area è:

$$\text{Area dodecagono} = \frac{45}{4} \cdot \text{lato}^2 = \frac{45}{4} \cdot 100 = 1125 \text{ piedi}^2$$

La formula moderna che usa il numero fisso F = 11,196 dà il seguente risultato:

Area dodecagono = 11,196 * lato^2 = 11,196*100 = 1119,6 piedi^2.

Le aree calcolate con queste ultime due formule sono quasi uguali: l'area ricavata dai Gromatici è grandemente errata perché corrisponde a meno della metà del suo valore effettivo.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Il problema inverso, data l'area (460 piedi^2) ricavare la lunghezza del lato del dodecagono è risolto con la seguente procedura:

* moltiplicare l'area per 80: 460*80 = 36800 ;
* aggiungere 64: 36800 + 64 = 36864 ;
* estrarre la radice quadrata: √36864 = 192 ;
* aggiungere 8: 192 + 8 = 200 ;
* dividere per 20: 200 : 20 = 10 piedi, lunghezza del lato del dodecagono regolare.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

La somma dei primi dieci numeri dodecagonali è ricavata con la seguente procedura:

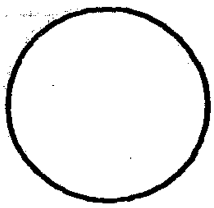
* moltiplicare per 2 il decimo numero dodecagonale che è 460: 460*2 = 920 ;
* aggiungere 10: 920 + 10 = 930 ;
* moltiplicare per (10 + 1): 930*11 = 10230 ;
* dividere per 6: 10230 : 6 = 1705 che è la somma cercata.

Anche in questo caso è stata applicata la formula generale relativa alla somma dei primi dieci numeri poligonali:

$$\frac{(2 \cdot P + 10) \cdot (10 + 1)}{6}$$

<u>Cerchio</u>

Un cerchio ha diametro di 14 piedi:



Per calcolarne l'area sono usate le formule approssimate di Archimede:

$$\text{circonferenza} = \text{diametro} \cdot \left(3 + \frac{1}{7}\right) = \frac{22}{7} \cdot \text{diametro}$$

$$\text{Area cerchio} = \frac{\text{diametro}}{2} \cdot \frac{\text{circonferenza}}{2} =$$

$$= \frac{\text{diametro}}{2} \cdot \left(\frac{22}{7} \cdot \text{diametro}\right) \cdot \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{11}{14} \cdot \text{diametro}^2$$

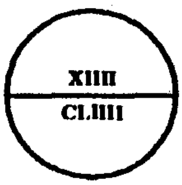
Il trattato di Epafrodito e di Vitruvio Rufo determina l'area del cerchio con la seguente procedura:

* moltiplicare il diametro per se stesso: 14*14 = 196 ;
* moltiplicare per 11: 196*11 = 2156 ;
* dividere per 14: 2156 : 14 = 154 piedi^2, area del cerchio.

La procedura ha chiaramente applicato l'ultima precedente formula.

<u>Circonferenza e cerchio</u>

Il problema inverso a quello precedente muove dalla conoscenza della lunghezza della circonferenza (44 piedi) e di quella del diametro (14 piedi) e chiede di calcolare l'area del cerchio.



La procedura impiegata dai due Gromatici è la seguente:

* dividere a metà la lunghezza della circonferenza: 44 : 2 = 22 ;
* dividere a metà la lunghezza del diametro: 14 : 2 = 7 ;
* moltiplicare i due quozienti: 22*7 = 154 piedi^2 , area del cerchio.

La formula impiegata dai gromatici è quella vista in precedenza:

$$\text{Area cerchio} = \frac{\text{diametro}}{2} \cdot \frac{\text{circonferenza}}{2}$$

<u>Semicerchio</u>

Una figura piana delimitata da un arco di circonferenza e da un segmento ha la base lunga 28 piedi e la *freccia* è lunga 14 piedi e cioè metà della base (o *corda*): ne consegue che la base è un diametro e la freccia un raggio di un semicerchio:

Il problema proposto è: calcolare l'area della figura.

La procedura seguita è:

* moltiplicare la base per la freccia: 28*14 = 392 ;
* moltiplicare per 11: 392*11 = 4312 ;
* dividere l'ultimo prodotto per 14: 4312 : 14 = 308 piedi^2 , area del semicerchio.

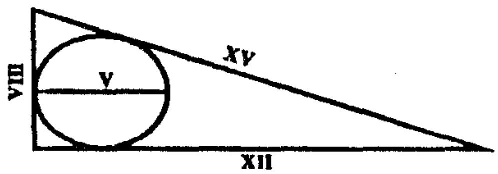
La formula applicata deiva da quella di Archimede ed è la seguente:

$$\text{Area semicerchio} = \frac{11}{14} \cdot \text{base} \cdot \text{freccia} =$$

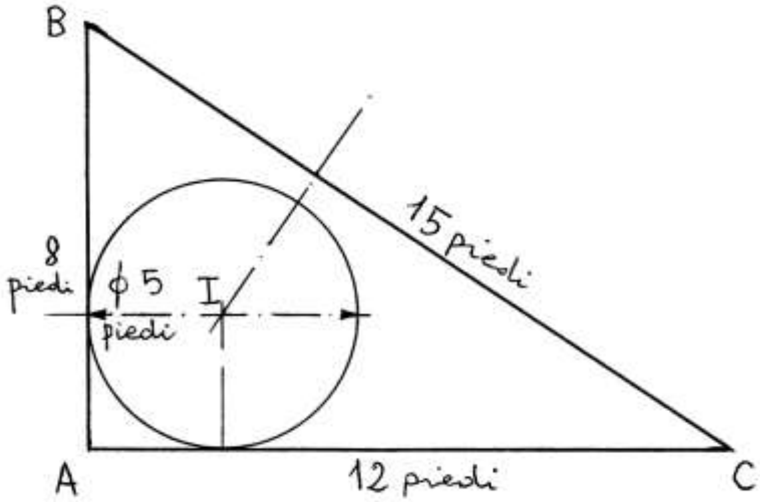
$$= \frac{11}{14} \cdot \text{diametro} \cdot \frac{\text{diametro}}{2}$$

<u>Cerchio inscritto in un triangolo rettangolo</u>

Un triangolo rettangolo ha le dimensioni in piedi scritte sui lati della figura che segue, ripresa dal Trattato:



La figura è *errata* come lo sono le lunghezze dell'ipotenusa e del diametro del cerchio inscritto, come spiega la figura che segue:



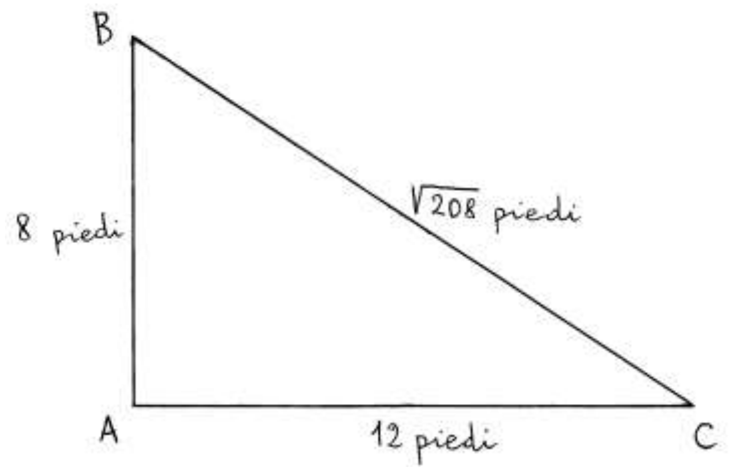
In primo luogo, un cerchio inscritto del diametro di 5 piedi non è tangente all'ipotenusa.

In secondo luogo, il triangolo è impossibile perché la somma dei quadrati dei due cateti è differente dal quadrato dell'ipotenusa:

$8^2 + 12^2 = 64 + 144 = 208.$

Infatti il quadrato dell'ipotenusa è $15^2 = 225$.

La lunghezza dell'ipotenusa è: BC = $\sqrt{208} \approx 14{,}42$ piedi, invece dei 15 piedi scritti sul disegno. Le corrette dimensioni in piedi sono riportate sulla figura che segue:

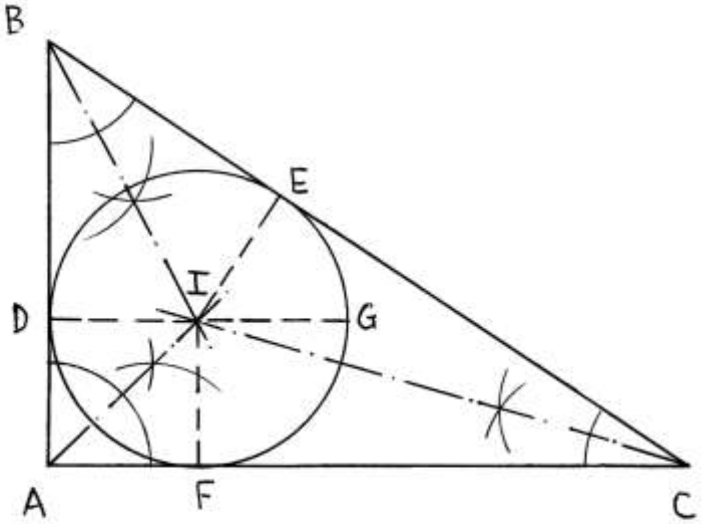


Il Trattato suggerisce la seguente formula per calcolare il diametro del cerchio inscritto:

diametro = base + altezza – ipotenusa = AC + AB – BC = 12 + 8 – 15 = 5 piedi, che è la cifra scritta sul disegno errato.

La figura che segue ridisegna il triangolo ABC con le misure in scala *corrette*:

AB : 8 = AC : 12 = BC : √208 :

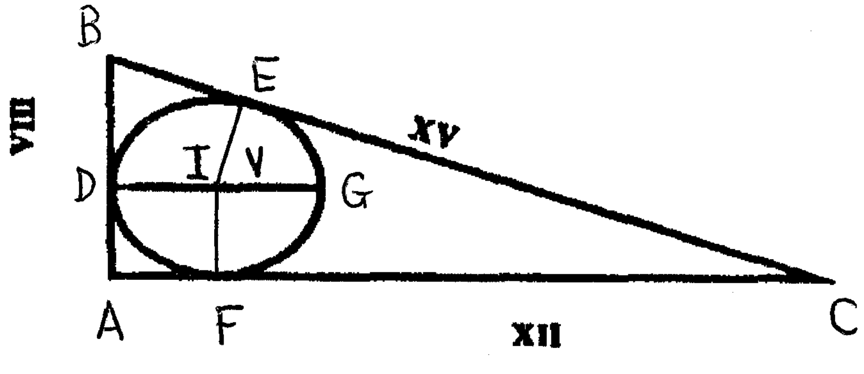


Il centro del cerchio inscritto è l'*incentro* I, che è l'intersezione delle bisettrici dei tre angoli interni. La circonferenza del cerchio inscritto è chiamata *incerchio* e *inraggio* è il suo raggio.

Il diametro DG è dato dalla precedente formula:

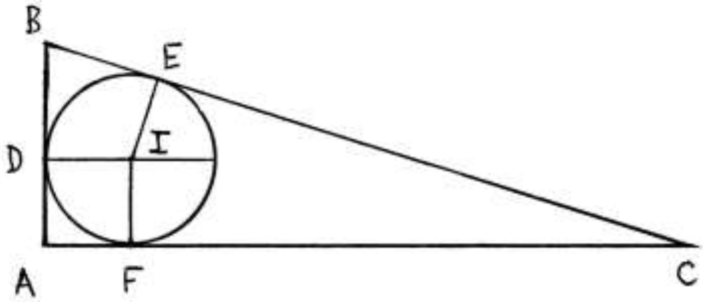
$$DG = AC + AB - BC = 12 + 8 - \sqrt{208} = 20 - \sqrt{208} \approx 5{,}5778$$ piedi anziché i 5 piedi scritti sulla figura.

Il cerchio contenuto nella figura originale è deformato in un'*ellisse* disposta con l'asse maggiore orizzontale: il rapporto fra le lunghezze dell'asse maggiore e dell'asse minore è, grosso modo, uguale a 7 : 6, come spiega la figura che segue:



I raggi IE e IF hanno lunghezze uguali e proporzionali a 6, mentre i raggi DI e IG hanno lunghezze proporzionali a 7.

Un'ultima considerazione: la figura che segue riproduce in scala il disegno originale assumendo per il cateto AC una lunghezza proporzionale a 12 piedi:



Il cateto AB è lungo 3,7 piedi e l'ipotenusa BC è lunga 12,557 piedi.

Il diametro del cerchio inscritto è:

diametro = AB + AC – BC = 3,7 + 12 – 12,557 = 3,143 piedi.

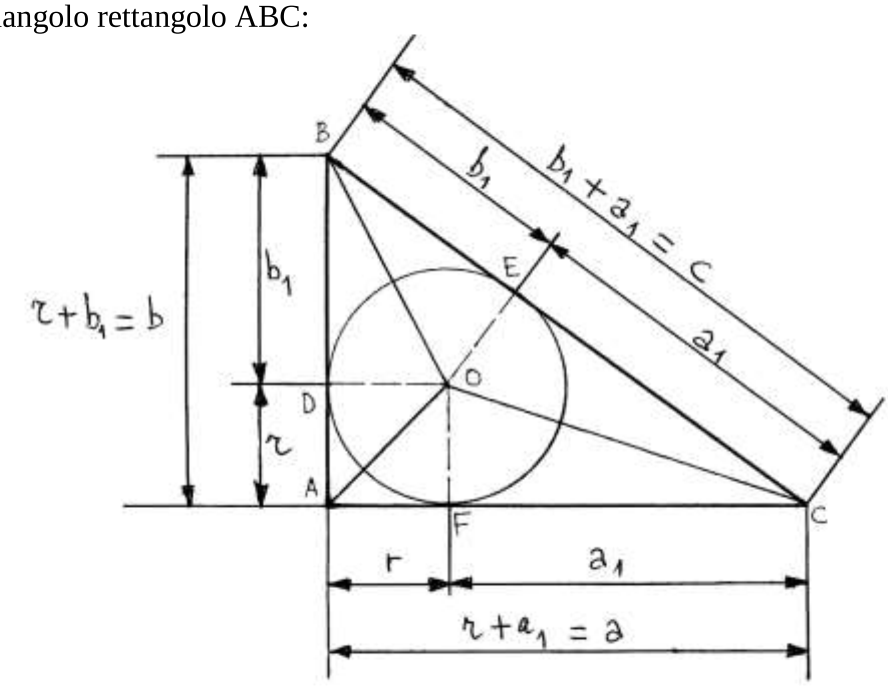
<u>Cerchio inscritto in un triangolo rettangolo</u>

I Gromatici suggeriscono una formula per calcolare il diametro del cerchio inscritto in un triangolo rettangolo:

diametro = base + altezza – ipotenusa , ricordando che per *base* essi intendono il cateto orizzontale e per *altezza* quello verticale.

La formula era nota anche al matematico cinese Liu Hui (220 – circa 280 d.C.).

Ecco l'origine della formula dei Gromatici: la figura che segue introduce una divisione dei tre lati del triangolo rettangolo ABC:



I segmenti OD, OE e OF sono raggi del cerchio inscritto.

Nelle formule che seguono, r è il raggio e d il diametro del cerchio.

Il cateto AB è lungo:

AB = AD + DB = r + b_1 dove b_1 è la lunghezza di DB.

A sua volta, il cateto AC è lungo:

AC = AF + FC = r + a_1.

Infine, l’ipotenusa BC è divisa in due segmenti:

$BC = BE + EC$.

Il segmento BE è lungo quanto BD e cioè b_1. Il segmento EC è lungo come FC e cioè a_1.
Ne consegue che l’ipotenusa è lunga:

$BC = b_1 + a_1$.

Effettuiamo le seguenti operazioni:

I.

$c – b = (b_1 + a_1) – (r + b_1) = a1 – r = (a – r) – r = a – 2r = a – d$ e quindi
$c – b = a – d$, da cui $d = a + b – c$
Il raggio r è dato da:

$$r = \frac{a+b-c}{2}.$$

II.

$c – a = (b_1 + a_1) – (r – a_1) = b_1 + a_1 – r – a_1 = b_1 – r = (b – r) – r = b – 2r = b – d$
e quindi $c – a = b – d$. Il diametro d è dato da: $d = a + b – c$.
La lunghezza del raggio è:

$$r = \frac{a+b-c}{2}$$

III.

$a + b = (a_1 + r) + (b_1 + r) = a_1 + b_1 + 2r = c + d$ e quindi $a + b = c + d$.
Il diametro è dato da $d = a + b – c$ e il raggio è lungo

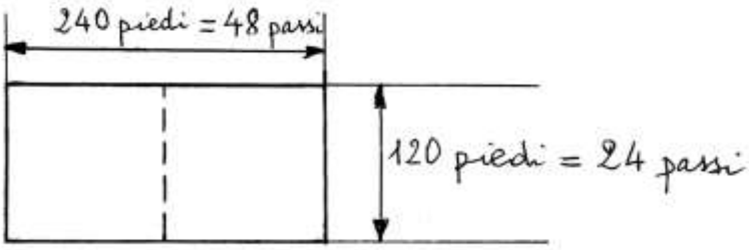
$$r = \frac{a+b-c}{2}$$

Tutte e tre le operazioni portano allo stesso risultato.

<u>Aree di superfici piane</u>

L’area di un quadrato con lato lungo 1000 passi (*passi doppi*) è uguale a 868 *iugeri*: uno iugero è un rettangolo (un doppio quadrato) con lati lunghi 120 e 240 piedi e area di 28800 piedi^2.

Un *passo doppio* equivale a 5 piedi e quindi uno iugero misura 24 * 48 passi e ha un’area di 24*48 = 1152 passi^2:



1 iugero

[Ignoriamo se il passo quadrato fosse usato dai Romani: una traccia della sua persistenza nel tempo è data dalla sua presenza fra le unità di misura locali del Veneto prima dell’Unificazione: 1 passo quadrato = 25 piedi quadrati, con 1 piede equivalente a m. 0,347398, quindi più lungo del piede romano, stando alle tabelle contenute nel volume di Giuseppe Guidi, “Ragguaglio delle monete e delle misure attualmente in uso negli Stati Italiani”, Firenze, 1855, pp. VII-320.]

Il quadrato di 1000 passi ha un’area data da:

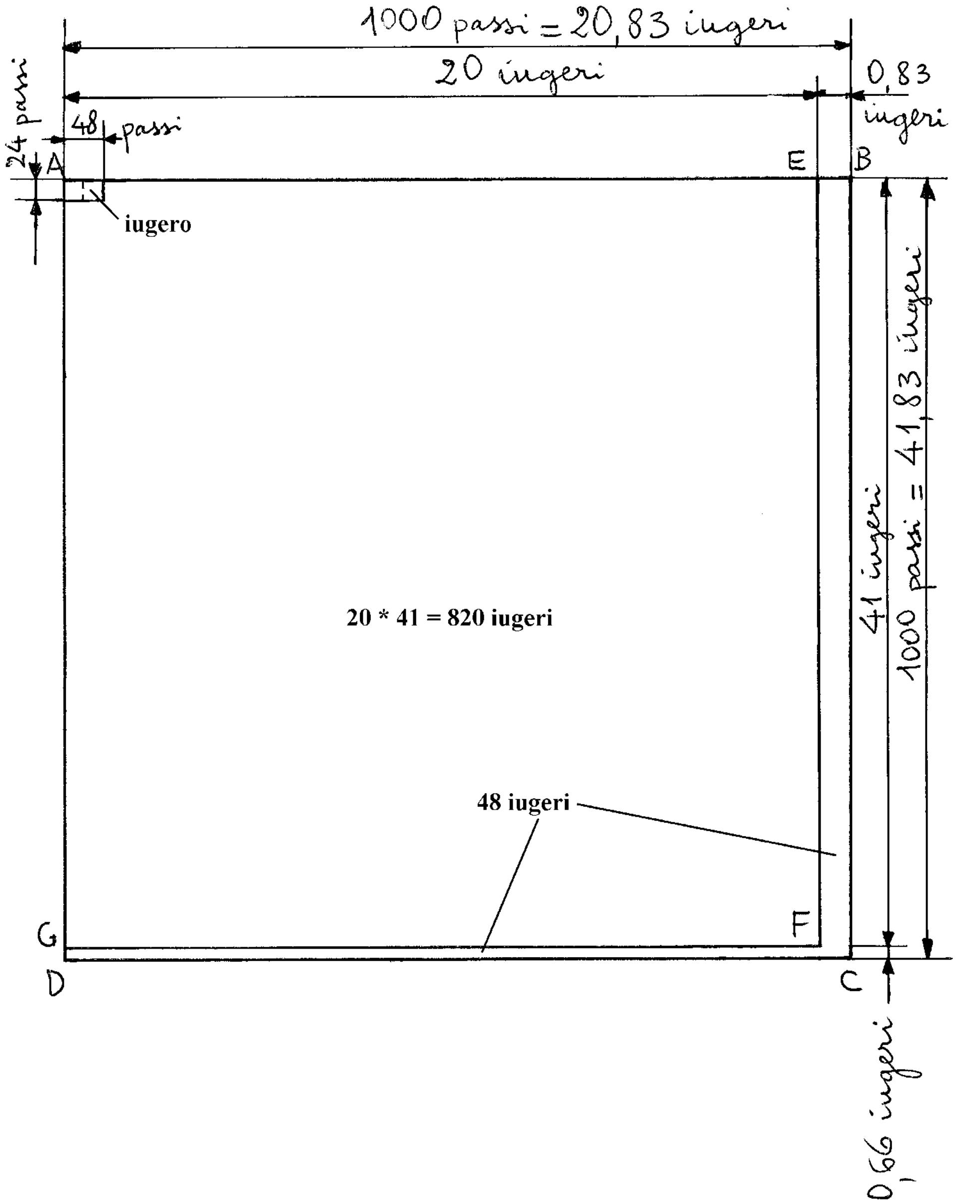
Area quadrato = $(5*1000)^2$ piedi^2 = 25 000 000 piedi^2.

Esso contiene

$$\frac{25\,000\,000}{28800} = 868{,}0\overline{5} \text{ iugeri}$$

I dati forniti nel trattato dei due Gromatici sono un po’ imprecisi perché la lunghezza del lato del quadrato (1000 passi doppi o 5000 piedi) non è un multiplo perfetto di alcuna delle dimensioni di un iugero, 120*240 piedi o 24*48 passi.

Il grafico della figura che segue spiega la struttura della divisione di quel quadrato:



È utile ricordare che *1 passo lineare* vale *5 piedi* e *1 passo^2 = 25 piedi^2*.

La superficie del quadrato ABCD è ricoperta con righe (orizzontali) e colonne (verticali) di iugeri: tutti sono disposti con il lato più lungo orizzontale e cioè parallelamente ai lati AB e CD.

Ciascuna fila orizzontale contiene

$$\frac{1000 \text{ passi}}{48 \text{ passi}} = 20{,}8\overline{3} \text{ iugeri}$$

A sua volta, ciascuna colonna verticale contiene

$$\frac{1000 \text{ passi}}{24 \text{ passi}} = 41{,}\overline{66} \text{ iugeri}$$

Le parti intere dei due quozienti coprono il rettangolo AEFG che contiene

20*41 = 820 iugeri.

Il poligono EBCDGF ha cinque lati che si incontrano formando angoli retti o loro multipli (come è il caso dell'*angolo interno* EFG ampio 3*90° = 270°): la sua superficie è data dai resti dei quozienti delle due precedenti divisioni.

L'area di EBCDGF è data da:

Area EBCDGF = Area ABCD – Area AEFG ≈ 868,05 – 820 ≈ 48,05 iugeri.

Tralasciando questo dettaglio, il trattato chiede di calcolare il numero di iugeri contenuti in un quadrato che ha lato lungo 10 000 passi.

Il rapporto fra le lunghezze dei lati dei due quadrati è:

10 000 : 1 000 = 10 : 1, le rispettive aree sono in proporzione a

$10^2 : 1^2 = 100 : 1$.

Il numero *convenzionale* di iugeri contenuti nel quadrato maggiore è 100 volte quello degli iugeri che formano il quadrato più piccolo: 868 * 100 = 86 800 iugeri.

<u>Somma dei primi dieci numeri quadrati</u>

Il testo offre due distinte procedure per calcolare la somma dei primi *dieci* numeri quadrati. La prima si articola sui seguenti passi:

* moltiplicare 10 per 1: 10*1 = 10 ;
* prendere il numero 3 ;
* aggiungere la metà di 1 a 3: 0,5 + 3 = 3,5 ;
* moltiplicare per 11: 3,5*11 = 38,5 ;
* moltiplicare per 10: 38,5*10 = 385 che è la somma cercata.

Infatti la somma dei primi *dieci* quadrati (1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64 + 81 + 100) è uguale a 385.

La procedura è piuttosto oscura.

%%%%%%%%%%%%%%%%

La seconda procedura ricalca quella già vista per i numeri figurati:

* moltiplicare 10 per se stesso: 10*10 = 100 ;
* moltiplicare per 2: 100*2 = 200 ;
* aggiungere 10 all'ultimo prodotto: 200 + 10 = 210 ;
* aggiungere 1 alla lunghezza di 10: 1 + 10 = 11 ;
* moltiplicare gli ultimi due dati: 210*11 = 2310 ;

* dividere per 6: 2310 : 6 = 385 che è il risultato cercato.

Somma dei primi dieci numeri cubi

I primi *dieci* numeri cubi sono: 1 (= 1^3), 8 (= 2^3), 27 (= 3^3), 64 (= 4^3), 125 (= 5^3), 216 (= 6^3), 343 (= 7^3), 512 (= 8^3), 729 (= 9^3) e 1000 (= 10^3).

La loro somma è 3025.

Il trattato offre due diverse procedure.

La prima ha i seguenti passi:

* dividere 10 per 4: 10 : 4 = 2,5 ;
* moltiplicare per 10: 2,5*10 = 25 ;
* moltiplicare per 11: 25*11 = 275 ;
* moltiplicare di nuovo per 11: 275*11 = 3025 che è la somma cercata.

%%%%%%%%%%%%%%%%%

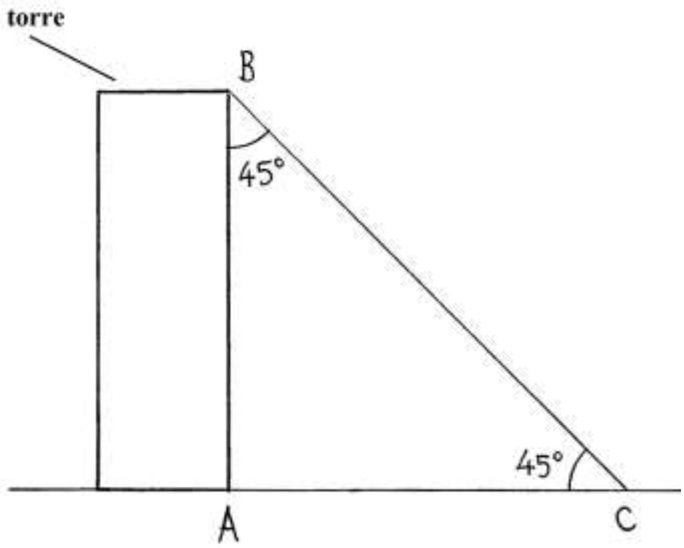
La seconda procedura è la seguente:

* richiamare il *decimo* numero triangolare: 55 ;
* moltiplicare 55 per se stesso: 55*55 = 3025.

Misurare l'altezza di un albero o di una torre

Il metodo proposto è piuttosto sbrigativo e chiede all'osservatore di sdraiarsi con "il mento" a terra, per poi inditreggiare fino alla posizione nella quale viene intravista la cima dell'albero o della torre: in questa posizione l'osservatore può alzarsi in piedi e misurare la distanza rispetto al tronco dell'albero o alla base della torre.

I Gromatici stimavano che questa distanza fosse uguale all'altezza della cosa da misurare.



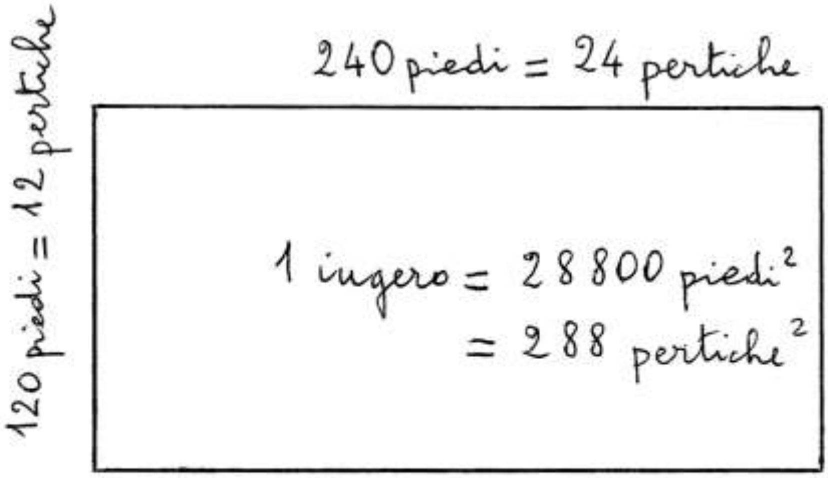
Implicitamente, il triangolo ABC è considerato rettangolo e isoscele: il punto C sul terreno corrisponde alla posizione finale dell'osservatore. La lunghezza di AC è ritenuta uguale all'altezza AB.

LA MISURA DEGLI IUGERI

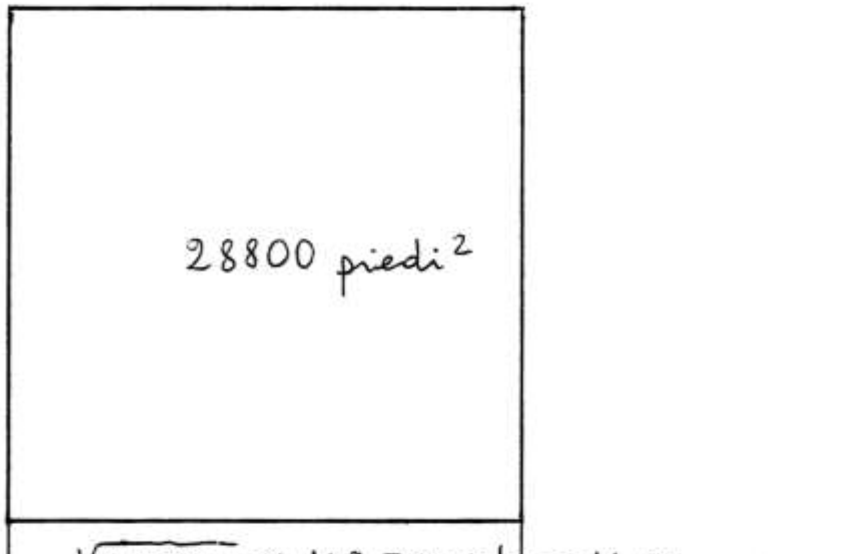
Il trattato ha per titolo “*De iugeribus metiundis*” che sta per “La misura degli iugeri”.

Uno *iugero* è un rettangolo che ha dimensioni di 120*240 piedi e cioè e un *doppio quadrato*.

La più usata misura di lunghezza in campo agrario era il multiplo del piede *pertica decempeda* (1 pertica = 10 piedi):



L’area di uno iugero è uguale a 28800 piedi^2: essa è equivalente a quella di un quadrato che ha lato uguale a √28800 che vale 169,70 piedi o 16,97 pertiche lineari, valori che possono essere approssimati per eccesso a 170 piedi e a 17 pertiche:



L’Autore di questo piccolo trattato commise un errore nella conversione dell’area di un iugero in quella di un quadrato equivalente: egli calcolò il perimetro dello iugero:

perimetro = 12 + 24 + 12 + 24 pertiche = 72 pertiche (lineari).

Ritenne che il quadrato equivalente avesse lo stesso perimetro dello iugero e cioè 72 pertiche e lato lungo 18 pertiche: la deduzione fatta dall’autore è errata perché un quadrato che ha lato lungo 18 pertiche ha area uguale a 18^2 = 324 pertiche^2 invece delle 288 pertiche^2 di uno iugero.

- APPROFONDIMENTO -

Palladio

Palladio è stato uno scrittore romano di agricoltura: è vissuto nel IV secolo.

È uno dei pochissimi autori a citare la *tavola* quale unità di misura della superficie agraria.

Secondo Palladio la *tavola* era una superficie che l'agricoltore definiva nel corso della divisione di terreni destinati alla viticoltura.

La tavola poteva valere un iugero o metà o un quarto di iugero.

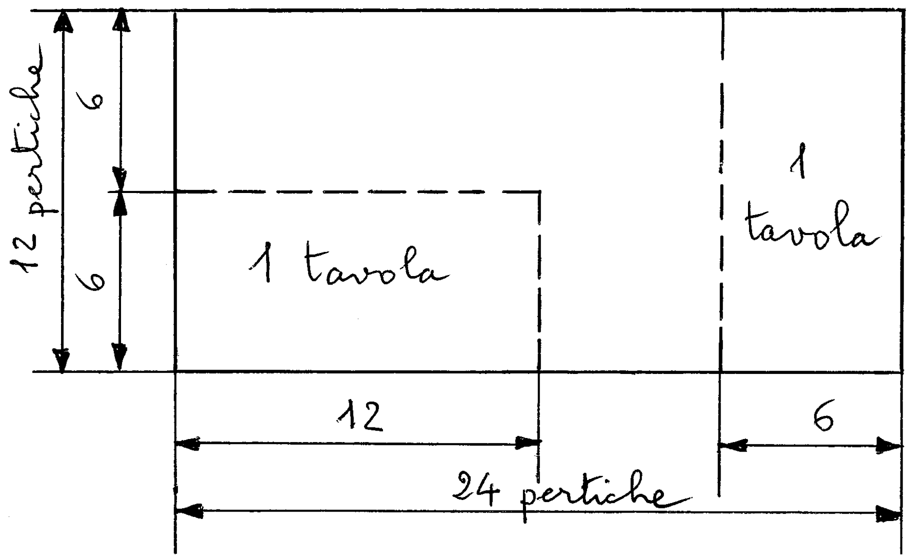
L'autore anonimo di questo trattato gromatico sarebbe stato influenzato dagli scritti di Palladio e quindi la sua composizione è assegnata al V secolo.

Quali unità di misura lineari e superficiali il trattato impiega la *pertica* (lineare e quadrata), lo iugero e la tavola.

- -

La misura in tavole

In questo trattato dei Gromatici, è introdotta una nuova unità di misura della superficie: la *tavola* che vale ¼ di uno iugero:



Nella figura è disegnato uno iugero e al suo interno sono costruiti due rettangoli con lati lunghi 6 e 12 pertiche: sono create due tavole entrambe di superficie uguale a ¼ di iugero.

La tabella che segue riassume le relazioni fra le unità di superficie:

unità di superficie	rapporti
piede^2	
pertica^2	100 piedi^2
iugero	28800 piedi^2 = 288 pertiche^2
tavola = ¼ iugero	7200 piedi^2 = 72 pertiche^2

Un campo quadrato

Un campo di forma quadrata ha lato lungo 50 pertiche e area di 2500 pertiche^2.

Il trattato chiede di calcolare quanti iugeri, tavole e pertiche^2 sono contenuti nella superficie di 2500 pertiche^2.

In iugeri

$$\frac{2500}{288} = 8 \text{ iugeri} + 196 \text{ pertiche}^2$$

$$\frac{196}{72} = 2 \text{ tavole e un resto di } 52 \text{ pertiche}^2$$

In sintesi: 2500 pertiche^2 = 8 iugeri + 2 tavole + 52 pertiche^2.

Un quadrato

Un campo quadrato ha il perimetro lungo 80 pertiche. Occorre calcolare la sua area.

Il lato è lungo 80 : 4 = 20 pertiche.

L’area è 20^2 = 400 pertiche^2. Esse corrispondono a

$$\frac{400}{288} = 1 \text{ iugero} + 112 \text{ pertiche}^2$$

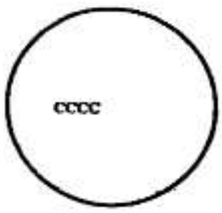
A sua volta il resto equivale a

$$\frac{112}{72} = 1{,}5 \text{ tavole} + 4 \text{ pertiche}^2$$

In sintesi l’area del quadrato è:

Area = 400 pertiche^2 = 1 iugero + 1,5 tavole + 4 pertiche^2.

Nota: il problema è accompagnato da una figura errata che rappresenta un *cerchio*. L’area vi è indicata correttamente in 400 (CCCC) pertiche^2.



Triangolo equilatero

Un campo ha la forma di un triangolo equilatero con lati lunghi 60 pertiche.

Nel trattato, l’area è calcolata moltiplicando un lato per la metà di un altro:

$$\text{Area} = \text{lato} \cdot \frac{\text{lato}}{2} = \frac{\text{lato}^2}{2} = 1800 \text{ pertiche}^2$$

La formula è chiaramente errata per eccesso.

La formula corretta fornisce un diverso risultato:

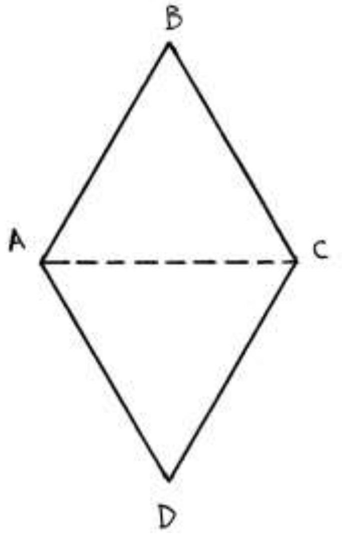
$$\text{Area}_{\text{triangolo equilatero}} = \frac{\text{lato}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \text{lato} = \frac{60}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 60 \cong 1558{,}84 \text{ pertiche}^2$$

Il problema si conclude con la conversione da pertiche^2 a iugeri e tavole:

$$\frac{1800}{288} = 6 \text{ iugeri} + \frac{1}{4} \text{ iugero} = 6 \text{ iugeri} + 1 \text{ tavola}$$

Un campo a forma di "testa di bue"

Una figura che ha la forma di una *testa di bue* è formata da due triangoli equilateri uniti lungo un lato comune:



In realtà, il campo ha la forma di un *rombo* con la diagonale minore AC lunga quanto i quattro lati del quadrilatero.

Il metodo usato dall'anonimo Gromatico per calcolare l'area del poligono è errato e deriva da quello incontrato nel precedente paragrafo per il triangolo equilatero: egli moltiplica per se stesso il lato di un triangolo equilatero che in questo caso è lungo 50 pertiche:

Area = lato*lato = 50^2 = 2500 pertiche^2.

L'area corretta è data dalla formula

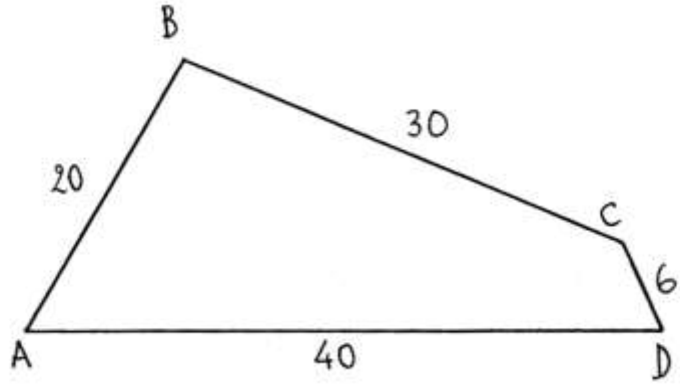
$$\text{Area}_{ABCD} = AC \cdot \text{altezza di } ABC =$$
$$= AC \cdot AC \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 50^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cong 2165 \text{ pertiche}^2$$

Anche questo problema si conclude con conversione dell'area da pratiche^2 in iugeri e tavole:

$$\frac{2500}{288} = 8 \text{ iugeri} + 196 \text{ pertiche}^2 =$$
$$= 8 \text{ iugeri} + \frac{196}{72} \text{ tavole} =$$
$$= 8 \text{ iugeri} + 2{,}5 \text{ tavole} + 16 \text{ pertiche}^2$$

Un campo irregolare

Un campo ha la forma di un quadrilatero con i lati che hanno le dimensioni scritte sulla figura:



L'autore applica la *formula degli agrimensori* per calcolare l'area del quadrilatero moltiplicando le semisomme dei lati opposti:

$$\text{Area}_{ABCD} = \frac{AB+CD}{2} \cdot \frac{AD+BC}{2} =$$

$$= \frac{20+6}{2} \cdot \frac{40+30}{2} = 13 \cdot 35 = 455 \text{ pertiche}^2$$

L'esposizione si conclude con la conversione dell'area da pertiche^2 a iugeri e tavole:

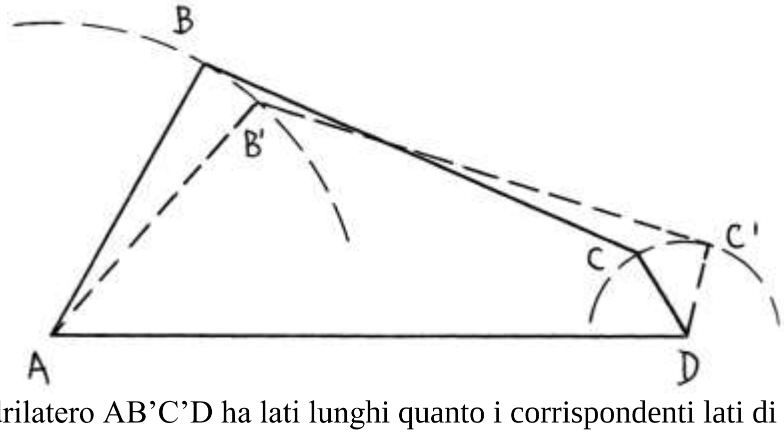
$$\frac{455}{288} = 1 \text{ iugero} + 167 \text{ pertiche}^2 =$$

$$= 1 \text{ iugero} + \frac{167}{72} \text{ tavole} =$$

$$= 1 \text{ iugero} + 2 \text{ tavole} + 23 \text{ pertiche}^2$$

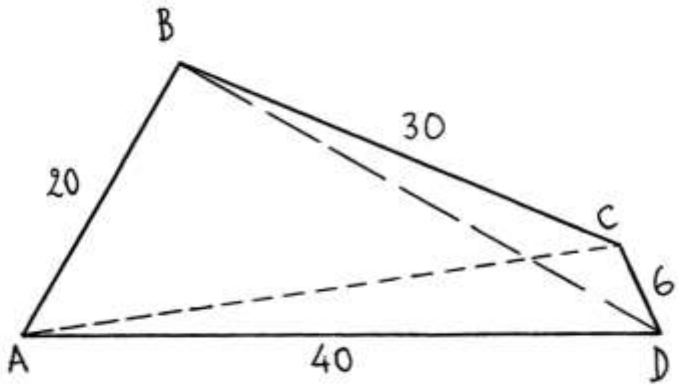
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Il metodo usato è errato. Esistono infiniti quadrilateri che hanno le stesse dimensioni di quello mostrato nella precedente figura, come spiega il grafico che segue:



Il quadrilatero AB'C'D ha lati lunghi quanto i corrispondenti lati di ABCD.

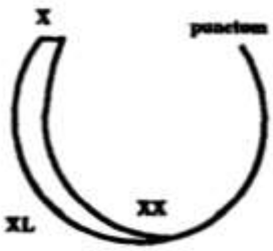
Per individuare con certezza il quadrilatero occorre conoscere la lunghezza di almeno una delle due diagonali, AC o DB:



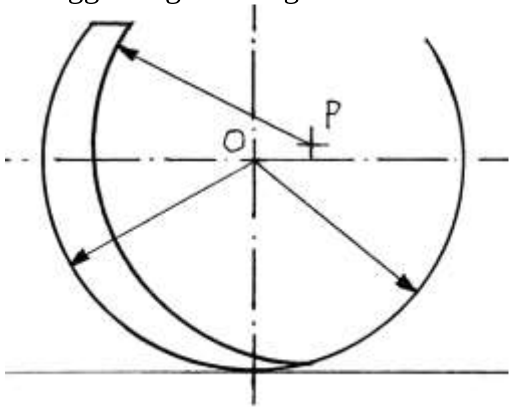
Una diagonale divide il quadrilatero in due triangoli, figure delle quali è facile calcolare le aree soltanto conoscendo le lunghezze di tutti i lati.

Area di una lunula

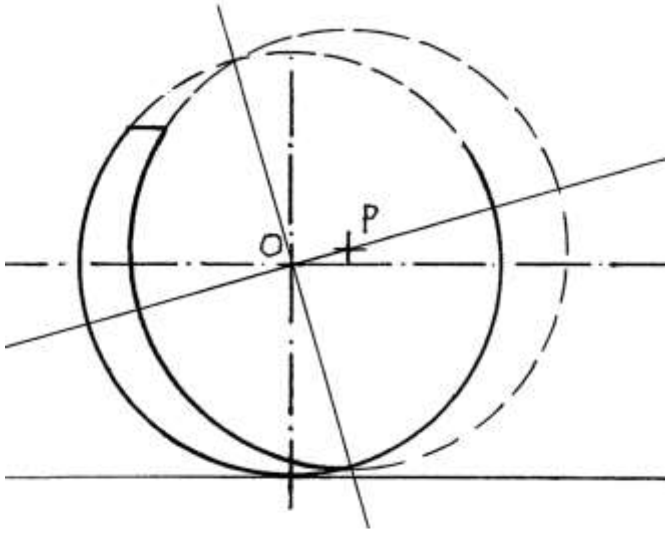
Un campo ha la forma di una *fase lunare* (luna crescente o luna calante), a destra termina in un punto di lunghezza pari a *zero* e ha le dimensioni in *pertiche* lineari scritte sulla figura:



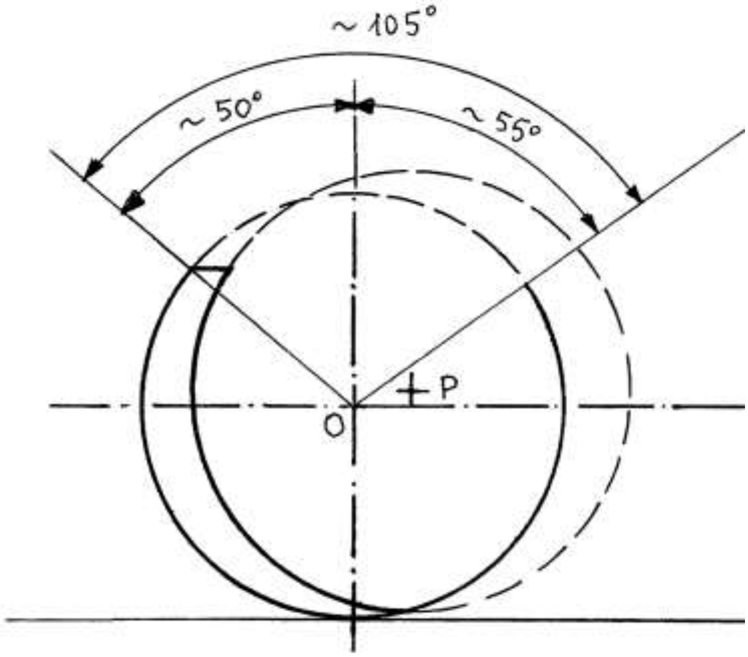
In realtà, la lunula è troncata in alto a sinistra; la figura è racchiusa all'interno di due archi di circonferenza che hanno raggi di uguale lunghezza e centri nei punti O e P:



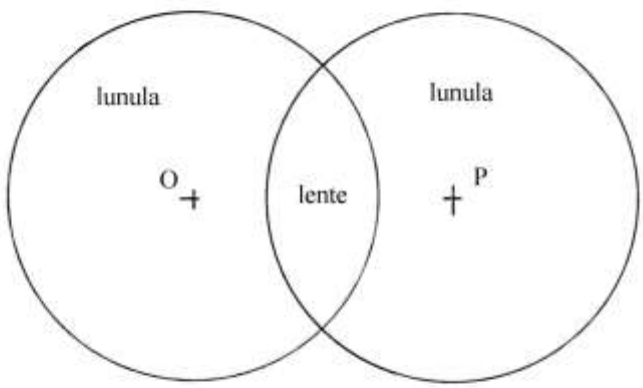
La figura che segue descrive le due circonferenze che delimitano la figura del campo descritto nel Trattato:



L’ampiezza dell’angolo del settore tagliato è, grosso modo, uguale a 105°, ciò che può far ipotizzare un taglio pari a $1/3$ della superficie del cerchio di centro O:

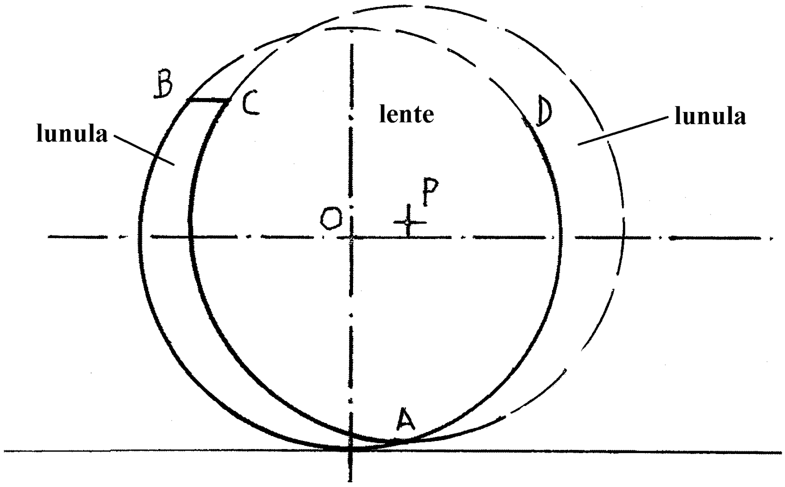


Per la precisione, in geometria due cerchi che si intersecano formano *tre* distinte aree:



Le aree residuali dei due cerchi sono due *lunule* e la regione comune ai due cerchi è chiamata *lente*. Una lunula appartiene a un unico cerchio.

Nel caso del campo descritto nel Trattato, la parte centrale della figura è occupata dalla *lente* delimitata dagli archi interni delle circonferenze dei due cerchi:



A sinistra e a destra sono presenti due lunule: quella di sinistra, ABC, è troncata dalla corda BC.

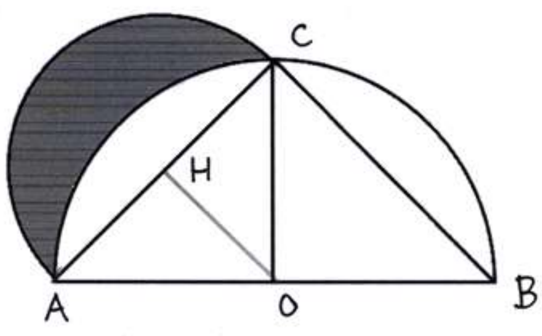
\- APPROFONDIMENTO -

<u>Le lunule</u>

Il matematico greco Ippocrate di Chio (vissuto nel V secolo a.C.) studiò la geometria del cerchio. Scrisse un trattato di geometria – *Elementi* – andato perduto. Fu un precursore di Euclide.

Le ricerche di Ippocrate di Chio sulla *(im)possibile* quadratura del cerchio lo portarono allo studio di un gruppo particolare di figure piane, le *lunule*, così chiamate perché la loro forma si avvicina a quella delle fasi lunari.

Il triangolo ACB nella figura che segue è rettangolo e isoscele:



Esso è inscritto nella semicirconferenza ACB.

Il punto medio del cateto AC è il punto H. Con centro in H e raggio AH è tracciata una semicirconferenza che per estremi i punti A e C. La superficie *tratteggiata* è una *lunula*, una figura piana racchiusa fra due archi di circonferenza di raggi differenti. Il raggio AH vale $(\sqrt{2})/2$ volte il raggio AO.

Ippocrate di Chio dimostrò che la superficie della lunula è uguale a quella del triangolo rettangolo ACO.

Leon Battista Alberti scrisse un breve saggio – *De lunularum quadratura* – in cui studiò la figura e ne spiegò la costruzione.

Anche Leonardo da Vinci approfondì l’argomento e nel *Codice Atlantico* sono contenute alcune tavole con i suoi studi sulle lunule.

\- -

Il trattato propone una procedura per calcolare l’area del campo:

* sommare le lunghezze dei due archi (esterno e interno): 60 + 20 = 80 ;
* dividere per 2: 80 : 2 = 40 ;
* sommare le lunghezze di BC e quella del punto D (che è *zero*): 10 + 0 = 10 ;
* dividere per 2: 10 : 2 = 5 ;
* moltiplicare 40 per 5: 40*5 = 200 pertiche^2 che sarebbe l’area del campo.

La conversione di questa area è fatta solo in tavole e non in iugeri perché 1 iugero equivale a una superficie (288 pertiche^2) maggiore di quella appena calcolata:

$$\frac{200}{72} = 2 \text{ tavole} + 56 \text{ pertiche}^2$$

- APPROFONDIMENTO -

Nella procedura appena descritta si può ravvisare l’applicazione della *formula degli agrimensori*: la figura curvilinea è assimilata a un quadrilatero con lati lunghi:

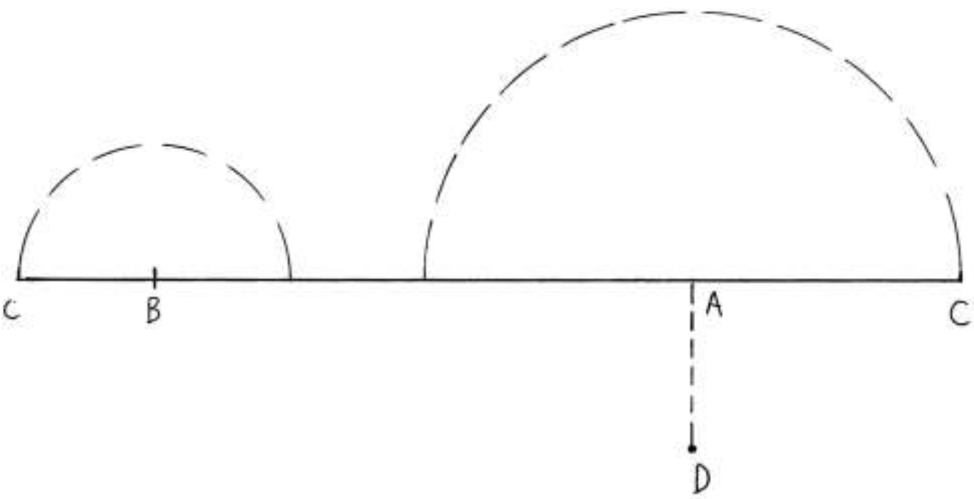
* AB = 60 pertiche;
* AC = 20 pertiche;
* BC = 10 pertiche;
* C = 0 pertiche.

La formula usata dall’Anonimo autore moltiplica le semisomme delle lunghezze dei lati opposti:

$$\text{Area} = \frac{AB+AC}{2} \cdot \frac{BC+C}{2} = \frac{60+20}{2} \cdot \frac{10+0}{2} =$$
$$= 40 \cdot 5 = 200 \text{ pertiche}^2$$

La figura non può neanche essere assimilata a quella di un triangolo perché la somma dei due lati più corti (AC e BC) è *minore* della lunghezza del lato più lungo (AB) e in un triangolo ciò è impossibile:

* AC + BC < AB ;
* 20 + 10 < 60 pertiche;
* 30 < 60 pertiche.



Infine, si può notare un’omissione nella procedura impiegata dall’Anonimo: egli non ha tenuto conto della curvatura di due lati della figura per cui sarebbe stato utile rettificare il risultato moltiplicando per 11/14, che è il rapporto approssimato fra l’area di un cerchio e quella del quadrato in cui è inscritto.

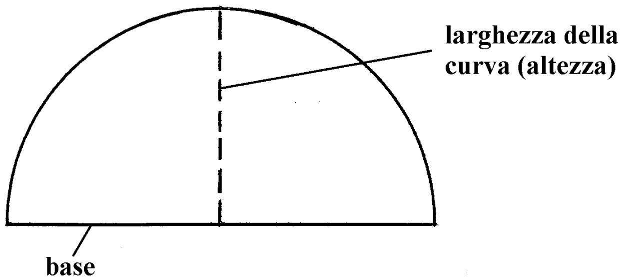
Applicando questo coefficiente riduttivo, l’area approssimata di ABCD sarebbe

$$\text{Area}_{ABCD} = 200 \cdot \frac{11}{14} = 157 + \frac{1}{7} \text{ pertiche}^2$$

- -

Campo a forma di semicerchio

Un campo ha la forma di un semicerchio con la *base* (il diametro) lungo 40 pertiche e la *larghezza della curva* (l’altezza o freccia) lunga 20 pertiche:



Per calcolare l’area del semicerchio, l’Autore usa la consueta formula approssimata risalente a Archimede:

$$\text{Area semicerchio} = \text{base} \cdot \text{altezza} \cdot \frac{11}{14} \cong$$

$$\cong 20 \cdot 40 \cdot \frac{11}{14} \cong 628{,}5 \text{ pertiche}^2$$

L’Autore approssima il risultato a 628 pertiche^2 che equivalgono a

$$2 \text{ iugeri} + \frac{1}{2} \text{ tavola} + 16 \text{ pertiche}^2$$

Area di un cerchio

Un campo ha la forma di un cerchio con diametro lungo 40 pertiche.

Per calcolare la sua area è applicata la seguente procedura:

* moltiplicare il diametro per se stesso: 40*40 = 1600 ;
* moltiplicare per 11: 1600*11 = 17600 ;
* dividere per 14:

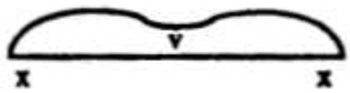
$$\frac{17600}{14} = 1257 + \frac{2}{14} \text{ pertiche}^2 = 1257 + \frac{1}{7} \text{ pertiche}^2 .$$

La conversione in iugeri e pertiche^2 dà il seguente risultato:

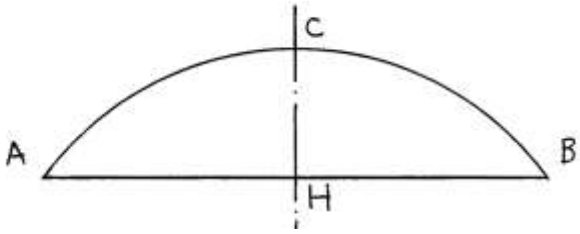
$$\frac{1257 + \frac{1}{7}}{288} = 4 \text{ iugeri} + 1 \text{ tavola} + \left(33 + \frac{1}{7}\right) \text{pertiche}^2 .$$

Campo a forma di segmento circolare

Un campo ha la forma più piccola di un semicerchio. La figura del trattato è chiaramente errata:



Il segmento ha la corda (*base*) AB lunga 20 pertiche e la freccia (*larghezza*) CH lunga 5 pertiche:



La procedura impiegata nel trattato è simile a quella utilizzata da Columella nella sua opera "*De re rustica*" per risolvere un problema analogo:

* sommare le lunghezze della corda e della freccia: 20 + 5 = 25 ;
* moltiplicare per 4: 25*4 = 100 ;
* dividere per 2: 100 : 2 = 50 ;
* dividere per 2 la lunghezza della corda: 20 : 2 = 10 ;
* moltiplicare per se stesso l'ultimo quoziente: 10*10 = 100 ;
* dividere per 14: 100 : 14 = 7 + 1/7 ;
* sommare 50 con l'ultimo quoziente: 50 + (7 + 1/7) = 57 + 1/7 pertiche^2 che viene arrotondato all'intero più vicino: l'area è uguale a 57 pertiche^2.

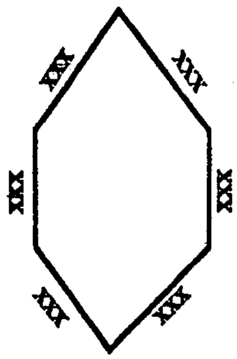
Secondo i moderni metodi di scrittura, l'algoritmo usato dall'Anonimo è condensato nella formula che segue:

$$Area_{ACBH} = \frac{c+f}{2} \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{c}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{14}$$

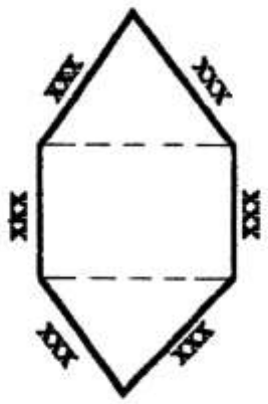
c è la lunghezza della corda e *f* quella della freccia.

Un campo di forma esagonale

Un campo ha la forma di un esagono regolare con lati lunghi 30 pertiche:



La figura è molto imprecisa e sembra essere il frutto dell'unione di un rettangolo con due triangoli (che dovrebbero essere isosceli):



Il problema era già stato affrontato da Columella nel suo citato trattato: egli aveva attribuito ai lati una lunghezza di 30 *piedi* e cioè una lunghezza *dieci* volte più piccola.

La procedura impiegata dall'Anonimo gromatico è la seguente:

- moltiplicare la lunghezza del lato per se stessa: 30*30 = 900 ;
- dividere per 3: 900 : 3 = 300 ;
- dividere 900 per 10: 900 : 10 = 90 ;
- sommare 300 e 90: 300 + 90 = 390 ;
- moltiplicare per 6: 390*6 = 2340 pertiche^2 che è l'area del campo esagonale.

A parte le diverse unità di misura, la procedura e il risultato finale sono identici a quelli di Columella.

\- APPROFONDIMENTO -

Nei tempi antichi, l'area di un esagono regolare poteva essere calcolata

1. con la formula approssimata quasi esatta di Erone:

$$Area = \frac{13}{5} \cdot lato^2 = \frac{13}{5} \cdot 30^2 = 2340 \text{ pertiche}^2$$
;

2. con la formula dei *numeri figurati*:

   Area = 2*lato^2 + lato = 2*30^2 + 30 = 1830 pertiche^2.

   Vitruvio Rufo aveva impiegato questa formula errata.

Oggi l'area di un esagono è calcolata con la formula

$$Area_{esagono} = \frac{3 \cdot lato^2}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{3 \cdot 30^2}{2} \cdot \sqrt{3} \cong$$
$$\cong 2338{,}26 \text{ pertiche}^2$$

che fornisce un risultato quasi uguale a quello della formula di Erone.

La formula appena usata è semplificata con l'impiego dei *numeri fissi,* caratteristici di ciascun poligono regolare. Un *numero fisso* è il coefficiente per il quale deve essere moltiplicato il quadrato della lunghezza del lato.

Per l'esagono è:

Area = F (numero fisso) * lato^2 = 2,598*30^2 = 2338,2 pertiche^2.

Il numero fisso dell'esagono equivale a:

$$\frac{3}{2} \cdot \sqrt{3} \cong 2{,}598$$

APPENDICE

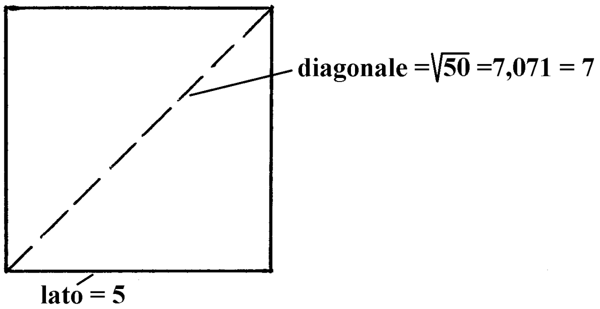
La metrologia romana

La metrologia romana impiegava unità di misura di lunghezza su base 5 e su base 6 e i loro multipli e sottomultipli.

Il *sistema di numerazione* romano era basato sul numero *cinque*.

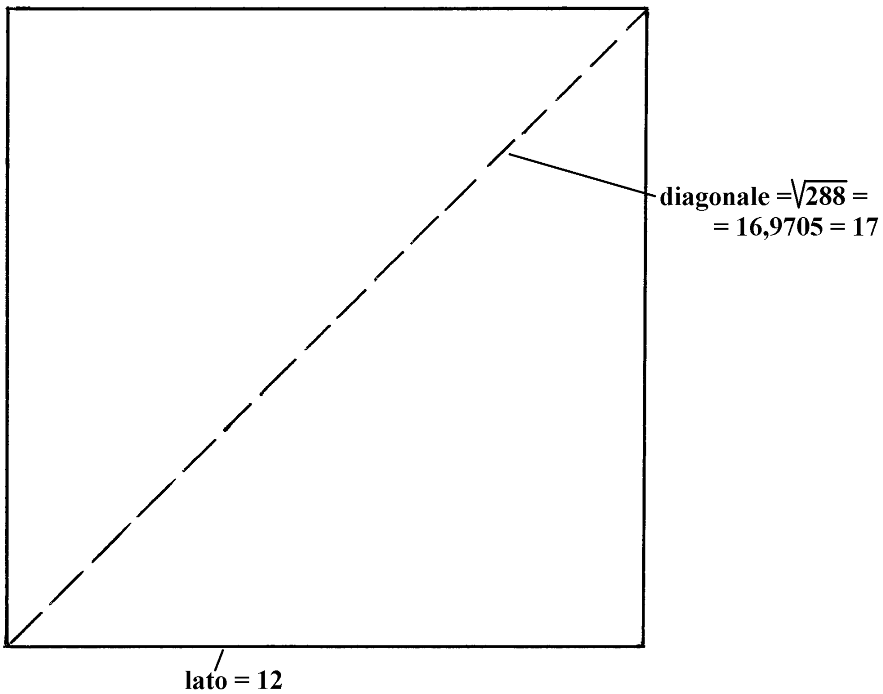
I numeri 5 e 12 (= 2*6) che caratterixzzano i multpli della *centuria* presentavano una proprietà fondamentale per gli Agrimensori romani: le lunghezze delle diagonali dei quadrati con lati lunghi 5 e 12 erano approssimabili a numeri interi:

* quadrato lato 5 → diagonale = $\sqrt{50} = 7{,}071 \approx 7$



;

* quadrato lato 12 → diagonale = $\sqrt{288} = 16{,}9705 \approx 17$:



Sembra che il più importante strumento usato dai tecnici romani fosse un *righello* lungo 1 piede; probabilmente esso era diviso in sottomultipli incisi lungo i due bordi paralleli:

* in *dita* (1/16 di piede) su di un lato;
* in *once* (1/12 di piede) sull'altro lato.

Lucio Giunio Columella (4 – 70) è stato uno scrittore romano che ha lasciato un importante trattato di agricoltura, il *De re rustica* ("L'arte dell'agricoltura").

Nel V libro della sua opera Columella ha fornito molte informazioni sulle unità di misura (lineari e di superficie) usate in agricoltura.

Le unità di misura romane lineari e di superficie

In numerosi manoscritti dei trattati dei Gromatici sono presenti dei paragrafi, più o meno simili, dedicati alla descrizione del sistema delle unità di misura romane.

Per questa ragione, i paragrafi dedicati alle unità di misura contenute nel trattato di Vitruvio Rufocui potrebbero non essere opera di questo Gromatico, ma ricavati da manuali circolanti a disposizione di tutti.

La principale unità di misura lineare era il *piede romano*, lungo 29,57 cm (o 295,7 mm), secondo il campione presente nel tempio di Giunone Moneta a Roma. Non sempre è stata rispettata questa misura standard.

Una curiosità: la dimensione maggiore del foglio di formato A4 è 29,7 cm (297 mm). La misura è *quasi* uguale a quella della lunghezza del piede romano.

Le lunghezze maggiori del piede erano rilevate con misurazioni effettuate con l'impiego della *pertica*, un'asta che poteva assumere due diverse lunghezze:

- 10 piedi (= 295,7 cm) e la pertica era detta *decempeda*,
- 12 piedi (= 354,84 cm).

Il gruppo delle prime unità di misura lineari (*dito*, *oncia*, *palmo*, *piede* e *cubito*) è di derivazione *anatomica* perché esse sono ricavate dalle lunghezze convenzionali di parti del corpo umano, di per sé di natura *statica*. Queste unità erano impiegate per misurare manufatti immobili.

La tabella che segue presenta i *sottomultipli* del piede, sulla base della relazione 1 piede = 29,57 cm:

nome	rapporto con il piede	lunghezza in cm
dito (digitus)	1/16	1,848
oncia (uncia)	1/12	2,464
palmo (palmus)	1/4	7,39
sestante (sextans o dodrans)	3/4	22,1775

Nella tabella che segue sono riportate le unità di misura lineari *multiple* del piede:

nome	rapporto con il piede	lunghezza in cm (o in metri, dove indicato)
palmipes (piede + palmo)	1 1/4	36,96
cubito	1 ½	44,355
passo semplice (gradus) o grado	2 ½	73,925
passo doppio (passus)	5	147,85
pertica (decempeda)	10	295,70
pertica 12 piedi	12	354,84
actus (atto)	120	35,484 metri
lato maggiore iugero	240	70,968 metri
stadio (stadium) = 125 passi doppi	625	184,81 metri
centuria	2 400	709,68 metri
miglio (miliarius)	5 000 (= 1 000 passi doppi)	1478,5 metri
lega (leuga)	7 500	2217,75 metri
lato saltus	12 000	3548,4 metri
lato ager	60 000 (= 12 miglia)	17 742 metri

Il gruppo delle prime unità di misura (dito, oncia, palmo, piede e cubito) è di derivazione *anatomica* perché esse sono ricavate dalle lunghezze convenzionali di parti del corpo umano, di per sé di natura *statica*. Queste unità erano impiegate per misurare manufatti immobili.

Anche altre antiche civiltà usarono unità di misura di derivazione anatomica: i Sumeri e i Babilonesi e gli Egizi.

Un *secondo* gruppo di unità di misura lineari (grado o passo, passo doppio, miglio) erano legate agli spostamenti dell'uomo; sono unità di natura *dinamica* perché misurano lunghezze percorribili: un *passo semplice* è coperto dal movimento di una sola gamba e il *passo doppio* è rappresentato dal moto successivo e coordinate delle due gambe di un uomo.

Un terzo gruppo di unità di misura lineari riguardava l'agricoltura. La base era l'*actus* (atto), equivalente alla lunghezza di 120 piedi. Secondo Plinio, l'atto " … è la distanza che in un solo normale slancio riescono a coprire i buoi con l'aratro …".

In sintesi, i Romani usavano *dodici* unità di misura della lunghezza che in ordine crescente sono le seguenti:

1. il *dito*;
2. l'*oncia*;
3. il *palmo*;
4. il *sestante*;
5. il PIEDE;
6. il *cubito*;
7. il *grado*;
8. il *passo doppio*;
9. la *pertica decempeda*;
10. l'*atto*;
11. lo *stadio*;
12. il *miglio*.

Tutte queste unità erano sottomultipli (dalla 1 alla 4) o multipli (dalla 6 alla 12) del *piede*. L'unità base di misura delle superfici era il piede quadrato, corrispondente all'area di un quadrato con lato lungo 1 piede e cioè *convenzionalmente* 29,57 cm.

La tabella che segue descrive le principali unità di misura di superficie usate dai Romani:

nome	dimensioni	superficie in cm^2 o in m^2
piede quadrato	29,57 x 29,57 cm	874,38 cm^2
pertica quadrata	10 x 10 piedi = 100 $piedi^2$	8,7438 m^2
atto minimo	120 x 4 piedi = 480 $piedi^2$	41,97 m^2
clima (secondo Columella)	60 x 60 piedi = 3600 $piedi^2$	314,7768 m^2
Porca (secondo Columella)	180 x 30 piedi = 5400 $piedi^2$	472,165 m^2
tavola (= ¼ iugero) (secondo Palladio)	60 x 120 piedi = 7200 $piedi^2$	629,555 m^2
actus (atto quadrato)	120 x 120 piedi = 14 400 $piedi^2$	1259,11 m^2
iugero	2 actus = 28 800 $piedi^2$	2518,22 m^2
heredium	2 iugeri = 57 600 $piedi^2$	5036,45 m^2
Centuria (= 100 heredia)	200 iugeri = 5 760 000 $piedi^2$	503 645,7 m^2
saltus (secondo Varrone = 4 centurie)	1419,2 x 1419,2 metri	2 014 580 m^2
saltus (secondo i Gromatici = 25 centurie)	3548 x 3548 metri	12 591 125 m^2

Bibliografia

1. Balbus, "Presentation systématiques de toutes les figures", a cura di Jean Yves Guillaumin, Napoli, Jovene Editore, 1996, pp. 217.
2. Caressa Paolo, "La matématica de los romanos: una vindicación" [in spagnolo], aprile 2012. http://www.caressa.it/pdf/matematica-romani.pdf
3. Caressa Paolo, "La matematica degli antichi Romani (I)", in "XlaTangente", n. 38, 2013, pp. 17 – 20.
4. Caressa Paolo, "La matematica degli antichi Romani (II)", in "XlaTangente" , n. 39, giugno 2013, pp. 17 – 19.
5. Cuomo Serafina, "Ancient mathematics", Londra – New York, Routledge, 2001, pp. xii-290.
6. Frontin [Frontino], "Frontin. L'Œuvre Gromatique", "Commission des Communautés Européennes – Action Cost G2 "Paysages Antiques et Structures Rurales"", Luxembourg, 1998, pp. XIX-120.
7. Hygin l'arpenteur, "L'établissement des limites" (traduzione francese), Napoli, Jovene Editore, 1996, pp. XIV-188.
8. Lewis M. J. T., "Surveying Instruments of Greece and Rome", New York, Cambridge University Press, 2001, pp. xx-389.
9. "Les arpenteurs romains". Hygin le Gromatique – Frontin, a cura di Jean-Yves Guillaumin, Parigi, Les Belles Lettres, 2005, pp. 265.

INDICE