Parole chiave: formule approssimate per l'area dei poligoni regolari; formula di Erone per l'area del triangolo; punti notevoli del triangolo; il triangolo 13-14-15; teorema di Pick; teorema del coseno; triangoli di Erone; triangoli di Brahmagupta; aree delle figure piane non circolari; numeri fissi; contributi di Giovanni Sfortunati e di Lorenzo Forestani alla soluzione dei problemi relativi al triangolo 13-14-15

Nota: fra parentesi quadre […] sono talvolta inseriti commenti dell'Autore di questo articolo.

Questo articolo è diviso in *due parti* e *tre appendici*: la prima parte è un'introduzione e la seconda è riservata alla descrizione del primo Libro dei *Metrica* di Erone, ad eccezione dei paragrafi relativi alle figure circolari, non considerate. Infine, l'APPENDICE I è dedicata ai *Numeri fissi*, l'APPENDICE II e l'APPENDICE III sono riservate rispettivamente ai contributi di Giovanni Sfortunati e di Lorenzo Forestani alla soluzione dei problemi relativi al classico triangolo eroniano 13 – 14 – 15.

I PARTE
=======

<u>Le formule approssimate di Erone</u>

Erone di Alessandria (I secolo d.C.) scrisse diverse opere di matematica applicata, geometria e meccanica. La versione inglese della voce dedicata a Erone su Wikipedia lo qualifica come "*a Greco-Egyptian mathematician and engineer*".

Non esistono informazioni sulla sua vita. Egli è ritenuto un "greco" soltanto perché scriveva in questa lingua. Ma nei secoli successivi e fino almeno al Settecento, ad esempio, in Europa la lingua scientifica più usata era il *latino*, ma ciò non porta a concludere che tutti gli scienziati fossero di nazionalità italiana. E che dire dell'inglese e dell'americano, lingue oggi prevalenti nella comunicazione scientifica e tecnica: non tutti gli scriventi sono di nazionalità inglese o americana.

Egli introdusse una serie di formule *approssimate* per calcolare l'area dei più comuni *poligoni regolari*.

La tabella che segue le descrive:

Poligoni regolari	Area - A	Valore dei coefficienti
Triangolo equilatero	A = 13/30 * lato^2	13/30 = 0,4(3) (*)
Pentagono	A = 12/7 * lato^2 (**) oppure A = 5/3 * lato^2	12/7 = 1,7143 (**) 5/3 = 1,(66)
Esagono	A = 13/5 * lato^2 deriva da: 6 * A$_{\text{TRIANGOLO EQUILATERO}}$ = = 6 * (13/30) * lato^2	13/5 = 2,6
Ettagono	A = 43/12 * lato^2	43/12 = 3,58(3)
Ottagono	A = 29/6 * lato^2	29/6 = 4,8(3)
Ennagono	A = 51/8 * lato^2	51/8 = 6,375
Decagono	A = 15/2 * lato^2	15/2 = 7,5
Endecagono	A = 66/7 * lato^2	66/7 = 9,428
Dodecagono	A = 45/4 * lato^2	45/4 = 11,25

(*) 0,4(3) è un numero decimale periodico: fra parentesi tonde è racchiuso il *periodo*.

(**) Forse, questa soluzione – 12/7 – non è attribuibile a Erone.

Erone approssimò a 13/15 il valore del rapporto fra le lunghezze dell'altezza e del lato di base di un triangolo equilatero. Il suo valore corretto è dato da:

$$\text{altezza/lato} = (\sqrt{3})/2 \approx 0{,}8660254\ldots$$

La soluzione di Erone vale:

13/15 = 0,8(6).

La differenza fra i due dati è minima: il risultato di Erone è leggermente approssimato per eccesso.

\- APPROFONDIMENTO -

<u>I numeri periodici</u>

Un numero decimale *periodico* è un numero razionale che scritto sotto forma di notazione decimale mostra una *stringa* di cifre poste dopo la virgola: da una certa posizione in poi la stringa si ripete all'infinito.

La stringa è chiamata *periodo*: la frazione

$$\frac{5}{3}$$

è rappresentata in notazione decimale sotto la forma 1,6666...

La stringa scritta a destra della virgola – 6666 – è il periodo e si ripete all'infinito.

Per semplificare la scrittura di questi numeri sono usate due diverse convenzioni che hanno lo stesso significato:

* le cifre che formano il periodo sono scritte con un segmento orizzontale sovrastante:

$$\frac{5}{3} = 1,\overline{66}$$

;

* una seconda convenzione racchiude le cifre del periodo fra *parentesi tonde*:

$$\frac{5}{3} = 1,(66)$$

.

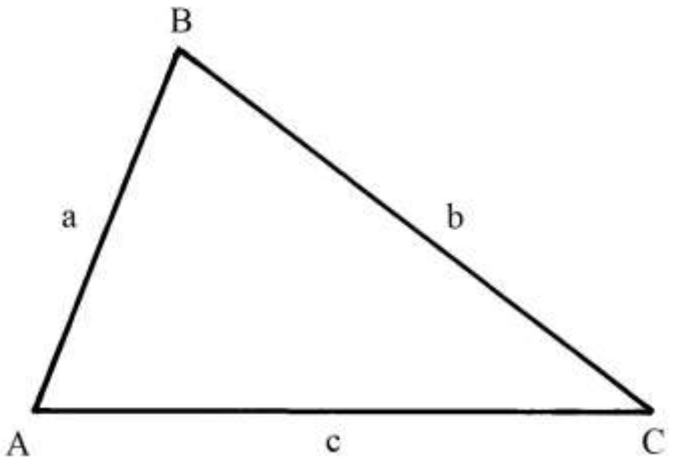
Una parte dei numeri periodici possiede una seconda stringa di cifre che non si ripetono e che precedono la stringa del periodo: si tratta dell'*antiperiodo*, come mostrato nell'esempio che segue:

$$\frac{17}{6} \approx 2,8333... \approx 2,\underbrace{8}_{\text{antiperiodo}}\underbrace{(333)}_{\text{periodo}}$$

- -

La formula per l'area di un triangolo

Si deve a Erone (I secolo d.C.) una formula per calcolare l'area A di un qualsiasi triangolo di cui sono note le lunghezze dei tre lati, a, b e c, e quindi la lunghezza del *semiperimetro* m:



Infatti: a + b + c = perimetro ABC = 2 * m.

La formula è la seguente:

$$A_{ABC} = \sqrt{[m * (m – a) * (m – b) * (m – c)]} =$$

$= \sqrt{\{(a + b - c)/2 * [(a + b + c)/2 - a] * [(a + b + c)/2 - b] * [a + b + c)/2 - c]\}} =$
$= \sqrt{[(a + b - c)/2 * (b + c - a)/2 * (a + c - b)/2 * (a + b - c)/2]} =$
$= \{\sqrt{[(a + b + c) * (b + c - a) * (a + c - b) * (a + b - c)]}\}/4.$

La formula calcola l'area di un qualsiasi triangolo senza che occorra misurare l'altezza relativa a un lato.

Nota: i moderni storici della matematica attribuiscono a Archimede il merito dell'invenzione di questa importante formula (voce 2. della Bibliografia).

<u>Alcuni punti notevoli di un triangolo</u>

La dimostrazione della validità della formula di Erone (o di Archimede – Erone) richiede un passaggio preliminare dedicato ad alcuni punti notevoli di un triangolo.

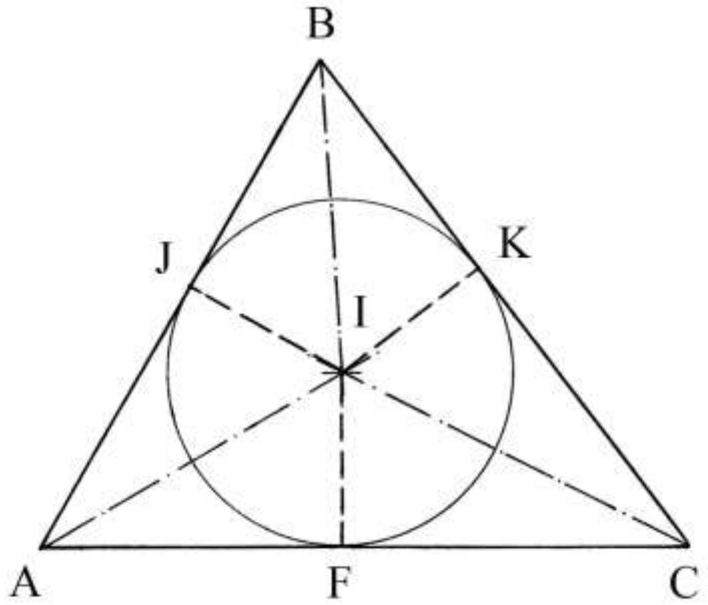
ABC è un triangolo generico: i suoi lati hanno lunghezze proporzionali alla terna 13 – 14 – 15:

AB : 13 = BC : 14 = AC : 15.

Le *bisettrici* dei tre angoli interni del triangolo ABC si intersecano in un punto, I, che è chiamato *incentro*.

Si chiama *inraggio* la distanza dell'incentro dai lati: IF = IJ = IK. I tre *inraggi* sono perpendicolari ai lati del triangolo nei punti F, J e K.

Il cerchio di centro I e di inraggio IF si chiama *incerchio*:



- APPROFONDIMENTO -

<u>La lunghezza del raggio dell'incerchio</u>

Le bisettrici IA, IB e IC dividono ABC in tre triangoli: ABI, BCI e ACI.

L'area dell'intero triangolo ABC è data dalla somma delle aree dei tre triangoli:

$\text{Area}_{ABC} = \text{Area}_{ABI} + \text{Area}_{BCI} + \text{Area}_{ACI} = AB * IJ/2 + BC * IK/2 + AC * IF/2.$

Ma IJ = IK = IF = *r*, raggio del cerchio per cui:

Area ABC = AB * r/2 + BC * r/2 + AC * r/2 = r * (AB/2 + BC/2 + AC/2).

L’espressione fra parentesi tonde corrisponde al *semiperimetro m* del triangolo ABC:

(AB/2 + BC/2 + AC/2) = m.

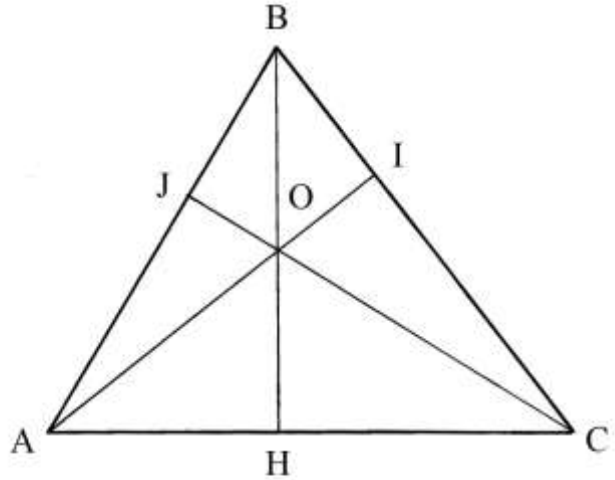
Il perimetro vale: (AB + BC + AC) = 2*m.

Conoscendo l’area di ABC e il valore di 2*m e di m, è possibile ricavare la lunghezza del raggio *r* del cerchio inscritto:

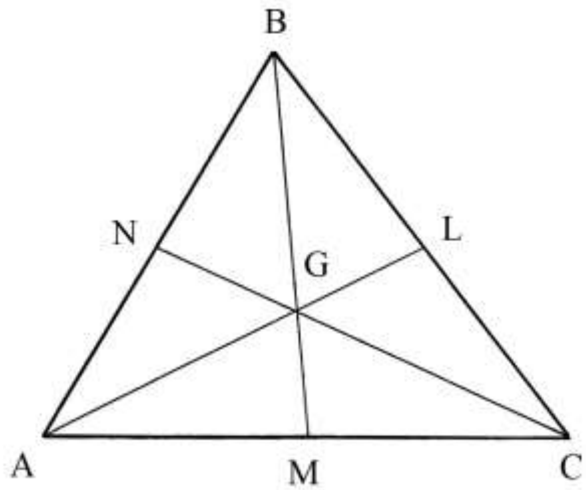
r = Area $_{ABC}$/m = (2 * Area $_{ABC}$)/(2*m).

- -

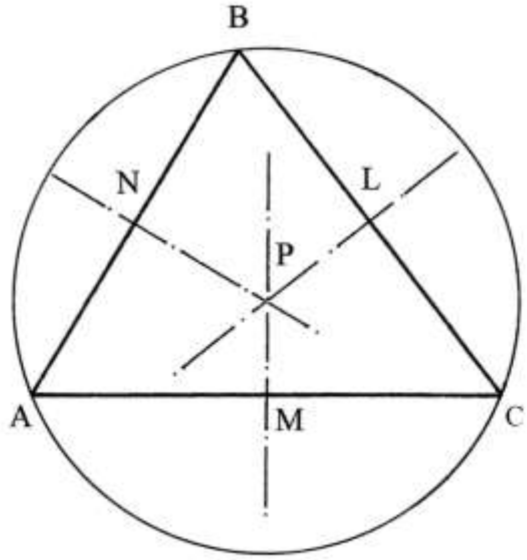
Le *altezze* BH, AI e CJ si incontrano in un punto, O, che è detto *ortocentro*:



Le *mediane* AL, BM e CN collegano un vertice con il punto medio del lato opposto: esse si incontrano in un punto, G, che è noto come *baricentro*:



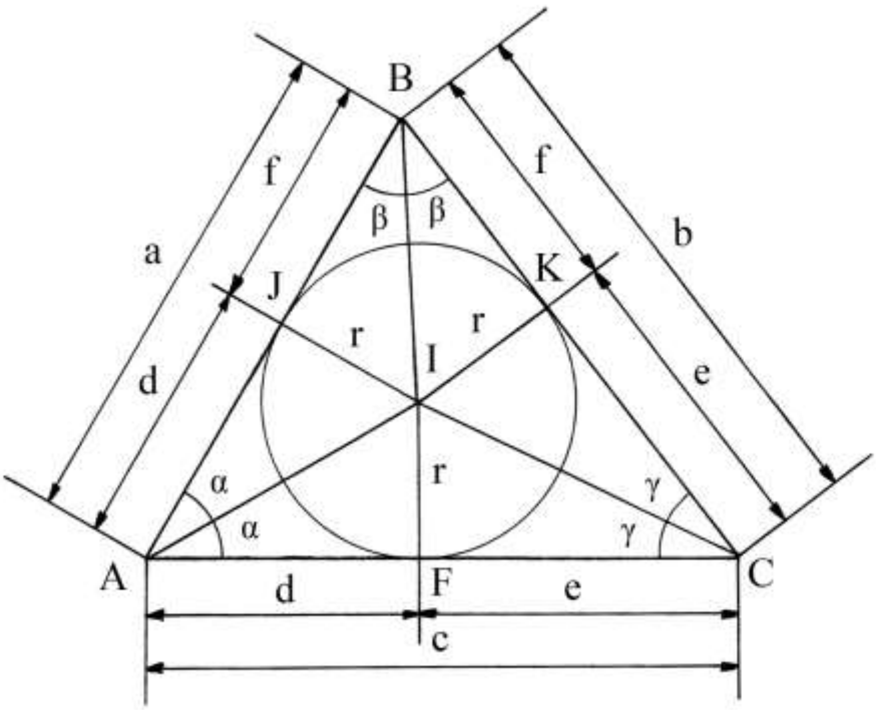
Infine, gli *assi dei tre lati* passano per i loro punti medi L, M e N formando angoli retti con i rispettivi lati: essi si intersecano in un punto, il *circocentro*, che è il centro del cerchio *circoscritto* al triangolo, che è chiamato *circumcerchio*; il raggio PA = PB = PC è detto *circumraggio*:



%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Prendiamo in considerazione il triangolo ABC con le sue tre bisettrici. Dall'incentro I condurre tre perpendicolari ai lati del triangolo: sono IF, IJ e IK.

I tre segmenti hanno uguale lunghezza, indicata con r, e sono tre raggi della circonferenza di centro I inscritta nel triangolo.



Le bisettrici dividono gli angoli in A, B e C in coppie di angoli di uguale ampiezza: $\alpha - \alpha$, $\beta - \beta$ e $\gamma - \gamma$.

I triangoli AIF e AIJ sono rettangoli e hanno uguali dimensioni. Lo stesso accade alle coppie di triangoli JIB – KIB e FIC – KIC.

I lati dei triangoli hanno le seguenti lunghezze:

* AB = a = d + f;
* BC = b = f + e;
* AD = c = d + e.

Il triangolo ABC è così scomposto in tre triangoli isosceli: AIB, BIC e AIC. Sommando le loro aree si ricava quella di ABC:

$$\text{Area}_{ABC} = \text{Area}_{AIB} + \text{Area}_{BIC} + \text{Area}_{AIC} =$$
$$= (IJ * AB)/2 + (IK * BC)/2 + (IF * AC)/2 = r * AB/2 + r * BC/2 + r * AC/2 =$$
$$= r * (AB/2 + BC/2 + AC/2) = r * (a + b + c)/2 = r * (2 * m)/2 = r * m.$$

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Una seconda soluzione conduce a un identico risultato: è necessario calcolare le aree dei *sei* triangoli rettangoli nei quali le tre bisettrici e i tre raggi scompongono il triangolo ABC.

I triangoli rettangoli sono i seguenti: AJI, BJI, BKI, CKI, AFI e CFI.

L'area di ABC è:

$$\text{Area ABC} = (\text{Area}_{AJI} + \text{Area}_{BJI}) + (\text{Area}_{BKI} + \text{Area}_{CKI}) + (\text{Area}_{AFI} + \text{Area}_{CFI}) =$$
$$= (d * r/2 + f * r/2) + (f*r/2 + e * r/2) + (d * r/2 + e * r/2) =$$
$$= (d + f) * r/2 + (f + e) * r/2 + (d + e) * r/2 =$$
$$= a * r/2 + b * r/2 + c * r/2 = r * (a + b + c)/2 = r * (2 + m)/2 = r * m.$$

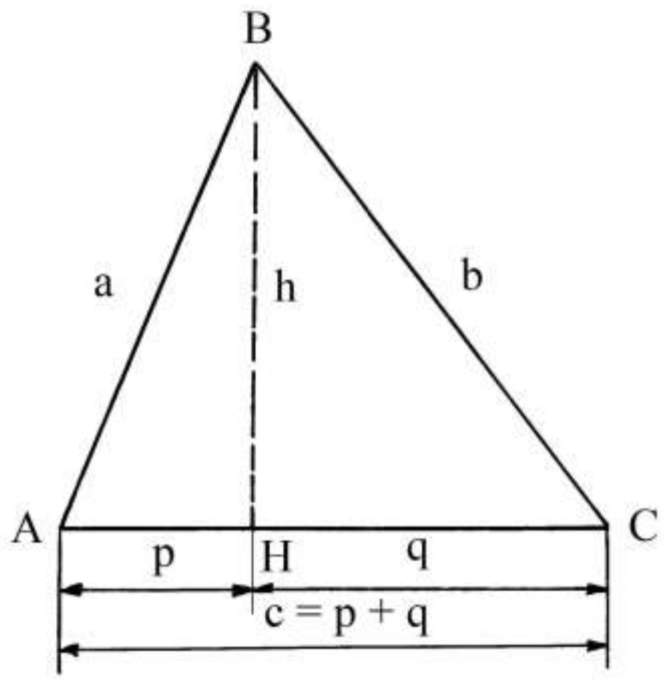
Entrambe le soluzioni conducono a calcolare l'area del triangolo semplicemente conoscendo le lunghezze dei tre lati, senza richiedere calcoli o misurazioni per determinare le lunghezze del raggio r e dei segmenti d, e, f.

Erone e il triangolo 13-14-15

Lo studio delle proprietà del triangolo scaleno con lati lunghi 13, 14 e 15 fornì a Erone lo spunto per definire una formula di valore generale, per calcolare le lunghezze delle proiezioni dei lati inclinati sulla base.

Nella figura che segue i lati hanno le seguenti lunghezze:

- AB = a = 13
- BC = b = 15
- AC = c = 14



BH è l'altezza relativa alla base AC.

Il punto H divide il lato di base in due parti, p e q, che sono rispettivamente le *proiezioni* dei lati AB e BC:

$$AC = AH + HC \quad \leftrightarrow \quad c = p + q$$

Applicando il teorema di Pitagora ai due triangoli rettangoli ABH e BCH si ha:

$BH^2 = AB^2 – AH^2$
$h^2 = a^2 – p^2$

$BH^2 = BC^2 – HC^2$
$h^2 = b^2 – q^2$

Le due formule si equivalgono:

$a^2 – p^2 = b^2 – q^2$

Ma $p = c – q$ e sostituendo

$a^2 – (c – q)^2 = b^2 – q^2$
$a^2 – (c^2 – 2cq – q^2) = b^2 – q^2$
$a^2 – c^2 + 2cq – q^2 = b^2 – q^2$
$2cq = b^2 + c^2 – a^2$

Ne consegue:

$q = (b^2 + c^2 – a^2)/(2 * c)$

Quest'ultima è la formula trovata da Erone per risolvere il problema.
Sostituendo nella formula precedente i valori noti si ha:

$q = (15^2 + 14^2 – 13^2)/(2 * 14) = (225 + 196 – 169)/28 = 252/28 = 9$.

Il valore di p è:

$$p = c - q = 14 - 9 = 5 .$$

La formula di Erone usata per determinare p è la seguente:

$$p = (a^2 + c^2 - b^2)/(2 * c) = (13^2 + 14^2 - 15^2)/(2 * 14) = 140/28 = 5.$$

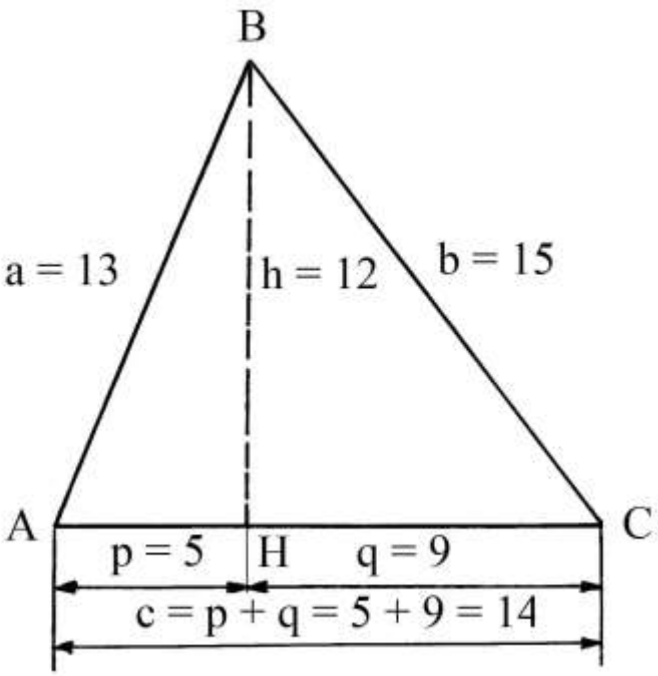
L'altezza BH = h è uguale a:

$$BH^2 = AB^2 - AH^2 .$$

$$BH = \sqrt{(AB^2 - AH^2)} = \sqrt{(13^2 - 5^2)} = \sqrt{(169 - 25)} = \sqrt{144} = 12.$$

Le lunghezze di BH e di quelle dei lati di questo speciale triangolo formano una successione aritmetica di ragione "1":

BH → AB → AC → BC
12 → 13 → 14 → 15.



- APPROFONDIMENTO -

Le due formule usate per calcolare le lunghezze delle proiezioni p e q possono essere scritte in un modo leggermente diverso:

$$q = (b^2 + c^2 - a^2)/(2 * c) = c^2/(2 * c) + (b^2 - a^2)/(2 * c) = c/2 + (b^2 - a^2)/(2 * c)$$

$$p = (a^2 + c^2 - b^2)/(2 * c) = c^2/(2 * c) + (a^2 - b^2)/(2 * c) = c/2 - (b^2 - a^2)/(2 * c)$$

Ma

$$b^2 = q^2 + h^2 \qquad e \qquad a^2 = p^2 + h^2$$

Quindi:

$$b^2 - a^2 = (q^2 + h^2) - (p^2 + h^2) = q^2 - p^2 .$$

Nella figura che segue sono disegnati tre quadrati concentrici. Il quadrato esterno ha lato lungo q (per il caso che $q > p$) e il quadrato interno ha lato lungo p. Nel caso fosse $p > q$, i due quadrati sarebbero il primo esterno e il secondo interno.

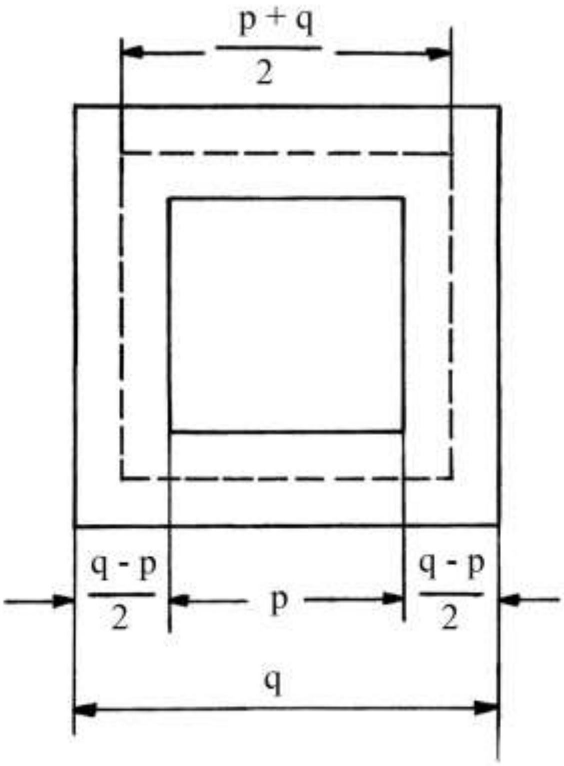
Il quadrato intermedio, *tratteggiato* in figura, ha lato lungo:

$$(q + p)/2 .$$

Il suo perimetro è:

perimetro quadrato tratteggiato = 4 * (q + p)/2 = 2 * (q + p) = 2 * c.

Il perimetro del quadrato *tratteggiato* è lungo il doppio della lunghezza del lato orizzontale, AC = c.



- -

<u>La lunghezza del raggio del cerchio inscritto nel triangolo 13-14-15</u>

Abbiamo già ricavata la lunghezza dell'altezza BH: è 12.

L'area del triangolo è:

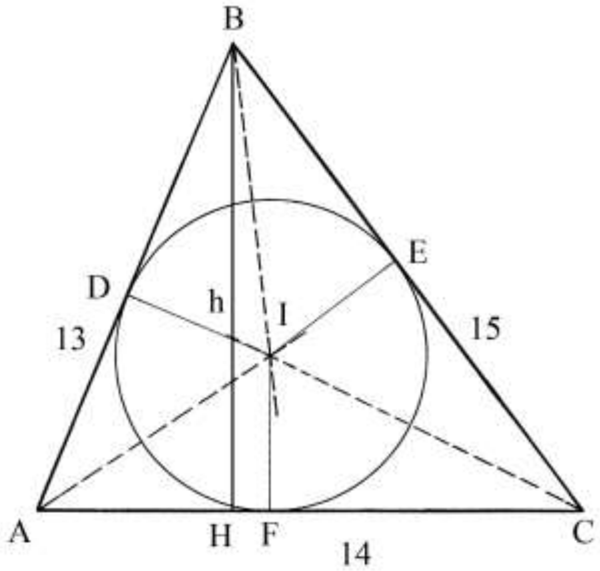
$$Area_{ABC} = (AC * BH)/2 = (14 * 12)/2 = 84.$$

Il perimetro *2*m* vale:

$$2*m = AB + BC + AC = 13 + 15 + 14 = 42.$$

Il semiperimetro *m* è:

m = 42/2 = 21.



Il cerchio inscritto ha centro nell'*incentro* I, che è l'intersezione delle bisettrici dei tre angoli interni del triangolo.

Usando la formula presentata a pagina 4, calcoliamo il valore del raggio *r* del cerchio:

$ID = IE = IF = r = Area_{ABC}/m = 84/21 = 4$.

Anche il raggio *r* del cerchio inscritto nel triangolo 13-14-15 ha lunghezza espressa da un numero intero.

\- APPROFONDIMENTO -

<u>L'area del triangolo 13-14-15 calcolata con il teorema di Pick</u>

Il teorema di Pick è dovuto al matematico austriaco Georg Alexander Pick (1859 – 1942), ucciso dai tedeschi nel campo di sterminio di Terezin nell'odierna Repubblica Ceca.

Il teorema calcola l'area di un poligono con lati rettilinei i cui vertici hanno coordinate espresse da numeri interi.

Nel caso del triangolo 13 – 14 – 15, il punto A è collocato nell'origine degli assi del piano cartesiano; le coordinate dei tre vertici sono:

* A: (0; 0);
* B: (5; 12);
* C: (0; 14).

Il punto H, piede dell'altezza BH, ha coordinate (5; 0).

ABC ha coordinate espresse da numeri interi, come pure le hanno i punti evidenziati al suo interno.

Il lato AC possiede 15 vertici, il punto B ne ha uno e i punti M e N sono altri due punti posizionati sul lato BC e con coordinate espresse da numeri interi. Il numero P di questi punti è:

P = 15 + 1 + 2 = 18.

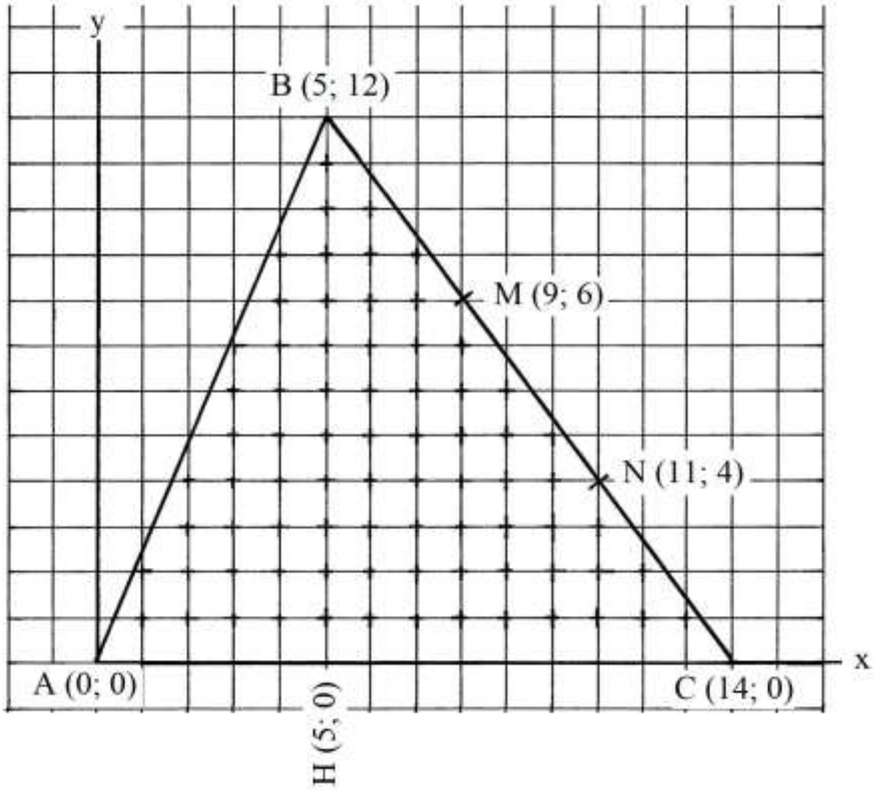
Il numero I dei punti interni al triangolo e con coordinate espresse da numeri interi è:

I = 76.

L'area S di ABC è dalla formula di Pick:

$S_{ABC} = I + P/2 – 1 = 76 + 18/2 – 1 = 76 + 9 – 1 = 84$.

L'area del triangolo ABC è effettivamente 84.



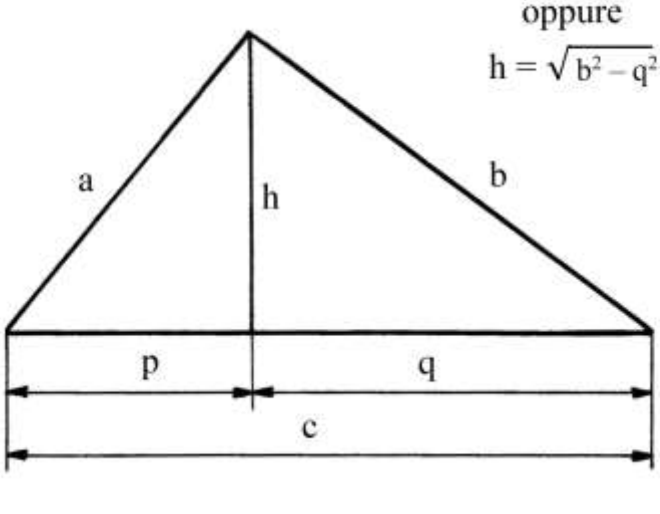
- -

L'origine delle due formule di Erone

Come abbiamo visto, il metodo di Erone per calcolare l'area di un triangolo di cui sono note le lunghezze dei lati segue due strade alternative:

1. Determinare la lunghezza della proiezione di un lato obliquo sulla base (p o q). Se essa è un numero naturale, Erone calcola l'altezza relativa applicando il teorema di Pitagora:

$$h = \sqrt{a^2 - p^2}$$
oppure
$$h = \sqrt{b^2 - q^2}$$

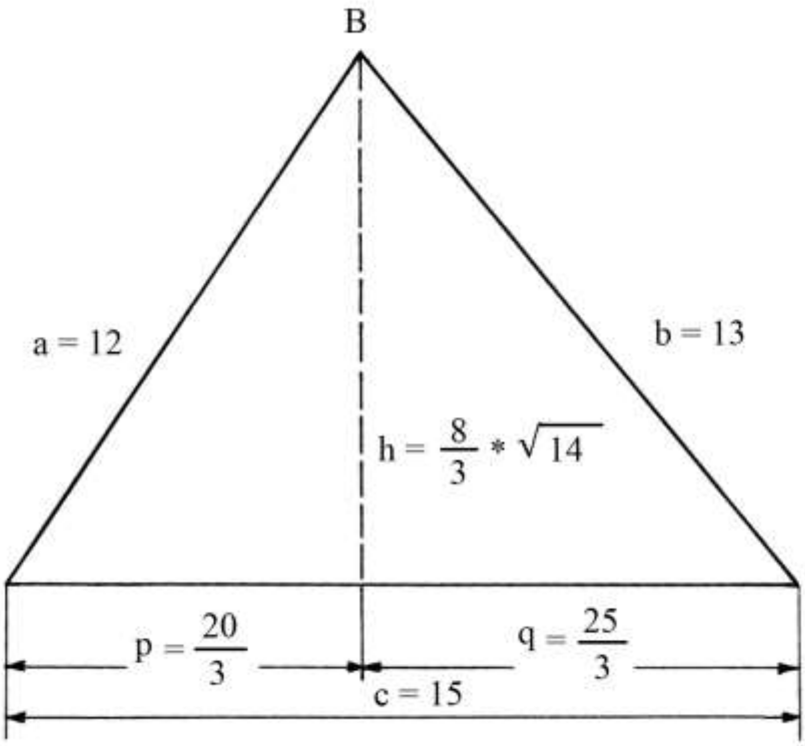


Nel caso che h sia rappresentato da un numero naturale, Erone usa la tradizionale formula per calcolare l'area di un triangolo

$$\text{Area} = \frac{c * h}{2}$$

2. Nel caso che le proiezioni p e q e l'altezza h abbiano lunghezze espresse da numeri irrazionali, Erone propone l'uso della formula basata sulla conoscenza del *semiperimetro*.

Il triangolo 12-13-15 è usato da Erone per dimostrare la necessità di impiego di questa ultima formula.



Le lunghezze di p, q e h sono rappresentate da numeri periodici o irrazionali, per cui è necessario impiegare la formula basata sul semiperimetro:

$q = (b^2 + c^2 - a^2)/(2 * c) = (13^2 + 15^2 - 12^2)/30 = (169 + 225 - 144)/30 = 25/3$
$p = c - q = 15 - 25/3 = 20/3$

$h^2 = a^2 - p^2 = 12^2 - (20/3)^2 = 144 - 400/9 = (1296 - 400)/9 = 896/9$
$h = \sqrt{(896/9)} = 8/3 * \sqrt{14}$.

$2 * m = a + b + c = 12 + 13 + 15 = 40$ da cui: $m = 20$.

L'area di ABC è data da:

$\text{Area}_{ABC} = \sqrt{[20 * (20 - 12) * (20 - 13) * (20 - 15)]} = \sqrt{(20 * 8 * 7 * 5)} =$
$= \sqrt{5600} = 20 * \sqrt{14}$.

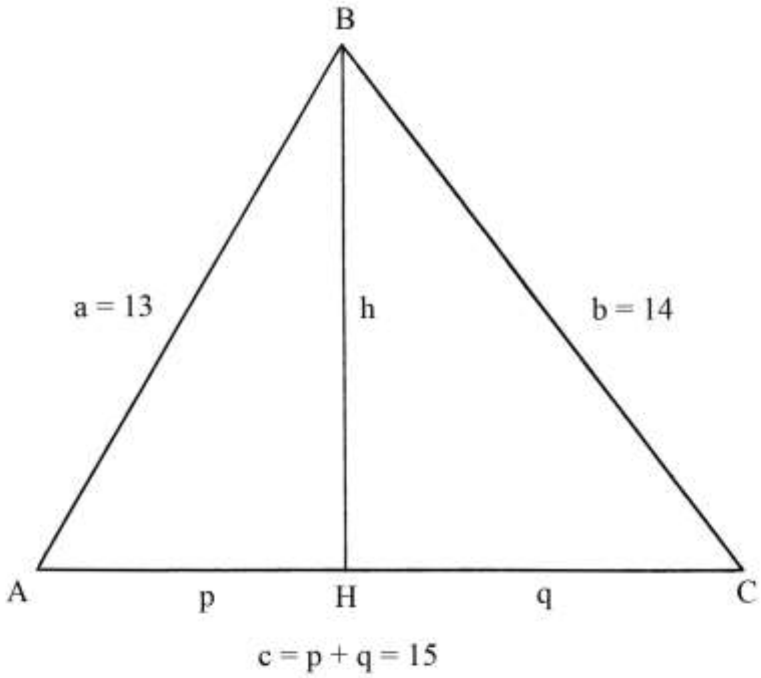
- APPROFONDIMENTO -

Come già visto in precedenza, tracciando l'altezza relativa al lato lungo 14 (che è quello disposto *orizzontalmente*), essa divide il triangolo ABC - con lati lunghi 13, 14 e 15 unità - in due triangoli rettangoli, i quali hanno lati lunghi in proporzione a due *terne pitagoriche*:

- 5 – 12 – 13 [$5^2 + 12^2 = 13^2$];
- 9 – 12 – 15 [$9^2 + 12^2 = 15^2$].

Modificando la disposizione dei lati, la situazione cambia.

Ponendo il lato lungo 15 quale base orizzontale, il segmento p è lungo:



$p = (a^2 + c^2 – b^2)/(2 * c) = (169 + 225 – 196)/30 = 6,6.$

Il segmento q è lungo:

$q = c – p = 15 – 6,6 = 8,4$.

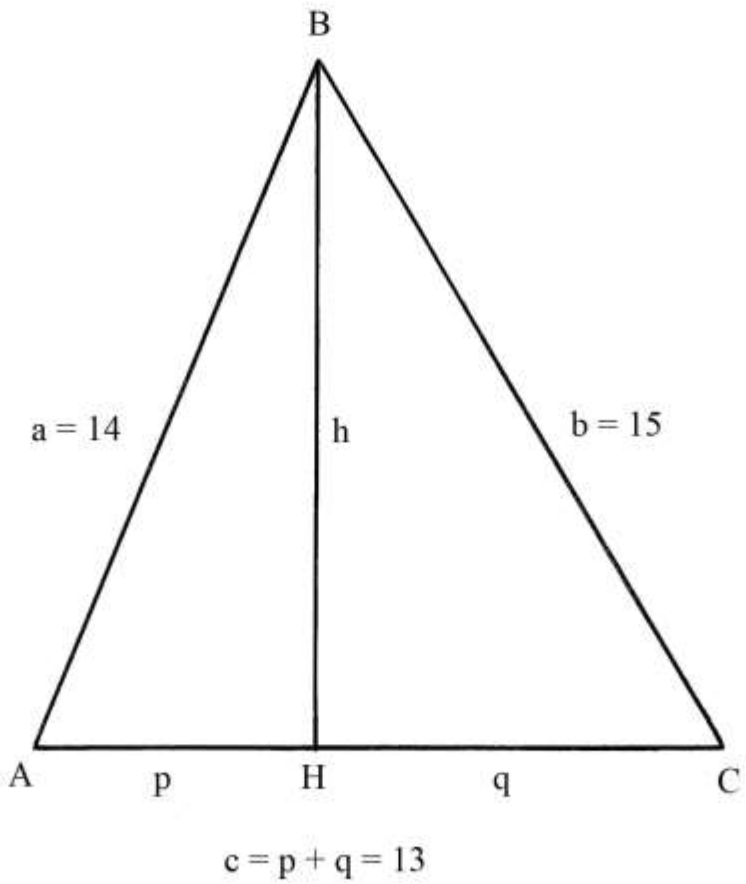
L'altezza BH è lunga:

$BH^2 = AB^2 – AH^2$ da cui

$BH = \sqrt{(13^2 – 6,6^2)} = \sqrt{(169 – 43,56)} = \sqrt{125,44} = 11,2.$

L'altezza BH divide ABC in due triangoli rettangoli: le lunghezze dei loro lati *non* formano alcuna terna pitagorica.

Infine, il terzo caso è quello del triangolo che ha la base AC lunga 13:



Il segmento p è lungo:

$p = (a^2 + c^2 – b^2)/(2 * c) = (196 + 169 – 225)/(2 * 13) = 140/26 = 70/13 \approx 5,3846.$

Il segmento q è lungo:

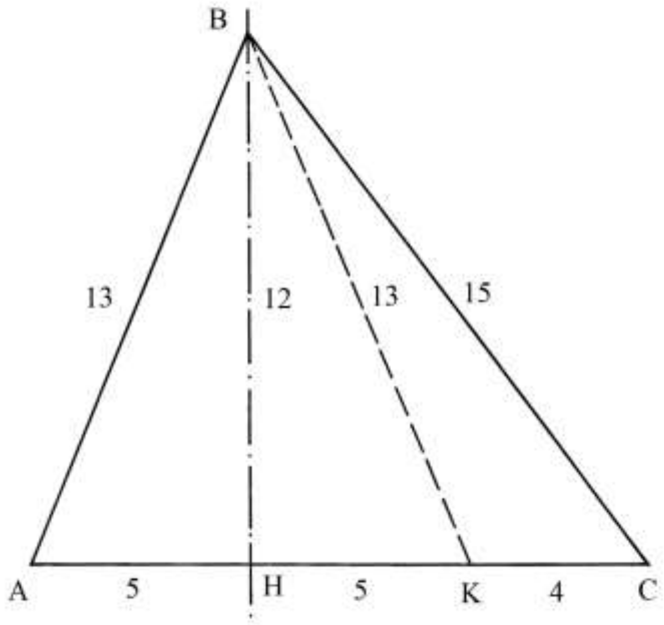
$q = c – p = 13 – 70/13 = (169 – 70)/13 = 99/13 \approx 7,6154.$

L'altezza BH è:

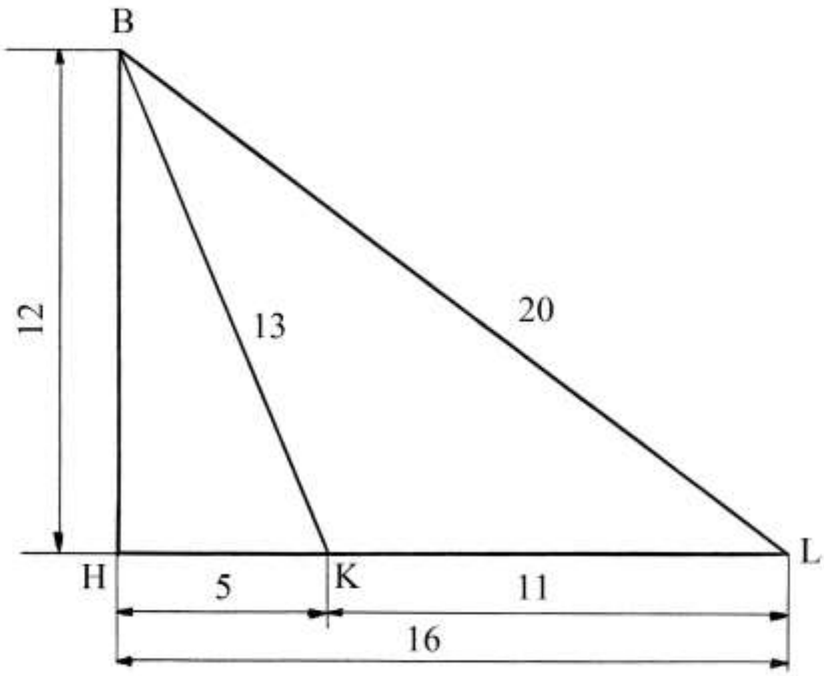
$BH = \sqrt{(AB^2 – AH^2)} = \sqrt{[14^2 – (70/13)^2]} = \sqrt{(196 – 4900/169)} =$
$= \sqrt{[(33124 – 4900)/169]} = \sqrt{(28224/169)} = 168/13 \approx 12,923.$

Anche in questo caso le lunghezze dei triangoli rettangoli generati dall'altezza BH *non* formano terne pitagoriche.

Il triangolo 13 – 14 – 15 può essere scomposto in un triangolo isoscele ABK e in un triangolo scaleno KBC:



Sul triangolo rettangolo BHK può essere costruito il triangolo rettangolo BHL che ha ipotenusa e cateti lunghi:
*	ipotenusa BL = 20;
*	cateto HL = 16;
*	cateto HB = 12.

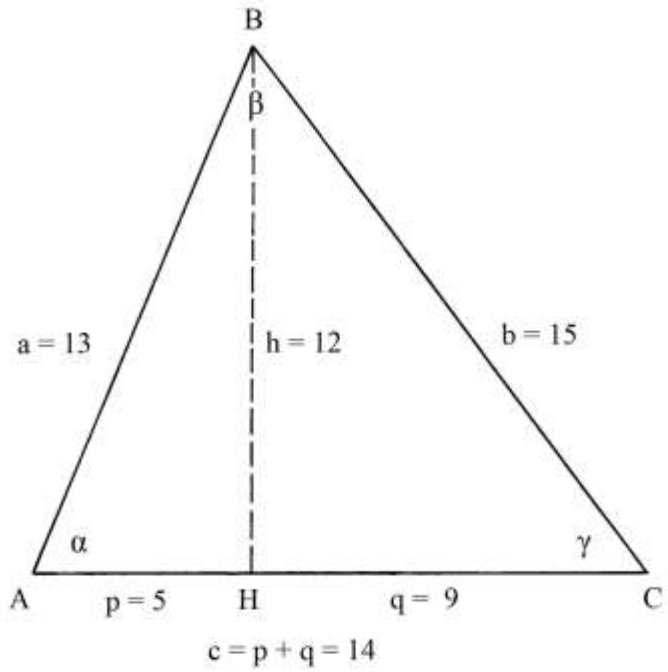


Questo secondo triangolo rettangolo ha lati le cui lunghezze formano la terna derivata 12-16-20 legata alla terna primitiva 3-4-5.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Il teorema del coseno

La figura che segue riproduce una figura precedente con l'indicazione dei tre angoli interni del triangolo: α (nel vertice A), β (in B) e γ (in C).



Riprendiamo in considerazione la formula già trovata per calcolare la lunghezza della proiezione *p* di AB sul lato orizzontale:

$$p = (a^2 + c^2 - b^2)/(2 * c) .$$

La formula è trasformata come segue:

$$a^2 + c^2 - b^2 = 2 * c * p \quad [\text{oppure } AB^2 + AC^2 - BC^2 = 2 * AC * AH]$$
$$a^2 + c^2 - 2 * c * p = b^2 \quad [\text{oppure } AB^2 + AC^2 - 2 * AC * AH = BC^2]$$

La formula può essere spiegata nei seguenti termini: il quadrato di un lato (ad esempio *BC* = *b*) è uguale alla somma dei quadrati degli altri due lati (*AB* = *a* e *AC* = *c*) *meno* il doppio prodotto di uno dei due ultimi lati (*a* oppure *c*) per la rispettiva proiezione del singolo lato sulla base AC (*q* oppure *p*).

Questa regola è nota anche come *teorema di Carnot* (dal nome del matematico francese Lazare Carnot, 1753 – 1823). Il teorema si deve però al matematico e astronomo persiano Al-Kashi (1380 circa – 1429).

È conosciuto come *teorema del coseno*.

Le lunghezze dei segmenti AH e HC possono essere calcolate con la trigonometria.

I triangoli ABH e BHC sono rettangoli.

Il cateto AH è:

$$p = AH = AB * \cos\alpha = a * \cos\alpha$$

e il cateto HC vale

$$q = HC = BC * \cos\gamma = b * \cos\gamma.$$

Sostituendo nelle formule precedenti a *p* il valore appena calcolato si ha:

$$a^2 + c^2 - 2 * c * \cos\alpha = b^2.$$

- -

Triangoli di Erone

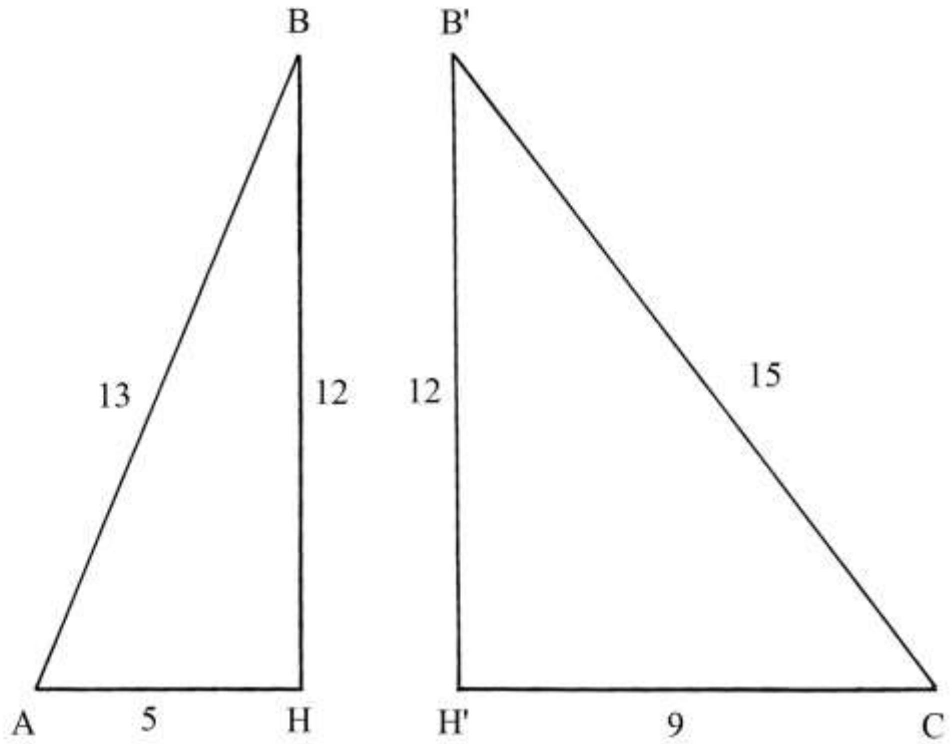
Un triangolo di Erone deve avere le lunghezze dei lati e di almeno un'altezza e l'area espressi da *numeri interi* o *razionali*: un numero razionale è ottenuto dal rapporto di due numeri interi, quali ad esempio:

$\frac{1}{2} = 0{,}5$ e $10/4 = 2{,}5$. Sono numeri *irrazionali* $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ e π.

Solo i triangoli isosceli e quelli scaleni possono essere triangoli di Erone. Un triangolo equilatero non può esserlo, come vedremo con un successivo esempio.

Il triangolo scaleno 13 – 14 – 15 (descritto in precedenza) è un triangolo di Erone.

Questo triangolo fornisce una spiegazione riguardo all'origine dei triangoli di Erone: sono dati due triangoli rettangoli formati da terne pitagoriche e con un cateto di uguale lunghezza (BH = B'H' = 12); i due triangoli sono uniti lungo il cateto comune, BH e B'H' nella figura che segue:



Il triangolo 13-14-15 fu utilizzato da:

- Erone;
- Varrone (Marco Terenzio Varrone, 116-27 a.C.);
- i Gromatici *Marcus Iunius Nipsus* (II secolo d.C.) e Epafrodito (II – III secolo);
- Boezio (475-526);
- forse Gerberto di Aurillac (Papa Silvestro II, 940 circa – 1003);
- Leonardo Fibonacci (1170 circa – dopo il 1242), nella *Practica Geometrie*;
- Piero della Francesca (1412? – 1492), nel *Trattato d'abaco* (fogli 80 *recto*, 80 *verso*, 81 *recto*-a, 81 *verso*, 82 *recto*);
- Giorgio Valla (1447 – 1500) nel "*De expetendis et fugiendis rebus opus*", pubblicato a Venezia nel 1501;
- Giovanni Sfortunati (1485 - ?) nel "*Nuovo Lume*", nuovamente pubblicato a Venezia nel 1561;
- Niccolò Fontana, detto Tartaglia (circa 1499 – 1557);

- Lorenzo Forestani (1585 – 1623), nella sua “*Pratica d’Arithmetica e Geometria*” stampata a Siena nel 1682.

La costanza nel tempo e presso numerosi e importanti geometri dell’uso di questo triangolo può essere spiegata con le sue interessanti proprietà geometriche (possesso di lunghezze e aree rappresentate da numeri interi) che evitavano il ricorso a complesse operazioni quali l’estrazione di radici quadrate.

Essendo caratterizzati da lunghezze e aree espresse con numeri interi, i triangoli di Erone furono e sono importanti per le applicazioni tecniche poiché semplificano calcoli e misurazioni.

Anche il perimetro e il semiperimetro sono numeri interi.

L’area è sempre un numero multiplo di 6.

La tabella che segue descrive i primi triangoli di Erone con i lati più corti lunghi fino a 17; essi sono i triangoli *primitivi*: quelli *derivati* sono ottenuti dai primi moltiplicando le lunghezze dei lati per una uguale costante.

I triangoli sono indicati per lunghezza crescente del lato più corto:

Lunghezze dei lati	Perimetro	Semiperimetro	Area del triangolo	Tipo di triangolo
3 – 4 – 5	12	6	6	Rettangolo (terna primitiva)
3 – 25 – 26	54	27	36	Scaleno
4 – 13 – 15	32	16	24	Scaleno
4 – 51 – 53	108	54	90	Scaleno
5 – 5 – 6	16	8	12	Isoscele
5 – 5 – 8	18	9	12	Isoscele
5 – 12 – 13	30	15	30	Rettangolo (terna primitiva)
5 – 29 – 30	64	32	72	Scaleno
6 – 25 – 29	60	30	60	Scaleno
7 – 15 – 20	42	21	42	Scaleno
7 – 24 – 25	56	28	84	Rettangolo (terna primitiva)
8 – 15 – 17	40	20	60	Rettangolo (terna primitiva)
8 – 29 – 35	72	36	84	Scaleno
9 – 10 – 17	36	18	36	Scaleno
9 – 40 – 41	90	45	330	Rettangolo (terna primitiva)
10 – 13 – 13	36	18	60	Isoscele
10 – 17 – 21	48	24	84	Scaleno
11 – 13 – 20	44	22	66	Scaleno
11 – 60 – 61	132	66	330	Rettangolo (terna primitiva)
12 – 17 – 25	54	27	90	Scaleno
12 – 35 – 37	84	42	210	Rettangolo (terna primitiva)
13 – 13 – 24	50	25	60	Isoscele
13 – 14 – 15	42	21	84	Scaleno
13 – 20 – 21	54	27	126	Scaleno

13 – 35 – 37	84	42	210	Rettangolo (terna primitiva)
13 – 37 – 30	80	40	180	Scaleno
13 – 37 – 40	90	45	240	Scaleno
13 – 40 – 45	98	49	252	Scaleno
13 – 68 – 75	156	78	390	Scaleno
13 – 84 – 85	182	91	546	Rettangolo (terna primitiva)
15 – 28 – 41	84	42	126	Scaleno
15 – 34 – 35	84	42	252	Scaleno
15 – 37 – 44	96	48	264	Scaleno
15 – 41 – 52	108	54	234	Scaleno
16 – 63 – 65	144	72	504	Rettangolo (terna primitiva)
17 – 25 – 26	68	34	204	Scaleno
17 – 25 – 28	70	35	210	Scaleno
17 – 28 – 39	84	42	210	Scaleno
17 – 39 – 44	100	50	330	Scaleno
17 – 55 – 60	132	66	462	Scaleno

I numeri che esprimono le aree dei triangoli elencati nella tabella sono tutti divisibili per 6 (e per 1, 2 e 3).

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Un poligono è detto *equabile* se la sua area è, in valore assoluto, uguale al suo perimetro.

Dalla precedente tabella è possibile estrarre i dati relativi a cinque triangoli di Erone che godono di questa proprietà:

Terne	Perimetri	Aree
5 – 12 – 13	30	30
6 – 8 – 10 (terna derivata da quella 3-4-5)	24	24
6 – 25 – 29	60	60
7 – 15 – 20	42	42
9 – 10 – 17	36	36

- APPROFONDIMENTO -

Terne primitive e derivate

Nella precedente tabella sono citate alcune *terne primitive*. Questo paragrafo mira a fornire ulteriori informazioni sull'argomento.

Una terna pitagorica è detta *primitiva* quando i tre numeri che la compongono sono fra loro *primi* (e cioè non possiedono un divisore comune diverso da 1), come è il caso dei seguenti esempi:

* 3, 4, 5 ;
* 5, 12, 13 ;
* 8, 15, 17 ;
* 7, 24, 25 ;
* 12, 35, 37.

Tutte le terne pitagoriche *primitive* sono formate da *un* numero pari e da *due* numeri dispari.
A ogni terna pitagorica corrisponde un triangolo rettangolo e viceversa.

Le prime 18 terne pitagoriche primitive sono indicate nella seguente tabella:

[3, 4, 5]	[5, 12, 13]	[7, 24, 25]
[8, 15, 17]	[9, 40, 41]	[11, 60, 61]
[12, 35, 37]	[13, 84, 85]	[16, 63, 65]
[20, 21, 29]	[20, 99, 101]	[28, 45, 53]
[33, 56, 65]	[36, 77, 85]	[39, 80, 89]
[48, 55, 73]	[60, 91, 109]	[65, 72, 97]

Il terzo valore che compare nelle terne è sempre inferiore a 100, tranne che in quelle [20, 99, 101] e [60, 91, 109].

Le terne primitive con il terzo numero compreso fra 100 e 300 sono le seguenti:

[20, 99, 101]	[60, 91, 109]	[15, 112, 113]
[44, 117, 125]	[88, 105, 137]	[17, 144, 145]
[24, 143, 145]	[51, 140, 149]	[85, 132, 157]
[119, 120, 169]	[52, 165, 173]	[19, 180, 181]
[57, 176, 185]	[104, 153, 185]	[95, 168, 193]
[28, 195, 197]	[84, 187, 205]	[133, 156, 205]
[21, 220, 221]	[140, 171, 221]	[60, 221, 229]
[105, 208, 233]	[120, 209, 241]	[32, 255, 257]
[23, 264, 265]	[96, 247, 265]	[69, 260, 269]
[15, 252, 277]	[160, 231, 281]	[161, 240, 289]
[68, 285, 293] .		

Se i tre numeri che formano una terna primitiva sono moltiplicati per lo stesso numero intero si ricava una *terna pitagorica derivata* come mostrano gli esempi che seguono:

* [3 – 4 – 5] * 2 = [6 – 8 – 10] ;
* [3 – 4 – 5] * 3 = [9 – 12 – 15] ;
* [3 – 4 – 5] * 4 = [12 – 16 – 20] ;
* [3 – 4 – 5] * 5 = [15 – 20 – 25] ;
* [3 – 4 – 5] * 6 = [18 – 24 – 30] .

È anche possibile moltiplicare i componenti di una terna primitiva per un numero razionale minore di 1, ad esempio 0,5:

[3 – 4 – 5] * 0,5 = [1,5 – 2 – 2,5] .

La terna [1,5 – 2 – 2,5] è anch'essa pitagorica.

Proprietà generali delle terne pitagoriche

È facile verificare che le terne pitagoriche formate da numeri interi possiedono le seguenti proprietà:

* un numero è sempre divisibile per 3;
* un altro numero è sempre divisibile per 5 (in alcuni casi lo stesso numero è divisibile sia per 3 che per 5);

* il prodotto dei due numeri più piccoli (corrispondenti alle lunghezze dei cateti) è sempre divisibile per 12;
* il prodotto dei tre numeri di una terna è sempre divisibile per 60.

- -

Il teorema e le regole di Yiu

Il matematico Paul Yiu, della Florida Atlantic University negli Stati Uniti, ha dedicato un importante studio al tema dei triangoli di Erone, documento citato in bibliografia.

Egli ha stabilito il seguente teorema:

"*Un triangolo di Erone primitivo può essere scomposto in due triangoli pitagorici purché possieda almeno un'altezza misurata da un numero intero*".

Paul Yiu ha dedotte le regole che seguono:

1. Un triangolo pitagorico primitivo non può essere scomposto.
2. Un triangolo primitivo di Erone può essere scomposto in due triangoli pitagorici con un cateto comune.
3. Se un triangolo di Erone non pitagorico possiede due altezze misurate da numeri interi esso non è primitivo.

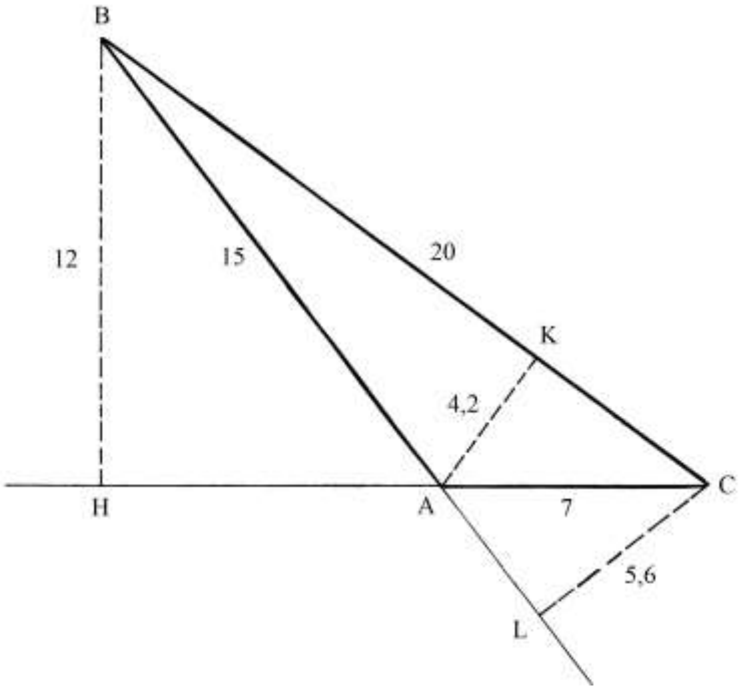
Origine dei triangoli di Erone

I perimetri di tutti i triangoli eroniani sono espressi da numeri interi: due lati hanno lunghezze rappresentate da numeri dispari e la loro somma è un numero pari che aggiunto alla lunghezza del terzo lato, che è pari, conserva la proprietà della parità della lunghezza del perimetro.

L'area di un triangolo è data dalla formula:

$$\text{Area triangolo} = \frac{\text{base * altezza}}{2}$$

Dato che i triangoli di Erone hanno le lunghezze dei lati e le aree rappresentati da numeri razionali, l'area è sempre un *multiplo* della lunghezza di un lato e l'altezza riferita a questo lato è anch'essa un *numero razionale*, come è facilmente dimostrabile. Facciamo l'esempio del triangolo scaleno 7-15-20:



Le altezze relative ai lati AB e AC cadono sui prolungamenti dei due lati e sono rispettivamente CL e BH.

La terza altezza, AK, relativa al lato BC è interna al triangolo.

L'altezza AK è lunga:

$AK = 2 * Area_{ABC}/BC = 2 * 42/20 = 84/20 = 4,2$ che è un numero razionale.

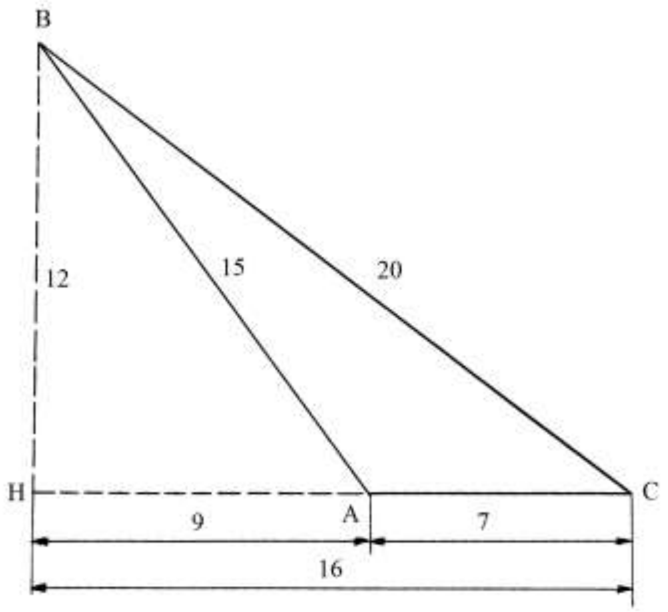
L'altezza BH è:

$BH = 2 * Area_{ABC}/AC = 2 * 42/7 = 84/7 = 12$.

Infine, l'altezza CL è lunga:

$CL = 2 * Area_{ABC}/AB = 2 * 42/15 = 5,6$ anch'esso numero razionale.

Il triangolo 7-15-20 deriva dalla scomposizione del triangolo pitagorico derivato BHC che ha lati lunghi 12-16-20 ed è ricavato dal triangolo pitagorico primitivo 3-4-5 moltiplicando le lunghezze dei suoi lati per 4:

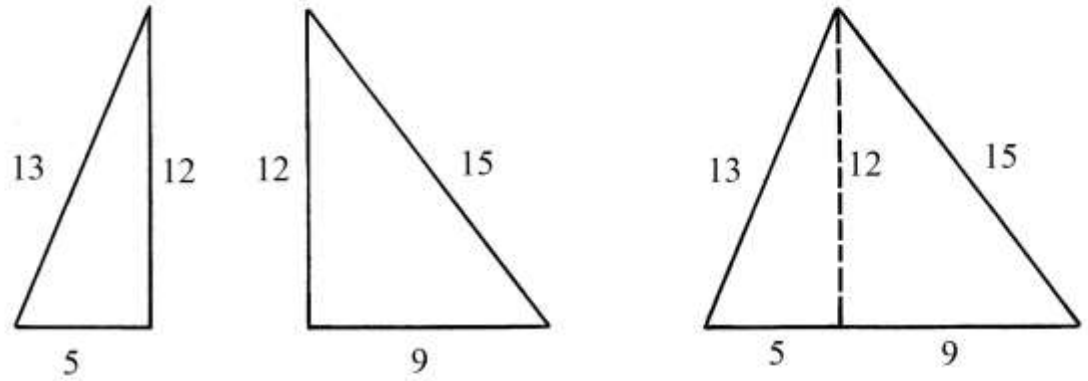


Il triangolo 12-16-20 è scomponibile in due triangoli:
* il triangolo eroniano primitivo 7-15-20;
* il triangolo rettangolo pitagorico derivato 9-12-15.

Il segmento BA è l'ipotenusa di BHA e un lato di ABC.

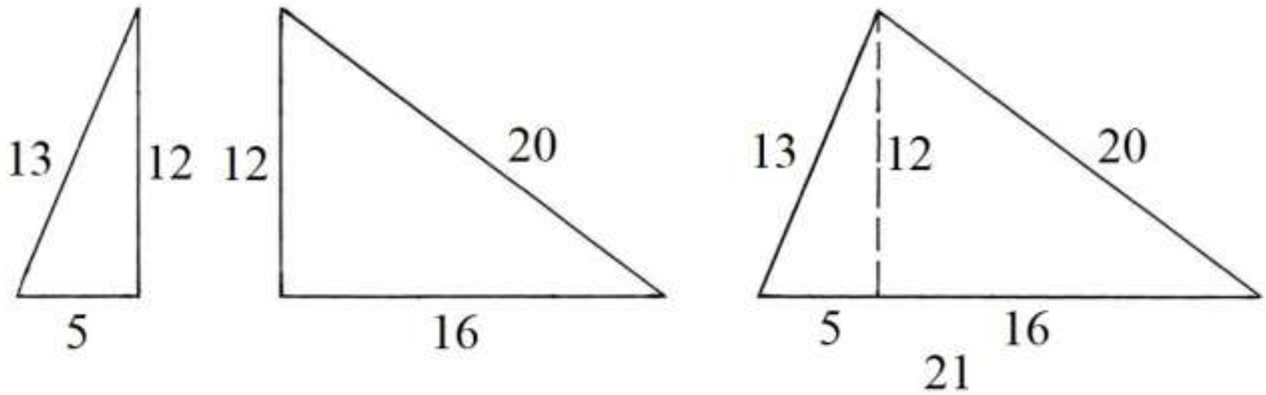
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Per costruire dei triangoli che possiedano lati e almeno un'altezza espressi da numeri interi è necessario *unire* due triangoli rettangoli che possiedano un cateto di *uguale lunghezza* che diviene un'altezza del nuovo triangolo: è il caso dei triangoli 5 – 13 – *12* e 9 – *12* – 15 che danno vita al triangolo 13 – 14 – 15 e cioè 13 – (5 + 9 = 14) – 15.



Tutti e tre i triangoli sono *eroniani*.

Altri esempi di triangoli così formati sono i seguenti:
* il triangolo 5 – *12* – 13 aggiunto a quello *12* – 16 – 20 crea il triangolo 13 – 20 – 21:



* il triangolo rettangolo 7 – *24* – 25 unito a quello 18 – *24* – 30 (multiplo della terna 3-4-5 secondo un fattore 6) genera il triangolo isoscele 25 – (7 + 18 = 25) – 30 che è eroniano;

* il triangolo rettangolo 7 – *24* – 25 fuso con quello 10 – *24* – 26 origina il triangolo scaleno 25 – (7 + 10 = 17) – 26 che è anch’esso un triangolo di Erone;

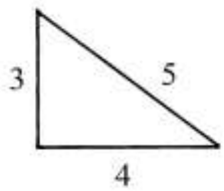
* il triangolo rettangolo 10 – *24* – 26 unito con un identico 10 – *24* – 26 dà vita al triangolo isoscele 20 – 26 – 26, che è eroniano.

\- APPROFONDIMENTO -

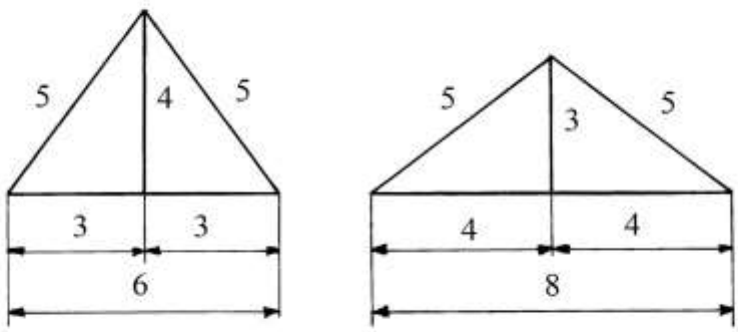
<u>Unione di due triangoli rettangoli identici</u>

Unendo due triangoli rettangoli eroniani, identici, lungo un cateto viene generato un altro triangolo eroniano *isoscele*:

Il triangolo rettangolo 3-4-5 possiede due cateti lunghi 3 e 4:



Due triangoli 3-4-5 possono essere assemblati in due modi diversi: unendoli lungo i cateti lunghi 4 oppure lungo i cateti lunghi 3:



Nel primo caso è ottenuto il triangolo isoscele 5-5-6, nel secondo il triangolo isoscele 5-5-8. Entrambi sono triangoli di Erone e hanno area uguale a 12.

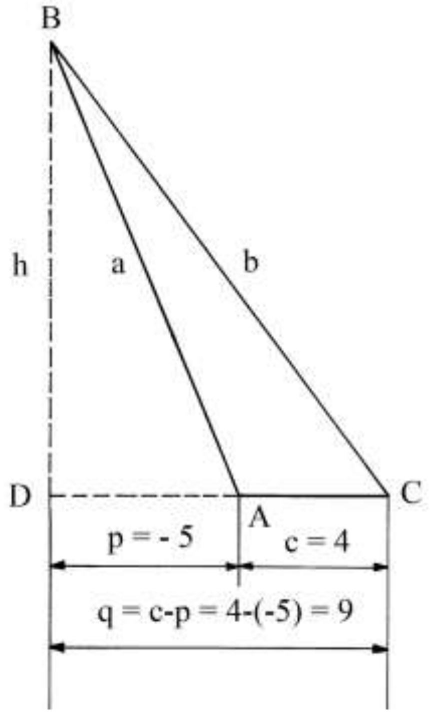
Unendo due triangoli rettangoli con lati lunghi 5-12-13 si possono ricavare i triangoli isosceli 10-13-13 oppure 13-13-24: tutti e tre sono triangoli di Erone.

Un terzo esempio è offerto dal triangolo rettangolo 7-24-25: unendo due triangoli di queste dimensioni sono generali due triangoli isosceli con lati lunghi 14-25-25 oppure 25-25-48. Tutti e tre fanno parte del gruppo dei triangoli di Erone.

- -

<u>Il triangolo di Erone 4 – 13 – 15</u>

Il triangolo 4 – 13 – 15 è *scaleno* come spiega la figura che segue (e *ottusangolo* perché l'angolo in A è maggiore di 90°):



I lati sono lunghi:

- AB = a = 13;
- BC = b = 15;
- AC = c = 4.

Prolungare verso sinistra il lato AC.

Il segmento p, proiezione di a sul lato AC e giacente sul suo prolungamento è:

$$p = (a^2 + c^2 – b^2)/(2 * c) = (13^2 + 4^2 – 15^2)/(2 * 4) = (169 + 16 – 225)/8 =$$
$$= –40/8 = –5.$$

Il risultato *negativo* non deve stupire: l'altezza relativa al lato AC cade *fuori* dal lato stesso, a sinistra di A e sul prolungamento: pertanto la lunghezza di AD è uguale a -5.

A sua volta il segmento p (proiezione del lato BC su DC) è lungo:

$$q = (b^2 + c^2 – a^2)/(2 * c) = (15^2 + 4^2 – 13^2)/(2 * 4) = (225 + 16 – 169)/8 =$$
$$= 72/8 = 9.$$

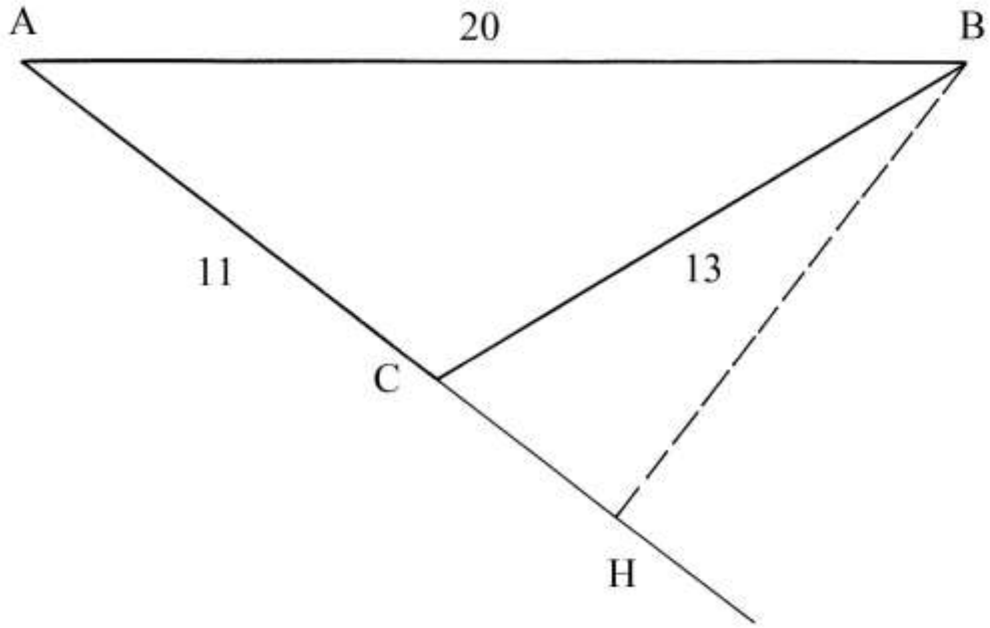
Infatti:

$$q = c - p = 4 - (-5) = 9$$

Il segmento q è lungo DC.

<u>Il triangolo di Erone 11-13-20</u>

Un triangolo *ottusangolo* ha lati lunghi 11, 13 e 20 unità:



Il triangolo ha l'angolo ACB *ottuso*.

Erone descrisse la procedura per calcolare un'altezza e l'area del triangolo.

Prolungare il lato più corto, che è AC.

Dal vertice B abbassare la perpendicolare al prolungamento di AC: il segmento BH è l'altezza, esterna al triangolo, relativa al lato AC. Essa cade fuori del poligono a causa della presenza dell'angolo ottuso.

Calcolare i quadrati delle lunghezze dei tre lati:

* $AB^2 = 20^2 = 400$;
* $AC^2 = 11^2 = 121$;
* $BC^2 = 13^2 = 169$.

La somma dei quadrati di AC e di BC è: $AC^2 + BC^2 = 121 + 169 = 290$ che è inferiore al quadrato di AB che è 400.

Erone omise alcuni passaggi che sono necessari per la soluzione del problema. In questo articolo sono descritti tutti i passi occorrenti.

Il triangolo ABH è *rettangolo* e AB ne è l'ipotenusa. Anche CBH è un triangolo rettangolo la cui ipotenusa è BC.

Valgono le seguenti relazioni:

a) $HB^2 = CB^2 - CH^2$.

Indicando con x la lunghezza di CH, la precedente equazione diviene:

$$HB^2 = 13^2 - x^2 \qquad (1)$$

b) $AB^2 = AH^2 + HB^2$

$20^2 = (AC + CH)^2 + HB^2$

$20^2 - (11 + x)^2 = HB^2$ (2).

Confrontando le equazioni (1) e (2) si ha:

$13^2 - x^2 = 20^2 - (11 + x)^2$

$169 - x^2 = 400 - (121 + 22x + x^2)$

$400 - 169 - 121 = 22x$

$110 = 22\,x$ da cui $x = 5 = CH$.

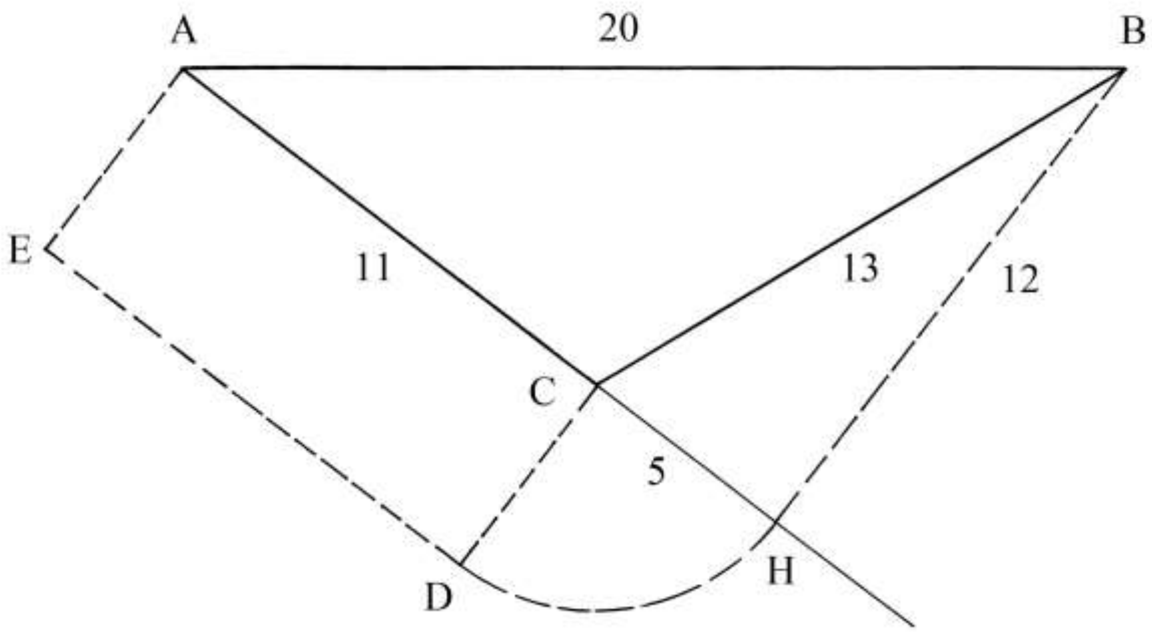
Il segmento AH è lungo $AH = AC + CH = 11 + 5 = 16$.

Applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo CBH, viene ricavata l'altezza HB:

$HB = \sqrt{(CB^2 - CH^2)} = \sqrt{(13^2 - 5^2)} = \sqrt{(169 - 25)} = \sqrt{144} = 12.$

La differenza $(AB^2 - AC^2 - CB^2)$, che è 110, è uguale al doppio dell'area del rettangolo che ha lati lunghi AC e CH e cioè ACDE:

$\text{Area}_{ACDE} = (AB^2 - AC^2 - CB^2)/2 = (20^2 - 11^2 - 13^2)/2 = (400 - 121 - 169)/2 =$
$= 110/2 = 55.$

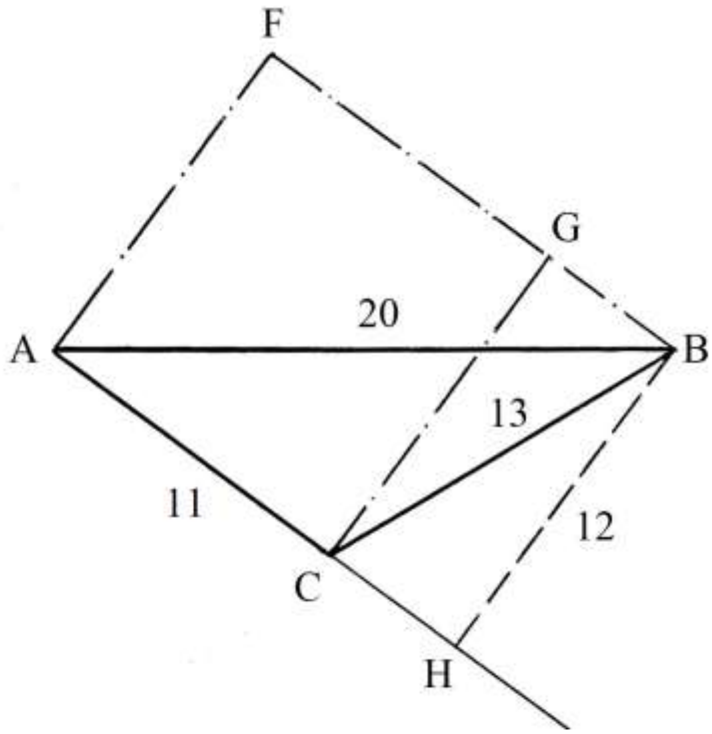


L'area del triangolo ABC è data da:

$\text{Area}_{ABC} = (AC * HD)/2 = (11 * 12)/2 = 132/2 = 66.$

Il rettangolo AFGC che ha lati lunghi HB e AC ha area:

Area AFGC = HB*AC = 12*11 = 132 che è il *doppio* dell'area del triangolo ABC:

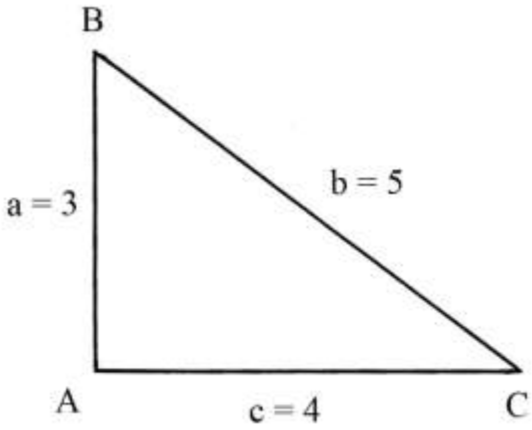


La soluzione del problema fu attuata da Erone con la procedura che contriene i seguenti passi:

* moltiplicare CB per se stesso: 13*13 = 169 ;
* moltiplicare AC per se stesso: 11*21 = 121 ;
* moltiplicare AB per se stesso: 20*20 = 400 ;
* sommare i quadrati di CB e di AC: 169 + 121 = 290 ;
* sottrarre l'ultima somma dal quadrato di AB: 400 – 290 = 110 ;
* dividere per 2 l'ultimo risultato: 110 : 2 = 55 ;
* dividere l'ultimo quoziente per la lunghezza di AC: 55 : 11 = 5, che è la lunghezza di CH ;
* sottrarre il quadrato di CH dal quadrato di BC [*e cioè applicare il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo CBH*]: $BC^2 – CH^2 = 13^2 – 5^2 = 169 – 25 = 144$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{144} = 12$, che è la lunghezza di BH ;
* moltiplicare l'altezza BH per la lunghezza di AC: BH*AC = 12*11 = 132 ;
* dividere per 2: 132 : 2 = 66, che è l'area del triangolo ABC.

Il caso dei triangoli rettangoli

Nel caso del triangolo rettangolo – ad esempio quello 3–4– 5 – accade che la proiezione del cateto verticale sul lato di base sia ridotta a un punto e cioè a 0.



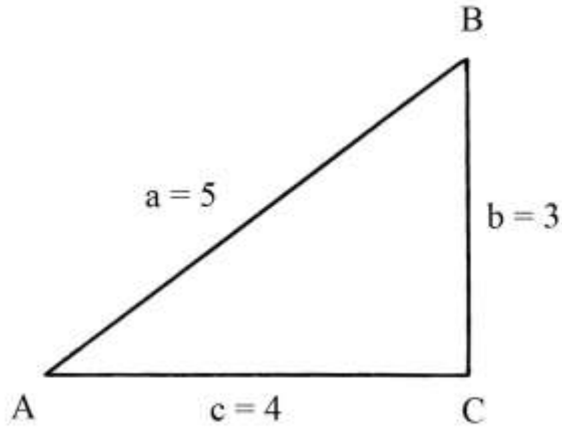
In questo caso, la proiezione di BA (= p) si riduce a 0:

$q = (b^2 + c^2 – a^2)/(2 * c) = (25 + 16 – 9)/(2 * 4) = 32/8 = 4.$

$p = (a^2 + c^2 – b^2)/(2 * c) = (9 + 16 – 25)/8 = 0/8 = 0.$

Quindi:
$q = c = 4$ e $p = 0$.

Nel caso simmetrico mostrato nella figura che segue accade qualcosa di simile:

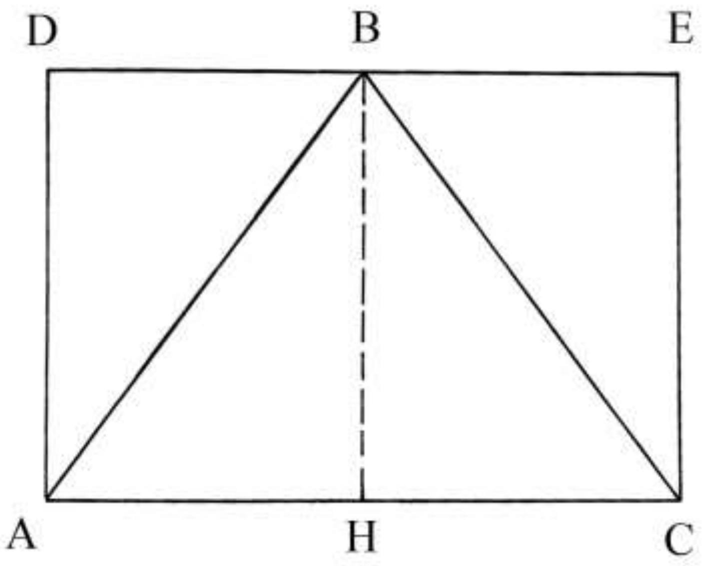


$q = (b^2 + c^2 – a^2)/(2 * c) = (9 + 16 – 25)/(2 * 4) = 0/8 = 0.$

Quindi $p = c = 4$.

Triangolo isoscele

ABC è un triangolo isoscele (ma non è un triangolo di Erone): i suoi lati obliqui sono lunghi 10 e la base è lunga 12:



Deve essere calcolata l'area.
Dal vertice B abbassare la perpendicolare fino al punto H sulla base AC.
Per il punto B tracciare una parallela al lato AC.
Dai vertici A e C elevare le parallele all'altezza BH: è disegnato il rettangolo ADEC.
Con il teorema di Pitagora applicato al triangolo rettangolo ABH viene ricavata l'altezza BH:

$$BH = \sqrt{[AB^2 - (AC/2)^2]} = \sqrt{[10^2 - (12/2)^2]} = \sqrt{(100 - 36)} = \sqrt{64} = 8.$$

L'area del rettangolo ADEC è:

$$\text{Area}_{ADEC} = AD*AC = BH*AC = 8*12 = 96.$$

L'area del triangolo ABC è la metà di quella di ADEC e cioè 48.

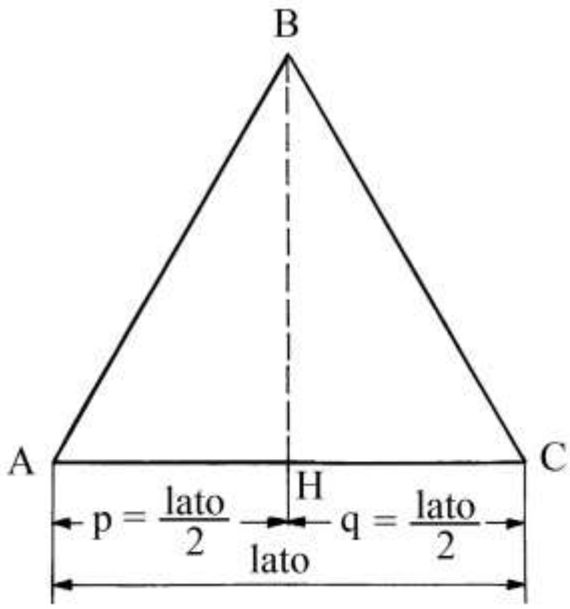
I triangoli equilateri

Un triangolo equilatero non è un triangolo di Erone perché l'altezza e l'area non sono misurate con numeri interi, anche nel caso che i suoi lati lo siano.
Il perimetro del triangolo equilatero è:

$$\text{perimetro}_{ABC} = 2*m = 3*\text{lato}$$

Il *semiperimetro* m è:

$$m = 3*\text{lato}/2 .$$



Applicando la formula di Erone, l'area è:

$$\text{Area}_{ABC} = \sqrt{[m * (m - lato) * (m - lato) * (m - lato)]} =$$
$$= \sqrt{[3 * lato/2 * (3 * lato/2 - lato)^3]} = \sqrt{\{3 * lato/2 * [(3 * lato - 2 * lato)/2]^3\}} =$$
$$= \sqrt{(3 * lato/2 * lato^3/8)} = \sqrt{(3/16 * lato^4)} = (\sqrt{3})/4 * lato^2.$$

Nel precedente risultato compare il fattore $\sqrt{3}$ che è un numero *irrazionale* (1,732…) che moltiplicato per qualsiasi numero intero non fornisce alcun numero intero.

Anche nella formula che fornisce il valore dell'altezza è presente il fattore $\sqrt{3}$ e quindi il risultato non è un numero intero:

$$h = BH = \sqrt{(AB^2 - AH^2)} = \sqrt{[lato^2 - (lato/2)^2]} = \sqrt{(lato^2 - lato^2/4)} =$$
$$= \sqrt{(3/4 * lato^2)} = (\sqrt{3})/2 * lato.$$

- APPROFONDIMENTO -

<u>I triangoli quasi equilateri</u>

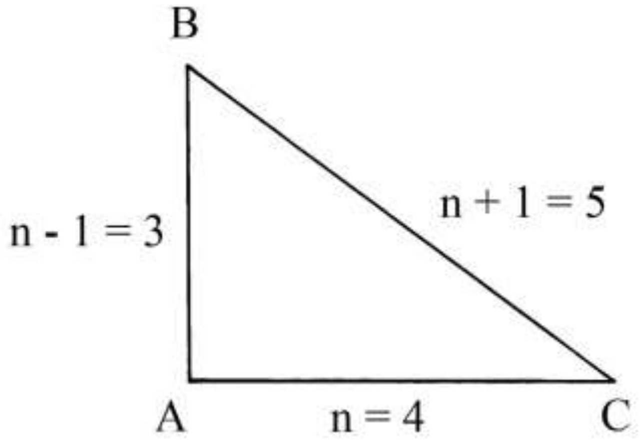
Nella famiglia dei triangoli di Erone si distingue un gruppo più ristretto di poligoni chiamati *triangoli quasi equilateri* perché caratterizzati da lati che hanno lunghezze che formano una progressione aritmetica con ragione 1.

Gli Autori di lingua inglese definiscono questo gruppo di poligoni con l'espressione "*Super-Heronian Triangles*": è possibile consultare il contributo di William H. Richardson:

https://www.math.wichita.edu/~richardson/heronian/heronian.html.

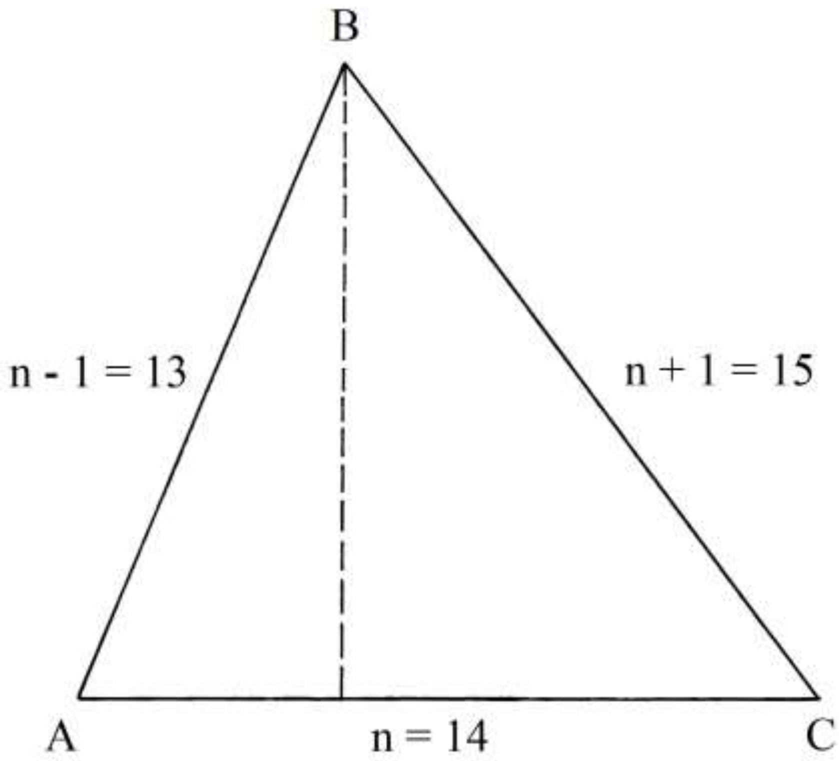
Aumentando le dimensioni dei lati, i triangoli tendono ad avvicinarsi sempre più ai triangoli equilateri.

I primi due esempi sono dati dai triangoli 3-4-5 (rettangolo) e 13-14-15 (scaleno):



Il cateto orizzontale AC è lungo *(n = 4)*, il cateto verticale AB è lungo *(n – 1) = 3* e l'ipotenusa BC è lunga *(n + 1 = 5)*.

Il secondo triangolo è il seguente:



La tabella che segue mostra le proprietà dei primi otto triangoli *quasi equilateri*:

Lato più corto (n – 1)	Lato intermedio (n)	Lato più lungo (n + 1)	Area	Raggio del cerchio inscritto
3	4	5	6	1
13	14	15	84	4
51	52	53	1170	15
193	194	195	16296	56
723	724	725	226974	209
2701	2702	2703	3161340	780
10083	10084	10085	44031786	2911
37633	37634	37635	613283664	10864

Nella prossima tabella sono calcolati il perimetro, il semiperimetro e la lunghezza dell’altezza relativa al lato indicato con “*n*” nella precedente tabella:

Terna (n -1) – n – (n + 1)	Perimetro	Semiperimetro	Altezza relativa al lato di lunghezza “*n*”
3 – 4 – 5	12	6	3
13 – 14 – 15	42	21	12
51 – 52 – 53	156	78	45
193 – 194 – 195	582	291	168
723 – 724 – 725	2172	1086	627
2701 – 2702 – 2703	8106	4053	2340
10083-10084-10085	30252	15126	8733
37633-37634-37635	112902	56451	32592

La successione dei valori di *n* è determinata da una formula: il valore di *n* è dato dal prodotto dei due precedenti meno il primo, come da questo esempio:

terzo n = secondo n * primo n - primo n =

= 14 * 4 - 4 = 56 - 4 = 52

In generale, per determinare il valore di un generico n_z è necessario conoscere il valore dei suoi due precedenti:

$$n_z = n_{(z-1)} * n_{(z-2)} - n_{(z-2)} = [n_{(z-1)} - 1] * n_{(z-2)}$$

Il valore di *n* con indice *z* è ricavato dalla conoscenza degli *n* con indici (*z – 1*) e (*z – 2*).

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Un triangolo i cui lati hanno lunghezze espresse da tre numeri consecutivi non può essere rettangolo (ad eccezione del caso della terna primitiva 3-4-5), equilatero o isoscele.

I tre lati di un triangolo di questa famiglia hanno le seguenti lunghezze:

* $a = n – 1$;
* $b = n$;
* $c = n + 1$.

Il perimetro *2*m* vale:

$2*m = a + b + c = (n – 1) + n + (n + 1) = 3*n$.

Il semiperimetro *m* è:

$m = 2*m/2 = 3*n/2$.

Limitandosi solo ai casi nei quali *n* è un numero pari si ha:

$n = 2*k$, dove *k* è un numero intero.

In questi casi, il semiperimetro *m* vale:

$m = (3*n/2) = 3 * (2*k)/2 = 3*k$.

Ne consegue che le espressioni (m – a), (m – b) e (m – c) contenute nella radice quadrata della formula di Erone assumono i valori che seguono:

* $(m – a) = 3*k – (n – 1) = 3*k – (2*k – 1) = k + 1$;
* $(m – b) = 3*k – n = 3*k – 2*k = k$;
* $(m – c) = 3*k – (n + 1) = 3*k – (2*k + 1) = 3*k – 2*k – 1 = k – 1$.

L’area del triangolo è data da:

$Area = \sqrt{[m * (m – a) * (m – b) * (m – c)]} =$
$= \sqrt{[3*k * (k + 1) + k * (k – 1)]} = \sqrt{[3*k^2 * (k^2 – 1)]}$.

Ne consegue:

$Area^2 = 3*k^2 * (k^2 – 1)$. Questa espressione è un quadrato perfetto se l’espressione $[3*(k^2 – 1)]$ è un quadrato divisibile per 3 e per 9.

Nella nota ([77]) a p. 169 del loro lavoro, Acerbi e Vitrac affermano che occorre determinare le soluzioni intere (*k* e *q*) dell’equazione

$k^2 = 3*q^2 + 1$.

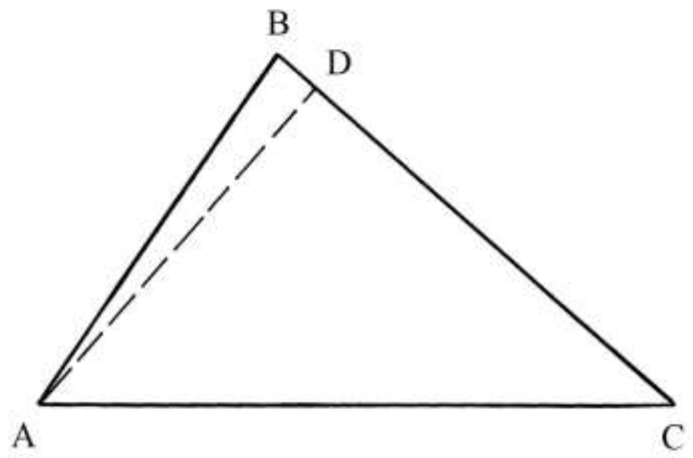
Le prime soluzioni che sono ottenute sono riportate nella tabella che segue:

Valori di *k*	Valori di *q*	Triangoli quasi equilateri generati
2	1	3-4-5
7	4	13-14-15
26	15	51-52-53
97	56	193-194-195

\- -

<u>Il triangolo 8 – 10 – 12</u>

Questo triangolo è scaleno e acutangolo e non è eroniano:



I suoi lati hanno le seguenti lunghezze: AB = 8 ; BC = 10 e AC = 12.

Il triangolo è simile al triangolo scaleno che ha lati lunghi 4 – 5 – 6: anche questo ultimo non è un triangolo di Erone.

Dal vertice A tracciare la perpendicolare al lato BC: AD è l'altezza relativa a questo ultimo lato.

AD divide il triangolo scaleno nei due triangoli rettangoli ABD e ADC.

Occorre determinare la lunghezza dei cateti BD e DC.

Fissiamo BD come l'incognita x.

Applicando il teorema di Pitagora ai due triangoli rettangoli risultano le seguenti relazioni:

* $AD^2 = AB^2 - BD^2 = 8^2 - x^2 = 64 - x^2$ (1) ;
* $AD^2 = AC^2 - DC^2 = 12^2 - (BC - BD)^2 = 144 - (10 - x)^2 = 144 - 100 + 20 * x - x^2 =$
  $44 + 20 * x - x^2$ (2)

Eguagliando le equazioni (1) e (2) si ha:

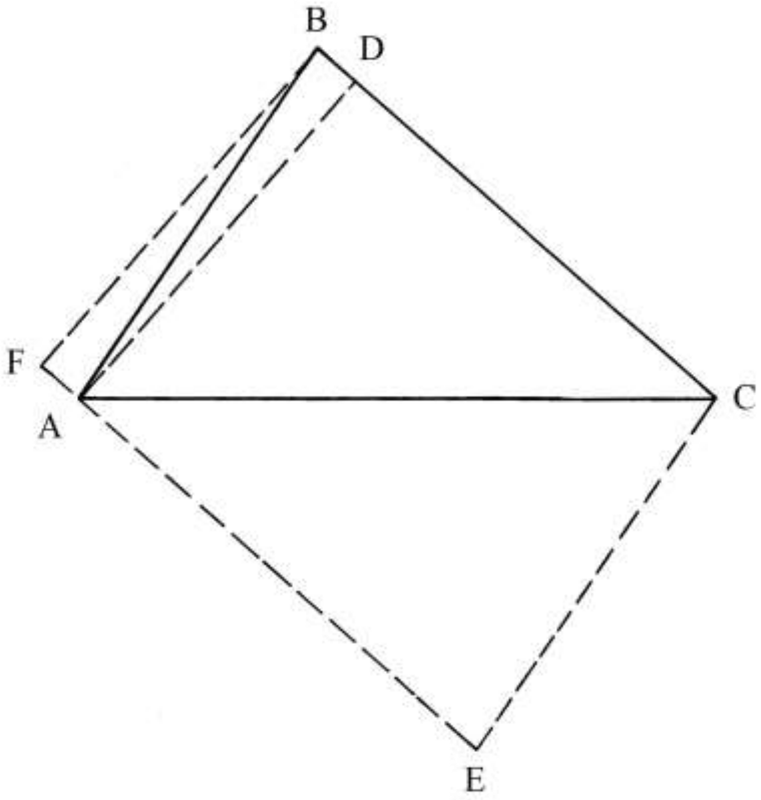
$$64 - x^2 = 44 + 20 * x - x^2$$

$$64 - 44 = 20 * x \qquad \text{da cui } x = 1 .$$

La procedura impiegata da Erone contiene i seguenti passi:

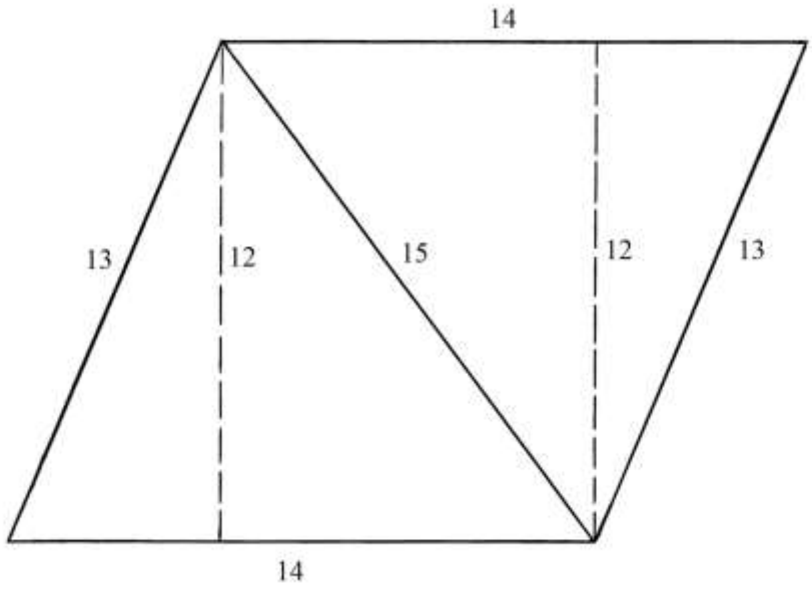
* calcolare il quadrato di BD: $BD^2 = 1^2 = 1$;
* calcolare il quadrato di AB: $AB^2 = 8^2 = 64$;
* applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo ABD, sottrarre il quadrato di BD da quello di AB: 64 – 1 = 63 che è il quadrato della lunghezza di AD ;
* calcolare il quadrato di BC: $BC^2 = 10^2 = 100$;
* moltiplicare il quadrato di AD per il quadrato di BC: 63*100 = 6300 ;
* dividere per 4: 6300 : 4 = 1575 che è il quadrato dell'area di ABC.

Dai punti B e C tracciare due linee parallele all'altezza AD e per il punto A condurre una linea parallela al lato BC. Viene creato il rettangolo BCEF che ha area uguale al doppio di quella di ABC: Area BCEF = $2*\sqrt{1575}$

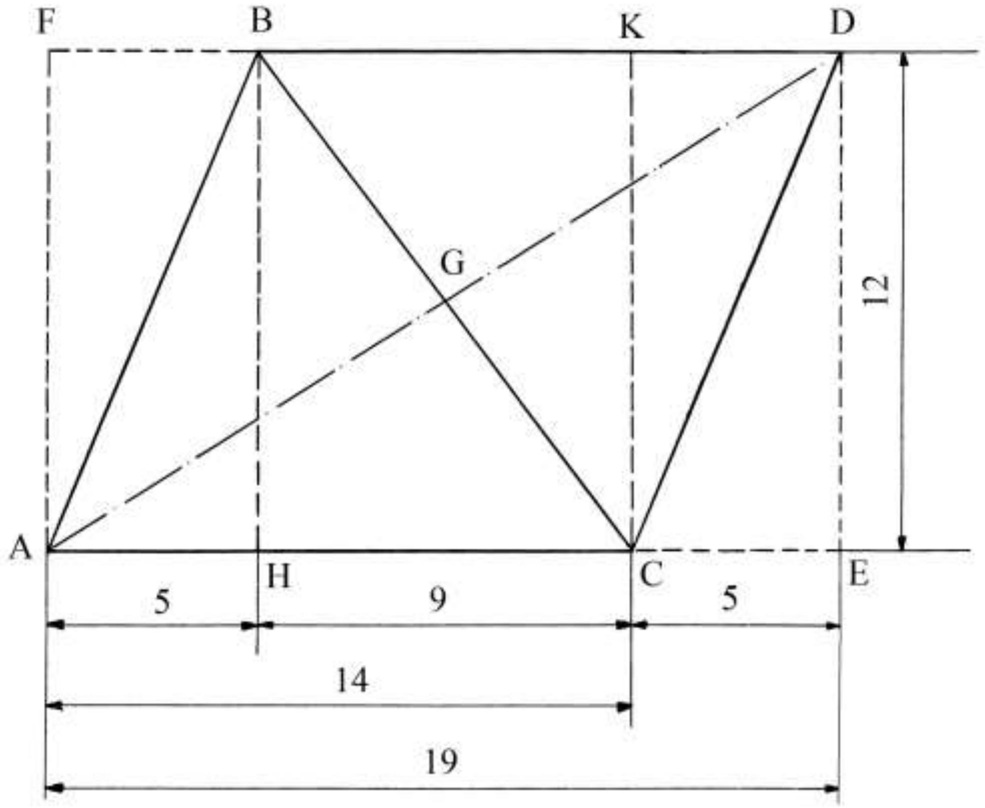


Il parallelogramma derivato dal triangolo 13 – 14 – 15

Uniamo due triangoli 13 – 14 – 15 per formare un parallelogramma:



Il parallelogramma ha i lati paralleli due a due, come spiega la figura che segue:



AB = CD = 13
AC = BD = 14
BC è una diagonale del parallelogramma ed è lunga 15.
Il quadrilatero è inscritto nel rettangolo AFDE.
AD è la seconda diagonale e interseca BC nel loro punto medio comune, G. La lunghezza di AD è:

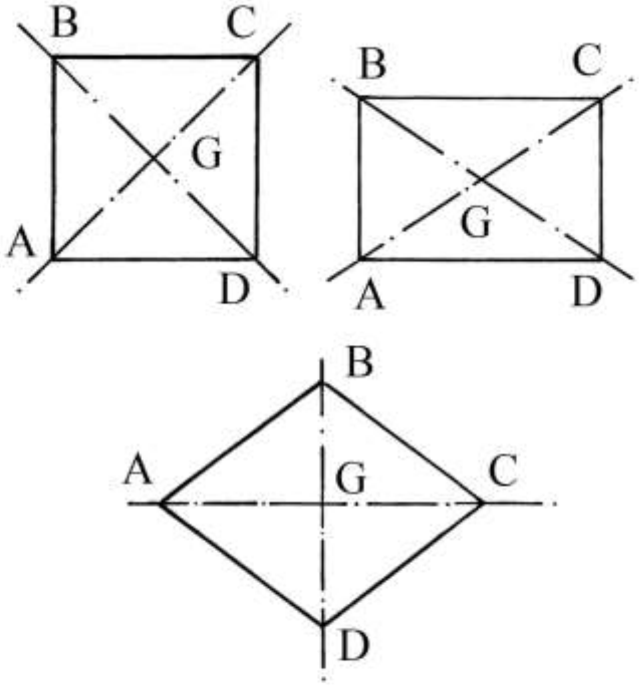
$$AD^2 = AE^2 + DE^2 = 19^2 + 12^2 = 361 + 144 = 505.$$

$$AD = \sqrt{505}.$$

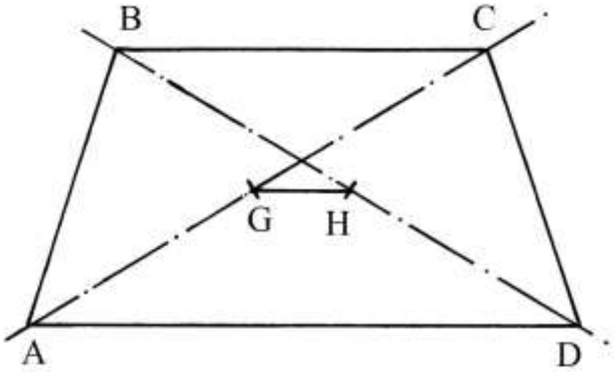
Dai lavori di ottica geometrica di Erone deriva il seguente teorema:
In un quadrilatero la somma dei quadrati dei quattro lati è uguale alla somma dei quadrati delle diagonali più quattro volte il quadrato della distanza fra i punti medi delle stesse diagonali.
Nel caso del quadrilatero derivante dal triangolo 13 – 14 – 15, i punti medi coincidono in G:

$$AB^2 + BD^2 + DC^2 + AC^2 = AD^2 + BC^2$$
$$13^2 + 14^2 + 13^2 + 14^2 = (\sqrt{505})^2 + 15^2$$
$$169 + 196 + 169 + 196 = 505 + 225$$
$$730 = 730$$

Anche in un quadrato, in un rettangolo e in un rombo le diagonali si dividono reciprocamente a metà incontrandosi nel punto G:



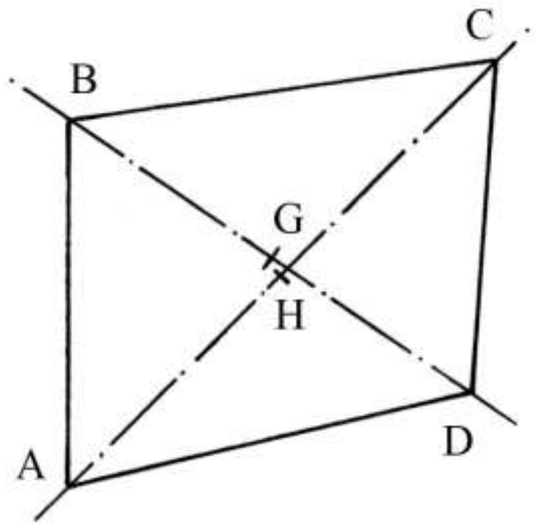
Nel caso di un *trapezio isoscele*, i punti medi delle diagonali, G e H, non coincidono:



La regola di Erone stabilisce la seguente relazione:

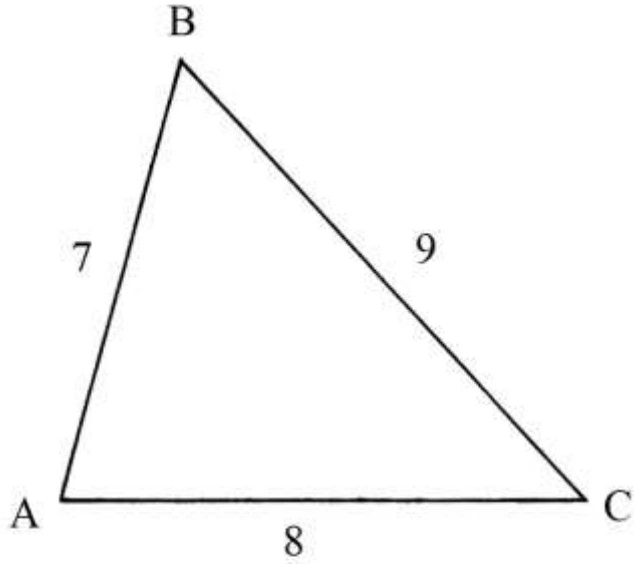
$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = AC^2 + BD^2 + 4*GH^2 .$$

Anche nel caso di un quadrilatero generico vale la regola di Erone:



<u>Il triangolo 7-8-9</u>

Un altro triangolo studiato da Erone è quello scaleno con lati lunghi 7, 8 e 9:



Il triangolo ha perimetro $2*m = 7 + 8 + 9 = 24$ e semiperimetro $m = 12$.

L'area del triangolo è:

Area $_{ABC}$ = √[m * (m – 7) * (m – 8) * (m – 9)] =
= √[12 * (12 – 7) * (12 – 8) * (12 – 9)] = √(12 * 5 * 4 * 3) = √720 = 12 * √5.

Il quadrato perfetto più vicino a 720 è 729: infatti √729 = 27. L'altro quadrato vicino è 676: $676 = 26^2$.

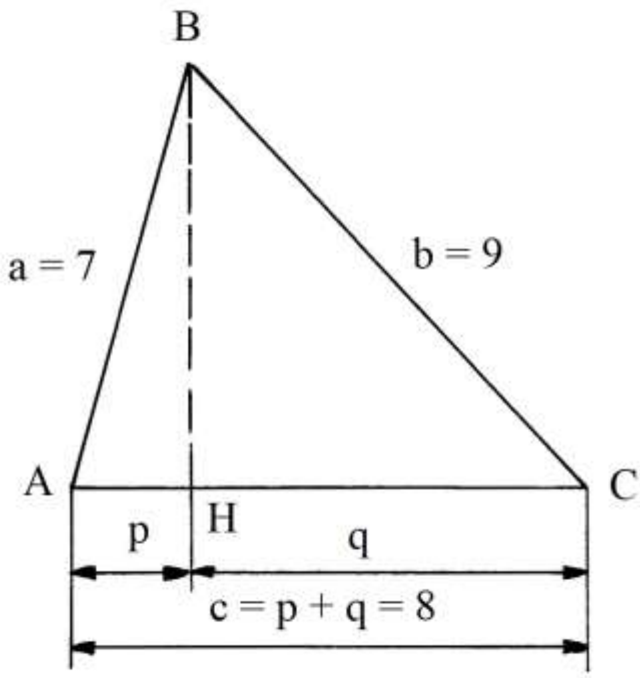
Erone propose una procedura aritmetica approssimata per calcolare √720, con i seguenti passi:

* dividere 720 per 27: $720/27 = (26 + 2/3)$;
* sommare con 27: $(26 + 2/3) + 27 = (53 + 2/3)$;
* dividere per 2: $(53 + 2/3)/2 = (26 + ½ + 1/3)$;
* moltiplicare per sé stesso: $(26 + ½ + 1/3) * (26 + ½ + 1/3) = (720 + 1/36)$. La differenza con 720 è minima.

L'area del triangolo 7-8-9 *non* è un numero intero e pertanto esso non è un triangolo di Erone.

Nessuna delle tre altezze di questo triangolo è espressa da un numero intero.

Erone studiò questo triangolo per applicare la formula per calcolarne l'area: essa semplifica i calcoli perché non richiede la conoscenza della lunghezza di almeno un'altezza.



L'altra formula di Erone, quella per determinare le lunghezze delle proiezioni dei lati obliqui sulla base AC fornisce questi risultati per il caso AC = 8:

$$p = (a^2 + c^2 – b^2)/(2*c) = (7^2 + 8^2 – 9^2)/(2*8) = (49 + 64 – 81)/16 = 32/16 = 2.$$

Ne deriva:

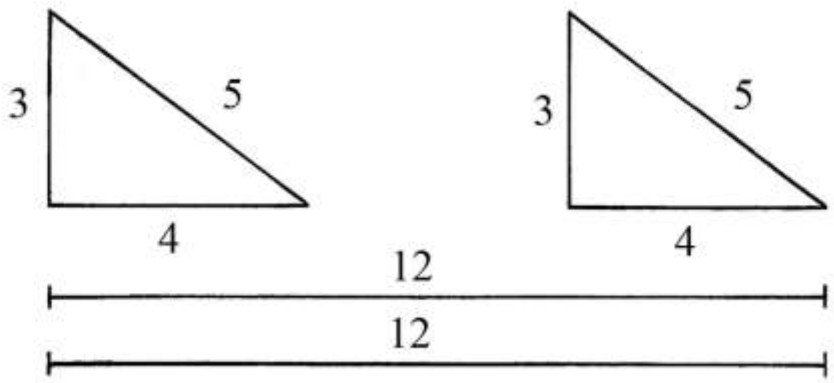
$$q = c – p = 8 – 2 = 6$$

L'altezza BH è lunga:

$$BH = 2 * \text{Area}_{ABC}/AC = 2 * (12 * \sqrt{5})/8 = 3 * \sqrt{5}.$$

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Un triangolo pitagorico come quello 3 – 4 – 5 ha perimetro $2*m = 12$ e storicamente può essere stato realizzato dai geometri Egizi con una corda divisa in 12 parti uguali:



Unendo due corde da 12 unità viene formata una lunghezza di 24 parti uguali.

La somma dei perimetri di due triangoli 3 – 4 – 5 è $12*2 = 24$ unità.

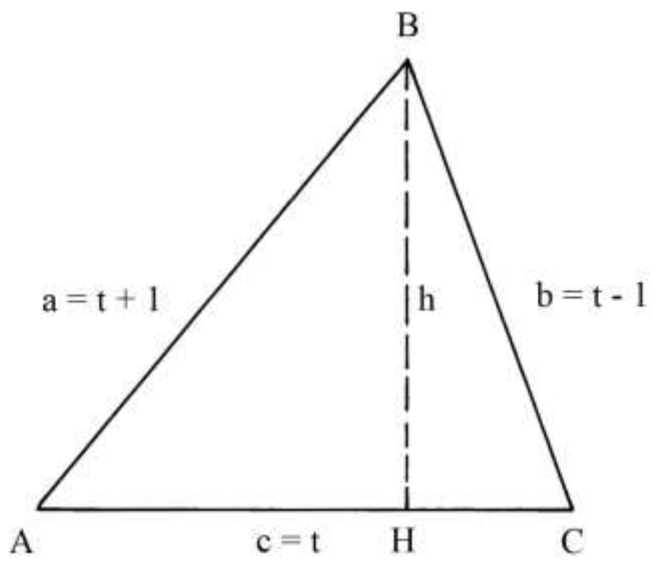
Il triangolo 7 – 8 – 9 ha perimetro $2\ m = 7 + 8 + 9 = 24$ unità, uguale alla lunghezza dei perimetri dei due triangoli 3 – 4 – 5.

<u>I triangoli eroniani secondo Brahmagupta</u>

Ricordiamo che per *triangolo eroniano* (da Erone) si intende un triangolo che ha lati, area e almeno un'altezza rappresentati da numeri interi o razionali.

Brahmagupta (598-668 d.C.) è stato un matematico e astronomo indiano: egli studiò una classe di triangoli di Erone con lati lunghi numeri interi consecutivi, quali ad esempio quelli 3-4-5, 13-14-15 e 51-52-53.

Egli li considerò partendo dalla fissazione di un numero intero, *t*, corrispondente alla lunghezza del lato intermedio della terna:



I lati del triangolo ABC che corrisponde a una terna di Brahmagupta hanno le seguenti lunghezze:

* AC = a = (t + 1).
* BC = b = (t – 1).
* AC = c = t con $t \geq 4$.

Il *perimetro p* del triangolo è: p = a + b + c = (t + 1) + (t – 1) + t = 3 * t .

Il *semiperimetro m* è: m = p/2 = (3/2) * t .

Riprendiamo la formula di Erone per il calcolo dell'area di un triangolo:

$$\text{Area}_{ABC} = \sqrt{[m * (m - a) * (m - b) * (m - c)]}.$$

Sostituendo a *m*, *a*, *b* e *c* i valori calcolati in funzione di *t*, la formula dell'area diviene la seguente:

$$\text{Area}_{ABC} = t/2 * \sqrt{\{3 * [(t/2)^2 - 1]\}}.$$

Per procedere nell'analisi dei triangoli di Brahmagupta occorre che siano soddisfatte alcune condizioni:

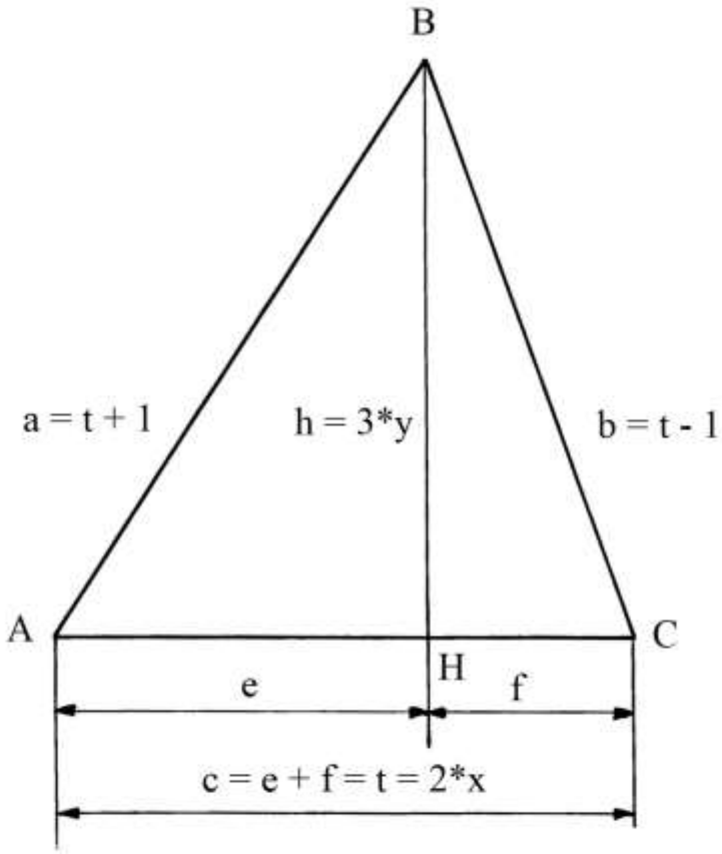
* l'area di un triangolo deve essere rappresentata da un numero intero.
* Il numero *t* deve essere *pari*.
* Una delle altezze del triangolo, ad esempio BH, deve essere lunga un multiplo di 3.

Occorre introdurre due nuove variabili, *x* e *y*, legate alle condizioni poste:

t = 2 * x, con *x* che è un numero intero;

h = 3 * y, con *h* che è l'altezza BH presa ad esempio. Anche *y* deve essere un numero intero.

La figura che segue mostra il classico triangolo scaleno 13-14-15 (che è sia un triangolo di Erone sia un triangolo di Brahmagupta):



In questo caso, con $t = c = 14$, valgono le seguenti relazioni:

* $a = t + 1 = 15$;
* $b = t - 1 = 14 - 1 = 13$.

L'altezza BH divide il lato AC in due segmenti:

* $AH = e$;
* $HC = f$.

In questo caso, x vale: $x = c/2 = t/2 = 14/2 = 7$.

L'altezza BH è lunga $h = 3 * y$. Essa suddivide ABC in due triangoli rettangoli, ABH e BHC, dei quali è il cateto comune.

Richiamiamo le considerazioni presentate in un precedente paragrafo riguardo a questo triangolo. Valgono qui le seguenti relazioni:

* $BH^2 = AB^2 - AH^2 = (t + 1)^2 - e^2$;
* $BH^2 = BC^2 - HC^2 = (t - 1)^2 - f^2$.

Ma $f = c - e = t - e$.

Eguagliando le due espressioni di BH^2 e sostituendo a f il valore appena trovato si ottiene:

$(t + 1)^2 - e^2 = (t - 1)^2 - (t - e)^2$. Semplificando si ha: $t + 4 - 2*e = 0$ e cioè

$14 + 4 = 2*e$ da cui $e = 18/2 = 9$.

Di conseguenza si ha: $f = t - e = 14 - 9 = 5$.

L'altezza BH = h vale:

$h^2 = a^2 - e^2 = (t + 1)^2 - 9^2 = 15^2 - 9^2 = 225 - 81 = 144$.

Quindi, $h = \sqrt{(144)} = 12$.

La lunghezza di h è un *multiplo* di 3: $y = h/3 = 12/3 = 4$.

Riprendiamo la formula di Erone, come si è visto trasformata per adattarla alla presenza della costante *t*, e calcoliamo il *quadrato* dell'area:

$(\text{Area}_{ABC})^2 = \{t/2 * \sqrt{[(3*t^2 – 12)/4]}\}^2 = t^2/4 * (3*t^2 – 12)/4 = t^2 * (3*t^2 – 12)/16 =$
$= 3 * t^2 * (t^2 – 4)/16$, da cui:

$16 * (\text{Area}_{ABC})^2 = 3 * t^2 * (t^2 – 4)$

L'area di ABC è anche data da:

$\text{Area}_{ABC} = AC * BH/2 = t * h/2 = t * 3 * y/2 = 3/2 * t * y$.

Il quadrato di questa area è:

$(\text{Area}_{ABC})^2 = 9/4 * t^2 * y^2$. Moltiplicando per 16 si ha:

$16 * (\text{Area}_{ABC})^2 = 16 * [9/4 * t^2 * y^2] = 36 * t^2 * y^2$.

Eguagliando le due espressioni che forniscono il prodotto $16 * (\text{Area}_{ABC})^2$ si ha:

$3 * t^2 * (t^2 – 4) = 36 * t^2 * y^2$ si ricava la seguente formula:

$y^2 = (t^2 – 4)/12$.

Dato che $t = 2 * x$, la formula diviene:

$y^2 = [(2 * x)^2 – 1]/12 = (4*x^2 – 4)/12 = (x^2 – 1)/3$.

Infine si ha:

$y = \sqrt{[(x^2 – 1)/3]}$.

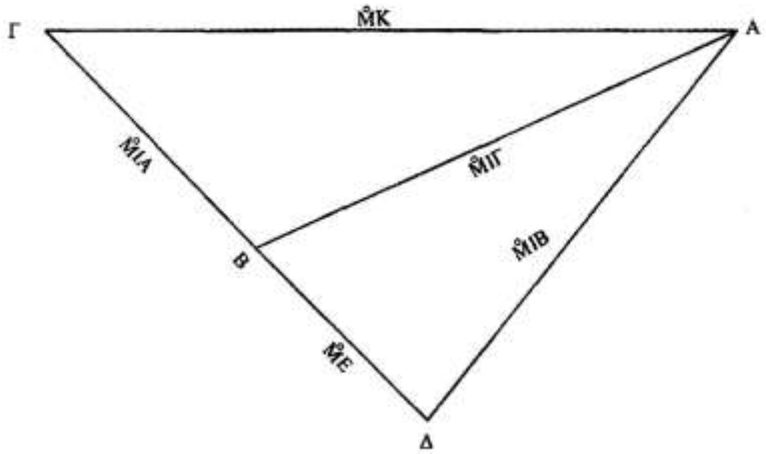
La tabella che segue contiene i dati relativi ai primi *otto* triangoli di Brahmagupta:

x	t = 2*x	t - 1	t + 1	y	h = 3*y	Area
2	4	3	5	1	3	6
7	14	13	15	4	12	84
26	52	51	53	15	45	1170
97	194	193	195	56	168	16296
362	724	723	725	209	627	226974
1351	2702	2701	2703	780	2340	3161340
5042	10084	10083	10085	2911	8733	44031786
18817	37634	37633	37635	10864	32592	613283664

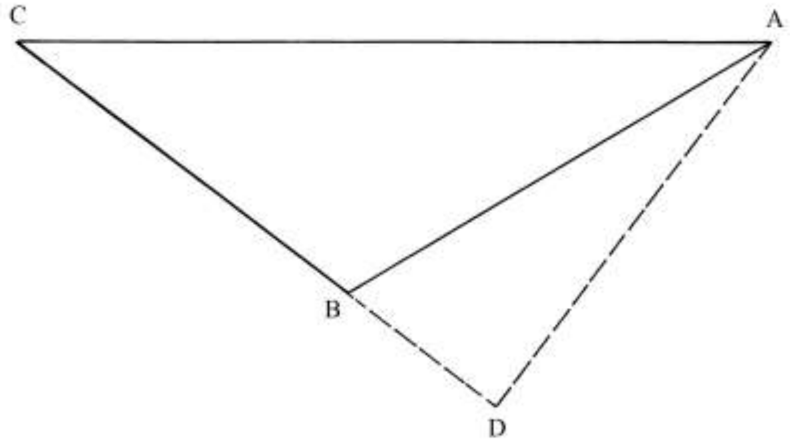
II PARTE
=======

<u>Area di un triangolo ottusangolo</u>

Il triangolo ΑΒΓ (poi indicato come “ABC”) è ottusangolo:



Il problema chiede di ricavare la lunghezza della perpendicolare (l’altezza AD) e l’area del triangolo:



I lati sono lunghi:

* AB = 13;
* AC = 20;
* CB = 11.

Prolungare verso destra il lato CB e dal vertice A abbassare la perpendicolare fino a determinare il punto D. AD è l’altezza relativa al lato CB.

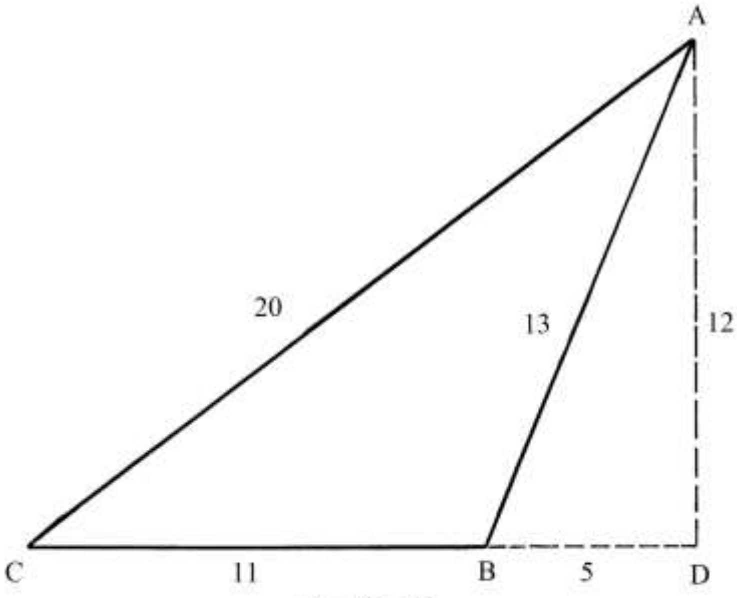
La procedura impiegata da Erone per calcolare l’area contiene i seguenti passi:

1. Moltiplicare per sé stessa la lunghezza di AB: 13 * 13 = 169.
2. Moltiplicare per sé stessa la lunghezza di CB: 11 * 11 = 121.
3. Moltiplicare per sé stessa la lunghezza di AC: 20 * 20 = 400.
4. Sommare i primi due prodotti: 169 + 121 = 290.
5. Sottrarre l’ultima somma dal quadrato di AC: 400 – 290 = 110.
6. Dividere per 2: 110/2 = 55.
7. Dividere per la lunghezza di CB: 55/11 = 5 (lunghezza di BD).
8. Moltiplicare per sé stessa la lunghezza di BD: 5 * 5 = 25.
9. Sottrarre l’ultimo prodotto dal quadrato di AB: 169 – 25 = 144.

10. Estrarre la radice quadrata: $\sqrt{144} = 12$, lunghezza di AD.
11. Moltiplicare per la lunghezza di CB: 12 * 11 = 132.
12. Dividere per 2: 132/2 = 66, area del triangolo ABC.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Ruotiamo in senso antiorario il triangolo ACD fino a rendere orizzontale il lato CD:

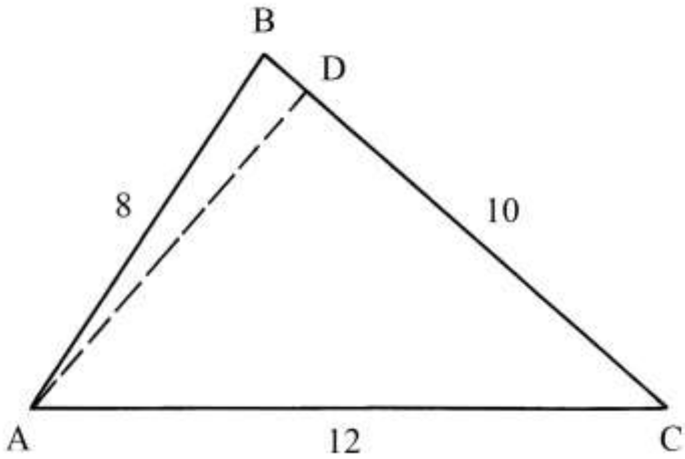


ACD è un triangolo rettangolo con lati lunghi 12, 16 e 20 unità: questi numeri formano una terna derivata da quella primitiva 3-4-5 i cui componenti sono moltiplicati per 4.

Il triangolo ABD ha lati lunghi 5, 12 e13 unità: questi numeri formano una terna primitiva.

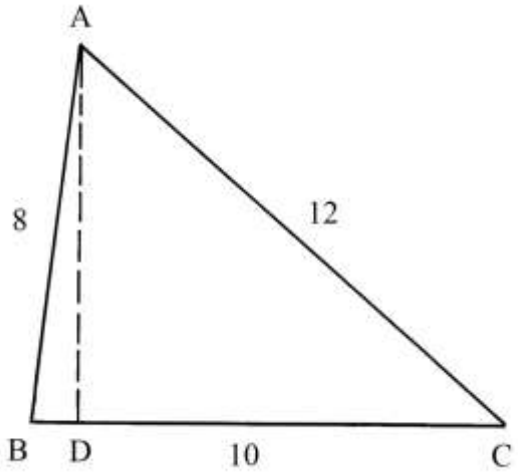
<u>Area del triangolo 8-10-12</u>

Nel triangolo scaleno ABC i lati hanno le lunghezze indicate sulla figura:

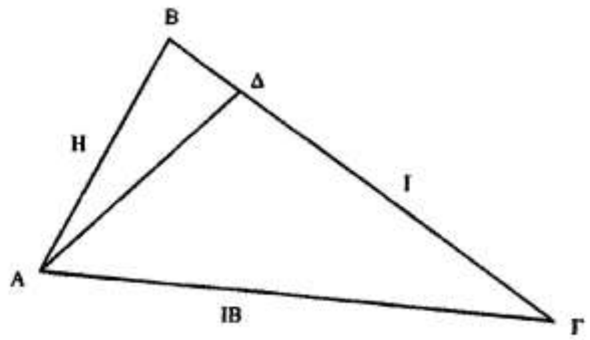


È tracciata l'altezza relativa al lato BC: è AD.

Per meglio definire la natura del triangolo, il poligono è ruotato per disporre orizzontalmente il lato BC:



Il disegno originale è molto impreciso:



Il punto D divide il lato BC in due segmenti:

* BD lungo 1;
* BC lungo 9.

La procedura impiegata da Erone contiene i seguenti passi:

* calcolare il quadrato della lunghezza di AD: $AD^2 = AB^2 – BD^2 = 8^2 – 1^2 = 64 – 1 = 63$;
* calcolare il quadrato della lunghezza di BC: $BC^2 = 10^2 = 100$;
* moltiplicare i quadrati di AD e BC: $AD^2 * BC^2 = 63 * 100 = 6300$;
* dividere per 4: 6300/4 = 1575, Area del triangolo ABC.

La procedura usata da Erone ha una sua logica. L'area del triangolo ABC è data da:

$Area_{ABC} = AD * BC/2$. Il suo quadrato è:

$(Area_{ABC})^2 = (AD * BC/2)^2 = (AD^2 * BC^2)/4$, da cui:

$Area_{ABC} = \sqrt{(AD^2 * BC^2/4)}$.

Verifichiamo la correttezza del risultato applicando la formula di Erone.

Il perimetro 2*m del triangolo è:

2*m = AB + BC + AC = 8 + 10 + 12 = 30.

Il semiperimetro *m* è: m = 15.

L'area è:

$Area_{ABC} = \sqrt{[m * (m – AB) * (m – BC) * (m – AC)]} =$

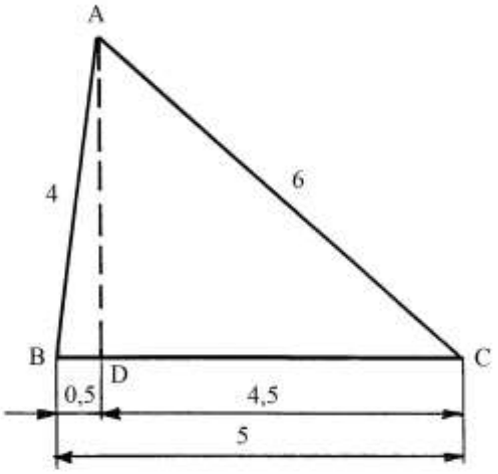
$= \sqrt{[15 * (15 – 8) * (15 – 10) * (15 – 12)]} = \sqrt{(15 * 7 * 5 * 3)} = \sqrt{1575}$.

Il risultato è corretto.

- APPROFONDIMENTO -

Il triangolo 4-5-6

Il triangolo 8-10-12 è strettamente legato a quello 4-5-6: i due triangoli sono *simili*.



La scelta di questo triangolo avrebbe comportato un'area espressa da un numero recante alcuni decimali.

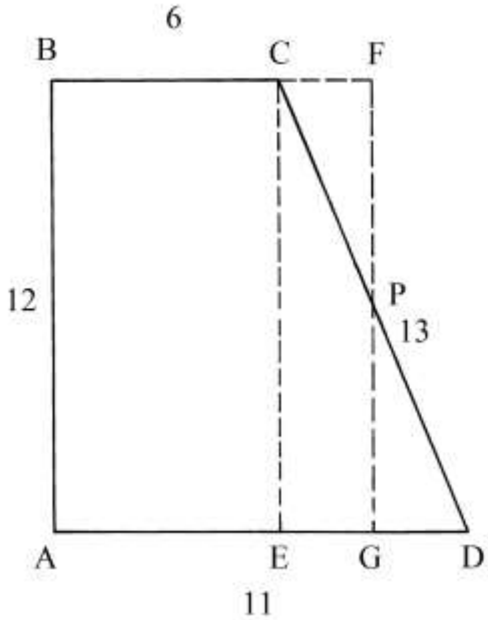
Applicando la formula di Erone, l'area è:

Area $_{ABC}$ = $\sqrt{98{,}4375} = \sqrt{(1575/16)}$ e cioè *quattro* volte più piccola di quella del triangolo 8-10-12.

- -

Area di un trapezio rettangolo

ABCD è un trapezio rettangolo, con angolo retto nel vertice A:



Le basi sono lunghe: AB = 11 e BC = 6 e l'altezza AB è 12 unità.

Il problema chiede di calcolare l'area del poligono e la lunghezza del lato obliquo CD.

Prolungare verso destra la base minore BC. Dal vertice C abbassare la perpendicolare alla base maggiore AD: è l'altezza CE.

Determinare il punto medio di CD: è P. Per questo punto tracciare una linea parallela al lato AB: è il segmento FG.

I triangoli rettangoli PGD e PCE hanno uguali dimensioni.

Il rettangolo ABFG ha area uguale a quella del trapezio ABCD.

Il segmento ED è lungo quanto la differenza fra le lunghezze delle due basi:

ED = AD – AE = AD – BC = 11 – 6 = 5.

Il punto G è medio fra E e D e quindi:

EG = GD = ED/2 = 5/2 = 2,5.

L'area del rettangolo ABFG è data da:

Area $_{ABFG}$ = AB * AG = AB * (AE + EG) = AB * (BC + EG) = 12 * (6 + 2,5) =
= 12 * 8,5 = 102 che è anche l'area del trapezio ABCD.

Per determinare l'area di ABCD Erone propone la seguente procedura:

* sommare le lunghezze delle due basi: AD * BC = 11 + 6 = 17;
* dividere per 2: 17/2 = 8,5;
* moltiplicare per l'altezza AB: 8,5 * 12 = 102, area del trapezio ABCD.

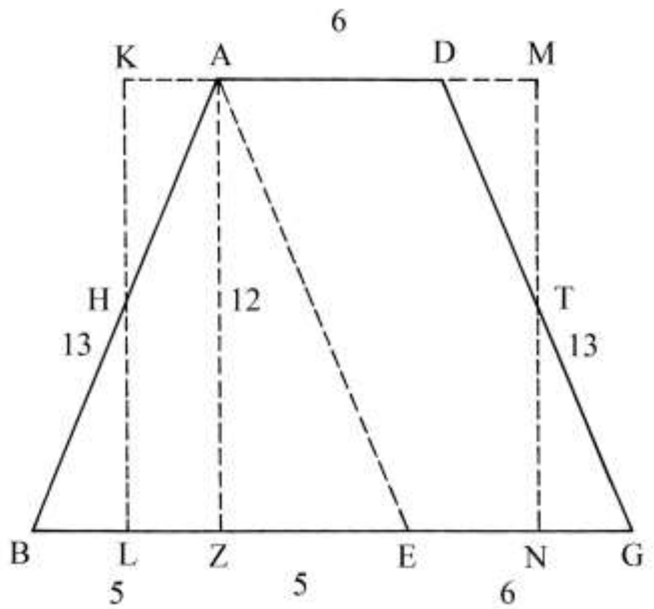
Per calcolare la lunghezza del lato obliquo CD, Erone usa la procedura che segue:

* calcolare la differenza fra le lunghezze delle due basi: AD – BC = 11 – 6 = 5;
* elevare al quadrato: 5^2 = 25;
* moltiplicare la lunghezza di AB per sé stessa: 12 * 12 = 144;
* sommare i due quadrati: 25 + 144 = 169;
* estrarre la radice quadrata: √169 = 13, lunghezza di CD.

La procedura applica il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo CED.

Area di un trapezio isoscele

ABGD è un trapezio isoscele:



Le dimensioni sono scritte sui lati.

Il problema chiede di calcolare la sua area e la lunghezza della *perpendicolare* e cioè dell'altezza AZ.

Prolungare verso destra e verso sinistra la base minore AD.

Tracciare AE parallelamente a DG e AZ perpendicolarmente alla base maggiore.

AEGD è un parallelogramma e AD e EG hanno uguale lunghezza. Ne consegue:

BE = BG – EG = BG – AD = 16 – 6 = 10.

L'altezza AZ è lunga 12: essa equivale alla lunghezza del lato BA del trapezio rettangolo che ha fatto oggetto del precedente problema: infatti, il trapezio isoscele deriva dal precedente trapezio rettangolo (del quale incorpora le dimensioni) con l'aggiunta del triangolo rettangolo ABZ.

Determinare i punti medi dei lati AB e DG: sono H e T. Per questi punti disegnare due segmenti perpendicolari a BG: sono KL e MN.

I triangoli AKH e HBL hanno uguali dimensioni e lo stesso vale per la coppia di triangoli DMT e TGN.

Il rettangolo LKMN ha la stessa area del trapezio ABGD.

La somma delle lunghezze delle basi del trapezio è:

somma = BG + AD = 16 + 6 = 22.

La somma delle lunghezze delle basi del rettangolo LKMN deve essere uguale a 22:

somma =(BG + AD) = (LN + KM) = 22.

Ne consegue:

LN = KM = 22/2 = 11.

L'area del rettangolo LKMN vale:

Area_{LKMN} = LN * KL = LN * AZ = 11 * 12 = 132 = Area_{ABGD}.

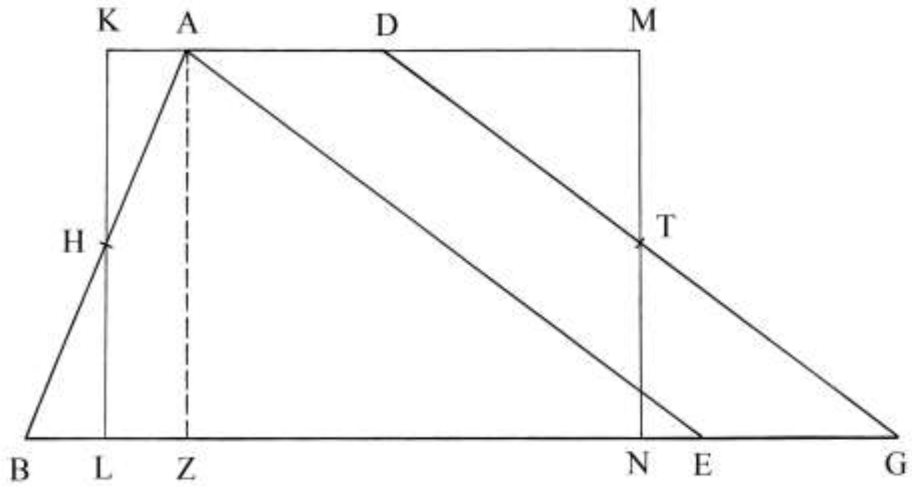
Infine, le lunghezze dei segmenti delle basi sono:

BL = LZ = NG = (BG – EG)/2 = (BG – AD)/2 = (16 – 6)/2 = 5.

La soluzione adottata da Erone è un po' complessa: è più semplice applicare il cosiddetto teorema di Pitagora al triangolo ABZ per ricavare la lunghezza di AZ e moltiplicare questa ultima per la semisomma delle basi: il risultato è l'area del trapezio ABGD.

<u>Area di un trapezio scaleno acutangolo</u>

ABGD è un trapezio scaleno:

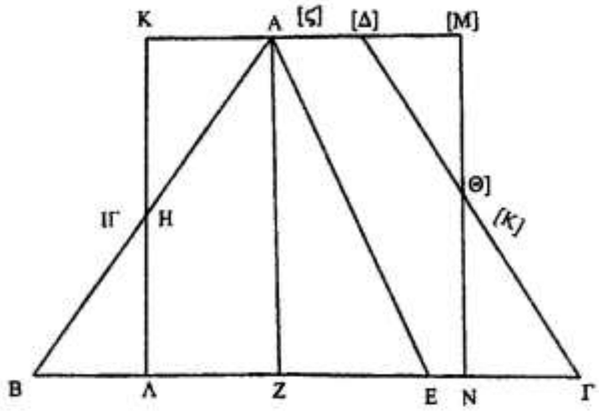


Il trapezio è detto *acutangolo* perché l'angolo nel vertice B è acuto

Il lato AB è lungo 13, come nei due esempi precedenti: trapezio rettangolo e trapezio isoscele.

Il secondo lato obliquo, DG, è lungo 20 e le basi sono: AD = 6 e BG = 27.

La figura originale è fuori scala:



Prolungare verso destra e verso sinistra la base minore AD.

Erone divide in due parti uguali i lati obliqui: i punti H e T sono i punti medi rispettivamente di AB e di DG. Per questi punti disegna le perpendicolari alle basi: sono KL e MN.

Poi traccia la corda AE, parallela al lato DG; il segmento BE è lungo:

BE = BG – EG = BG – AD = 27 – 6 = 21.

L'altezza AZ ha la solita lunghezza di 12 unità.

Il rettangolo KLNM ha area uguale a quella del trapezio ABGD.

La somma delle lunghezze delle due basi del trapezio è:

somma = AD + BG = 6 + 27 = 33.

Essa è uguale alla somma delle lunghezze delle basi del rettangolo KLNM:

somma = KM + LN = 33.

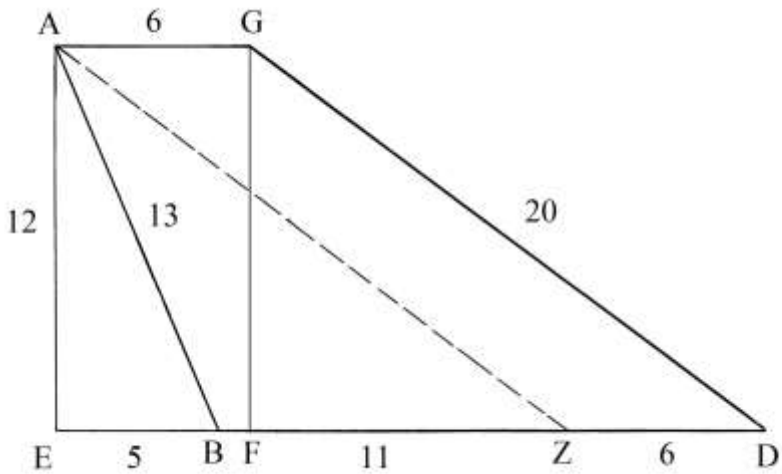
Le basi KM e LN sono entrambe lunghe 33/2 = 16,5 unità.

L'area del rettangolo KLNM (e del trapezio ABGD) è data da:

Area $_{KLNM}$ = LN * KL = LN * AZ = 16,5 * 12 = 198.

<u>Area di un triangolo scaleno ottusangolo</u>

ABDG è un trapezio ottusangolo con l'angolo ottuso nel vertice B: a ciò deve il suo nome.



Il lato AB è lungo 13, GD è 20, la base minore è 6 e quella maggiore BD è lunga 17.

Il problema chiede di ricavare la lunghezza della perpendicolare" (e cioè dell'altezza AE) e l'area del trapezio.

Prolungare verso sinistra la base maggiore BD.

Dal vertice A abbassare la perpendicolare alla base maggiore che incontra sul suo prolungamento nel punto E.

Sempre dal vertice A tracciare la parallela AZ al lato GD: AZ è lunga 20 e ZD è 6. Ne risulta: BZ = BD – ZD = 17 – 6 = 11.

L’altezza AE è lunga 12 unità, come risulta anche nei tre precedenti casi di trapezi.

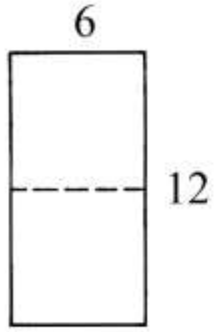
L’area è calcolata come segue:

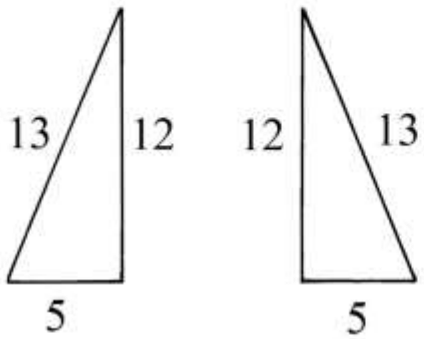
* sommare le lunghezze delle due basi: AG + BD = 6 + 17 = 23;
* dividere per 2: 23/2 = 11,5 [nel testo è usata l’espressione “11 1/2”];
* moltiplicare per la lunghezza di AE: 11,5 * 12 = 138, Area del trapezio ABDG.

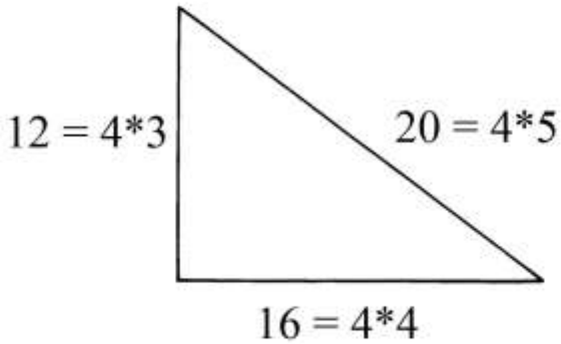
- APPROFONDIMENTO -

I quattro trapezi descritti in precedenza hanno forme che sono il risultato dell’addizione o della sottrazione di tre poligoni semplici:

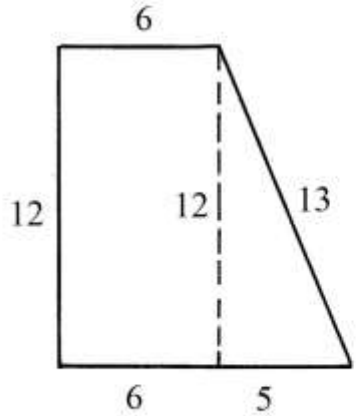
* il *bislungo*, un rettangolo costituito da un doppio quadrato di dimensioni 6*12;
* il triangolo rettangolo 5-12-13, che ha lunghezze formanti la seconda terna primitiva;
* il triangolo rettangolo 12-16-20, con lunghezze che formano una terna derivata dalla primitiva 3-4-5.



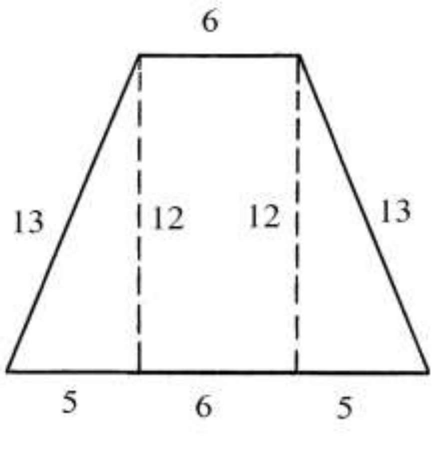




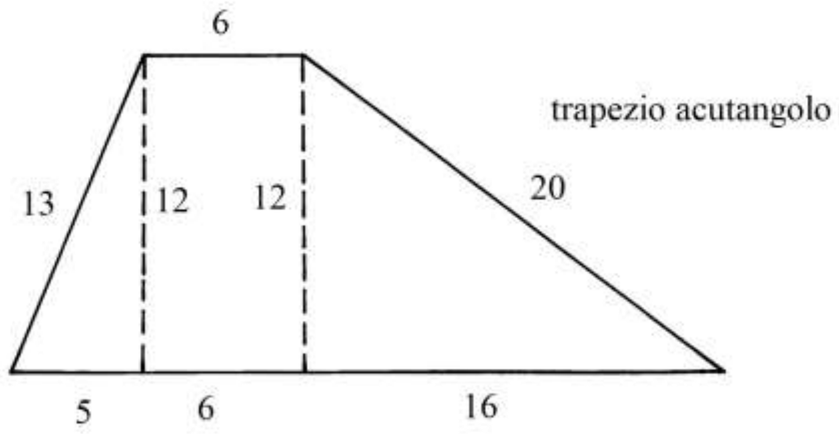
Le figure che seguono descrivono la scomposizione dei quattro trapezi nei tre poligoni semplici:

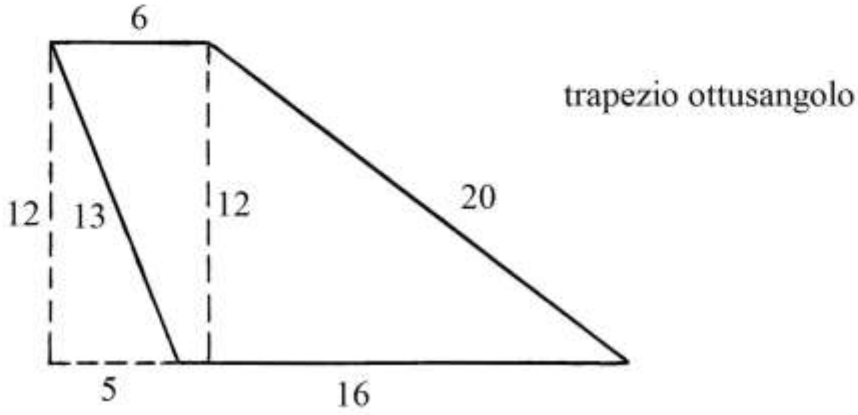


trapezio rettangolo



trapezio isoscele



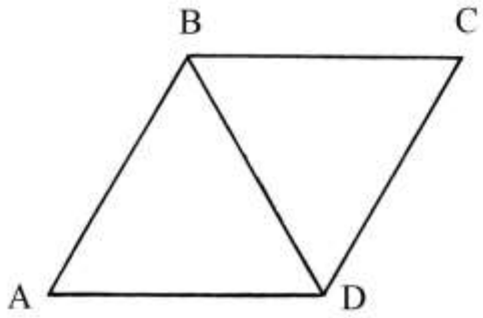


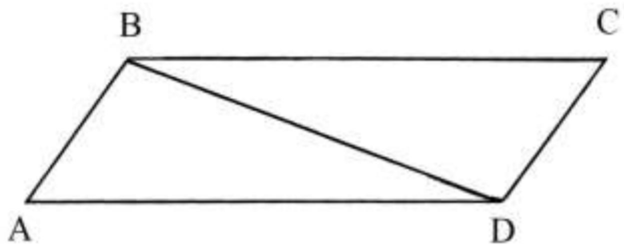
- -

<u>Rombo e romboide</u>

Erone descrive le proprietà del *rombo* e del *romboide*: con questo ultimo termine egli indica il nostro *parallelogramma*.

La figura che segue mostra in alto il rombo ABCD e in basso il parallelogramma ABCD:

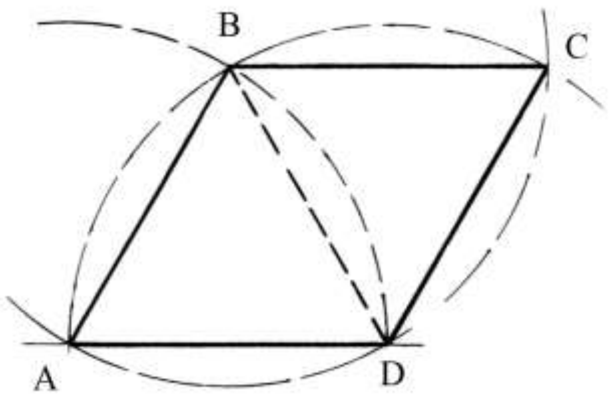




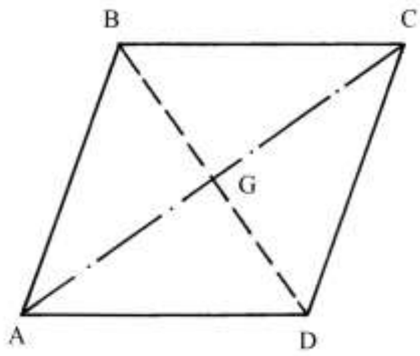
Nel rombo e nel parallelogramma sono tracciate le diagonali BD.

Sia il rombo che il parallelogramma possiedono due angoli ottusi (nei vertici B e D) e due angoli acuti (ne vertici A e C):

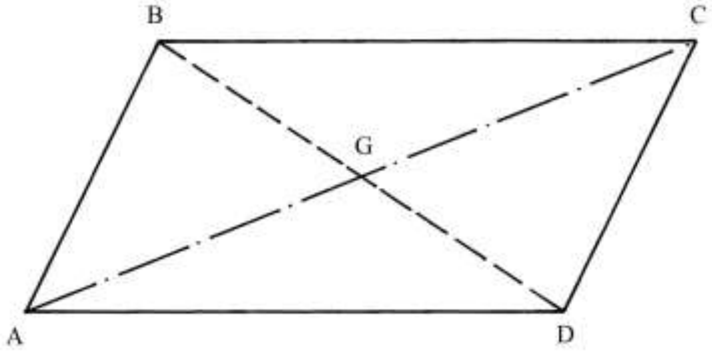
Il rombo ABCD è formato da due triangoli equilateri, ABD e BCD:



Un generico rombo è diviso da una diagonale in due triangoli isosceli:



Lo stesso accade a un parallelogramma:

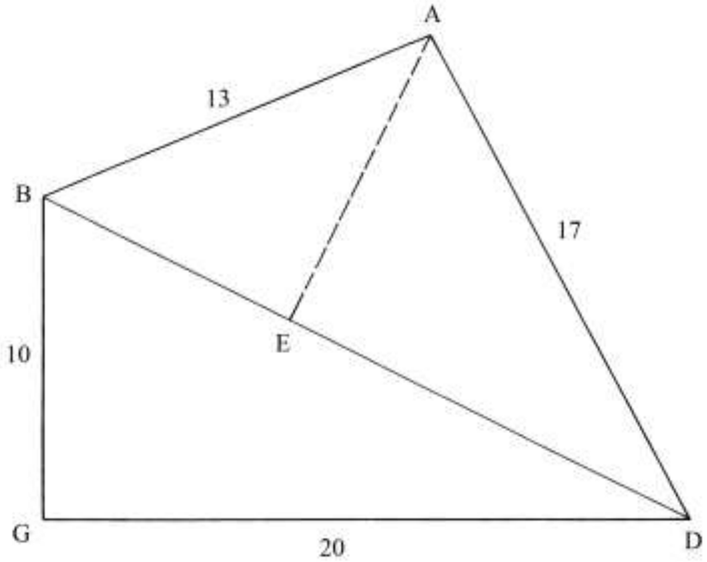


<u>Area di un quadrilatero</u>

Il quadrilatero ABGD ha lati lunghi:

* AB = 13;
* BG = 10;
* GD = 20;
* DA = 17.

L'angolo bel vertice G è *retto*.



Tracciare la diagonale BD e dal vertice A l'altezza AE.

La presenza di BD divide il quadrilatero in due triangoli:

* il triangolo rettangolo BGD;
* il triangolo scaleno ABD.

Erone impiega una procedura per calcolare l'area del quadrilatero: eccone i passi, qui numerati per chiarezza:

1. Moltiplicare la lunghezza di BG per quella di GD: 10*20 = 200.
2. Dividere per 2: 200/2 = 100 [è l'area del triangolo rettangolo BGD].
3. Moltiplicare la lunghezza di BG per sé stessa: 10*10 = 100.
4. Moltiplicare la lunghezza di GD per sé stessa: 20*20 = 400.

5. Sommare gli ultimi due prodotti: 100 + 400 = 500 [quadrato della lunghezza di BD].
6. Moltiplicare la lunghezza di AB per sé stessa: 13*13 = 169.
7. Sommare 169 e 500: 169 + 500 = 669.
8. Moltiplicare la lunghezza di DA per sé stessa: 17*17 = 289.
9. Sottrarre l'ultimo prodotto da 669: 669 – 289 = 380.
10. Dividere per 2: 380/2 = 190.
11. Moltiplicare per sé stesso: 190*190 = 36100.
12. Dividere per 500 [quadrato di BD]: 36100/500 = 72 + 1/5.
13. Sottrarre da 169: 169 – (72 + 1/5) = 96,8 [Erone usa l'espressione 96 ½ 1/5 1/10].
14. Moltiplicare per 500 [quadrato di BD]: 96,8*500 = 48400.
15. Estrarre la radice quadrata: √48400 = 220.
16. Dividere per 2: 220/2 = 110 [Area del triangolo ABD].
17. Sommare all'area di BGD [passo 2.]: 110 + 100 = 210 [Area del quadrilatero ABGD].

I passi da 6 a 16 servono a calcolare l'area del triangolo ABD, eliminando i problemi creati dalla lunghezza di BD che è espressa da un numero irrazionale. I lati del triangolo sono lunghi:
* AB = 13;
* AD = 17;
* $BD^2 = 500$, da cui BD = √500 = 10*√5.

Il suo perimetro vale:

2*m = AB + AD + BD = 13 + 17 + 10*√5 = 30 + 10*√5.

Il semiperimetro è:

m = (30 + 10*√5)/2 = 15 + 5*√5.

La formula di Erone per il calcolo dell'area dà il seguente risultato:

$\text{Area}_{ABD} = \sqrt{[(15 + 5\sqrt{5}) * (15 + 5\sqrt{5} - 13) * (15 + 5\sqrt{5} - 17) * (15 + 5\sqrt{5} - 5\sqrt{5})]} =$
$= \sqrt{(100 * 121)} = 10 * 11 = 110.$

Il risultato è esatto.

La complessa procedura impiegata da Erone ha una spiegazione. Occorre calcolare le aree dei due triangoli nei quali la diagonale BD ha diviso il quadrilatero ABGD: BGD e ABD.
L'area del triangolo BGD è nota: è stata calcolata in 100 unità. La diagonale BD è l'ipotenusa del triangolo rettangolo BGD ed è lunga √500.

Consideriamo il triangolo ABD: AE è l'altezza relativa al lato BD. ABE e AED sono due triangoli rettangoli che hanno in comune il cateto AE, la cui lunghezza è ignota, mentre sono note le lunghezze dei tre lati di ABD.

AE è data da:

$AE^2 = AB^2 - BE^2$

$AE^2 = AD^2 - ED^2$

Eguagliando le due espressioni si ha:

$AB^2 - BE^2 = AD^2 - ED^2$

Attribuiamo a BE il valore *x*:

$13^2 - x^2 = 17^2 - (BD - x)^2$

$169 - x^2 = 289 - (\sqrt{500} - x)^2$

$169 - x^2 = 289 - (500 - 2*x*\sqrt{500} + x^2)$

$169 - x^2 = 289 - 500 + 2*x*\sqrt{500} - x^2$

$169 - 289 + 500 = 2*x*\sqrt{500}$

$380 = 2*x*(10*\sqrt{5})$

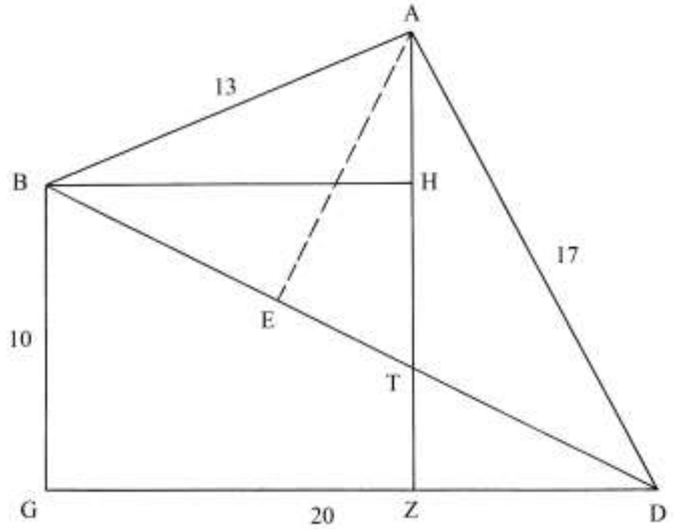
$x = 380/(20*\sqrt{5}) = 19/\sqrt{5} = BE$.

Il quadrato di $x = BE$ è:

$x^2 = (19/\sqrt{5})^2 = 361/5 = 72{,}2 = (72 + 1/5) = BE^2$, valore calcolato al passo 12 della procedura.

Un altro quadrilatero

Il quadrilatero della figura è uguale a quello del precedente problema:



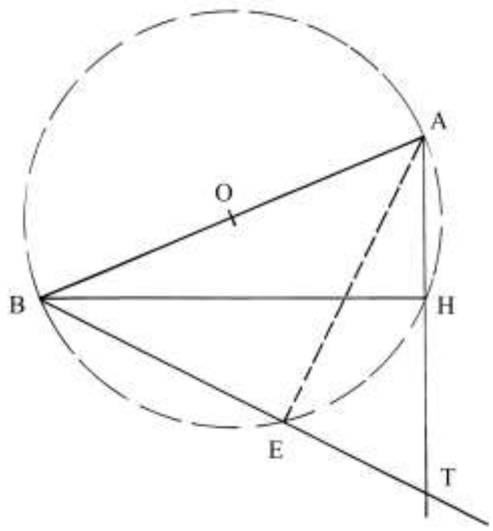
Le dimensioni dei lati del poligono sono scritte sulla figura.

BD è una delle due diagonali del quadrilatero.

Dal vertice A condurre la perpendicolare al lato GD: è AZ.

Sempre da A tracciare la perpendicolare alla diagonale BD (è AE) e da B disegnare la perpendicolare a AZ: è BH.

Consideriamo i triangoli rettangoli ABH e ABE: essi hanno l'ipotenusa AB in comune e sono entrambi inscritti nello stesso cerchio che ha diametro AB e centro nel suo punto medio O:



Erone richiama i dati calcolati nella soluzione del precedente problema: il quadrato della lunghezza di BE è (72 + 1/5). Quindi, l'altezza AE è:

$AE^2 = AB^2 – BE^2 = 13^2 – (72 + 1/5) = 169 – 72 – 1/5 = 96 + 4/5 = 96,8$ [Erone usa l'espressione equivalente "96 ½ 1/5 1/10"].

I triangoli BGD e AET sono simili e valgono le proporzioni:

GD : BG = AE : ET e

$GD^2 : BG^2 = AE^2 : ET^2$ da cui:

$ET^2 = (BG^2 * AE^2)/GD^2 = (10^2 * 96,8)/20^2 = (100 * 96,8)/400 = 96,8/4 = 24,2$ (24 + 1/5).

La somma delle lunghezze di BE e di ET fornisce quella di BT:

BT = BE + ET

$BT^2 = (BE + ET)^2 = [\sqrt{(72 + 1/5)} + \sqrt{(24 + 1/5)}]^2 = 72,2 + 2 * \sqrt{(72,5 * 24,5)} + 24,2 =$
$= 96,4 + 2 * \sqrt{1776,25} = 96,4 + 2*42,1455 = 180,691$, valore che Erone arrotonda per difetto a 180.

L'Autore procede poi a calcolare le lunghezze di HT e di AT con una serie di passi:

* sommare i quadrati delle lunghezze di AE e di ET: $AE^2 + ET^2 = 96,8 + 24,2 = 121$ [è il quadrato della lunghezza dell'ipotenusa AT];
* moltiplicare il quadrato della lunghezza di BT per quello della lunghezza di ET: $BT^2 * ET^2 = 180 * 24,2 = 4356$;
* dividere per la somma di $(AE^2 + ET^2)$: 4356/121 = 36 [quadrato della lunghezza di HT];
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{36} = 6$, lunghezza di HT.

I triangoli TZD e AZD sono simili.

La lunghezza di GZ è uguale a quella di BH:

GZ = BH.

La lunghezza di BH è ricavata da:

$BH^2 = BT^2 – HT^2 = 180 – 36 = 144$ e

$BH = \sqrt{144} = 12$.

La lunghezza di ZD è:

ZD = GD – GZ = GD – BH = 20 – 12 = 8.

I triangoli rettangoli BGD e TZD sono simili:

BG : TZ = GD : ZD, da cui

10 : TZ = 20 : 8 e

TZ = (10 * 8)/20 = 4.

Il segmento AH ha lunghezza che è data da:

$AH^2 = AB^2 – BH^2 = 13^2 – 12^2 = 169 – 144 = 25$ e

$AH = \sqrt{25} = 5$.

AT è lungo:

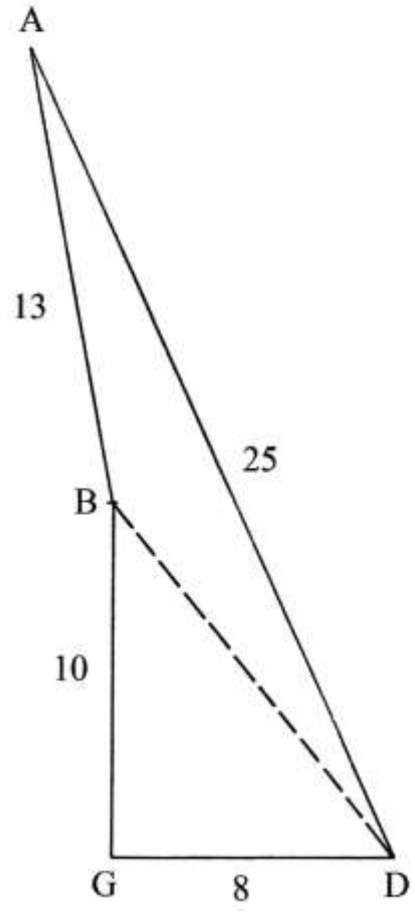
AT = AH + HT = 5 + 6 = 11.

AZ è lungo:

AZ = AT + TZ = 11 + 4 = 15.

Area di un trapezio scaleno

È dato il trapezio rettangolo ABGD che ha i lati lunghi come riportato in figura:



Esso ha un solo angolo retto nel vertice G, per cui può essere correttamente qualificato come scaleno o addirittura come un generico quadrilatero.

Il problema chiede di calcolare la sua area.

È da notare la particolare forma allungata del poligono: non esistono lati opposti paralleli.

Tracciare la diagonale BD. Il triangolo BGD è rettangolo e la sua ipotenusa, BD, è lunga:

$BD^2 = GB^2 + GD^2 = 10^2 + 8^2 = 100 + 64 = 164$.

BD è lunga:

$BD = \sqrt{164}$.

Erone introduce una procedura che contiene alcuni passi:

* richiamare il quadrato della lunghezza di BD: 164;
* calcolare il quadrato della lunghezza di AB: $AB^2 = 13^2 = 169$;
* sommare i quadrati delle lunghezze di BD e di AB: 164 + 169 = 333;
* calcolare il quadrato della lunghezza di AD: $AD^2 = 25^2 = 625$ [questo quadrato è maggiore della somma dei quadrati delle lunghezze di BD e di AD: 625 > 333: l'angolo ABD è *ottuso*];
* sottrarre la somma dei quadrati delle lunghezze di BD e di AB dall'ultimo quadrato: 625 – 333 = 292;
* dividere per 2: 292/2 = 146;
* moltiplicare per sé stesso: 146 * 146 = 21316;
* dividere per il quadrato della lunghezza di BD: 21316/164 = (129 + 160/164);
* sottrarre dal quadrato della lunghezza di AB: 169 – (129 + 160/164) = (39 + 4/164);
* moltiplicare per il quadrato di BD: (39 + 4/164) * 164 = 6400;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{6400} = 80$;

* dividere per 2: 80/2 = 40, area del triangolo ABD;
* calcolare l’area di BGD: $Area_{BGD} = (BG * GD)/2 = (10 * 8)/2 = 40$;
* sommare all’area di ABD: 40 + 40 = 80, area del quadrilatero ABGD.

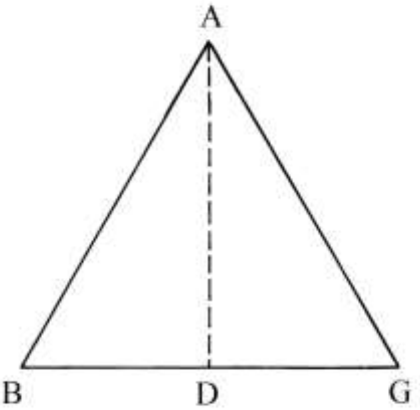
La soluzione del problema è stata ottenuta con la tracciatura della diagonale BD che ha diviso il quadrilatero in due triangoli, assai più gestibili.

AREE DEI POLIGONI REGOLARI

I problemi descritti nei paragrafi che seguono affrontano i metodi proposti da Erone per calcolare le aree dei poligoni regolari dal triangolo equilatero fino al dodecagono.

Area di un triangolo equilatero

Il triangolo ABG è equilatero e ha lati lunghi 10 unità:



Tracciare l'altezza AD.

Erone descrive alcune proprietà possedute dalle lunghezze dei lati del triangolo equilatero. BG è lungo il doppio di BD: il quadrato della lunghezza di BG è il quadruplo di quella di BD.

Il quadrato della lunghezza dell'altezza di AD è i 3/4 del quadrato della lunghezza di BG. Infatti:

$$AD^2 = AB^2 – BD^2 = BG^2 – (BG/2)^2 = ¾ * BG^2$$

Al contrario vale la relazione:

$$BG^2 = 4/3 * AD^2.$$

La proporzione fra i due quadrati può essere scritta come segue:

$$BG^2 : AD^2 = 4 : 3 = 16 : 12.$$

Erone eleva al quadrato il valore di BG^2:

$$(BG^2)^2 : AD^2 = 4^2 : 3$$
$$BG^4 : AD^2 = 16 : 3 \quad e$$
$$AD^2 : BG^4 = 3 : 16.$$

La proceduta utilizzata per calcolare l'area di ABG prevede i seguenti passi:

* moltiplicare per sé stessa la lunghezza di un lato: BG * BG = 10 * 10 = 100;
* moltiplicare il precedente prodotto per sé stesso: 100 * 100 = 10000;
* moltiplicare per 3/16: 10000 * 3/16 = 1875;
* estrarre la radice quadrata: √1875 = (43 + 1/3) area del triangolo equilatero ABG.

La procedura è sintetizzabile nella formula che segue:

$$\text{Area}_{ABG} = \sqrt{(lato^4 * 3/16)} = lato^2 * \sqrt{(3/16)} = lato^2 * (\sqrt{3})/4 \approx lato^2 * 0{,}433 \approx$$
$$\approx lato^2 * 13/30 \approx lato^2 * 0{,}4(3).$$

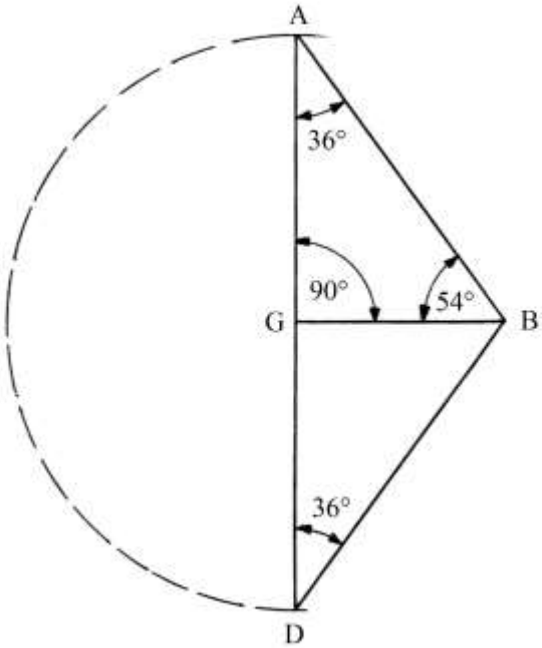
Oggi è possibile semplificare il calcolo dell'area di un triangolo equilatero usando il numero fisso *F = 0,433*:

$\text{Area}_{ABG} = F * lato^2 = 0{,}433 * BG^2 = 0{,}433 * 10^2 = 43{,}3$: il risultato è identico a quello ottenuto da Erone.

Nota: ai *numeri fissi* è dedicata l'APPENDICE I collocata alla fine di questo articolo.

Triangolo rettangolo e pentagono

AGB è un triangolo rettangolo con angolo retto nel vertice G:



L'angolo in A è ampio 2/5 di un angolo retto e cioè:

GAB = 2/5 * 90° = 36°.

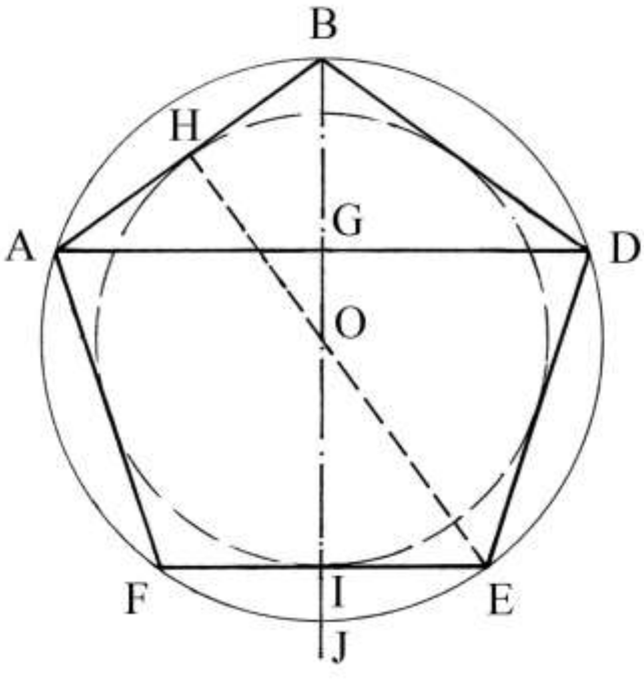
L'angolo ad esso complementare. GBA, è ampio 54°.

Il problema chiede di dimostrare la seguente eguaglianza:

$(AB + AG)^2 = 5 * AG^2$.

Prolungare verso il basso il cateto GD e fare centro in G: con raggio GA tracciare una semicirconferenza da A a D.

Il triangolo isoscele ABD è uno *gnomone aureo*, che è contenuto nel pentagono regolare ABDEF che esso contribuisce a generare:

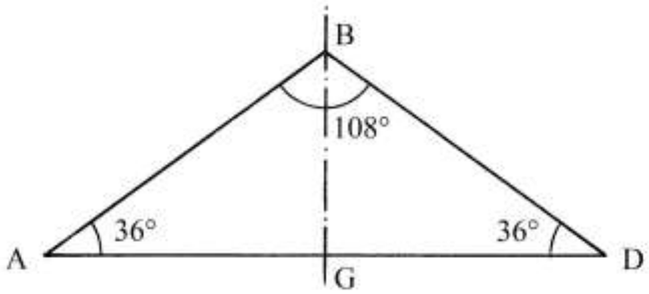


Collegare il punto medio di AB, H, con il vertice opposto: HE è un’altezza del pentagono, OH è il raggio del cerchio inscritto (tangente nei punti medi dei lati del poligono) e OE è il raggio del cerchio circoscritto.

Il segmento OH è un *apotema* del pentagono.

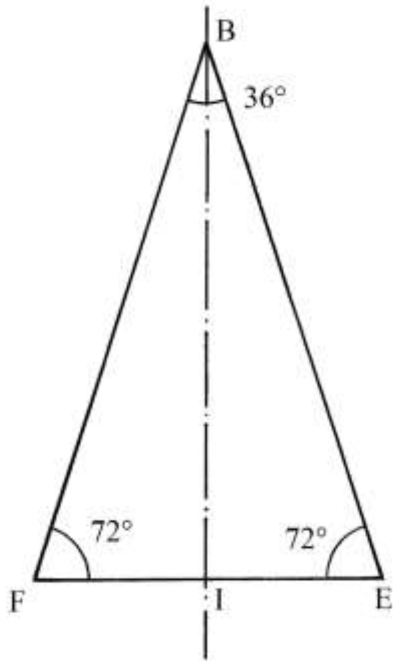
All’interno del pentagono regolare sono evidenziabili due tipi di triangoli isosceli:

* Lo *gnomone aureo* ABD:

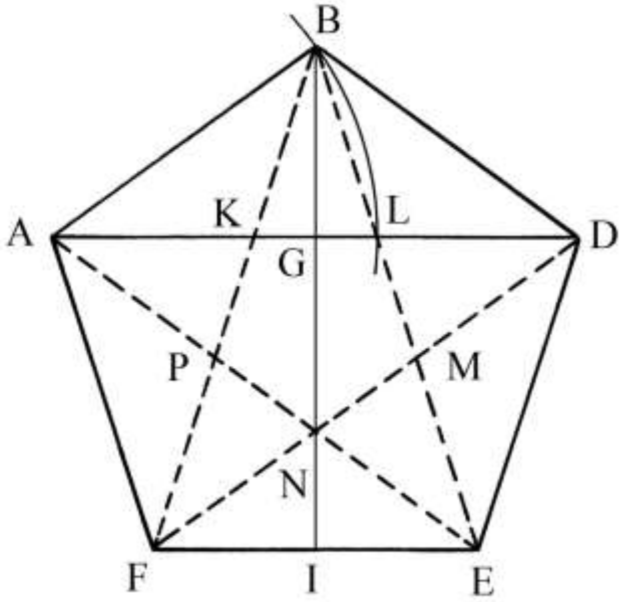


L’angolo nel vertice B è ampio 108° e cioè il triplo dell’ampiezza degli angoli nei vertici A e D. L’angolo in B è l’angolo interno dei pentagoni regolari.

* Il *triangolo aureo* FBE:



AB e BD sono due lati del pentagono regolare e AD è una sua diagonale:



In un pentagono regolare sono presenti *cinque* gnomoni aurei e *cinque* triangoli aurei come, rispettivamente, quelli che hanno le dimensioni di ABD e di FBE.

Disegnare le diagonali BE, BF, AE e DF. Sono così fissati i punti K, L, M, N e P che sono i vertici di un secondo pentagono regolare.

Tutte le diagonali sono parallele a un lato del pentagono.

Fare centro in A e con raggio AB tracciare un arco di circonferenza da B fino a tagliare AD nel punto L.

Fra la lunghezza di una diagonale e quella di un lato intercorre un'esatta proporzione che è nota come *sezione aurea* o ϕ:

$$AD : AB = \phi : 1.$$

Il valore di ϕ è:

$$\phi = (1 + \sqrt{5})/2 \approx 1,618\ldots$$

Ne consegue:

$$AD = \phi * AB.$$

- APPROFONDIMENTO -

Verifichiamo la validità dell'ipotesi di Erone:

$$(AB + AG)^2 = 5 * AG^2$$

Fissiamo i seguenti dati:

* AB = lato.
* AD = diagonale = d.
* AG = d/2.

Utilizziamo la costante ϕ:

* AD = ϕ * lato.
* AG = (ϕ * lato)/2.

Sostituiamo queste espressioni nella formula iniziale:

$$(lato + d/2)^2 = 5 * (d/2)^2$$

$$(lato + \phi * lato/2)^2 = 5 * (\phi * lato/2)^2$$

$$lato^2 * (1 + \phi + \phi^2/4) = 5 * \phi^2 * lato^2/4$$

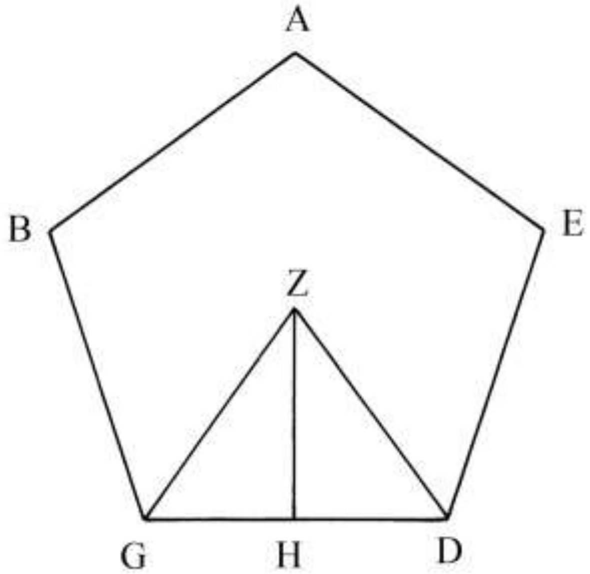
$1 + \phi + \phi^2/4 = 5 * \phi^2/4$
$(1 + \phi) = 4 * \phi^2/4$
$(1 + \phi) = \phi^2$.

Una delle proprietà che la costante ϕ possiede è la seguente:
$(1 + \phi) = \phi^2$.
L'ipotesi di Erone è corretta.

- -

Area di un pentagono regolare

Un pentagono regolare (e cioè equilatero e equiangolo) ha lati lunghi 10 unità.
Il problema chiede di calcolarne l'area.



Z è il centro dei cerchi circoscritto e inscritto rispetto al pentagono.

GZD è uno dei cinque triangoli isosceli che formano il poligono e ZH è la sua altezza relativa alla base GD.

L'angolo GZD è ampio 360°/5 = 72° e cioè 4/5 di un angolo retto.

Erone semplifica i rapporti intercorrenti fra le lunghezze dei diversi segmenti:

* $GZ * ZH = 5 * ZH^2$: non esiste un quadrato perfetto che sia quintuplo di un altro quadrato.
* $GZ * ZH \approx 81$ e $ZH^2 \approx 16$.
* $(GZ + ZH) : ZH \approx 9 : 4$.
* $GZ : ZH \approx 5 : 4$.
* $GZ^2 : ZH^2 \approx 25 : 16$.
* $GH : ZH \approx 3 : 4$.
* $GD : ZH \approx 6 : 4 \approx 3 : 2$.
* $GD^2 : (GD * ZH) \approx 3 : 2$.
* $GD * ZH = 2 * \text{Area}_{GZD}$.

Le semplificazioni introdotte da Erone portano a assimilare il triangolo GZH a un triangolo rettangolo i cui lati sono lunghi quanto la terna primitiva 3-4-5:

$GH : 3 \approx ZH : 4 \approx GZ : 5$.

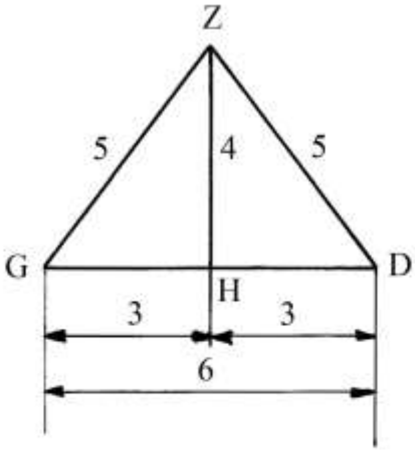
Dopo queste semplificazioni, Erone propone una soluzione approssimata per il calcolo dell'area del pentagono. La procedura per il calcolo dell'area contiene i seguenti passi:

* moltiplicare per sé stessa la lunghezza di un lato: 10 * 10 = 100;
* dividere per 3: 100/3 = 33 + 1/3:
* moltiplicare per 5: (33 + 1/3) * 5 = (166 + 2/3), area approssimata del pentagono ABGDE.

La formula che riassume la procedura è:

$$\text{Area}_{ABGDE} = 5 * (\text{lato}^2)/3 = 5/3 * \text{lato}^2.$$

La procedura impiegata da Erone può essere spiegata come segue. Egli ha approssimato il triangolo GZD a quello 3-4-5:



Nella realtà, il lato GD è lungo 10 unità; quindi l'altezza ZH del triangolo 3-4-5 vale proporzionalmente

$$GH : 3 = ZH : 4.$$

Ma GH = GD/2 = 10/2 = 5 per cui

$$5 : 3 = ZH : 4 \text{ da cui}$$

$$ZH = 5 * 4/3 = 20/3 = 6,(66).$$

L'area del triangolo GZD è data da:

$$\text{Area}_{GZD} = GD * ZH/2 = (10 * 20/3)/2 = 100/3 = (33 + 1/3).$$

L'area dell'intero pentagono è:

$$\text{Area}_{ABGDE} = 5 * \text{Area}_{GZD} = 5 * (33 + 1/3) = (166 + 2/3).$$

Il risultato è uguale a quello calcolato da Erone.

Verifichiamo i risultati ottenuti da Erone. Il numero fisso *f* necessario per calcolare l'*apotema* del pentagono è 0,688: ZH è un apotema.

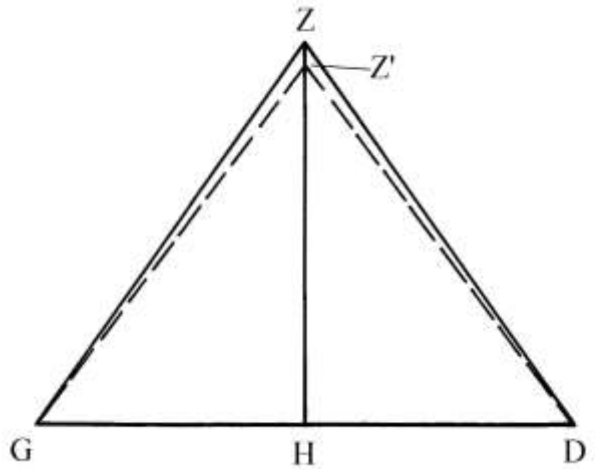
ZH = f * GD = 0,688 * 10 = 6,88: per ZH Erone ha ricavato la lunghezza di 6,(66).

Il numero fisso *F* usato per calcolare l'area del pentagono vale 1,72:

$$\text{Area}_{ABGDE} = F * \text{lato}^2 = F * GD^2 = 1,72 * 10^2 = 172.$$

Il risultato calcolato da Erone per l'area del pentagono – (166 + 2/3) – è approssimata per difetto.

Lo schema che segue confronta i due triangoli GZD:



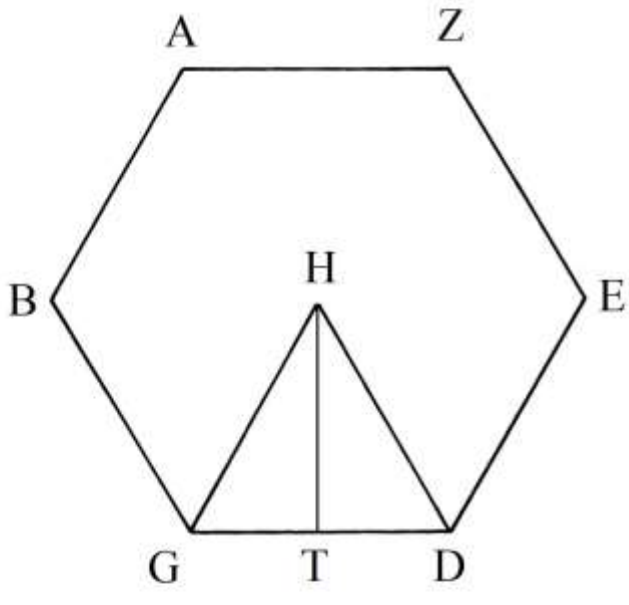
GZD è il triangolo che fa parte del pentagono regolare e GZ'D è il triangolo con le dimensioni utilizzate da Erone: i triangoli GZ'H e HZ'D hanno lunghezze proporzionali alla terna 3-4-5.

I risultati approssimati per difetto calcolati da Erone sono dovuti alla ridotta lunghezza di Z'H rispetto a quella di ZH.

Area di un esagono regolare

Un esagono regolare ha lati lunghi 10 unità.

Il problema chiede di calcolare la sua area.



Il punto H è il centro del poligono e dei cerchi circoscritto e inscritto.

GHD è uno dei sei triangoli equilateri nei quali è scomponibile l'esagono.

HT è l'altezza relativa alla base GD ed è anche un *apotema* dell'esagono e il raggio del cerchio inscritto.

Il triangolo GHD ha area uguale a 1/6 di quella dell'intero esagono: vale anche il rapporto inverso per cui l'area dell'esagono è *sei* volte quella di GHD.

La procedura impiegata da Erone per calcolare l'area di questo poligono contiene i seguenti passi:

1. moltiplicare la lunghezza di un lato per sé stessa: $10 * 10 = 100$;
2. moltiplicare per sé stesso: $100 * 100 = 10000$;
3. dividere per 4: $10000/4 = 2500$;
4. moltiplicare per 27: $2500 * 27 = 67500$;
5. estrarre la radice quadrata: $\sqrt{67500} = 259{,}807$, Area dell'esagono ABGDEZ.

La procedura è riassumibile con la formula che segue:

$$\text{Area}_{\text{ABGDEZ}} = \sqrt{27 * [(\text{lato}^2)^2/4]} = \text{lato}^2 * \sqrt{(27/4)} = \text{lato}^2 * \sqrt{6{,}75}.$$

Il valore di $\sqrt{6{,}75}$ è 2,5980 che Erone approssima a:

$$\sqrt{6{,}75} \approx 2{,}6 = 13/5.$$

Dato che l'area del triangolo equilatero GHD è calcolata da Erone con la formula

$\text{Area}_{\text{GHD}} = \text{lato}^2 * 13/30$, quella dell'esagono ABGDEZ è:

$$\text{Area}_{\text{ABGDEZ}} = 6 * \text{Area}_{\text{GHD}} = 6 * (\text{lato}^2 * 13/30) = \text{lato}^2 * 13/5.$$

- APPROFONDIMENTO -

Chiariamo l'origine del divisore 4 e del moltiplicatore 27 contenuti rispettivamente nei passi 3 e 4 della procedura.

Nel precedente paragrafo dedicato al calcolo dell'area del *triangolo equilatero* abbiamo incontrato la formula per l'area:

$$\text{Area}_{\text{TRIANGOLO EQUILATERO}} = \sqrt{(\text{lato}^4 * 3/16)}.$$

L'area dell'esagono è *sei* volte quella di uno dei suoi triangoli equilateri:

$$\text{Area}_{\text{ABGDEZ}} = 6 * \text{Area}_{\text{GHD}} = 6 * \sqrt{(\text{lato}^4 * 3/16)} = \sqrt{(36 * \text{lato}^4 * 3/16)} =$$
$$= \sqrt{(\text{lato}^4 * 27/4)}$$

L'area del triangolo equilatero vale:

$\text{Area}_{\text{GHD}} = \sqrt{1875}$ e quella dell'esagono è *sei* volte:

$$\text{Area}_{\text{ABGDEZ}} = 6 * \text{Area}_{\text{GHD}} = 6 * \sqrt{1875} = \sqrt{(36 * 1875)} = \sqrt{67500}.$$

Ecco spiegata l'origine delle due costanti.

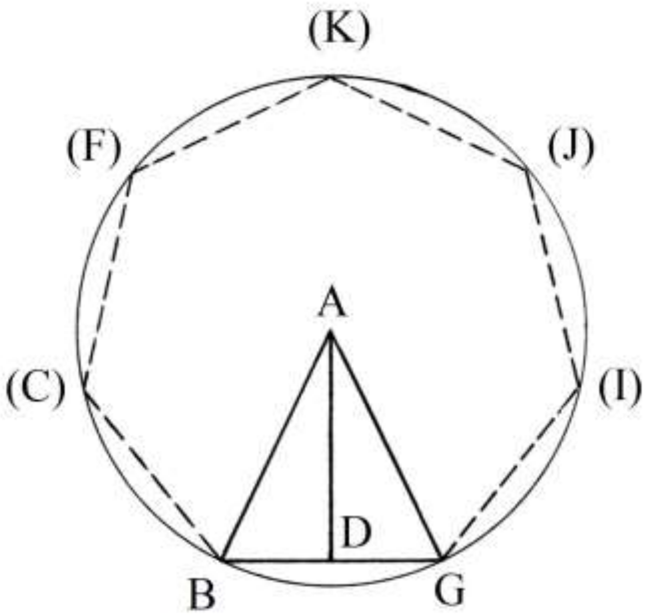
- -

Il numero fisso F usato per calcolare l'area di un esagono è 2,598:

$\text{Area}_{\text{ABGDEZ}} = F * \text{lato}^2 = 2{,}598 * GD^2 = 2{,}598 * 10^2 = 259{,}8$: il risultato ottenuto da Erone è esatto.

Area di un ettagono regolare

Un ettagono regolare è inscritto in un cerchio di centro A e raggio AB:



I lati dell'ettagono sono lunghi 10 unità.

Erone stima un rapporto approssimato fra la lunghezza del raggio del cerchio circoscritto e quella del lato:

$$AB : BG \approx 8 : 7.$$

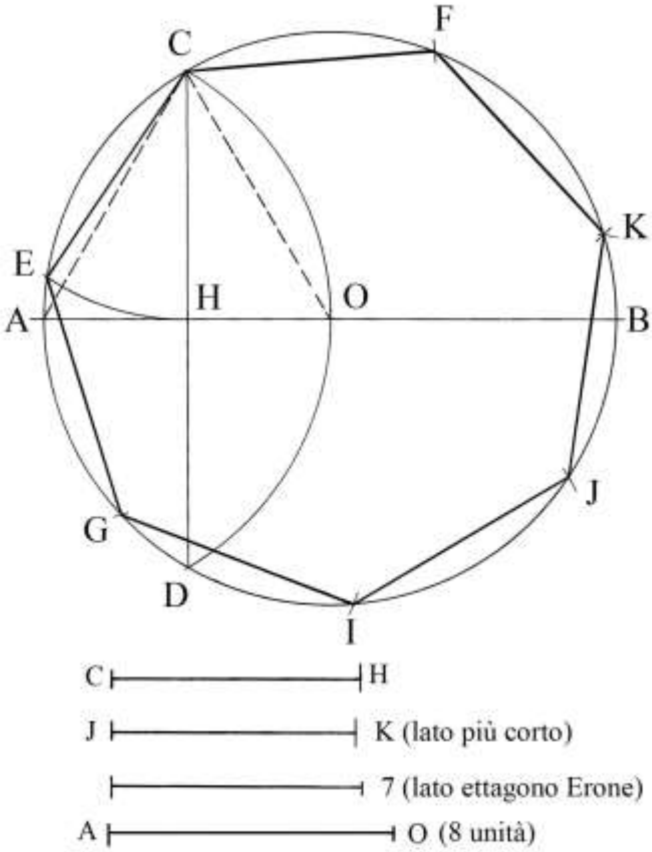
La costruzione dell'ettagono regolare, ma *approssimato*, muove dalla tracciatura del lato di un esagono regolare inscritto nello stesso cerchio circoscritto all'ettagono: il lato dell'esagono è lungo quanto il raggio del cerchio.

L'ettagono regolare non è costruibile con riga e compasso, ma lo diviene impiegando altre geometrie: gli origami, il metodo neusis e il trisettore tomahawk.

Con la procedura proposta da Erone viene implicitamente suggerita la costruzione dell'ettagono che è descritta nell'APPROFONDIMENTO che segue.

- APPROFONDIMENTO -

Il grafico che segue presenta la costruzione dell'ettagono approssimato inscritto in un cerchio di centro O e raggio convenzionale OA, lungo 8 unità, come ipotizzato da Erone.



La costruzione è così ricavata. AB è il diametro orizzontale.

Fare centro in A e con raggio AO tracciare l'arco COD: la corda CD taglia il raggio OA nel suo punto medio, H.

ACO è un triangolo equilatero e CH è una sua altezza.

Ricordiamo la relazione intercorrente fra la lunghezza dell'altezza, *h*, e quella di un lato, ℓ, di un triangolo equilatero:

$$CH = h = (\sqrt{3})/2 * AO = (\sqrt{3})/2 * \ell \approx 0,866 * \ell.$$

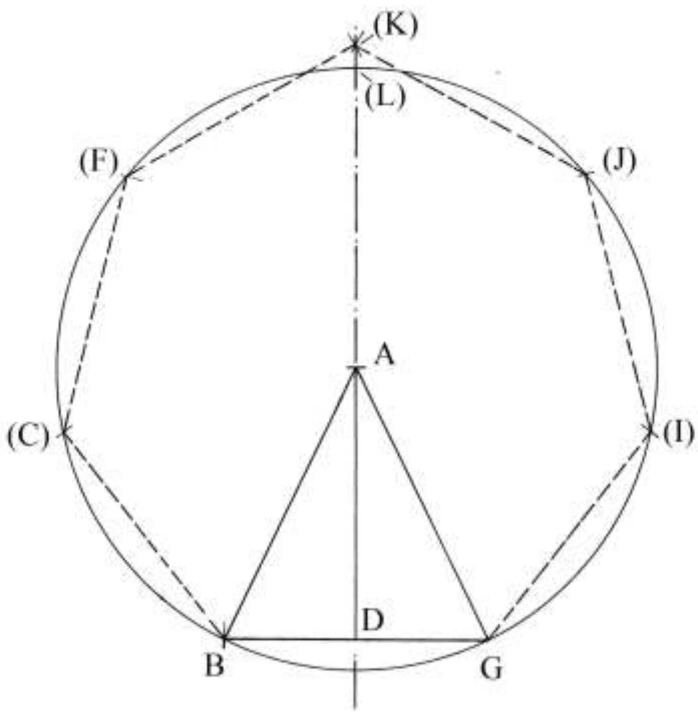
È pure corretto affermare che l'altezza CH è uguale a quella di un *apotema* dell'esagono regolare inscritto nello stesso cerchio.

La lunghezza di CH è, con buona approssimazione, uguale a quella del lato dell'ettagono inscritto: riportare sulla circonferenza quella lunghezza.

KFCEGIJK è l'ettagono: per costruzione, *sei* dei sette lati hanno lunghezze uguali a quella di CH: sono CE, EG, GI, IJ, CF e FK. Il settimo lato, JK, è leggermente più corto.

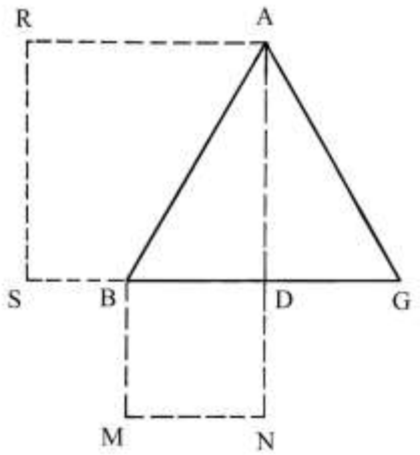
Nella parte inferiore della figura qui sopra sono confrontate le lunghezze interessate da questa costruzione e quella ricavata dall'ipotesi di Erone.

Lo schema che segue mostra che la lunghezza del lato dell'ettagono basata sull'ipotesi di Erone è leggermente approssimata per eccesso: il vertice (K) cade fuori dal cerchio:



- -

In un triangolo equilatero, fra il quadrato della lunghezza dell'altezza e quello della metà di un lato intercorre una proporzione esatta:



L'altezza AD = h del triangolo equilatero ABG è legata alla lunghezza dei lati, ℓ:

$AD = (\sqrt{3})/2 * AB$ e

$h = (\sqrt{3})/2 * \ell$.

Il segmento BD è lungo:

$BD = BG/2 = \ell/2$.

Il quadrato di h è:

$h^2 = [\ell * (\sqrt{3})/2]^2 = 3/4 * \ell^2$.

Il quadrato di BD è:

$BD^2 = (\ell/2)^2 = \ell^2/4$.

Vale la proporzione:

$AD^2 : BD^2 = 3/4 * \ell^2 : \ell^2/4 = 3 : 1$.

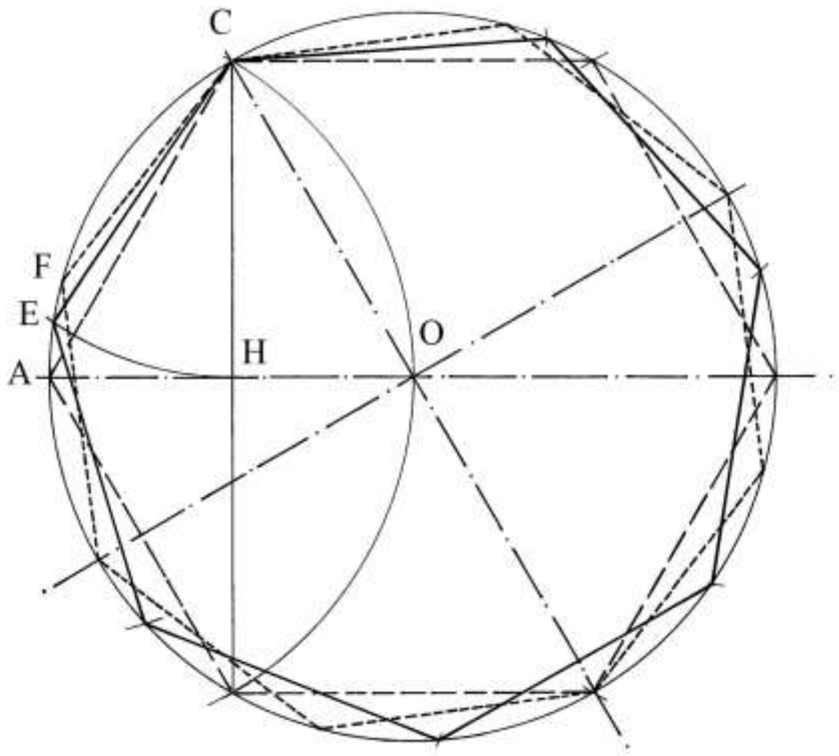
Per i suoi calcoli, occorrenti per ricavare l'area dell'ettagono, Erone approssima il rapporto fra i due quadrati da (3 : 1) a (49 : 16): ne consegue una proporzione di 7 : 4 fra le lunghezze di AD e di BD:

$AD : BD \approx \sqrt{49} : \sqrt{16} \approx 7 : 4.$

Da tutto ciò proviene la proporzione approssimata:

$AD : BG = AD : 2*BD \approx 7 : 2*4 = 7 : 8.$

La lunghezza del lato dell'ettagono è compresa fra quelle del lato dell'esagono e del lato dell'ottagono, tutti e tre inscritti nello stesso cerchio:



Infatti, valgono le relazioni:

$CA > CH > CF$ e

$CA > CE > CF$.

La procedura impiegata da Erone per calcolare l'area di un ettagono regolare che ha lati lunghi 10 unità è la seguente:

* moltiplicare la lunghezza di un lato per sé stessa: $10 * 10 = 100$;
* moltiplicare per 43: $100 * 43 = 4300$;
* dividere per 12: $4300/12 = (358 + 1/3)$, area dell'ettagono.

In sintesi, l'area di questo poligono è data da:

$Area_{ETTAGONO} = 43/12 * lato^2$.

Il numero fisso *f* usato per calcolare la lunghezza dell'apotema AD è 1,038:

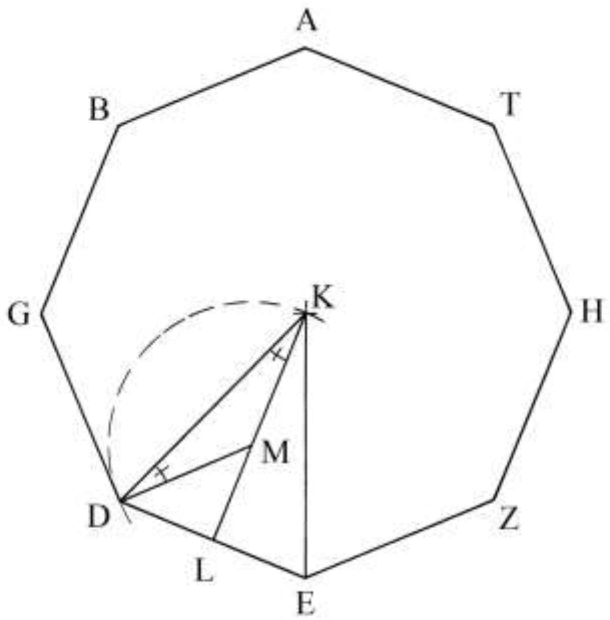
$AD = f * lato = f * BG = 1{,}038 * 10 = 10{,}38$.

Il numero fisso *F* per il calcolo dell'area vale F = 3,634 e l'area è:

$Area_{ETTAGONO} = F * BG^2 = 3{,}634 * 10^2 = 363{,}4$: il valore ricavato da Erone è leggermente approssimato per difetto.

Area di un ottagono regolare

Un ottagono regolare ha lati lunghi 10 unità: deve essere calcolata la sua area.



K è il centro del poligono. Tracciare i segmenti KD e KE: essi sono due raggi del cerchio in cui è inscritto l'ottagono. KDE è un triangolo isoscele.

Disegnare l'altezza KL: questo segmento è un apotema dell'ottagono e quindi è un raggio del cerchio inscritto.

L'angolo DKE è ampio un ottavo dell'angolo giro:

DKE = 360°/8 = 45°.

L'angolo DKL è ampio un quarto di un angolo retto:

DKL = DKE/2 = 45°/2 = 90°/4 = 22,5°.

Costruire in D l'angolo KDM ampio quanto quello DKL: esso è delimitato dal segmento DM.

DKM è un triangolo isoscele perché possiede due angoli di uguale ampiezza: per verificare questa proprietà, fare centro in M e con raggio MD = MK disegnare un arco da D a K.

L'angolo DLM è retto.

Nel triangolo isoscele DKE occorre calcolare l'ampiezza degli angoli KDE e KED: i due angoli hanno uguale ampiezza:

KDE = KED = (180° – DKE)/2 = (180° – 45°)/2 = 135°/2 = 67,5°.

L'angolo MDL è ampio:

MDL = KDE – KDM = 67,5° – 22,5° = 45°.

L'angolo DML è ampio:

DML = 180° – DLM – MLD = 180° – 90° – 45° = 45°.

Il triangolo DML è rettangolo e isoscele.

Fra i quadrati costruiti su DM e su ML esiste una precisa relazione:

$DM^2 = 2 * ML^2$.

Fra le lunghezze di DM e di ML esiste il rapporto di √2 che Erone approssima:

$\sqrt{2} \cong 17/12 \cong 1,41(66)$, invece di 1,4142…

Anche il rapporto fra le lunghezze di KM e di ML è uguale a $\sqrt{2} \cong 17/12$.

Fra le lunghezze di KL e di ML il rapporto, approssimato, è:

KL/ML = (KM + ML)/ML = KM/ML + ML/ML = 17/12 + 1 = (17 + 12)/12 = 29/12.

Fra le lunghezze di KL e di DE vi è un'altra proporzione:

DE = 2 * DL = 2 * ML e

KL : DE = (29/12) * ML : 2 * ML = 29 : 24 per cui

DE = 24/29 * KL.

Il quadrato costruito sul lato DE è in rapporto con il rettangolo che ha lati lunghi DE e KL:

DE^2 : 24 = DE * KL : 29. Infatti:

DE^2 : DE * KL = 24 : 29

DE : KL = 24 : 29, come è stato appena dimostrato.

Fra il quadrato della lunghezza di DE e l'area del triangolo KDE vale un'altra proporzione:

DE^2 : Area $_{KDE}$ = DE^2 : (KL * DE)/2 = DE : KL/2 = 24 : 29/2 = 24 : 14,5.

Per l'area dell'ottagono si ha:

DE^2 : Area $_{OTTAGONO}$ = 1 : 8 * Area $_{KDE}$ = 24 : (14,5 * 8) = 24 : 116 = 6 : 29.

L'area dell'ottagono è data da:

Area $_{OTTAGONO}$ = 29/6 * $lato^2$ = 29/6 * DE^2 = 29/6 * 10^2 = (483 + 1/3).

Il numero fisso *f* per calcolare l'apotema è 1,207 e KL è lunga:

KL = f * DE = 1,207 * 10 = 12,07.

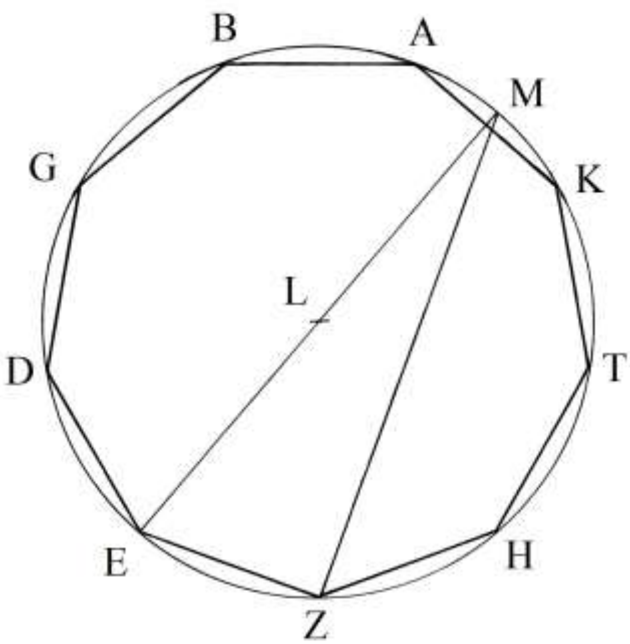
Il numero fisso *F* per ricavare l'area del poligono è F = 4,828 e l'area è data da:

Area $_{OTTAGONO}$ = F * $lato^2$ = F * DE^2 = 4,828 * 10^2 = 482,8.

Il risultato calcolato da Erone è quasi esatto.

Area di un ennagono regolare

Lo schema che segue presenta un ennagono regolare inscritto in un cerchio di centro L. I suoi lati sono lunghi 10 unità:



Il problema chiede di calcolare la sua area.

Anche l'ennagono regolare non è costruibile con riga e compasso, ma lo è con altre geometrie: con gli origami, con la *tecnica neusis* e con il *trisettore tomahawk*.

Il diametro passante per E e per L incontra la circonferenza nel punto M: da questo tracciare la corda MZ. Il punto M è il medio dell'arco AK.

Il triangolo EMZ è rettangolo perché inscritto in un cerchio: l'angolo retto è in Z. EZ e ZM sono i suoi cateti e EM è l'ipotenusa.

Erone stabilisce un'approssimazione: la corda EZ è *grosso modo* lunga un terzo del diametro EM e, di conseguenza, il quadrato costruito su EM è nove volte più grande di quello disegnato su EZ:

$EZ \cong 1/3 * EM$ e

$EM^2 = 9 * EZ^2$.

La lunghezza del cateto ZM è:

$ZM^2 = EM^2 – EZ^2 = 9 * EZ^2 – EZ^2 = 8 * EZ^2$.

$ZM = EZ * \sqrt{8} = EZ * 2 * \sqrt{2}$.

Fra i quadrati delle lunghezze di ZM e di EZ intercorre una proporzione:

$ZM^2 : EZ^2 = 8 : 1 = 8*36 : 1*36 = 288 : 36$.

La moltiplicazione per 36 non è stata scelta a caso: il numero 288 non è un quadrato perfetto, ma esso è vicinissimo a $289 = 17^2$, per cui approssimando la proporzione precedente può essere scritta come segue:

$ZM^2 : EZ^2 \cong 289 : 36$ e quindi

$ZM : EZ \cong \sqrt{289} : \sqrt{36} = 17 : 6 = 17*6 : 6*6 = 102 : 36$.

L'area del triangolo MEZ è:

$Area_{MEZ} = EZ * ZM/2 = EZ * (17/6 * EM)/2 = EZ * EM * 17/12$.

Il quadrato costruito su EZ vale:

$EZ^2 = (EM/3)^2 = EM^2/9$.

Il rapporto fra il quadrato di EZ e l'area del triangolo MEZ è:

$EZ^2 : Area_{MEZ} = EM^2/9 : EZ * EM * 17/12 = EM/9 : EZ * 17/12$.

Per Erone, il quadrato costruito su EZ sta all'area dell'intero ennagono come 12 a 76,5: questo rapporto ha la seguente origine:

$12 : 76,5 = 24 : 153 = 8 : 51$.

La procedura usata da Erone è la seguente:

* moltiplicare per sé stessa la lunghezza di un lato del poligono: $10*10 = 100$;
* moltiplicare per 51: $100 * 51 = 5100$;
* dividere per 8: $5100/8 = (637 + ½)$, area dell'ennagono.

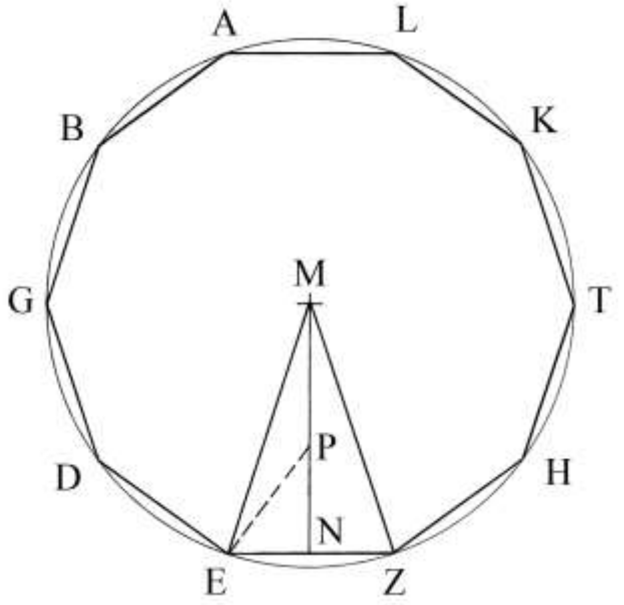
Il numero fisso *F* usato per calcolare l'area dell'ennagono è F = 6,182.

L'area del poligono è:

$Area_{ENNAGONO} = F * lato^2 = F * EZ^2 = 6,182 * 10^2 = 618,2$. Il risultato offerto da Erone è approssimato per eccesso.

Area di un decagono regolare

Un decagono regolare è inscritto in un cerchio di centro M e raggio ME = MZ:



Come in tutti gli esempi di poligoni regolari studiati da Erone, anche il decagono ha lati lunghi 10 unità.

Il problema domanda l'area del poligono.

Tracciare i raggi ME e MZ e l'altezza MN. EMZ è un triangolo isoscele e MN è una sua altezza, oltre ad essere un apotema del decagono.

L'angolo nel vertice M è ampio:

EMZ = 360°/10 = 36° = 2/5 * 90°.

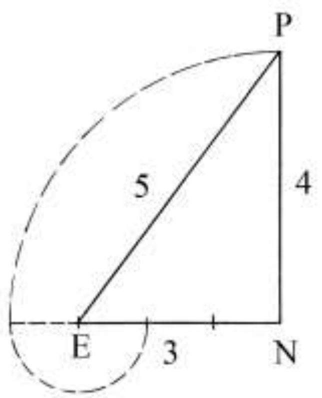
L'angolo EMN è ampio la metà e cioè:

EMN = ½ * EMZ = 18° = 1/5 * 90°.

Costruire il triangolo EPN con lunghezze legate da rapporti precisi:

EP : NP = 5 : 4 e

EP : EN = 3 : 5.



Il triangolo rettangolo EPN ha lati lunghi in proporzione agli elementi della terna pitagorica 3-4-5.

Erone fissa le due seguenti uguaglianze:

EP = PM e

EN = NZ, concetto più che ovvio.

Fra EZ e MN esiste una proporzione:

EZ = 2 * EN

EZ : MN = 2 * EN : (MP + PN) = 2*3 : (EP + PN) = 6 : (5 + 4) = 6 : 9 = 2 : 3.

Il rettangolo che ha dimensioni EZ e MN ha area:

$EZ * MN = 6 * (MP + PN)$ $6 * 9 = 54$.

Fra il quadrato costruito sul lato EZ e il rettangolo EZ * MN esiste la seguente proporzione:

$EZ^2 : EZ * MN = EZ : MN = 6 : 9 = 2 : 3$.

Fra il quadrato su EZ e l'area del triangolo EMZ vi è una proporzione:

EZ^2 : Area $_{EMZ}$ $= EZ^2 : EZ*MN/2 = EZ : MN/2 = 6 : 9/2 = 2 : 1,5$

e l'inverso vale 1,5 : 2.

L'area del decagono è proporzionale a 10 volte il quadrato costruito sul lato EZ e quindi è proporzionale a 10 volte il rapporto (1,5 : 2) * 10 = 15 : 2.

La procedura usata da Erone si conclude con i seguenti passi:

* moltiplicare la lunghezza di un lato per sé stessa: 10*10 = 100;
* moltiplicare per 15: 100 * 15 = 1500;
* dividere per 2: 1500/2 = 750, area del decagono.

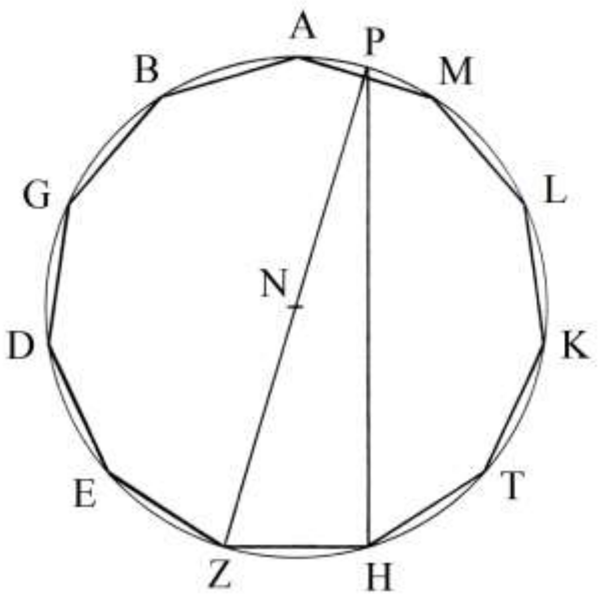
Usando il numero fisso relativo al decagono, F = 7,694, l'area del poligono è:

Area $_{DECAGONO}$ $= F * EZ^2 = 7,694 * 10^2 = 769,4$.

Il risultato ottenuto da Erone è approssimato per difetto.

<u>Area di un endecagono regolare</u>

Un endecagono regolare è inscritto in un cerchio di centro N e raggio NZ. I suoi lati sono lunghi 10 unità.



Il problema chiede di calcolare la sua area.

Tracciare il diametro passante per N e per Z: esso taglia la circonferenza nel punto P. Collegare P con H. Il triangolo ZPH è rettangolo perché è inscritto nel cerchio e l'angolo in H è retto.

Erone introduce un rapporto approssimato fra le lunghezze di ZP e di ZH:

$ZP : ZH = 25 : 7$.

Fissa poi il rapporto fra le lunghezze di PH e di ZH:

$PH : ZH = 24 : 7$. Questo rapporto è esatto perché si ha:

$PH^2 = ZP^2 – ZH^2 = (25/7 * ZH)^2 – ZH^2 = (625 – 49/49 * ZH^2 = 576/49 * ZH^2$. Ne consegue:

$PH = \sqrt{(576/49)} * ZH = 24/7 * ZH.$

L'area del triangolo ZPH è proporzionale a:

$Area_{ZPH} = ZH * PH/2 = 24 * 7/2 = 84.$

Il quadrato costruito sul lato ZH ha area proporzionale a $7^2 = 49$.

Il rapporto fra l'area del quadrato costruito su ZH e quella del triangolo ZPH è:

$ZH^2 : Area_{APH} = 49 : 84 = 7 : 12.$

Erone fissa poi una proporzione fra l'area di ZPH e quella dell'intero endecagono:

$Area_{ZPH} : Area_{ENDECAGONO} = 2 : 11.$

La combinazione delle diverse proporzioni porta Erone a un'altra:

$ZH^2 : Area_{ENDECAGONO} = 7 : 66.$

La procedura è riassunta nei seguenti passi:

* moltiplicare la lunghezza di un lato per sé stessa: 10*10 = 100;
* moltiplicare per 66: 100 * 66 = 6600;
* dividere per 7: 6600/7 = (942 + 6/7), area dell'endecagono.

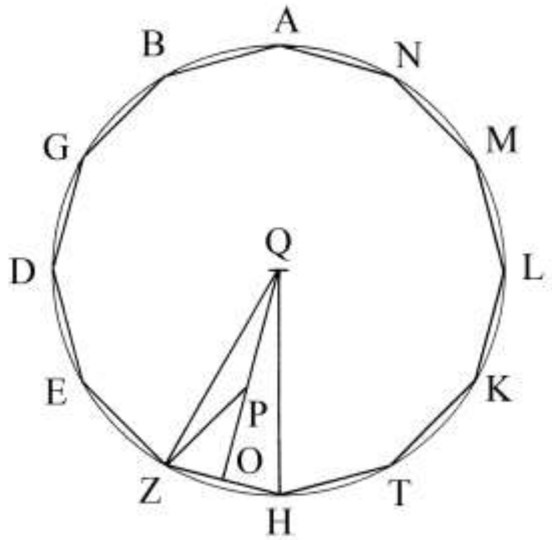
Il numero fisso F per l'endecagono vale 9,366. L'area calcolata con esso è:

$Area_{ENDECAGONO} = F * lato^2 = 9,366 * 10^2 = 936,6.$

Il risultato di Erone è leggermente approssimato per eccesso.

Area di un dodecagono regolare

Un dodecagono regolare è inscritto in un cerchio di centro Q e raggio QZ:



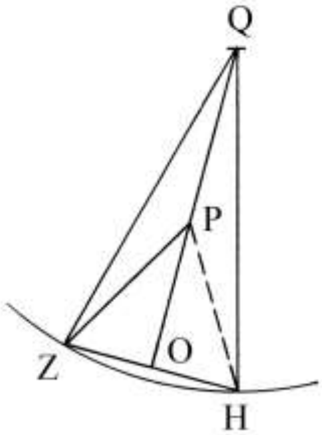
Tracciare i raggi QZ e QH e l'altezza QO.

L'angolo ZQH è ampio:

ZQH = 360°/12 = 30° = 1/3 * 90°.

Gli angoli ZQO e OQH hanno uguale ampiezza: 15° e cioè 1/6 di un angolo retto.

Costruire un angolo PZO ampio 15°. Il triangolo ZPO è rettangolo e l'angolo ZPO è ampio 30°:



Verifichiamo l'ampiezza degli angoli di ZQO. I suoi angoli misurano:

* ZQO = ZQH/2 = 30°/2 = 15°;
* l'angolo ZOQ è retto;
* l'ampiezza dell'angolo QZO è:

QZO = 180° – ZQO – ZOQ = 180° – 15° – 90° = 75°.

L'angolo PZO è ampio:

PZO = QZO – QZP = 75° – 15° = 60° e l'angolo *complementare* ZPO è ampio:

ZPO = 90° – PZO = 90° – 60° = 30°.

Il triangolo rettangolo ZPO è metà del triangolo equilatero ZPH.

Il quadrato costruito su PO ha area tripla di quello costruito su ZO:

$PO^2 = 3 * ZO^2$. Infatti, PO è un'altezza del triangolo equilatero ZPH e la sua lunghezza è:

$PO = (\sqrt{3})/2 * ZH = \sqrt{3} * ZO$. I loro quadrati sono:

$PO^2 = [(\sqrt{3})/2 * ZH^2] = (\sqrt{3} * ZO)^2 = 3 * ZO^2$.

Fra le lunghezze di PO e di OZ Erone introduce il rapporto approssimato 7 : 4:

PO : OZ ≅ 7 : 4 = 1,75.

In realtà, il rapporto esatto è:

PO : OZ = √3 : 1 ≈ 1,732 : 1.

Fra le lunghezze di ZH e di PO vale una proporzione:

ZH : PO = 2 * ZO : PO = 2*4 : 7 = 8 : 7.

Erone poi stabilisce un rapporto fra le lunghezze di ZH e di QO:

ZH : QO = 8 : 15.

Fra l'area del quadrato costruito su ZH e quella del rettangolo che ha lati ZH e PO la proporzione è ancora 8 : 15.

Infine, fra l'area del quadrato costruito su ZH e quella del triangolo ZQH vi è una relazione:

$ZH^2 : \text{Area}_{ZQH} = ZH^2 : (ZH*PO/2) = ZH : PO/2 = 8 : 15/2 = 8 : 7{,}5$.

La proporzione fra l'area del quadrato costruito su ZH e l'area dell'intero dodecagono è:

$ZH^2 : \text{Area}_{DODECAGONO} = ZH^2 : 12 * \text{Area}_{ZQH} = 8 : (7{,}5*12) = 8 : 90 = 4 : 45$.

La procedura per il calcolo dell'area di questo poligono prevede i seguenti passi:

* moltiplicare la lunghezza di un lato per sé stessa: 10*10 = 100;
* moltiplicare per 45: 100 * 45 = 4500;
* dividere per 4: 4500/4 = 1125, area del dodecagono regolare.

Con il numero fisso F = 11,196, l'area del poligono è:

$\text{Area}_{DODECAGONO} = F * \text{lato}^2 = 11{,}196 * 10^2 = 1119{,}6$.

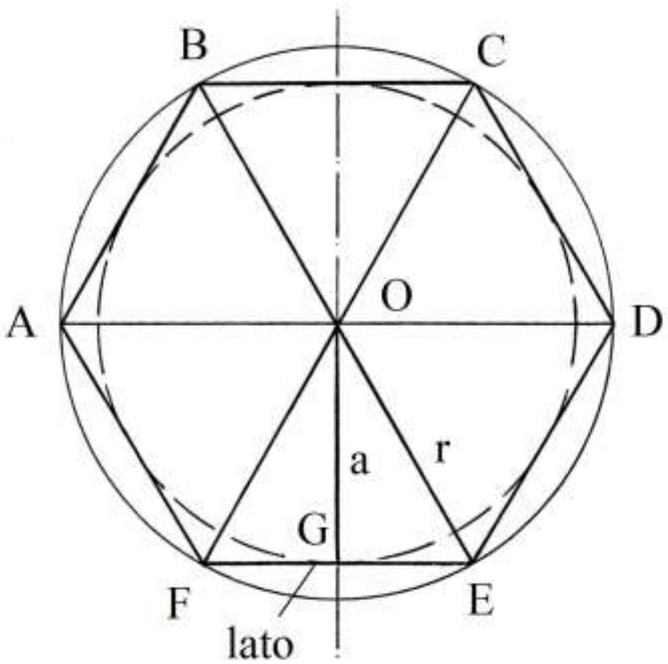
Il valore calcolato da Erone è leggermente approssimato per eccesso.

APPENDICE I
===========

I poligoni regolari e i numeri fissi

Nella geometria pratica accade spesso di dover effettuare calcoli relativi alle lunghezze e alle superfici di poligoni regolari.

In un generico poligono regolare si chiama *apotema* – a – l'altezza del triangolo isoscele che ha per base un lato e per vertice il centro O, centro del poligono e delle due circonferenze, circoscritta e inscritta. L'apotema OG è il raggio della circonferenza inscritta e i segmenti OF e OE sono i raggi della circonferenza circoscritta al poligono (in questo caso un *esagono*): nell'esempio, il triangolo OFE è equilatero e OG è una sua altezza.



La lunghezza dell'apotema, *a*, è calcolabile con il teorema di Pitagora applicato ai triangoli rettangoli OGF e OGE:

$$a = \sqrt{[r^2 - (\ell/2)^2]}$$ dove:

* a è l'apotema;
* $\ell/2$ è la lunghezza dei segmenti FG e GE che sono lunghi metà del lato FE.

In un poligono regolare la lunghezza del lato ℓ e quella del raggio r sono direttamente proporzionali.

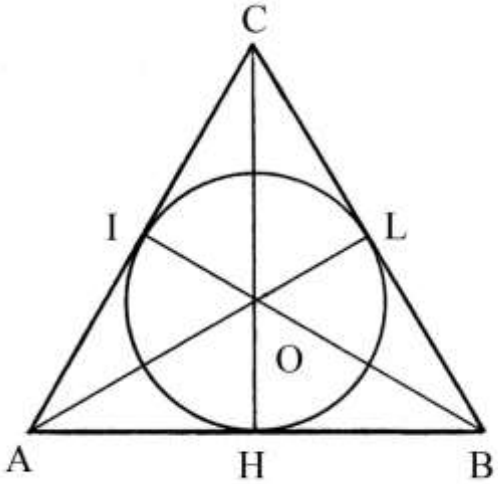
Il rapporto fra la lunghezza dell'apotema e quella del lato è un *numero fisso* f:

$$f = a/\ell.$$

f è costante per un qualsiasi poligono regolare con un identico numero di lati.

L'apotema di un triangolo equilatero

In un triangolo equilatero, le altezze relative ai tre lati si intersecano in un punto, O, che è chiamato *ortocentro*:



Il punto O divide ciascuna delle altezze in due parti di lunghezza differente: nel caso dell'altezza CH, OH è lungo la *metà* di OC e 1/3 della lunghezza complessiva di CH.

Per il teorema di Pitagora applicato al triangolo rettangolo CHB, l'altezza CH è così determinata:

$CH^2 = CB^2 – HB^2$

Ma HB = ½ * AB = ½ * CB per cui

$CH^2 = CB^2 – (1/2 * CB)^2 = ¾ * CB^2$

$CH = \sqrt{(3/4 * CB^2)} = CB * (\sqrt{3})/2 \approx CB * 0,866$

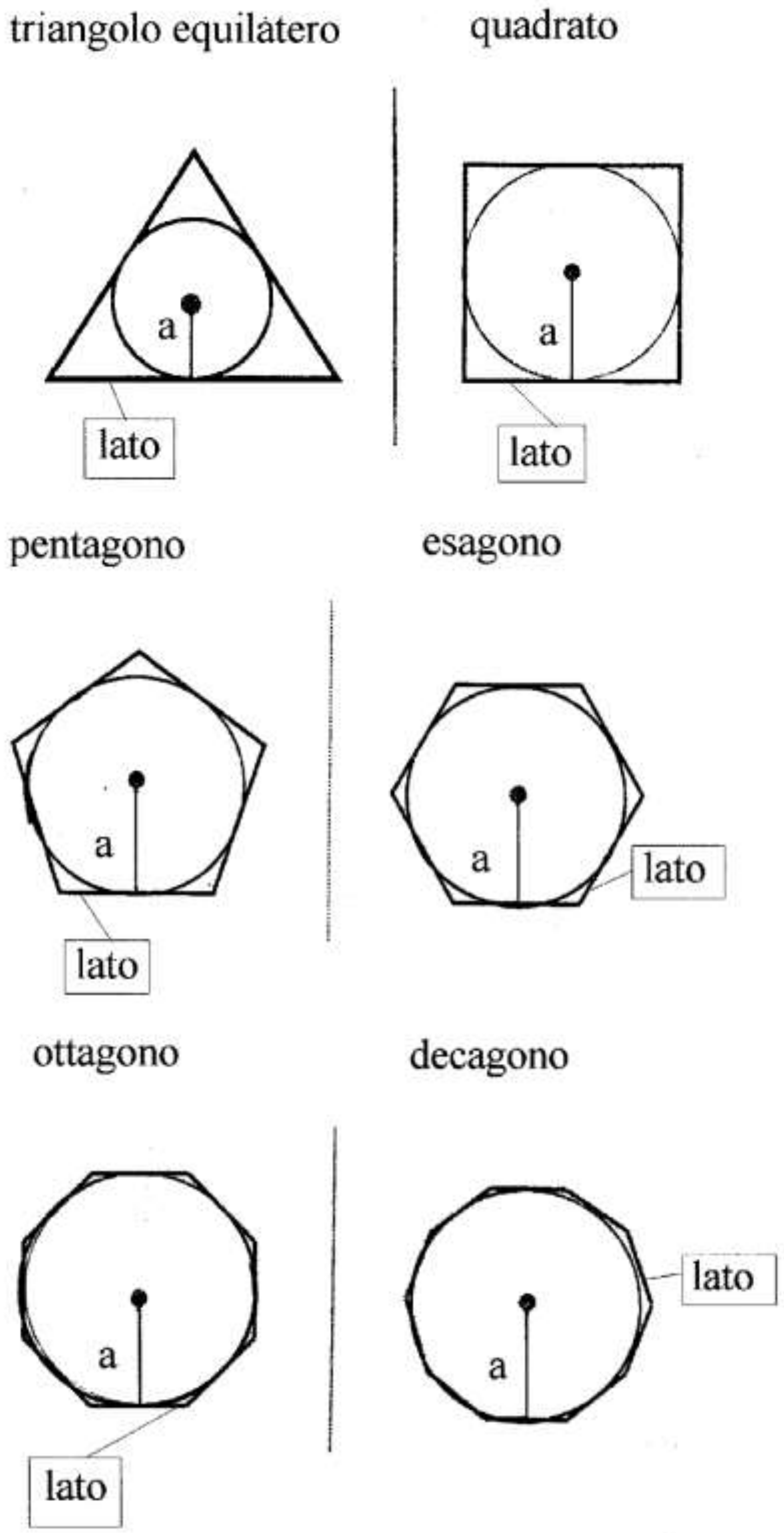
Il segmento OH è lungo:

$OH = 1/3 * CH = 1/3 * [CB * (\sqrt{3})/2] = CB * (\sqrt{3})/(3 * 2) = (\sqrt{3})/6 * CB =$
$= CB * 0,28867 \approx CB * 0,289.$

L'apotema del triangolo equilatero è lungo 0,289 volte il lato.

Gli apotemi di alcuni poligoni regolari

Le figure che seguono descrivo gli apotemi dei sei più comuni poligoni regolari:



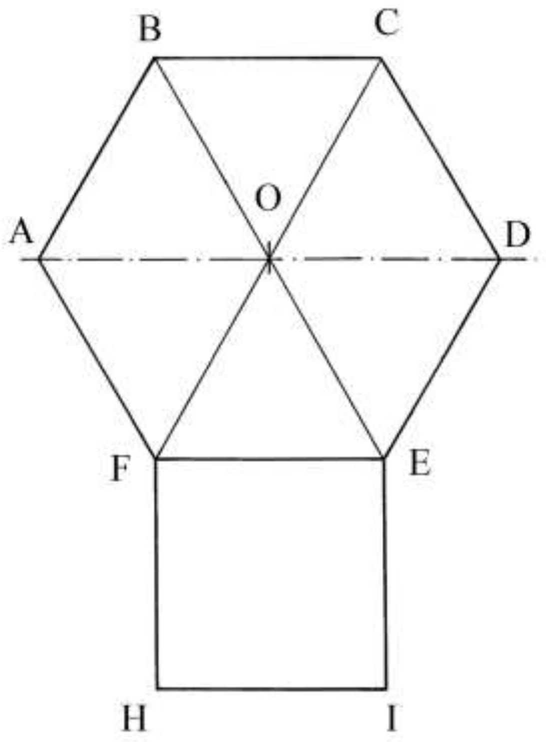
La tabella che segue fornisce i *numeri fissi* per i più comuni poligoni, in grado di calcolare rapidamente il valore di a con la formula:

$$a = f * \ell$$

Poligono regolare	*Numero fisso f*
Triangolo equilatero	0,289
Quadrato	0,5
Pentagono	0,688
Esagono	0,866
Ettagono	1.038
Ottagono	1,207
Ennagono	1,374
Decagono	1,539
Endecagono	1,703
Dodecagono	1,866

In un qualsiasi poligono regolare il rapporto fra la sua area e quella del quadrato costruito su un suo lato (ℓ) è costante ed è un altro *numero fisso*, indicato con la lettera F maiuscola, per distinguerlo dall'altro numero fisso (f):

$$\text{Area} = F * \ell^2$$



Il numero F è un numero fisso caratteristico di ciascun poligono regolare: esso indica quante volte il quadrato EFHI è contenuto nel poligono regolare ABCDEF.

La regola vale per tutti i poligoni regolari.

La tabella che segue riporta i valori di F per i più comuni poligoni:

Poligono regolare	*Numero fisso F*
Triangolo equilatero	0,433
Quadrato	1
Pentagono	1,72
Esagono	2,598
Ettagono	3,634
Ottagono	4,828
Ennagono	6,182
Decagono	7,694
Endecagono	9,366
Dodecagono	11,196

Tutte le procedure usate da Erone per calcolare l'area dei poligoni regolari sono basate su una regola: determinare il rapporto fra l'area del singolo tipo di poligono e quella del quadrato costruito su di un suo lato. Sembra che Erone abbia in qualche modo anticipato l'uso del numero fisso F.

La tabella che segue mette a confronto i valori esatti del numero fisso F e i corrispondenti valori delle costanti usate da Erone, indicati con la lettera E. Nella colonna di destra sono indicati gli scostamenti fra F e E, calcolati in percentuale con la formula:

scostamento = (F – E)/F %.

Poligono regolare	*Numero fisso F*	*Costante di Erone (E)*	*Scostamento (%)*
Triangolo equilatero	0,433	13/30 = 0,4(3)	Trascurabile
Pentagono	1,72	5/3 = 1,(66)	+3,1%
Esagono	2,598	13/5 = 2,6	-0,07698%
Ettagono	3,634	43/12 = 3,58(3)	+1,39%
Ottagono	4,828	29/6 = 4,8(3)	-0,1%
Ennagono	6,182	51/8 = 6,375	-3,12%
Decagono	7,694	15/2 = 7,5	+2,52%
Endecagono	9,366	66/7 = 9,428	-0,668%
Dodecagono	11,196	45/4 = 11,25	-0,48%

APPENDICE II

============

Il contributo di Giovanni Sfortunati (1485 - ?) da "*Nuovo Lume*" alla soluzione dei problemi relativi al triangolo 13-14-15

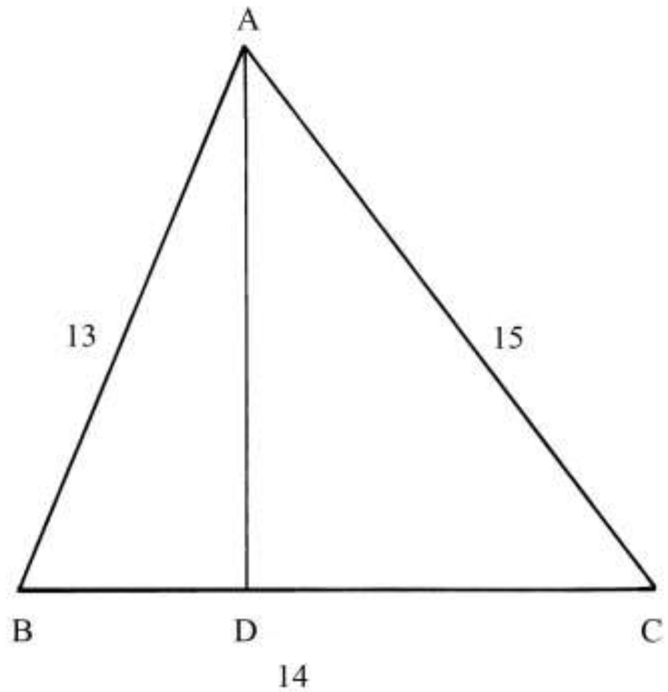
PROPOSIZIONE VII

Il triangolo 13 – 14 – 15

La Proposizione è dedicata al classico triangolo scaleno con lati lunghi 13, 14 e 15, che è stato studiato da molti geometri (a partire da Erone di Alessandria) e da numerosi maestri d'abaco toscani.

Il problema chiede la lunghezza della "*saetta*" che forse l'Autore intende per il "*catetto*" o *altezza* AD e poi domanda l'area dell'intero triangolo.

Per lo Sfortunati occorre in primo luogo determinare la posizione del punto D, piede dell'altezza AD.



La lunghezza di BD è calcolata con una procedura che è qui riassunta in una formula (sempre dovuta al citato Erone di Alessandria, che lo Sfortunati non cita):

$$BD = (AB^2 + BC^2 – AC^2)/(2 * BC) = (13^2 + 14^2 – 15^2)/(2 * 14) =$$
$$= (169 + 196 – 225)/28 = 140/28 = 5.$$

Ne consegue che la lunghezza di DC è:

$$DC = BC – BD = 14 – 5 = 9.$$

AD divide ABC in due triangoli rettangoli che hanno in comune il cateto AD: ABD e ADC.

La lunghezza di AD è ricavabile con due diverse soluzioni:

* $AD^2 = AB^2 – BD^2$ oppure
* $AD^2 = AC^2 – DC^2$.

$AD^2 = 13^2 – 5^2 = 169 – 25 = 144$ oppure

$AD^2 = 15^2 – 9^2 = 225 – 81 = 144$ e

$AD = \sqrt{144} = 12$.

L'Autore calcola l'area di ABC con due differenti metodi. Con il primo, più semplice, si ha:

$S_{ABC} = AD * (BC/2) = 12 * 7 = 84.$

Il secondo metodo utilizza la nota formula di Erone per il calcolo dell'area di un triangolo generico. Riassumiamo la procedura:

* *2 * p* è il perimetro di ABC: 2 * p = AB + BC + AD = 13 + 14 + 15 = 42;
* *p* è il semiperimetro: p = 42/2 = 21.

La formula è:

$S_{ABC} = \sqrt{[p * (p - AB) * (p - BC) * (p - AC)]} =$

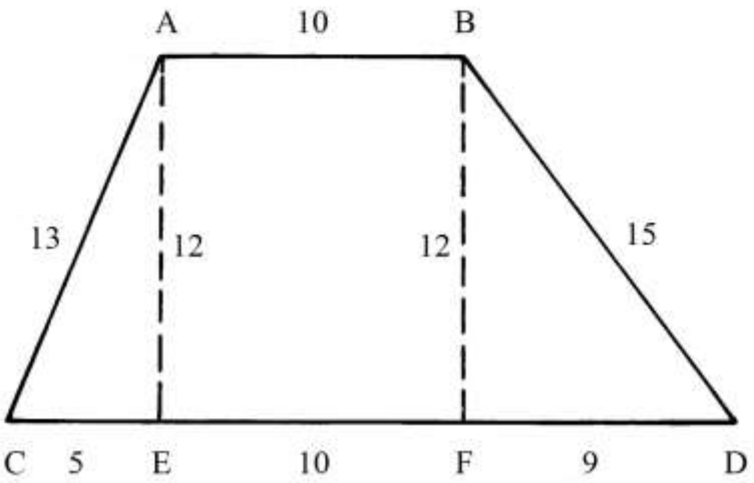
$= \sqrt{[21 * (21 - 13) * (21 - 14) * (21 - 15)]} = \sqrt{(21 * 8 * 7 * 6)} = \sqrt{7056} = 84.$

I risultati forniti dai due metodi sono uguali.

PROPOSIZIONE 14
Trapezio scaleno

ABDC è un trapezio scaleno: la base maggiore CD è lunga 24 e quella minore AB è 10.

I lati obliqui sono lunghi: AC = 13 e BD = 15.



Dai punti A e B sono tracciate le altezze AE e BF che hanno uguale lunghezza.

EF ha stessa lunghezza di AB:

EF = AB = 10.

La somma delle lunghezze dei segmenti CE e FD è:

(CE + FD) = CD – EF = CD – AB = 24 – 10 = 14.

A questo punto lo Sfortunati richiama la Proposizione VII il cui argomento era il triangolo 13-14-15.

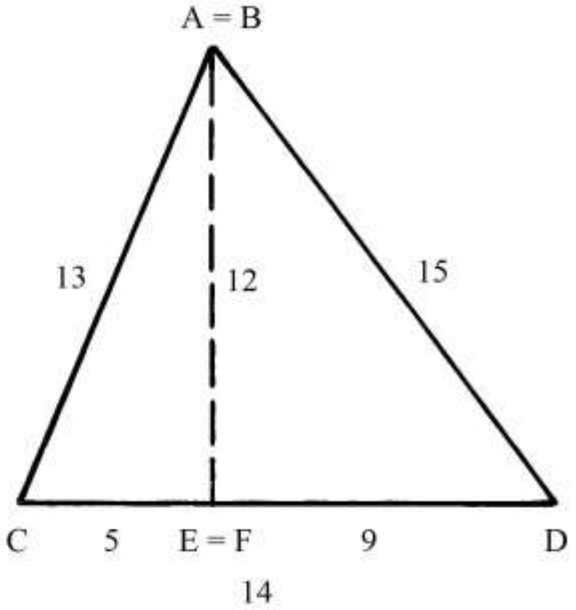
Unendo i triangoli ACE e BDF lungo i cateti AE = BF viene ricreato il triangolo 13-14-15:

* CA(=B) = 13;
* A(=B)D = 15;
* CD = 14.

Dalla soluzione della Proposizione VII sappiamo che l'altezza A(=B) – E(=F) è lunga 12 e che i due segmenti che formano la base CD sono lunghi:

* CE(=F) = 5;
* E(=F)D = 9.

L'area del triangolo è 84.



L’area del trapezio ABDC può essere calcolata in due modi diversi:

* S $_{ABDC}$ = [(AB + CD)/2] * AE = [(10 + 24)/2] * 12 = 17 * 12 = 204:

* S $_{ABDC}$ = S $_{ABFE}$ + (S $_{ACE}$ + S $_{BDF}$) = AB * AE + 84 = 10 * 12 + 84 = 204.

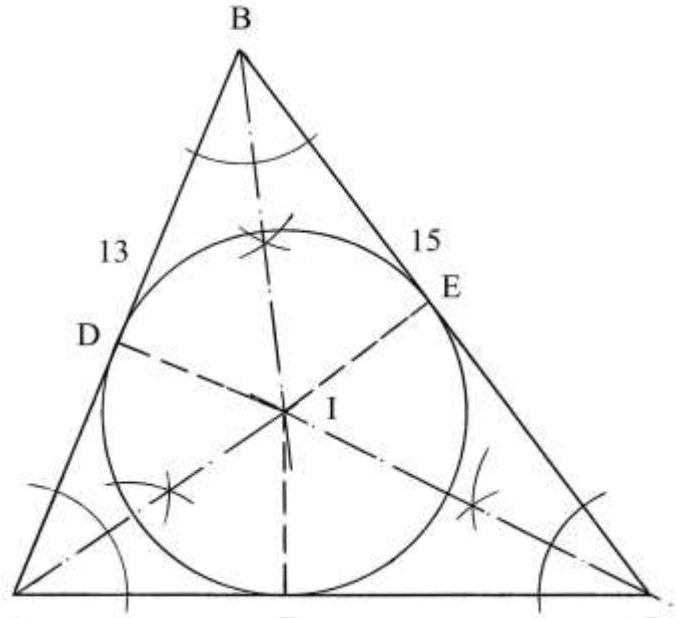
La individuazione della presenza del triangolo 13-14-15 nel trapezio ABDC è veramente una soluzione intelligente dovuta a Giovanni Sfortunati.

PROPOSIZIONE 39

Cerchio inscritto in un triangolo 13-14-15

È dato il noto triangolo che ha lati lunghi 13, 14 e 15 braccia.

Vi deve essere inscritto il più grande cerchio possibile: è domandato il suo diametro.



La procedura usata dallo Sfortunati è la seguente:

* sommare le lunghezze dei lati: AB + BC + AC = 13 + 15 + 14 = 42, perimetro;
* dividere per 2: 42/2 = 21, semiperimetro;
* dividere l'area del triangolo [calcolata nella Proposizione VII in 84 braccia^2] per il semiperimetro: 84/21 = 4 braccia, raggio del cerchio inscritto;
* moltiplicare per 2: 4 * 2 = 8 braccia, diametro del cerchio inscritto.

- APPROFONDIMENTO -

L'Autore non dice niente riguardo alla posizione del centro del cerchio inscritto e alla sua determinazione.

Le bisettrici dei tre angoli interni del triangolo si incontrano in un punto, I, che è chiamato *incentro*, che è il centro del cerchio inscritto.

Si richiama *inraggio* la distanza dell'incentro dai tre lati: ID = IE = IF.

Il cerchio inscritto è detto *incerchio*.

- -

PROPOSIZIONE 45

Semicerchio inscritto in un triangolo 13-14-15

È dato un triangolo con lati lunghi 13, 14 e 15 braccia.

Vi deve essere inscritto il più grande semicerchio possibile.

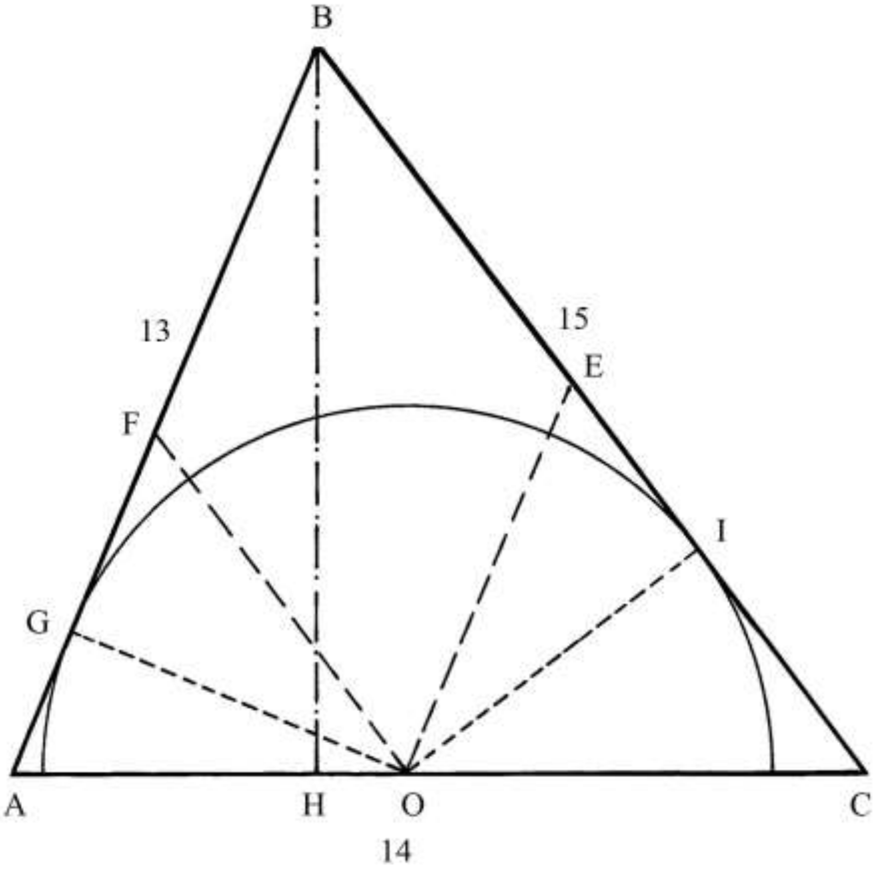
In precedenza sono già state ricavate la lunghezza dell'altezza BH e l'area del triangolo:

* BH = 12 braccia;
* S_{ABC} = 84 braccia^2.

Senza indicarlo esplicitamente, l'Autore fa coincidere il diametro del semicerchio con il lato di base AC.

La procedura proposta dallo Sfortunati è:

* sommare le lunghezze dei due lati che non coincidono con il con il diametro del semicerchio: AB + BC = 13 + 15 = 28;
* dividere per 2: 28/2 = 14;
* dividere l'area del triangolo per 14: S_{ABC}/14 = 84/14 = 6;
* moltiplicare per 2: 6 * 2 = 12 braccia, diametro del semicerchio inscritto.



- APPROFONDIMENTO -

Lo Sfortunati non dice nulla riguardo alla determinazione della posizione del centro O del semicerchio, che deve risultare tangente ai lati AB e BC.

La posizione di O può essere stabilita per via geometrica.

All'interno del triangolo tracciare una corda parallela al lato AB e da esso distanziata di 6 braccia: questa è la misura del raggio del semicerchio da inscrivere; la corda è EO.

Poi disegnare una seconda corda parallela al lato BC, sempre a distanza di 6 braccia: è FO.

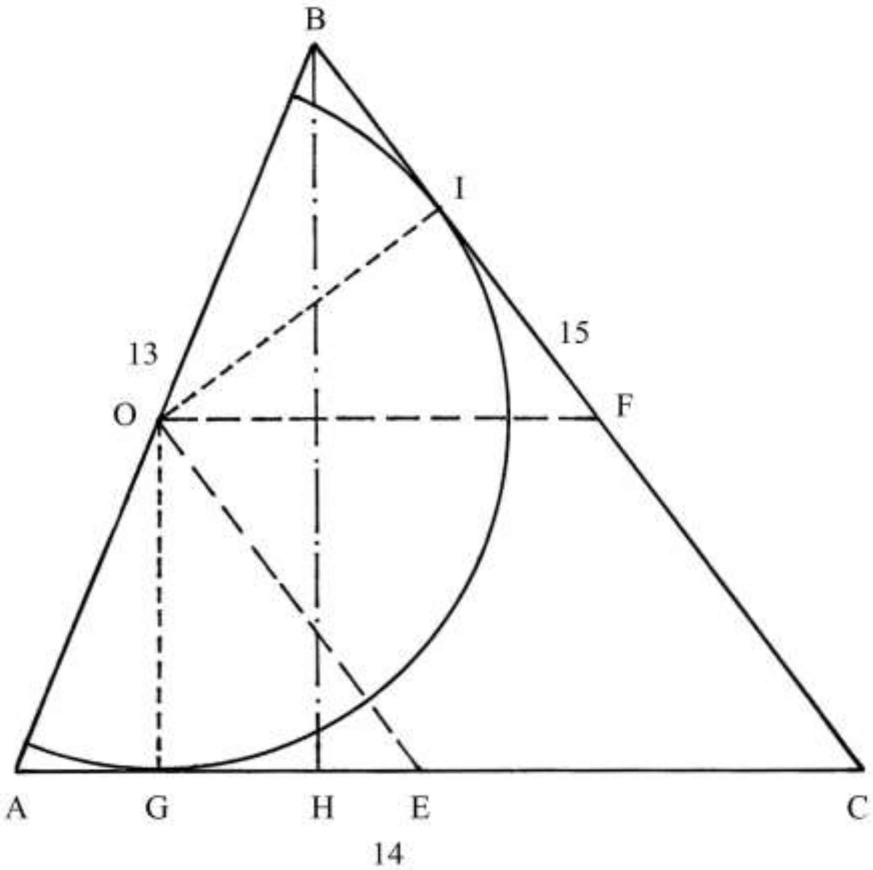
Le due corde si incontrano nel punto O che è situato sul lato AC ed è il centro del semicerchio di diametro 12 braccia.

Da O sono infine tracciate le perpendicolari ai lati AB e BC: sono i raggi OG e OI. G e I sono i punti di tangenza fra la semicirconferenza e i due lati AB e BC.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

È possibile inscrivere altri due semicerchi nel triangolo ABC: essi devono avere i diametri posizionati sui due rimanenti lati, AB e BC.

Il semicerchio basato sul lato AB è così disegnato:



* sommare le lunghezze dei lati AC e BC: 14 + 15 = 29;
* dividere per 2: 29/2 = 14,5;
* dividere l'area del triangolo per 14,5: 84/14,5 ≈ 5,793 → ≈ 5,78 braccia, raggio del semicerchio;
* moltiplicare per 2: 5,78 * 2 = 11,56 braccia, diametro del semicerchio.

Tracciare due corde parallele ai lati AC e BC, a distanza di 5,78 braccia da essi: i due segmenti sono OE e OF e si incontrano nel punto O posizionato sul lato AB, il più corto dei lati del triangolo ABC.

Da O condurre le perpendicolari a AC (è OG) e a BC (è OI): OG e OI sono due raggi del semicerchio di centro O e raggio 5,78.

G e I sono i punti di tangenza della semicirconferenza con i due lati del triangolo.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

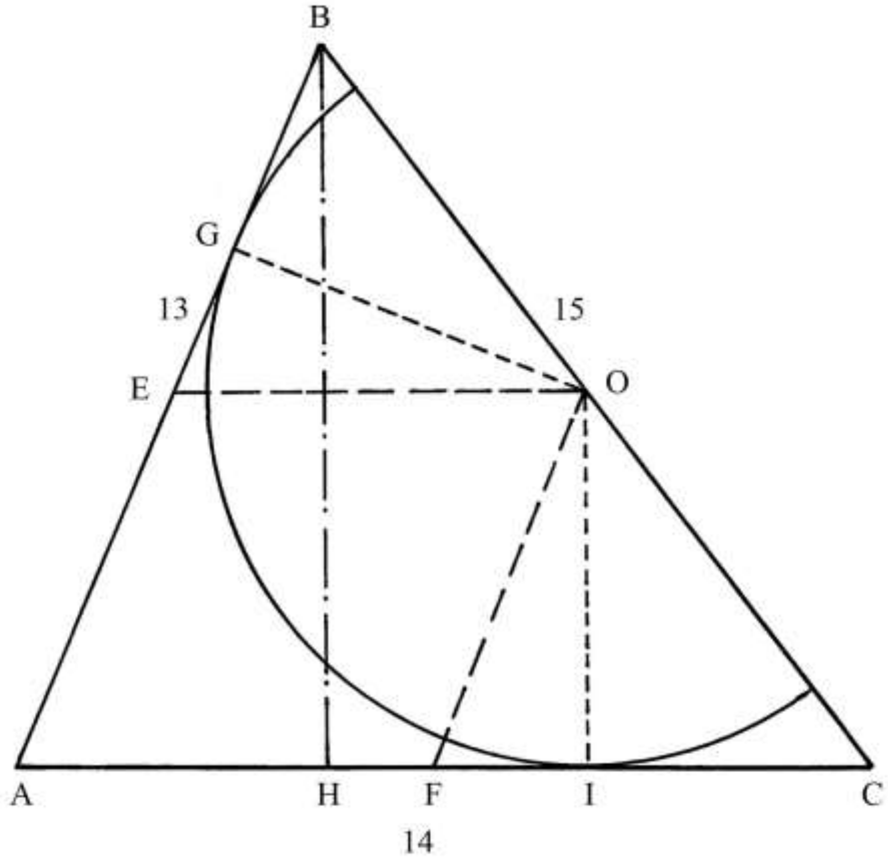
Infine, il terzo semicerchio è costruito come segue:

* sommare le lunghezze dei lati AB e AC: 13 + 14 = 27;
* dividere per 2: 27/2 = 13,5;
* dividere l'area del triangolo per 13,5: 84/13,5 = 6,(22) braccia, raggio del semicerchio;
* moltiplicare per 2: 6,(22) * 2 = 12,(44) braccia, diametro del semicerchio.

Disegnare due corde parallele ai lati AC e AB, a distanza di 6,(22) braccia da essi. I due segmenti sono EO e FO, che si incontrano nel punto O collocato sul lato BC.

Da O tracciare le perpendicolari ai lati AB (è OG) e AC (è OI): OG e OI sono due raggi del semicerchio di centro O e raggio 6,(22) braccia.

Questo semicerchio ha raggio leggermente più lungo di quelli precedenti.



- -

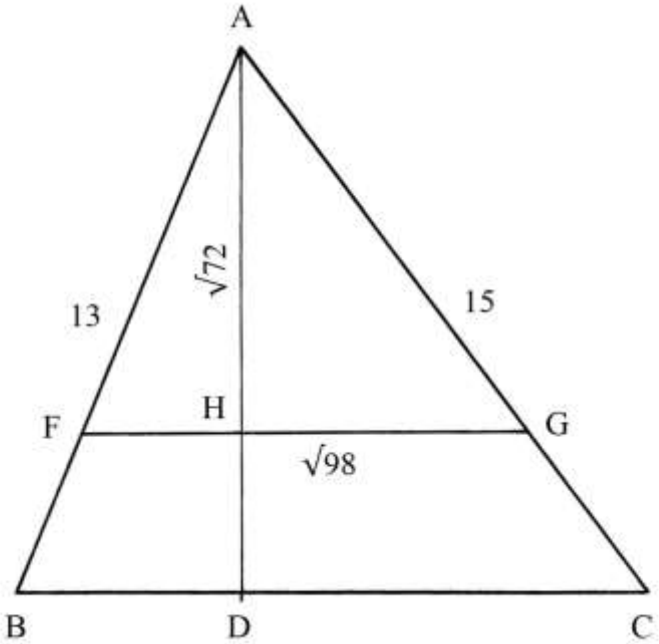
APPENDICE III

============

<u>Il contributo di Lorenzo Forestani (1585 – 1623) da “*Pratica d’Arithmetica e Geometria*” alla soluzione dei problemi relativi al triangolo 13-14-15</u>

<u>Triangolo 13-14-15 diviso in due parti uguali</u>

ABC è il consueto triangolo con lati lunghi 13, 14 e 15.



Deve essere diviso in due parti con aree uguali a metà di quella di ABC, e cioè 84/2 = 42, con una corda parallela al lato BC.

La lunghezza della corda è ricavata con una proporzione:

$BC^2 : S_{ABC} = FG^2 : S_{AFG}$

$14^2 : 84 = FG^2 : 42$

$196 : 84 = FG^2 : 42$ da cui

$FG^2 = (196 * 42)/84 = 98$ e

$FG = \sqrt{98}$.

La lunghezza di AH è calcolata da Forestani con i seguenti passi:

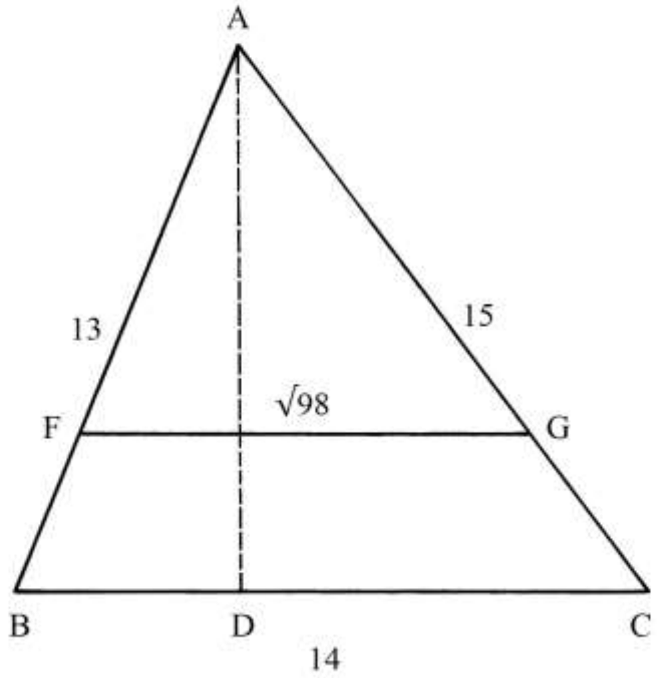
* moltiplicare la lunghezza di AD per sé stessa: $12 * 12 = 144$;
* dividere per 2: $144/2 = 72$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{72}$, lunghezza di AH.

L’area di AFG è:

$S_{AFG} = (FG * AH)/2 = (\sqrt{98} * \sqrt{72})/2 = \sqrt{(98 * 72/4)} = \sqrt{1764} = 42$, che è il dato iniziale.

<u>Triangolo 13-14-15 diviso in due parti uguali</u>

L’Autore propone un altro metodo per calcolare la lunghezza del segmento FG che divide in due parti uguali il triangolo ABC.



La procedura usata è la seguente:

* moltiplicare la lunghezza di AC per sé stessa: $15 * 15 = 225$;
* dividere per 2: $225/2 = 112,5$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{(112,5)}$, lunghezza di AG;
* moltiplicare la lunghezza di AB per sé stessa: $13 * 13 = 169$;
* dividere per 2: $169/2 = 84,5$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{(84,5)}$, lunghezza di AF.

La lunghezza di FG è così calcolata:

* moltiplicare la lunghezza di BC per sé stessa: $14 * 14 = 196$;
* dividere per 2: $196/2 = 98$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{98}$, lunghezza di FG.

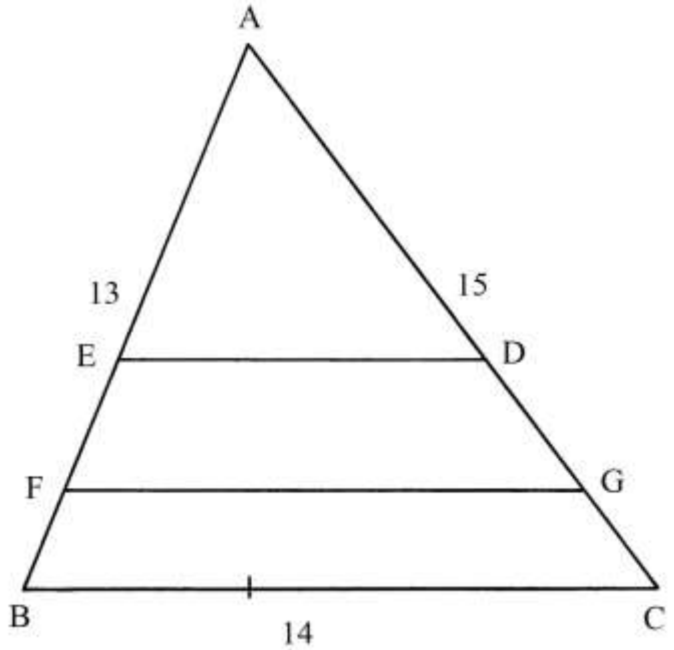
<u>Divisione di un triangolo in tre parti uguali</u>

Il solito triangolo 13-14-15 deve essere diviso in *tre* parti uguali, con segmenti paralleli alla base BC.

La procedura contiene i seguenti passi:

* moltiplicare la lunghezza di AC per sé stessa: $15 * 15 = 225$;
* dividere per 3: $225/3 = 75$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{75}$, lunghezza di AD;
* moltiplicare la lunghezza di AB per sé stessa: $13 * 13 = 169$;
* dividere per 3: $169/3 = (56 + 1/3)$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{(56 + 1/3)}$, lunghezza di AE;
* calcolare i 2/3 del quadrato della lunghezza di AC: $2/3 * 225 = 150$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{150}$, lunghezza di AG;
* calcolare i 2/3 del quadrato della lunghezza di AB: $2/3 * 169 = (112 + 2/3)$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{(112 + 2/3)}$, lunghezza di AF;
* moltiplicare la lunghezza di BC per sé stessa: $14 * 14 = 196$;
* dividere per 3: $196/3 = (65 + 1/3)$;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{(65 + 1/3)}$, lunghezza di ED;

*	calcolare i 2/3 del quadrato della lunghezza di BC:	$2/3 * 196 = (130 + 2/3)$;
*	estrarre la radice quadrata:	$\sqrt{(130 + 2/3)}$, lunghezza di FG.



ABC è ora diviso in tre poligoni di area uguale a 84/3 = 28:
*	il triangolo scaleno ADE;
*	il trapezio scaleno DEFG;
*	il trapezio scaleno FGCB.

<u>Divisione di un triangolo in due parti non uguali</u>

Il consueto triangolo ABC con lati lunghi 13, 14 e 15 deve essere diviso in due parti con una corda, FG, parallela alla base BC: una delle due parti, il triangolo AFG, deve avere area uguale a 35, ricordando che l'intero ABC ha area uguale a 84.

La soluzione è ottenuta con una proporzione:

$BC^2 : S_{ABC} = FG^2 : S_{AFG}$

$14^2 : 84 = FG^2 : 35$

$196 : 84 = FG^2 : 35$

$FG^2 = (196 * 35)/84 = (81 + 2/3)$ e

$FG = \sqrt{(81 + 2/3)}$.

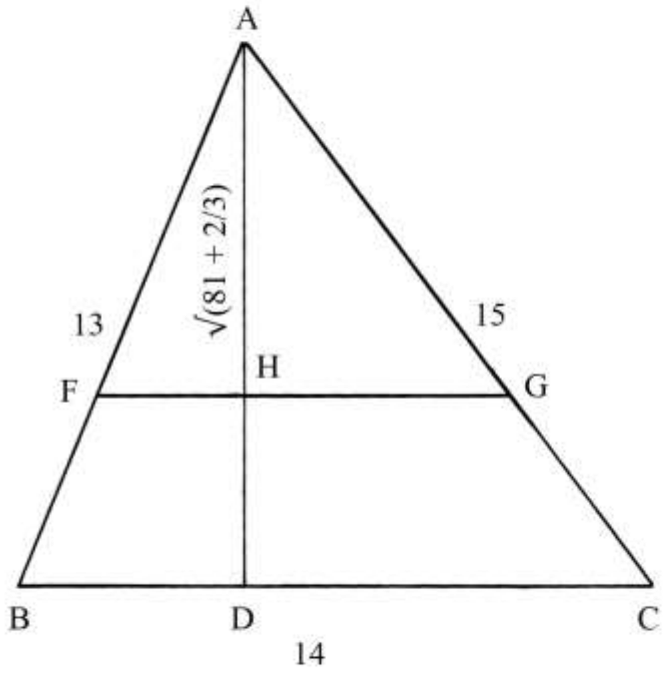
Anche la lunghezza di AH è ricavata con una proporzione:

$AH^2 : S_{AFG} = AD^2 : S_{ABC}$

$AH^2 : 35 = 12^2 : 84$

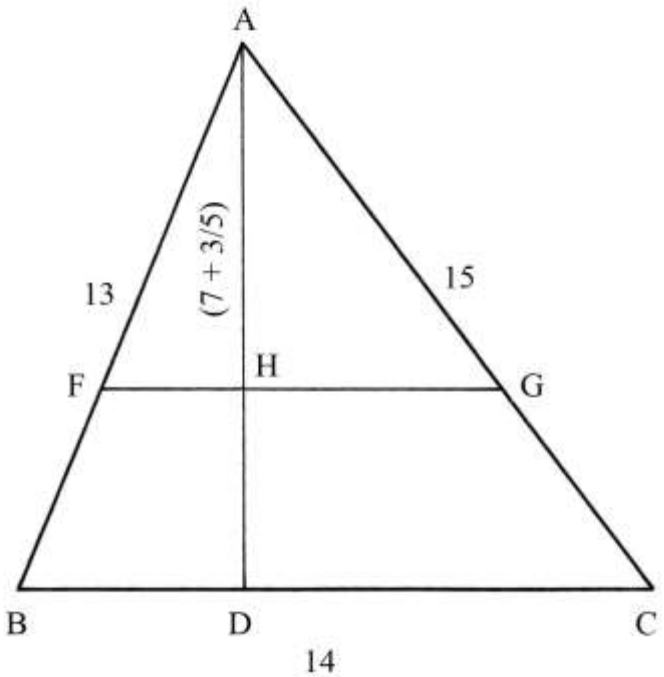
$AH^2 = (35 * 12^2)/84 = (35 * 144)/84 = 60$ e

$AH = \sqrt{60}$.



<u>Altra divisione del triangolo 13-14-15</u>

Il triangolo ABC deve essere diviso in due parti con una corda parallela alla base BC.



I triangoli AFG e ABC sono *simili*.

Il triangolo AFG deve avere area uguale a 2/5 di quella di ABC:

$S_{AFG} = 2/5 * S_{ABC} = 2/5 * 84 = (33 + 3/5)$.

La lunghezza di AH è ricavata con una proporzione:

$AH^2 : S_{AFG} = AD^2 : S_{ABC}$

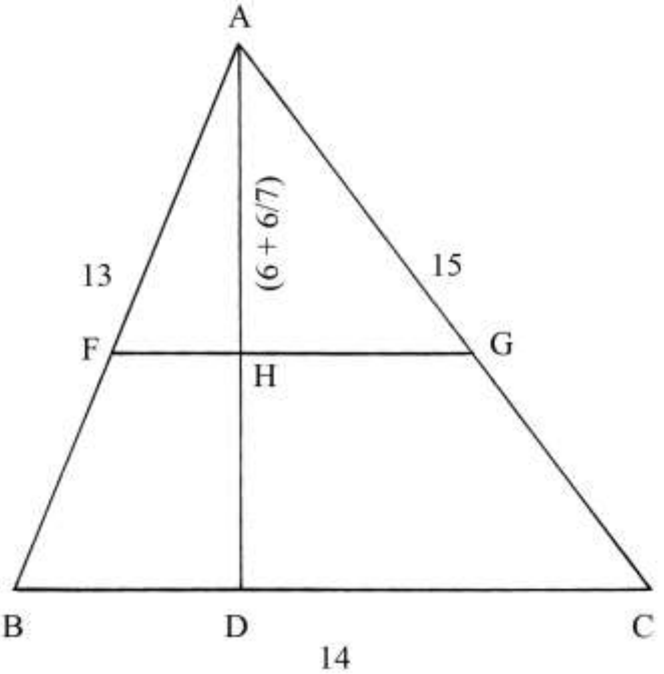
$AH^2 : (33 + 3/5) = 12^2 : 84$

$AH^2 : (33 + 3/5) = 144 : 84$

$AH^2 = (33 + 3/5) * 144/84 = (57 + 3/5)$ e
$AH \approx (7 + 3/5)$.

<u>Un'altra divisione del triangolo 13-14-15</u>

In questo problema, Forestani introduce l'unità di misura lineare, il *braccio*.



ABC viene diviso con una corda, FG, parallela alla base BC e lunga 8 braccia.

I triangoli ABC e AFG sono simili per cui è possibile ricavare la lunghezza di AH con l'aiuto di una proporzione:

$AH : FG = AD : BC$
$AH : 8 = 12 : 14$
$AH = (8 * 12)/14 = 96/14 = (6 + 6/7)$ braccia.

<u>Divisione del triangolo 13-14-15 in due parti</u>

Il solito triangolo 13-14-15 ha i lati obliqui scambiati di posizione rispetto ai casi precedenti: il lato lungo 15 (AB) è collocato a sinistra e quello lungo 13 (AC) è a destra.

La base BC è sempre lunga 14.

Il triangolo deve essere diviso in due parti uguali con una corda uscente dal punto E posizionato su AB, a distanza 3 braccia dal vertice A.

BEF è un triangolo rettangolo che ha l'ipotenusa BE lunga:

$BE = BA - EA = 15 - 3 = 12$.

AD è l'altezza relativa a BC che, come sappiamo, è lunga 12.

I triangoli rettangoli BEF e BAD sono simili e vale la proporzione:

$BE : BA = FE : AD$ da cui
$FE = (BE * AD)/BA = (12 * 12)/15 = 144/15 = (9 + 2/3)$.

La lunghezza di BF è data da:

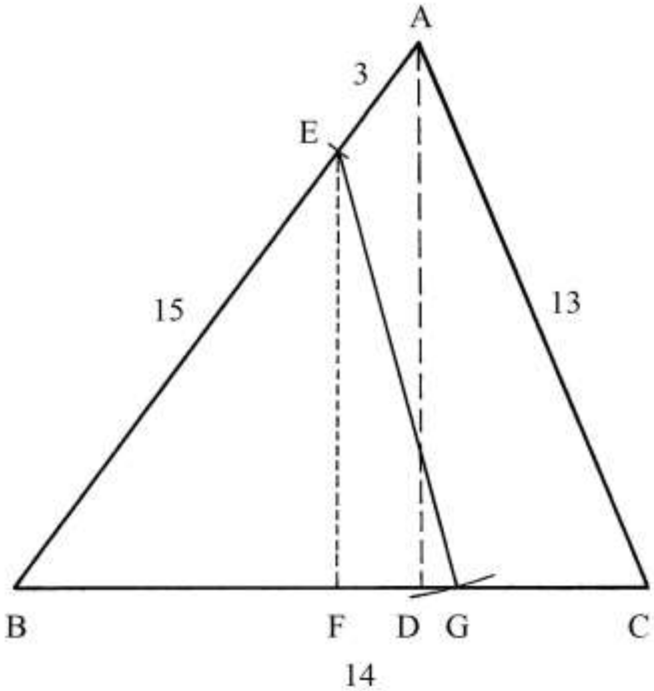
$BF^2 = BE^2 - FE^2 = 12^2 - (9 + 2/3)^2 = 144 - 93{,}44 = 50{,}56$ e
$BF = \sqrt{(50{,}56)} \approx 7{,}11$.

AD è l'altezza relativa alla base BC: sappiamo dalle soluzioni di precedenti problemi relativi al triangolo 13-14-15 che BC è diviso come segue:

* BD = 9,
* DC = 5.

La lunghezza del segmento FD è:

FD = BD – BF = 9 – 7,11 = 1,89.



Forestani vuole dividere ABC in due parti di area uguale con una corda uscente da E fino a un punto, G, collocato su BC.

La lunghezza della corda EG è ricavata con la procedura che segue:

* moltiplicare la lunghezza di FD per sé stessa: FD * FD = 1,89 * 1,89 = 3,5721;
* moltiplicare per sé stessa la lunghezza di FE: (9 + 2/3) * (9 + 2/3) = 93,44;
* sommare con il quadrato della lunghezza di FD: 93,44 + 3,5721 = 97,0121;
* estrarre la radice quadrata: √(97,0121) ≈ 9,85 braccia, lunghezza della corda EG.

Il triangolo BEG ha area di 42 braccia quadre, uguale a quella del quadrilatero AEGC e pari a metà di quella di ABC.

- APPROFONDIMENTO -

La descrizione del problema e lo schema contenuti nel testo di Farnetani probabilmente contengono degli errori. Inoltre la soluzione proposta pare piuttosto complessa.

È assai più semplice costruire un triangolo, BEG, che abbia area uguale a metà di quella di ABC e cioè 84/2 = 42.

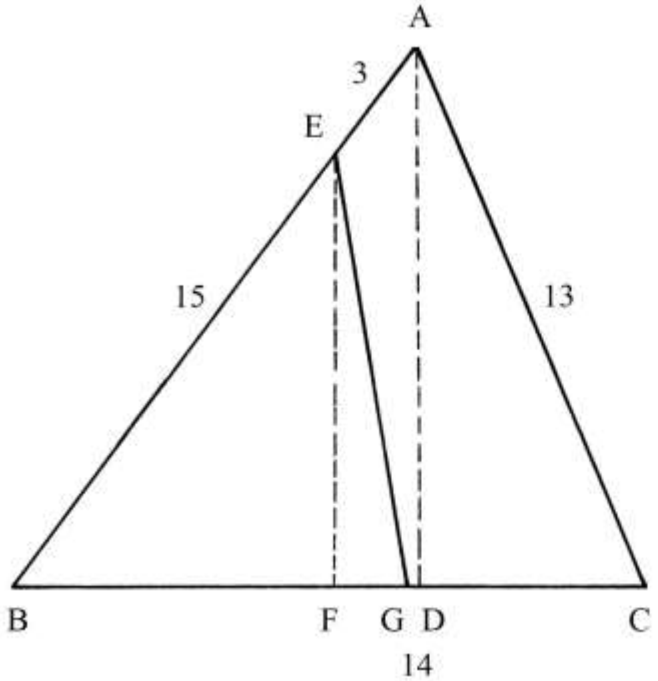
Dopo aver fissato il punto E, occorre utilizzare la lunghezza di FE già calcolata da Forestani:

FE = (9 + 2/3).

Conoscendo l'area di BEG possiamo ricavare la lunghezza della base BG:

BG = (2 * S_{BEG})/FE = (2 * 42)/(9 + 2/3) = 84/(9 + 2/3) ≈ 8,69.

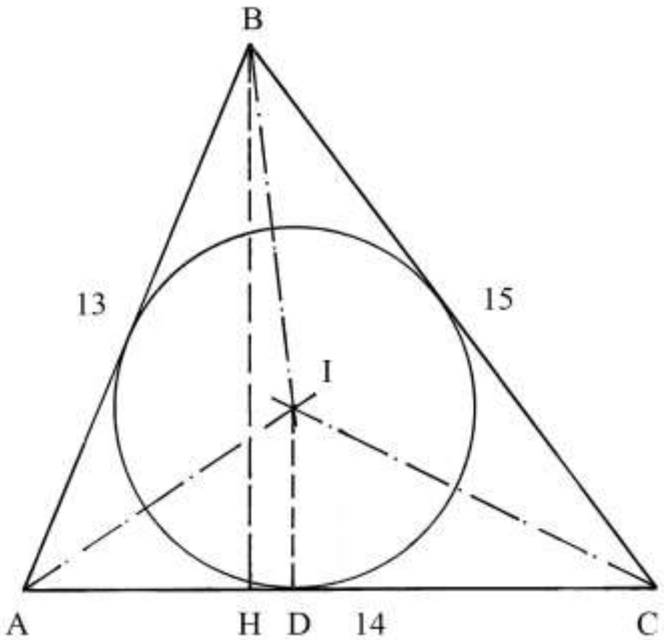
La soluzione qui proposta è più semplice e porta a un risultato leggermente diverso da quello al quale giunge la procedura impiegata da Forestani: il punto G viene a trovarsi *a sinistra* rispetto a D.



- -

<u>Cerchio inscritto in un triangolo scaleno 13-14-15</u>

ABC è un triangolo scaleno con i lati lunghi secondo la nota terna 13-14-15.



AB è lungo 13, AC è 14 e BC è 15.
BH è l’altezza relativa alla base AC.
Nel triangolo deve essere inscritto il più grande cerchio.

Costruire le bisettrici dei tre angoli interni: esse si intersecano nell'incentro I, che è il centro del cerchio inscritto.

Da I abbassare la perpendicolare ID alla base AC: ID è il raggio del cerchio inscritto.

Forestani richiama un dato già calcolato in precedenza: l'area di ABC è 84.

La soluzione impiegata per ricavare la lunghezza del diametro del cerchio inscritto contiene i seguenti passi:

* calcolare il perimetro del triangolo: AB + BC + AC = 13 + 15 + 14 = 42;
* dividere per 2: 42/2 = 21 [semiperimetro];
* dividere l'area per il semiperimetro: 84/21 = 4, lunghezza del raggio ID;
* moltiplicare per 2: 4 * 2 = 8, diametro del cerchio inscritto.

Bibliografia

1. Acerbi Fabio – Vitrac Bernard, "Héron d'Alexandrie. Metrica. Introduction, texte critique, traduction française et notes de commentaire", "Mathematica Graeca Antiqua", 4, Pisa- Roma, Fabrizio Serra Editore, 2014, pp. 712.
2. Beauregard Raymond A. – Suryanarayan E. R., "The Brahmagupta Triangles", in "The College Mathematics Journal", vol. 29, no. 1, january 1998, pp. 13-17, reperibile in Internet come *methodoflastresort.pdf* .
3. Buchholz Ralph H. – MacDougall James A., "Cyclic polygons with rational sides and area", in "Journal of Number Theory", 128, (2008), pp. 17-48, reperibile in Internet come *1-s2.0-S0022314X07001126-main.pdf* .
4. Caserio Antonio, "5x3. Argomenti e curiosità matematiche", Roma, Aracne editrice, 2018, pp. 231.
5. Forestani Lorenzo, "Pratica d'Arithmetica e Geometria", Siena, Stamperia del Pubblico, 1682, pp. 574.
6. Maraschini Walter – Menghini Marta – Palma Mauro, "Strategie Matematiche: Costruire, Dimostrare", Bologna, Pitagora Editrice, 1996, pp. VIII-204.
7. Sfortunati Giovanni, "Nuovo Lume", Venezia, Francesco del Leno, 1561.
8. Vitrac Bernard: a questo ricercatore francese si devono numerosi studi sull'opera di Erone di Alessandria, facilmente reperibili in Internet.
9. Yiu Paul, "Heron triangles which cannot be decomposed into two integer right triangles", 2008, pp. 44, reperibile in Internet come *Southern080216.pdf.*

INDICE