© Sergio Calzolani, Firenze, 2021
sergio(punto)calzolani(at)outlook(punto)it

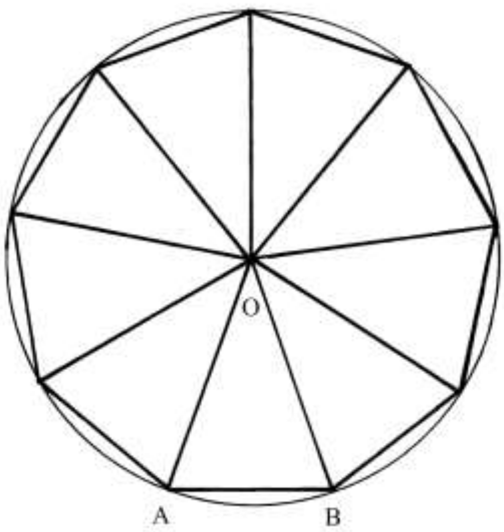
Parole chiave: ennagono; trisezione angolo 60°; angolo di 20°; costruzioni di Sutton; *neusis*; geometria del *tomahawk*; Pacioli; Leonardo da Vinci; ennagono di Dürer; Carlo Renaldini; Redondo Buitrago; Bion e Tempier; Bardin; Howe; Italo Ghersi; French; Dobre; Mallett; Chen Bai; Edoardo Dotto; Laura Carlevaris; Breuil; origami; Huzita; Emary; Vincenzo Flauti.

Nota: si è cercato di attribuire ai loro Autori le singole costruzioni dell'ennagono. Per alcune di esse ciò non è stato possibile.

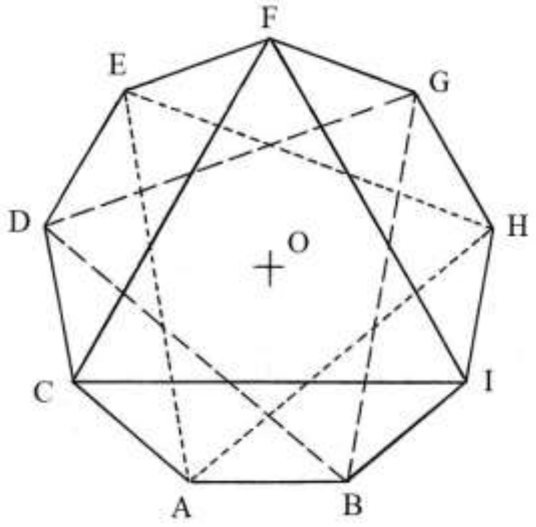
Costruzione dell'ennagono

L'ennagono regolare non è costruibile con la riga e il compasso: esistono però numerosi metodi approssimati che permettono di disegnare ennagoni regolari abbastanza precisi.

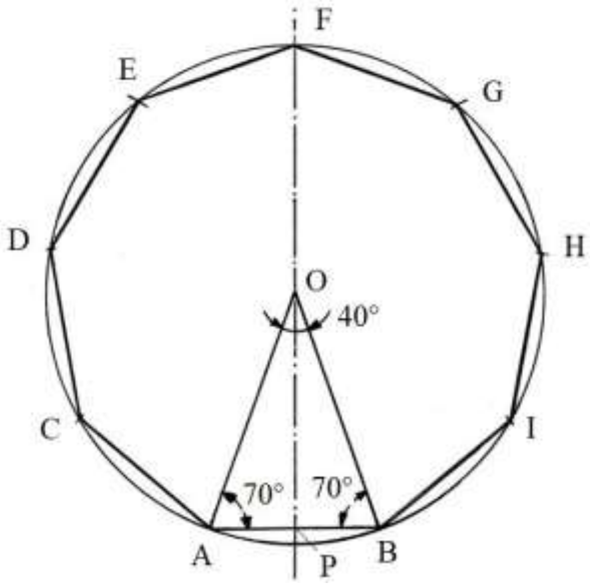
Inoltre, nel corso del XX secolo la tecnica dell'*origami* ha consentito di ottenere l'ennagono regolare esatto.



All'interno dell'ennagono sono costruibili *tre* triangoli equilateri: AEH, BDG e CFI:



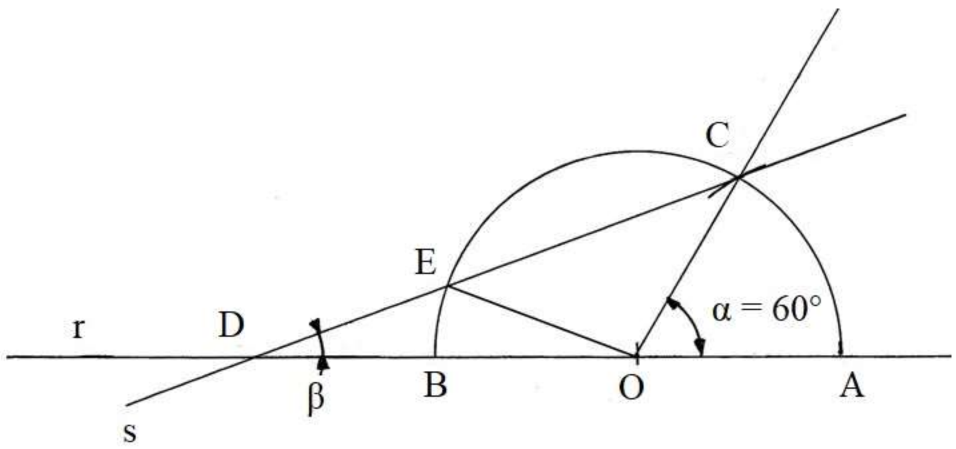
L'ennagono regolare inscritto in un cerchio è scomposto in nove triangoli isosceli con angoli che hanno le ampiezze indicate nella figura:



Gli angoli di 40° e di 70° non sono direttamente costruibili con la riga e con il compasso.

L'angolo AOB è diviso dall'altezza OP (che è anche la sua bisettrice) in due angoli di ampiezza pari a 20°: anche questo angolo non è direttamente costruibile con la riga e con il compasso.

L'angolo di 20° può però essere tracciato in modo indiretto con un metodo grafico proposto da Archimede, con la *trisezione* di un angolo di 60°:



Tracciare la retta orizzontale *r*. Fissare il punto O e a distanza a piacere il punto A.

Fare centro in O e con raggio OA disegnare una semicirconferenza da A fino a B.

Con la stessa apertura di compasso fare centro in A e disegnare un arco che taglia la semicirconferenza nel punto C.

L'angolo COA, *α*, è ampio 60° e cioè un esatto multiplo di quello di 20°:

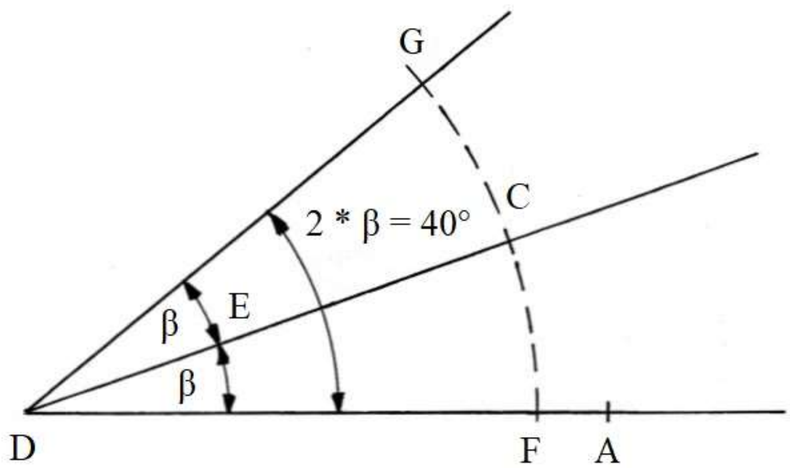
20° * 3 = 60°.

Applichiamo il metodo di Archimede descritto nella figura qui sopra. Occorre una *riga graduata* per tracciare una retta *s* passante per il punto C e per due punti, D e E, con la condizione che il segmento DE sia lungo quanto il raggio OA:

DE = OA.

L'angolo EDB, *β*, è ampio 20° e cioè 1/3 dell'angolo *α*.

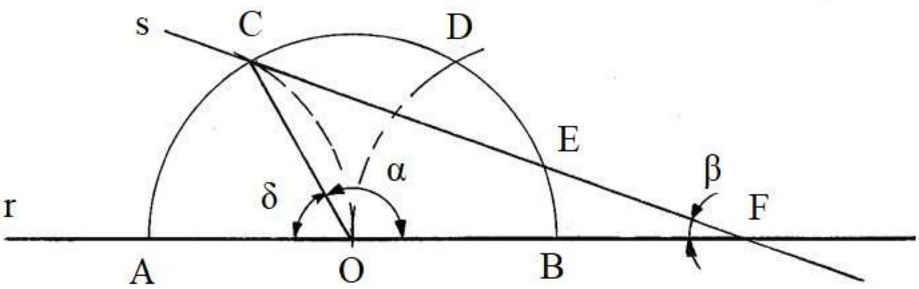
L'angolo di 40° è ora costruibile semplicemente duplicando l'angolo di 20°:



\- APPROFONDIMENTO -

<u>Altra costruzione dell'angolo di 20°</u>

Una soluzione alternativa per la costruzione dell'angolo di 20° con l'impiego del metodo di Archimede è presentata nella figura:

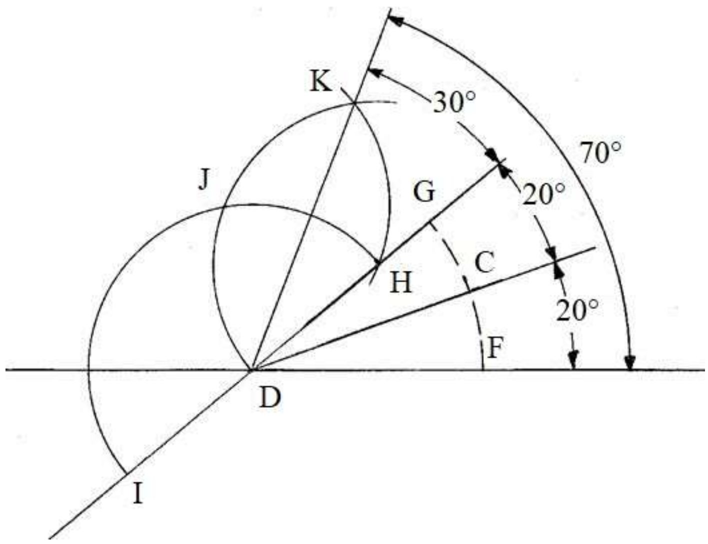


COB è α ed è ampio 120°, il suo angolo *supplementare* COA è δ ed è ampio 60°.
Tracciare la retta *s* passante per C e in gradi determinare i punti E e F a distanza EF = OA.
L'angolo CFA è β ed è ampio 20°.

- -

Con lo stesso metodo è possibile costruire anche l'angolo di 70° che è l'altro angolo tipico dei nove triangoli isosceli contenuti in un ennagono.

Applichiamo la precedente costruzione per riprodurre gli angoli di 20° e di 40°:

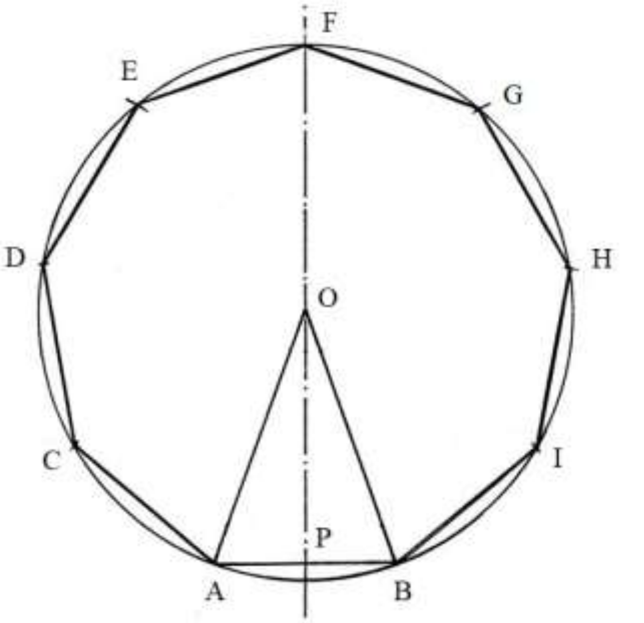


Tracciare la retta passante per D e per G. Con raggio a piacere, DH, fare centro in D e disegnare una semicirconferenza che fissa i punti H e I. Con la stessa apertura fare centro in H: viene stabilito il punto J. Sempre con la stessa apertura di compasso, fare centro in J e tracciare un arco da H fino a determinare il punto K.

L'angolo KDH è ampio 30°: con il *consecutivo* angolo di 40° esso forma l'angolo cercato di ampiezza 70°.

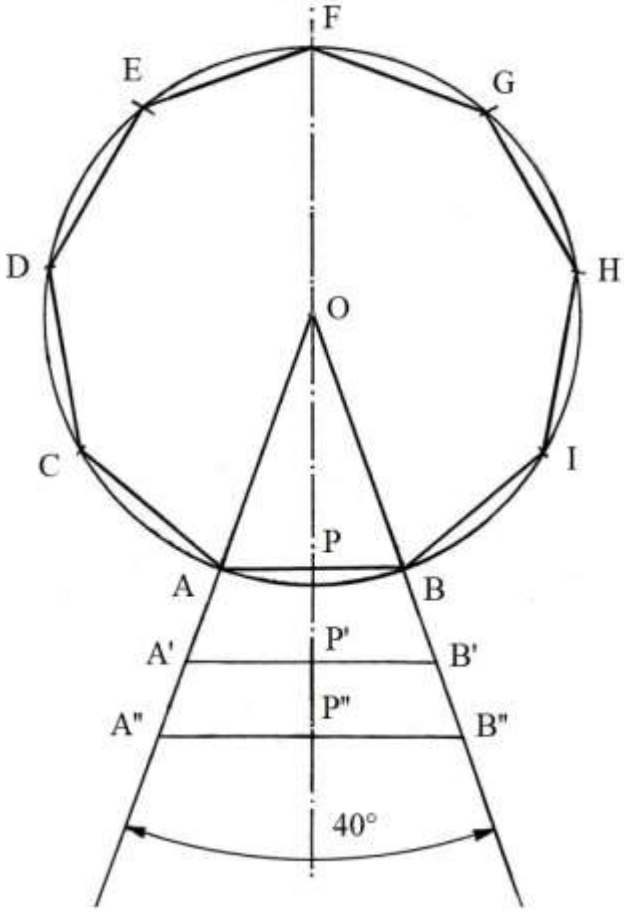
Con l'ausilio del triangolo isoscele 40°-70°-70° è ora possibile costruire un ennagono inscritto con due diverse modalità:

a) A partire dal triangolo isoscele AOB, conoscendo la lunghezza di OA=OB, fare centro in O E, con raggio OA, disegnare la circonferenza e riportarvi la lunghezza di AB:



ACDEFGHIB è l’ennagono.

b) Costruire l’angolo in O di ampiezza uguale a 40° e tracciare le semirette uscenti da O che lo delimitano.



Costruire la bisettrice dell’angolo.

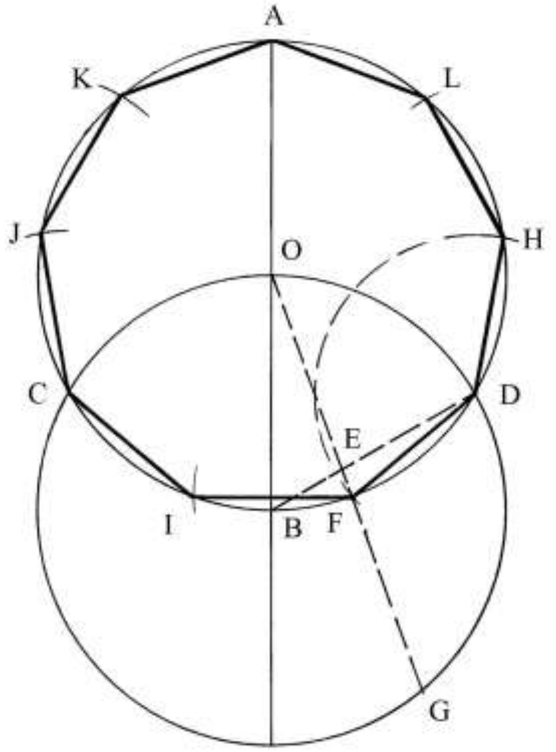
Riportare la lunghezza scelta del primo lato (AB, A’B’ o A’’B’’) in modo che la bisettrice tagli perpendicolarmente il segmento scelto: la bisettrice è l’asse del primo lato e lo divide in due. Una volta fissato il primo lato, i segmenti OA (oppure OA’ o OA’’) e OB (oppure OB’ o OB’’) sono due raggi del cerchio in cui è inscritto l’ennagono approssimato.

LE COSTRUZIONI DI SUTTON

Nel suo libro di costruzioni geometriche, citato in bibliografia, Andrew Sutton propone tre diversi metodi per la costruzione dell'ennagono regolare: la prima applica il metodo *neusis* e fornisce una soluzione esatta, mentre la seconda e la terza conseguono risultati approssimati.

Ennagono con il metodo *neusis*

Tracciare una retta verticale e con il raggio scelto, OA, disegnare una circonferenza con centro e una seconda con centro in B. Le due circonferenze si incontrano nei punti C e D.



Tracciare la corda BD: dal punto O disegnare una linea che interseca BD in un punto, E, e le due circonferenze nei punti F e G a condizione che sia rispettata la condizione

EG = OA.

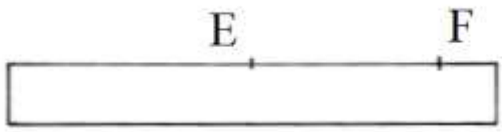
La corda FD è il primo lato dell'ennagono inscritto.

Riportare la sua lunghezza sulla circonferenza di centro O: DFICJKALH è l'ennagono regolare inscritto.

IL METODO "*NEUSIS*"

Il termine *neusis* viene dal greco e, grosso modo, significa "nella direzione di".

Il metodo risale agli antichi geometri greci e in particolare a Archimede (287-212 a.C.); richiede l'uso del compasso e di un righello *graduato recante due sole tacche distanziate,* come quello rappresentato nella figura che segue:



I righelli usati dai tecnici e dagli artigiani sono quasi tutti graduati in cm, mm e talvolta in pollici.

Il righello usato con il metodo *neusis* può scorrere e ruotare. Esso era impiegato nei casi nei quali era impossibile usare la riga non graduata e il compasso: la costruzione dell’ettagono, dell’ennagono, del tridecagono, la trisezione di un angolo qualsiasi e la duplicazione del cubo.

Il righello scorre e ruota intorno a un polo posto in corrispondenza di un punto scelto, ad esempio, a sinistra di E.

Ippocrate di Chio (470-410 a.C.) è stato un importante matematico e astronomo greco.

Si interessò alla geometria e studio due dei problemi classici: la quadratura del cerchio e la duplicazione del cubo.

Le sue ricerche sulla quadratura lo condussero a calcolare l’area delle *lunule*.

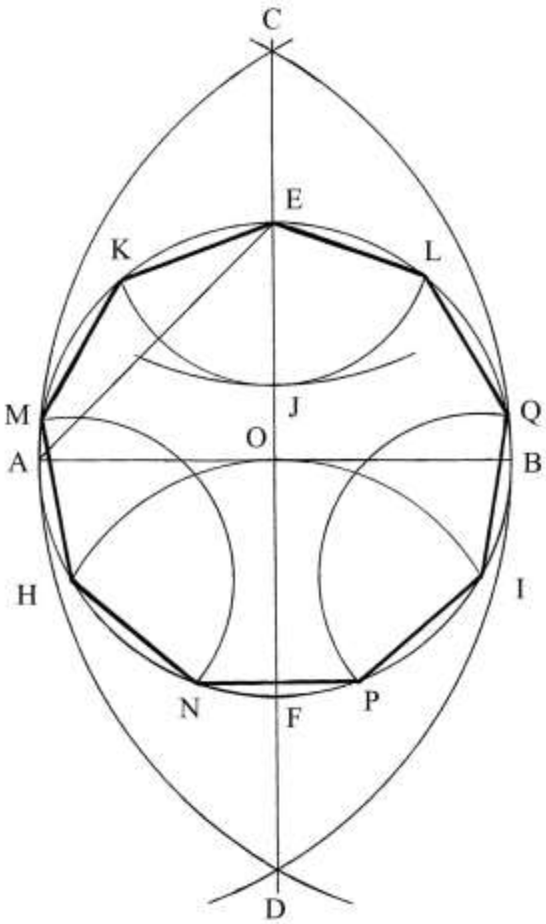
Ippocrate sembra essere stato il primo geometra ad usare il metodo *neusis* e dopo di lui da Archimede.

Scrisse un trattato geometrico intitolato *Elementi* che però non è pervenuto.

- -

Ennagono approssimato

La prima delle due costruzioni approssimate proposte da Sutton è nella figura che segue:



Tracciare una retta orizzontale e fare centro in O con raggio OA=OB.

Fare centro nei punti A e B e con raggio AB disegnare due archi che passano per A e per B e che si incontrano nei punti C e D: per questi ultimi passa l'asse di simmetria che taglia la circonferenza in E e in F.

Fare centro in F e con raggio FO (=OA) tracciare un arco che passa per O e incontra la circonferenza in H e in I.

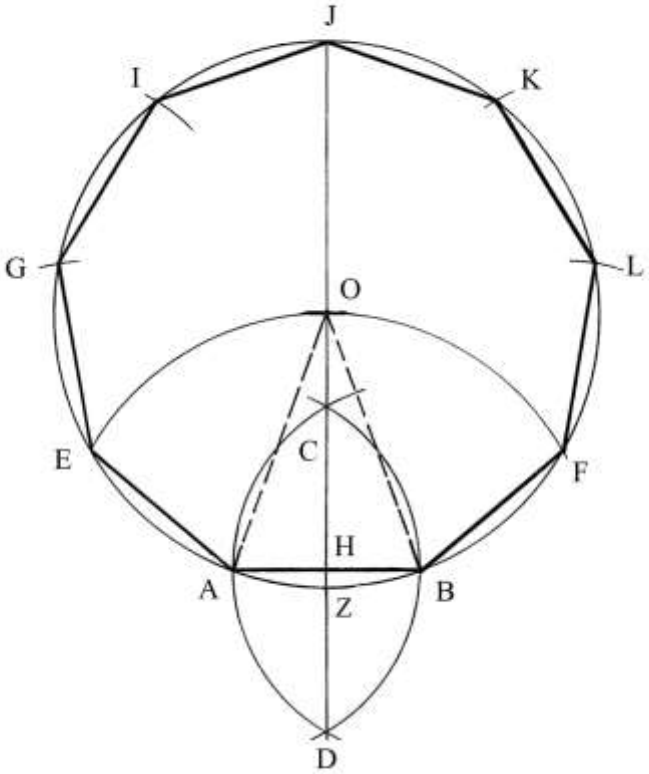
Con il compasso misurare la lunghezza della corda AE e con questa apertura fare centro in C e disegnare un arco che taglia CD nel punto J.

Fare centro in E e con raggio EJ tracciare un arco che incontra la circonferenza nei punti K e L, due vertici dell'ennagono: EJ è la lunghezza del lato dell'ennagono.

Riportare sulla circonferenza la lunghezza della corda EK: KELQIPNHM è l'ennagono approssimato inscritto.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

La seconda costruzione approssimata è nella figura che segue:



AB è il primo lato del poligono. Fare centro in A e in B e disegnare due archi che si incontrano nei punti C e D: per questi ultimi passa l’asse dello stesso segmento AB, che è diviso a metà nel punto H.

Con il compasso misurare la lunghezza di HA = HB e riportarla sull’asse facendo centro in C: viene fissato il punto O, centro del cerchio circoscritto.

Collegare O con A e con B. Fare centro in O e con raggio OA = OB tracciare la circonferenza.

Con la stessa apertura OA fare centro in Z e disegnare un arco che taglia la circonferenza nei punti E e F. EA e BF sono altri due lati dell’ennagono.

Riportare sulla circonferenza la lunghezza di AB: AEGIJKLFB è l’ennagono regolare approssimato.

<u>LA GEOMETRIA DEL *TOMAHAWK*</u>

Tomahawk è il nome di un’*ascia* da guerra usata dai Nativi americani. In realtà quell’arma era un’*accetta*, perché la lama era perpendicolare al manico: un’ascia ha la lama parallela al manico.

Tomahawk è una parola inglese e proviene dalla lingua degli Algonchini della Virginia, negli Stati Uniti: deriva dai termini *tamahak*, *tamahakan* e *otomahuk*, con il significato di ‘abbattere’.

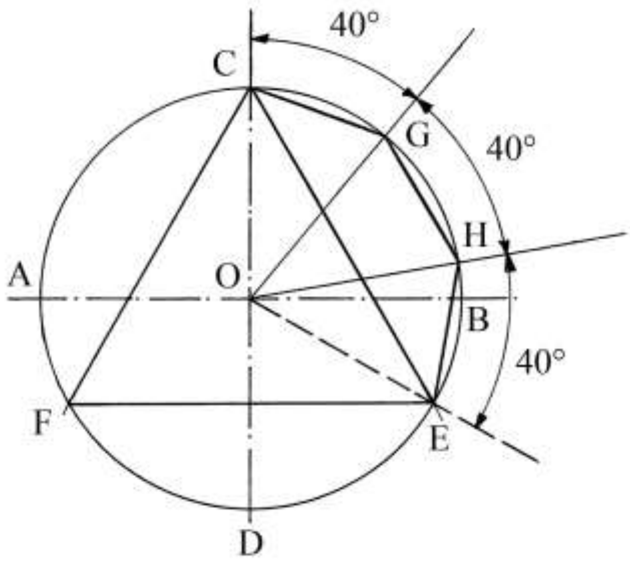
Il tomahawk è uno strumento usato in geometria per ricavare alcune costruzioni fra le quali la trisezione di un angolo qualsiasi e la tracciatura di alcuni poligoni inscritti, non disegnabili con riga e compasso.

È tuttora ignota l’origine dell’uso del tomahawk: la sua apparizione risale a testi pubblicati in Europa nell’Ottocento, intorno al 1835.

La costruzione dell'ennagono

La trisezione di un angolo è collegata alla costruzione dell'ennagono regolare inscritto.

Lo schema che segue presenta il triangolo equilatero CEF inscritto in un cerchio di centro O e raggio OA:



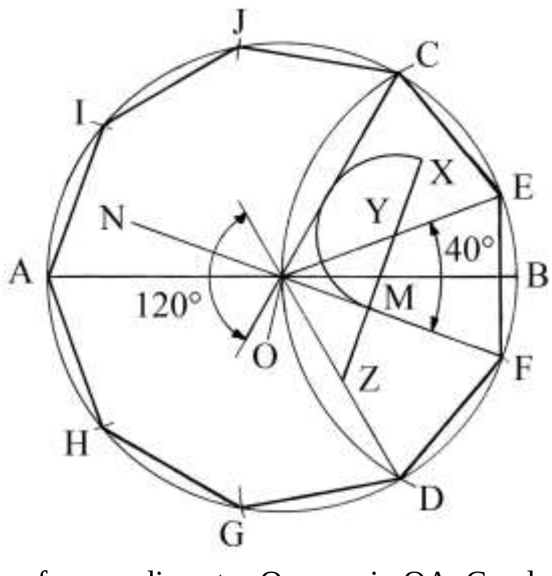
L'angolo COE è ampio 120°.

L'ennagono inscritto ha nove lati: a ciascun lato del triangolo equilatero corrispondono tre lati dell'ennagono.

Ciascun lato di questo ultimo poligono sottende al centro del cerchio un angolo ampio 360°/9 = 40°.

Occorre dividere l'angolo COE in tre parti uguali: 120°/3 = 40°, ma questo angolo non è costruibile con riga e compasso ed è soltanto ricavabile per via aritmetica.

Il metodo tomahawk è applicabile alla costruzione dell'ennagono regola inscritto:



Tracciare la circonferenza di centro O e raggio OA. Con la stessa apertura fare centro in B per disegnare un arco, che taglia la circonferenza in C e in D, e i raggi OC e OD.

Posizionare il tomahawk in modo che il suo semicerchio sia tangente a OC e con il suo asse MN passante per il centro O.

Per il punto M tracciare il raggio OMF.

Disegnare il raggio OYE: la corda EF è il primo lato dell'ennagono regolare inscritto AIJCEFDGH.

La costruzione dell’ennagono secondo Luca Pacioli

Nel “De Viribus Quantitatis”, compilato da Luca Pacioli (1445 circa – 1517) fra il 1496 e il 1508, sono presentate alcune soluzioni approssimate per la costruzione di quattro poligoni con i seguenti numeri di lati:

* 9 lati (ennagono).
* 11 lati (endecagono).
* 13 lati (tridecagono).
* 17 lati (eptadecagono).

La descrizione relativa all’ultimo dei poligoni, l’eptadecagono, pare essere illeggibile nell’unica copia manoscritta esistente (codice 250 della Biblioteca Universitaria di Bologna).

Per Pacioli, le lunghezze dei lati dei primi tre poligoni sono ricavate con le seguenti regole:

Il lato dell’*ennagono* è lungo la quarta parte della lunghezza di un segmento formato da un lato del triangolo equilatero e da un lato dell’esagono inscritti nello stesso cerchio:

$$\ell_9 = (\ell_3 + \ell_6)/4.$$

La lunghezza del lato dell’*endecagono* è uguale alla parte maggiore della sezione aurea di

$$(\ell_3 + \ell_6)/3.$$

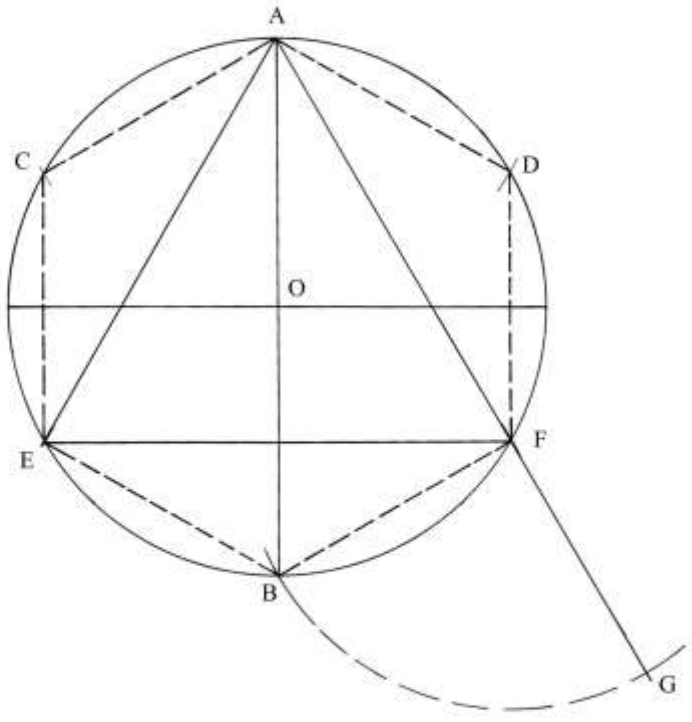
Infine, secondo alcuni Autori la lunghezza del lato del *tridecagono* sarebbe la parte minore della sezione aurea di

$5 * r/2$, dove r è il raggio del cerchio circoscritto al poligono. Sembra che la formula sia errata perché la lunghezza del lato sarebbe leggermente più corta di quella del raggio.

Altri Autori suggeriscono una diversa lettura: la lunghezza del lato del tridecagono è la parte maggiore della sezione aurea della parte maggiore della sezione aurea del raggio del cerchio e così si ha una sezione aurea “a cascata”.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Il grafico che segue descrive il primo passo della costruzione dell’ennagono:



Tracciare il diametro verticale AB e la circonferenza di centro O e raggio OA = OB.

Con apertura OA fare centro in A e in B e disegnare gli archi che tagliano la circonferenza nei punti C, D, E e F.

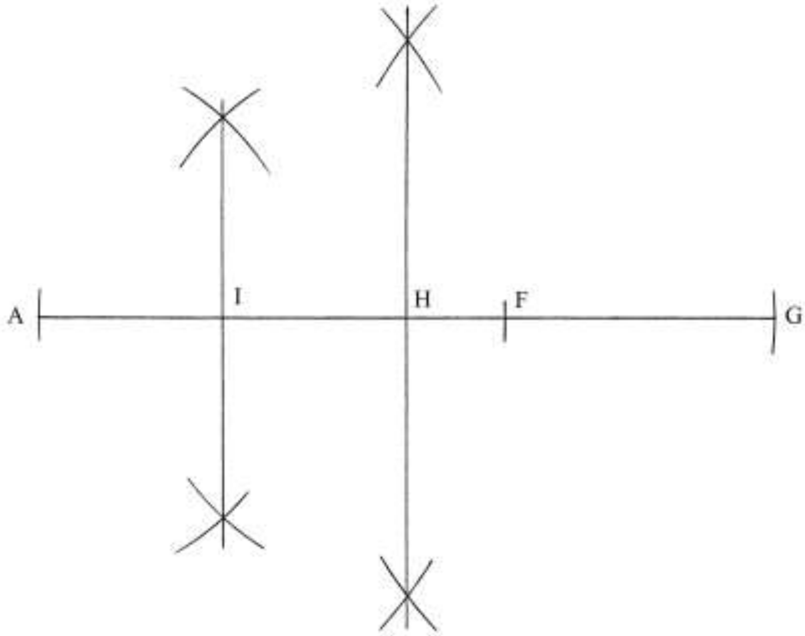
AEF è un triangolo equilatero e ADFBEC è l'esagono inscritti nel cerchio.

Prolungare verso il basso il lato AF e fare centro in F con raggio FB: l'arco da B incontra il prolungamento di AF nel punto G.

Il segmento AG è lungo:

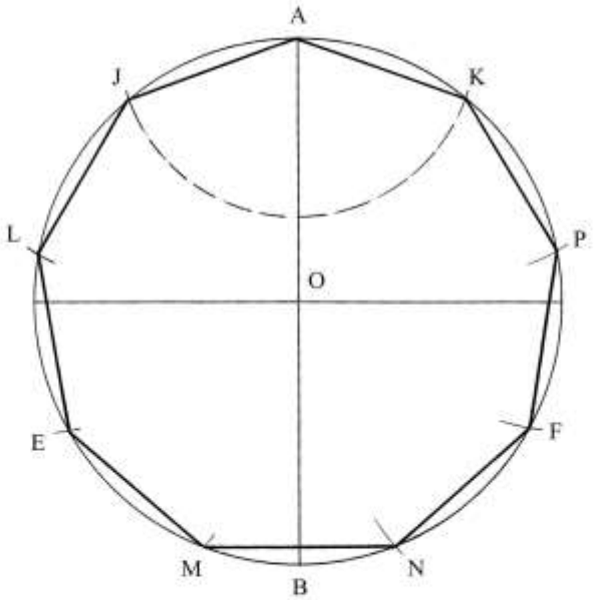
AG = AF + FG = AF + FB = lato triangolo + lato esagono.

Occorre ora dividere per *quattro* la lunghezza di AG: a ciò provvede la costruzione degli assi contenuta nella figura:



AH è il punto medio di AG e AI è il punto medio di AH: AI e AH sono lunghi la *quarta* parte di AG.

Con la stessa apertura di compasso OA usata nel primo schema, disegnare una circonferenza con centro in O:



A partire dal vertice A riportare sulla circonferenza la lunghezza di AI: AKPFNMELJ è l'ennagono regolare inscritto.

Benché il poligono sia approssimato, il risultato è abbastanza preciso.

IL "DE LUDO GEOMETRICO" DI LEONARDO DA VINCI

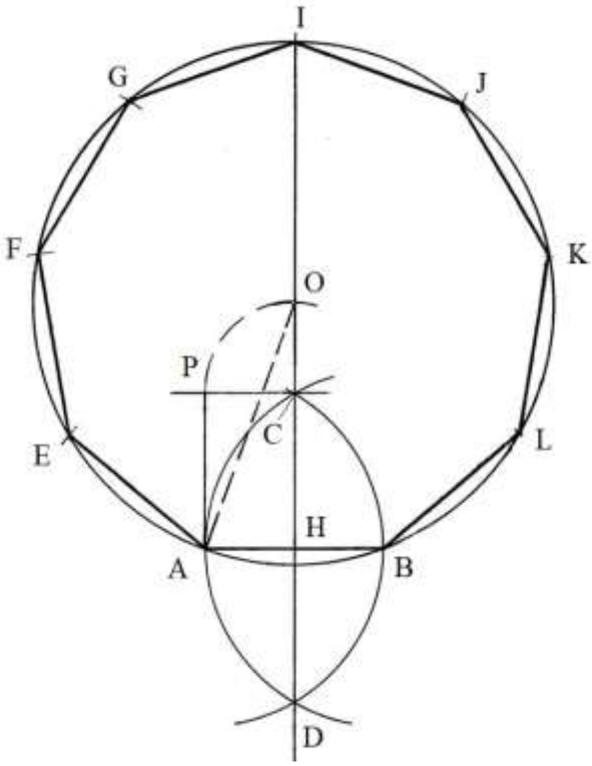
In alcuni manoscritti di Leonardo sono contenuti dei riferimenti a un trattato, il *De ludo geometrico*, che egli voleva comporre. Non ne fece di nulla, ma lasciò numerosi spunti disseminati nel Codice Atlantico, nel Codice Arundel, in un Codice Forster (III) e nei Codici A e B di Parigi.

In campo matematico, le preferenze di Leonardo andavano verso gli studi geometrici.

Ennagono approssimato dato il lato

La costruzione è contenuta nel foglio 29 *recto* del Codice B, conservato a Parigi.

Disegnare il primo lato dell'ennagono, AB, e, con raggio AB, costruire il suo asse che passa per i punti C e D:



H è il punto medio del lato..

Dal punto A elevare la perpendicolare a AB e da C tracciare verso sinistra la parallela allo stesso AB: le due linee si incontrano nel punto P. Il segmento CP è lungo quanto AH (e HB).

Fare centro nel punto C e con raggio CP disegnare un arco da P fino a tagliare l'asse in un punto, O.

O è il centro della circonferenza di raggio OA = OB.

A partire dai vertici A e B, riportare lungo la circonferenza la lunghezza di AB.

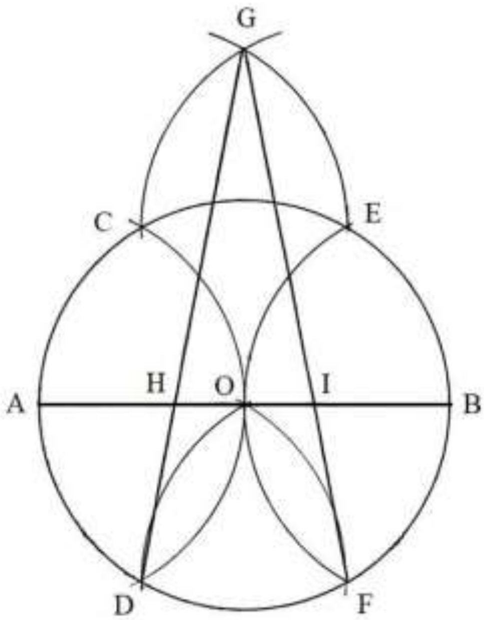
AEFGIJKLB è l'ennagono approssimato.

Questa costruzione ha richiesto l'uso di più aperture di compasso e cioè quelle corrispondenti a AB, CP=AH e OA e quindi non poteva essere realizzata con un unico compasso a apertura costante (un *rusty compass*).

Esagono, ennagono e ottadecagono inscritti

Il foglio 13 *recto* del Codice B contiene una costruzione di tre poligoni inscritti nello stesso cerchio: l'esagono, l'ennagono e l'ottadecagono (il poligono con 18 lati).

Tracciare la circonferenza con centro O e il diametro orizzontale AB. Con apertura di compasso OA, fare centro in A e in B e disegnare gli archi che tagliano la circonferenza nei punti C, D, E e F:



Sempre con apertura OA, fare centro in D e in F e tracciare due archi a partire da O. Ancora con la stessa apertura fare centro nei punti C e E e disegnare due archi che si incontrano in G.

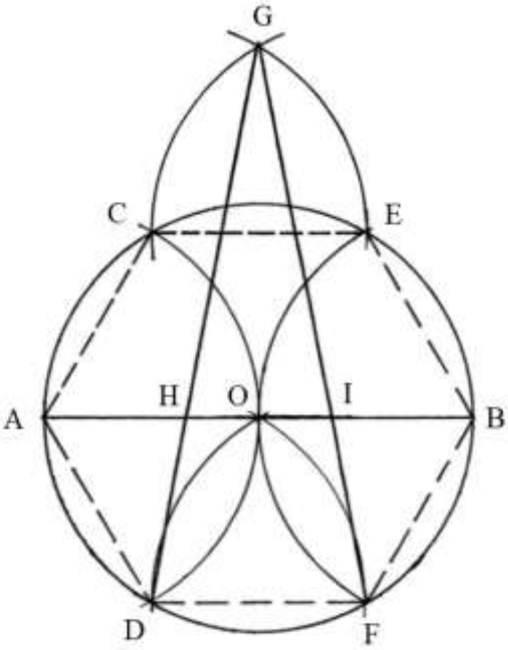
Collegare G con D e con F: i due segmenti incrociano AB in H e in I.

Il diametro AB è ora suddiviso, con una buona approssimazione, in tre parti uguali:

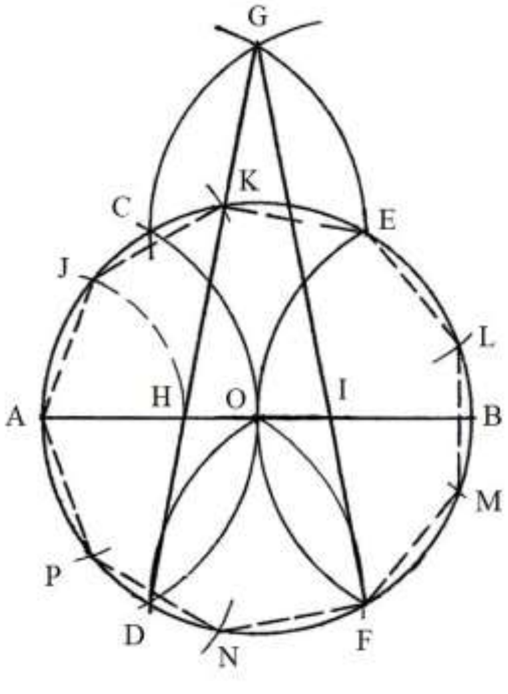
AH = HI = IB.

Probabilmente, il segmento HI risulta leggermente più lungo di AH e di IB.

ACEBFD è un esagono regolare inscritto:



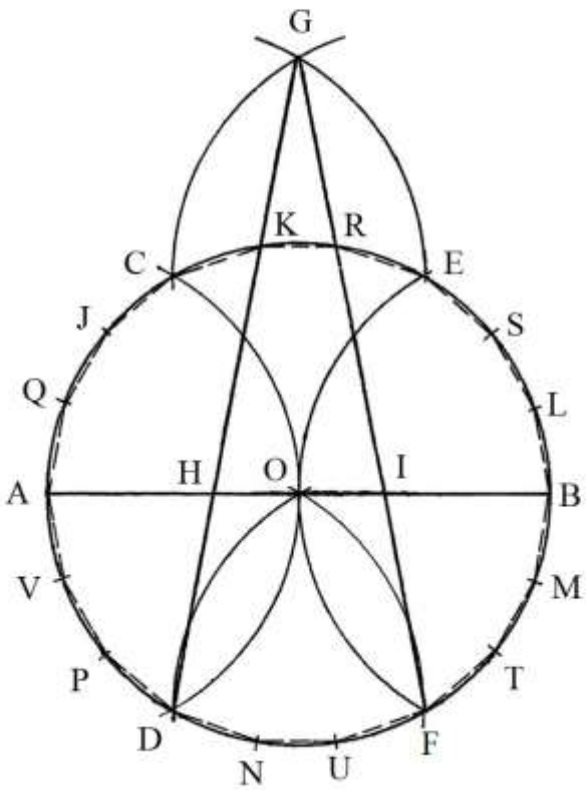
I segmenti AH, HI e IB sono la lunghezza *approssimata* del lato dell'ennagono inscritto; fare centro in A e con raggio AH tracciare l'arco HJ: la corda AJ è il primo lato dell'ennagono inscritto. A partire da J riportare sulla circonferenza la lunghezza di AJ:



AJKELMFNP è l'ennagono approssimato inscritto.

Il punto O divide in due parti uguali il segmento HI: OH = OI.

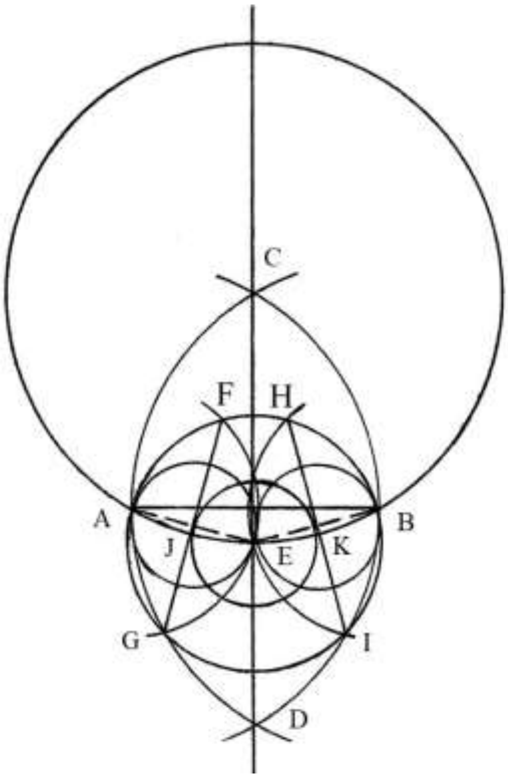
I segmenti OH e OI sono lunghi quanto il lato dell'ottadecagono approssimato inscritto: il poligono, che ha 18 lati, è mostrato nella figura che segue:



AQJCKRESLBMTFUNDPV è l’ottadecagono approssimato inscritto.

<u>Poligoni inscritti con numeri di lati multipli di 3</u>

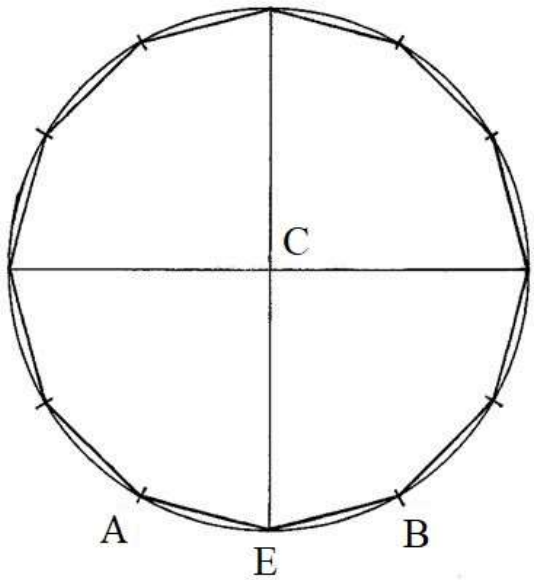
Il foglio 11 *verso* del Codice A contiene la costruzione dei poligoni di 3, 6, 12 e 24 lati, inscritti nello stesso cerchio.



Tracciare il segmento AB, primo lato dell'esagono. Con raggio AB fare centro nei punti A e B e disegnare due archi che si intersecano in C e in D: la linea passante per questi ultimi è l'asse del segmento AB.

Fare centro in C e, con la stessa apertura di compasso (uguale a AB), tracciare una circonferenza che taglia l'asse del segmento nel punto E.

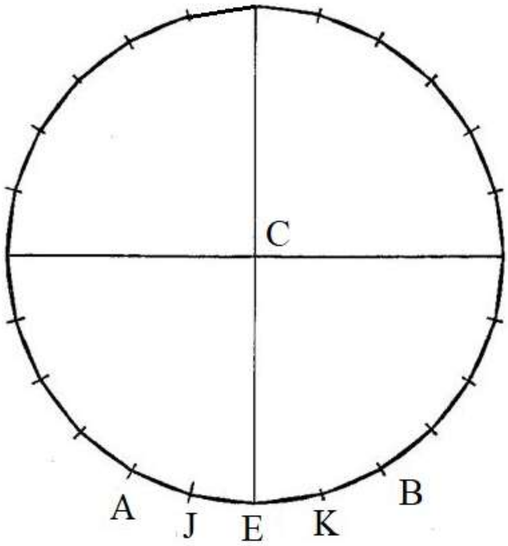
Disegnare le corde AE e EB: esse sono due lati del dodecagono regolare inscritto:



Torniamo alla penultima figura.

Fare centro in E con raggio EA = EB e tracciare una circonferenza. Con la stessa apertura EA, fare centro in A e in B e disegnare due archi che determinano i punti F, G, H e I. Le corde FG e HI incontrano la prima circonferenza nei punti J e K.

La corda AJ è un lato del tetraicosagono regolare inscritto, il poligono di 24 lati:



Infine, Leonardo traccia tre circonferenze con centri nei punti J, E e K e raggio JA: non sembra che essere siano strettamente indispensabili alla costruzione dei tre poligoni.

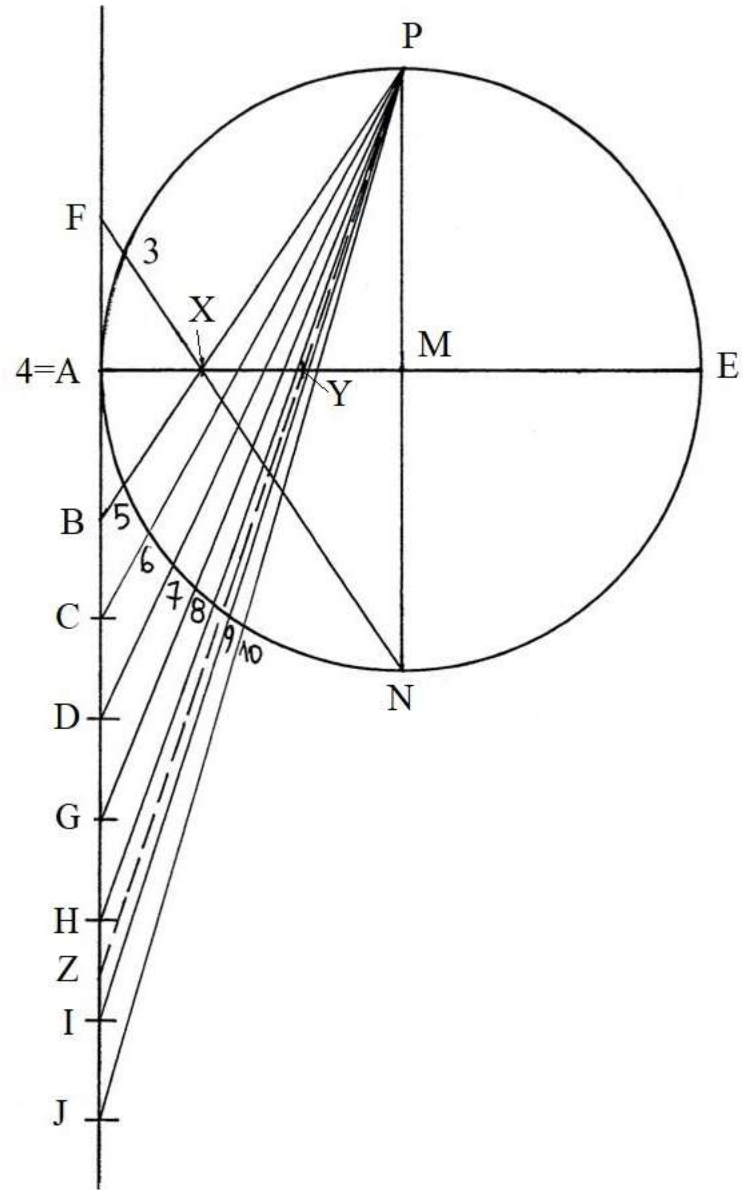
Codice A foglio 11 *verso*

Il Codice A di Parigi contiene nella parte inferiore del foglio 11 *verso* una complessa costruzione che sembrerebbe essere stata ideata da Leonardo per disegnare una serie di poligoni approssimati con numero crescente di lati, tutti inscrivibili in un cerchio.

Il disegno del Codice non è completo e anche la didascalia in calce non è del tutto esauriente.

Qui di seguito viene proposta un'ipotesi ricostruttiva.

Per indicare i punti della costruzione nelle figure che seguono sono usate le stesse lettere dell'alfabeto usate da Leonardo con una differenza: Leonardo impiega quasi sempre lettere *minuscole* mentre qui sono sempre utilizzate le *maiuscole*. Alcuni punti non contrassegnati da Leonardo sono indicati con i *numeri*.



Tracciare la circonferenza di centro M e di raggio MA e i diametri fra loro perpendicolari AE e PN.

Per il punto A disegnare la tangente alla circonferenza, perpendicolare al diametro AE.

Dividere in *tre* parti uguali il raggio AM: sono così stabiliti i punti X e Y.

Dal punto N condurre una linea passante per X fino a intersecare la tangente nel punto F: essa taglia la circonferenza nel punto 3.

Il vertice A coincide con il punto 4.

Dal punto P disegnare una linea *tratteggiata* passante per Y, fino a incontrare la retta tangente in un punto intermedio, Z.

Sempre dal punto P, tracciare una linea passante per X fino a tagliare la tangente nel punto B: essa incontra la circonferenza nel punto 5.

Con il compasso misurare la lunghezza di AX e riportarla sulla retta tangente a partire da B verso il basso: in successione sono stabiliti i punti C, D, G, H, I e J.

Da punto P disegnare una serie di linee che lo collegano con i punti C, D, G, H, I e J.

Le linee PB, PC, PD, PG, PH, PI e PJ incrociano la circonferenza in una serie di punti progressivamente più vicini fra loro: sono 5, 6, 7, 8, 9 e 10. Fra le lunghezze di questi archi valgono le seguenti relazioni:

5-6 > 6-7 > 7-8 > 8-9 > 9-10 e via di seguito.

Secondo Leonardo questi punti sulla circonferenza sono legati alle lunghezze dei lati dei poligoni da inscrivere.

Il senso della numerazione è: il numero del singolo punto è legato al numero dei lati del poligono inscritto da costruire.

Nei grafici che accompagnano la descrizione dell'ipotesi i numeri 1 e 2 sono omessi: la ragione è ovvia, dato che non esistono poligoni con *uno* o *due* lati.

Uno dei massimi studiosi dei Codici di Leonardo è stato Augusto Marinoni (1911-1997). Nel suo studio "La matematica di Leonardo da Vinci", alla pagina 56, così spiega il significato di questa costruzione:

"… *Nella metà inferiore della pagina è disegnato un altro cerchio ortogonalmente diviso in quattro quadranti. La metà destra [sinistra] del diametro orizzontale [AMI] è divisa in tre parti uguali. Dall'estremità superiore del diametro verticale discende obliquamente un fascio di sette linee ognuna delle quali va a toccare la tangente al cerchio parallela al diametro verticale in punti esattamente separati colla misura di 1/3 del raggio.*

"*Nel loro percorso le linee tagliano nel quadrante inferiore destro [sinistro] la circonferenza in spazi sempre più ravvicinati determinando la misura di ¼, 1/5, 1/6, 1/7, 1/8 della circonferenza.*

"*Manca nella pagina lo spazio per condurre a termine le ultime due linee, né è tracciata una prima linea, che pure è nominata e che determina 1/3 della circonferenza. Questa ingegnosa trovata è data come spiegazione del precedente disegno, che già si spiegava da sé, ma richiederebbe a sua volta una spiegazione che invece manca…*".

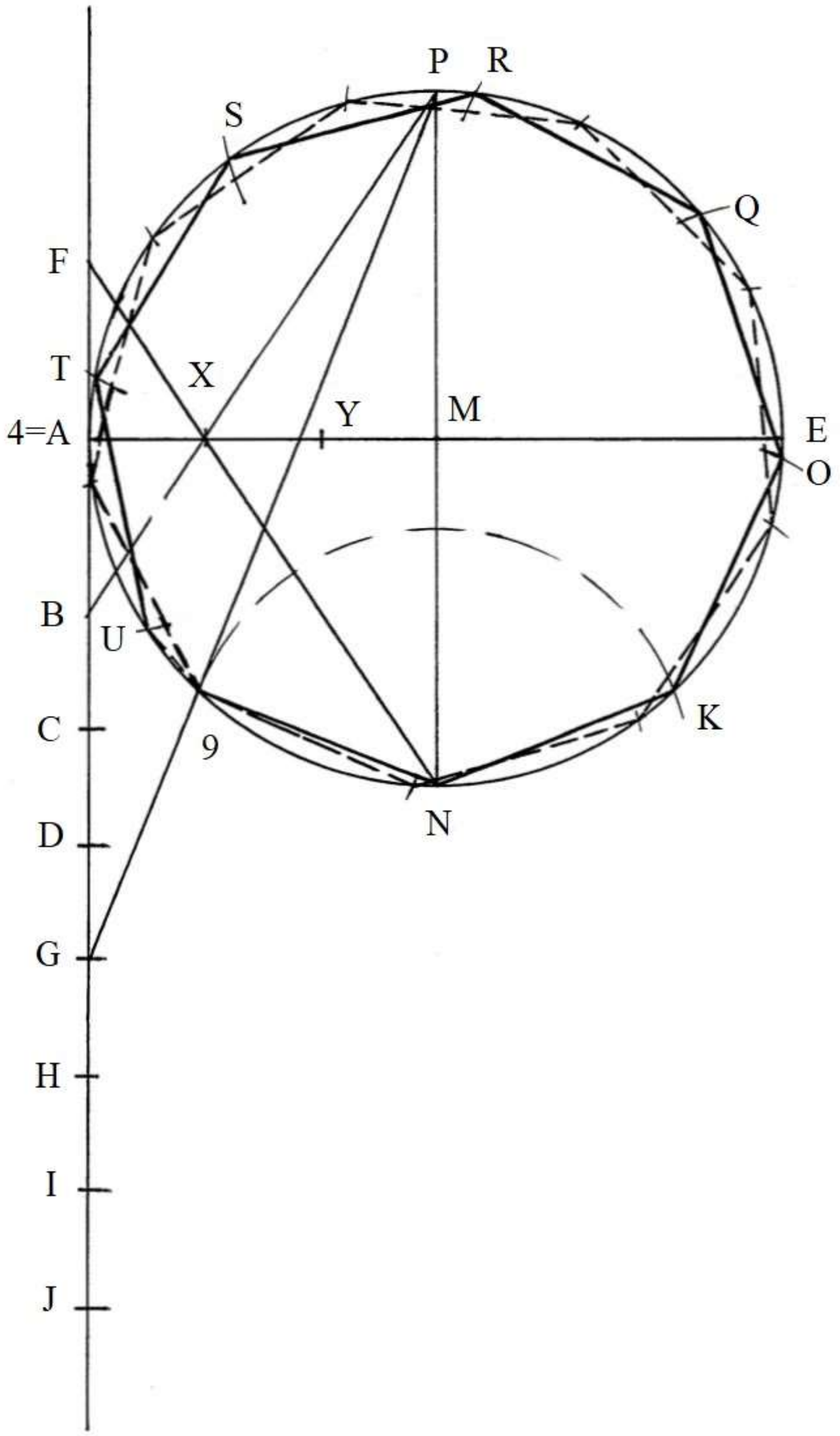
Di seguito è presentata soltanto la costruzione dell'ennagono.

Ennagono

Disegnare la corda 9-N: essa è il primo lato dell'ennagono inscritto.

È bene ricordare che non esiste una costruzione dell'ennagono regolare inscritto esatta, con riga e compasso: i metodi proposti da tanti geometri sono sempre approssimati.

A partire da N, lungo la circonferenza riportare in senso antiorario la lunghezza di N-9.

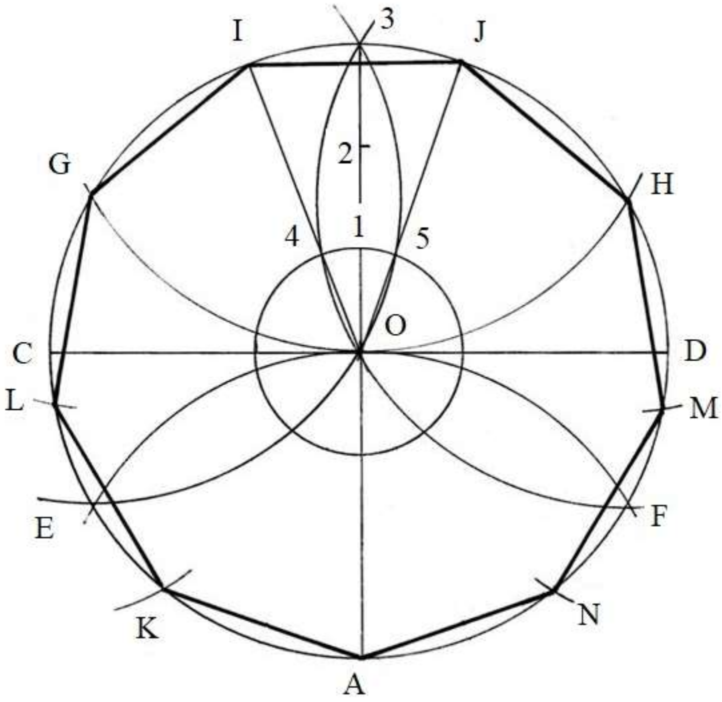


Il poligono 9NKOQRSTU non è un ennagono regolare perché l'ultimo lato tracciato, la corda U-9, è assai più corto degli altri otto lati.

La costruzione dell'ennagono contenuta nel foglio 13 *recto* del Codice B, descritta nelle precedenti pagine, è assai più precisa di questa.

Costruzione dell’ennagono inscritto (metodo di Albrecht Dürer)

Disegnare due assi perpendicolari che si intersecano nel punto O:



Scegliere una lunghezza O-1 e riportarla sull’asse verticale tre volte verso l’alto, a partire dal punto O.

Con centro in O, disegnare due circonferenze concentriche di raggio O-1 e O-3: quella esterna ha raggio *triplo* di quella interna.

Con apertura O-3 e centro in A e in 3, disegnare gli archi che tagliano la circonferenza nei punti E, F, G e H. Con la stessa apertura, fare centro nei punti G e H e tracciare due archi passanti per O: EJ e F-3.

Gli archi appena disegnati intersecano la circonferenza più piccola in due punti, 4 e 5.

Disegnare i raggi della circonferenza esterna passanti per i punti 4 e 5: essi tagliano quella circonferenza in due punti, I e J: la corda IJ è la lunghezza *approssimata* del lato dell’ennagono.

Le corde 3-I e 3-J hanno uguale lunghezza e sono due lati del poligono *approssimato* di 18 lati (ottadecagono) .

I punti A, G e H sono tre vertici dell’ennagono.

Riportare sulla circonferenza esterna la lunghezza di IJ.

Il poligono AKLGIJHMN è l’ennagono approssimato costruito secondo il metodo di Albrecht Dürer.

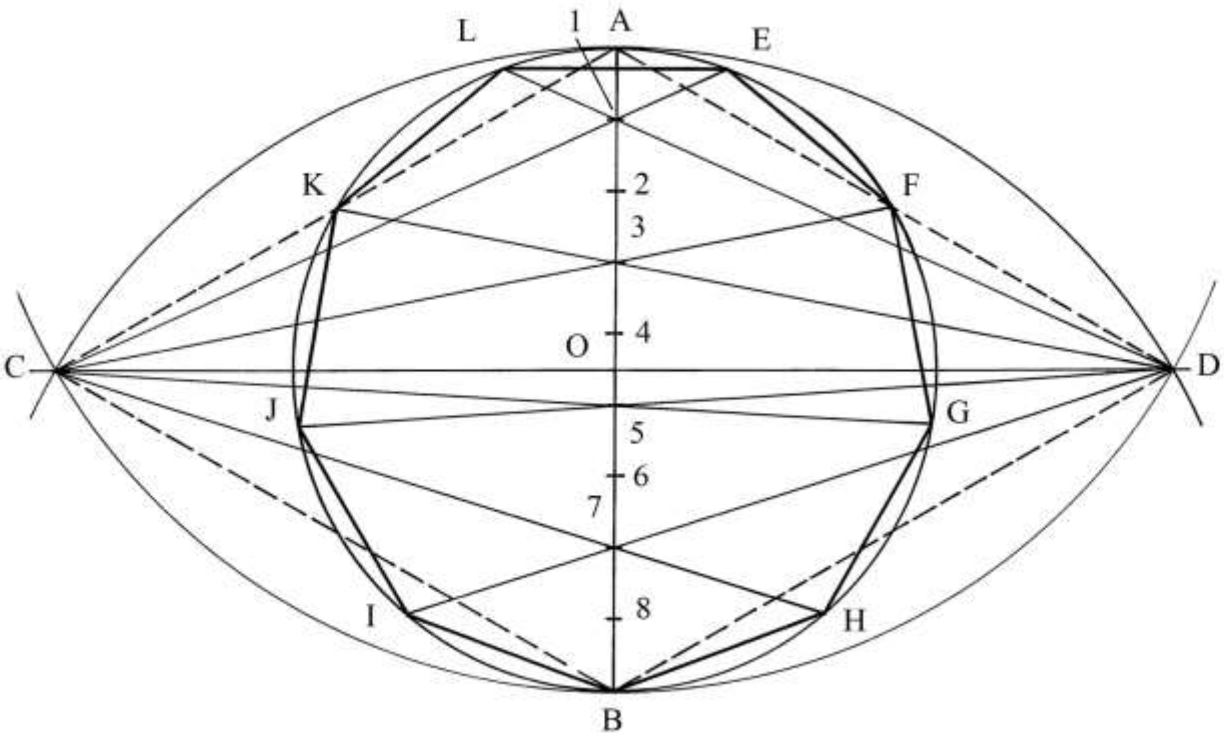
È possibile giungere allo stesso risultato partendo dalla circonferenza esterna: il raggio O-3 va diviso in tre parti uguali. La soluzione qui presentata elimina il problema della divisione per tre e la sostituzione con una più facile moltiplicazione per due e per tre della lunghezza del raggio della circonferenza interna, O-1.

Le costruzioni approssimate di Carlo Renaldini

Carlo Renaldini (1615-1679) è stato un matematico e geometra italiano. A lui si deve una costruzione geometrica *approssimata* per i poligoni non ricavabili con riga non graduata e compasso ad apertura fissa: essa è descritta nel suo trattato "*Geometra promotus*" pubblicato a Padova nel 1670.

Il metodo di Renaldini è qui applicato al caso dell'ennagono, ma esso ha validità generale.

Disegnare il diametro verticale AB e dividerlo in *nove* parti uguali: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8 sono i punti separatori.



Tracciare la circonferenza con centro in O e raggio OA = OB.

Con raggio AB fare centro in A e in B e disegnare due archi che si intersecano nei punti C e D. Tracciare la retta passante per C e D e le corde CA, CB, DA e DB.

ABC e ABD sono due triangoli equilateri uniti lungo il lato verticale AB: CADB è un *rombo* che possiede la diagonale minore, AB, che ha lunghezza uguale a quella dei suoi lati. La diagonale maggiore CD è lunga quanto la doppia altezza di un triangolo equilatero di lato AB:

$$CD = AB * \sqrt{3}.$$

Dai punti C e D tracciare un fascio di segmenti passanti per i punti con numerazione dispari del diametro AB: 1, 3, 5 e 7.

I segmenti tagliano la circonferenza di centro O nei punti E, F, G, H, I, J, K e L.

EFGBHIJKL è l'ennagono regolare approssimato inscritto.

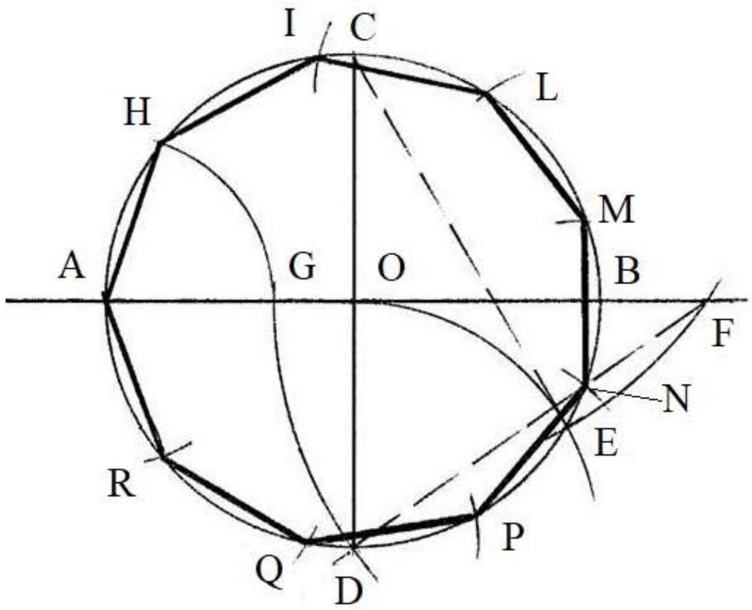
Disegnando il fascio di linee uscenti da C e da D per tutti gli *otto* punti della divisione in *nove* parti uguali di AB sono stabiliti i vertici dell'*ottadecagono*, il poligono regolare che possiede 18 lati.

Ennagono inscritto approssimato

Anche questa costruzione fornisce un poligono *approssimato*.

Tracciare una circonferenza con centro in O e i due diametri, fra loro perpendicolari, AB e CD.

Con la stessa apertura di compasso, fare centro in D e disegnare un arco da O fino a tagliare la circonferenza in un punto, E.



Tracciare la corda CE: con centro in C, e raggio CE, condurre un arco da E fino a intersecare il prolungamento verso destra di AB, in un nuovo punto, F.

Disegnare il segmento FD e, con raggio FD, fare centro in F per tracciare un arco che da D sale fino a tagliare il diametro AB in un punto, G.

Il segmento GA è la lunghezza approssimata del lato dell'ennagono inscritto AHILMNPQR.

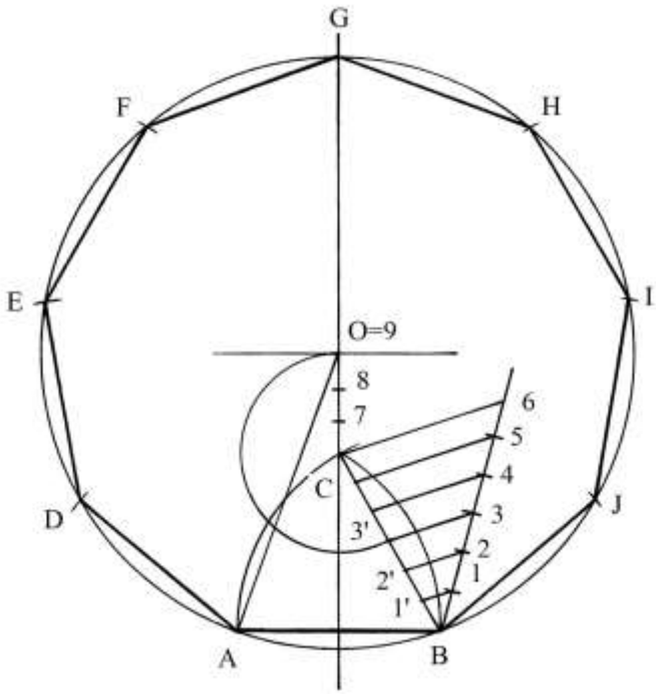
La lunghezza di AG è approssimata *per difetto* dello 0,3%.

Costruzione approssimata di un poligono qualsiasi dato il lato

Questa costruzione viene impiegata per disegnare poligoni con un numero di lati maggiore di *sei*. La lunghezza del lato è conosciuta: la costruzione si propone di determinare il centro della circonferenza circoscritta sulla quale sarà inscritto il poligono.

L'esempio della figura che segue è quello di un *ennagono*.

Disegnare il lato AB e costruire l'asse di questo segmento.



Con centro in A e in B, con raggio AB, disegnare due archi che si intersecano nel punto C. Da B tracciare un segmento obliquo B-6 e dividerlo in *sei parti uguali*, indipendentemente dal numero dei lati del poligono che si vuole ottenere: i punti fissati sono 1, 2, 3, 4, 5 e 6. Con la nota costruzione della divisione di un segmento in parti uguali, riportare le divisioni sul segmento BC: sono indicati i punti 1', 2' e 3'.

Da C, verso l'alto, riportare tante volte la lunghezza del segmento B-1' quante ne servono per raggiungere il numero dei lati voluti, sommando le *sei* divisioni contenute nel segmento BC: nel caso dell'ennagono ne occorrono (9-6) e cioè 3, che possono essere riportate in un solo passaggio con l'arco di centro C e raggio C-3'. Si ottiene il punto O(=9), centro del cerchio circoscritto.

Con raggio OA, disegnare la circonferenza e, a partire da A e da B, con raggio AB, determinare i vertici mancanti del poligono.

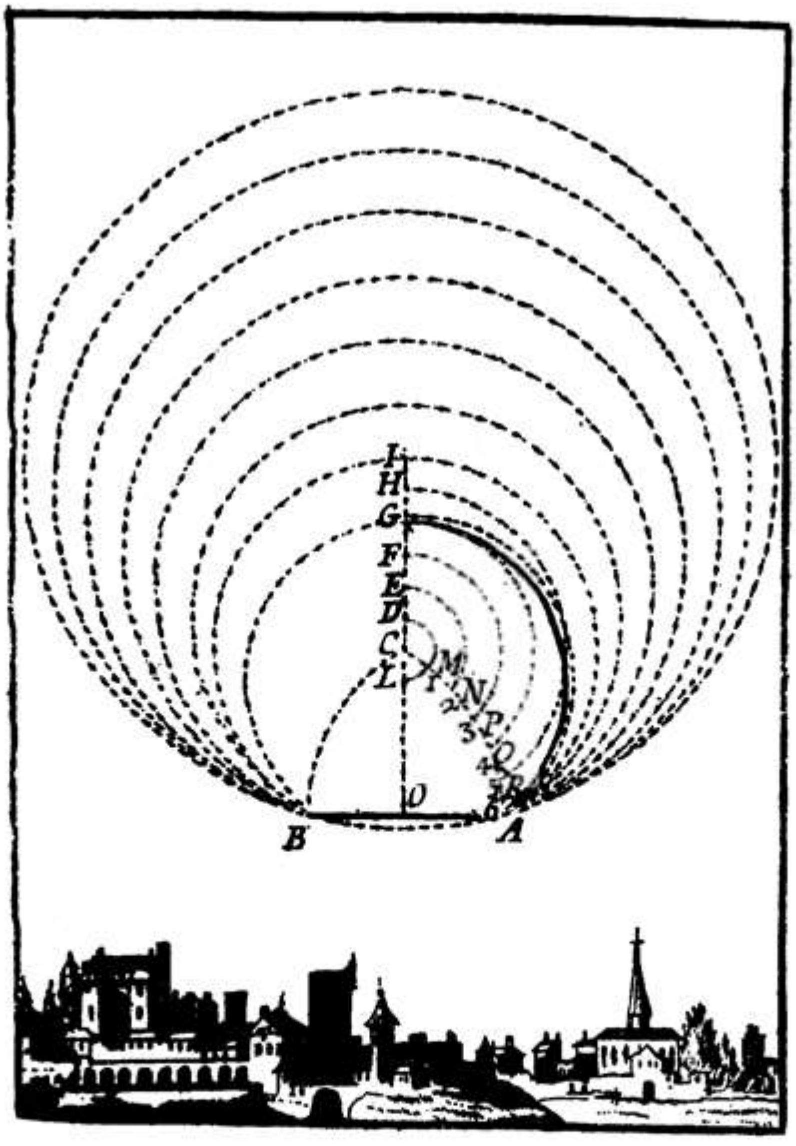
La tabella che segue fornisce ulteriori informazioni sull'applicazione di questo metodo alla costruzione di poligoni con numero di lati *maggiore di sei*.

Numero lati: *n*	Nome del poligono	Quante volte va riportata la lunghezza B-1' della precedente figura: *n - 6*
7	Ettagono	1
8	Ottagono	2
9	Ennagono	3
10	Decagono	4
11	Endecagono	5
12	Dodecagono	6

La costruzione era nota da secoli e potrebbe derivare da una descritta da Leonardo da Vinci. Come spiega la figura che segue, tratta dall'edizione italiana del testo di "*Pratica della Geometria* *sulla Carta e sul Terreno*" di Sébastien Leclerc (Venezia, 1747), il metodo era diffuso, come spiega la figura che segue, impiegata dall'Autore francese per la realizzazione di poligoni fino al *dodecagono*:

LIBRO SECONDO 87

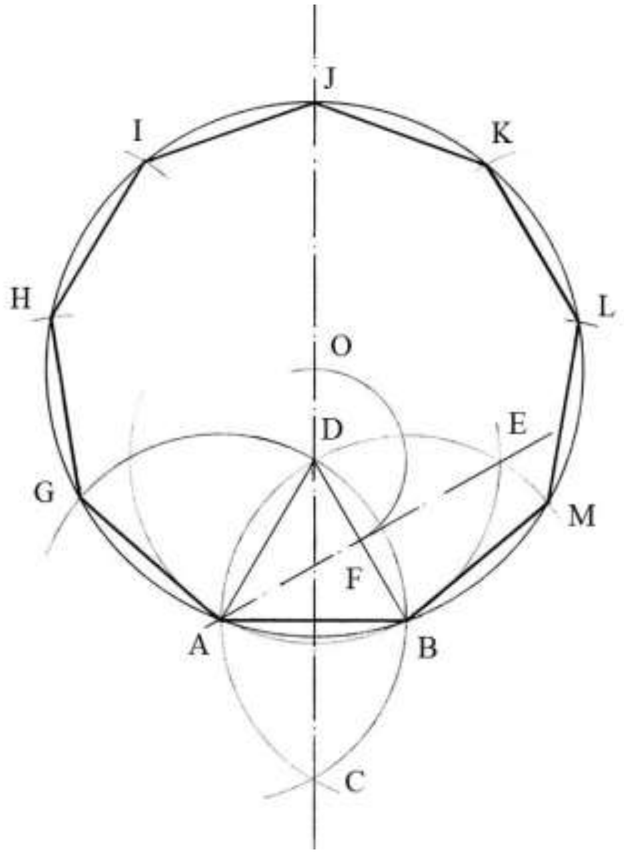
TAVOLA XXXVI



%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Nel caso dell'ennagono, la precedente costruzione può essere semplificata come è descritto di seguito.

Fissare il lato AB. Fare centro in A e in B con raggio AB e tracciare due archi che si intersecano nei punti C e D: per questi ultimi passa l'asse del segmento AB.



Completare il triangolo equilatero ADC. Sempre con apertura AB, fare centro nel punto D e disegnare un arco che taglia quello di centro in B in un nuovo punto, E.

Per i punti A ed E tracciare l'asse del segmento DB: esso incontra il lato DB in un punto, F.

Questo ultimo è il *punto medio* di DB. Vale quindi la relazione

DF = ½ * DB = 3/6 * DB.

La relazione ci riporta alla costruzione generale vista in precedenza in questo stesso paragrafo.

Fare centro in D e, con raggio DF, tracciare un arco da F fino a incontrare l'asse del segmento AB in un nuovo punto, O, centro della circonferenza circoscritta all'ennagono da costruire.

Dopo aver disegnato la circonferenza di centro O e raggio OA = OB, riportarvi la lunghezza di AB.

AGHIJKLMB è l'ennagono *approssimato*.

La costruzione dell'ennagono approssimato secondo Redondo Buitrago

La ricercatrice spagnola Antonia Redondo Buitrago ha pubblicato almeno due studi sull'ennagono approssimato. Due di essi sono citati in bibliografia.

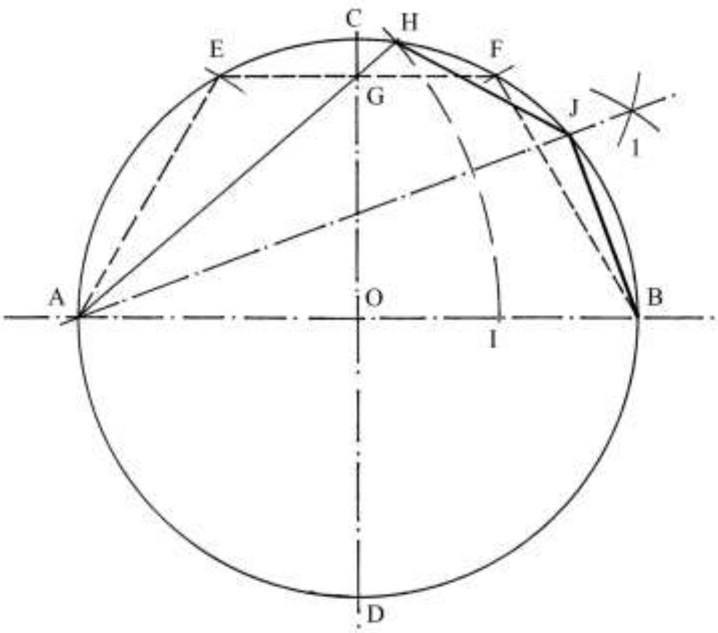
Nella carpenteria applicata all'architettura utilizzata in Spagna fra il XII e il XVI secolo veniva usato un metodo grafico che impiegava squadre con angoli che erano sottomultipli di quello di 180°.

Quegli angoli tipici delle squadre venivano ottenuti dividendo 180° per "n": questo ultimo poteva valere 6, 8, 9, 10, 12 e 16.

In tutti i casi il problema era legato a quello della costruzione esatta di poligoni regolari.

Il metodo largamente usato dagli artigiani medievali per disegnare poligoni regolari approssimati era rappresentato dalla rotazione e dallo scorrimento di apposite squadre. Per la costruzione dell'*ennagono* e del suo angolo di 40° non sembra esistessero degli appositi strumenti.

In un trattato spagnolo del XVII secolo, la Redondo Buitrago ha ritrovato la costruzione approssimata che, con leggere modifiche, è presentata nella figura che segue:



Disegnare due rette perpendicolari e fare centro nel loro incrocio O con il raggio del cerchio: OA=OB.

Con lo stesso raggio OA fare centro in A e in B e tracciare due archi che fissano i punti E e F.

Le corde AE, EF e FB sono tre lati di un esagono inscritto, non completato.

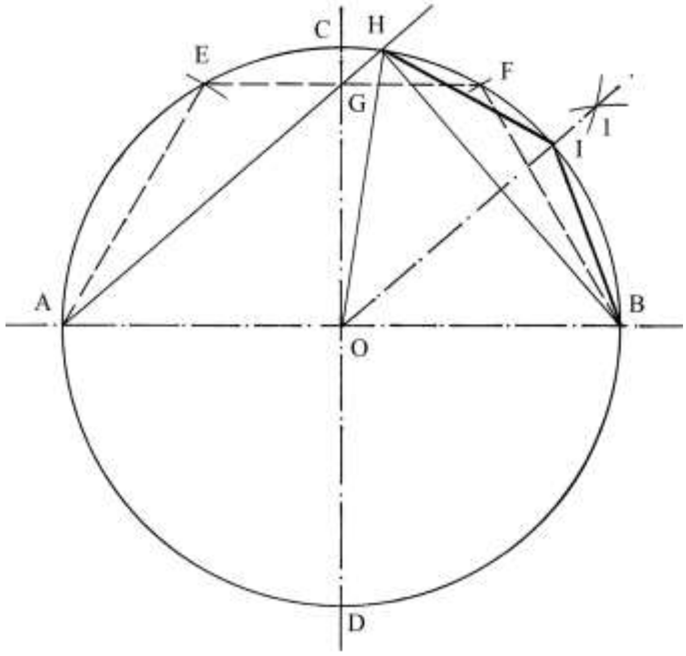
Il lato EF è tagliato dal diametro verticale nel suo punto media G.

Disegnare la corda uscente da A e passante per G fino a tagliare la circonferenza nel punto H: H e B sono due vertici dell'ennagono inscritto.

A questo punto possiamo adottare due soluzioni grafiche per determinare il punto medio dell'arco HB; la prima è presentata nella figura qui sopra: fare centro in A e con raggio AH tracciare un arco da H a I.

Facendo centro in H e in I sono tracciati due archi che si incontrano nel punto esterno 1: per questo passa la bisettrice dell'angolo HAI che incontra la circonferenza nel punto J, terzo vertice dell'ennagono.

La seconda soluzione è nella figura che segue:

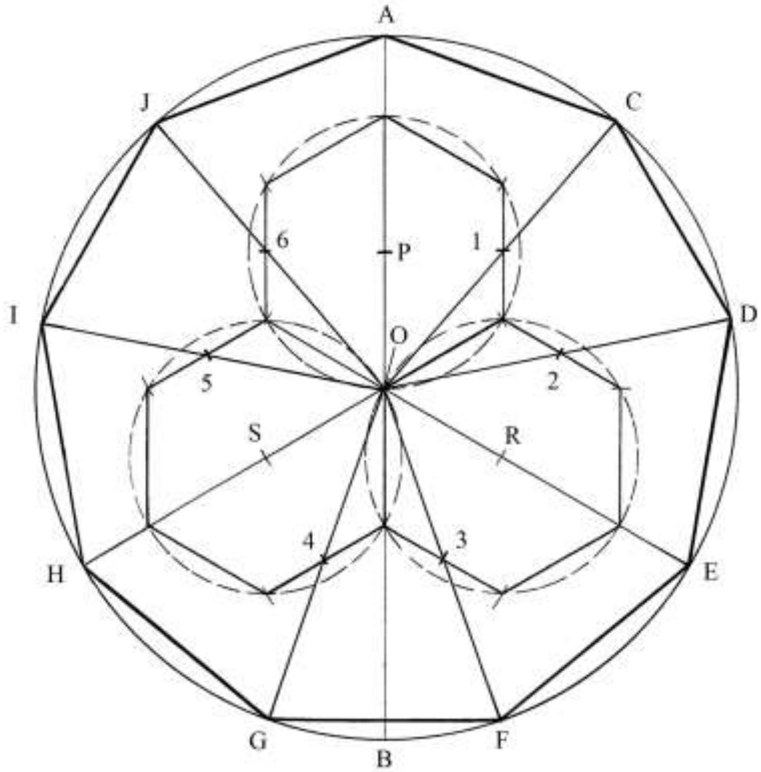


Nella parte iniziale la costruzione è identica alla precedente. HO è un raggio e HB è una corda che sottende l'angolo HOB: occorre dividerlo in due parti uguali. Fare centro in H e in B e tracciare due archi che si tagliano nel punto 1. Per O e per 1 passa la bisettrice dell'angolo che fissa il punto I sulla circonferenza.

In entrambe le figure sono stati disegnati solo i primi due lati dell'ennagono.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Lo schema che segue descrive la probabile origine degli ennagoni presenti nella Basilica di Santa Sofia a Istanbul:



Essa richiede la preliminare costruzione di tre ennagoni regolari con lati tangenti fra di loro e con il vertice O in comune: i centri P, R e S sono i vertici di un triangolo equilatero, non disegnato.

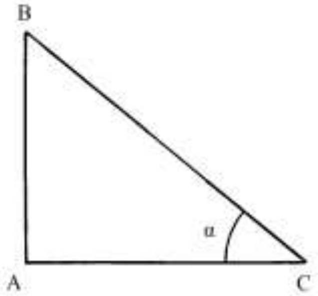
Devono essere stabiliti i punti medi di sei lati, due per ciascun esagono: essi sono indicati con 1, 2, 3, 4, 5 e 6.

Con centro in O e raggio OA = OB disegnare la circonferenza del cerchio in cui deve essere inscritto l'ennagono.

Dal punto O tracciare le linee passanti per P, R, S, 1, 2, 3, 4, 5 e 6: esse incontrano la circonferenza nei punti A, C, D, E, F, G, H, I e J che sono i vertici dell'ennagono regolare approssimato.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Infine, un'ultima costruzione dell'ennagono è basata sulla rotazione di un triangolo rettangolo che ha cateti lunghi 5 e 6 unità:



I cateti sono lunghi:

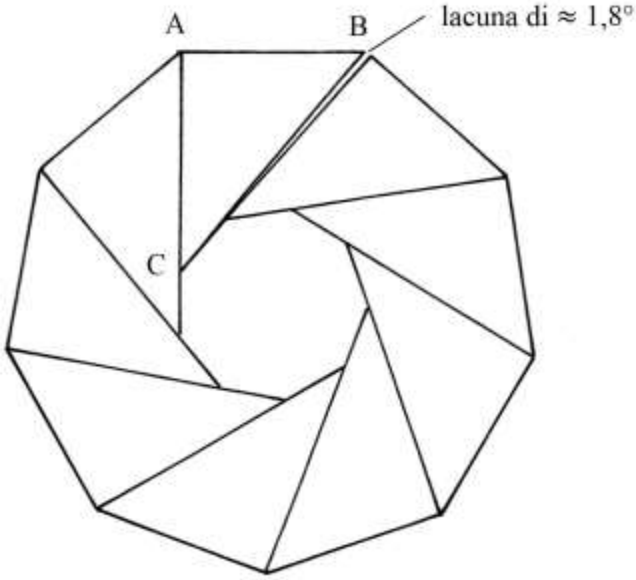
* AB = 5.
* AC = 6.

L'angolo α ha tangente uguale a:

tg α = AB/AC = 5/6 0 0,8(33).

A questo valore corrisponde un angolo di circa 39,8°, vicinissimo all'angolo di 40° tipico dell'ennagono.

La rotazione della squadra produce lo schema che segue, sempre riprodotto dalla Redondo Buitrago:

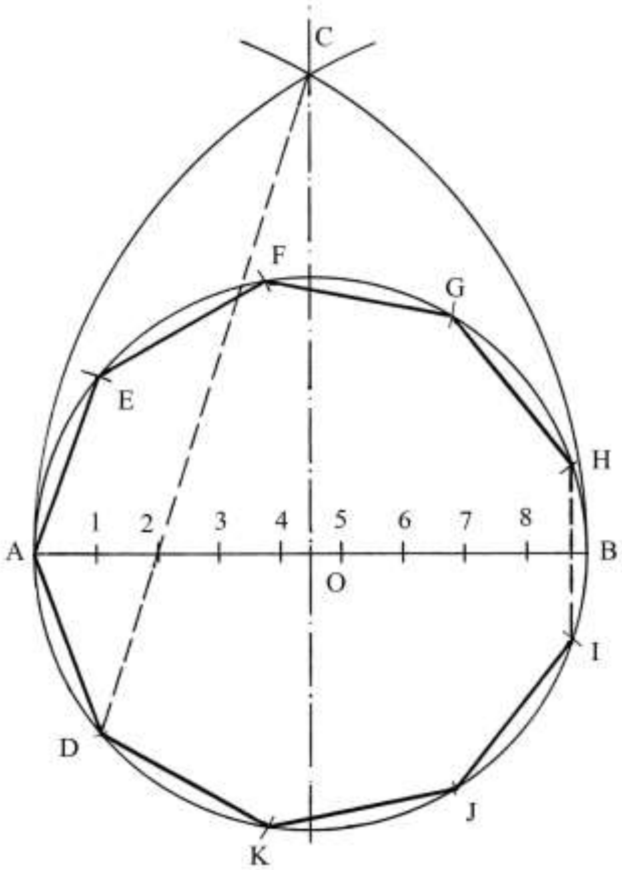


La copertura del piano non è perfetta perché il prodotto (39,8° * 9) dà risultato 358,2°, che produce una lacuna ampia

(360° – 358,2°) = 1,8°.

<u>Ennagono approssimato – metodi di Bion e Tempier</u>

L'ingegnere e costruttore di strumenti scientifici francese Nicolas Bion (1652 – 1733) propose un metodo per la costruzione dell'ennagono inscritto:



AB è il diametro orizzontale del cerchio circoscritto al poligono e O è il suo centro.

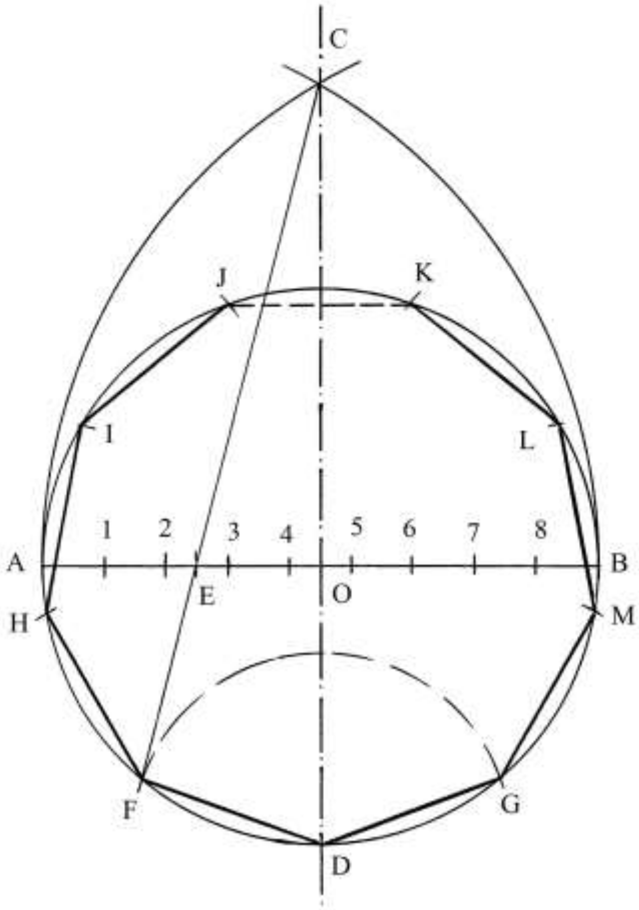
Dividere AB in *nove* parti uguali. Fare centro in A e in B e con raggio AB tracciare due archi da A e da B fino a farli intersecare nel punto C: per questo punto e per il centro O passa il diametro verticale.

Disegnare una retta passante per i punti C e 2 fino a incontrare la circonferenza in un punto, D: la corda AD è il primo lato dell'ennagono. Riportare la lunghezza di AD sulla circonferenza: un lato, in questo caso è HI che viene evidenziato a tratteggio, risulta leggermente più corto degli altri otto.

La costruzione di Bion è chiaramente derivata da quella di Carlo Renaldini e conserva la sua approssimazione senza alcun correttivo.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Una variante del metodo di Bion è attribuita al francese M. Tempier (1819 – 1905):



Inizialmente, la costruzione di Tempier ripropone gli stessi passaggi di quella di Bion.

Fra 2 e 3 stabilire il punto medio E.

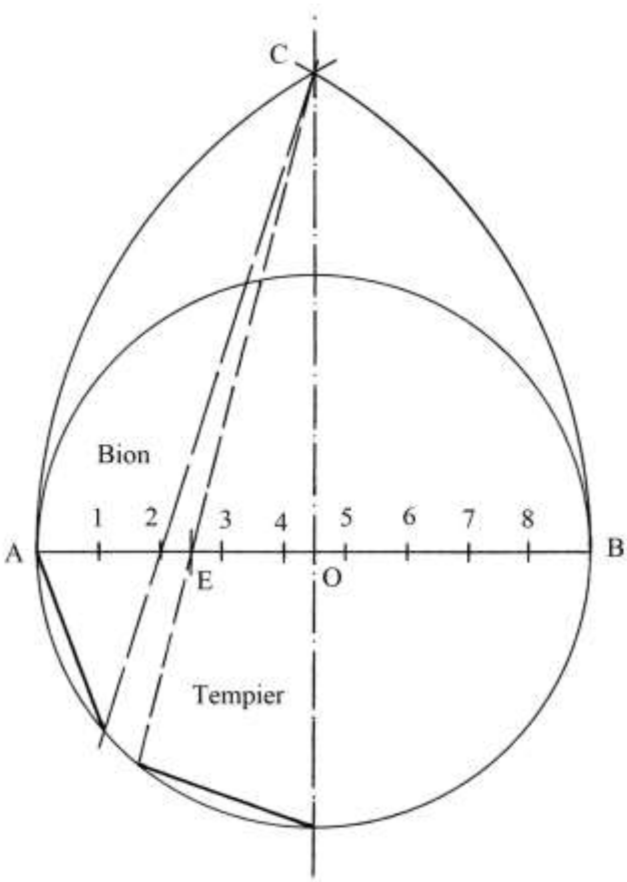
Tracciare una retta passante per C e per E: essa incontra la circonferenza nel punto F. La corda FD è il primo lato dell'ennagono approssimato DFHIJKLMG.

Il lato JK è disegnato con linea a tratti perché è leggermente più corto degli altri otto.

Anche il metodo di Tempier deriva da quello di Carlo Renaldini.

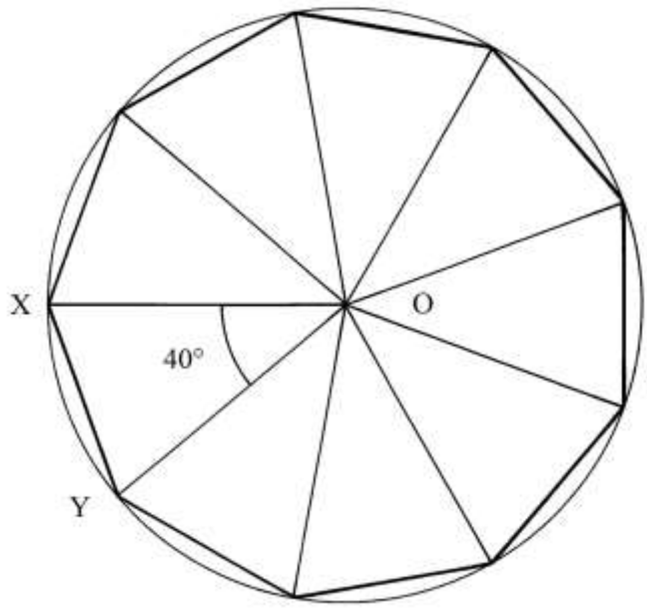
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Il grafico che segue mette a confronto le due varianti, di Bion e di Tempier:



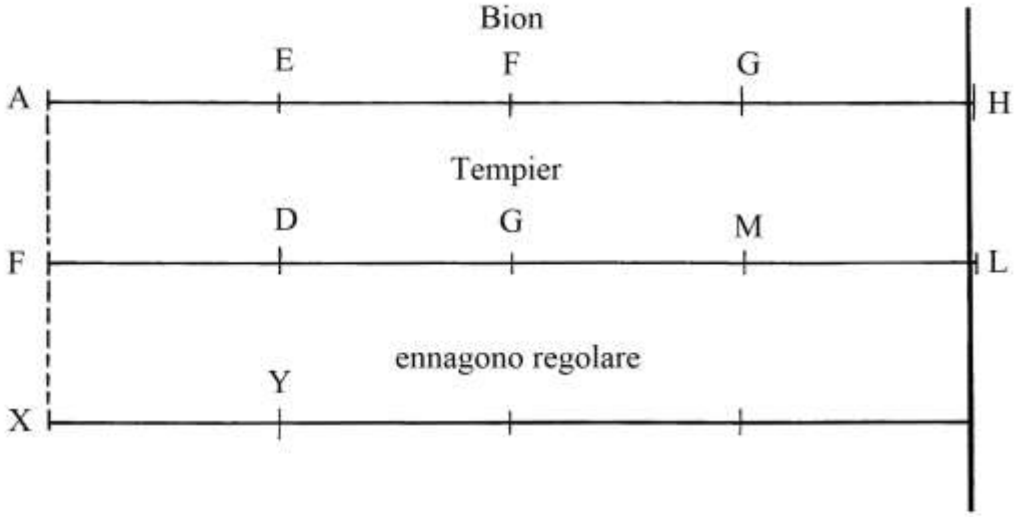
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Lo schema che segue presenta un ennagono *regolare* inscritto:



Il poligono è stato disegnato con un preciso goniometro con il cui aiuto sono stati definiti *nove* angoli al centro, tutti di ampiezza uguale a 40°.

Il grafico che segue confronta le lunghezze di *quattro* lati dei tre poligoni disegnati in precedenza:



I quattro lati dei poligoni di Bion e di Tempier sono leggermente più lunghi dei quattro lati del poligono regolare che ha tutti i lati di lunghezza uguale a quella di XY.

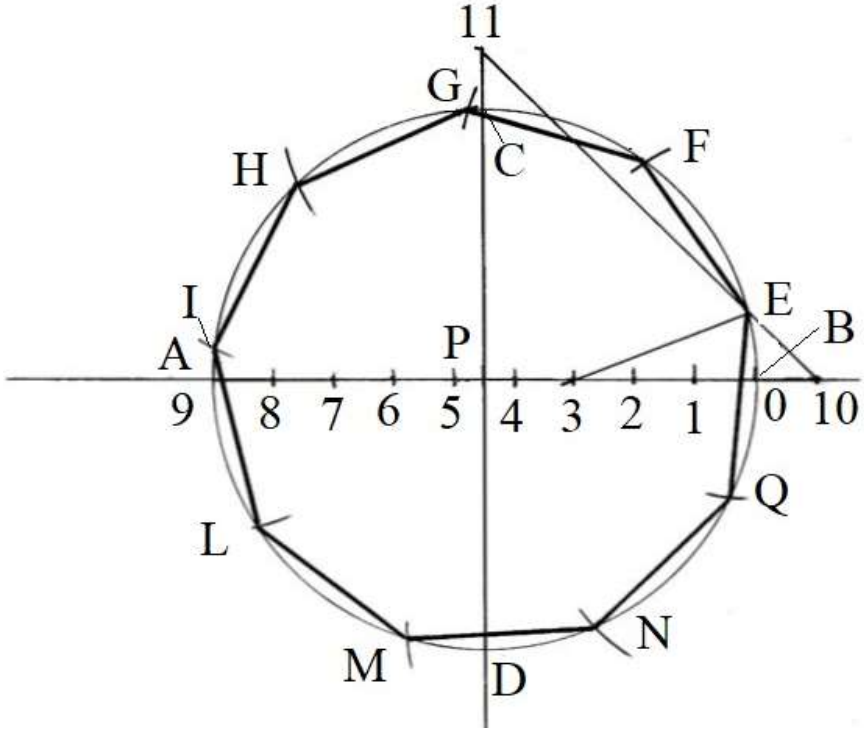
Le differenze fra le lunghezze ottenute dai metodi di Bion e di Tempier sono trascurabili.

<u>Poligoni inscritti – metodo di Bardin</u>

Libre-Irmond Bardin (o Bardin de la Moselle, 1794-1867) è stato un topografo francese, autore di alcuni trattati di geometria descrittiva. La sua conoscenza in Italia si deve a Italo Ghersi.

La sua è una costruzione approssimata che può essere usata solo per poligoni con *numero minimo di lati uguale a 5*. L'esempio che segue presenta l'*ennagono*.

Disegnare una circonferenza con centro in P e i due diametri AB e CD fra loro perpendicolari:



Dividere il diametro AB in un numero di parti uguali, numero uguale a quello dei lati del poligono da inscrivere: nell'esempio della figura, il diametro è diviso in 9 parti uguali, perché deve essere inscritto un poligono di 9 lati e cioè un *ennagono*.

Gli estremi A e B coincidono rispettivamente con i punti 9 e 0.

Sui prolungamenti dei diametri, a partire dai punti 0 (=B) e C riportare la lunghezza del segmento 0-1: sono così individuati i punti 10 e 11.

Tracciare il segmento 10-11: esso interseca la circonferenza in due punti: scegliamone uno e indichiamolo con E.

Disegniamo il segmento E-3, scegliendo il *quarto* vertice dei segmenti uguali, a partire da B (compreso) verso sinistra: E-3 è la lunghezza del lato del poligono da inscrivere.

Riportare la lunghezza E-3 lungo la circonferenza.

Il poligono EFGHILMNQ è l'ennagono cercato.

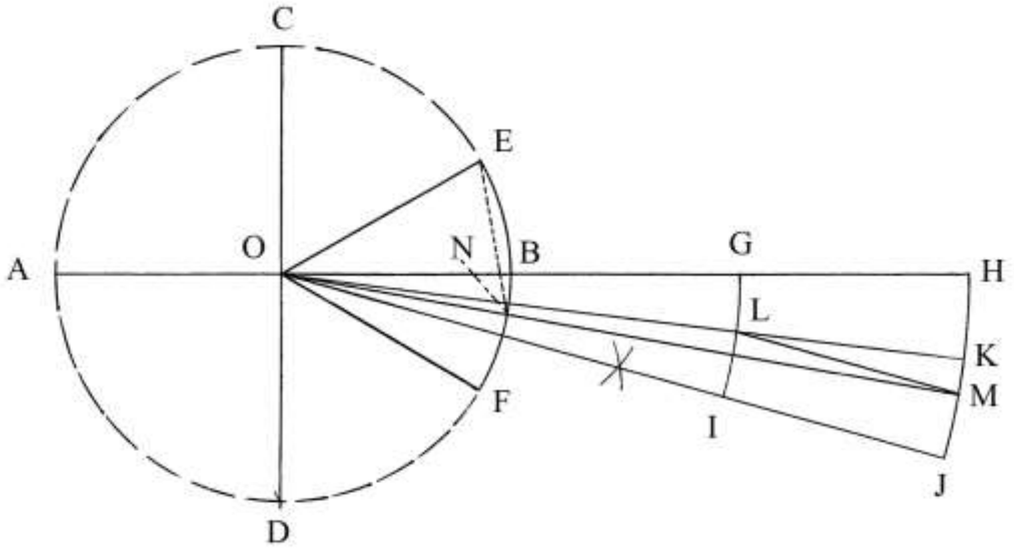
Probabilmente, il metodo di Bardin offre risultati un po' più corretti del metodo di Renaldini.

<u>Costruzione di Howe</u>

La costruzione si deve al matematico americano H. A. Howe: il suo articolo del 1889 è citato in bibliografia.

La sua conoscenza in Italia si deve a Italo Ghersi che la riprodusse nel suo "*Matematica dilettevole e curiosa*".

Tracciare una circonferenza di centro O e raggio OA e i due diametri fra loro perpendicolari AB e CD. Prolungare AB verso destra.



Con apertura OA fare centro in C e in D e disegnare due archi che tagliano la circonferenza nei punti E e F: la corda EF è un lato dell'esagono inscritto nel cerchio di centro O.

Sul prolungamento di AB riportare da B per due volte la lunghezza di OA: sono stabiliti i punti G e H.

Costruire la bisettrice dell'angolo BOF.

Fare centro in O e con raggi OG e OH tracciare due archi che determinano i punti I e J.

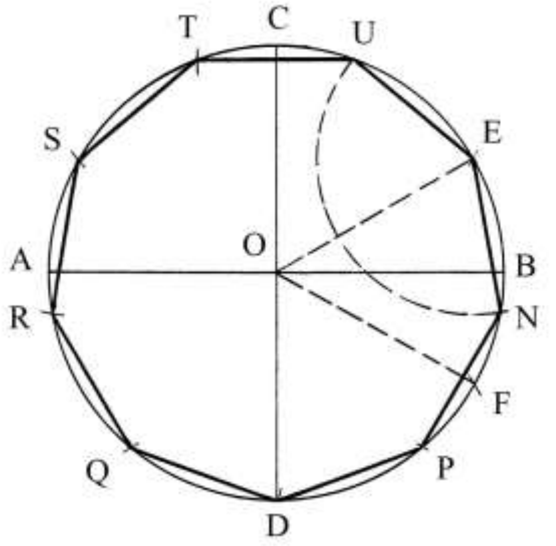
Occorre ora un preciso goniometro per creare un angolo di 37°:

EOK = 37°.

Il lato OK taglia l'arco GI nel punto L.

A partire da L condurre la parallela a OIJ fino a incontrare l'arco HKJ nel punto M. Collegare O con M: il segmento incrocia la circonferenza nel punto N.

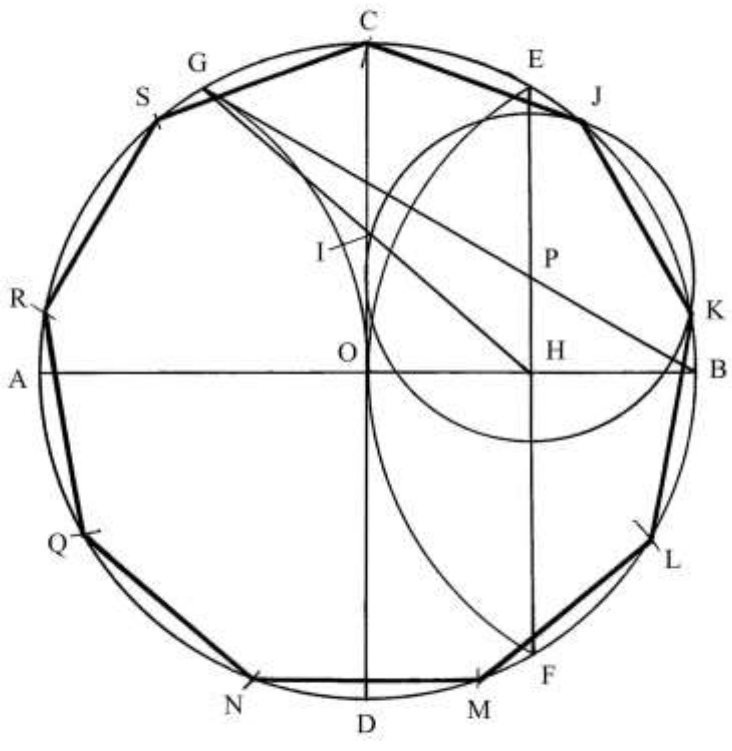
La corda EN è un lato dell'ennagono approssimato inscritto nel cerchio di centro O:



Le costruzioni di Italo Ghersi

Dopo aver descritto la costruzione di Howe, Italo Ghersi propose due diverse soluzioni, da lui ritenute più precise di quella del matematico americano: esse sono più corrette e non richiedono l'uso di un goniometro ma solo quello di compasso e riga.

La prima è presentata nella figura che segue:



AB e CD sono due diametri perpendicolari del cerchio di centro O: con apertura OA fare centro in B e in O e tracciare gli archi EOF e OG.

Collegare G con E e con H: la corda GB taglia in P quella EF.

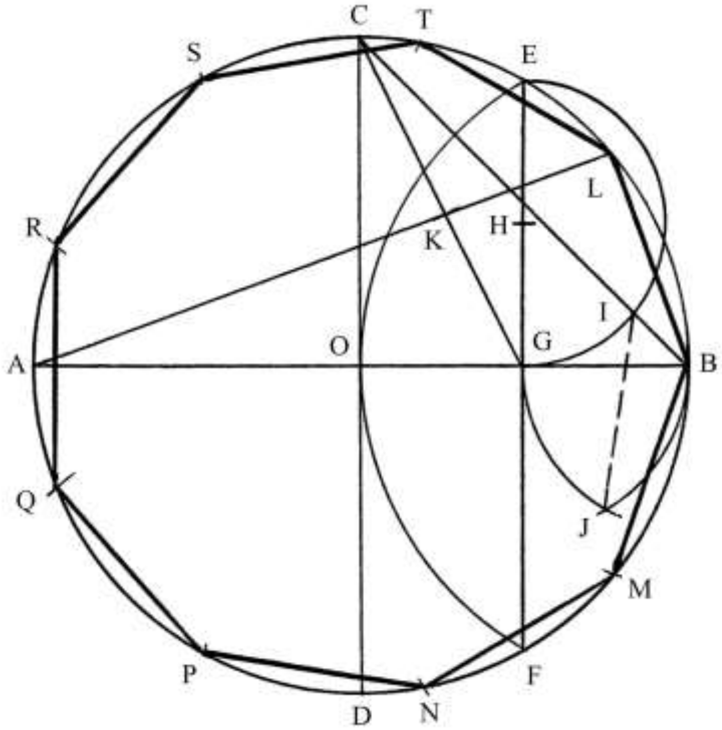
Con raggio HO fare centro in P e disegnare una circonferenza che incontra la corda GH nel punto I.

HI è la lunghezza del lato dell'ennagono: riportarla sulla circonferenza a partire da C.

CJKLMNQRS è l'ennagono approssimato inscritto nel cerchio.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Il secondo metodo di Ghersi è riprodotto nella figura che segue:



AB e CD sono i consueti diametri del cerchio di centro O. Con apertura OA fare centro in B e disegnare l'arco EF: questa taglia il raggio OB nel suo punto medio G.

Collegare C con G.

Determinare il punto medio di EG: è H. Fare centro in H e con raggio HE = HG tracciare una semicirconferenza da E a G: essa fissa il punto I sulla corda CB.

Con raggio GB fare centro in G e in B e disegnare due archi che si incontrano in J.

Collegare I con J.

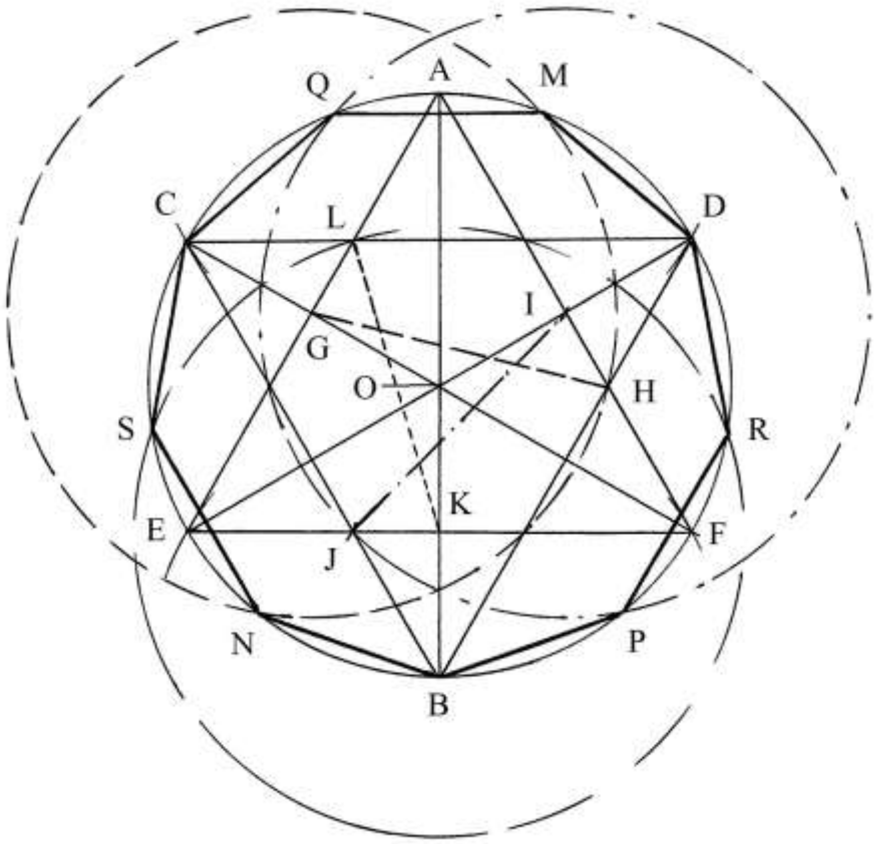
Con apertura uguale a IJ fare centro in C e segnare il punto K su CG:

CK = IJ.

Per il punto K tracciare la corda AL: BL è il primo lato del poligono. Riportare la lunghezza di BL sulla circonferenza: LBMNPQRST è l'ennagono approssimato inscritto nel cerchio.

L’ennagono approssimato di Andrew French

Disegnare una retta verticale e fissarvi il punto O, centro del cerchio di diametro AB:



Con la stessa apertura OA fare centro in A e in B e sulla circonferenza fissare i punti C, D, E e F. AEF e CBD sono due triangoli equilateri inscritti.

CF e ED sono due diametri del cerchio di centro O.

Le corde GH, IJ e KL collegano i punti medi dei lati con punti situati su lati paralleli all’intersezione di lati dei due triangoli: essi sono lunghi quanto il raggio OA.

Con raggio OA fare centro in G, I e K e disegnare tre circonferenze che tagliano quella di centro O in *sei* punti che sono vertici dell’ennagono:

* G fissa M e N.
* I stabilisce P e Q.
* K determina R e S.

CQMDRPBNS è l’ennagono approssimato inscritto nel cerchio di centro O.

Ennagono approssimato – metodo Dobre

L’ingegnere romeno Daniel Dobre ha pubblicato un articolo, citato in bibliografia, nel quale propone diversi metodi grafici per la costruzione di poligoni regolari con numero di lati dispari: 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17 e 19. Ecco quella dell’ennagono.

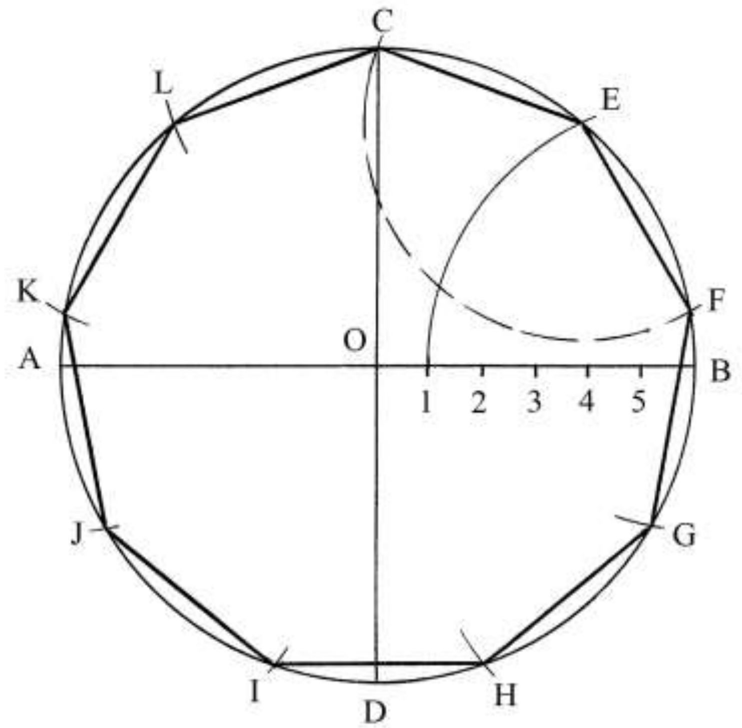
Disegnare due diametri fra loro perpendicolari, AB e CD, e facendo centro in O con raggio OA tracciare una circonferenza.

Dividere in *sei* parti uguali il raggio OB.

Fare centro in B e con raggio B-1 disegnare un arco da 1 fino a tagliare la circonferenza nel punto E.

La corda CE è il primo lato dell'ennagono inscritto: riportare la sua lunghezza sulla circonferenza.

CEFGHIJKL è l'ennagono regolare approssimato inscritto.



Poligoni inscritti – metodo di Mallett

Ian Mallett è un ricercatore americano. A lui si devono una formula e un metodo approssimati per la costruzione di poligoni regolari di *n* lati, inscritti in un cerchio di raggio *r*.

La lunghezza del lato del singolo poligono, ℓ, è data dalla formula:

$$\ell = [13/(2*n + 1)] * r$$

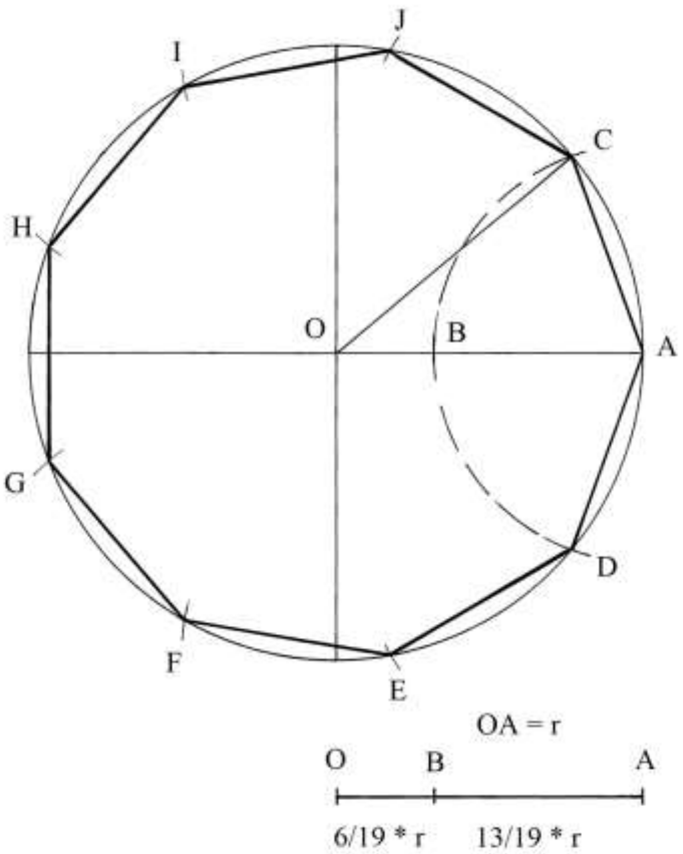
Indichiamo con k la costante 13/(2*n + 1) : k = 13/(2*n + 1).

Ulteriori informazioni sono reperibili nel sito https://geometrian.com/research/RegularPolygons.php.

Lo schema che segue mostra l'esempio dell'ennagono inscritto: il coefficiente k vale:

k = 13/(2*n + 1) = 13/(2*9 + 1) = 13/19.

Quindi, il lato dell'ennagono è lungo: k * r = 13/19 * r.



Disegnare il raggio OA e la circonferenza di centro O.

Fissare il punto B a distanza da O uguale ai 6/19 del raggio OA: il segmento BA è i 13/19 del raggio ed è la lunghezza del lato dell'ennagono inscritto. Fare centro in A e con raggio AB tracciare un arco che taglia la circonferenza nei punti C e D.

Riportare sulla circonferenza la lunghezza di AB=AC=AD: ADEFGHIJC è l'ennagono inscritto.

La costruzione offre una buona approssimazione.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

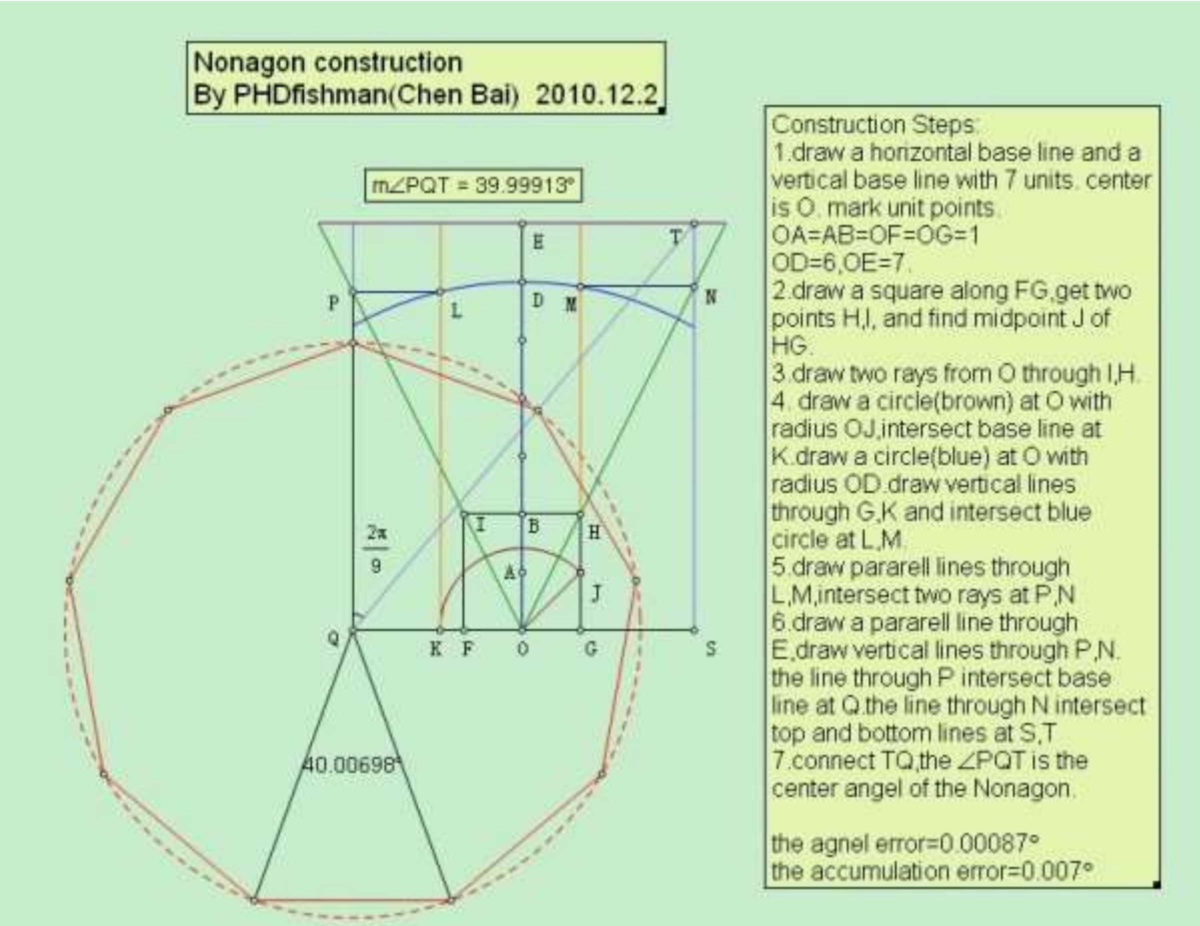
La tabella che segue fornisce i valori della costante k = 13/(2*n + 1) per i primi poligoni:

Poligoni	*Valori della costante k*
Pentagono	13/11 = 1,(18)
Esagono	13/13 = 1
Ettagono	13/15 = 0,8(666)
Ottagono	13/17 = 0,7647
Ennagono	13/19 = 0,6842
Decagono	13/21 = 0,619
Endecagono	13/23 = 0,5652
Dodecagono	13/25 = 0,52
Tridecagono	13/27 = 0,(481)

Le cifre racchiuse fra parentesi tonde, (…), indicano la stringa del periodo di *numeri periodici*.

Il metodo di Chen Bai

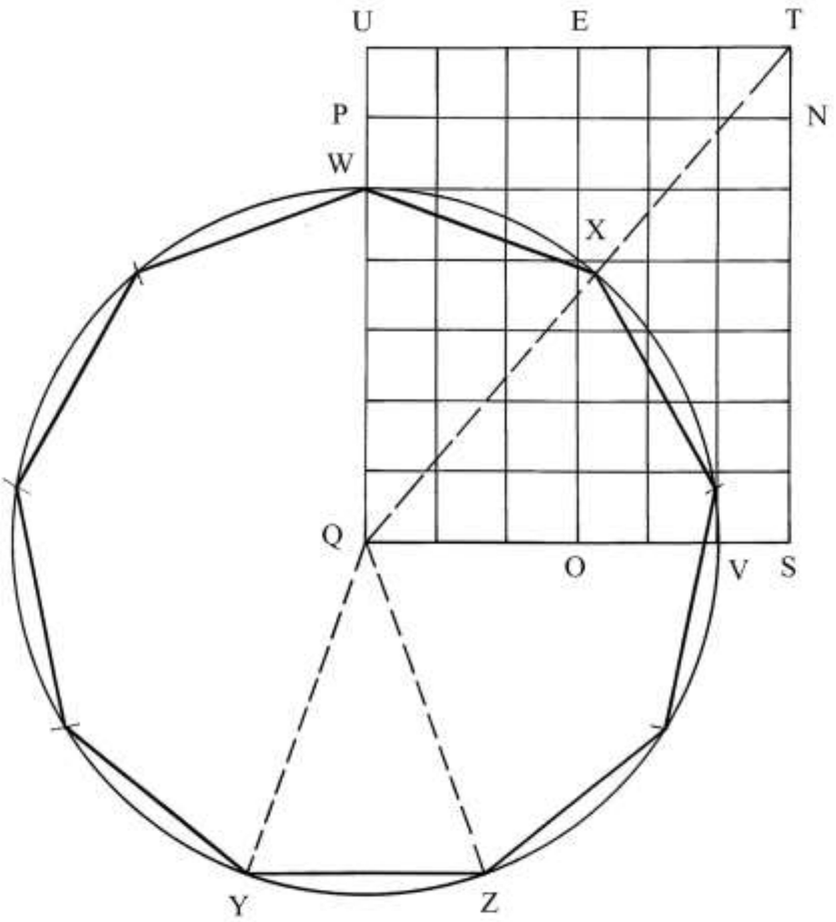
Chen Bai è un ricercatore cinese di Hong Kong: sul suo sito, http://phdfishman.blogspot.com/2010/12/draw-perfect-nonagon.html, visitato il 13 settembre 2021, è proposta la costruzione dell'ennagono qui riprodotta:



Il metodo di Chen Bai offre una costruzione approssimata quasi esatta: l'angolo al centro Q del triangolo isoscele contenuto nel cerchio è ampio 40,00698°, un risultato pressoché esatto.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

La figura che segue presenta una semplificazione della costruzione di Chen Bai:

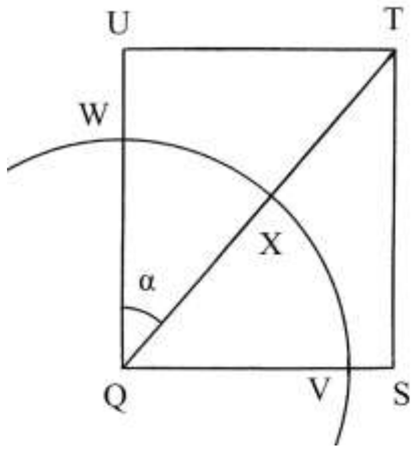


Disegnare il reticolo QUTS formato da *sei* righe e da *sette* colonne di quadrati.

Fare centro in Q con raggio QV = QW e tracciare una circonferenza: il raggio è lungo 5 *unità*.

Disegnare la diagonale QT: essa taglia la circonferenza in un punto, X, che è un vertice dell'ennagono: la corda WX è il primo lato dell'ennagono approssimato inscritto; riportando sulla circonferenza la lunghezza di questa corda si ottiene l'ennagono inscritto, che è *meno preciso* di quello ottenuto con il metodo di Chen Bai.

Approfondiamo la conoscenza della costruzione:



UQT è un triangolo rettangolo che nel vertice Q ha un angolo di ampiezza α. La tangente di α è:

tg α = UT/UQ 0 6/7 ≈ 0,(857142), valore che è un *numero periodico*, la cui stringa è qui racchiusa fra parentesi tonde.

A questo valore corrisponde un angolo:

α ≈ 40° 35'.

Come già scritto più volte in precedenza, l'angolo al vertice dei nove triangoli isosceli che formano un ennagono è ampio 40°.

L'ampiezza dell'angolo α si avvicina a quella dei nove angoli isosceli.

La tangente dell'angolo ampio 40° è:

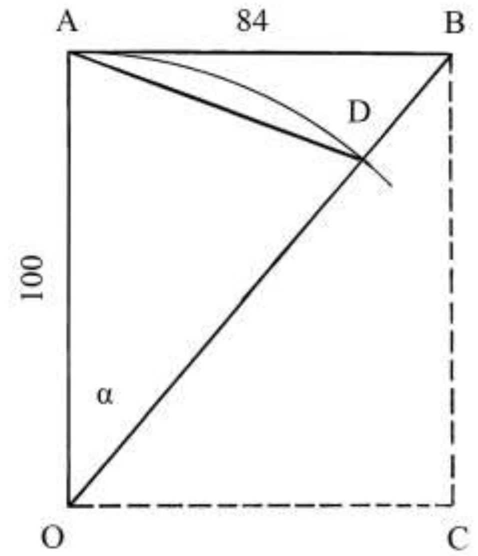
tg 40° ≈ 0,839099631.

Senza commettere un errore importante, è ragionevole arrotondare il valore della tangente a 0,840 = 0,84.

L'angolo corrispondente a questa tangente può essere generato con un triangolo rettangolo i cui cateti hanno lunghezze in rapporto:

84 : 100 = 21 : 25.

Nel grafico che segue, il cateto AB ha lunghezza 84 e quello AO 100 unità:



L'angolo AOB = α ha ampiezza *quasi* uguale a 40°.

Fare centro in O e con raggio OA disegnare un arco da A fino a tagliare in D l'ipotenusa OB. Il settore circolare OAD è uno dei nove settori che compongono il cerchio di centro O in cui è inscritto l'ennagono. La corda AD è uno dei nove lati del poligono e il triangolo OAD è uno dei nove triangoli isosceli che compongono l'ennagono.

Ennagono approssimato – metodo di Edoardo Dotto

Edoardo Dotto, professore all'Università di Catania, nel suo fascicolo citato in bibliografia, propone una costruzione dell'ennagono inscritto approssimato, che è qui riprodotta con lievi modifiche.

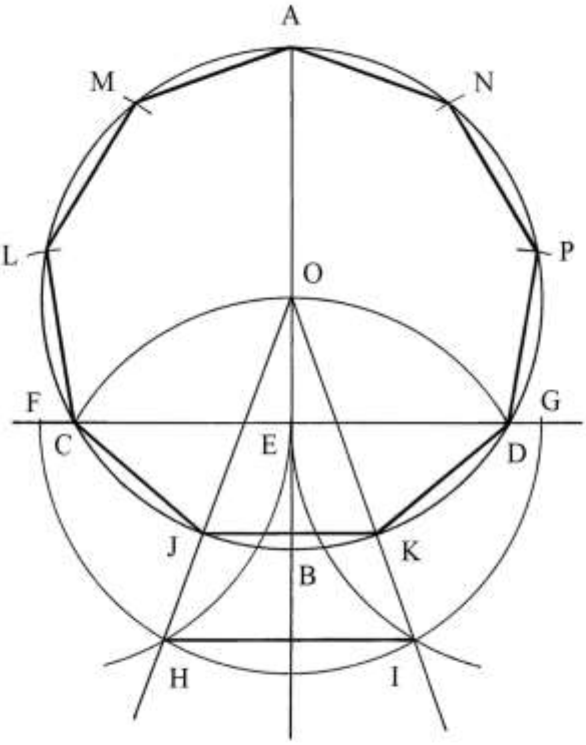
Disegnare una retta orizzontale e fissarvi un punto, O, centro del cerchio. Con il raggio scelto, OA=OB, tracciare una circonferenza e con lo stesso raggio OA fare centro in B per disegnare un arco che la taglia nei punti C e D.

CD è una corda che incontra AB in E: prolungarla verso destra e verso sinistra.

Sempre con raggio OA fare centro in E e tracciare una semicirconferenza che stabilisce i punti F e G.

Infine, con lo stesso raggio OA fare centro in F e in G e disegnare due archi a partire da E e fino a fissare i punti H e I.

Dal centro condurre due semirette passanti per H e per I: esse incontrano la circonferenza di centro O nei punti J e K, che sono due vertici dell'ennagono.



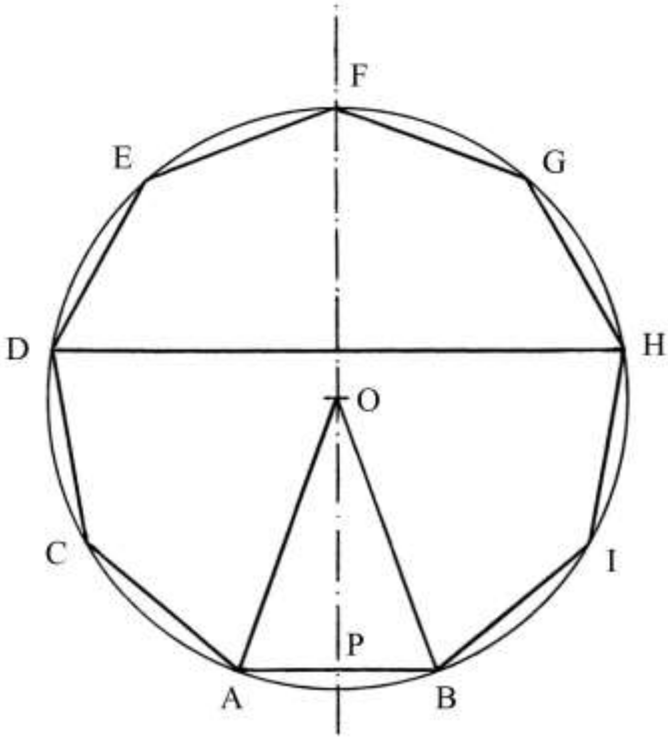
Riportare la lunghezza della corda JK sulla circonferenza: JCLMANPDK è il poligono regolare approssimato.

Le corde JB e BK, non disegnate, sono due lati dell'*ottadecagono*.

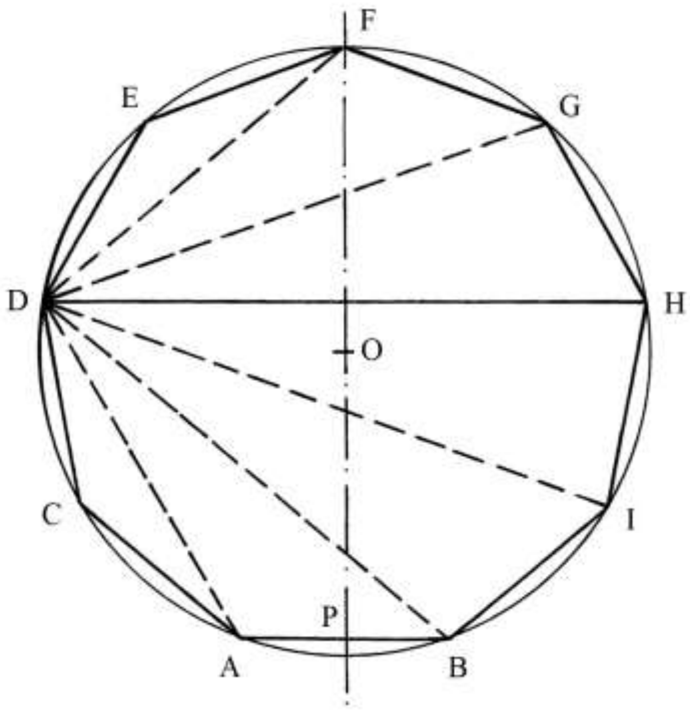
<u>Ennagono approssimato – metodo di Carlevaris</u>

Laura Carlevaris, ricercatrice presso l'Università degli Studi "La Sapienza" di Roma, in un articolo (citato in bibliografia), ha proposto un metodo per la costruzione dell'ennagono che afferma esserle stato suggerito dal rilievo del teatro romano di Lecce.

La pianta di questo teatro sarebbe ennagonale e tracciata a partire dalla lunghezza di una delle corde del poligono e cioè quella DH, che divide il poligono in due parti diseguali.



Dal vertice D, come pure dagli altri otto, si dipartono *sei* diagonali:



DH e DI hanno uguale lunghezza. Le altre diagonali, DF, DG, DB e DA, sono più corte delle prime due e hanno le seguenti lunghezze:

DF = DA

DG = DB.

Infine fra le diagonali vi è la seguente relazione:

DH > DG > DF.

- APPROFONDIMENTO -

Il numero delle diagonali, D, di un poligono di *n* lati è dato dalla formula:

$D = n * (n – 3)/2$.

La formula ha una sua logica: in un vertice concorrono due lati che sono definiti da *tre* vertici: questo numero va sottratto.

Una diagonale collega due vertici non consecutivi e va contata una sola volta e non due: per questo nella formula compare al denominatore il numero 2.

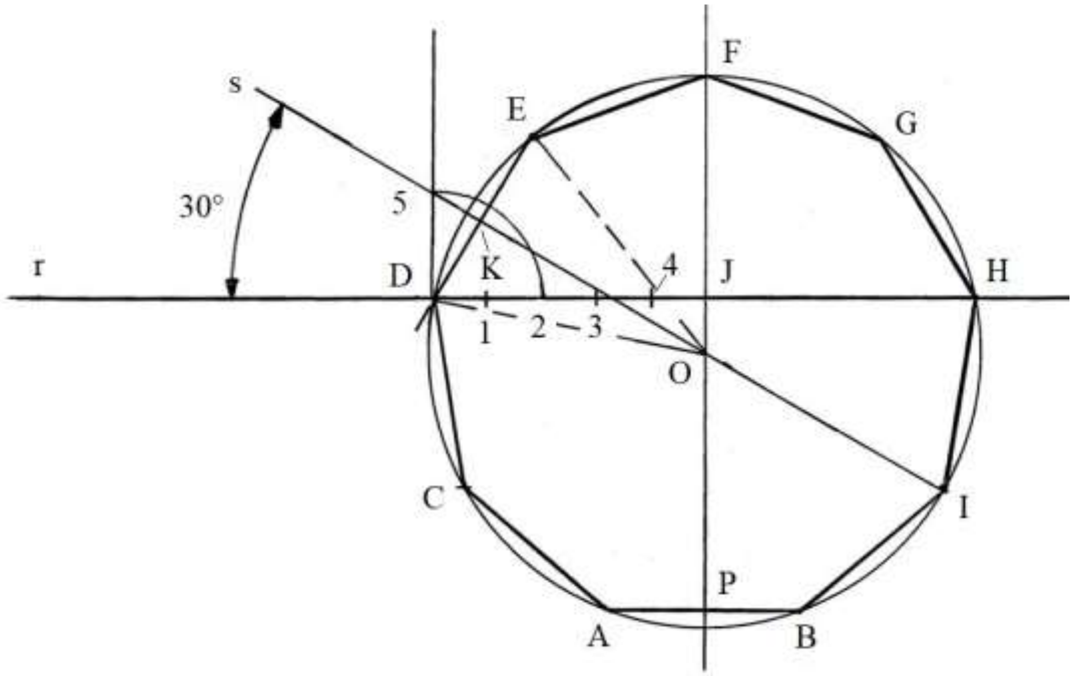
Nel caso dell'ennagono il numero delle diagonali è:

$D_9 = 9 * (9 – 3)/2 = 9 * 6/2 = 27$.

- -

La costruzione della Carlevaris è fondata sui rilievi del teatro descritti nell'articolo di Giampiero Mele e Giorgia Maniglio, citato in bibliografia.

Ecco la costruzione proposta dalla Carlevaris: tracciare una retta orizzontale, *r*, e riportarvi la lunghezza nota della corda DH:



Fissare il punto medio J.

Dal punto D elevare la perpendicolare a DH e per J condurre la perpendicolare alla retta *r*.

Dividere DJ in *cinque* parti uguali: 1, 2, 3 e 4 sono i punti così determinati.

Fare centro in D e con raggio D-2 disegnare un arco che taglia la perpendicolare nel punto 5. Per questo ultimo punto tracciare una retta, *s*, inclinata di 30° rispetto a DH. Essa interseca l'asse verticale passante per J nel punto O, centro del cerchio nel quale va inscritto l'ennagono.

Disegnare la circonferenza di centro O e raggio OD.

Dal punto D tracciare la corda perpendicolare alla retta *s* fino a intersecare la circonferenza nel punto E: DE è il primo lato dell'ennagono; la retta *s* lo taglia nel suo punto medio K e ne è l'asse. Proseguendo nel suo percorso, *s* incontra la circonferenza in un punto, I, che è un altro vertice del poligono: KI è una delle *nove* altezze dell'ennagono.

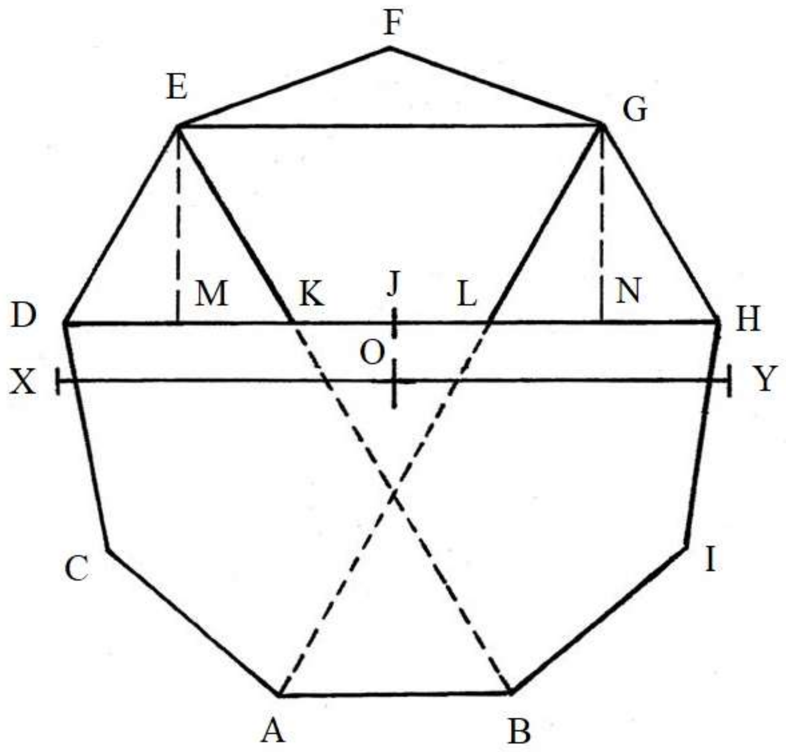
Riportare lungo la circonferenza la lunghezza di DE.

ACDEFGHIB è l'ennagono regolare approssimato.

- APPROFONDIMENTO -

L’ipotesi di Mele e Maniglio

L’ipotesi avanzata da Mele e da Maniglio è che la struttura del Teatro romano di Lecce sia stata disegnata a partire dalla corda DH di un ennagono regolare. La lunghezza *convenzionale* è fissata dai due Autori proporzionale a 5.



La costruzione procede a partire dalla corda DH: ai suoi estremi sono disegnati due triangoli equilateri (DEK e GHL) simmetrici rispetto al punto medio J.

I due triangoli hanno lati lunghi √3 e altezze EM = GN date da:

$$EM = GN = DK * (\sqrt{3})/2 = \sqrt{3} * (\sqrt{3})/2 = 3/2 = 1,5.$$

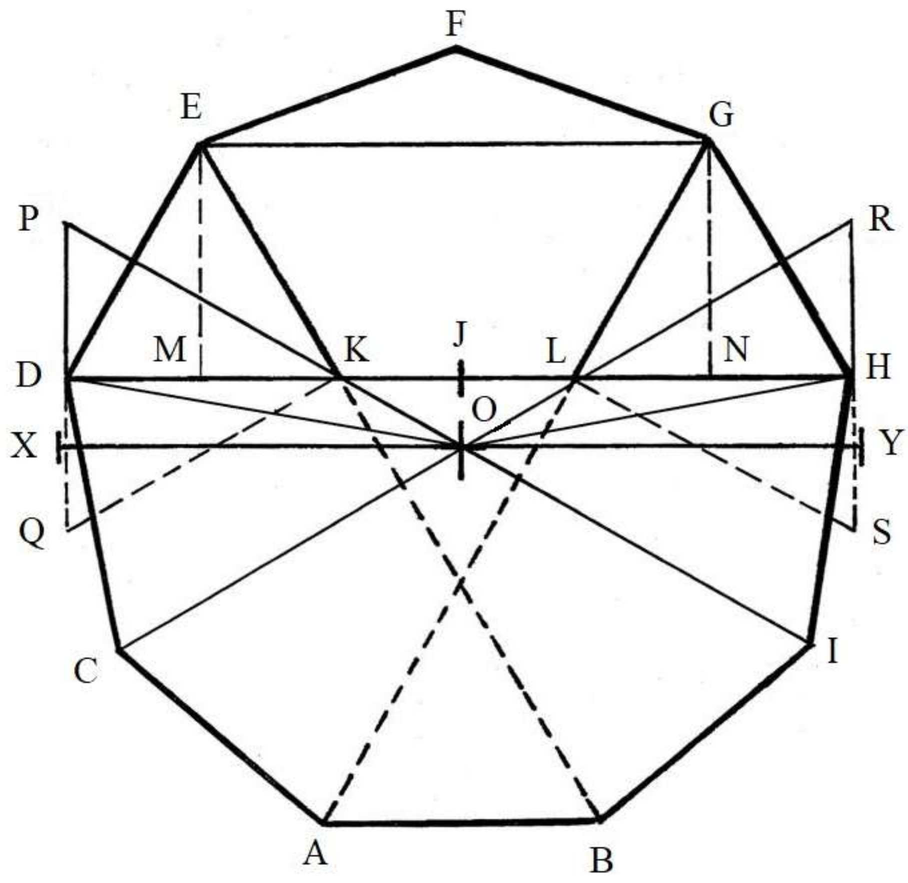
KL è lungo:

$$KL = DH – DK – LH = 5 – \sqrt{3} – \sqrt{3} = 5 – 2*\sqrt{3}.$$

La costruzione che è qui descritta è una rielaborazione di quella proposta nel citato articolo di Mele e Maniglio.

Prolungare i lati EK e GL verso il basso: essi intersecheranno due vertici dell’ennagono quando ne sarà completata la costruzione.

I segmenti ED e GH risulteranno essere due lati del poligono.



Sui lati DK e LH costruire i triangoli equilateri PKQ e RSL: DK e LH sono le loro altezze, lunghe √3.

Il lati dei triangoli PKQ e RSL sono lunghi:

PK = RL = DK * 2/√3 = √3 * (2/√3) = 2.

I prolungamenti dei lati PK e RC sono gli assi di simmetria rispettivamente dei lati DE e GH e sono anche due altezze dell'ennagono (fatto quest'ultimo che verrà confermato con la successiva costruzione del poligono).

I due prolungamenti si intersecano nel punto O: fare centro in O e con raggio OD = OH disegnare la circonferenza passante per i punti D, E, G e H. Nella figura qui sopra, la circonferenza non è stata tracciata.

XY è il diametro del cerchio in cui è inscrivibile il poligono.

La circonferenza determina i punti C, A, B e I.

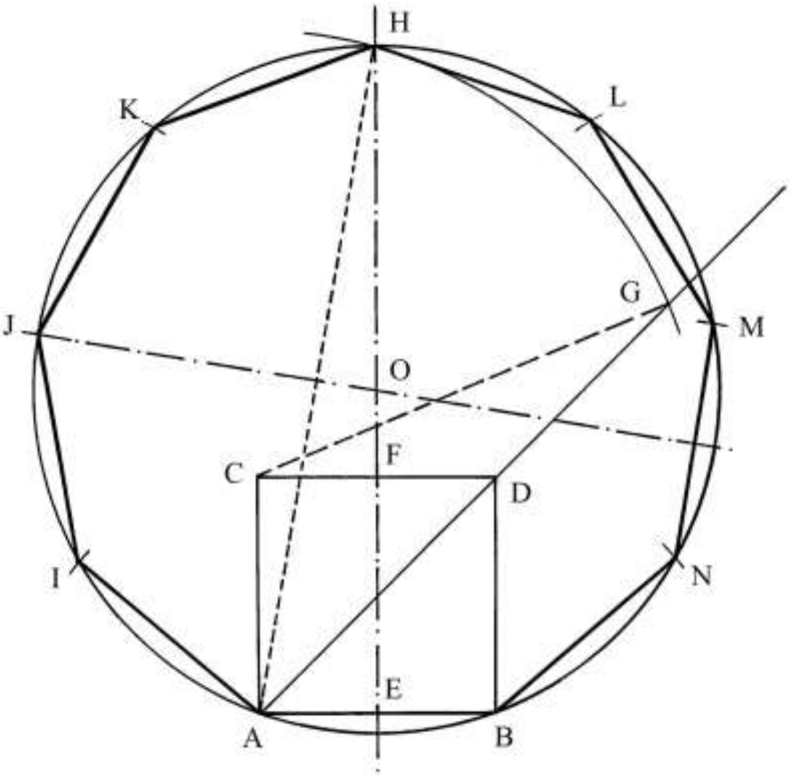
Il punto F è stabilito facendo centro in E e in G con raggio ED = GH.

- -

Ennagono approssimato –metodo di Breuil

La costruzione è contenuta in un testo attribuito a Jean-Louis Breuil, citato nel sito http://villemin.gerard.free.fr/GeomLAV/Polygone/EnneaJLB.PNG (visitato il 18 settembre 2021), curato dall'ingegnere francese Guillaume Villemin, una vera e propria miniera.

È data la lunghezza del lato dell'ennagono, AB, e su di esso costruire il quadrato ACDB.



Disegnare l’asse del segmento AB che taglia i due lati orizzontali del quadrato nei punti E e F.

Tracciare la diagonale AD e prolungarla verso l’alto. Determinare la lunghezza di ¾ di AD e a partire da D riportarla sul prolungamento fino a stabilire il punto G:

$$AG = AD + DG = AD + \frac{3}{4} * AD = 7/4 * AD.$$

Fare centro in A e con raggio AG disegnare un arco da G fino a incontrare l’asse del segmento AB nel punto H, che è un vertice dell’ennagono.

Collegare A con H e costruire l’asse di questa corda che incontra l’asse di AB nel punto O, centro del cerchio circoscritto all’ennagono.

Con raggio OA=OB=OH tracciare la circonferenza di centro O e a partire dai vertici A, B e H riportare la lunghezza di AB.

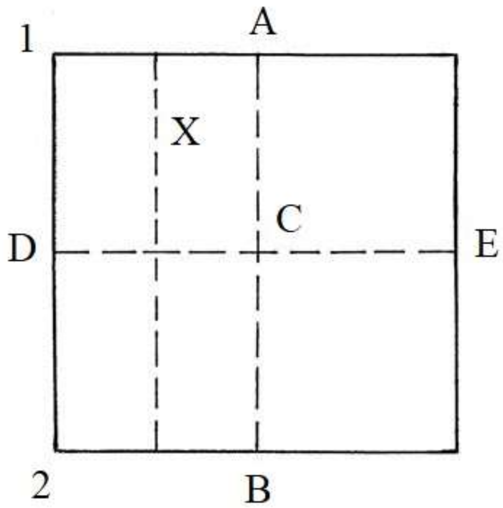
AIJKLMNB è l’ennagono approssimato inscritto.

COSTRUZIONI ESATTE

La costruzione dell’ennagono regolare

Humiaki Huzita (fisico nucleare italo giapponese 1924 – 2005), propose una costruzione dell’*ennagono regolare* basata sulla geometria degli origami.

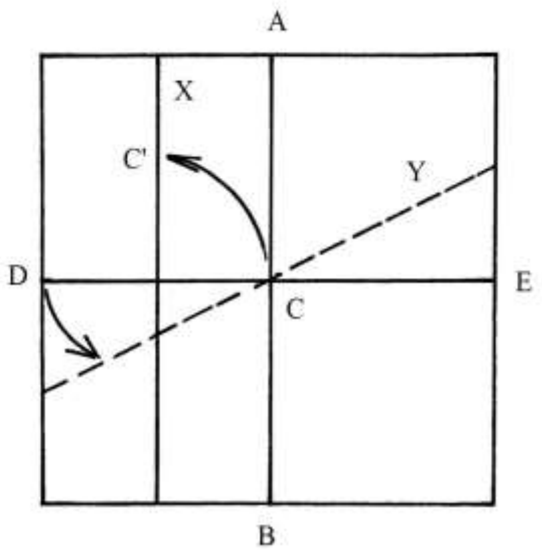
Il punto di partenza è il consueto quadrato di carta:



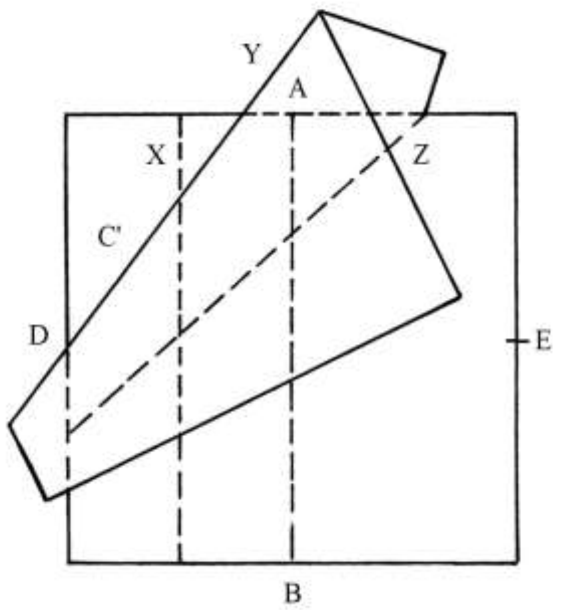
AB e DE sono le *mediane* che si intersecano nel punto C.

Con una piega portare il lato 1-2 a sovrapporsi a AB: la piega è indicata con X. Essa divide a metà il rettangolo 1-A-B-2.

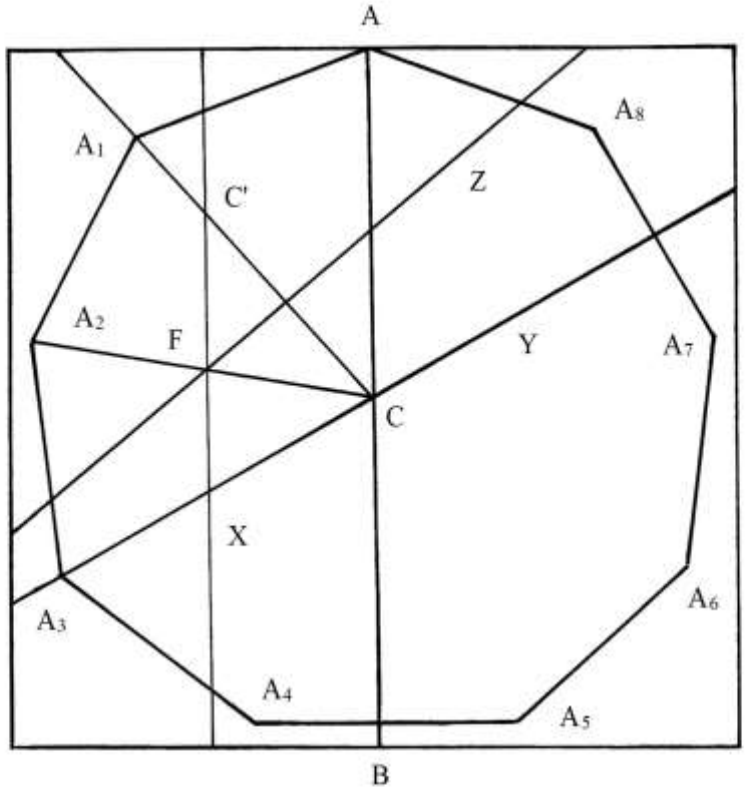
Creare una nuova piega portando il punto D sull’asse x, ruotando intorno al punto C: la piega è l’asse Y:



Piegare in modo da portare il punto C sull’asse X e il punto D sulla piega Y: la nuova piega è fissa Z.



Riaprire il quadrato e fissare il punto F nell’intersezione fra le pieghe X e Z:



Tracciare una linea passante per i punti C e C’ (quest’ultimo determinato nel precedente passo) e un’altra per i punti C e F.

Fare centro nel punto C e, con raggio CA, fissare il punto A_1 sulla linea passante per C e C’, A_2 su quella passante per F e C e A_3 sulla piega Y.

Piegare lungo la piega Y: i punti A_1, A_2 e A_3 assumono le corrispondenti posizioni A_4 (da A_2), A_5 (da A_1) e A_6 (da A).

Per *riflessione* intorno alla mediana AB, i punti A_2 e A_1 fissano rispettivamente i punti A_7 e A_8.

Il poligono $AA_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ è un *ennagono regolare*.

- APPENDICE I -

Ennagono approssimato

Le costruzioni che di seguito sono descritte sono state ideate dall'Autore di questo articolo. La prima è molto semplice, perché basata su di una elementare media aritmetica.

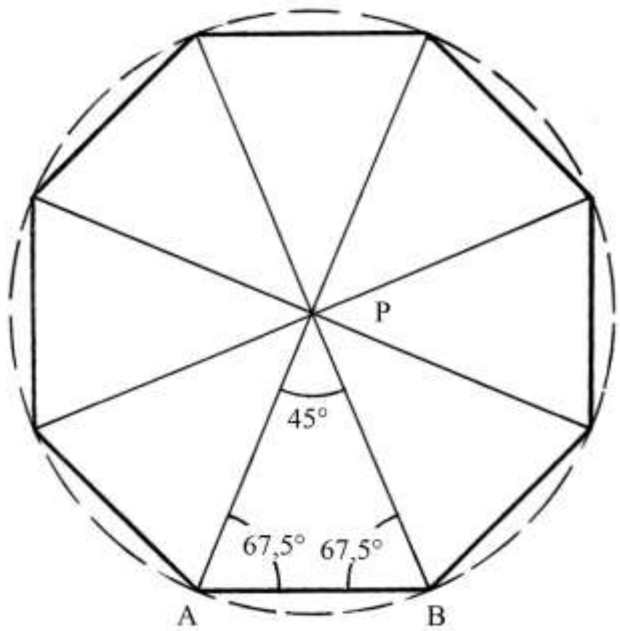
Essa richiede la presenza dei triangoli isosceli contenuti in due poligoni regolari con numeri di lati uguali a 8 (ottagono) e a 10 (decagono).

Grossolanamente, il numero dei lati dell'ennagono è la media aritmetica fra quelli dell'ottagono e del decagono:

$$(8 + 10)/2 = 18/2 = 9.$$

L'unica condizione da rispettare è: la lunghezza dei lati dell'ottagono, del decagono e dell'ennagono deve essere *uguale*.

L'ottagono regolare è inscritto in un cerchio di centro P e raggio PA = PB ed è scomposto in otto triangoli isosceli:

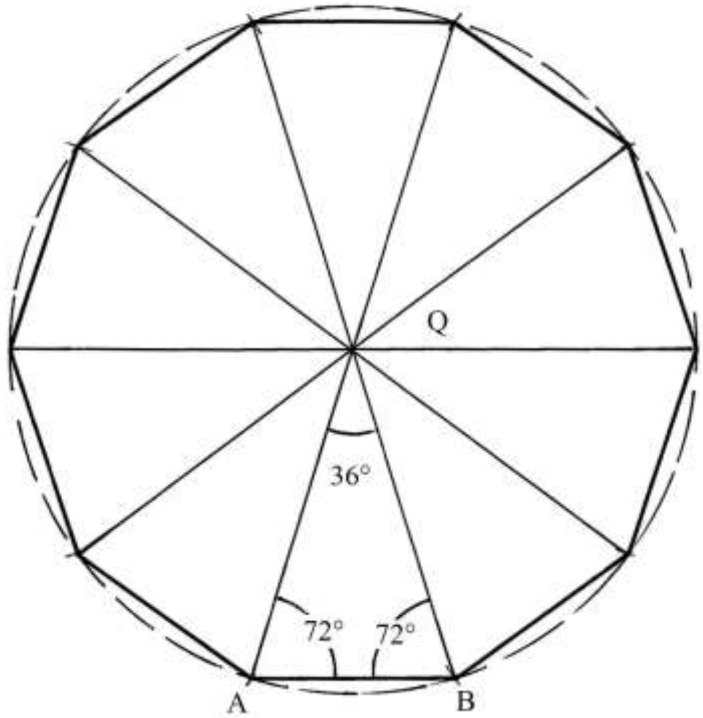


APB è uno dei triangoli: l'angolo al vertice è ampio

APB = 360°/8 = 45°.

I due angoli alla base, PAB e ABP, hanno ampiezza di 67,5°.

Il decagono regolare è inscritto in un cerchio di centro Q e raggio QA = QB. AQB è uno dei suoi dieci triangoli isosceli:

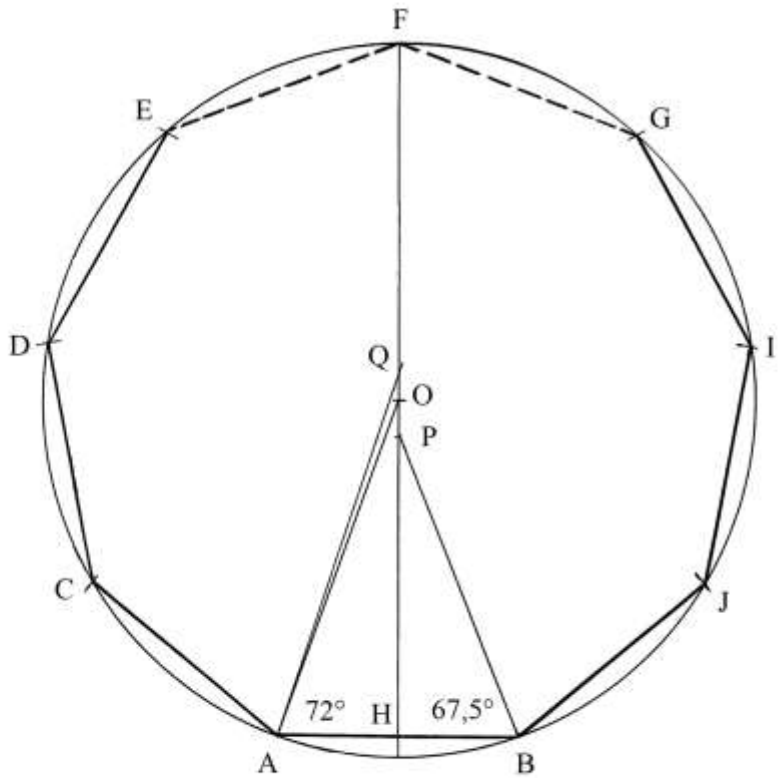


L’angolo al vertice è ampio:

AQB = 360°/10 = 36°.

I due angoli alla base, QAB e ABQ, hanno ampiezza uguale a 72°.

Disegnare il lato AB dell’ennagono e tracciare il suo asse che passa per il punto medio H:



A partire dal punto A riportare la lunghezza di OQ misurata sulla costruzione del decagono: essa taglia l’asse di AB nel punto Q: QAB è ampio 72°.

Dal punto B riportare la lunghezza del raggio BP ripresa dalla costruzione dell'ottagono: è stabilito il punto P. L'angolo PBA è ampio 67,5°.

Determinare il punto medio del segmento QP: è O, centro del cerchio circoscritto all'ennagono.

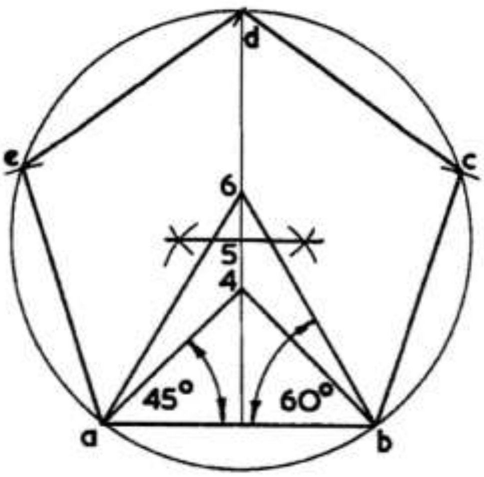
Tracciare la circonferenza di centro O e raggio OA = OB e riportarvi la lunghezza di AB.

BACDEFGIJ è l'ennagono approssimato: i lati EF e FG sono disegnati tratteggiati perché sono leggermente più lunghi degli altri sette: l'errore è dell'ordine di 1/60.

- APPROFONDIMENTO -

La costruzione sopra presentata è stata elaborata a partire da un'idea contenuta a pagina 10 del testo di geometria pratica di A.B. Emary (citato in bibliografia).

Questo Autore descrive la costruzione del pentagono inscritto:



È da notare che questo Autore inglese usa le lettere *minuscole*.

La costruzione di Emary inizia con il primo lato, *ab*: per il punto medio è disegnato l'asse del segmento.

Dai punti *a* e *b* sono tracciati due segmenti inclinati di 45° che si incontrano sull'asse nel punto 4.

Facendo centro in *a* e in *b* l'Autore costruisce il triangolo equilatero *a-6-b* che la lati lunghi *ab*: i lati inclinati formano angoli di 60°.

Il triangolo *a-6-b* è uno dei sei triangoli equilateri che formano l'esagono inscritto in un cerchio di centro 6 e raggio *6-a* = *6-b* = *ab*.

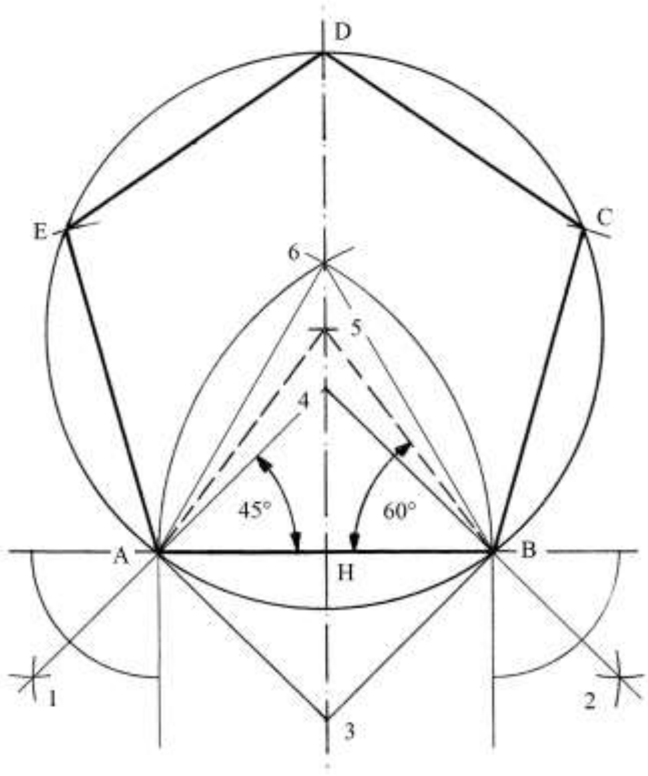
Poi sull'asse di simmetria determina il punto medio fra 4 e 6: è 5.

Con centro in 5 e raggio *5-a* = *5-b* disegna la circonferenza sulla quale riporta la lunghezza di *ab*.

Il poligono *abcde* è il pentagono inscritto.

Implicitamente, la costruzione di Emary si basa su un principio: il pentagono regolare è un poligono per così dire *intermedio* fra il quadrato e l'esagono regolare.

Il lato AB non è un lato del quadrato A4B3, ma una sua diagonale, come spiega meglio lo schema che segue:

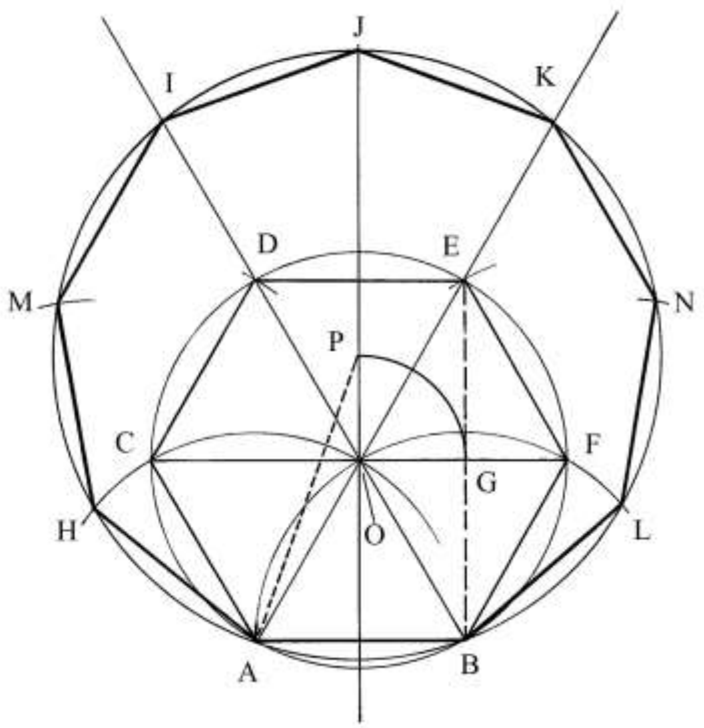


- -

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

La seconda costruzione richiede la presenza di un esagono regolare.

AB è un lato dell’ennagono da disegnare: su di esso costruire l’esagono regolare ACDEFB e tracciare le tre diagonali prolungando verso l’alto quelle AE e BD e l’asse del segmento AB:



O è il centro del cerchio in cui è inscritto l’esagono.

Disegnare la corda BE che incontra CF nel punto G. Fare centro in O e con raggio OG tracciare un arco da G fino a incontrare in P l’asse di AB.

Collegare P con A: con raggio PA = PB disegnare una circonferenza di centro P; essa fissa i punti H, I, J, K e L. I rimanenti vertici M e N sono ottenuti riportando la lunghezza di AB a partire da H e da L.

AMMIJKNLB è l’ettagono approssimato.

- -

- APPENDICE II -

<u>Una regola empirica di Vincenzo Flauti</u>

Vincenzo Flauti (1782-1863) è stato un importante matematico italiano.

Ha pubblicato diverse opere di natura geometrica.

Nella XVIIesima edizione degli “Elementi di geometria di Euclide”, edita a Napoli nel 1843, alle pp. 598-599, è enunciata un’interessante regola: un triangolo inscritto in un cerchio in cui è contenuto un poligono regolare collegato a quel triangolo possiede angoli la cui ampiezza è determinata da rapporti costanti. Il triangolo ha come base un lato del poligono e il vertice opposto alla base giace sull’asse del lato.

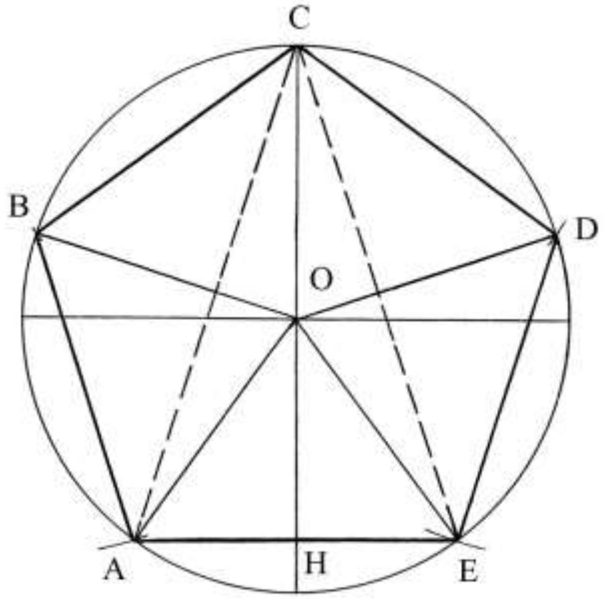
Ecco qui riprodotto il passo di Flauti:

“…Or il presente problema , che, come vedesi nel seguente, l’è quello
di riduzione dell' altro *d’ iscrivere un pentagono regolare nel cerchio*, diviene, diversamente modificato, il principio di riduzione per tutti'i poligoni regolari da iscriversi nel cerchio. In fatti, a cominciar dal quadrato, si vede l'iscrizione di esso corrispondere a quella di un triangolo in cui ciascun degli angoli alla base fosse metà del verticale ; per l’ esagono regolare a quella di un triangolo di cui ciascun angolo alla base pareggiasse il verticale, cioè fosse equilatero. Pel pentagono l'è il proposto , e risoluto da Euclide. E se ciascun degli angoli alla base fosse triplo del

verticale si otterrebbe per mezzo di esso l'iscrizione dell'ettagono nel cerchio ; se quadruplo quella d ell’enneagono; e così in appresso…”

Per chiarire i concetti, facciamo l’esempio del pentagono regolare inscritto e dell’ettagono regolare.

ABCDE è un pentagono regolare inscritto nel cerchio di centro O e raggio OA:



Il poligono è scomposto in cinque triangoli isosceli di uguali dimensioni. Nel cerchio è pure inscritto il triangolo isoscele ACE che ha per base il lato AE e altezza CH: i suoi tre vertici giacciono sulla circonferenza.

L’altezza CH è data da:

CH = CO + OH = raggio cerchio circoscritto + apotema pentagono.

Consideriamo il triangolo isoscele AOE. L’angolo al vertice è:

AOE = 1/5 * 360° = 72°.

Gli angoli alla base del triangolo AOE, OAE e OEA, hanno uguale ampiezza:

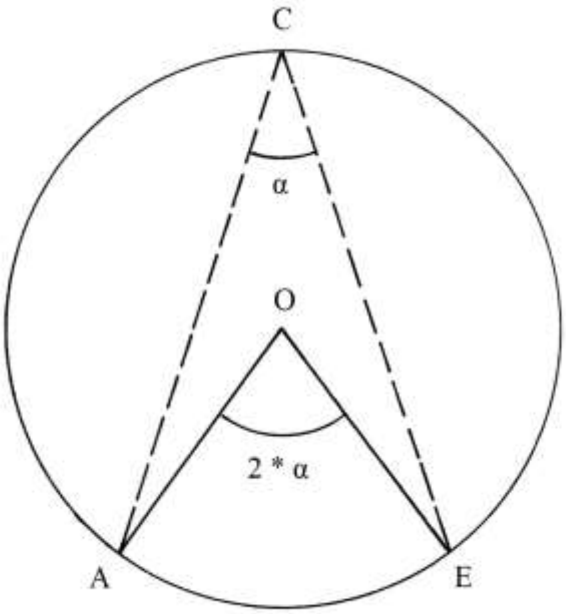
OAE = OEA = (180° – AOE)/2 = (180° – 72°)/2 = 108°/2 = 54°.

Passiamo al triangolo ACE. L’angolo al vertice, ACE, è ampio la *metà* dell’angolo al centro supportato dal lato AE:

ACE = ½ * AOE = ½ * 72° = 36°.

- APPROFONDIMENTO -

È una regola generale secondo la quale l’angolo al centro (AOE) ha ampiezza doppia dell’angolo alla circonferenza (ACE): entrambi condividono lo stesso arco di circonferenza AE:



- -

Gli angoli alla base del triangolo ACE hanno uguale ampiezza:

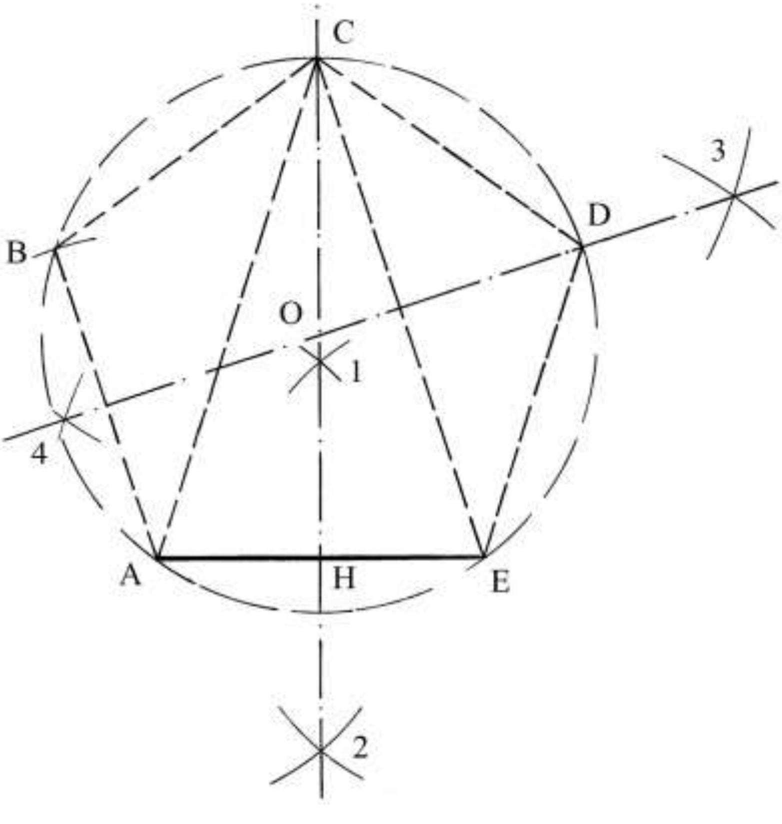
CAE = CEA = (180° - ACE)/2 = (180° - 36°)/2 = 144°/2 = 72°.

Gli angoli alla base di ACE hanno la stessa ampiezza dell'angolo AOE e cioè 72°.

Nel triangolo ACE il rapporto *k* fra l'ampiezza di un angolo alla base (CAE o CEA) e quello al vertice ACE) vale:

k = 72°/36° = 2.

ACE è un *triangolo aureo*: possiamo disegnare un pentagono regolare a partire da questo triangolo, come spiega lo schema che segue:



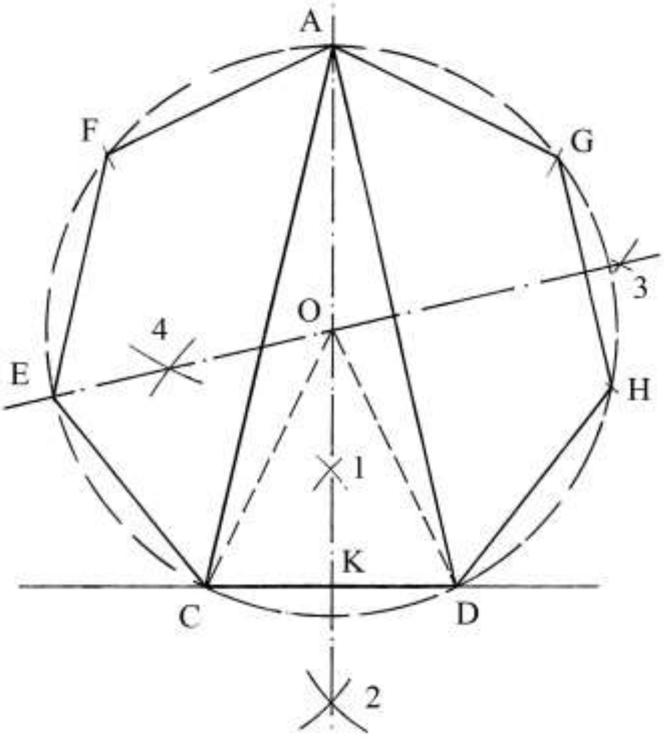
Costruire gli assi di due dei tre lati del triangolo, ad esempio la base AE e il lato CE: i due assi passano per le coppie di punti 1-2 e 3-4. Gli assi si incontrano in un punto, O, che è il centro del cerchio circoscritto al pentagono.

Sulla circonferenza riportare la lunghezza di AE: ABCDE è il pentagono regolare inscritto.

L'asse 3-4 taglia esattamente la circonferenza nel vertice D: questa retta è anche l'asse del lato AB.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Passiamo al caso dell'ettagono regolare.



ACD è un triangolo isoscele i cui angoli interni sono legati da un preciso rapporto:

*	CAD = 180°/7;
*	ACD = CDA = 3/7 * 180°.

Gli angoli alla base del triangolo hanno ampiezze uguali a *tre* volte quella dell'angolo al vertice e la costante *k* che esprime questo rapporto vale:

k = (ACD)/(CAD) = (3/7 * 180°)/(180°/7) = 3.

Usando il metodo impiegato per il pentagono, possiamo costruire l'ettagono regolare approssimato a partire dal triangolo isoscele ACD.

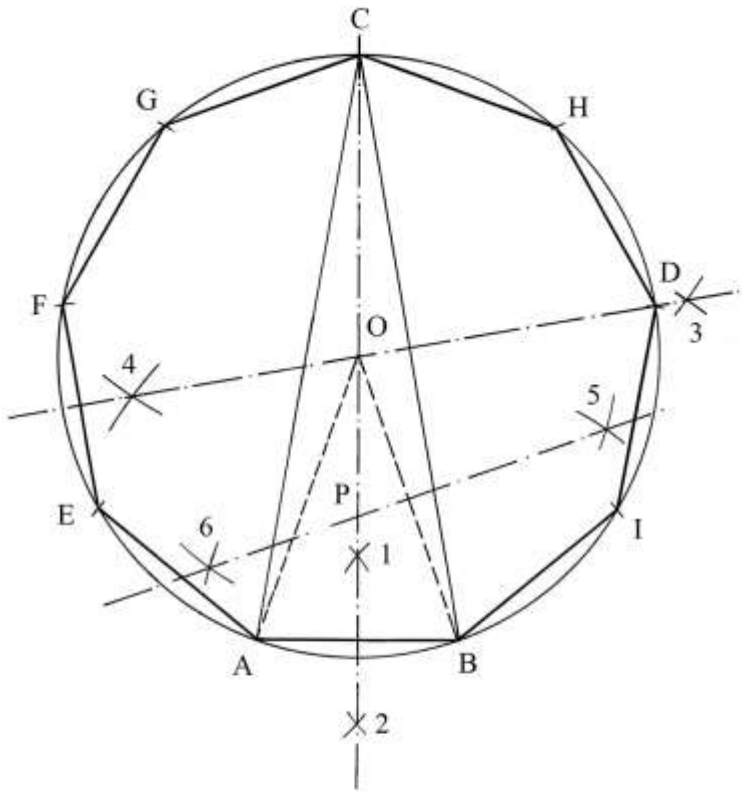
Costruire gli assi di due dei tre lati: 1-2 è l'asse di CD e 3-4 è quello del lato AD. I due assi si intersecano in O, centro del cerchio circoscritto all'ettagono.

Con centro in O e raggio OA = OC = OD disegnare la circonferenza e riportarvi la lunghezza di CD. Il punto E è dato dall'intersezione della circonferenza con l'asse di AD ed è un vertice dell'ettagono come lo è A.

AGHDCEF è l'ettagono inscritto.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Concludiamo con il caso dell'*ennagono*:



ABC è un triangolo isoscele i cui triangoli interni hanno le seguenti ampiezze:

* ACB = 20°.
* CAB = ABC = 80°.

I due angoli alla base hanno ampiezze uguali a *quattro* volte quella dell'angolo al vertice e, in questo caso, la costante *k* ha il valore:

k = (CAB)/(ACB) = 80°/20° = 4.

Per i punti 1 e 2 passa l'asse del segmento AB e diametro verticale del cerchio da tracciare.

Costruire l'asse di uno dei due lati obliqui del triangolo ACB: per i punti 3 e 4 passa l'asse del lato CB.

I due assi di simmetria si incontrano nel punto O, centro del cerchio circoscritto all'ennagono da costruire.

Disegnare il triangolo isoscele AOB, che è uno dei nove triangoli che formano l'ennagono regolare e tutti con un vertice nel punto O: l'angolo AOB ha ampiezza doppia, 40°, di quella dell'angolo ACB: i due triangoli hanno in comune la base AB.

Tracciare la circonferenza di centro O e raggio OA = OB: l'asse 3-4 la incontra in un punto, D, che è un vertice dell'ennagono.

Riportare sulla circonferenza la lunghezza di AB: AEFGCHDIB è l'ennagono inscritto.

La retta passante per i punti 5 e 6 è l'asse del segmento OB e incontra l'asse verticale nel punto P, centro della circonferenza (non disegnata) di raggio PO e passante per O, A e B.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Le considerazioni di Flauti sembrerebbero applicabili ai poligoni regolari con numeri di lati *dispari*, a partire dal pentagono.

Non sappiamo se esse siano state approfondite da altri geometri e ne sia derivata una qualche regola di valore generale.

In modo empirico pare possibile riassumere in una tabella alcuni dati.

La costante *k* è il rapporto fra l'ampiezza dell'angolo alla base e quella dell'angolo al vertice del triangolo tipico del singolo poligono regolare.

Poligoni	Numero lati: *n*	Ampiezza angolo al vertice	Ampiezza angoli alla base	Costante k
Pentagono	5	36°	72°	2
Ettagono	7	180°/7	3/7 * 180°	3
Ennagono	9	180°/9 = 20°	4/9 * 180° = 80°	4
Endecagono	11	180°/11	180° * 5/11	5

Sembra potersi dedurre una regola: il valore della costante *k* è legato al numero dei lati *n* dalla seguente relazione:

$$k = (n - 1)/2.$$

Dato che il numero dei lati di quei poligoni è *dispari*, sottraendo un'unità da *n* si ha per *k* un risultato espresso da un numero *intero e pari*.

- -

Bibliografia

1. Calzolani Sergio, “Neusis tomahawk.pdf”, in www.geometriapratica.it.
2. Carlevaris Laura, “La geometria tra teoria e pratica: la costruzione dell’ennagono nell’Antichità”, “*Disegnare idee immagini*”, Roma, anno XXVII, n. 52/2016, pp. 24-35.
3. Dobre Daniel, “Methods for construction of odd number pointed polygons”, “Journal of Industrial design and Engineering graphics”, volume 11, issue 1, july 2016, pp. 9-14.
4. Dotto Edoardo, “Costruzioni_geometriche._60_esercizi_di.pdf, scaricabile da www.academia.edu.
5. Emary A.B., “A Comprehensive Practical Geometry for Builders”, Londra, The MacMillan Press Ltd., 1981, pp. 122.
6. French Andrew, “Construction of a nonagon”, sito visitato il 13 settembre 2021 (http://www.eclecticon.info/index_htm_files/Construction%20of%20a%20nonagon.pdf).
7. Ghersi Italo, “Matematica dilettevole e curiosa”, Milano, Hoepli, 5.a ed., 1988, pp. VIII-778.
8. Howe H. A., “The Approximate Inscription of Certain Regular Polygons”, “Annals of Mathematics”, Princeton University, Aug. 1889, Vol. 5, No. 1, pp. 12-14.
9. Mallett Ian, “Approximate Construcion of Regular Polygons”, https://geometrian.com/research/RegularPolygons.php (sito visitato il 8 settembre 2021).
10. Martin George E., “Geometric Constructions”, New Yok, Springer, 1998, pp. xi+203.
11. Mele Giampiero – Maniglio Giorgia, “*L’ennagono come strumento per il disegno del Teatro Romano di Lecce*”, in “DisegnareCon”, 2015, volume 8, n. 15, pp. 1-15.
12. Pacioli Luca, “De Viribus Quantitatis”, Milano, Castello Sforzesco, 1997, pp. XXXIII+458.
13. Redondo Buitrago A. – Huylebrouck D., “Nonagons in the Hagia Sophia and the Selimiye Mosque”, “Nexus Network Journal”, 2015, 17, n. 1, pp. 157-181.
14. Redondo Buitrago Antonia, “La geometría interdisciplinar del nonágono mudéjar”, “VIII Cogreso Iberoamerican de educación matemática”, Madrid, luglio 2017, pp. 107-116 (http://funes.uniandes.edu.co/20621/1/Redondo2017La.pdf).
15. Richeson David S., “Tales of Impossibility. The 2000-Year Quest to Solve Mathematical Problems of Antiquity”, Princeton and Oxford, Princeton University Press, 2019, pp. xii+436.
16. Sutton Andrew, “Ruler & Compass. Practical Geometric Constructions”, Glastonbury, Wooden Books, 2009, pp. 58.