sergio(punto)calzolani(at)outlook(punto)it

Parole chiave: divisione di un poligono regolare in più parti di uguale superficie a forma di spicchio, impossibile divisione in parti uguali a forma di spicchio di poligoni non regolari

DIVISIONE DEI POLIGONI REGOLARI

Premessa

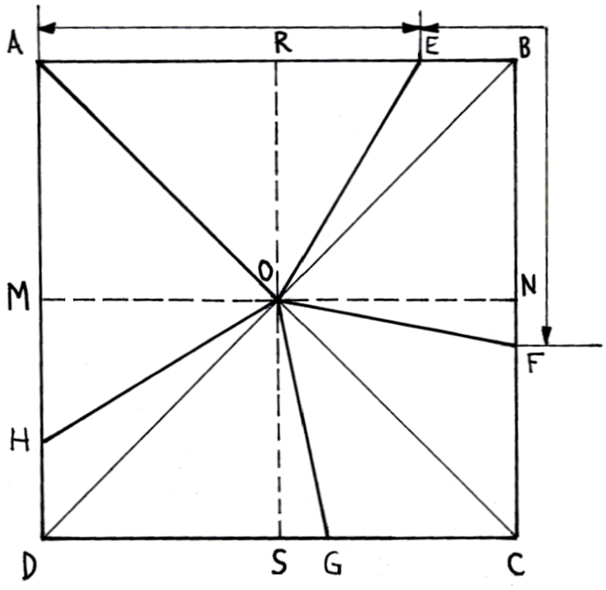
I metodi grafici che sono qui presentati si propongono di dividere un poligono regolare in parti uguali, con riferimento al suo centro geometrico, quasi si trattasse di dividere una *torta* in fette a forma di spicchio e di uguali dimensioni. Viene dimostrata la fattibilità di questa operazione.

Alcuni esempi negheranno la possibilità di effettuare un taglio del genere nel caso di poligoni non regolari.

Divisione di un quadrato in 5 parti uguali

ABCD è un quadrato che deve essere diviso in *cinque* parti uguali.

Tracciare le diagonali AC e DB e le mediane MN e RS, che si intersecano nel punto O.



Il suo perimetro, *p*, è: p = 4 * AB = 4 * lato .

Dividere *p* per 5: z = p/5 = 4 * lato/5 = lato * 4/5.

A partire dal vertice A, muovendo in senso orario, riportare lungo il perimetro del quadrato la lunghezza di *z* per cinque volte: sono fissati i vertici E, F, G e H.

Tracciare i segmenti EO, FO, GO e HO.

Il perimetro del quadrato è ora diviso in *cinque* parti uguali:

* AE = z ;
* EB + BF = z ;
* FC + CG = z ;
* GD + DH = z ;
* HA = z .

Collegare i punti E, F, G e H con il centro O. Il quadrato è ora diviso in *cinque* poligoni: i triangoli AOE, AOH e i quadrilateri OEBF, OFCG e OGDH.

I triangoli AOE e AOH hanno uguali dimensioni e le loro aree sono date da:

$$\text{Area}_{AOE} = AE * OR/2 = (z * \text{lato}/2)/2 = (4/5 * \text{lato})/2 * \text{lato}/2 = 1/5 * \text{lato}^2.$$

Tutti e tre i quadrilateri sono scomponibili in due triangoli:

* OEBF in OEB e OBF;
* OFCG in OFC e OCG;
* OGDH in OGD e ODH.

I sei triangoli hanno in comune una caratteristica: le loro altezze riferite ai lati del quadrato hanno uguali lunghezze: OM = OR = ON = OS = lato/2.

Alcune altezze *cadono* all'esterno dei triangoli sui prolungamenti dei lati, come è chiarito nell'APPROFONDIMENTO in calce a questo paragrafo.

Il quadrilatero OEBF ha area data da:

$$\begin{aligned}\text{Area}_{OEBF} &= \text{Area}_{OEB} + \text{Area}_{OBF} = EB * OR/2 + BF * ON/2 = \\ &= (\text{lato}/2 * EB)/2 + (\text{lato}/2 * BF)/2 = \text{lato}/4 * (EB + BF) = \\ &= \text{lato}/4 * 4/5 * \text{lato} = 1/5 * \text{lato}^2 .\end{aligned}$$

Applicando le stesse considerazioni ai quadrilateri OFCG e OGDH risulta che entrambi hanno area uguale a ($1/5 * \text{lato}^2$).

Sommando le aree di tutti e cinque poligoni, il risultato è uguale all'area del quadrato ABCD e cioè lato^2.

- APPROFONDIMENTO -

ABC è un triangolo scaleno e ottusangolo: l'angolo in A è ottuso mentre gli angoli in B e in C sono acuti.

Due delle tre altezze del triangolo cadono fuori del poligono sui prolungamenti dei due lati più corti (AB e AC).

Prolungare AC verso sinistra e BA verso il basso.

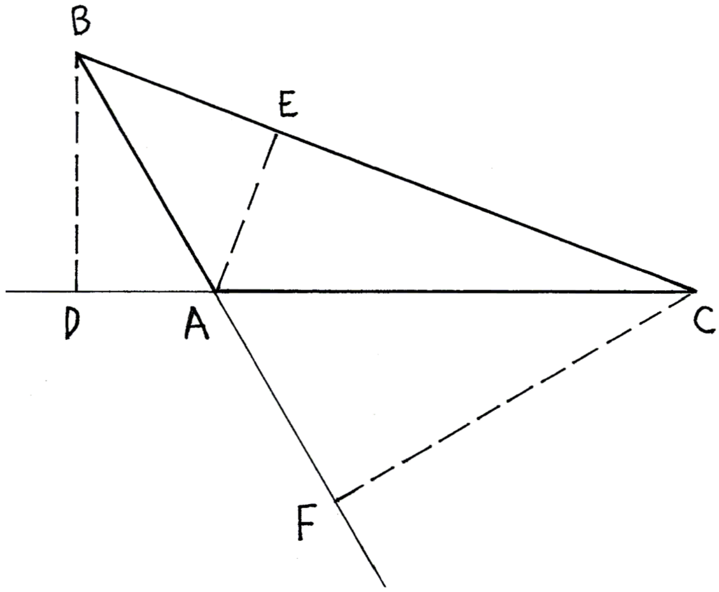
Condurre le tre altezze: BD, AE e CF.

Fra le proprietà possedute dai triangoli vi è quella relativa all'area: essa è data dal semiprodotto della lunghezza di un lato per l'altezza ad esso relativa:

$$\text{Area} = \text{lato} * \text{altezza}/2.$$

L'area del triangolo ABCD è data da:

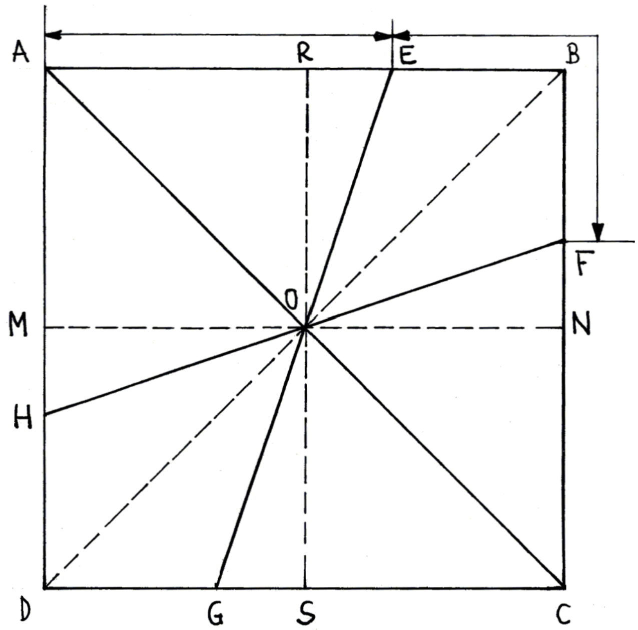
$$\text{Area}_{ABC} = AE * BC/2 = BD * AC/2 = CF * AB/2 .$$



- -

<u>Divisione di un quadrato in 6 parti uguali</u>

Il quadrato ABCD deve essere diviso in *sei* parti uguali.



Utilizzando il metodo descritto nel precedente paragrafo, occorre dividere il perimetro del quadrato, *p*, per 6:

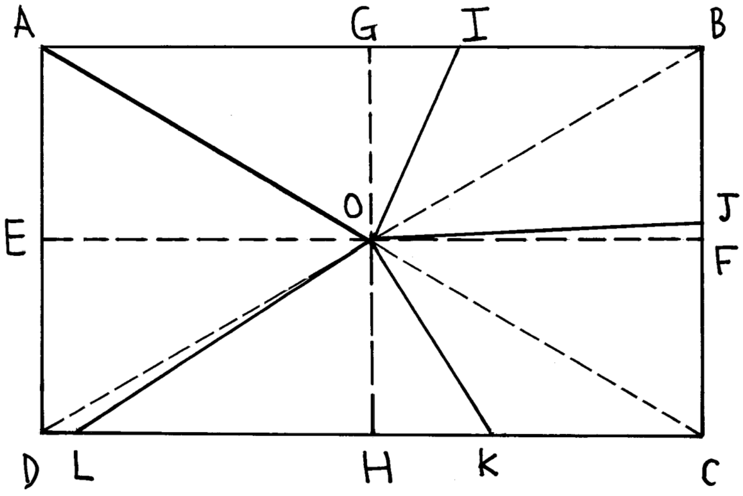
z = p/6 = 4 * lato/6 = 2/3 * lato.

Riportare la lunghezza di *z* a partire dal vertice A: sono stabiliti i punti E, F, G e H che vanno collegati al centro O.

Le linee AE, EBF, FC, CG, GDH e HA sono tutte lunghe 2/3 * lato e le aree dei sei poligoni generati (triangoli e quadrilateri) sono tutte uguali a 1/6 * lato^2.

Divisione di un rettangolo in 5 parti

ABCD è un rettangolo. Tracciare le diagonali AC e BD e le mediane EF e GH:



Determinare il suo perimetro *p* e dividerlo per 5: $z = p/5$.

A partire dal vertice A riportare *cinque* volte la lunghezza di *z*: sono fissati i punti I, J, K e L.

Il rettangolo è ora ripartito in cinque poligoni: i triangoli OAI e OLK e i quadrilateri OIBJ, OJCK e OLDA.

Chiamiamo ℓ la larghezza AD = BC e L la lunghezza AB = DC.

Il perimetro *p* è: $p = 2 * \ell + 2 * L = 2 * (\ell + L)$

Sia ℓ che L sono valori noti.

Il triangolo OAI ha area:

$\text{Area}_{OAI} = AI * OG/2 = (z * \ell/2)/2 = z * \ell/4$.

Il triangolo OLK ha area:

$\text{Area}_{OLK} = LK * OH/2 = (z * \ell/2)/2 = z * \ell/4$.

I due triangoli hanno aree uguali.

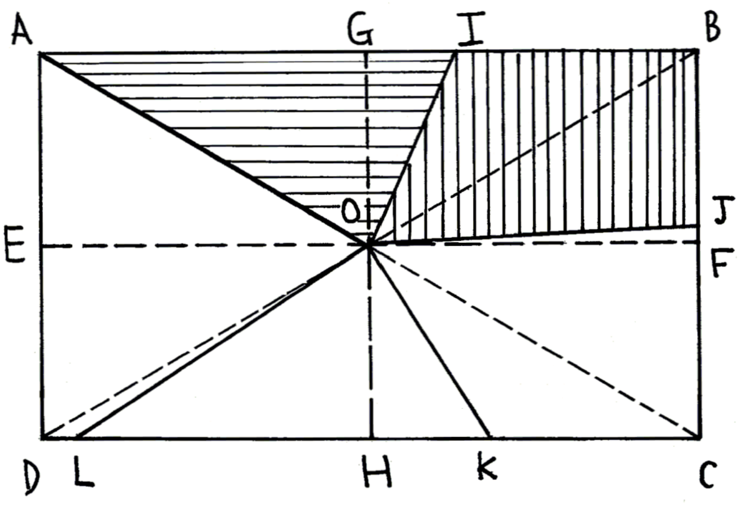
Il quadrilatero OIBJ è formato da due triangoli, OIB e OBJ. La sua area è:

$\text{Area}_{OIBJ} = \text{Area}_{OIB} + \text{Area}_{OJB} = OG * IB/2 + OF * BJ/2 = \ell/2 * IB/2 + L/2 * BJ/2 =$

$= \ell/2 * IB/2 + L/2 * BJ/2 = (\ell + L)/2 * (IB + BJ)/2 =$

$= p/4 * z/2 = p/4 * p/10 = p^2/40$.

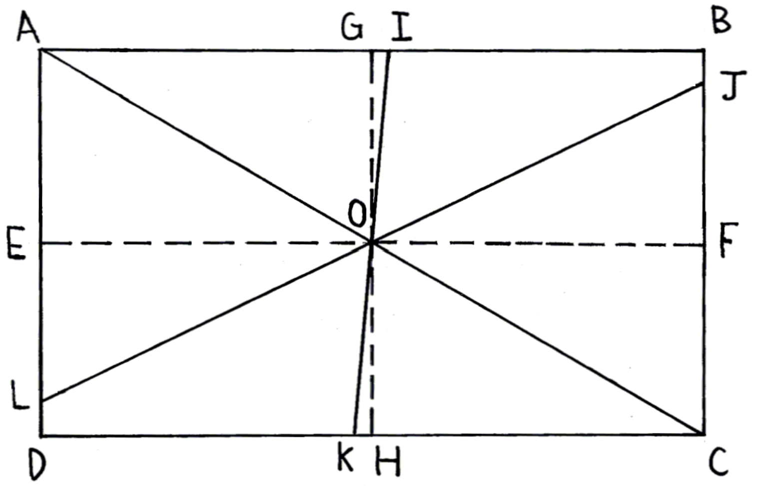
Coprire con tratteggio orizzontale il triangolo OAI e con tratteggio verticale il confinante quadrilatero OIBJ:



Evidentemente il secondo poligono occupa una superficie *maggiore* di quella destinata a OAI.

Il rettangolo *non è divisibile*, con questo metodo, in cinque parti uguali.

Lo stesso accade al tentativo di dividere lo stesso rettangolo in *sei* parti uguali:



La divisione in *sei* parti equivale alla divisione in *tre* parti dei due triangoli rettangoli ABC e ACD generati dalla diagonale AC.

Dividere per *sei* il perimetro *p*:

$$z = p/6 = 2 * (\ell + L)/6 = (\ell + L)/3 .$$

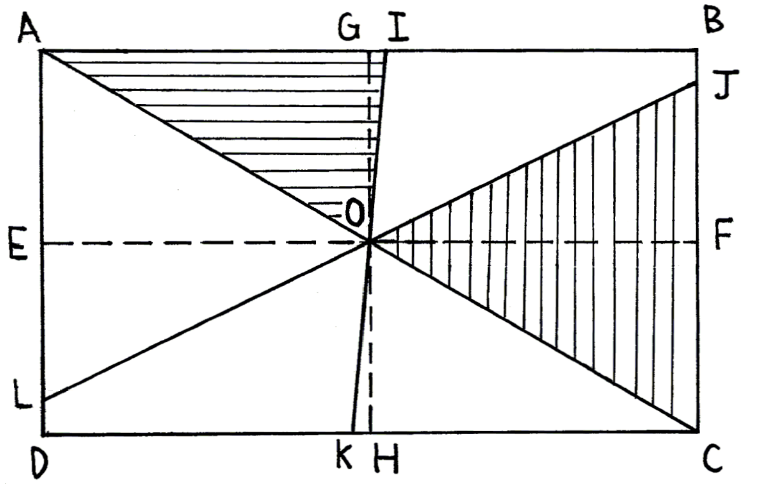
A partire dal vertice A, in senso orario, riportare la lunghezza di z. Notiamo che la somma delle lunghezze dei lati consecutivi AB e BC è: $AB + BC = L + \ell = p/2 = 3 * z$.

Sono così fissati i punti I e J oltre a coprire il punto C che è a distanza (3 * z) dal vertice A. Proseguendo oltre il vertice C sono stabiliti i punti K e L e il percorso si conclude nel vertice A.

Collegare I, J, K e L con il centro O.

È facile notare che le coppie di segmenti GO-OK e JO-OL giacciono sulle stesse due rette.

Il rettangolo è diviso in *sei* poligoni due a due *simmetrici*: i triangoli OAI e OCK, i triangoli OAL e OJC e i quadrilateri OIBJ e OKDL.



Confrontiamo le aree dei due triangoli evidenziati nella figura: OAI e OJC. L'area del primo è data da

$$\text{Area}_{OAI} = AI * OG/2 = (z * \ell/2)/2 = z * \ell/4 .$$

L'area del secondo triangolo, OJC, è:

$$\text{Area}_{OJC} = JC * OF/2 = (z * L/2)/2 = z * L/4 .$$

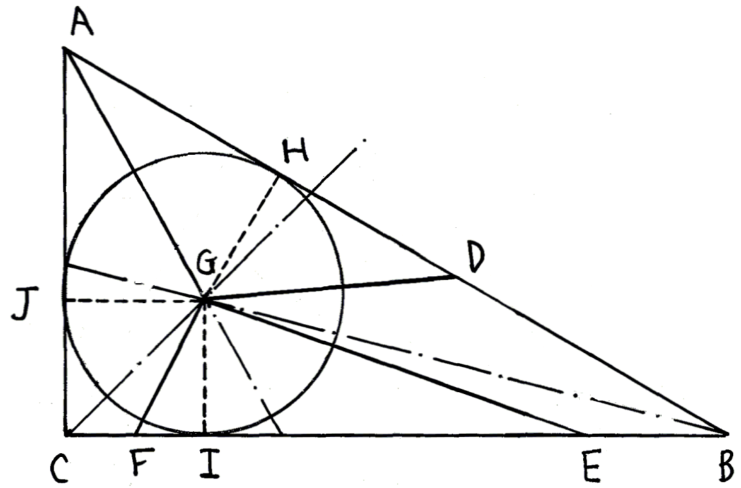
Essendo $L > \ell$, è evidente che l'area di OJC è maggiore di quella di OAI:

$z * L/4 > z * \ell/4$.

Il rettangolo *non è divisibile* in *sei* parti uguali con questo metodo.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

La figura che segue rappresenta un triangolo rettangolo che è originato da una diagonale tracciata nel rettangolo di dimensioni uguali a quelle dei rettangoli appena considerati:



Con il metodo usato in precedenza, calcolare il perimetro, *p*, e dividerlo per 4:

$z = p/4$.

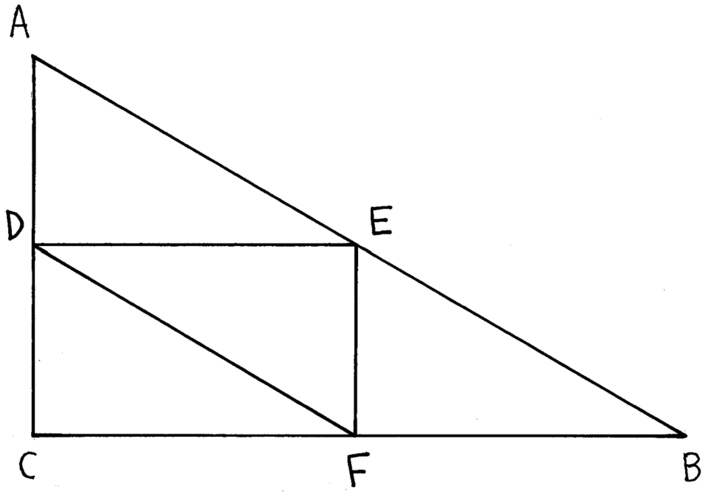
Per dividere in *quattro* parti riportare dal vertice A quattro volte la lunghezza di *z*: sono ottenuti i punti D, E e F che vanno collegati a G, l'*incentro* (intersezione delle bisettrici degli angoli interni) che è il centro del cerchio inscritto. La circonferenza è tangente ai lati del triangolo nei punti I, J e H.

I quattro poligoni che formano ABC sono: i triangoli GAD e GEF e i quadrilateri GDBE e GFCA.

Questi quattro poligoni hanno chiaramente aree assai differenti. La conclusione è ovvia: con questo metodo *non è possibile* dividere il triangolo scaleno in quattro o più parti uguali.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Il rettangolo della figura precedente è invece scomponibile in *quattro* triangoli a lui simili con il metodo mostrato nella figura:

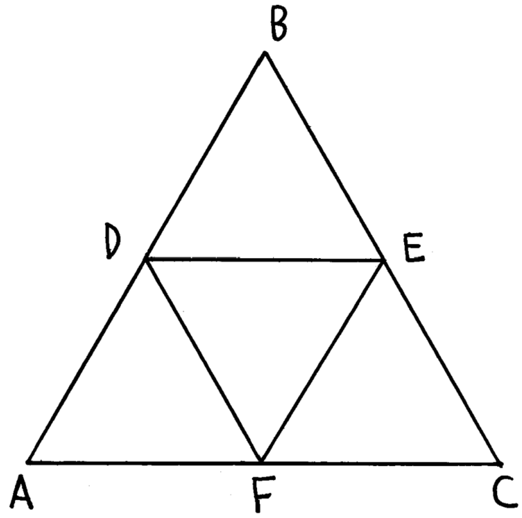


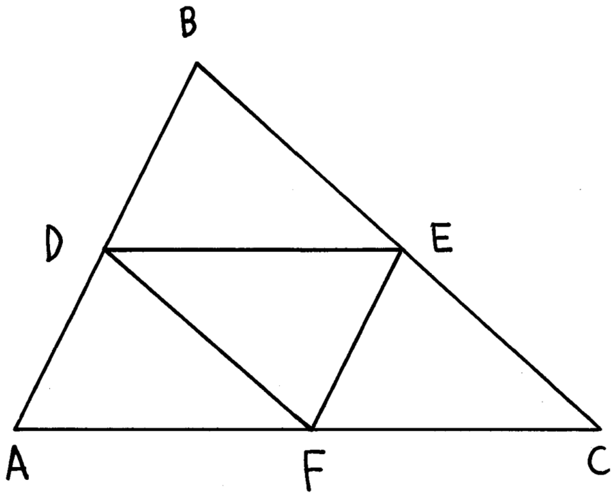
Fissare i punti medi dei tre lati: sono D, E e F.

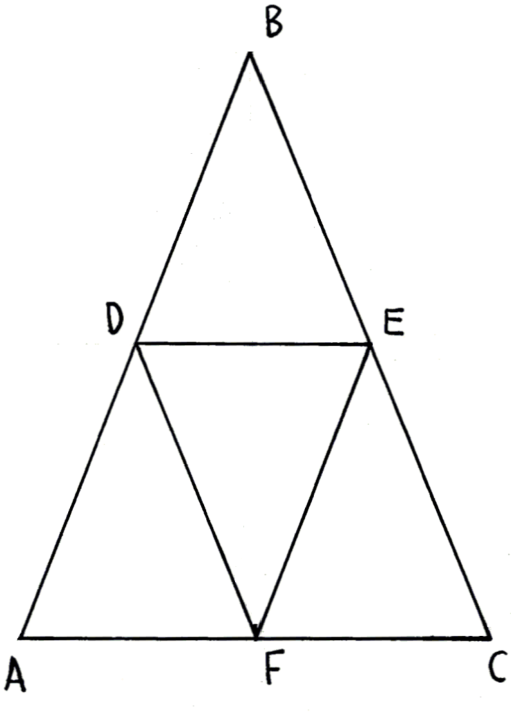
Tracciare i segmenti DE, EF e DF, tutti paralleli a un lato di ABC. Il triangolo è ora suddiviso in *quattro* triangoli di uguali dimensioni.

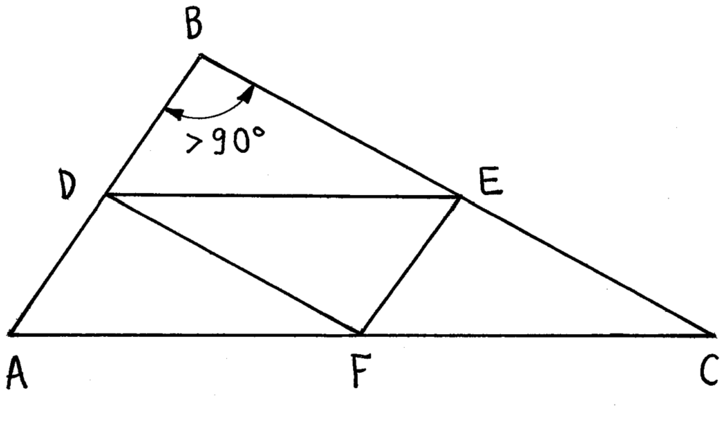
A sua volta ciascuno dei quattro triangoli può essere ripartito in altri *quattro* più piccoli identici triangoli, per un totale di 16 poligoni identici. La suddivisione può continuare secondo una *progressione geometrica* di ragione 4: 16 → 64 → 256 → …

Analoghe considerazioni valgono per la divisione di un *triangolo equilatero* e di un *triangolo scaleno acutangolo*, per un *triangolo isoscele* e per un *triangolo scaleno ottusangolo*:





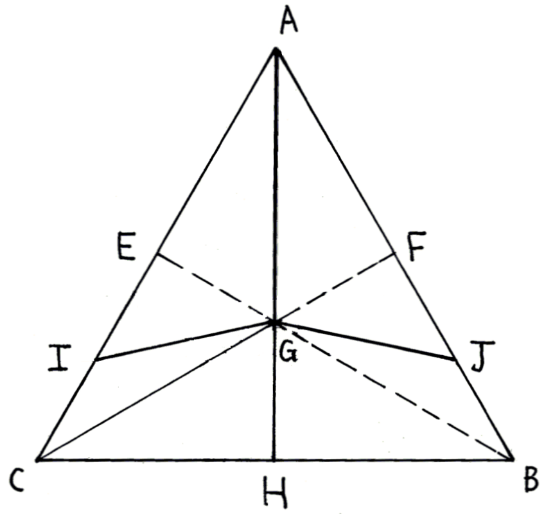




Per tutti questi triangoli vale la regola della *progressione geometrica* di ragione 4 per il numero dei possibili più piccoli triangoli nei quali sono scomponibili.

Triangolo equilatero diviso in 4 parti

ABC è un triangolo equilatero che deve essere diviso in *quattro* parti di uguale superficie: non interessa l'uguaglianza delle forme.



AH, CF e EB sono le tre altezze che si incontrano nell'*ortocentro* G.

Il perimetro, *p*, è: p = 3 * lato.

Dividere per 4 il perimetro: z = p/4 = 3 * lato/4 = ¾ * lato.

Muovendo dal vertice A riportare in senso orario lungo il perimetro la lunghezza di *z*. Sono così fissati i punti I e J. Collegare questi punti con G.

Il triangolo equilatero è ora diviso in *quattro* poligoni: i triangoli AGI e AGJ e i quadrilateri CIGH e HGJB.

I due triangoli hanno uguali dimensioni e anche i due quadrilateri hanno identiche dimensioni.

Occorre calcolare la lunghezza delle altezze GE e GF: esse valgono 1/3 dei segmenti BE e CF.

A sua volta, l'altezza di un triangolo equilatero è lunga:

$BE = (\sqrt{3})/2 * AC = (\sqrt{3})/2 * lato$.

Pertanto, le due altezze GE e GF sono lunghe

$GE = GF = 1/3 * BE = (\sqrt{3})/6 * lato$.

L'area del triangolo equilatero ABC è:

$Area_{ABC} = CB * AH/2 = lato * [(\sqrt{3})/2]/2 = (\sqrt{3})/4 * lato^2$.

Consideriamo uno dei due triangoli generati dalla divisione in quattro parti, ad esempio quello AGI. La sua area è data da

$Area_{AGI} = AI * GE/2 = (3/4 * lato) * [(\sqrt{3})/6 * lato]/2 = 1/16 * (\sqrt{3}) * lato^2$.

Proviamo a calcolare il rapporto fra l'area di ABC e quella di AGI:

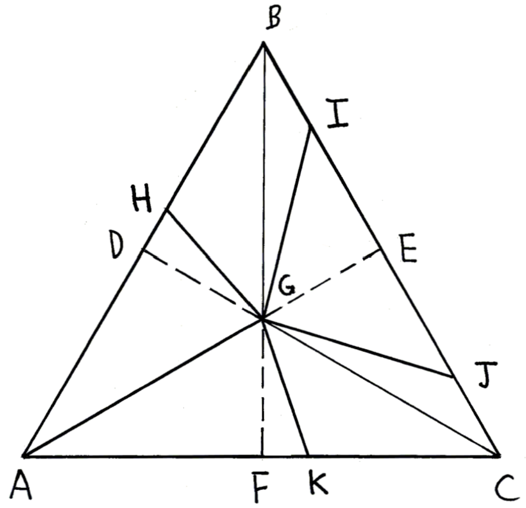
$Area_{ABC} / Area_{AGI} = [(\sqrt{3})/4 * lato^2] / [1/16 * (\sqrt{3}) * lato^2] = 4$. Quindi le aree di AGI e AGJ sono uguali a ¼ di quella di ABC e nell'insieme equivalgono a ½ dell'area di ABC.

L'area complessiva dei quadrilateri CIGH e HGJB è pertanto pari alla *metà* mancante di quella di ABC ed avendo essi uguali dimensioni, ciascuno dei due poligoni ha area uguale a ¼ di quella del triangolo equilatero.

ABC è stato diviso in *quattro* parti uguali.

Triangolo equilatero diviso in 5 parti

ABC è il triangolo equilatero preso in considerazione nel precedente paragrafo: in questo nuovo esempio esso deve essere diviso in *cinque* parti uguali.



Tracciare le tre altezze AE, BF e CD che si incrociano nell'ortocentro G.

Dividere il perimetro *p* in cinque parti:

$z = p/5 = 3 * lato/5 = 3/5 * lato$.

Muovendo dal vertice A, in senso orario, riportare lungo il perimetro la lunghezza di *z*. Sono fissati i punti H, I, J e K.

Il triangolo risulta suddiviso in cinque poligoni: i triangoli AGH, IGJ e AGK e i quadrilateri HBIG e JCKG.

I tre triangoli hanno uguali dimensioni perché hanno basi identiche (lunghe *z*) e altezze (GD, GE e GF) fra loro uguali e lunghe 1/3 delle altezze del triangolo ABC:

$Area_{AGH} = AH * GD/2 = z * (1/3 * CD)/2 = 3/5 * lato * 1/3 * ½ * CD =$
$= 1/10 * lato * BF$.

L'area di HBIG è data da:

$Area_{HBIG} = Area_{HBG} + Area_{BIG} = HB * DG/2 + BI * GE/2 = (HB + BI) * DG/2 =$
$= z * DG/2 = 3/5 * lato * 1/3 * CD/2 = 1/10 * BF$.

Anche il quadrilatero JCKG ha la stessa area di HBIG.

L'area del triangolo ABC è data da:

$Area_{ABC} = perimetro * (BF/3)/2 = 3 * lato * BF/6 = lato * BF/2$.

La somma delle aree dei cinque poligoni è:

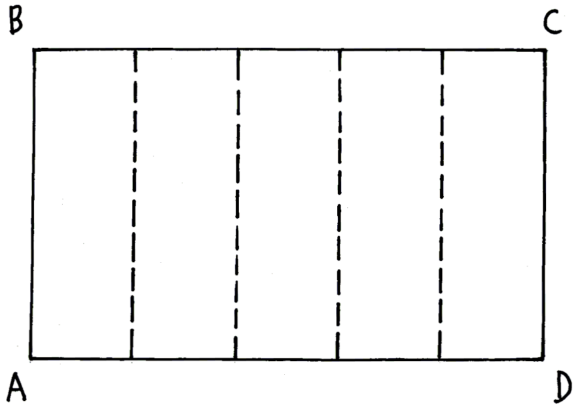
$Area_{TOTALE} = 5 * Area_{AGH} = 5 * (1/10 * lato * BF/2 = lato * BF/2$, che è l'area di ABC appena calcolata.

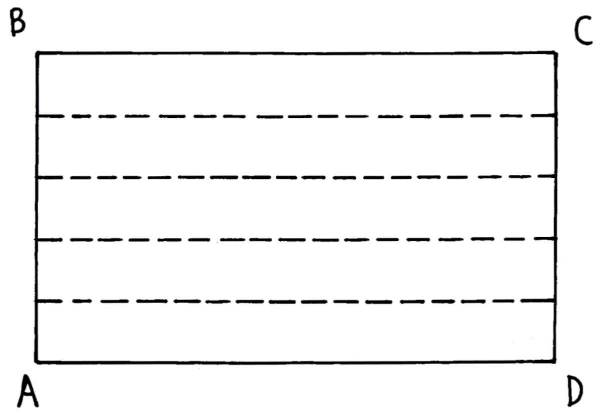
Il triangolo equilatero ABC è stato diviso in *cinque* poligoni di uguale area.

Divisione in parti uguali di un rettangolo

Accantonando il vincolo del vertice comune (il centro O) ai poligoni originati dalla divisione di un rettangolo, emergono altre possibili soluzioni corrette del problema della ripartizione di un rettangolo in parti uguali.

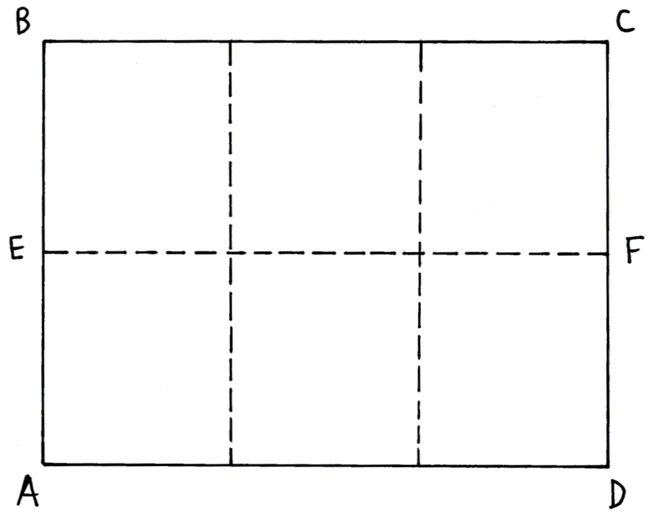
Il rettangolo ABCD deve essere diviso in *cinque* parti uguali con strisce verticali o orizzontali di uguale superficie:

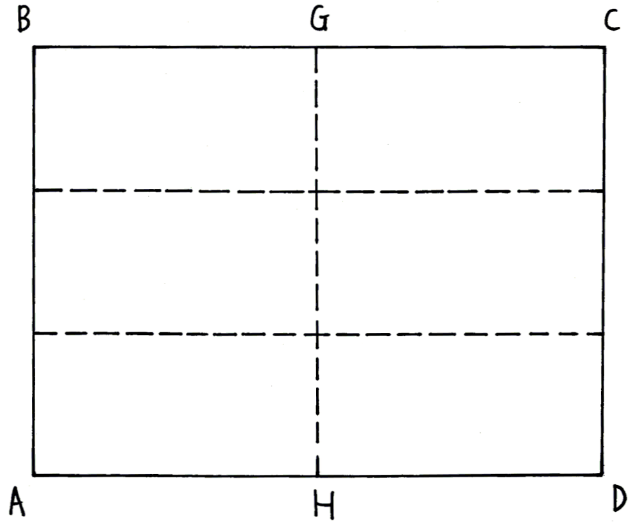




Il metodo è valido per qualunque *numero dispari* di parti.

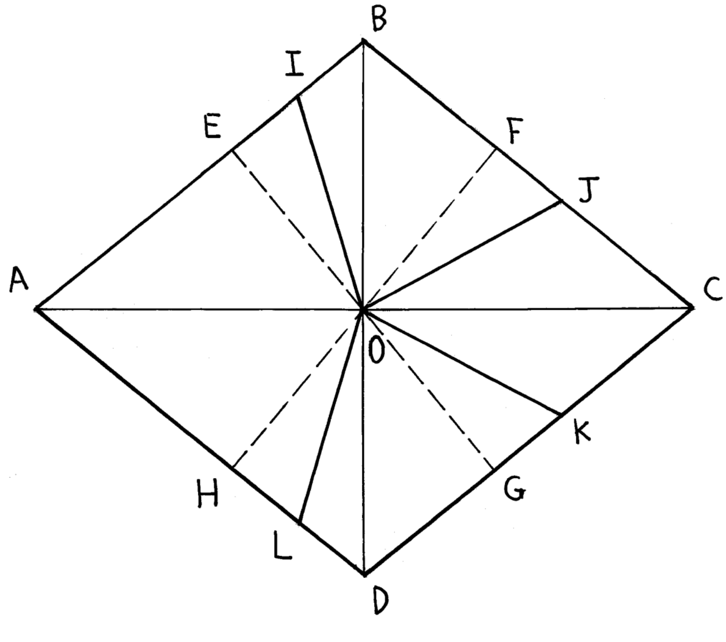
Se il rettangolo deve essere diviso in un *numero pari* di parti uguali occorre preliminarmente tracciare una *mediana* orizzontale (EF) oppure verticale GH), come è il caso della divisione in *sei* parti uguali:





Divisione di un rombo in 5 parti uguali

ABCD è un rombo: AC e BD sono le sue diagonali che incontrano nel punto O tagliandosi perpendicolarmente e a metà.



Tracciare le quattro altezze: OE, OF, OG e OH. Esse hanno uguale lunghezza. Per semplificare i successivi passaggi, chiamiamo *h* le quattro altezze: OE = OF = OG = OH = h .

I quattro lati del rombo – AB, BC, CD e DA – hanno uguale lunghezza, lato = ℓ .

Il perimetro *p* del rombo è

$$p = 4 * AB = 4 * \ell .$$

Dividere per 5 il perimetro: $z = p/5 = 4/5 * \ell$.

A partire dal vertice A riportare sul perimetro, in senso orario, per cinque volte la lunghezza di *z*: in successione sono ottenuti i punti I, J, K e L.

Il rombo è ora suddiviso in *cinque* poligoni: i triangoli OAI e OAL (che hanno uguali dimensioni perché simmetrici rispetto alla diagonale maggio AC) e i quadrilateri OIBJ, OJCK e

OKDL Anche i quadrilateri OIBJ e OKDL sono simmetrici rispetto alla diagonale AC e hanno le stesse dimensioni.

L'area di OAI è:

$\text{Area}_{OAI} = AI * h/2 = 4/5 * \ell * h/2 = 2/5 * \ell * h$.

L'area di OIBJ è:

$\text{Area}_{OIBJ} = \text{Area}_{OIB} + \text{Area}_{OBJ} = IB * h/2 + BF * h/2 = (IB + BF) * h/2 =$
$= (4/5 * \ell) * h/2 = 2/5 * \ell * h$.

Infine, l'area di OJCK è data da:

$\text{Area}_{OJCK} = \text{Area}_{OJC} + \text{Area}_{OCK} = JC * h/2 + CK * h/2 = (JC + CK) * h/2 =$
$= (4/5 * \ell) * h/2 = 2/5 * \ell * h$.

Le aree dei cinque poligoni sono identiche e uguali a $2/5 * \ell * h$.

L'area del rombo, espressa in funzione dei suoi lati, è:

$\text{Area}_{ABCD} = 5 * (2/5 * \ell * h) = 2 * \ell * h$, risultato corretto perché l'area di uno dei quattro triangoli rettangoli che compongono il rombo è:

$\text{Area } ABO = AB * OE/2 = \ell * h/2 = AO * OB/2$.

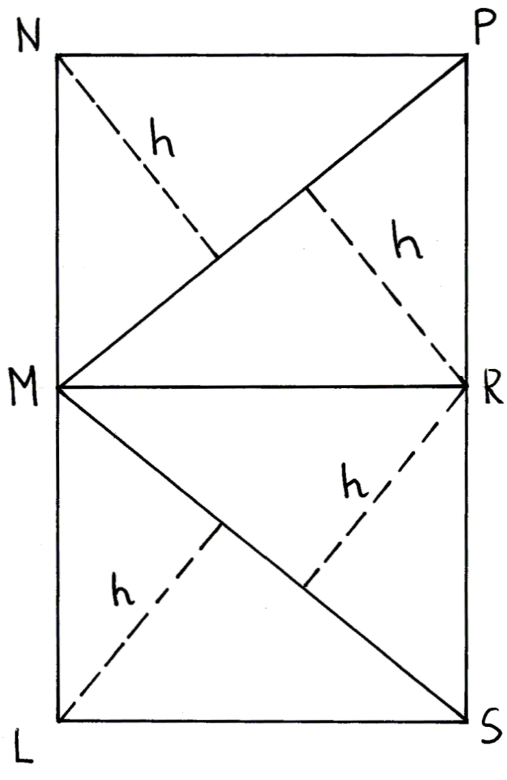
Da questa formula è possibile ricavare il valore di *h*:

$h = 2 * \text{Area}_{ABO} / \ell = AO * OB/2$.

L'area dei quattro triangoli uguali a quello ABO vale:

$\text{Area}_{4\ \text{TRIANGOLI}} = 4 * (\ell * h/2) = 2 * \ell + h$.

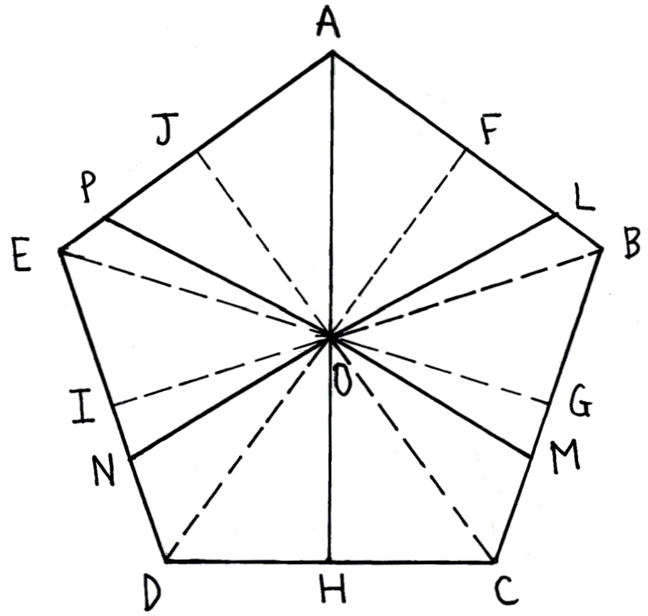
La figura che segue contiene il rettangolo LMNPRS formato dai quattro triangoli rettangoli formanti ABCD:



La sua area è uguale a quella del rombo.

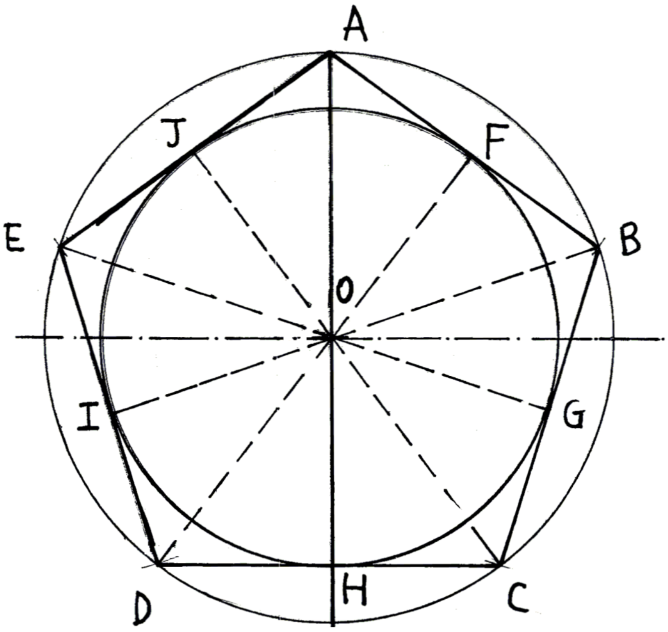
Divisione di un pentagono regolare in 6 parti uguali

ABCDE è un pentagono regolare che deve essere diviso in *sei* parti uguali.



Stabilire i punti medi dei cinque lati: sono F, G, H, I e J. Collegare questi ultimi con i vertici opposti: i cinque segmenti si intersecano nel punto O che è il centro della circonferenza circoscritta al pentagono. Inoltre i cinque segmenti (AH, BI, CJ, DF e EG) sono cinque *assi di simmetria* del pentagono.

La figura che segue contiene le due circonferenze circoscritta al pentagono e inscritta in esso:



L'asse AH è formato dall'unione di due segmenti che giacciano sulla stessa retta:

AH = AO + OH ma AO è il raggio della circonferenza circoscritta e OH è il raggio della circonferenza inscritta. Ma OH è l'*apotema* del pentagono, per cui la formula diviene

AH = Raggio + apotema.

Le stesse considerazioni valgono anche per gli altri quattro assi di simmetria: BI, CJ, DF e EG.

Il perimetro *p* del pentagono è p = 5 * lato .

Esso deve essere diviso in *sei* parti uguali e cioè z = p/6 = 5 * lato/6 = 5/6 * lato .

In senso orario, come nei casi precedenti, riportare la lunghezza di *z*: sono determinati i punti L, M, N e P oltre a H.

Collegare i primi quattro punti al centro O. Il pentagono è ora diviso in *sei* parti uguali: i triangoli AOL e APO e i quadrilateri OLBM, OMCH, OHDN e ONEP.

L'asse AOH divide il pentagono in due parti uguali e simmetriche rispetto all'asse stesso: i triangoli AOL e APO sono simmetrici e hanno uguali dimensioni.

Anche le coppie di quadrilateri OLBM-ONEP e OMCH-OHDN sono simmetriche e hanno uguali dimensioni.

Le aree dei sei poligoni sono tutte legate alle cinque altezze OF, OG, OH, OI e OJ che hanno uguale lunghezza: esse sono lunghe quanto la somma degli *apotemi*, a, del pentagono e dei raggi della circonferenza inscritta nel poligono.

Gli apotemi sono anche le altezze dei *sei* poligoni interessati alla divisione del pentagono in sei parti.

L'area del triangolo AOL è:

Area_{AOL} = AL * OF/2 = (5/6 * lato) * apotema/2 = 5/12 * lato * a .

Il quadrilatero OLBM è formato dai triangoli OLB e OBM. L'area di OLBM è data da:

Area_{OLBM} = Area_{OLB} + Area_{OBM} = LB * OF/2 + BM * OG/2 =
= (LB + OG) * a/2 = 5/6 * lato * a/2 = 5/12 * lato * a .

L'area di OLBM è uguale a quella di AOL.

Infine, il quadrilatero OMCH è formato da due triangoli: OMC e OCH. La sua area complessiva è:

Area_{OMCH} = Area_{OMC} + Area_{OCH} = MC * OG/2 + HC * OH/2 =
= (MC + HC) * a/2 = 5/6 * lato * a/2 = 5/12 * lato * a .

I sei poligoni hanno forme differenti ma tutti possiedono area uguale a 1/6 di quella del pentagono.

L'area del pentagono ABCDE è:

Area_{ABCDE} = perimetro * apotema/2 = 5 * lato * a/2 .

L'area di ciascuno dei *sei* poligoni nei quali è diviso il pentagono è *5/12 * lato* a* , per cui moltiplicando per *sei* si ottiene:

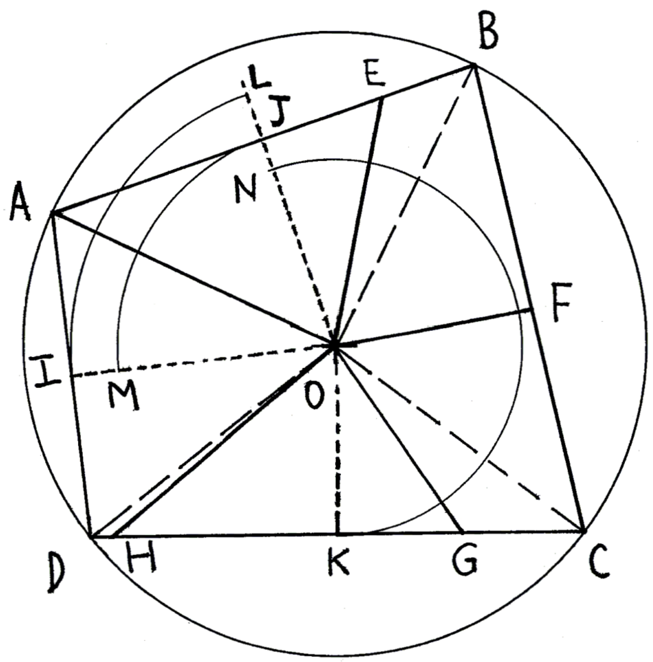
6 * (5/12 * lato * a) = 5 * lato * a/2, che è l'area dell'intero pentagono.

<u>Divisione (impossibile) di un quadrilatero convesso in 5 parti uguali</u>

ABCD è un quadrilatero *convesso*: lo è perché è inscritto nel cerchio di centro O e tutti i suoi vertici giacciono sulla circonferenza.

I suoi angoli opposti sono *supplementari*:

$$\hat{A} + \hat{C} = \hat{B} + \hat{D} = \pi = 180°$$



Tracciare i raggi OA, OB, OC e OD.

Determinare il perimetro *p* del quadrilatero e dividerlo per 5:

$$z = p/5 .$$

Agendo in senso orario, a partire dal vertice A riportare per *cinque* volte la lunghezza di *z*. Sono definiti i punti E, F, G e H. Collegare questi punti con il centro O.

Il quadrilatero è diviso in cinque poligoni: i triangoli AOE e HOG e i quadrilateri OEBF, OFCG e OHDA.

Tracciare le altezze OI, OJ e OK.

Ribaltare su OJ le altezze OI e OK e su OI l'altezza OJ: le altezze hanno differente lunghezza.

I triangoli AOE e HOG hanno basi uguali, AE = HG = z, ma altezze *differenti*: il quadrilatero è stato diviso in cinque poligoni con aree fra loro diverse.

Con questo metodo, non è possibile dividere il quadrilatero in parti uguali.

Bibliografia

1. Eastaway Rob – Windham Jeremy, "Probabilità, numeri e code", trad. it., Bari, Edizioni Dedalo, 2003, pp. 237.