sergio(punto)calzolani(at)outlook(punto)it

Parole chiave: Cosimo Bartoli; braccio fiorentino da panno; piede fiorentino; Oronce Finé; assonometria cavaliera; rapporto di fuga; Massimo scolari; aree figure piane; terne pitagoriche primitive e derivate; triangolo 13-14-15; Erone di Alessandria; mandorla; cubo doppio; cubo equivalente parallelepipedo; per numero; per linea; prismi; cilindri; cono; piramidi; tetraedro; ottaedro; dodecaedro; icosaedro; doppio cono; ellisse cuspidata; mandorla ovata.

COSIMO BARTOLI

Cosimo Bartoli (Firenze 1503-1572) è stato uno scrittore, un traduttore dal latino e l'ambasciatore di Cosimo I de' Medici presso la Repubblica di Venezia.

Fra le sue opere vi è la traduzione di numerosi testi di Leon Battista Alberti, di Albrecht Dürer ("Unterweisung der Messung") e di Oronce Finé (1494 – 1555), "Opere di Orontio Fineo del Delfinato", Venezia, 1587.

Le informazioni che seguono sono ricavate dal suo trattato di agrimensura e di geometria pratica citato in bibliografia e pubblicato a Venezia nel 1564.

L'opera è divisa in *sei* Libri:

* Primo: agrimensura.
* Secondo: geometria piana.
* Terzo: geometria solida.
* Quarto: uso degli strumenti di misura con la vista.
* Quinto: estratti dagli *Elementi* di Euclide (geometria elementare).
* Sesto: radici quadrate.

Le fonti di Cosimo Bartoli

All'inizio del suo trattato "Del modo di misurare …", Cosimo Bartoli cita gli *scrittori* delle cui opere si è servito per scrivere il suo testo. Eccoli:

* Orontio Fineo, e cioè il francese Oronce Finé (1494-1555).
* Alberto Durero, e cioè il tedesco Albrecht Dürer (1471-1528).
* Archimede (~287 – 212 a.C.).
* Euclide (IV – III secolo a.C.).
* Gemma Frisio, e cioè il matematico olandese Rainer Gemma Frisius (1508-1555).
* Giovan Roja, e cioè l'astronomo e cartografo spagnolo Juan de Rojas Sarmiento, attivo intorno al 1550.
* Giovanni Stoflerino, e cioè il tedesco Giovanni Stofler (1452-1531).
* Leonbattista Alberti, e cioè Leon Battista Alberti (1404-1472).
* Giorgio Perurbachio, e cioè l'astronomo e matematico austriaco Giorgio Peuerbach (1423-1461.

* Pietro Appiano, e cioè l'astronomo e cartografo tedesco Pietro Apiano (1495-1552).
* *PROSPETTIVA comune*.
* Tolomeo, e cioè Claudio Tolomeo (~100 - ~175 d.C.).
* Vitullione, e cioè il matematico polacco Erazmus Ciolek Witelo, noto come Vitellione (~ 1230 – prima del 1314).
* Vitruvio (~80 – dopo il 15 a.C.).

Premessa

Una caratteristica è comune a tutte le figure piane del Libro Secondo e ai solidi descritti da Bartoli nel Libro Terzo del suo trattato geometrico: le grandi dimensioni, tutte espresse in braccia.

Un *braccio fiorentino da panno* equivaleva a 58,3626 cm.

Evidentemente gli esempi portati da Bartoli sono caratterizzati da lunghezze espresse da *numeri interi* e hanno finalità puramente didattiche.

Nel corrispondente testo di Finé le lunghezze sono espresse in *piedi*: in Francia, fino al 1668 il piede era lungo l'equivalente di 32,6596 cm: Bartoli non ha provveduto a rettificare le dimensioni e ha implicitamente fissato l'erronea uguaglianza

1 piede francese ≈ 1 braccio fiorentino da panno.

Fra le unità di misura di lunghezza a Firenze era presente anche il *piede* che valeva 11 soldi di braccio e cioè 11/20 braccio:

1 piede fiorentino = 11/20 di braccio da panno = 11/20 * 58,3626 ≈ 32,1 cm.

La differenza fra la lunghezza del piede fiorentino e quella del piede francese.

Forse, la spiegazione del mancato uso del piede fiorentino da parte di Bartoli è assai semplice: a Firenze il piede era un'unità di misura poco usata.

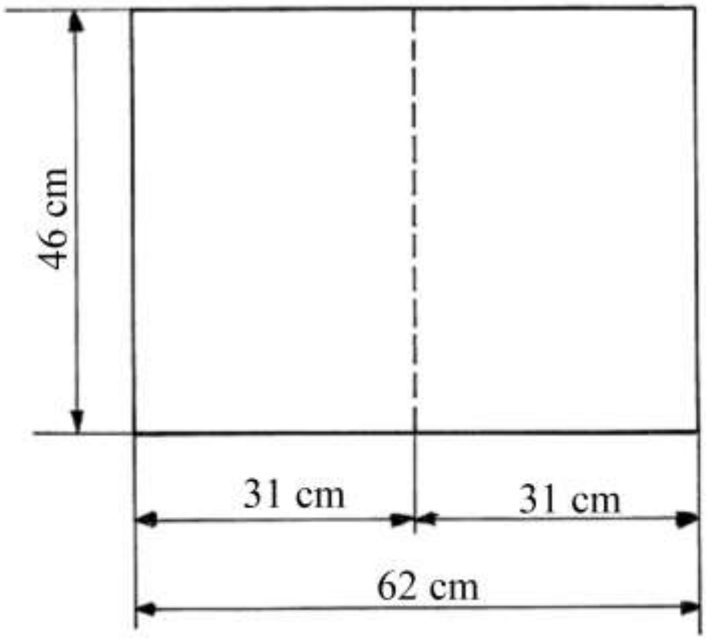
Infine, è utile far presente un piccolo errore: il vero e proprio *braccio* è la parte dell'arto superiore compresa fra la spalla e il gomito. L'unità di misura *braccio* è la lunghezza dell'*avambraccio* che è la distanza fra il gomito e l'estremità del dito medio.

L'unità di misura *braccio* è spesso identificata con l'unità di misura *cubito*.

I metodi grafici usati da Bartoli

Il trattato di Cosimo Bartoli è uno dei più importanti testi di *geometria pratica* del XVI secolo e forse il migliore. Particolarmente interessanti sono i metodi di rappresentazione grafica da lui impiegati: proiezioni ortogonali, assonometrie e prospettive.

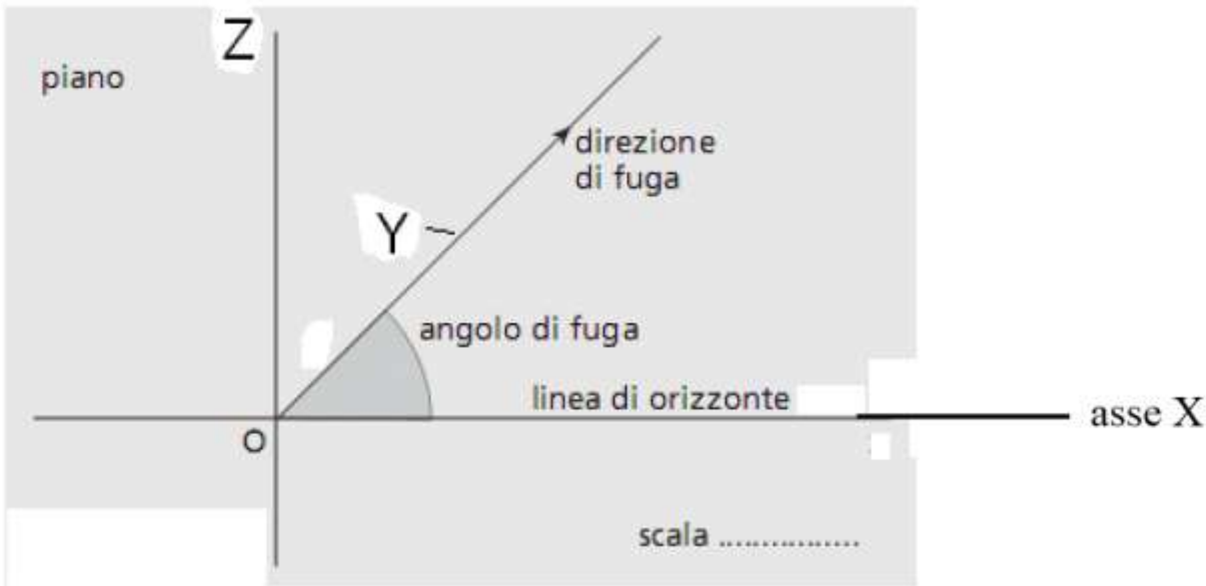
A questo importante testo va aggiunto l'inedito e anonimo *Codice di macchine* attribuito a Cosimo Bartoli da Daniela Lamberini dell'Università degli studi di Firenze. Il Codice è conservato nella Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze (E.B.16.5^{II}) ed è intitolato "Raccolta di varie macchine e disegni per vasi". Il codice contiene 135 carte e ha dimensioni 445x301 mm e cioè *mezzo reale*:



Lo studio della Lamberini è ampio e molto dettagliato ed è contenuto nel volume con gli Atti del Convegno tenutosi nel 2009 su Cosimo Bartoli, citato in bibliografia.

Nel trattato geometrico, Bartoli ha disegnato alcuni solidi in assonometria cavaliera o militare.

In generale, un disegno in *assonometria cavaliera* è definito da quattro elementi:



* un *piano di proiezione* che è rappresentato dal foglio di carta sul quale si disegna (o dallo schermo di un monitor);
* una *scala di proporzione*: 1:1 1:2 1:5, ecc.;
* una *direzione di fuga*: è un asse, Y in figura, che forma un dato angolo con la *linea di orizzonte* rappresentata dall'asse X. In questo caso l'angolo di fuga è uguale a 45°;

* un *rapporto di fuga* è espresso da un numero inferiore a 1: esso indica il rapporto fra le lunghezze misurate lungo l'asse Y e quelle reali:

rapporto di fuga = RF = lunghezza disegnata/lunghezza reale .

\- APPROFONDIMENTO -

La figura di Oronce Finé

Oronce Finé (Oronzio Fineo in italiano) è stato un matematico francese (1494-1555).

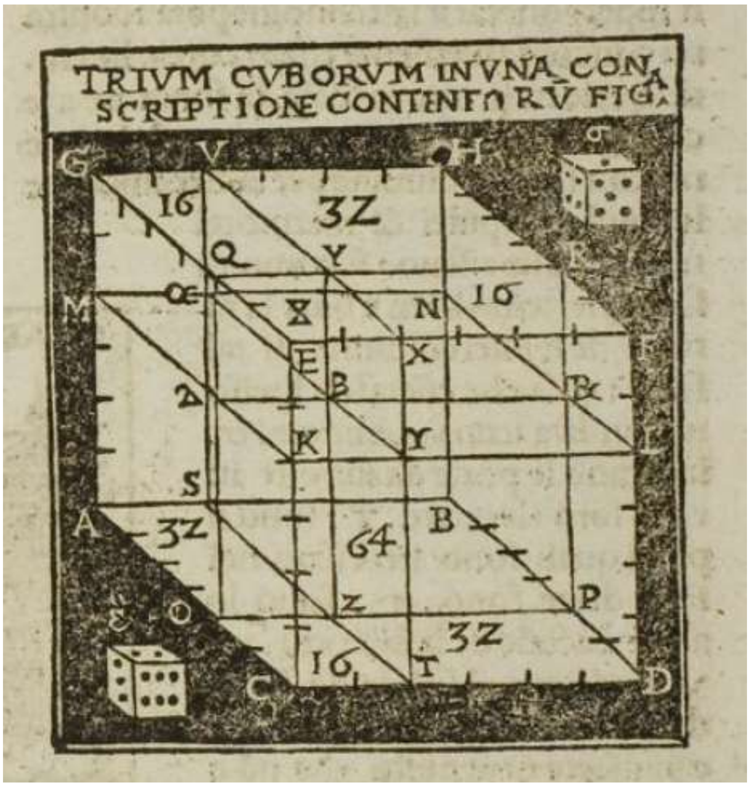
È l'autore di alcuni testi uno dei quali è stato tradotto in italiano da Cosimo Bartoli.

Il suo "*La praticque de la geometrie*" è con ogni probabilità frutto della sua conoscenza dei numerosi trattati italiani di geometria e di architettura, pubblicati o soltanto manoscritti, che egli doveva possedere: il padre era un medico formatosi in Italia e lui stesso aveva partecipato all'aggressione e all'occupazione francese del Ducato di Milano nella prima parte del XVI secolo.

A questo riguardo è ben nota la pressoché esclusiva prevalenza di testi di geometria pratica in latino (la "*Practica geometriae*" di Fibonacci, opera completata nel 1220) e in italiano fra il XIV e il XVI secolo.

Finé non cita alcun autore o testo, al contrario di Cosimo Bartoli che lo indica fra le sue fonti.

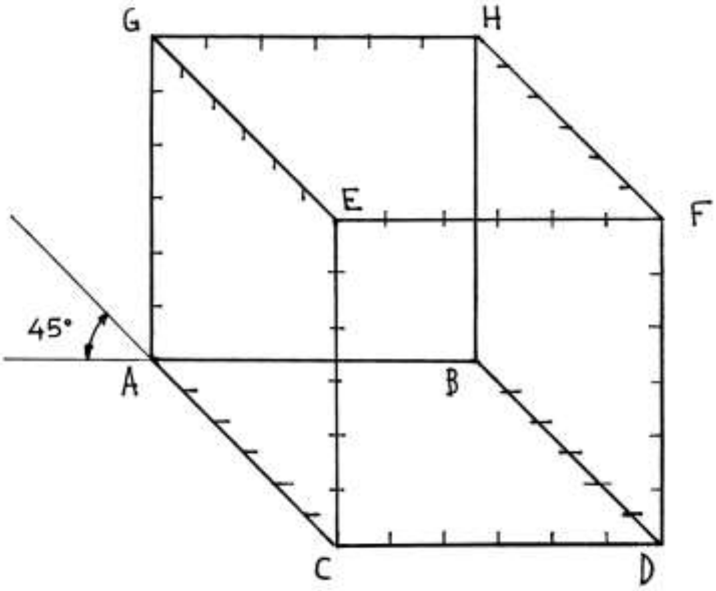
L'uso di scrivere le quote sugli spigoli di un solido, un *cubo*, non è stato introdotto da Finé, ma è dovuto a Cesare Cesariano (1475-1543) nella sua edizione italiana (pubblicata a Como nel 1521) del "*De architectura*" di Vitruvio:



Nella figura si vedono le tacche disegnate sugli spigoli, ciò che avanza nuovi dubbi sull'originalità dell'opera di Finé.

Il disegno del cubo di Cesariano è del tipo a "filo di ferro" e mostra tutti gli spigoli.

Questi ultimi sono inclinati di circa 45° rispetto alla linea dell'orizzonte e l'assonometria è cavaliera:



Il rapporto di fuga RF vale:

RF = AC/CD ≈ 0,8.

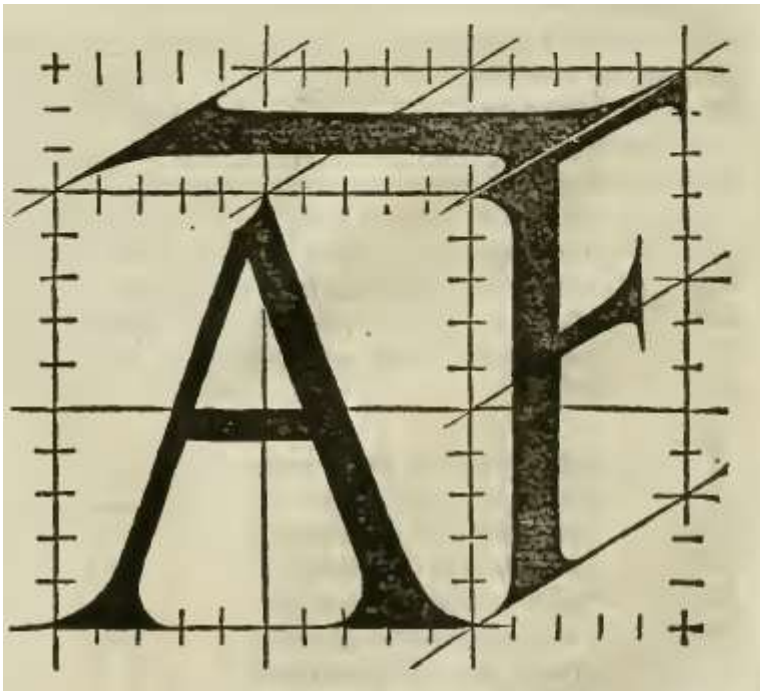
Sugli spigoli sono disegnate le tacche occorrenti per dividere le lunghezze in *sei* parti uguali, forse per l'influenza del sistema di misura duodecimale.

Dal disegno si ricava che il cubo ha spigoli lunghi 4 unità: dovrebbe trattarsi di *cubiti* o *braccia milanesi*: il braccio milanese aveva lunghezza equivalente a 59,4936 cm. Il braccio milanese era diviso in 12 *once*.

Infine, ai due estremi Cesariano disegnò in assonometria due dadi da gioco con le cifre correttamente incise: le sei cifre compaiono una sola volta e sono disposte in maniera corretta.

I metodi grafici di Cesariano furono ripresi anche dal tipografo e geometra francese Geoffroy Tory (1480-1533) che, ispirato ai modelli di Vitruvio e di Alberti, disegnò molti caratteri nel suo trattato *Champfleury* pubblicato a Parigi nel 1529.

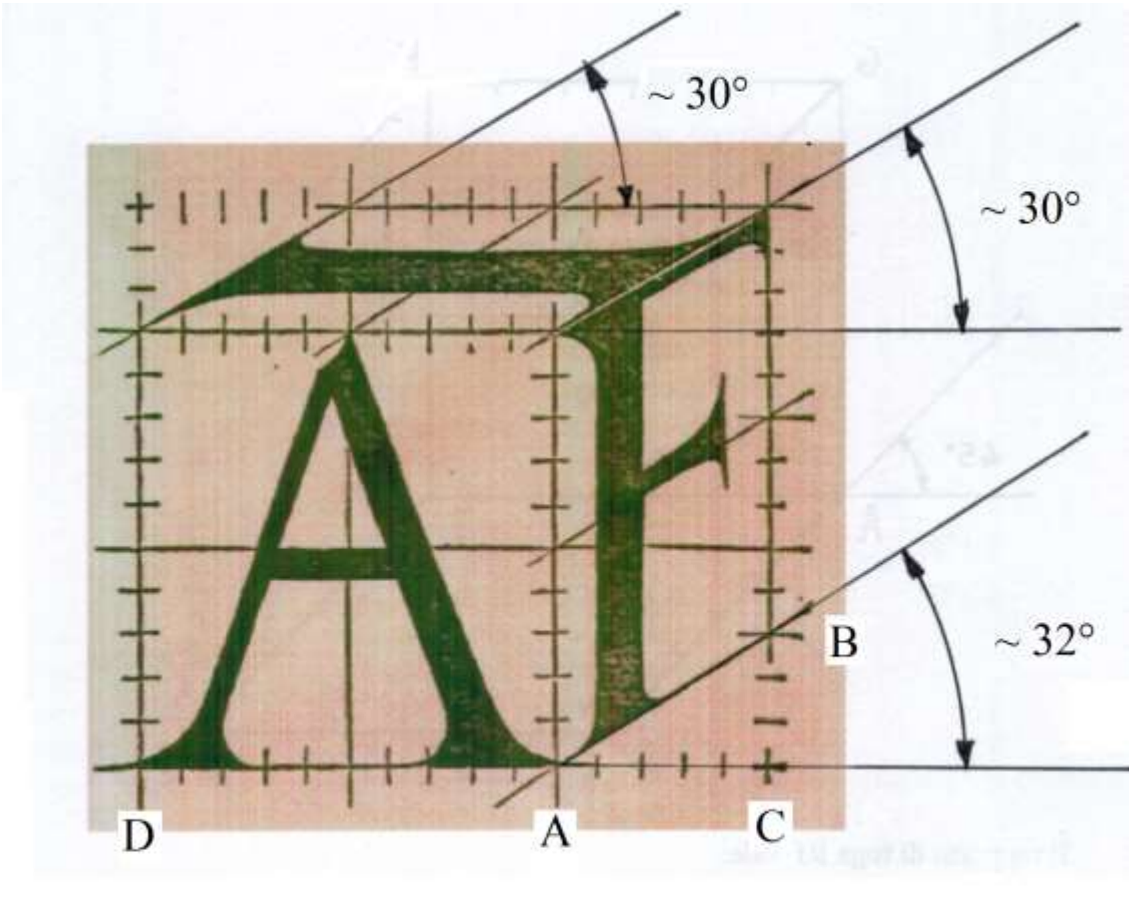
La figura che segue è riprodotta da questo testo:



Sulle tre facce visibili di un cubo sono disegnate le lettere maiuscole A, F e I.

Gli spigoli orizzontali e verticali del solido sono divisi in *dieci* parti con l’ausilio delle tacche.

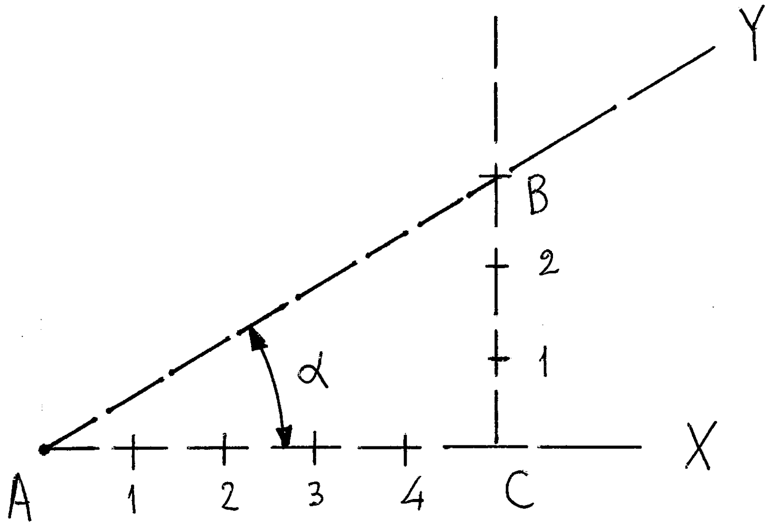
Il cubo è disegnato in assonometria cavaliera con angoli di fuga intorno ai 30°:



Il rapporto di fuga RF vale:

RF = AB/DA ≈ 0,61.

Il triangolo ABC è rettangolo e i suoi cateti sono lunghi: AC = 5 e BC = 3:

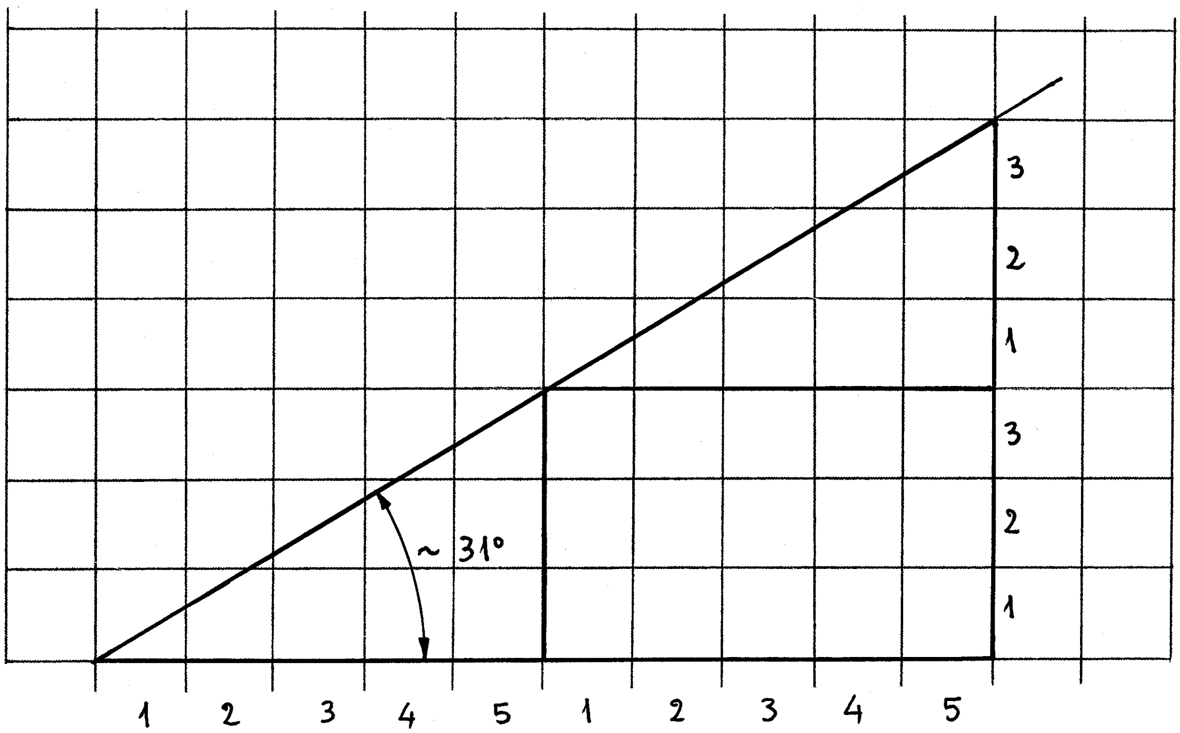


La tangente dell'angolo α è:

$$\text{tg}\ \alpha = BC/AC = 3/5 = 0{,}6\ .$$

A questo valore corrisponde un angolo di ~ 31°, assai vicino a quello di 30° che è caratteristico dell'*assonometria isometrica*.

Se vi è necessità di tracciare una veloce assonometria *isometrica* di un oggetto può servire un reticolato quadrato del quale si sfruttano le proprietà del triangolo rettangolo di cateti lunghi 5 e 3 e con l'ipotenusa inclinata di ~ 31°:



Si può ragionevolmente ipotizzare che Geoffroy Tory abbia impiegato l'angolo di 30°.

Il passo che segue è la riproduzione della nota (46) a p. 227 del testo di Massimo Scolari, “Il disegno obliquo” con un severo giudizio su Finé:

“Maurolico esprime giudizi molto severi sull'opera di Oronce Finé: lo accusa di inettitudine, false dimostrazioni e dell'attribuzione dei propri errori ad Archimede. Cfr. P.L. Rose, *The Italian Renaissance of Mathematics*, Genève 1975, p. 171. Oronce Finé (Orontius Finaeus o Fineus) pubblica una *Arithmetica* nel 1519 e nel 1525 disegna la prima mappa della Francia. Traduce l'enciclopedia del tedesco Gregorius Reisch (*Aepitoma omnis pbilosopbiae*. *Alias Margarita philosophica tractans de omni genere scibili*, Strasbourg 1504), opera popolare e molto diffusa agli inizi del Cinquecento. Francesco rio porta con sé in Piemonte e gli dà l'incarico dei lavori di fortificazione di Milano; è anche consigliere nell'assedio di Pavia. A Parigi apre un corso privato di matematica molto frequentato, fino a che gli viene assegnata la cattedra di matematica al Collège Royal (1530 o 1532), carica che ricopre fino alla morte. Quando ancora è insegnante al Collège è pubblicato dal portoghese Pedro Nuñez un dettagliato elenco di tutti gli errori commessi da Finé nei suoi scritti, e lo stesso farà il suo allievo Jean Borel dopo la sua morte. Cfr. *De erratis Orontii Finae, qui putavit inter duas datas lineas binas medias proportionales sub continua proportione invenisse, circulum quadrasse, cubum duplicasse, multangulum quodcunque rectilineum in circulo describendi artem tradidisse et longitudinis locorum differentias aliter quam per eclipse lunares, etiam dato quovis tempore, manifestas fecisse, Petrii Nounii Liber unus*, Coimbre 1546; Jean Borrel (Johannes Buteo), *De quadratura Circuli, ubi multorum quadraturae confutantur*, Lyon 1559 e *Io. Buteonis confutatio quadraturae circuli ab Orontio Fineo factae*, in *Io. Buteonis delphinatici opera geometrica, quorum tituli sequuntur* [...], Lugduni 1554, pp. 42-50. Le stroncature erano molto frequenti nel campo scientifico: inserendosi nei dibattito Cusano-Toscanelli sulla quadratura del cerchio, Regiomontano chiama Cusano «geometra ridiculus» (vedi la lettera del 1471 a Christian Roder di Erfurt, in Rose, *The Italian Renaissance of Mathemahcs* cit., p. 30). Finé è anche curatore di due edizioni pirata del celebre testo di Jean Pèlerin detto Viator, *De Aertificiali perspectiva* (Toul 1505): una pubblicata a Strasburgo nel 1512 e una a Basilea nel 1535”.

- -

Nota: alcune figure, piane e solide, sono state riprodotte dal trattato di Bartoli. Molte di esse sono state ridisegnate per correggere eventuali errori e per renderle precise.

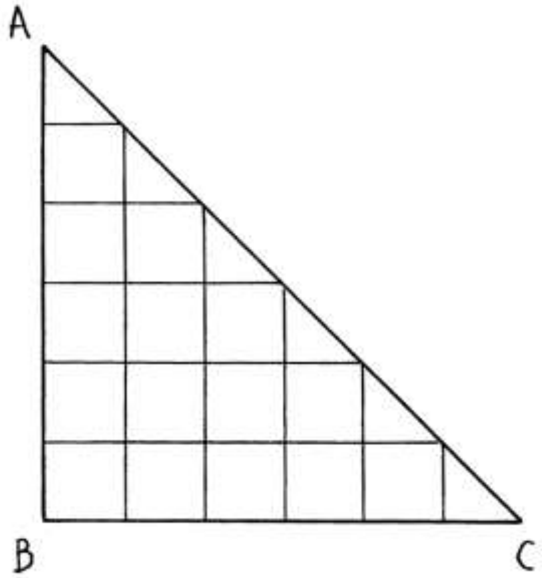
LIBRO SECONDO

Questo Libro è dedicato alla geometria piana e in particolare al calcolo delle aree di figure piane.

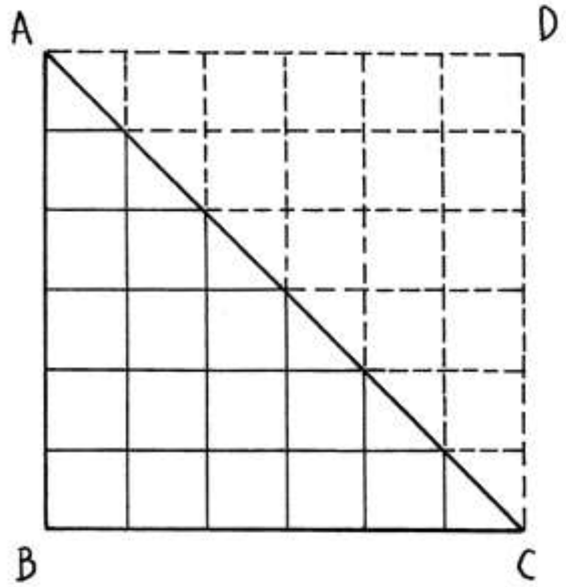
L'aritmetica utilizzata da Bartoli è *retorica* e cioè egli non usa simboli ma soltanto *parole* per descrivere le operazioni aritmetiche necessarie: in questo articolo sono impiegati i simboli occorrenti secondo le moderne concezioni.

Triangolo rettangolo isoscele

Un triangolo rettangolo isoscele ha i cateti lunghi 6 braccia:



Esso è generato dalla divisione di un quadrato con lati lunghi 6 braccia lungo una diagonale e dalla successiva asportazione di una delle due parti:

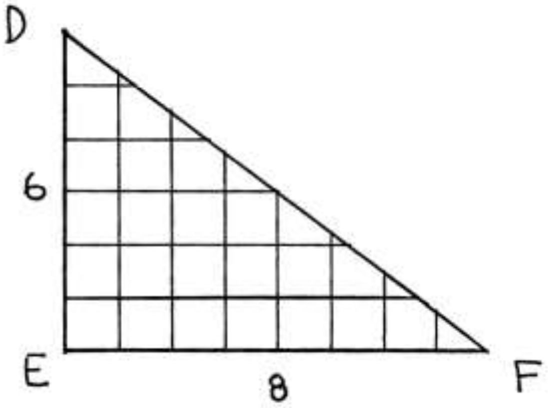


L'area è calcolata correttamente:

$$\text{Area} = AB * BC/2 = 6 * 6/2 = 18 \text{ braccia}^2.$$

Triangolo rettangolo scaleno

Un triangolo rettangolo ha cateti di differenti lunghezze:



Esso è ricavato da un rettangolo con lati lunghi 8 e 6 braccia, tagliato lungo la diagonale DF.
L'area è:

Area = DE * EF/2 = 6 * 8/2 = 24 braccia^2.

- APPROFONDIMENTO -

L'uso delle lettere

Bartoli appone lettere *maiuscole* ai vertici delle figure piane e solide in successione: nella figura del triangolo isoscele ha impiegato le lettere A, B e C, mentre nel caso del triangolo rettangolo ha usato le tre lettere successive dell'alfabeto e cioè D, E e F.

La prima lettera è generalmente scritta nel vertice più alto e le altre a seguire con andamento antiorario.

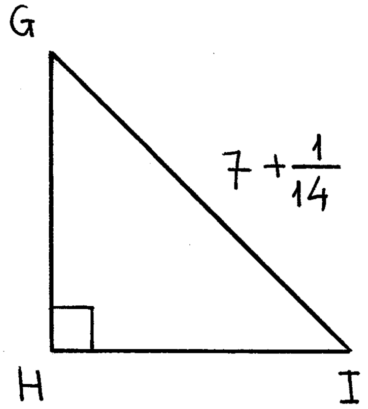
In questo articolo si è cercato di attenersi all'uso di Bartoli.

Su alcune figure sono state aggiunte lettere non presenti negli originali e tutto ciò allo scopo di chiarire meglio la loro natura.

- -

Ipotenusa di un triangolo rettangolo isoscele

Un triangolo rettangolo isoscele ha l'ipotenusa GI lunga (7 + 1/14) braccia. Deve essere calcolata la lunghezza di entrambi i cateti.



La procedura impiegata da Bartoli contiene i seguenti passi:

* Moltiplicare la lunghezza dell'ipotenusa per se stessa: $(7 + 1/14)^2 \approx 50$.
* Dividere per 2: $50 : 2 = 25$.

*	Estrarre la radice quadrata:	$\sqrt{(25)} = 5$ braccia, lunghezza dei cateti GH e HI.

La procedura è corretta perché	$GI^2 = GH^2 + HI^2 = 2*GH^2$.

Bartoli affronta anche il problema opposto: conoscendo la lunghezza dei due cateti (5 braccia), calcolare quella dell'ipotenusa GI:

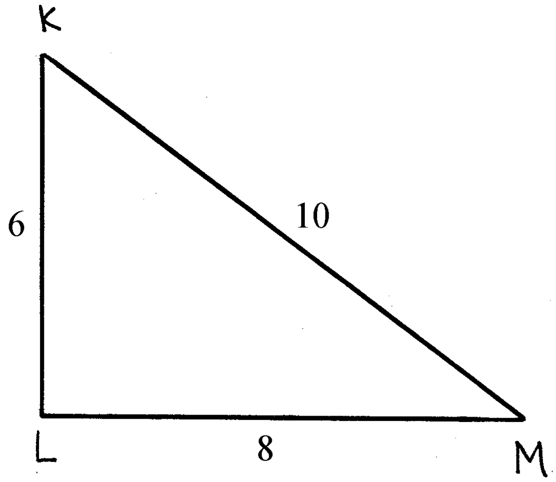
$$GI = \sqrt{(GH^2 + HI^2)} = \sqrt{(5^2 + 5^2)} \approx 7{,}071 \approx 7 + 1/14 \text{ braccia.}$$

<u>Triangolo rettangolo con lati proporzionali</u>

È data la lunghezza di un lato. Bartoli distingue due casi:

* la lunghezza è un numero *pari*;
* la lunghezza è un numero *dispari*.

Nel *primo caso* Bartoli presenta l'esempio di un triangolo di cui è nota la lunghezza del cateto più corto: 6 braccia.



La procedura impiegata per calcolare le lunghezze del secondo cateto e dell'ipotenusa comprende i seguenti passi:

* Dividere per 2 la lunghezza del cateto noto:	$6 : 2 = 3$.
* Moltiplicare per se stesso:	$3*3 = 9$.
* Sottrarre 1:	$9 – 1 = 8$ braccia, lunghezza del cateto maggiore LM.
* Sommare 2 all'ultimo numero:	$8 + 2 = 10$ braccia, lunghezza dell'ipotenusa KM.

Tutti i lati del triangolo hanno lunghezze espresse da numeri *pari* perché esse formano una terna *derivata* da quella *primitiva* 3-4-5.

Chiamando *c* il cateto minore KL, *k* quello maggiore LM e *i* l'ipotenusa KM, il metodo di Bartoli è sintetizzato con le formule che seguono:

$$k = (c/2)^2 – 1$$
$$i = k + 2 = [(c/2)^2 – 1] + 2 = (c/2)^2 + 1.$$

Le due formule sono state attribuite a Platone.

Bartoli prosegue con i problemi inversi relativi ai calcoli delle lunghezze dei due cateti:

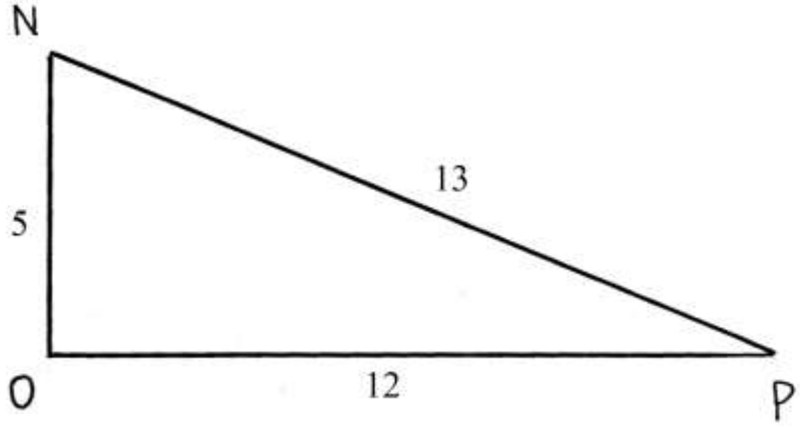
* Conoscendo le lunghezze dell'ipotenusa e del cateto minore (KL), quella del cateto maggiore (LM) è data da:

$LM = \sqrt{(KM^2 - KL^2)} = \sqrt{(10^2 - 6^2)} = \sqrt{(64)} = 8$ braccia.

* Invece, conoscendo le lunghezze dell'ipotenusa e del cateto maggiore, quella del cateto minore KL è:

$KL = \sqrt{(KM^2 - LM^2)} = \sqrt{(10^2 - 8^2)} = \sqrt{(36)} = 6$ braccia.

Il *secondo caso* è quello di un triangolo rettangolo che ha il cateto più corto, ON, lungo 5 braccia e cioè un numero *dispari*:



La procedura utilizzata da Bartoli per calcolare le lunghezze del cateto maggiore OP e dell'ipotenusa NP prevede i seguenti passi:

* Moltiplicare la lunghezza del cateto ON per se stessa: 5*5 = 25.
* Sottrarre 1: 25 – 1 = 24.
* Dividere per 2: 24:2 = 12 braccia, lunghezza del cateto maggiore OP.
* Sommare 1: 12 + 1 = 13 braccia, lunghezza dell'ipotenusa NP.

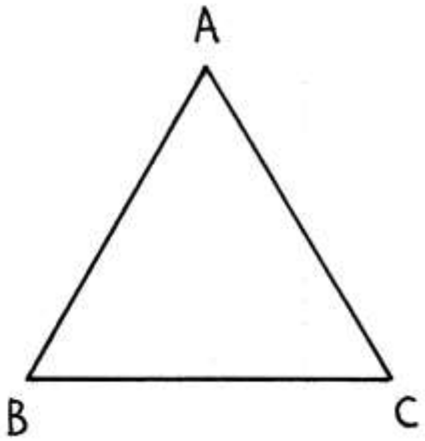
In questo caso, Bartoli ha applicato – senza citarle – le formule attribuite a Pitagora: *c* è la lunghezza del cateto minore ON, *k* quella del cateto maggiore OP e *i* quella dell'ipotenusa NP. Le formule sono:

$k = (c^2 - 1)/2$

$i = k + 1 = [(c^2 - 1)/2] + 1.$

<u>Triangolo equilatero</u>

Il triangolo equilatero ABC ha lati lunghi 6 braccia:



Bartoli calcola l'area del triangolo equilatero applicando, senza citarla, la formula approssimata di Erone:

$\text{Area} \approx 13/30 * \text{lato}^2 \approx 13/30 * 6^2 \approx 15{,}6 \text{ braccia}^2$ (che l'Autore scrive nella sua consueta forma "15 3/5").

Egli espone poi il problema opposto: conoscendo l'area del triangolo – 15 3/5 braccia^2 – ricavare la lunghezza del lato e utilizza la formula inversa:

$\text{lato} \approx \sqrt{(30/13 * \text{Area})} \approx \sqrt{(30/13 * 15{,}6)} = 6$ braccia.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Lo stesso triangolo equilatero offre lo spunto per il calcolo dell'altezza AD: sulla base della formula approssimata di Erone già citata, Bartoli fissa in 13/15 ($\approx 0{,}8(66)$) il rapporto fra le lunghezze dell'altezza e del lato:

$AD \approx 13/15 * BC \approx 13/15 * 6 \approx 5{,}2$ braccia (5 1/5 per Bartoli).

Come è noto l'esatto rapporto fra le lunghezze dell'altezza e di un lato del triangolo equilatero è: $\text{altezza}/\text{lato} = (\sqrt{3})/2 \approx 0{,}866025$, che è un valore vicino a quello fissato da Erone, con una differenza: il numero di Erone è *periodico* mentre questo ultimo è *irrazionale* perché lo è $\sqrt{3}$.

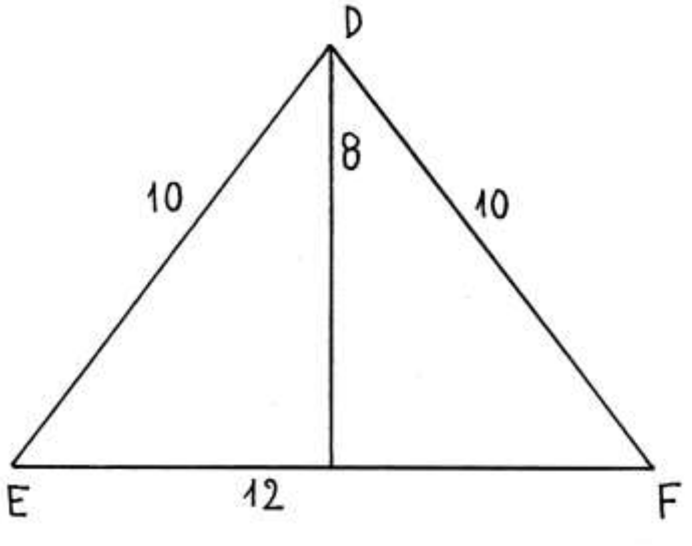
Viene poi proposto un altro problema inverso: è nota la lunghezza dell'altezza e si desidera ricavare quella del lato: Bartoli risolve in maniera semplice con la formula

$\text{lato} \approx \text{altezza} * 15/13$.

In questo ultimo problema inverso sembra di vedere traccia delle *ragioni* esposte dai maestri d'abaco toscani del Tre-Quattrocento nei loro numerosi trattati.

Triangolo isoscele

Un triangolo isoscele ha le dimensioni riportate sulla figura:



L'altezza *h* (la *linea a piombo* secondo Bartoli) non è nota e deve calcolata con il teorema di Pitagora:

$h = \sqrt{(ED^2 - (EF/2)^2)} = \sqrt{(10^2 - (12/2)^2)} = \sqrt{(100 - 36)} = 8$ braccia.

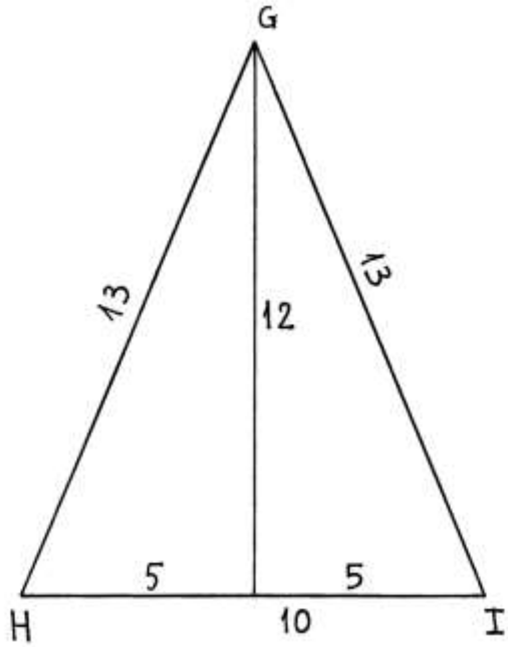
L'area del triangolo (il suo *spazzo* secondo Bartoli) è:

$\text{Area} = \text{altezza} * (\text{base}/2) = 8 * (12/2) = 48 \text{ braccia}^2$.

L'altezza scompone il triangolo isoscele in due triangoli rettangoli con lati di lunghezze 6-8-10 braccia, formanti una terna derivata da quella primitiva 3-4-5.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Un secondo triangolo isoscele ha la base lunga 10 braccia e i due lati inclinati sono 13 braccia:



Occorre ricavare la lunghezza dell'altezza relativa al lato HI:

altezza = $\sqrt{}(GH^2 – (HI/2)^2) = \sqrt{}(13^2 – 5^2)$ = 12 braccia.

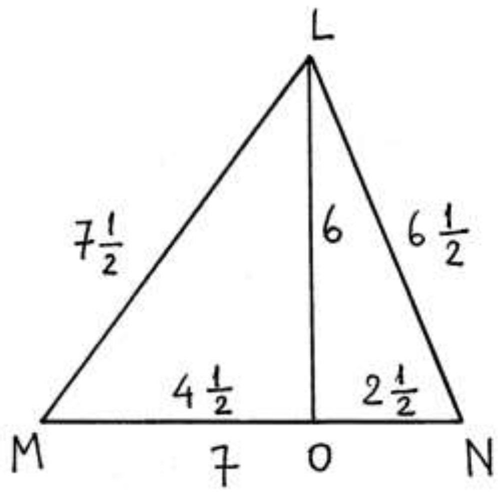
L'area del triangolo isoscele è:

Area = altezza * (base/2) = 12 * (10/2) = 60 braccia^2.

L'altezza relativa alla base HI divide GHI in due triangoli rettangoli con lati lunghi 5-12-13 braccia: questi numeri formano una terna primitiva.

<u>Triangolo scaleno</u>

Bartoli affronta poi un particolare triangolo scaleno:



Per ricavare l'altezza LO Bartoli usa una procedura che, pur senza citarlo, applica la formula di Erone per calcolare le lunghezze delle proiezioni dei lati LM e LN sulla base MN, che sono rispettivamente i segmenti MO e NO. Ecco i suoi passi:

* moltiplicare per se stessa la lunghezza di LN: (6 + ½)*(6 + ½) = 42,25 (Bartoli arrotonda a 42).

* Moltiplicare per se stessa la lunghezza di LM: $(7 + ½)*(7 + ½) = 56{,}25$ (Bartoli approssima a 56).
* Moltiplicare per se stessa la lunghezza della base MN: $7 * 7 = 49$.
* Sommare gli ultimi due quadrati: $56{,}25 + 49 = 105{,}25$ (per Bartoli 105).
* Sottrarre il quadrato di LN: $105{,}25 – 42{,}25 = 63$ (63 anche per Bartoli).
* Dividere per 2: $63 : 2 = 31{,}5$.
* Dividere per la lunghezza della base MN: $31{,}5 : 7 = 4{,}5$ braccia (per Bartoli è 4 ½ braccia), lunghezza della proiezione MO.

La procedura è sintetizzabile nella formula che segue:

$MO = (LM^2 + MN^2 – LN^2)/(2 * MN)$, che è la formula di Erone.

Nota: ulteriori e più dettagliate informazioni sull'opera del matematico e ingegnere egizio Erone, vissuto a Alessandria d'Egitto, nel I secolo d.C., possono essere reperite consultando l'articolo erone.pdf, disponibile su questo stesso sito www.geometriapratica.it .

L'altezza LO è calcolata applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo MLO:

$LO = \sqrt{(LM^2 – MO^2)} = \sqrt{(7{,}5^2 – 4{,}5^2)} = 6$ braccia.

Invece di ricavare la lunghezza della proiezione NO per semplice sottrazione

$NO = MN – MO = 7 – 4{,}5 = 2{,}5$ braccia Bartoli propone una seconda procedura per calcolare NO che è riassunta nella formula che segue:

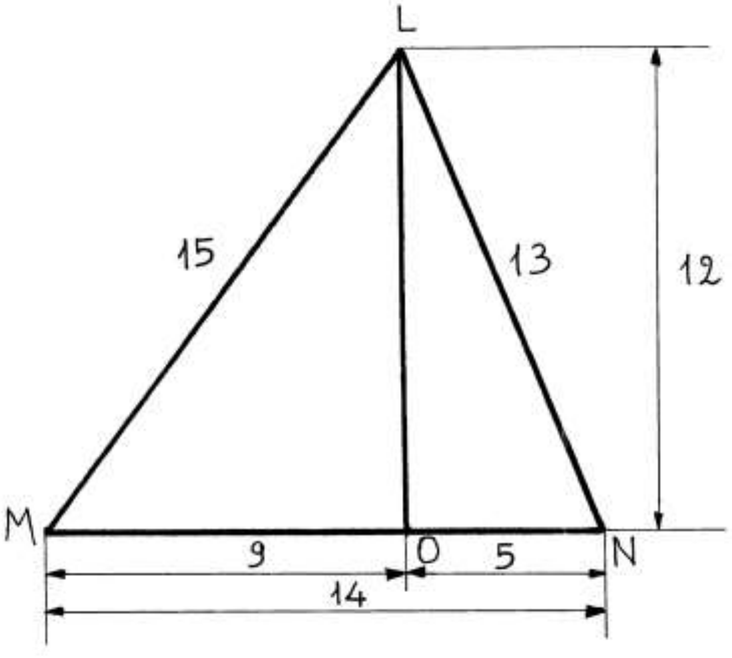
$NO = (LN^2 + MN^2 – LM^2)/(2 * MN) = (6{,}5^2 + 7^2 – 7{,}5^2)/(2 * 7) = 2{,}5$ braccia.

Con questo nuovo dato, Bartoli calcola di nuovo l'altezza LO applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo LON.

Infine, calcola l'area dell'intero LMN e dei due triangoli rettangoli MLO e LON.

%%%%%%%%%%%%%%%

Il triangolo considerato da Bartoli deriva dal classico triangolo 13-14-15 studiato da Erone e, dopo di lui, da molti altri geometri.



Il triangolo di Bartoli ha le lunghezze dei lati che sono la *metà* di quelle dei corrispondenti lati del triangolo 13-14-15.

- APPROFONDIMENTO -

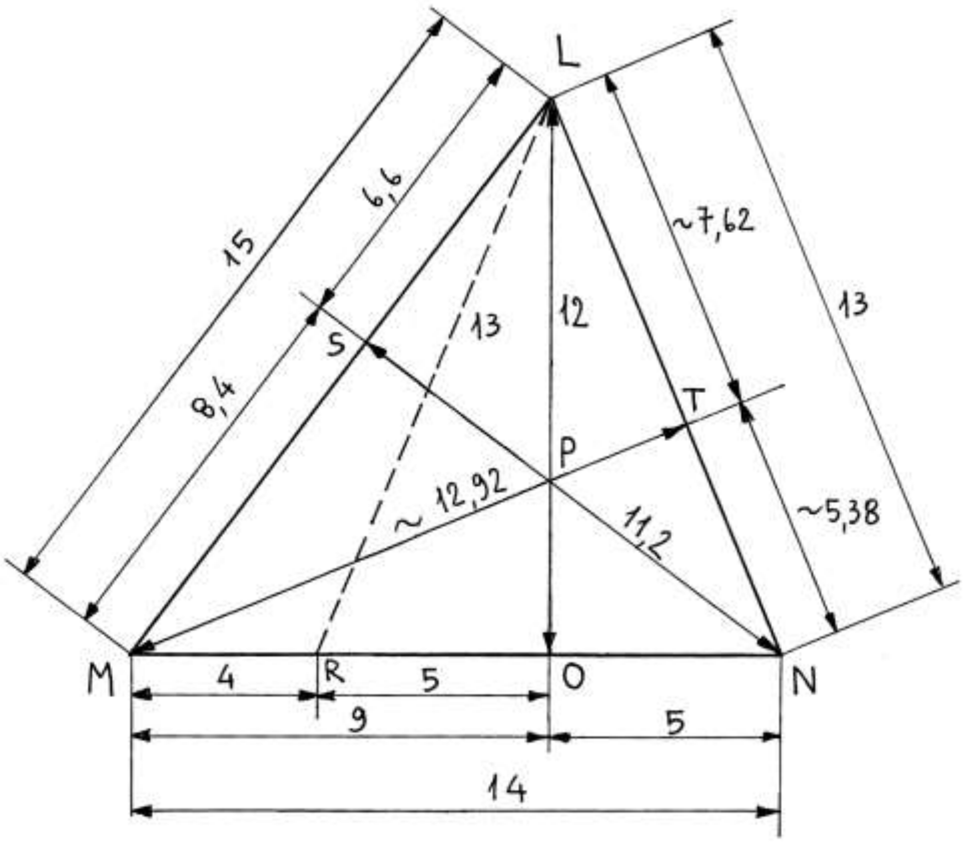
Il triangolo 13-14-15

Dopo il matematico e ingegnere egizio Erone di Alessandria (I secolo d.C.), questo particolare triangolo è stato studiato da:

- Varrone.
- I Gromatici *Marcus Iunius Nipsus* (II secolo d.C.) e Epafrodito (II – III secolo).
- Boezio.
- Forse Gerberto d'Aurillac (Papa Silvestro II, 940 circa – 1003).
- Leonardo Fibonacci (*Practica Geometrie)*.
- Piero della Francesca, nel *Trattato d'abaco* (fogli 80 *recto*, 80 *verso*, 81 *recto*-a, 81 *verso*, 82 *recto*).
- Giorgio Valla (1447 – 1500) nel "*De expetendis et fugiendis rebus opus*", pubblicato a Venezia nel 1501.
- Niccolò Fontana, detto Tartaglia (circa 1499 – 1557).

La costanza nel tempo e presso numerosi e importanti geometri dell'uso di questo triangolo può essere spiegata con le sue interessanti proprietà (lunghezze e aree rappresentate da numeri interi) che evitavano il ricorso a complesse operazioni quali l'estrazione di radici quadrate, semplificando misurazioni e calcoli.

La figura che segue contiene il triangolo 13-14-15 già visto e con tutte tracciate le tre altezze che si intersecano nell'*ortocentro* P:



Le tre altezze sono lunghe:

* LO = 12.
* NS = 11,2.
* MT ≈ 12,92.

La terza altezza non è un numero intero né un numero razionale perché le lunghezze dei segmenti LT e TN non sono numeri razionali. Infatti, applicando le formule di Erone per calcolare la lunghezza della proiezione di un lato sulla base MN si ha:

$LT = (ML^2 + LN^2 – MN^2)/(2 * LN) = (15^2 + 13^2 – 14^2)/(2*13) = 198/26 \approx 7,615$, arrotondato a 7,62.

$TN = (MN^2 + LN^2 – ML^2)/(2 * LN) = (14^2 + 13^2 – 15^2)/(2*13) = 140/26 \approx 5,384$, arrotondato a 5,38.

Applicando il teorema di Pitagora al triangolo MLT o al triangolo MNT per ricavare la lunghezza di MT si ottiene il numero non razionale 12,92.

La disposizione di questo triangolo con la base orizzontale MN lunga 14 unità è quella più comune, tanto che il triangolo potrebbe essere definito con l’espressione (12)-13-14-15, con il primo numero, 12, scritto fra parentesi tonde, che misura l’altezza rispetto alla base MN. Questa quaterna contiene quattro numeri interi che formano una perfetta progressione aritmetica di ragione *uno*.

L’altezza LO scompone LMN in due triangoli rettangoli:

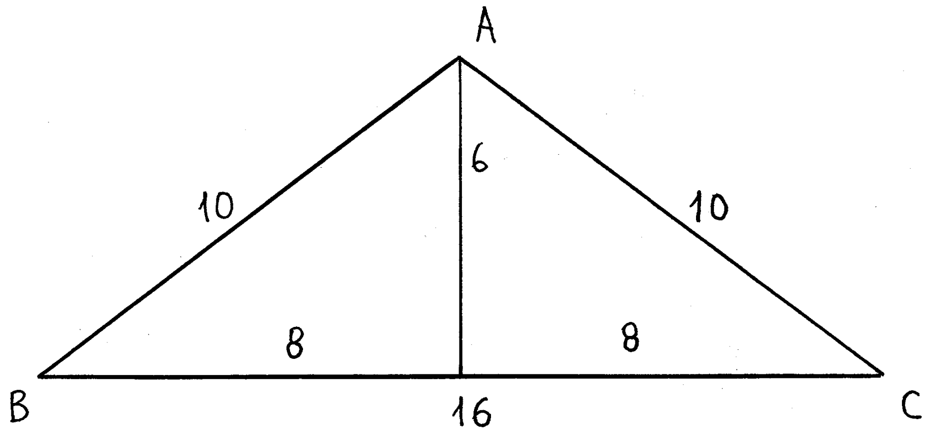
* LMO che ha lati lunghi 9, 12 e 15 unità, numeri che formano una terna derivata dalla terna primitiva 3-4-5 moltiplicata per *tre*.
* LNO che ha lati lunghi 5, 12 e 13 unità, numeri che formano una terna primitiva.

Infine, nel grafico è fissato un punto, R, a distanza 5 unità da O: tracciando il segmento LR (che è lungo 13 unità), all’interno di LMN viene creato il triangolo isoscele LRN.

- -

Triangolo isoscele

Il triangolo presentato nella figura che segue è isoscele:



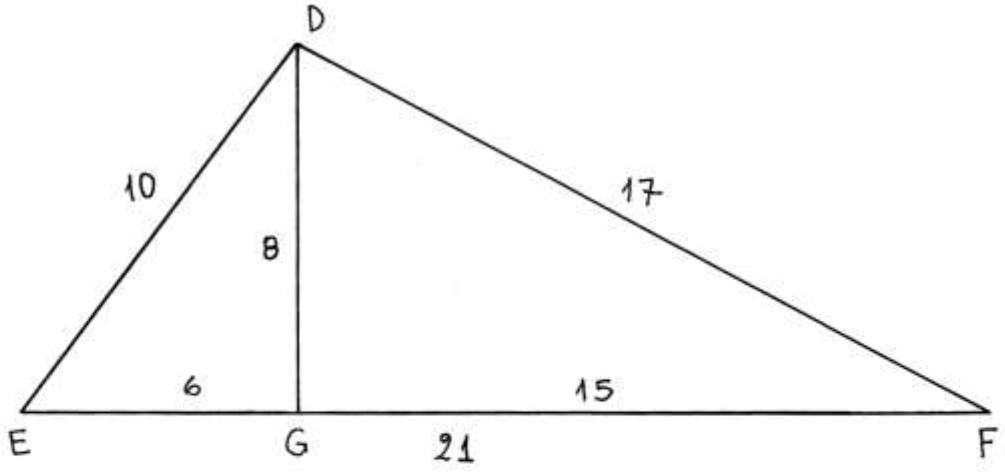
L’altezza abbassata dal vertice A, *h*, è correttamente calcolata:

$h = \sqrt{(AB^2 – (BC/2)^2)} = \sqrt{(10^2 – 8^2)} = 6$ braccia.

Questa altezza divide ABC in due triangoli rettangoli di uguali dimensioni: 6-8-10 che formano una terna *derivata* da quella *primitiva* 3-4-5 moltiplicando le lunghezze per 2.

Triangolo scaleno 10-17-21

Il triangolo mostrato nella figura che segue è scaleno, contiene tre angoli acuti e non è rettangolo.



Bartoli applica di nuovo la formula di Erone per calcolare la lunghezza della proiezione GF:

$GF = (DF^2 + EF^2 – DE^2)/(2 * EF) = (17^2 + 21^2 – 10^2)/(2*21) = 15$ braccia.

L'altezza DG è calcolata applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo DFG:

$DG = \sqrt{}(DF^2 – GF^2) = \sqrt{}(17^2 – 15^2 = 8$ braccia.

L'area di DEF è calcolata correttamente:

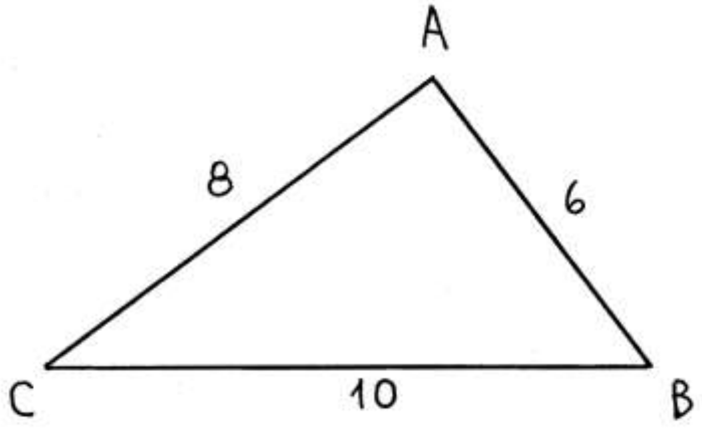
Area = DG * (EF/2) = 8 * 21/2 = 84 braccia^2.

L'altezza DG divide DEF in due triangoli rettangoli:

* DEG ha lati lunghi secondo la terna derivata 6-8-10.
* DFG ha lati lunghi 8-15-17 che formano una terna primitiva.

Misura di un triangolo generico

Bartoli usa il triangolo 6-8-10, più volte utilizzato in precedenza, per descrivere un metodo per il calcolo dell'area di qualsiasi triangolo.



Il metodo impiegato è la formula di Erone per determinare l'area di un triangolo: di nuovo, Bartoli non cita la fonte (Erone).

Ecco la procedura:

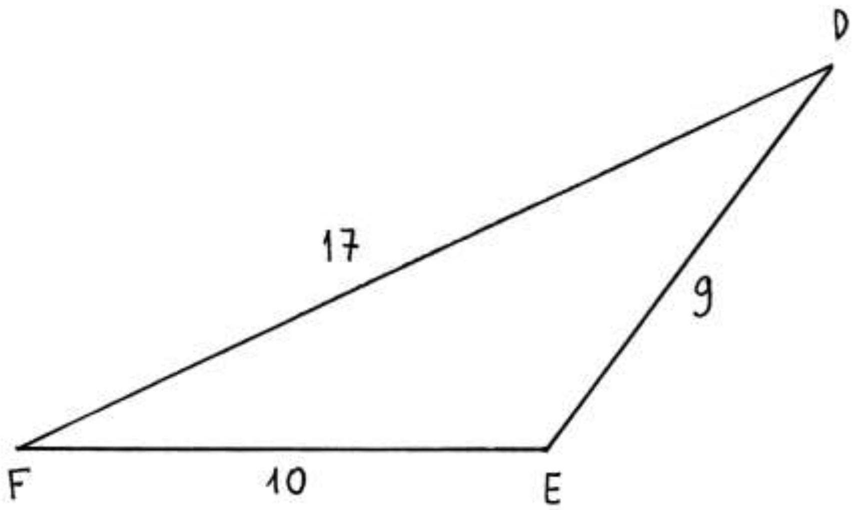
* Sommare le lunghezze dei tre lati:	*perimetro* = 2**p* = 6 + 8 + 10 = 24.
* Dividere per 2:	*semiperimetro* = *p* = 24/2 = 12.
* Sottrarre da *p* la lunghezza di AB:	12 – 6 = 6.
* Sottrarre da *p* la lunghezza di AC:	12 – 8 = 4.
* Sottrarre da *p* la lunghezza di CB:	12 – 10 = 2.

*	Moltiplicare 12 per 6 per 4 per 2:	12*6*4*2 = 576.
*	Estrarre la radice quadrata:	√576 = 24 braccia^2, area del triangolo ABC.

Chiamiamo AB = a, AC =b e CB = c .
La formula di Erone è:
Area = √[p*(p – a)*(p – b)*(p – c)] che corrisponde alla procedura di Bartoli.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

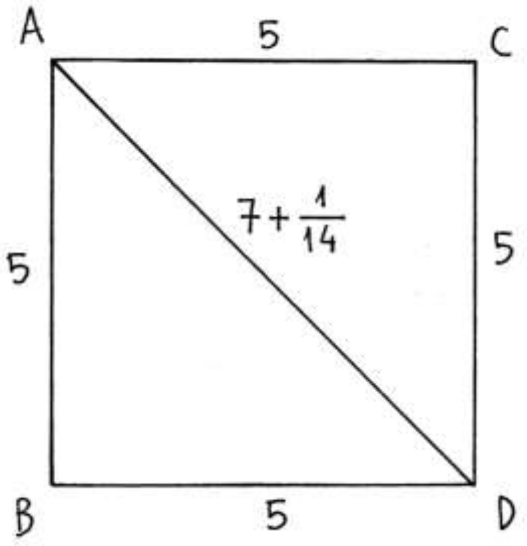
Per chiarire meglio la procedura impiegata, Bartoli presenta il caso di un triangolo scaleno ottusangolo (nel vertice E):



La procedura contiene i seguenti passi:
*	Sommare le lunghezze dei tre lati:	*2*p* = 9 + 10 + 17 = 36.
*	Dividere per 2:	*p* = 36/2 = 18.
*	Sottrarre da *p* la lunghezza di DE:	18 – 9 = 9.
*	Sottrarre da *p* la lunghezza di FE:	18 – 10 = 8.
*	Sottrarre da *p* la lunghezza di FD:	18 – 17 = 1.
*	Moltiplicare gli ultimi *quattro* numeri:	18 * 9 * 8 * 1 = 1296.
*	Estrarre la radice quadrata:	√1296 = 36 braccia^2, area del triangolo DEF.

Area di un quadrato

Il quadrato ABCD ha lati lunghi 5 braccia:

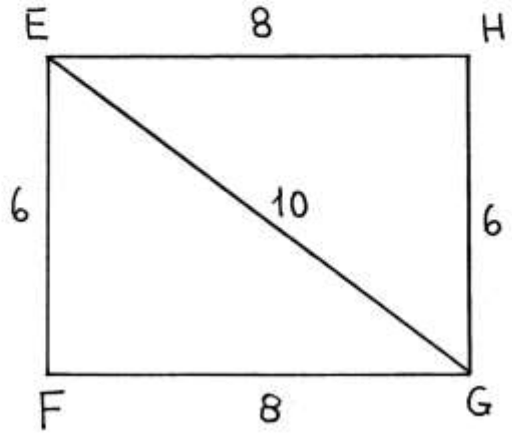


Bartoli calcola la lunghezza della linea *schiancianiana* (così chiama la *diagonale*) con la formula:

$AD = \sqrt{(AB^2 + BD^2)} = \sqrt{(5^2 + 5^2)} = \sqrt{50} \approx 7{,}071$ braccia che Bartoli arrotonda a (7 + 1/14).

Area di un rettangolo

La figura che segue è un rettangolo che Bartoli chiama *quadrilungo*.



L'area è calcolata correttamente:

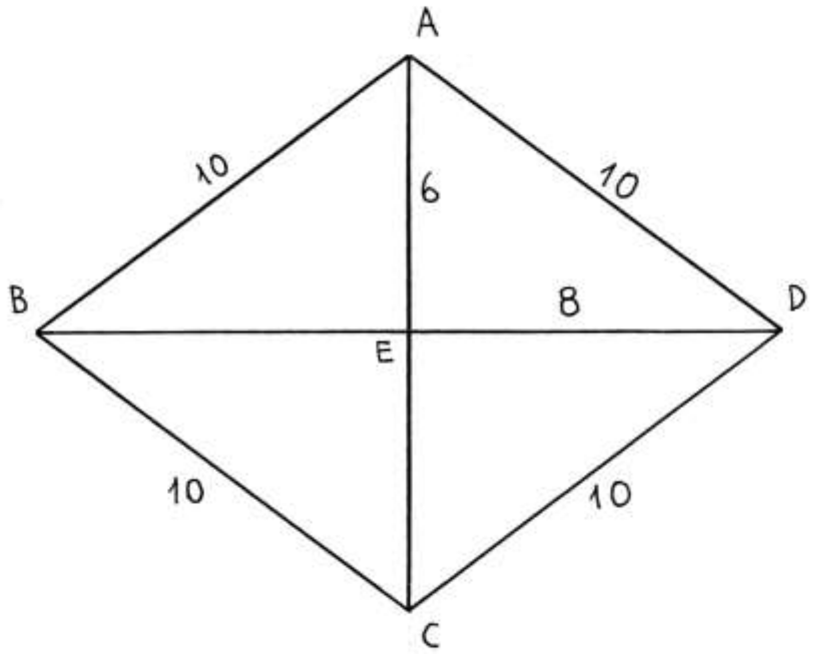
Area = EF * FG = 6 * 8 = 48 braccia^2.

La lunghezza della diagonale è:

$EG = \sqrt{(EF^2 + FG^2)} = \sqrt{(6^2 + 8^2)} = 10$ braccia.

Area di un rombo

Il rombo (o *mandorla* secondo Bartoli) ha le dimensioni scritte sui lati:



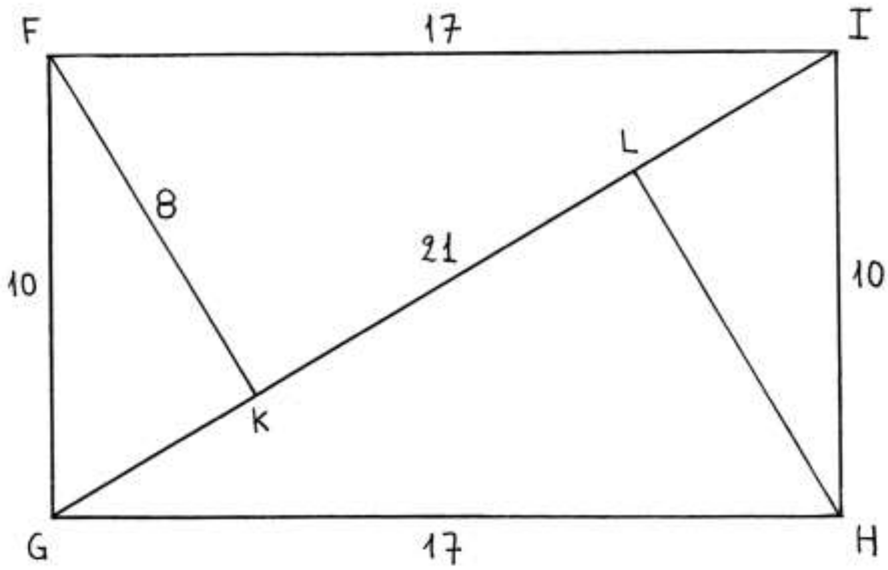
È opportuno notare che il rombo è formato da quattro triangoli rettangoli con lati lunghi 6-8-10: riappare questa terna derivata.

L'area è correttamente calcolata moltiplicando le diagonali e dividendo per 2:

Area = BD * AC/2 = 16 * 12/2 = 16 * 6 = 96 braccia^2.

Area di un rettangolo

Un campo ha la forma e le dimensioni riportate sulla figura:



Bartoli chiama la figura *romboide ammandorlato*: nel successivo APPROFONDIMENTO è spiegato il suo errore.

L'Autore traccia la diagonale GI e dai vertici F e H conduce le perpendicolari ad essa: sono FK e HL.

Calcola poi l’area del cosiddetto rettangolo moltiplicando la lunghezza di GI per quella di FK:

Area = GI * FK = 21*8 = 168 braccia^2.

Il risultato è in conflitto con l’ovvia soluzione che sarebbe:

Area = FG * GH = 10 * 17 = 170 braccia^2.

Ricostruiamo la situazione. La diagonale GI di figura è lunga:

$GI = \sqrt{(GH^2 + HI^2)} = \sqrt{(17^2 + 10^2)} = \sqrt{389} \approx 19{,}72$ braccia invece delle 21 indicate da Bartoli.

Conoscendo l’area del rettangolo, 170 braccia^2, è ora possibile ricavare la lunghezza teorica di FK:

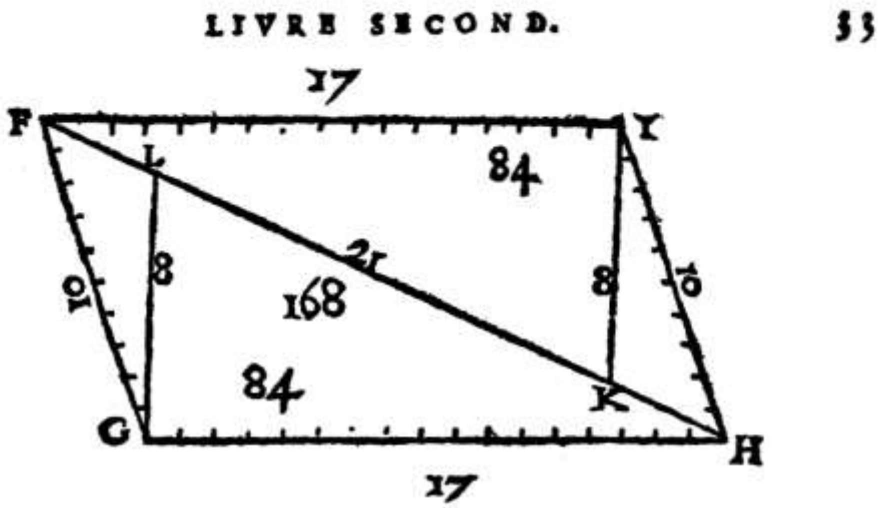
FK = Area/GI ≈ 170/19,72 ≈ 8,62 braccia, invece delle 8 braccia indicate da Bartoli.

- APPROFONDIMENTO -

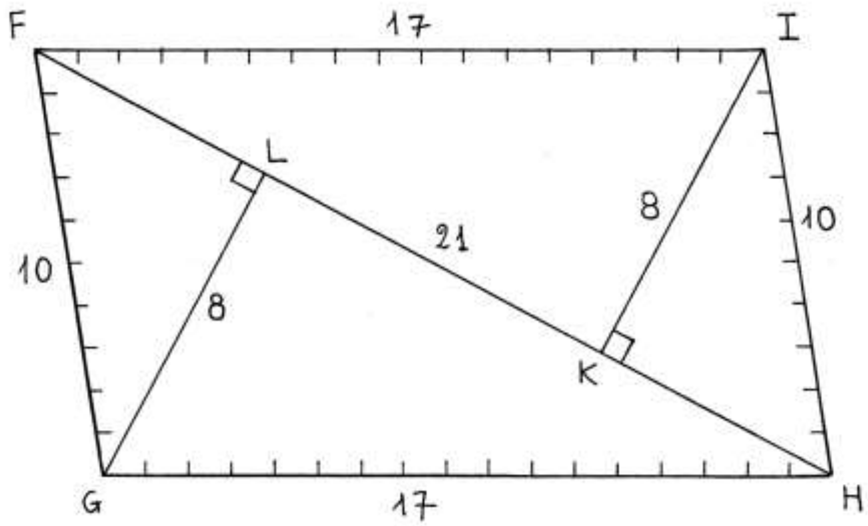
L’origine dell’errore di Bartoli

La fonte di Bartoli riguardo a questo quadrilatero è il solito trattato di Oronce Finé.

Nel testo originale francese, la figura è un *parallelogramma* e non un rettangolo:



Lo schema di Finé è comunque errato perché i segmenti GL e IK non sono disegnati perpendicolari rispetto alla diagonale FH: il grafico che segue ricostruisce la figura corretta:



La diagonale maggiore FH è ora lunga esattamente 21 unità.

Le dimensioni usate da Finé sono espresse in *pertiche*: nel Medioevo e nel Rinascimento in Francia la pertica era un'unità di misura della lunghezza equivalente a 7,185 metri. Un altro errore commesso da Bartoli riguardo a questo ipotetico *campo* è quello di aver convertito le lunghezze espresse in pertiche in lunghezze misurate in braccia fiorentine da panno per così dire *alla pari*:

1 pertica ↔ 1 braccio fiorentino da panno e, in numeri,

7,185 metri ↔ 0,583626 metri.

Il rapporto fra le due unità di misura è:

7,185/0,583626 ≈ 12,31.

Le dimensioni di un *campo* sono correttamente espresse in pertiche e non lo sono se esso è misurato in braccia. Usando questa ultima unità, Bartoli ha ridotto le lunghezze di 12,31 volte e la superficie di ≈ $12{,}31^2$ ≈ 151,56 volte! Tutto ciò dimostra lo scarso senso pratico di cui era dotato il nostro Autore.

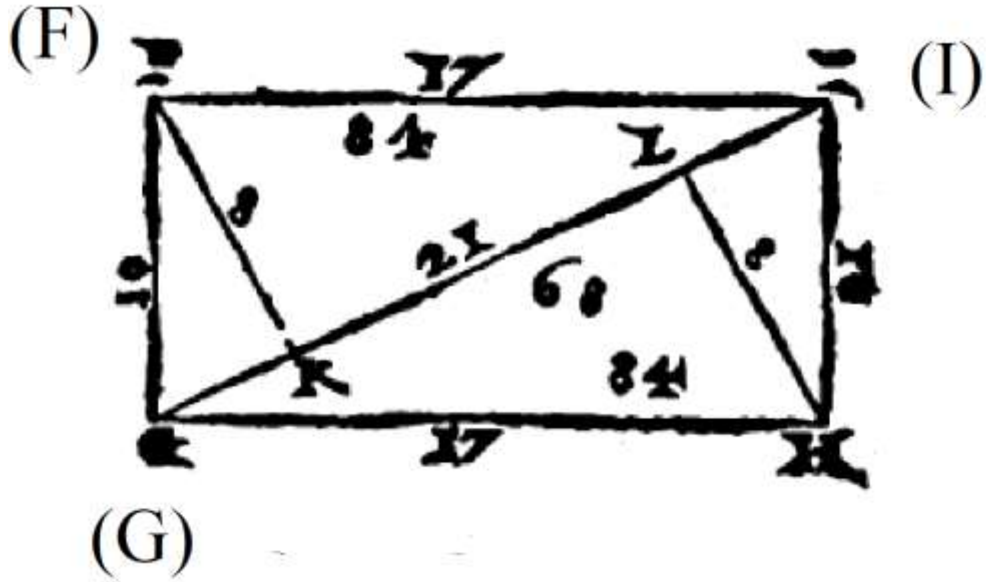
Bartoli avrebbe potuto convertire le pertiche di Finé in canne o pertiche toscane. La *canna* usata a Firenze e in altri Comuni della Toscana medievale poteva avere due lunghezze:

* La *canna mercantile* era lunga 4 braccia da panno e cioè 2,3345 m.
* La *canna agrimensoria* era lunga 5 braccia da panno ed era chiamata *pertica*: la sua lunghezza era 2,91813 m.

Il rapporto fra le lunghezze delle due pertiche era:

pertica francese/pertica toscana = 7,185/2,91813 ≈ 2,46.

Anche nella traduzione italiana del trattato geometrico di Finé, Bartoli riproduce lo stesso errore contenuto nel suo libro:



- -

Torniamo a esaminare lo schema corretto del parallelogramma.

La diagonale maggiore FH divide il parallelogramma in due triangoli scaleni di uguali dimensioni: GFH e FIH.

GL è una delle altezze del triangolo GFH, come IH lo è di FIH. GL scompone GFH in due triangoli rettangoli: GFL e GLH.

Il cateto FL è lungo

$FL = \sqrt{(GF^2 - GL^2)} = \sqrt{(10^2 - 8^2)} = 6$ braccia.

Il triangolo GFL ha lati con lunghezze che formano la terna derivata 6-8-10.

Il segmento LH è il cateto maggiore del triangolo rettangolo GLH ed è lungo:

$LH = FH - FL = 21 - 6 = 15$ braccia.

Anche il triangolo GLH è rettangolo e i suoi lati sono lunghi 8, 15 e 17: questi numeri formano una terna primitiva.

Analoghe considerazioni valgono per il triangolo rettangolo FIH.

L'area del triangolo rettangolo GFH è:

Area $_{GFH}$ = GL * FH/2 = 8 * 21/2 = 84 braccia^2.

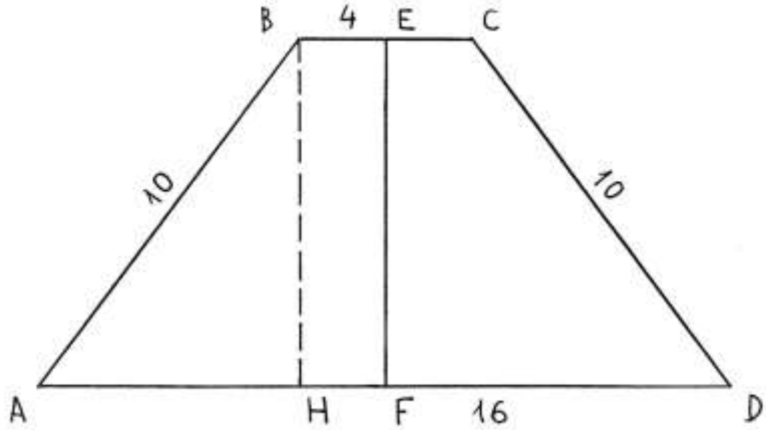
L'area del parallelogramma GFIH è:

Area GFIH = 2 * Area $_{GFH}$ = 2 * 84 = 168 braccia^2.

Ecco spiegata l'origine dell'area calcolata da Bartoli in 168 braccia^2.

Trapezio isoscele

Un campo ha la forma di un trapezio isoscele i cui lati hanno le dimensioni scritte sulla figura:



Per calcolare la sua area occorre determinare la lunghezza dell'altezza EF.

Dal punto B abbassare la perpendicolare BH alla base maggiore AD.

Il triangolo ABH è rettangolo e il cateto AH è lungo:

AH = (AD – BC)2 = (16 – 4)/2 = 6 braccia.

Il cateto BH è lungo:

BH = $\sqrt{}$(AB^2 – AH^2) = $\sqrt{}$(100 – 36) = 8 braccia.

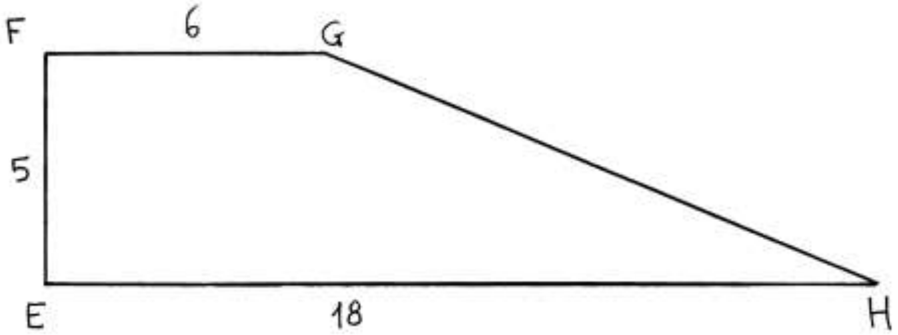
L'altezza EF è lunga quanto BH.

L'area del trapezio è data da:

Area = EF * (AD + BC)/2 = 8 * (16 + 4)/2 = 80 braccia^2.

Trapezio rettangolo

Un campo ha la forma di un trapezio rettangolo:



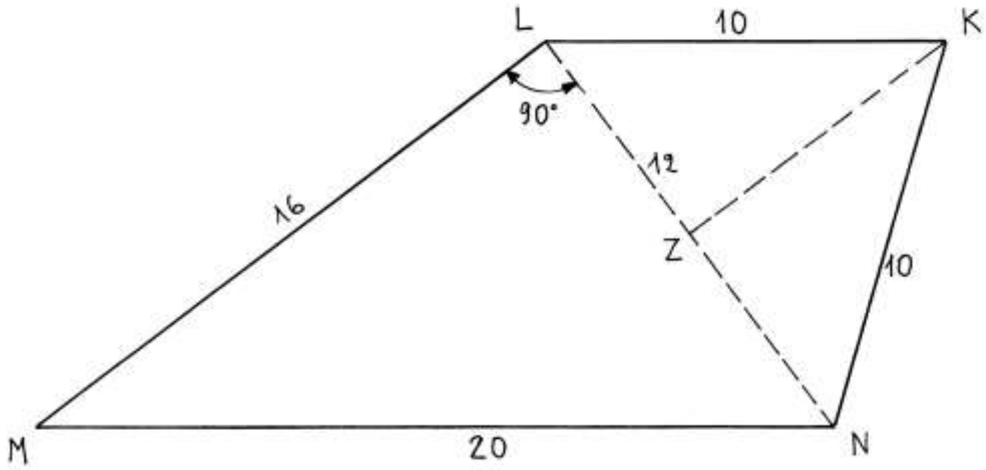
La sua area è calcolata correttamente:

Area = FE * (FG + EH)/2 = 5 * (6 + 18)/2 = 5 * 12 = 60 braccia^2.

Trapezio scaleno

Un campo ha la forma di un trapezio scaleno con due lati *consecutivi* di uguale lunghezza: LK e KN misurano 10 braccia.

Le due basi, LK e MN, sono parallele.



Gli altri due lati sono lunghi 16 e 20 braccia.

Bartoli fornisce pure la lunghezza della diagonale minore LN: 12 braccia. Questo segmento divide il trapezio in due triangoli: MLN e LKN. Il primo è rettangolo e le lunghezze dei suoi lati formano la terna derivata 12-16-20 che è originata dalla terna primitiva 3-4-5.

Bartoli indica le aree dei due triangoli senza specificare i metodi impiegati allo scopo.

L'area di LMN è facilmente calcolabile:

$$\text{Area}_{LMN} = ML * LN/2 = 16 * 12/2 = 96 \text{ braccia}^2.$$

Per calcolare l'area di LKN sono possibili due semplici soluzioni:

* Determinare l'altezza KZ e applicare il teorema di Pitagora.
* Utilizzare la formula di Erone.

Con il primo metodo, basta osservare che il triangolo LKN è *isoscele* e l'altezza KZ divide la base LN in due segmenti di uguale lunghezza: LZ = ZN = 6 braccia, per cui KZ è lunga:

$$KZ = \sqrt{(LK^2 - LZ^2)} = \sqrt{(10^2 - 6^2)} = 8 \text{ braccia}.$$

L'area di LKN è:

$$\text{Area}_{LKN} = KZ * LZ = 8 * 6 = 48 \text{ braccia}^2.$$

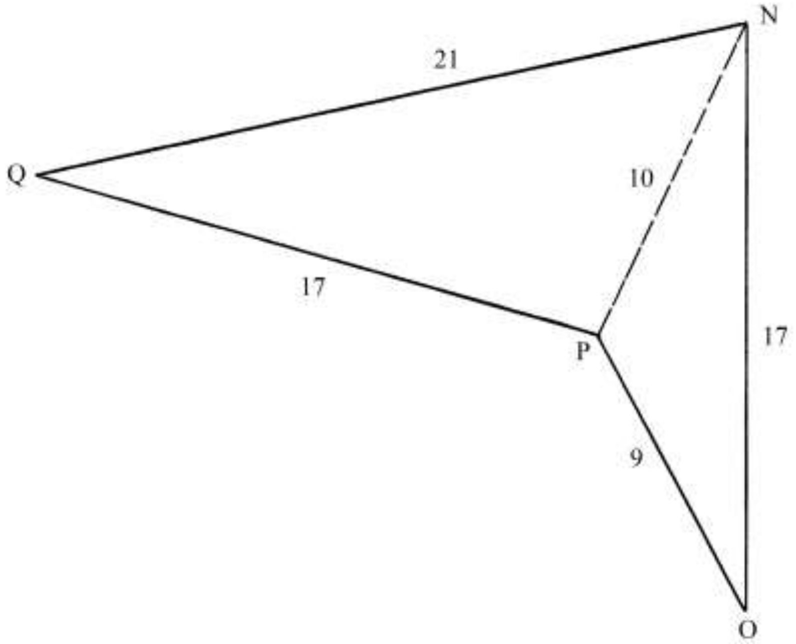
LKN ha superficie uguale alla metà di quella di LMN.

L'area del trapezio è:

$$\text{Area}_{LKNM} = \text{Area}_{LMN} + \text{Area}_{LKN} = 96 + 48 = 144 \text{ braccia}^2.$$

Quadrilatero

Un campo ha la forma irregolare di un quadrilatero che ha due lati (NO e PQ) di uguale lunghezza: essi non sono né consecutivi (con un vertice comune) né adiacenti (con un vertice comune e posizionati sulla stessa retta):



La diagonale minore NP è lunga 10 braccia. Essa divide il quadrilatero in due triangoli scaleni: PQN e PNO.

Bartoli calcola l'area dei due triangoli rimandando al metodo applicato nel caso del triangolo scaleno 6-8-10 e che consiste nell'impiego della formula di Erone.

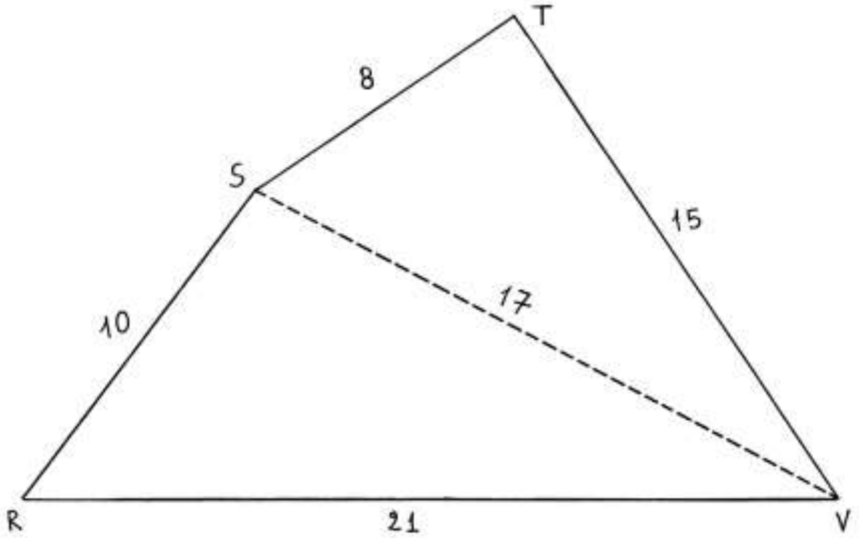
Con l'applicazione di questa formula le aree dei due triangoli sono:

$\text{Area}_{PQN} = 84$ braccia^2 e $\text{Area}_{PNO} = 36$ braccia^2.

L'area dell'intero quadrilatero è 120 braccia^2.

Un altro quadrilatero

Un secondo campo di forma quadrilatera, RSTV, è rappresentato nella figura che segue:



Bartoli fornisce la lunghezza della diagonale minore SV che è 17 braccia. Essa divide il quadrilatero in due triangoli:

* Quello scaleno RSV.
* Quello reattangolo (in T) STV i cui lati hanno lunghezze che formano la terna primitiva 8-15-17.

L'area del triangolo RSV viene calcolata con l'implicita applicazione della formula di Erone:

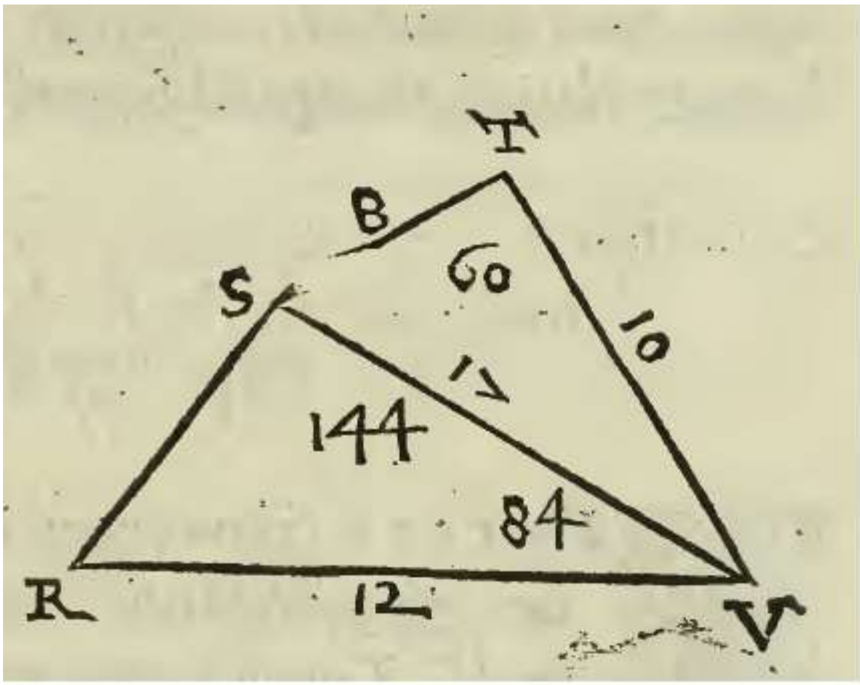
* Calcolo del perimetro: $2*p$ = RS + SV + RV = 10 + 17 + 21 = 48.
* Dividere per 2: p = 48/2 = 24.
* Calcolo dell'area:
  Area $_{RSV}$= $\sqrt{[24*(24-10)*(24-17)*(24-21)]} = \sqrt{(24 * 14 * 7 * 3)} = \sqrt{(7056)} = 84$ braccia^2.

L'area del triangolo rettangolo STV è:

Area $_{STV}$ = ST * TV/2 = 8 * 15/2 = 60 braccia^2.

L'area dell'intero quadrilatero è 144 braccia^2.

Il disegno originale di Bartoli contiene molti errori, quali ad esempio la lunghezza di RV indicata in 12 invece che in 21 braccia e quella di TV scritta 10 invece di 15 braccia:



Misura di campi che hanno forma poligonale con più di 4 lati

Per misurare l'area di un poligono con lati di uguale lunghezza, Bartoli propone una procedura con i seguenti passi:

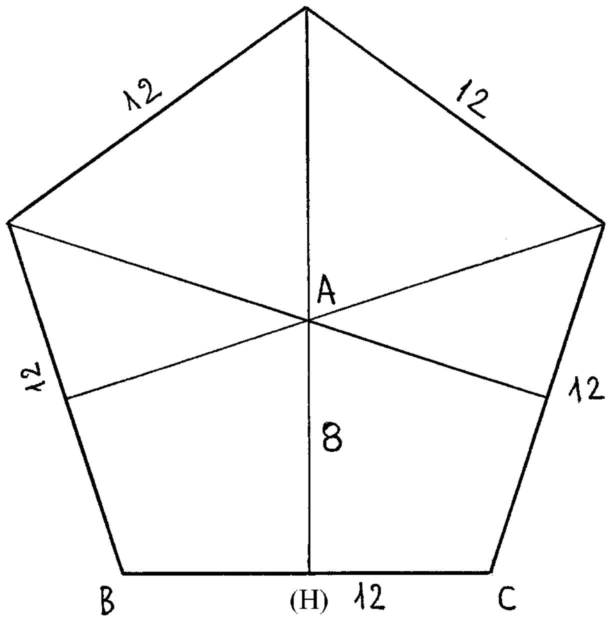
* Determinare il centro della figura.
* Tracciare un apotema dal centro al punto medio di un lato.
* Misurare il perimetro (l'*ambito* secondo Bartoli).
* Moltiplicare metà della lunghezza del perimetro per l'apotema: il risultato è l'area del poligono.

L'autore distingue due casi:

*   Poligoni con numero di lati *pari*: per determinare la posizione del centro è sufficiente tracciare due segmenti che collegano due vertici opposti e la loro intersezione fissa il centro.
*   Poligoni con numero di lati *dispari* (*in caffo* secondo la terminologia di Bartoli): on questo caso occorre disegnare due *altezze* del poligono da due vertici ai punti medi dei lati opposti. Le due altezze si incontrano nel centro del poligono.

<u>Pentagono regolare</u>

Un pentagono ha lati lunghi 12 braccia: il suo perimetro (*ambito* per Bartoli) è 60 braccia.



Il centro A è determinato dall'intersezione delle tre altezze disegnate in figura.
A(H) è un *apotema* del pentagono e Bartoli fissa la sua lunghezza in 8 braccia.

Nota: il punto è racchiuso fra parentesi tonde perché non è presente nel grafico originale; è stato aggiunto perché ritenuto utile.

Per la precisione, l'apotema di unpentagono regolare è dato da:

apotema ≈ 0,688 * lato ≈ 0,688 * 12 ≈ 8,256 braccia.

0,688 è un *numero fisso, f,* caratteristico di questo poligono. Ciascun poligono regolare ne possiede uno diverso. L'*apotema* è il raggio del cerchio inscritto nel poligono.

Un altro numero fisso, F, è usato per calcolare l'area di un poligono regolare con una formula approssimata:

Area = F * lato^2.

Per il pentagono F ≈ 1,72 per cui l'area di questo poligono è:

Area $_{\text{PENTAGONO}}$ ≈ 1,72 * 12^2 ≈ 247,68 braccia^2.

Erone aveva fornito una formula approssimata:

Area $_{\text{PENTAGONO}}$ ≈ 5/3 * lato^2 ≈ 5/3 * 12^2 ≈ 240 braccia^2.

L'are indicata da Bartoli, 240 braccia^2, pare essere stata calcolata con la formula di Erone.

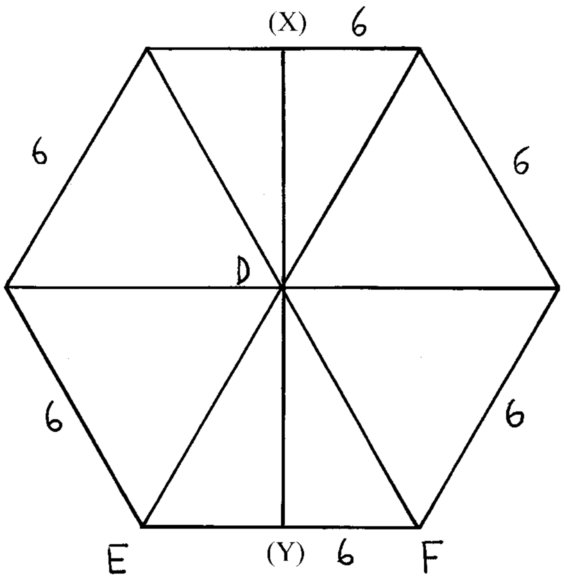
L'Autore può aver ricavato l'apotema A(H) con la formula inversa:

A(H) = 2 * Area/perimetro = 2 * 240/(5 * 12) = 8 braccia, formula che deriva da quella dell'area:

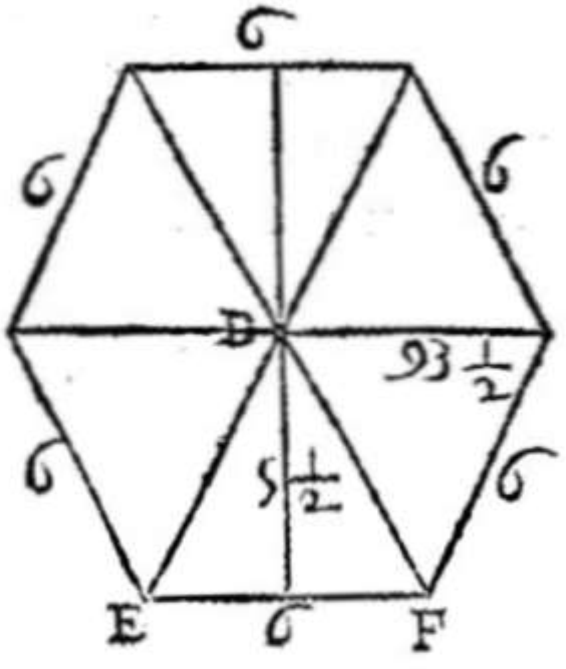
Area $_{\text{PENTAGONO}}$ = apotema * perimetro/2.

Esagono regolare

Un campo ha la forma di un esagono regolare con lati lunghi 6 braccia:



Nello schema, Bartoli ha disegnato due altezze *adiacenti*: (X)D e D(Y). Esse sono due apotemi: quello D(Y) è l'altezza del triangolo equilatero DEF: la sua lunghezza è, secondo l'Autore, uguale a (5 + 1/5) braccia. Nel testo indica questa dimensione mentre in figura scrive (5 + ½):



Accettando il valore del testo, esso può essere stato ottenuto con la formula approssimata

apotema ≈ 13/15 * lato ≈ 13/15 * 6 = 5,2 = 5 * 1/5 braccia.

L'area del triangolo equilatero DEF è:

Area $_{DEF}$ ≈ D(Y) * (EF/2) ≈ 5,2 * 6/2 ≈ 15,6 braccia^2.

L'area dell'intero esagono è:

Area $_{ESAGONO}$ ≈ 6 * Area $_{DEF}$ ≈ 6 * 15,6 ≈ 93,6 braccia^2.

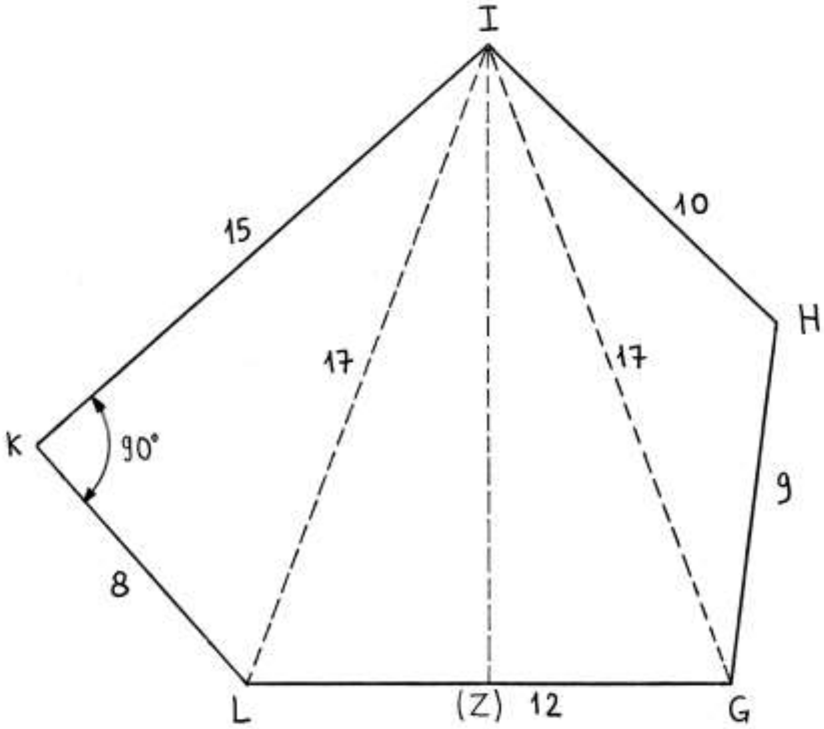
Lo stesso risultato è ottenuto impiegando la formula approssimata di Erone:

Area $_{ESAGONO}$ ≈ 13/5 * lato^2 ≈ 13/5 * 6^2 ≈ 93,6 braccia^2.

Nel testo, Bartoli scrive (93 + 3/5) = 93,6 braccia^2 e sul disegno sbaglia e indica (93 + ½) braccia^2.

Pentagono non regolare

Un campo ha la forma di un pentagono non regolare:



Con l'aiuto delle due diagonali IG e IL, Bartoli lo scompone in *tre* triangoli: i due segmenti hanno uguale lunghezza, 17 braccia.

I tre triangoli generati sono:

* Il triangolo rettangolo IKL che ha lati lunghi 8, 15 e 17 braccia, numeri che formano una terna primitiva.
* Il triangolo isoscele IGL.
* Il triangolo scaleno GHI.

Senza citare alcun metodo, Bartoli fornisce l'area di GHI: 36 braccia^2. Verifichiamo l'eventuale applicazione della formula di Erone:

* Calcolare il perimetro di GHI: $2*p$ = GH + HI + IG = 9 + 10 + 17 = 36.
* Dividere per 2: semiperimetro p = 36/2 = 1\8.
* Applicare la formula di Erone:

Area $_{GHI}$ = √[18*(18 – 9)*(18 – 10)*(18 – 17)] = √(18*9*8*1) = √(1296) = 36 braccia^2.

Bartoli ha usato questa formula.

Per calcolare l'area di IGL occorre determinare l'altezza I(Z):

I(Z) = √(IL^2 – L(Z)^2) = √(17^2 – 6^2) = √(289 – 36) = √(253) ≈ 15,90 braccia.

L'area è:

Area $_{IGL}$ ≈ I(Z) * LG/2 ≈ 15,9 * 12/2 ≈ 95,4 braccia^2. Bartoli indica un'area di 78 braccia^2, calcolando l'altezza I(Z) lunga soltanto 13 braccia (invece delle più corrette 15,90).

L'area di IKL è:

Area $_{IKL}$ = KI * KL/2 = 15 * 8/2 = 60 braccia^2.

L’area del pentagono è:

$$\text{Area } GHIKL = \text{Area}_{GHI} + \text{Area}_{IGL} + \text{Area}_{IKL} = 36 + 95{,}4 + 60 = 191{,}4 \text{ braccia}^2$$ (per Bartoli 174).

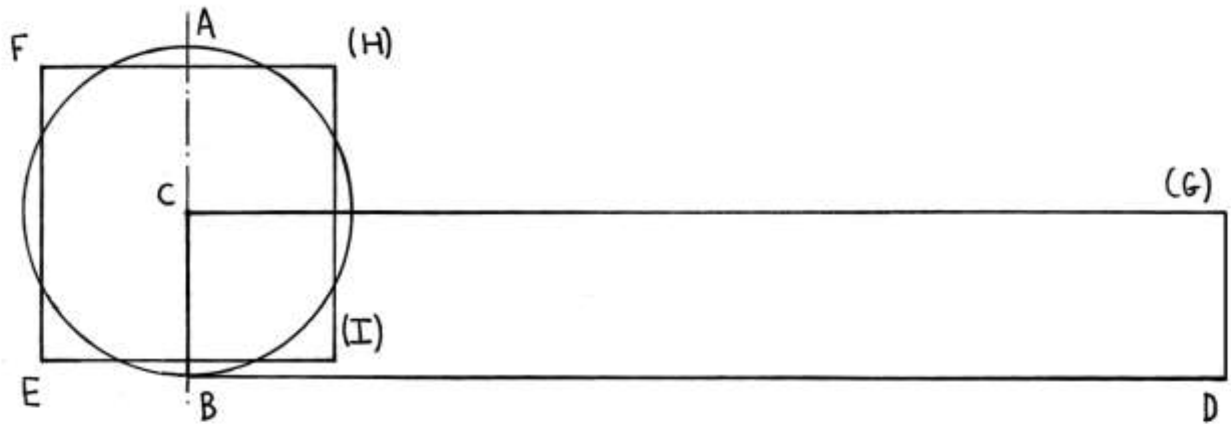
L’Autore conclude con una regola pratica: per misurare l’area dei poligoni irregolari con un numero di lati maggiore rispetto al pentagono essi devono essere sempre scomposti in triangoli e così un esagono va diviso in *quattro* triangoli, un ettagono in *cinque* triangoli e via di seguito.

La regola proposta e impiegata anche nel caso del pentagono è la *triangolazione*, già nota ai Gromatici romani.

<u>Quadratura del cerchio</u>

Bartoli richiama le regole fissate sul cerchio da Archimede: l’area del cerchio calcolata assimilandola a quella di un triangolo rettangolo con cateti lunghi quanto il raggio e la circonferenza e il valore approssimato di π, 22/7.

L’Autore descrive la quadratura approssimata di un cerchio:



Un cerchio ha centro C e diametro *d* = AB lungo 14 braccia.

La sua circonferenza, *c*, è:

$$c = \pi * d \approx 22/7 * 14 \approx 44 \text{ braccia.}$$

L’area è:

$$\text{Area} = c/2 * d/2 \approx 44/2 * 14/2 \approx 154 \text{ braccia}^2.$$

Costruire il rettangolo CB(G)D con lati lunghi:

* BC = d/2 = 14/2 = 7.
* BD = c/2 = 44/2 = 22.

La sua area è:

$$\text{Area}_{CB(G)D} = BC * BD = 7*22 = 154 \text{ braccia}^2$$: il rettangolo ha la stessa superficie di quella, approssimata, del cerchio.

Occorre terminare la costruzione con la tracciatura del quadrato di area uguale a 154 braccia^2.

Estrarre la radice quadrata dell’area del cerchio e del rettangolo:

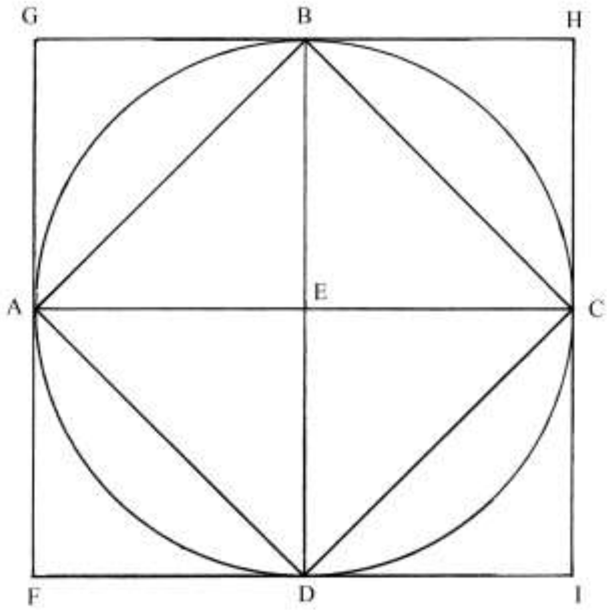
$$\sqrt{(154)} \approx 12{,}41 \text{ braccia.}$$

Costruire il quadrato EF(H)(I) con lati lunghi 12,41 braccia e con lo stesso centro, C, del cerchio.

Il quadrato ha con un’accettabile approssimazione la stessa area del cerchio.

Altro metodo per la quadratura del cerchio

Bartoli richiama il rapporto approssimato fra l'area di un cerchio e quella di un quadrato ad esso circoscritto: 11/14.



Un cerchio di centro E ha diametro *d* lungo 14 braccia ed è inscritto nel quadrato FGHI. L'area del quadrato è:

$A_{FGHI} = FI^2 = AC^2 = d^2 = 14^2 = 196$ braccia^2.

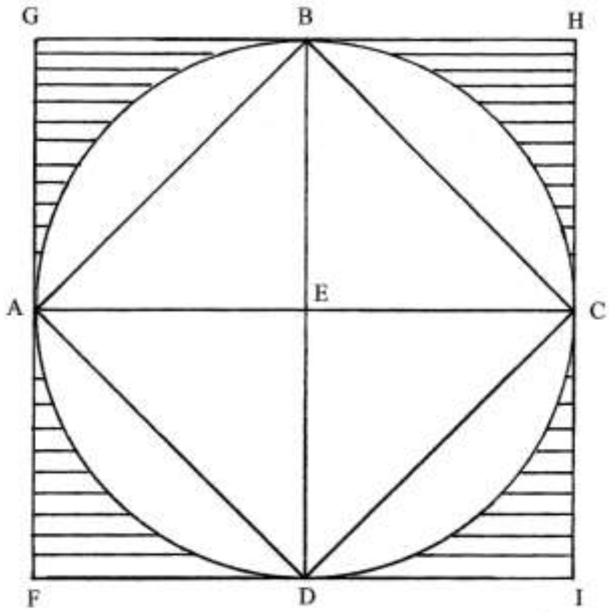
La superficie convenzionale del cerchio è:

$A_{CERCHIO} = 11/14 * A_{FGHI} = 11/14 * 196 = 154$ braccia^2.

La differenza fra le due aree è:

differenza = $A_{FGHI} – A_{CERCHIO} = 196 – 154 = 42$ braccia^2.

Essa è l'area complessiva dello spazio delimitato dal quadrato e dal cerchio e divisa fra le quattro regioni tratteggiate nella figura:



In altri termini, la *differenza* è uguale ai 3/14 dell'area del quadrato e cioè

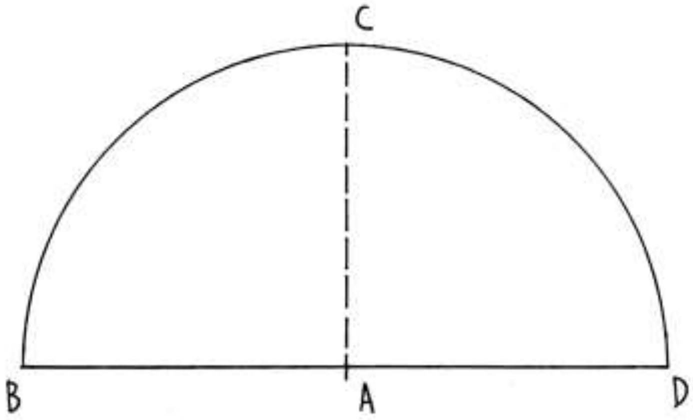
$3/14 * 196 = 42$ braccia^2 e ciascuna delle quattro regioni occupa un'area di 10,5 braccia^2.

All’interno del cerchio è disegnato un secondo quadrato, inscritto, ABCD, che ha superficie uguale a metà di quella di FGHI. Infatti, il quadrato interno ha le diagonali AC e BD lunghe quanto il diametro del cerchio e il lato del quadrato esterno e la sua superficie è:

$$\text{Area}_{\text{ABCD}} = (AC * BD)/2 = (14 * 14)/2\ 0\ 98 \text{ braccia}^2.$$

Area di un semicerchio

Un semicerchio ha diametro, *d*, lungo 14 braccia:



La lunghezza della semicirconferenza, *sc*, è:

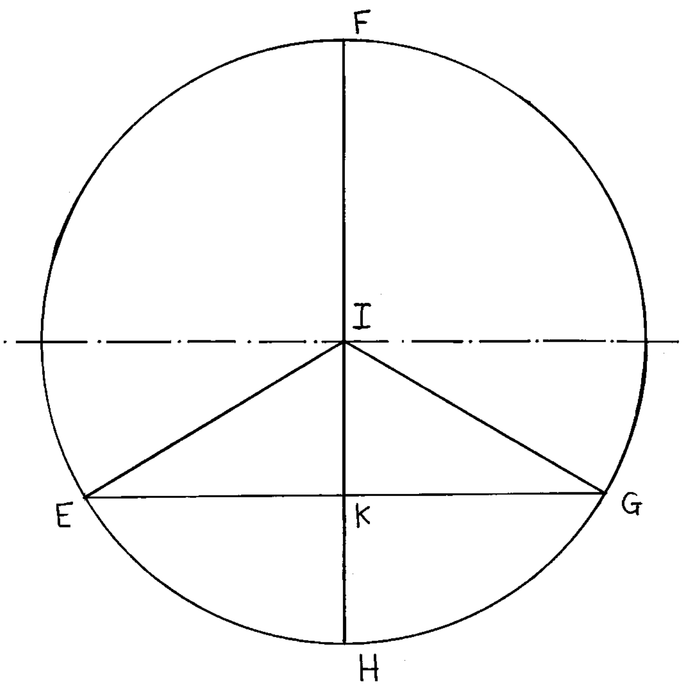
$$sc = \pi * \text{raggio} = \pi * d/2 \approx 22/7 * 14/2 \approx 22 \text{ braccia}.$$

L’area del semicerchio è la metà di quella del cerchio da cui deriva:

$$\text{Area}_{\text{SEMICERCHIO}} = (\text{circonferenza}/2 * d/2)/2 = (sc * d/2)/2 = 22 * 14/4 = 77 \text{ braccia}^2.$$

Segmenti circolari

Un cerchio è diviso dalla corda EG in due segmenti circolari che hanno differenti dimensioni.



Il cerchio ha diametro d =14 braccia e la sua circonferenza, *c*, è lunga:

$c = \pi * d \approx 22/7 * 14 = 44$ braccia.

L'area dell'intero cerchio è:

$A_{\text{CERCHIO}} = (c/2) * (d/2) = 44/2 * 14/2 = 22 * 7 = 154$ braccia^2.

EG è una corda lunga 12 braccia: con i raggi IE e IG essa crea il triangolo isoscele EIG.

EG divide a *metà* il raggio IH che interseca nel punto K.

L'altezza IK è data da:

$IK = \sqrt{(IE^2 - EK^2)} = \sqrt{(7^2 - 6^2)} = \sqrt{(49 - 36)} = \sqrt{13} \approx 3{,}6055$ braccia che Bartoli arrotonda a (3 + 2/3).

L'area del triangolo isoscele EIG è:

$Area_{EIG} = EK * IK = 6 * (3 + 2/3) \approx 22$ braccia^2.

Gli archi EF e FG sono lunghi 15 braccia e gli archi EH e HG sono 7 braccia.

L'area del settore circolare EFI è:

$Area_{EFI}$ = arco EF * raggio/2 = $EF * EI/2 = 15 * 7/2 = 52{,}5$ braccia^2.

Anche l'area del settore FGI è 52,5 braccia^2.

L'area del settore circolare EIGH è:

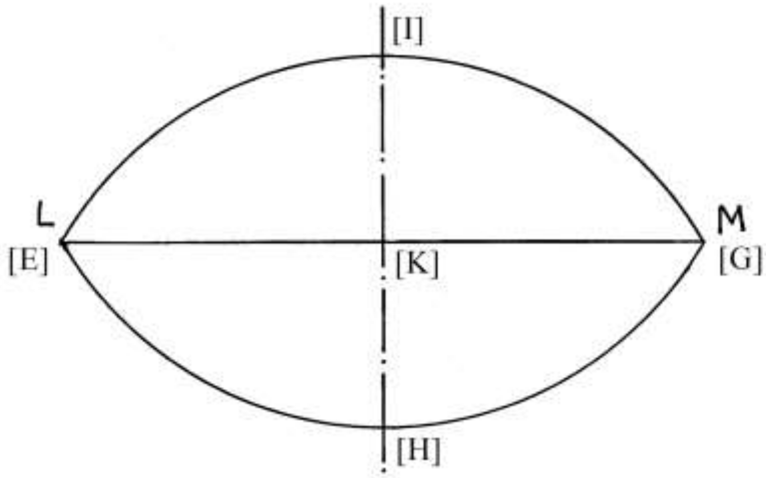
$Area_{EIGH} = A_{\text{CERCHIO}} - Area_{EFGI} = A_{\text{CERCHIO}} - 2 * (Area_{EFI}) = 154 - 2 * 52{,}5 = 154 - 105 = 49$ braccia^2.

Infine, l'area del segmento circolare EGH è:

$Area_{EGH} = Area_{EIGH} - Area_{EIG} = 49 - 22 = 27$ braccia^2.

Area di una mandorla

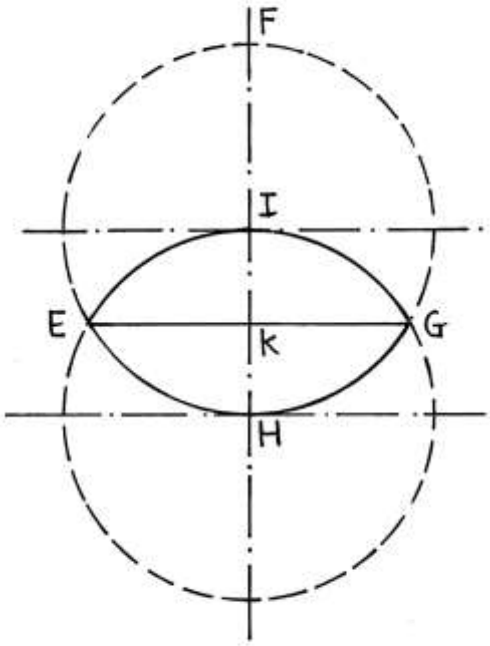
Un campo ha la forma curvilinea presentata nella figura:



Senza spiegare esplicitamente la sua genesi, è però chiaro che questa forma deriva da quella dell'esempio del precedente paragrafo, cioè dal raddoppio del segmento circolare EKGH intorno alla corda EG, qui divenuta LM.

Le lettere indicate fra parentesi quadre […] provengono dalla figura del precedente paragrafo.

La figura è una *mandorla* ed è generata dall'intersezione di due cerchi che hanno uguale raggio: il centro di un cerchio è sulla circonferenza dell'altro, per cui la distanza fra i due centri è uguale al raggio dei due cerchi.

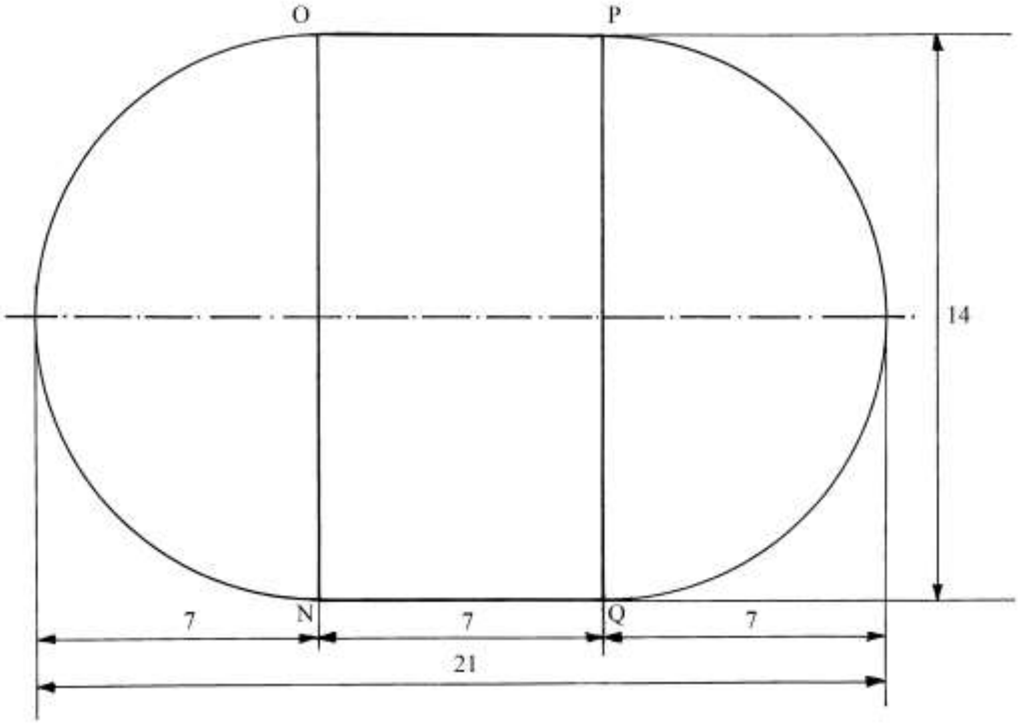


La mandorla è divisa dalla corda LM in due settori circolari di uguali dimensioni: dato che il settore L[K]M[H] ha area uguale a 27 braccia^2, l'intera mandorla ha superficie doppia e cioè 54 braccia^2.

Nota: in un'APPENDICE al capitolo successivo – dedicato al Libro Terzo – è approfondito l'argomento della forma e dell'origine della mandorla.

Area di un campo di forma allungata e arrotondata

Un campo ha la forma e le dimensioni espresse in braccia, presentate nella figura:



Bartoli la definisce come una figura piana originata dalla fusione di due semicerchi di uguali dimensioni e di un rettangolo che li unisce. L'Autore sostiene che il campo ha "…*del quadrilungo e dell'ovato*…".

Il termine *quadrtilungo* sembra coniato sul *bislungo* usato dagli abacisti toscani del Medioevo e del primo Rinascimento per designare il rettangolo generato da un doppio quadrato e perciò *quadrato bislungo*.

La lunghezza delle due semicirconferenze, *sc*, è data da:

$sc = \pi * r = \pi * d/2 \approx 22/7 * 14/2 \approx 22$ braccia.

L'area di ciascuno dei due semicerchi è:

$Area_{SEMICERCHIO} = Area_{CERCHIO}/2 = (\pi * r^2)/2 \approx 22/7 * 7^2/2 \approx 77$ $braccia^2$.

L'area del rettangolo NOPQ è:

$Area_{NOPQ} = NO * NQ = 14 * 7 = 98$ $braccia^2$.

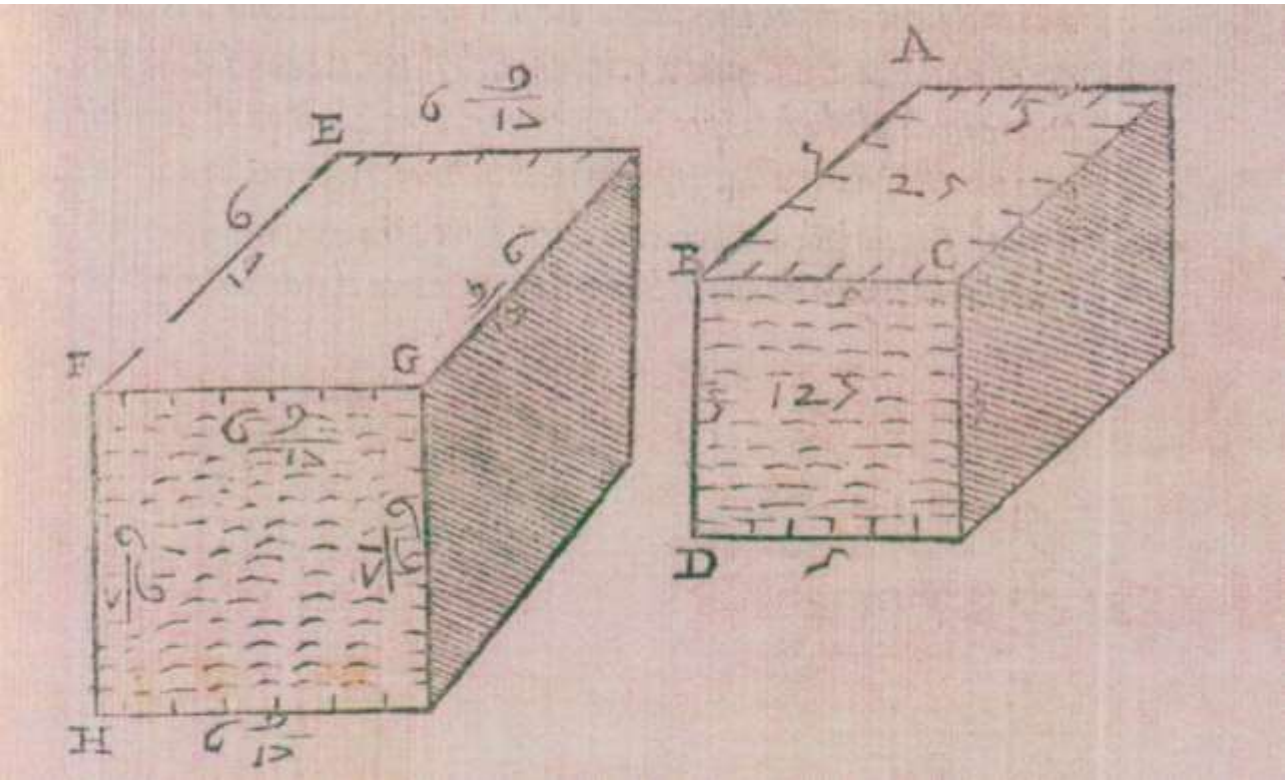
L'area totale del campo è:

$Area_{CAMPO} = 77 + 98 + 77 = 252$ $braccia^2$.

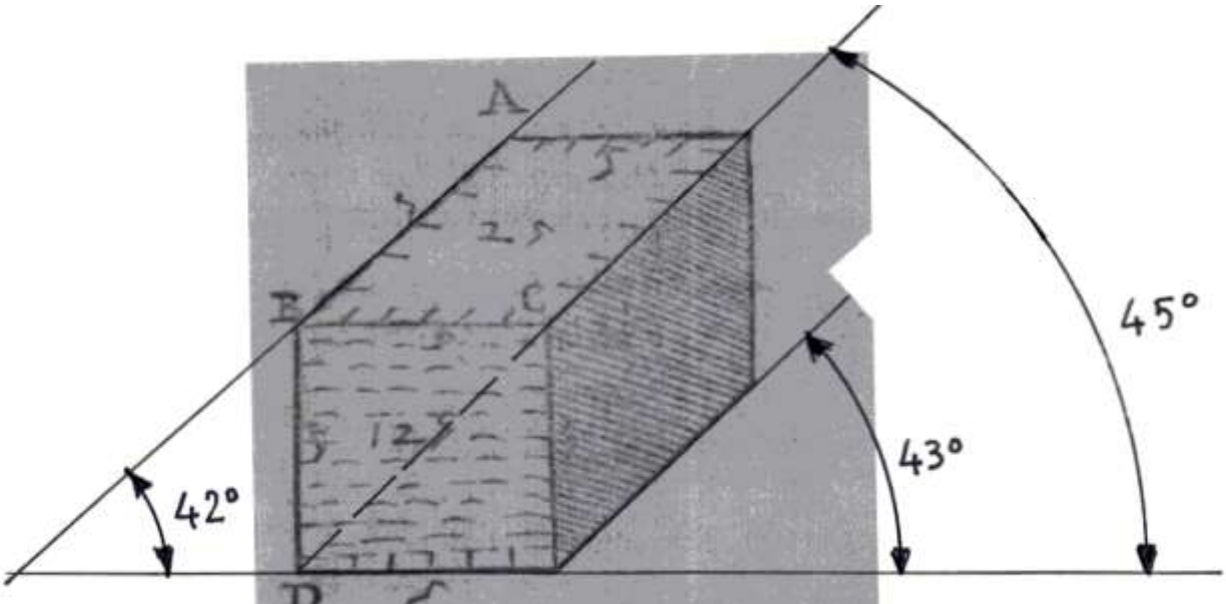
LIBRO TERZO

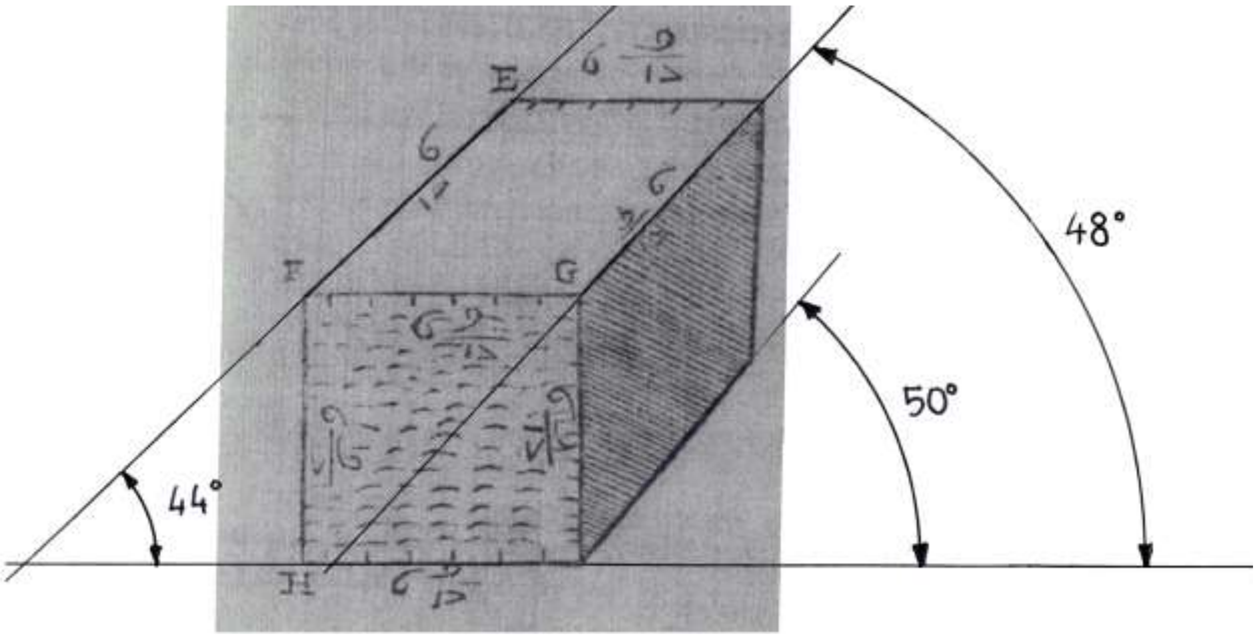
Cubo doppio di un altro

Un cubo, un *dado* come lo chiama Bartoli, ha lo spigolo lungo 5 braccia e deve esserne costruito un altro con volume *doppio*:



Bartoli disegnò entrambi i cubi in *assonometria cavaliera isometrica* con angoli di fuga compresi fra 42° e 50°, come spiegano le due figure che seguono:





Gli scostamenti rispetto all'inclinazione di 45° possono essere dovuti sia alle difficoltà incontrate nell'incisione delle matrici di stampa sia alla stessa operazione di stampa causa di eventuali deformazioni del foglio di carta.

I disegni sono in assonometria isometrica perché le dimensioni dei lati posti sulle linee oblique non sono scorciate al 50%, come è prassi odierna.

Il problema è risolto da Bartoli calcolando correttamente il volume del cubo da duplicare:

$$\text{Volume}_{\text{CUBO1}} = \text{lato}^3 = 5^3 = 125 \text{ braccia}^3 .$$

Il volume del secondo cubo è il doppio:

$$\text{Volume}_{\text{CUBO2}} = 2 * \text{Volume}_{\text{CUBO1}} = 2 * 125 = 250 \text{ braccia}^3 .$$

La lunghezza dello spigolo del secondo cubo è data da:

$$\text{lato}_{\text{CUBO2}} = \sqrt[3]{250}$$

Bartoli approssimò *per eccesso* il risultato a

$$\sqrt[3]{250} \approx (6 + 9/17) \text{ braccia}$$

, invece di una più corretta lunghezza di 6,3 (o 6 + 3/10) braccia.

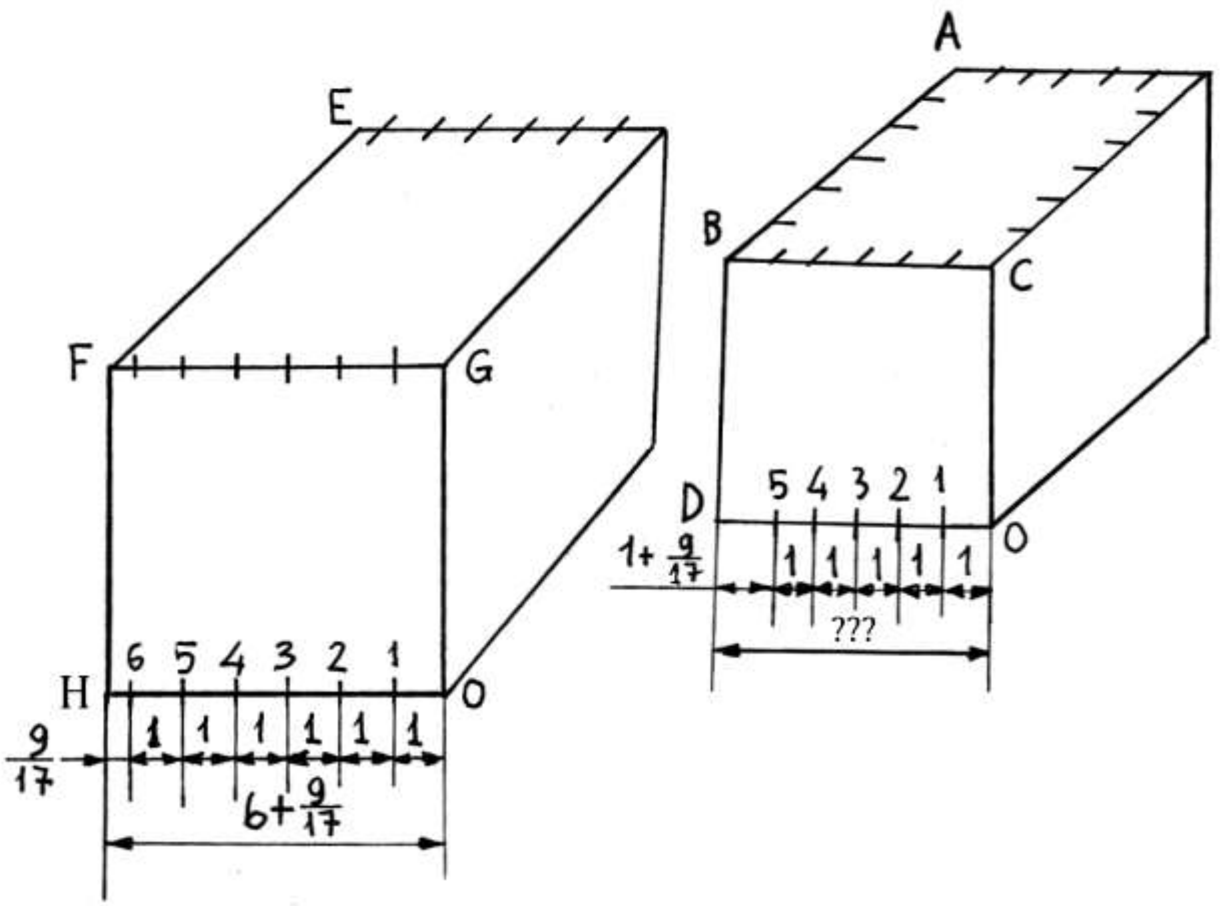
Infatti

$$(6 + 9/17)^3 \approx 6{,}52941^3 \approx 278{,}37 \text{ braccia}^3 \quad \text{e} \quad (6{,}3)^3 \approx 250 \text{ braccia}^3 .$$

A giustificazione dell'errore commesso da Bartoli sta la mancata conoscenza e disponibilità di tavole di logaritmi: forse egli usò un metodo meccanico-geometrico per calcolare la lunghezza dello spigolo del cubo doppio. A Firenze, a Roma o a Venezia, città nelle quali visse a lungo poteva aver conosciuto i trattati geometrici sulla duplicazione del cubo: l'argomento era ampiamente affrontato nel trattato geometrico di Albrecht Dürer da Bartoli tradotto dal latino in fiorentino.

Le scale grafiche

Cosimo Bartoli riprese da Oronce Finé l'idea delle scale grafiche disegnate sulle sue figure rappresentanti i solidi: l'esempio che qui consideriamo è quello, visto in precedenza, della duplicazione del cubo.



I due grafici qui sopra riproducono i due solidi, i loro spigoli e le lettere maiuscole della precedente tavola di Bartoli, con tutte le loro imprecisioni.

A sinistra è disegnato il cubo di volume *doppio*: su alcuni spigoli Bartoli scrisse le dimensioni e per rafforzare il concetto aggiunse alcune *tacche*, a evidente distanza corrispondente in scala alla lunghezza di 1 braccio.

Consideriamo le tacche incise sullo spigolo orizzontale che ha per vertice il punto H. Osservando attentamente la posizione delle tacche, sembrerebbe che Bartoli avesse fissato sullo spigolo una serie di punti a partire da O e andando verso sinistra: sarebbero 1, 2, 3, 4, 5 e 6.

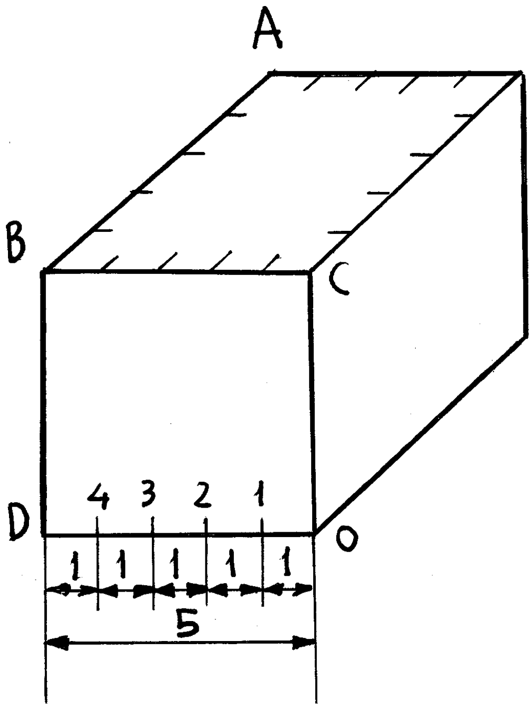
Le lunghezze dei segmenti che questi punti delimitano paiono uguali e, in scala, tutte equivalenti a 1 braccio, mentre il segmento 6-H è più corto: sembra ragionevole ipotizzare che esso abbia lunghezza in scala uguale a 9/17 braccia.

Se questa ipotesi è fondata, sia Finé che Bartoli avrebbero usato una scala grafica orientata da destra verso sinistra: erano forse entrambi mancini o lo era il disegnatore impiegato da Finé? Oppure gli incisori delle matrici di stampa erano costretti a invertire destra e sinistra per lavorare al meglio? Su di una matrice il disegno da stampare è riprodotto specularmente (come accade ai moderni *timbri*).

A destra è riprodotto il cubo originario da duplicare: il solido ha spigoli lunghi 5 braccia.

Anche sugli spigoli di questo solido sono segnate le tacche: esse sono probabilmente in numero errato perché sembrano essere riprese dalle tacche disegnate sugli spigoli del cubo doppio: infatti sono *cinque* invece di *quattro*. La lunghezza del tratto D-5 è maggiore di quella delle altre e quindi è probabile che corrisponda a (1 + 9/17) di braccio.

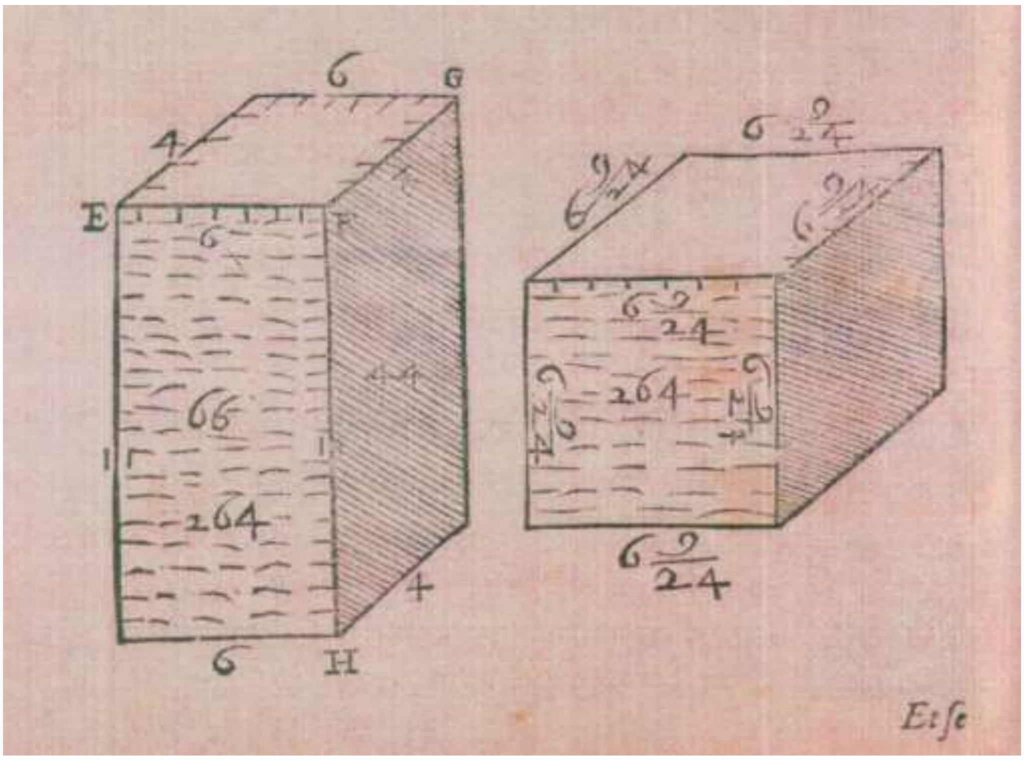
Lo schema che segue è la corretta rappresentazione delle scale grafichee delle tacche lungo gli spigoli del cubo da raddoppiare:



Con ogni evidenza, Bartoli non si accorse dell’errore o non poté correggerlo.

<u>Cubo equivalente a un parallelepipedo</u>

Un parallelepipedo(che Bartoli chiama *dado*) ha le dimensioni indicate a sinistra nella figura che segue:



Il suo volume è:

$$\text{Volume} = 6*4*11 = 264 \text{ braccia}^3 .$$

Il problema è: costruire un cubo (rappresentato a destra nella figura) che abbia lo stesso volume.

Bartoli calcola la *radice cubica* di 264 che fornisce la lunghezza dello spigolo ℓ del cubo equivalente:

$$\ell = \sqrt[3]{264} \approx 6 + \frac{9}{24} \approx 6{,}41 \text{ braccia}.$$

Com'era consuetudine nel Rinascimento, Bartoli espresse il risultato dell'estrazione di radice cubica sotto forma di numero misto

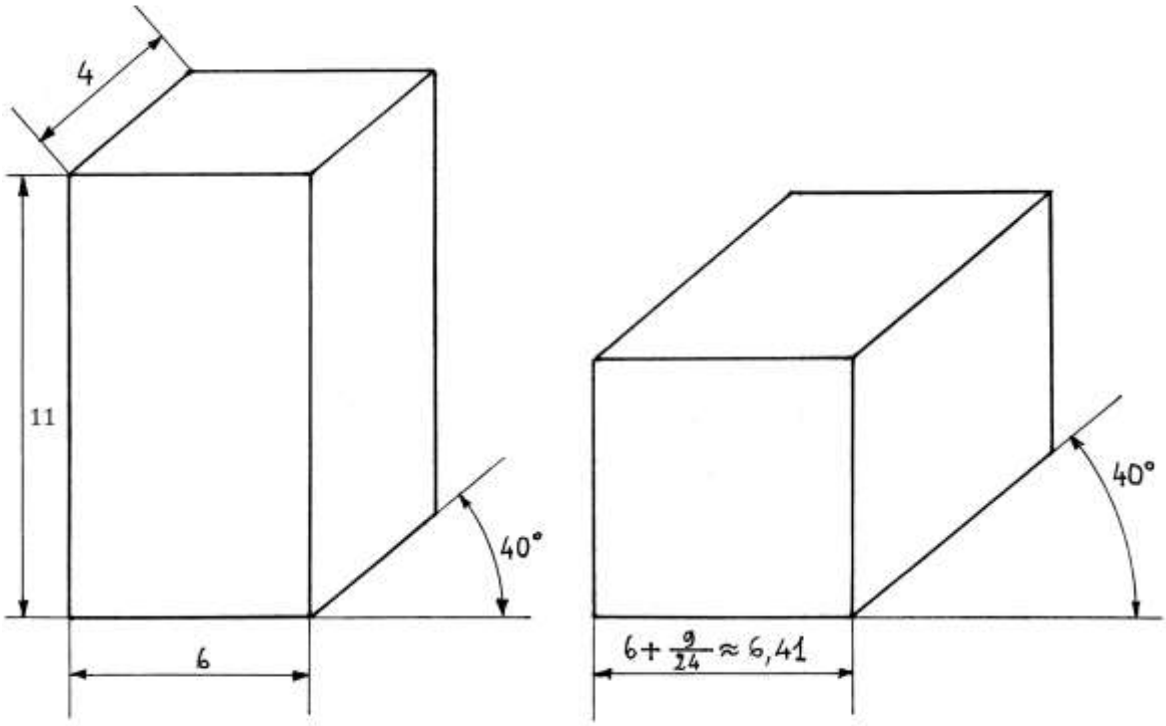
$6\,\frac{9}{24}$ scritto senza il simbolo infisso "+" .

L'approssimazione (6 + 9/24) poteva essere semplificata in (6 + 3/8) = 6,375 braccia, valore approssimato *per difetto* rispetto a quello più vicino al reale che è 6,41 braccia.

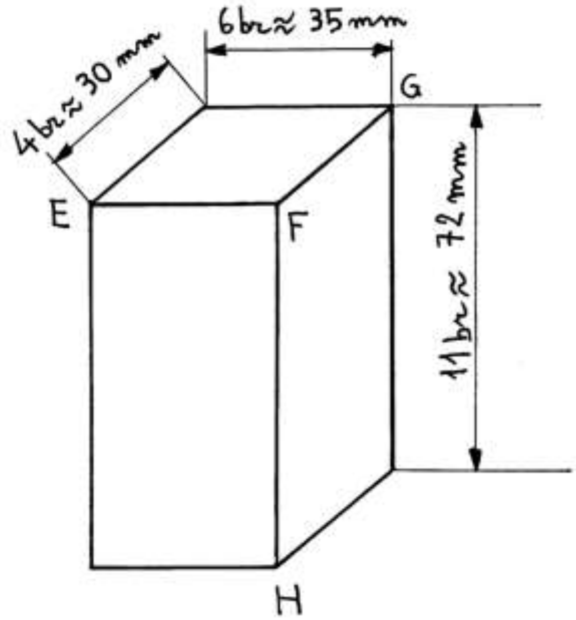
Usando l'approssimazione di Bartoli, il volume del cubo è:

Volume $_{CUBO}$ = $(6 + 9/24)^3 = (6 + 3/8)^3 = 6{,}375^3 = 259{,}08$ braccia^3, valore che si discosta un po' troppo da quello corretto di 264 braccia^3.

I due solidi sono disegnati dal Bartoli in assonometria quasi cavaliera con angoli di fuga di 40°:

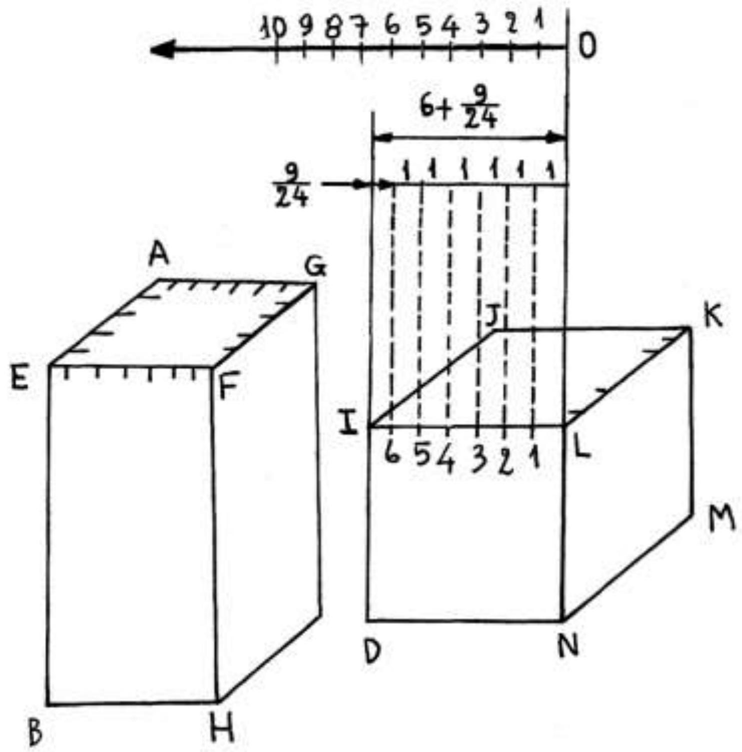


Per la precisione, il disegno della faccia superiore del parallelepipedo è fuori scala:



Nello schema di Bartoli sono scritte soltanto *quattro* lettere maiuscole ai vertici: E, F, G e H. Negli schemi che seguono ne sono state aggiunte altre per rendere più chiara l'esposizione.

I quattro spigoli della della faccia superiore del parallelepipedo recano tutti le tacche: il loro numero è errato perché i segmenti EF e AG sono divisi in *sette* anziché in *sei* parti uguali e quelli EA e FG sono ripartiti in *cinque* anziché in *quattro* parti: i primi due sono lunghi 6 braccia e i secondi 4 braccia.



Due spigoli del cubo, IL e LK, recano le tacche: le prime sono facilmente interpretabili.

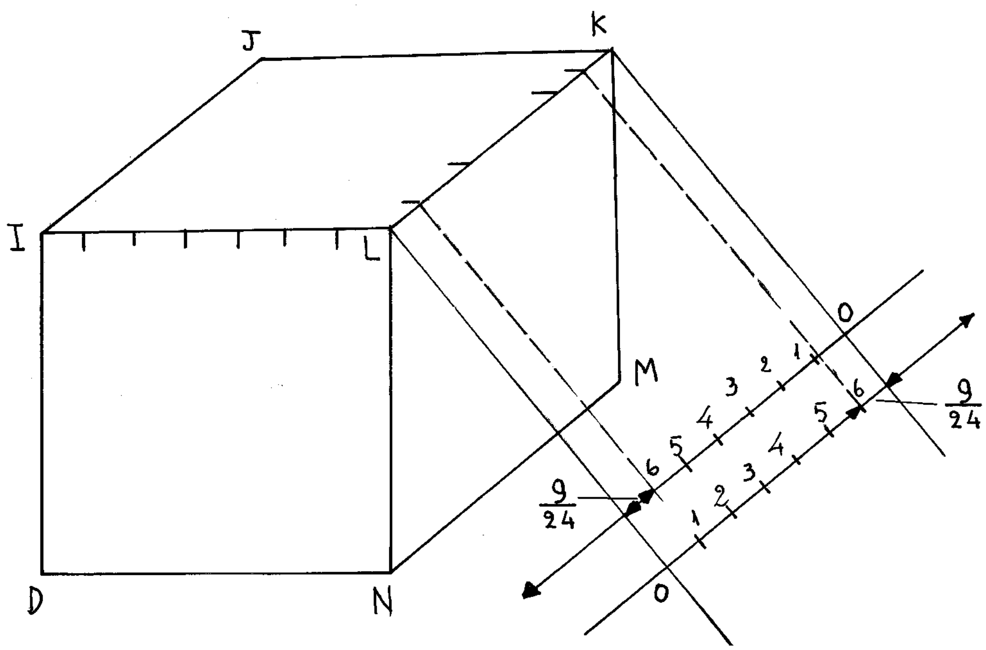
Le seconde presentano dei problemi perché le lineette sono in parte coperte dalle cifre della quota, 6 9/24.

Lo spigolo IL sembrerebbe diviso in sei parti uguali e in un segmento più corto, di lunghezza proporzionale a 9/24.

La scala grafica sarebbe orientata da destra verso sinistra.

Questo dato di fatto confermerebbe l'ipotesi avanzata riguardo alla scala grafica utilizzata nel caso del cubo duplicato esaminato in precedenza.

Lo spigolo LK del cubo equivalente merita una certa attenzione:



Le due tacche estreme, quelle che sono delimitate dai vertici L e K, sembrano più corte: pare ragionevole ipotizzare che esse siano in proporzione a 9/24.

Nel grafico sono disegnate due distinte scale grafiche parallele a LK e orientate con versi opposti.

- APPROFONDIMENTO -

<u>"Per numero" e "per linea"</u>

Nei principali trattati di architettura e di ingegneria italiani del XVI secolo compaiono le espressioni dei due differenti metodi impiegati per la soluzione di problemi:

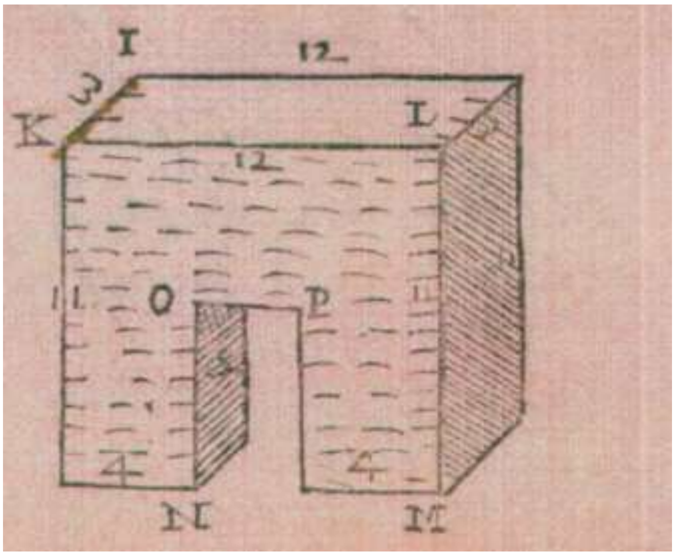
* "Per numero" quando la soluzione è ottenuta per via aritmetica. La duplicazione del cubo ricavata da Finé e da Bartoli rientra nella categoria dei problemi risolti "per numero" e cioè per via aritmetica: la lunghezza dello spigolo del cubo doppio di cui è noto il volume è data dalla sua radice cubica.
* "Per linea": questo metodo richiede l'applicazione di tecniche geometriche o geometrico-meccaniche (con strumenti meccanici specializzati o "macchine matematiche") per risolvere un problema quale è quello della duplicazione di un cubo.
  Questa seconda espressione ha fatto la sua comparsa nella seconda edizione del trattato del matematico e architetto senese Pietro Cataneo sull'architettura.

Le soluzioni dei due problemi di conversione fra solidi presentati nei precedenti paragrafi rientrano fra quelli "per numero" perché impiegano metodi aritmetici per ricavare la lunghezza degli spigoli dei cubi cercati.

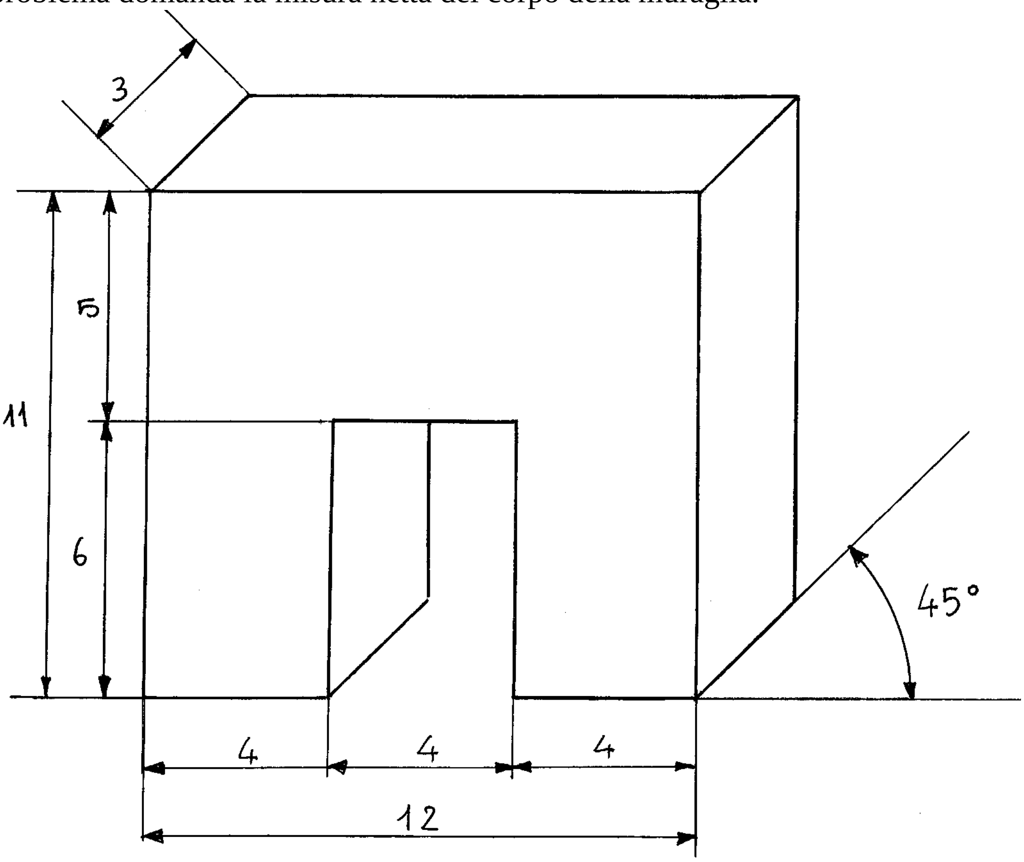
- -

<u>Vano praticato in un muro</u>

In un muro con le dimensioni riportate nella figura che segue è praticata un'apertura di forma rettangolare per contenere una porta:



Il problema domanda la misura netta del corpo della muraglia.



Il volume *lordo* è:

$$\text{Volume}_{\text{LORDO}} = 11 * 12 * 3 = 396 \text{ braccia}^3 .$$

Il vano ha dimensioni 4*6 e profondità di 3 braccia. Il suo volume è:

$$\text{Volume}_{\text{VANO}} = 4 * 6 * 3 = 72 \text{ braccia}^3 .$$

Il volume *netto* della muratura (dato occorrente per calcolare la quantità di materiale necessaria) è dato da:

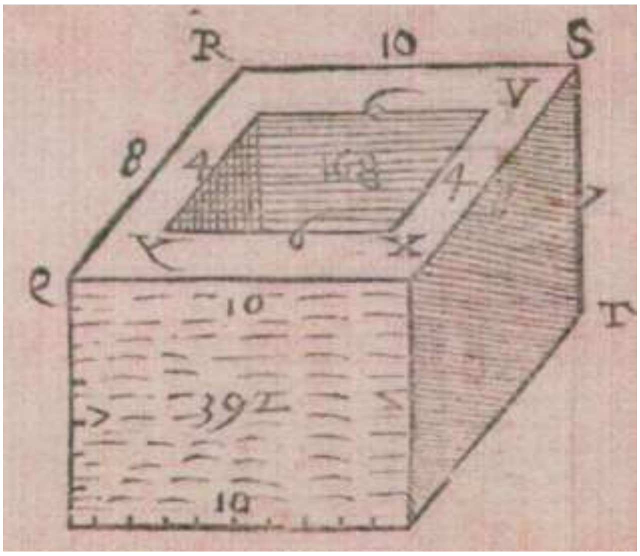
Volume $_{\text{NETTO}}$ = Volume $_{\text{LORDO}}$ – Volume $_{\text{VANO}}$ = 396 – 72 = 324 braccia^3.

Il solido è disegnato in assonometria cavaliera con qualche imprecisione: ad esempio lo spigolo OP (lungo 4 braccia) è più corto dei sottostanti spigoli orizzontali che terminano nei punti N e M.

Gli spigoli sono tutti inclinati di 45°.

<u>Pozzo rettangolare</u>

Un pozzo ha forma rettangolare sia all’esterno che all’interno e ha le dimensioni riportate sulla figura originale:



Il problema chiede il volume netto della costruzione in muratura.

Calcolare il volume *lordo*:

Volume $_{\text{LORDO}}$ = RS * RQ * ST = 10 * 8 * 7 = 560 braccia^3.

Il volume dello spazio *vuoto* è:

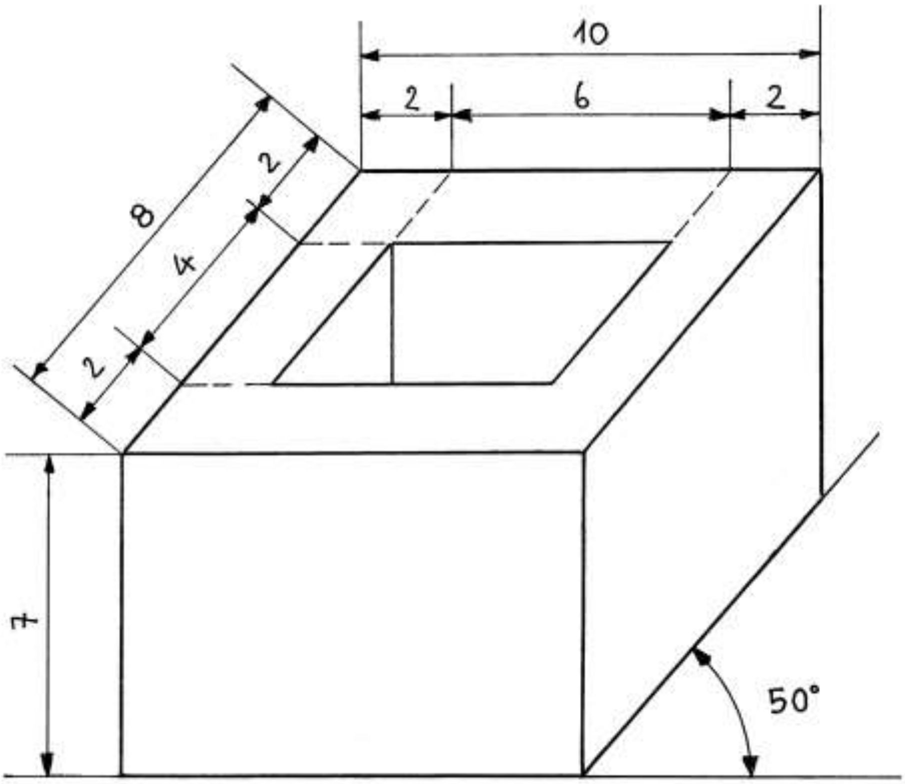
Volume $_{\text{VUOTO}}$ = 6 * 4 * 7 = 168 braccia^3.

Il volume netto della muraglia è:

Volume $_{\text{NETTO}}$ = Volume $_{\text{LORDO}}$ – Volume $_{\text{VUOTO}}$ = 560 – 168 = 392 braccia^3.

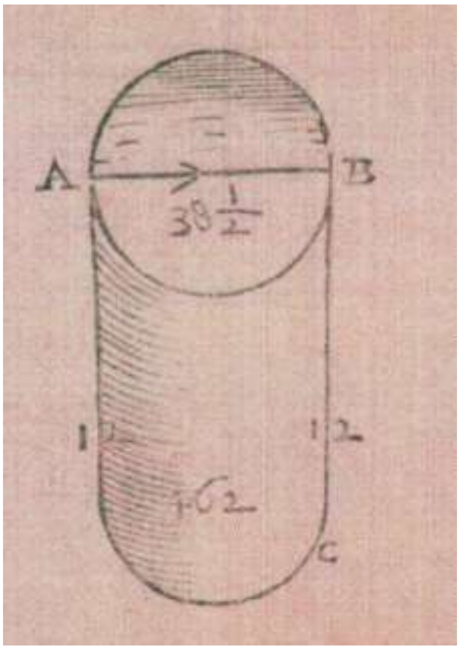
Lo spessore del muro misurato in senso orizzontale è costante: 2 braccia.

Il solido è disegnato in assonometria cavaliera isometrica con angolo di fuga di 50°.



Cilindro

Un cilindro retto, che Bartoli chiama *colonna*, ha basi con diametro *d* lungo 7 braccia e altezza uguale a 12 braccia:



La circonferenza è calcolata in 22 braccia, ciò che implica l'uso dell'approssimazione 22/7 per il valore di π.

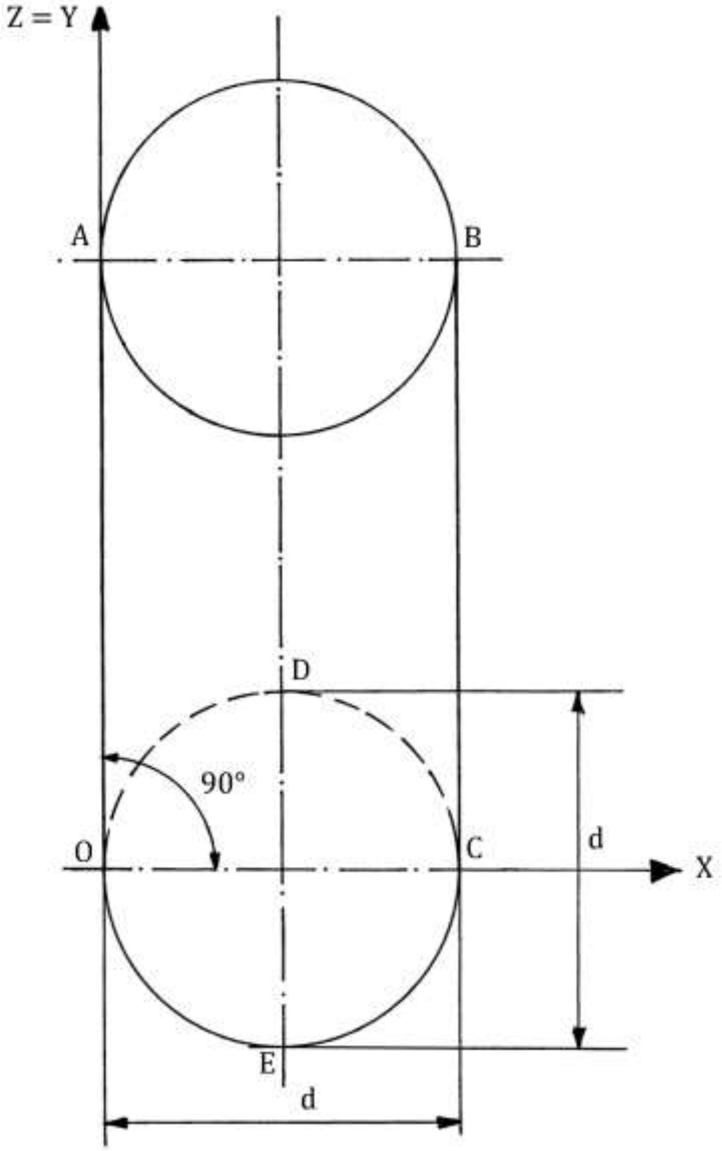
L'area delle basi è scritta e correttamente calcolata in (38 ½) braccia^2:

Area = $\pi/4 * d^2 \approx 22/7 * ¼ * 7^2 \approx 11/14 * 49 \approx 38{,}5$ braccia^2.

Il volume è:

Volume = base * altezza = 38,5 * 12 = 462 braccia^3.

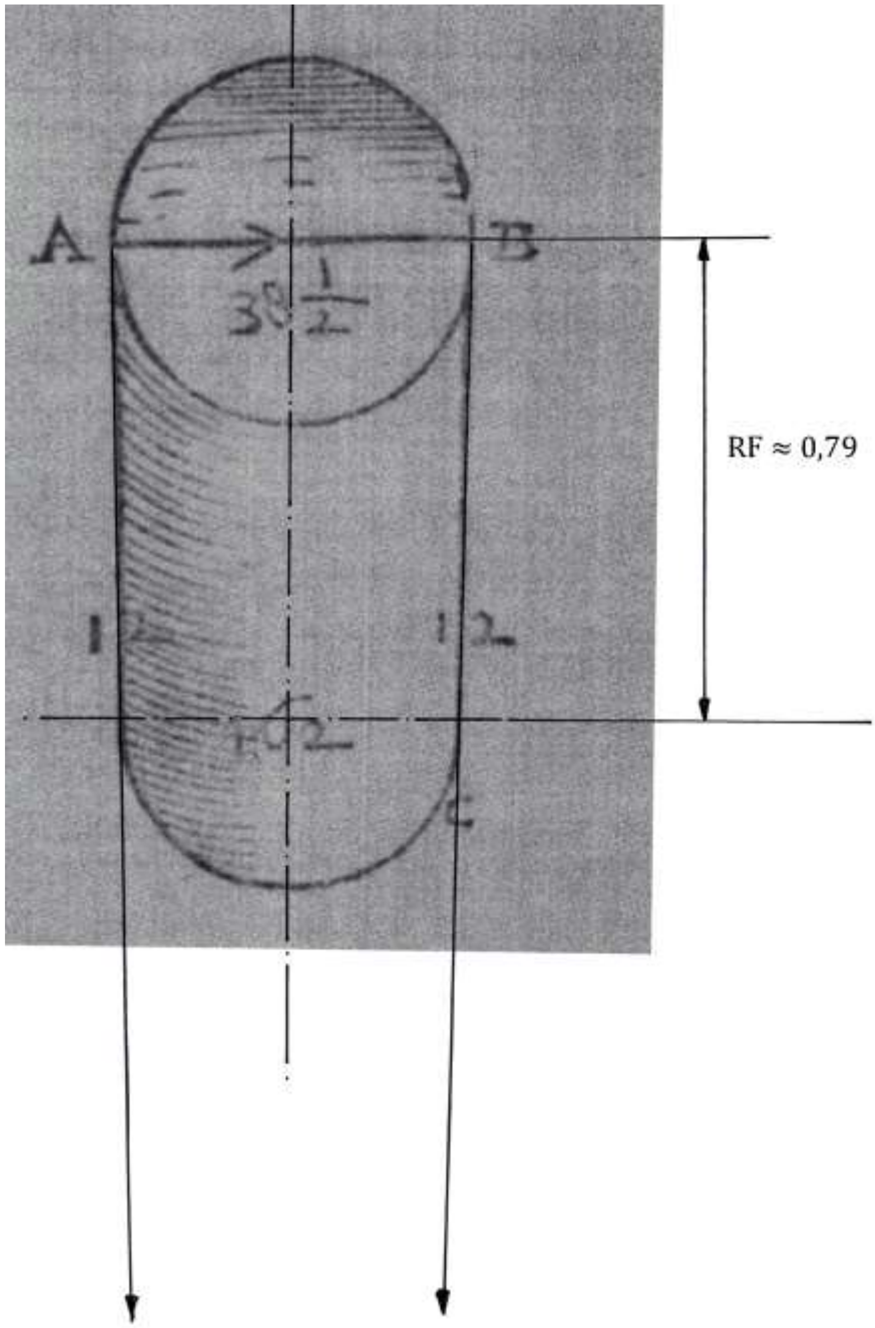
Se il cilindro fosse disegnato in assonometria con *angolo di fuga* di 90° e con gli assi Y e Z coincidenti e con *rapporto di fuga RF* uguale a 1, il risultato sarebbe quello mostrato nello schema che segue:



I due cerchi che rappresentano la base superiore e quella inferiore non sono deformati e le dimensioni orizzontali e verticali dei due cerchi sono uguali al loro diametro *d* per il rapporto di fuga RF varrebbe 1:

RF = DE/OC = d/d = 1 .

In realtà il disegno di Bartoli comporta l'uso sia dell'assonometria che della prospettiva, fenomeno questo non raro nel Rinascimento:



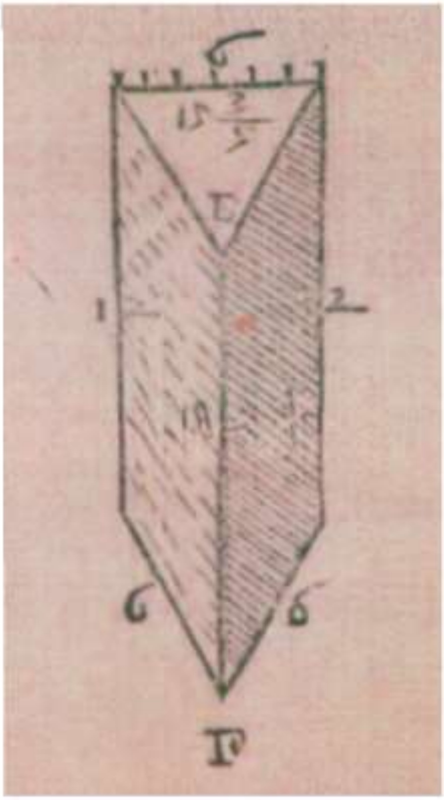
I segmenti verticali (quelli uscenti da A e da B) non sono più paralleli ma tendono a un punto di fuga che è collocato in basso.

L’altezza del cilindro è scorciata di un rapporto di fuga RF ≈ 0,79.

Forse questa soluzione è stata imposta dalla ristrettezza dello spazio disponibile nella pagina.

Prisma triangolare

Un prisma retto ha basi formate da triangoli equilateri con lati lunghi 6 braccia ed è alto 12 braccia.



L'area (*spazzo* per Bartoli) delle due basi triangolari è calcolata in (15 2/3) braccia^2 e il perimetro (*ambito* secondo Bartoli) è 18 braccia.

L'area dei triangoli equilateri è stata implicitamente determinata con la nota formula attribuita a Erone:

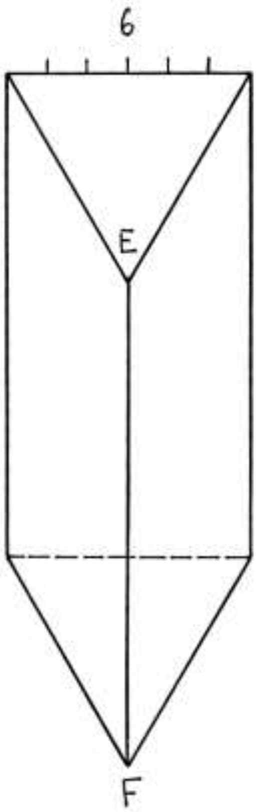
$$\text{Area} = 13/30 * \text{lato}^2 = 13/30 * 6^2 = 15{,}6 \text{ braccia}^2 = (15 + 3/5) \text{ braccia}^2.$$

Bartoli arrotonda stranamente per eccesso a (15 + 2/3) braccia^2.

Invece il volume è correttamente calcolato usando l'esatto valore dell'area dei triangoli equilateri:

$$\text{Volume} = \text{base} * \text{altezza} = ((15 + 3/5) * 12 = 185 + 1/5 \text{ braccia}^3.$$

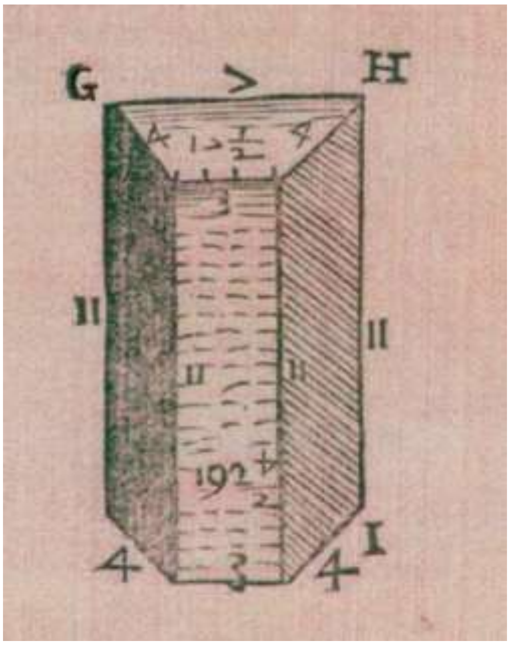
Pur con evidenti imprecisioni mostrate nella precedente figura, il prisma è disegnato in assonometria cavaliera isometrica:



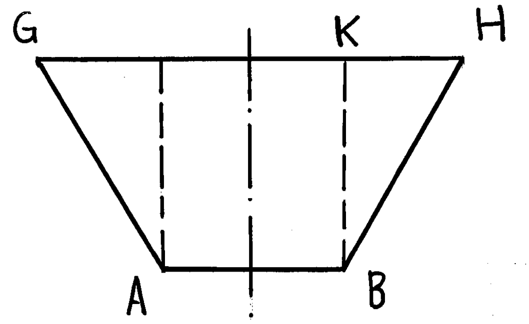
Lo spigolo orizzontale della base superiore è suddiviso da sette tacche in sei parti, a conferma della sua lunghezza pari a 6 braccia.

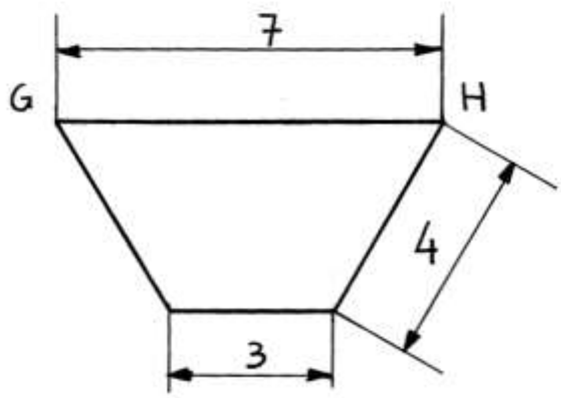
Prisma a base trapezoidale

Un prisma retto ha le basi a forma di *trapezio isoscele* con le dimensioni scritte nella figura che segue:

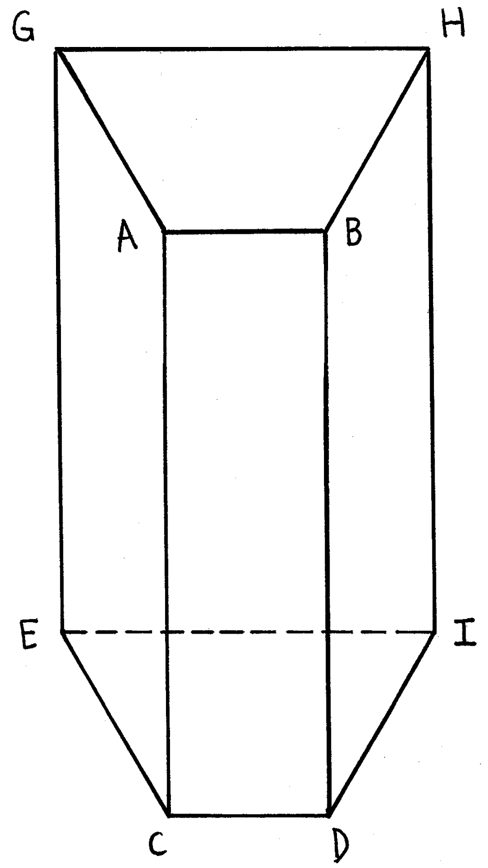


Le due basi hanno la forma e le dimensioni mostrate nelle figure che seguono:

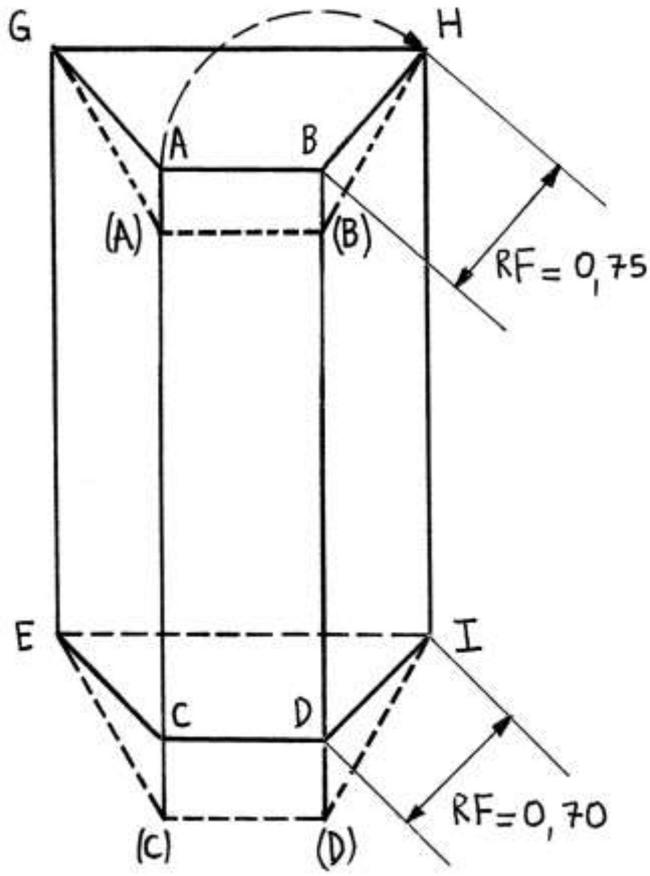




Se il solido fosse stato disegnato in assonometria cavaliera isometrica, la sua rappresentazione sarebbe questa:



Nel trattato, il solido è disegnato in assonometria scorciata in senso verticale:



Le due basi sono scorciate con due differenti *rapporti di fuga* (RF): 0,75 per la base superiore e 0,7 per quella inferiore. Nel disegno, il segmento BH è lungo quanto quello AB.

L'uso di differenti rapporti di fuga fra la base superiore e quella inferiore può essere un indizio dell'influenza delle regole della *prospettiva* che doveva essere ben conosciuta da Bartoli, vista la sua dimestichezza con le opere di Alberti e di Dürer.

L'area delle due basi è calcolata facendo riferimento a una procedura descritta nel 2° Libro del trattato di Bartoli. Essa contiene i seguenti passi:

* moltiplicare per se stessa la lunghezza di un lato obliquo (BH): BH * BH = 4^2 = 16 ;
* sottrarre la lunghezza della base minore (AB) da quella della base maggiore (GH): 7 – 3 = 4 ;
* dividere per 2: 4 : 2 = 2 ;
* moltiplicare per se stesso: 2 * 2 = 4 ;
* sottrarre l'ultimo quadrato dal primo: 16 – 4 = 12 ;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{(12)} = 2 * \sqrt{3}$, che è la lunghezza dell'altezza KB;
* moltiplicare per la semisomma delle basi: $2 * \sqrt{3} * (7 + 3)/2 = 10 * \sqrt{3} \approx$

  $\approx 17{,}3 \approx 17 + 1/3$ $braccia^2$ che Bartoli arrotonda per eccesso a (17 + ½) $braccia^2$.

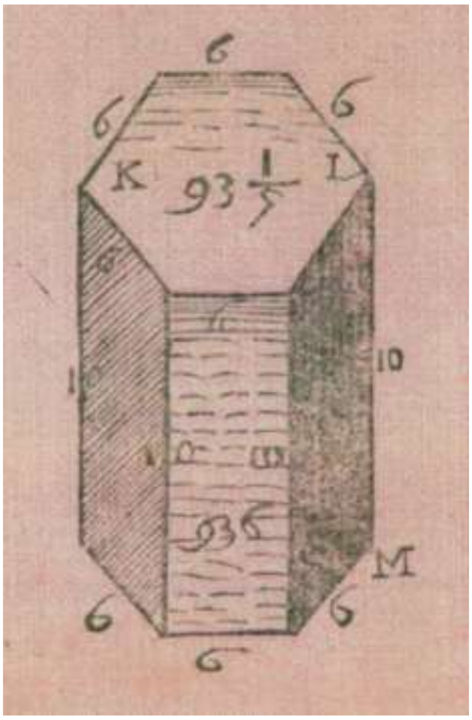
La procedura ha applicato il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo BKH.

Con il valore approssimato dell'area, Bartoli calcola il volume:

V = Area base * altezza = (17 + ½) * 11 = 192 + ½ $braccia^3$.

Prisma esagonale

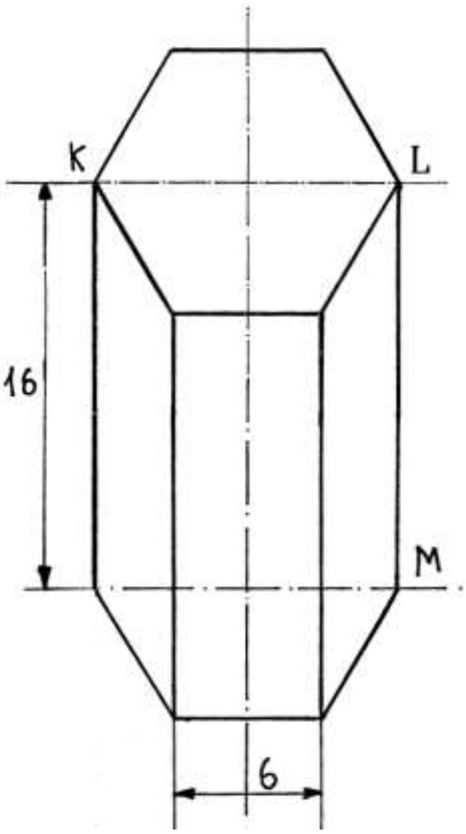
Un prisma retto è alto 16 braccia e i lati degli esagoni regolari che formano le due basi sono lunghi 6 braccia.



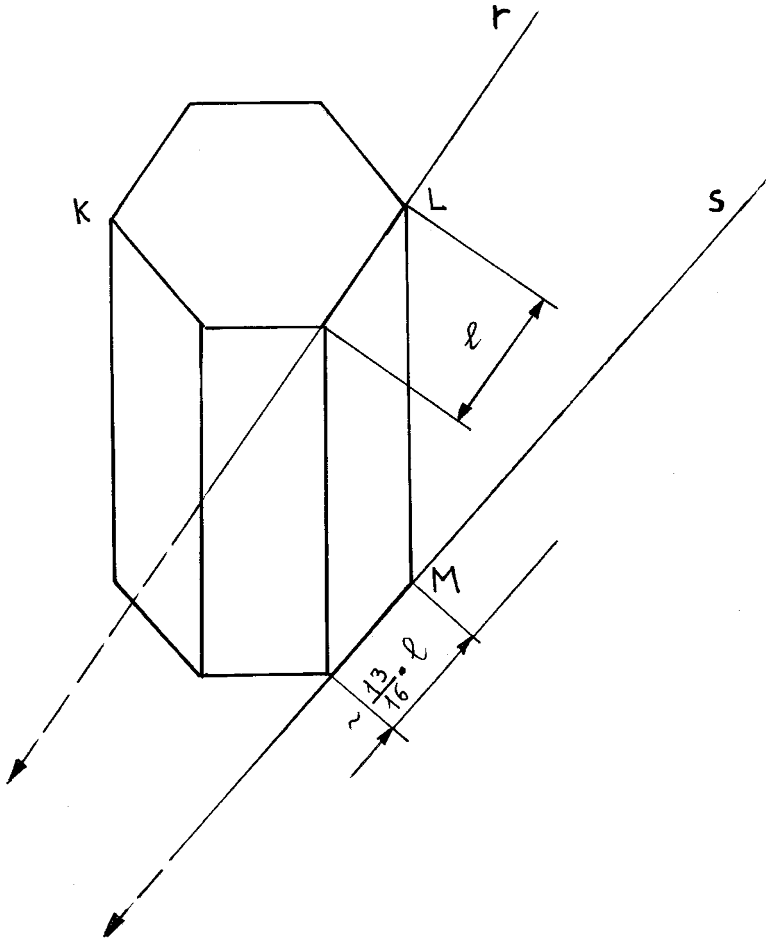
Il perimetro delle due basi (la *circonferenza* secondo Bartoli) è 36 braccia.

L'area di ciascuna delle basi è (93 + 1/5) braccia^2: il dato è ripreso da quello calcolato nel 2° Libro ed è leggermente errato: il dato corretto è (93 + 3/5) braccia^2.

Sul disegno è riportato un altro errore: l'altezza dello spigolo LM è indicata in *10 braccia* invece che in *16 braccia* come scritto nel testo.



Il metodo grafico usato da Bartoli – al netto dei problemi di origine tipografica – è un'assonometria con qualche influenza della prospettiva perché il rapporto di fuga relativo alla base inferiore – (13/16 ≈ 0,8125) – è più piccolo di quello usato per la base superiore (0,86):

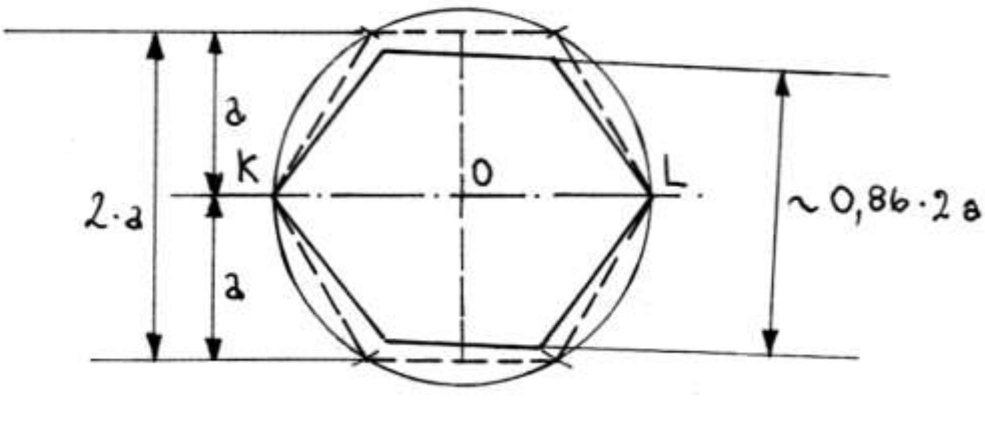


Gli spigoli fra loro paralleli delle due basi del prisma (quelli che terminano nei vertici L e M) non sono paralleli, ma le rette *r* e *s* delle quali essi fanno parte covergono verso un punto collocato fuori dal grafico, in basso a sinistra.

Lo spigolo che fa capo a M lungo – grosso modo – i 13/16 di quello che termina in L.

La base inferiore è leggermente scorciata.

A sua volta, l'esagono della base superiore è deformata come spiega lo schema che segue:



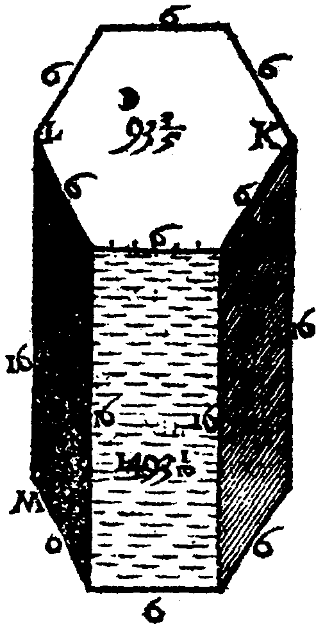
Nella circonferenza di centro O e diametro KL è inscritto un esagono che ha i lati tratteggiati: la distanza fra il centro O e i punti medi dei due lati orizzontale dell'esagono regolare è l'apotema *a*.

L’esagono disegnato da Bartoli è scorciato di un rapporto 0,86.

Il volume del prisma è calcolato da Bartoli moltiplicando l’altezza per l’area di base:

$V = 16 * (93 + 3/5) = 1497 + 3/5$ braccia^3. L’Autore scrive nel testo che il volume è $(1497 + 1/5)$ braccia^3.

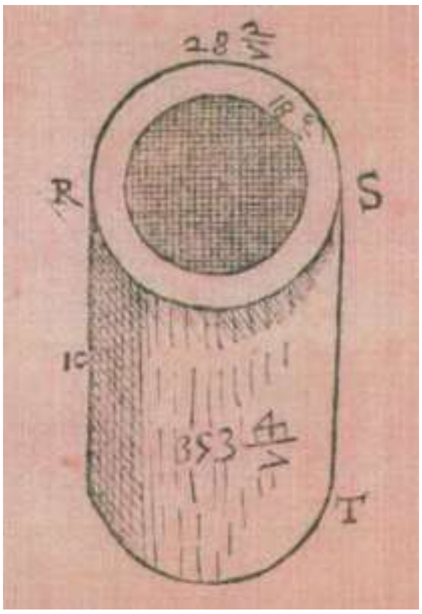
La fonte originale del problema e del disegno è il trattato di Oronce Finé tradotto da Bartoli:



Le lettere sono scritte in posizione simmetrica rispetto a quanto fatto da Bartoli.

Cilindro cavo

Un cilindro retto è cavo ed è alto 10 braccia. Il diametro esterno misura 9 braccia e quello interno 6 braccia.



Il problema chiede di conoscere il volume netto del solido cavo.

La circonferenza del cerchio esterno è:

$c_{ESTERNO} = \pi * d_{ESTERNO} \approx 22/7 * 9 \approx 28 + 2/7$ braccia.

L'area del cerchio esterno è:

$A_{\text{ESTERNO}} = \pi * (d_{\text{ESTERNO}}/2)^2 \approx 22/7 * 9^2/4 \approx 63 + 9/14$ braccia^2.

La circonferenza del cerchio interno è:

$c_{\text{INTERNO}} = = \pi * d_{\text{INTERNO}} \approx 22/7 * 6 \approx 18 + 6/7$ braccia.

L'are del cerchio interno è:

$A_{\text{INTERNO}} = \pi * (d_{\text{INTERNO}}/2)^2 \approx 22/7 * 6^2/4 \approx 28 + 2/7$ braccia^2.

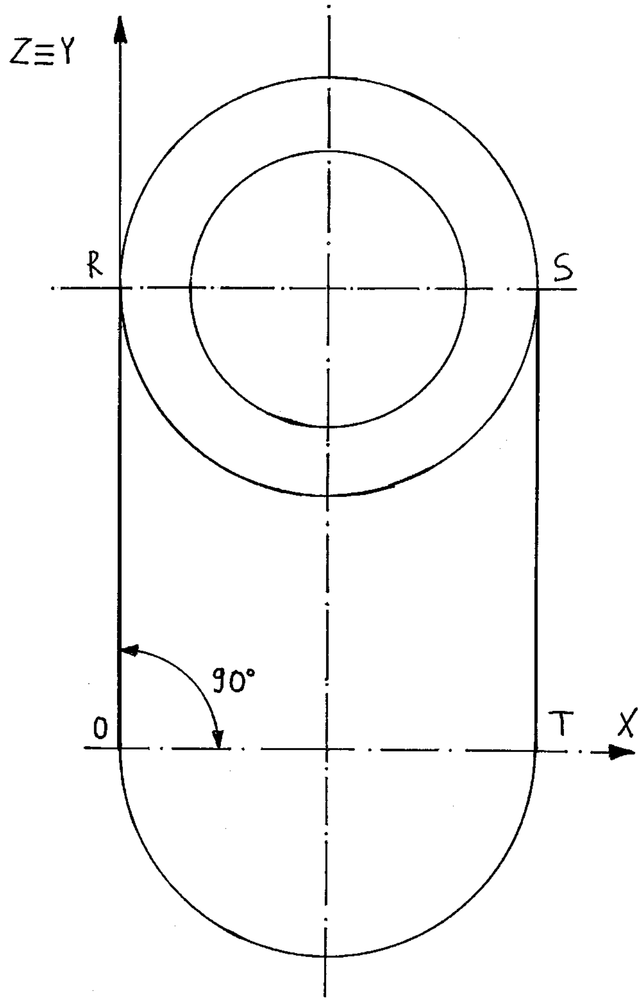
L'area della *corona circolare* che è formata dai due cerchi è data dalla differenza delle due aree:

$A_{\text{CORONA}} = A_{\text{ESTERNO}} – A_{\text{INTERNO}} = (63 + 9/14) – (28 + 2/7) = 35 + 5/14$ braccia^2.

Il volume del solido è dato da:

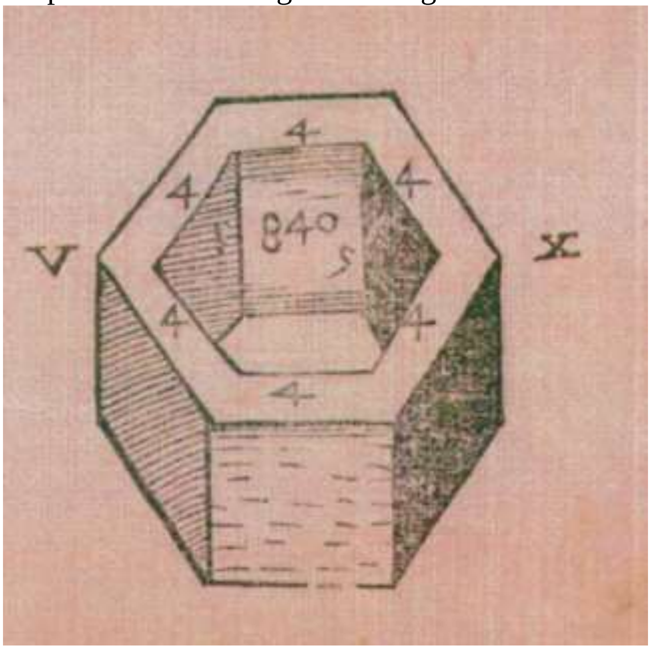
$V = A_{\text{CORONA}} * \text{altezza} = (35 + 5/14) * 10 = 353 + 4/7$ braccia^3.

Anche questo cilindro cavo è disegnato in assonometria con angolo di fuga di 90° e con rapporto di fuga RF uguale a 1: gli assi Y e Z coincidono e formano un angolo (di fuga) di 90° con l'asse X.



Prisma esagonale cavo

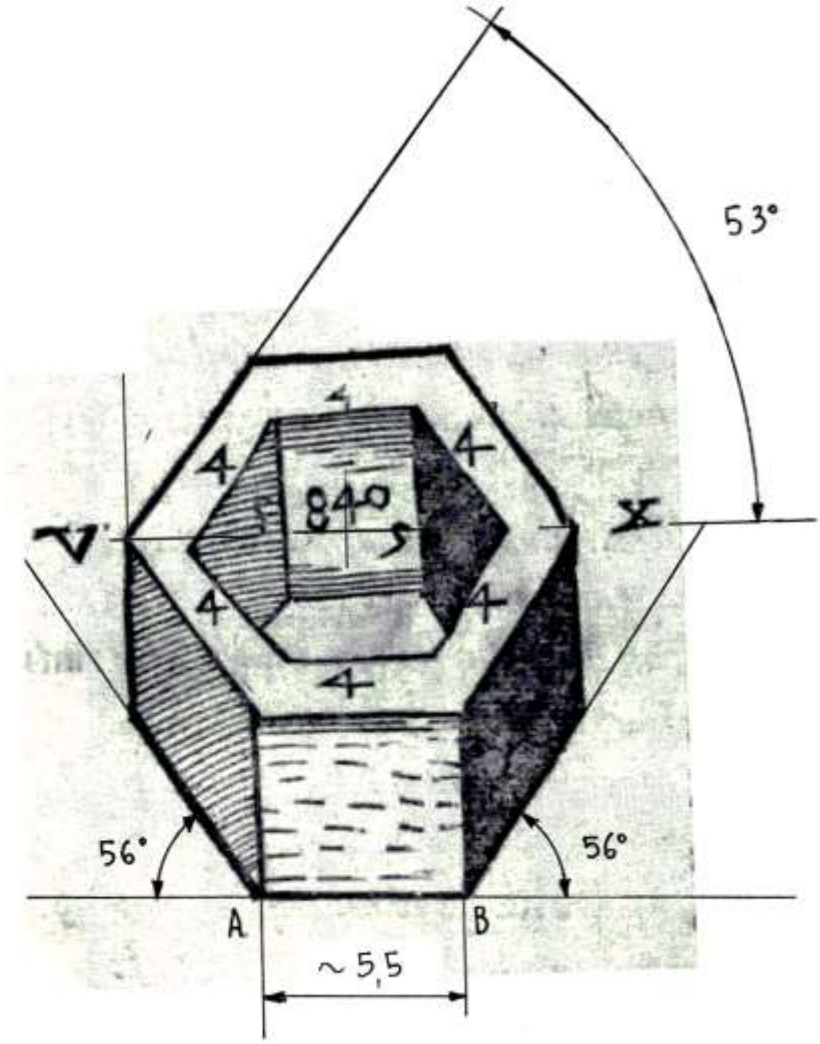
Secondo Bartoli il solido presentato nella figura che segue sarebbe un *vaso vinario*:



La forma è esagonale, regolare, sia all'interno che all'esterno. All'interno vi è un *fondo*.

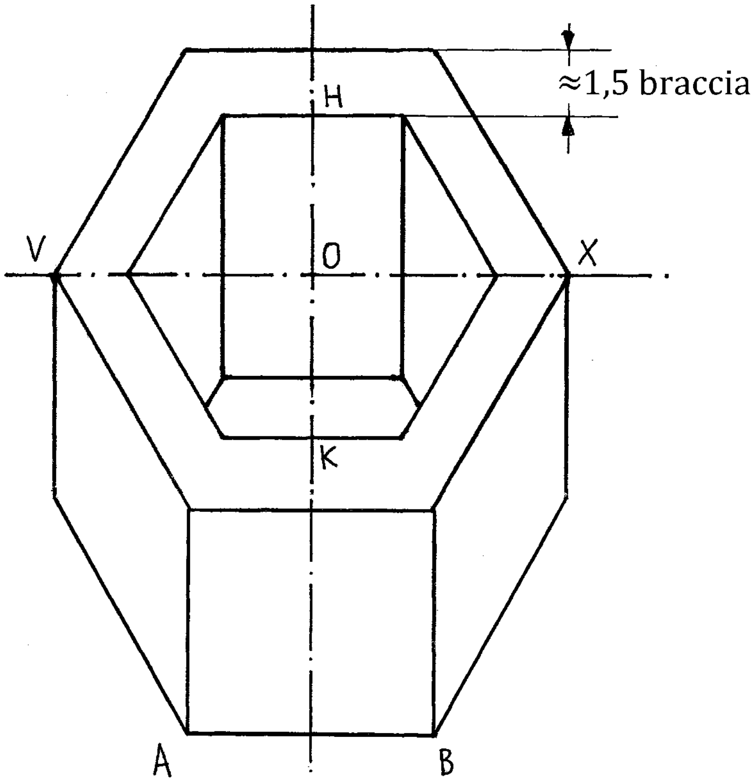
Nel grafico e nel testo sono fornite due sole quote: il lato dell'esagono interno (4 braccia) e l'altezza interna (5 braccia).

Una stima indica in 5,5 braccia la lunghezza AB del lato dell'esagono esterno:

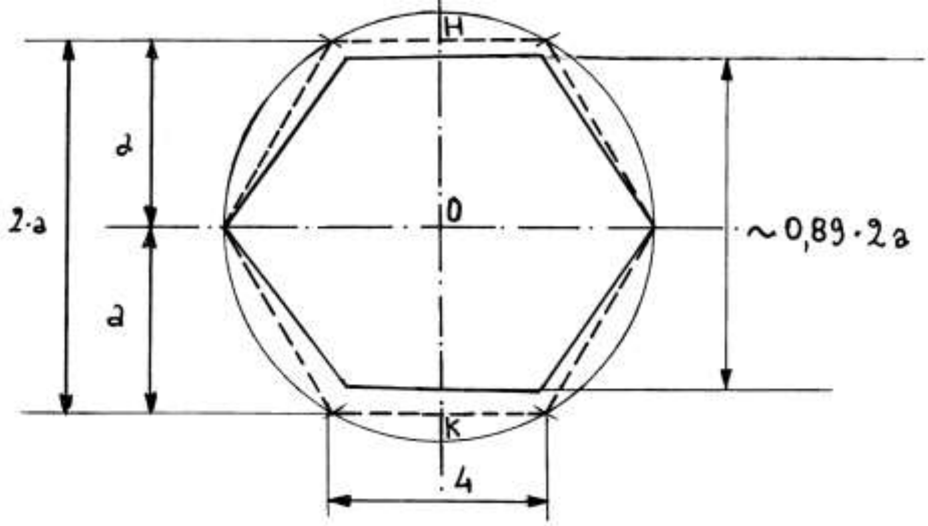


Gli spigoli obliqui sono disegnati con angoli di fuga compresi fra 53° e 56°.

Con lo schema che segue, eseguito in assonometria cavaliera con angolo di fuga uguale a 90°, è stato possibile stimare con una certa precisione lo spessore del muro che delimita le pareti del vaso vinario, circa 1,5 braccia:



L’esagono interno della faccia superiore è scorciato secondo un rapporto di fuga di ~ 0,89:



Bartoli fissa in 42 braccia^2 l’area dell’esagono interno usando implicitamente la formula approssimata di Erone:

Area $_{ESAGONO}$ ≈ 13/5 * lato^2 ≈ 13/5 * 16 = 41,6 braccia^2, valore che l’Autore arrotonda per eccesso a 42 braccia^2.

È opportuno far notare come Bartoli non possieda coscienza della necessità di una distinzione fra unità lineari (il braccio), unità di superficie (il braccio quadrato) e unità di volume (il braccio cubico): Talvolta egli le chiama genericamente “braccia”.

Il volume del *vuoto* di forma esagonale è calcolato da Bartoli usando il valore di 42 braccia^2 per l’area:

Volume = area base * altezza = 42 * 5 = 210 braccia^3.

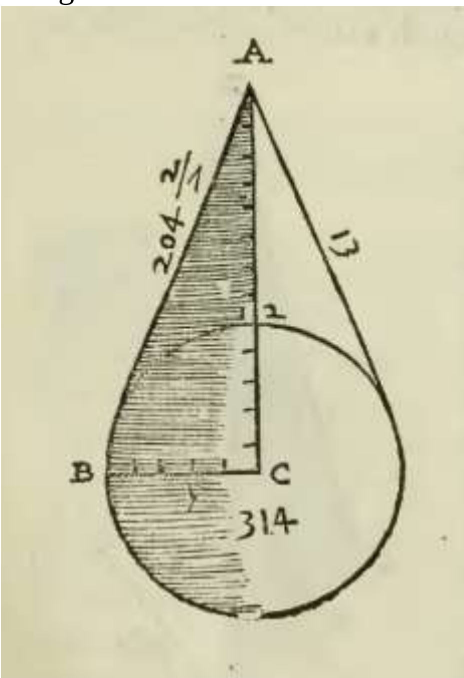
Bartoli afferma che un braccio *quadro* corrisponderebbe a 4 *barili*: forse si riferiva a un *braccio cubico*.

A Firenze, il braccio cubico equivaleva a *5 barili* da vino.

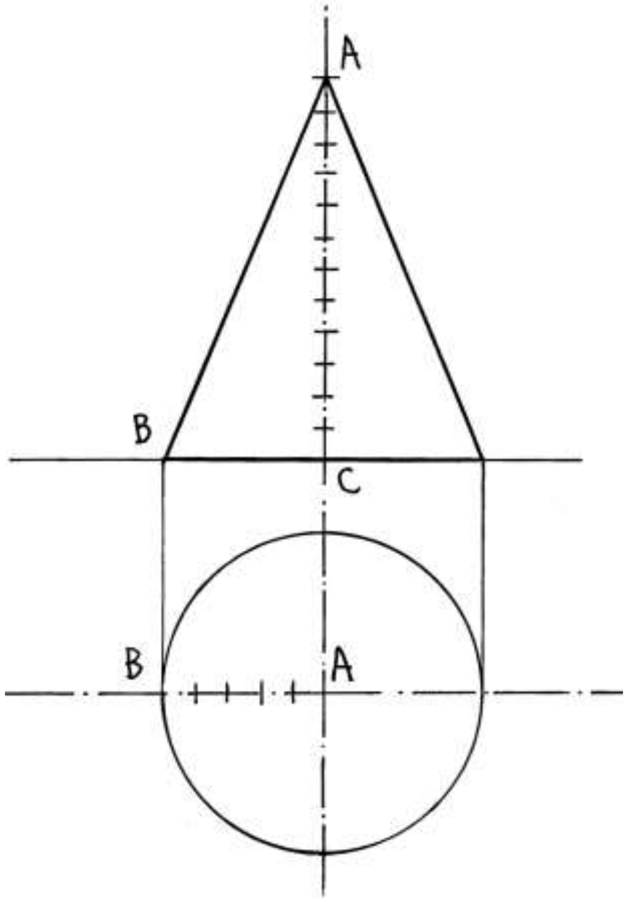
Sull'argomento delle unità di misura del vino usate nel Medioevo e nel Riascimento si rimanda all'articolo *misurabotti.pdf*, disponibile su questo sito (www.geometriapratica.it).

Cono retto

Bartoli calcola il volume e le superfici (di base e laterale) di un cono che egli disegna nel modo mostrato nella figura che segue:



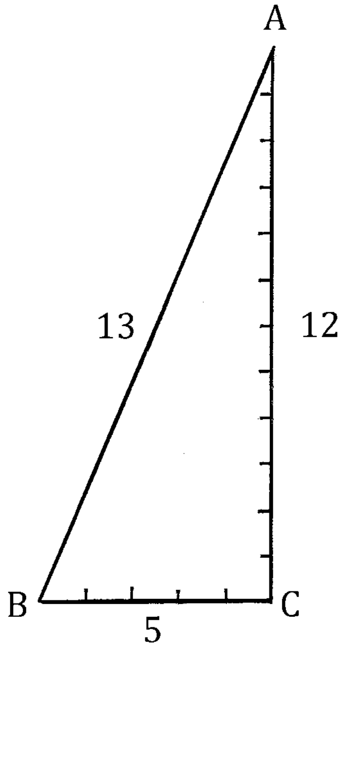
Egli ha fuso in un unico grafico la proiezione ortogonale del cerchio di base e la proiezione verticale del corpo del cono: il metodo usato da Bartoli è senz'altro di grande efficacia.



Sull'altezza AC e sul raggio BC sono riportate le *tacche* che servono a misurare le rispettive lunghezze, rispettivamente 12 e 5 braccia.

Il cono è generato dalla rotazione del triangolo rettangolo ABC intorno al cateto maggiore AC; infatti il triangolo è *pitagorico*:

$AB^2 = AC^2 + BC^2 = 12^2 + 5^2 = 169$ da cui $AB = \sqrt{(169)} = 13$.



Il problema si muove dalla conoscenza della lunghezza dell'*apotema* AB (13 braccia) e del diametro della base (10 braccia).

Con l'applicazione del teorema di Pitagora, Bartoli ricava l'altezza AC.

L'area del cerchio di base è:

$$\text{Area}_{\text{BASE}} = \pi * \text{raggio}^2 \approx 22/7 * 5^2 \approx 78 + 4/7 \text{ braccia}^2.$$

La circonferenza della base, *c*, è lunga:

$$c = 2*\pi*\text{raggio} \approx 22/7 * 5 \approx 31 + 3/7 \text{ braccia}.$$

Il volume del cono è:

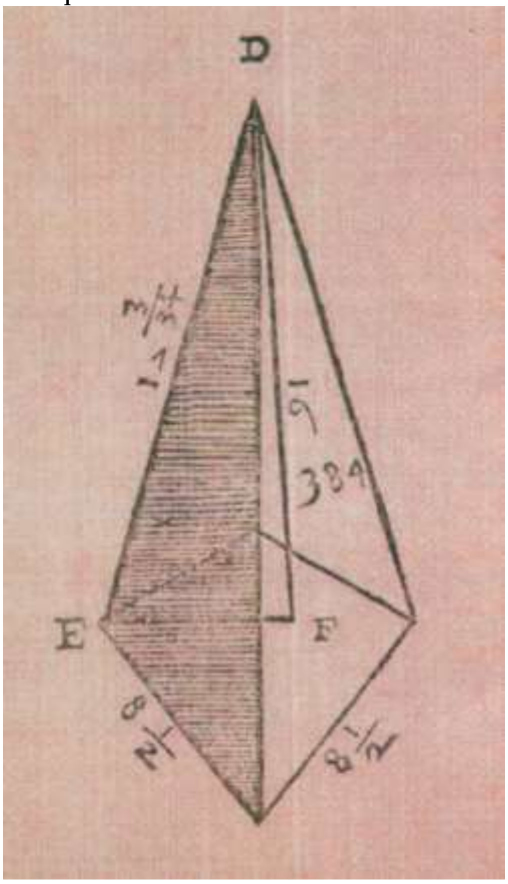
$$V = \text{area base} * \text{altezza}/3 = (78 + 4/7) * 12/3 = 314 + 2/7 \text{ braccia}^3.$$

Infine, Bartoli calcola l'area della superficie laterale del cono:

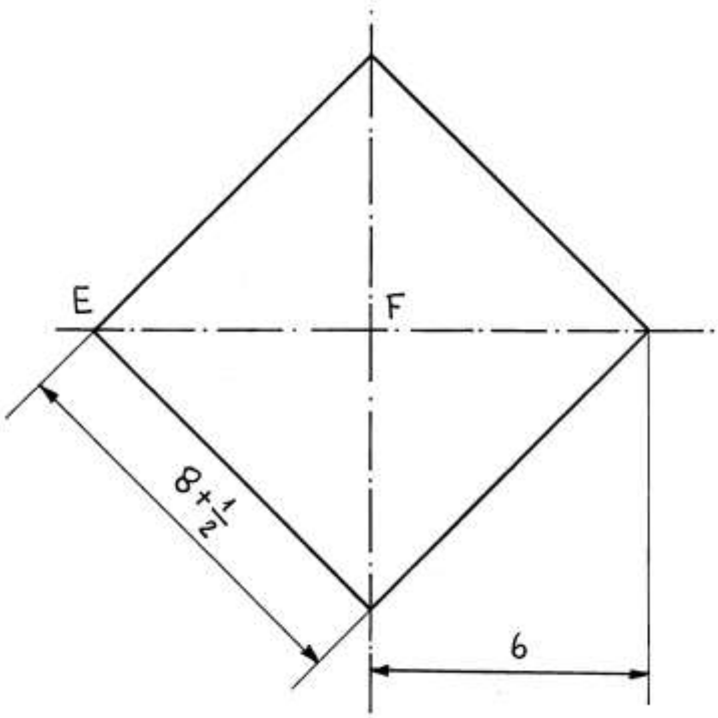
$$\text{Area}_{\text{LATERALE}} = \text{circonferenza} * \text{apotema}/2 = (31 + 3/7) * 13/2 = 204 + 2/7 \text{ braccia}^2.$$

<u>Piramide a base quadrata</u>

Una piramide retta a base quadrata ha le dimensioni scritte sulla figura (da Bartoli):



La base ha forma quadrata con lati lunghi 8,5 braccia e Bartoli stima in 6 braccia la lunghezza delle semidiagonali: EF è una di esse.



I lati del quadrato sono le *ipotenuse* dei quattro triangoli rettangoli isosceli nei quali le diagonali scompongono il poligono regolare. La lunghezza di EF è data da:

$EF = lato/\sqrt{(2)} = \sqrt{(2)} * lato/2 = \sqrt{(2)} * 8{,}5/2 \approx 6{,}01$ braccia che Bartoli arrotonda a 6 braccia.

Gli spigoli della superficie laterale della piramide, come quello DE, sono lunghi (17 + ¼) braccia.

DEF è un triangolo rettangolo di cui sono note le lunghezze dell'ipotenusa DE e del cateto minore EF. Il cateto maggiore DF è l'altezza della piramide e la sua lunghezza è data da:

$DF^2 = DE^2 - EF^2 = (17 + ¼)^2 - 6^2 = 261{,}5625$ e

$DF = \sqrt{(261{,}5625)} \approx 16{,}1729$ braccia che Bartoli arrotonda per difetto a 16 braccia.

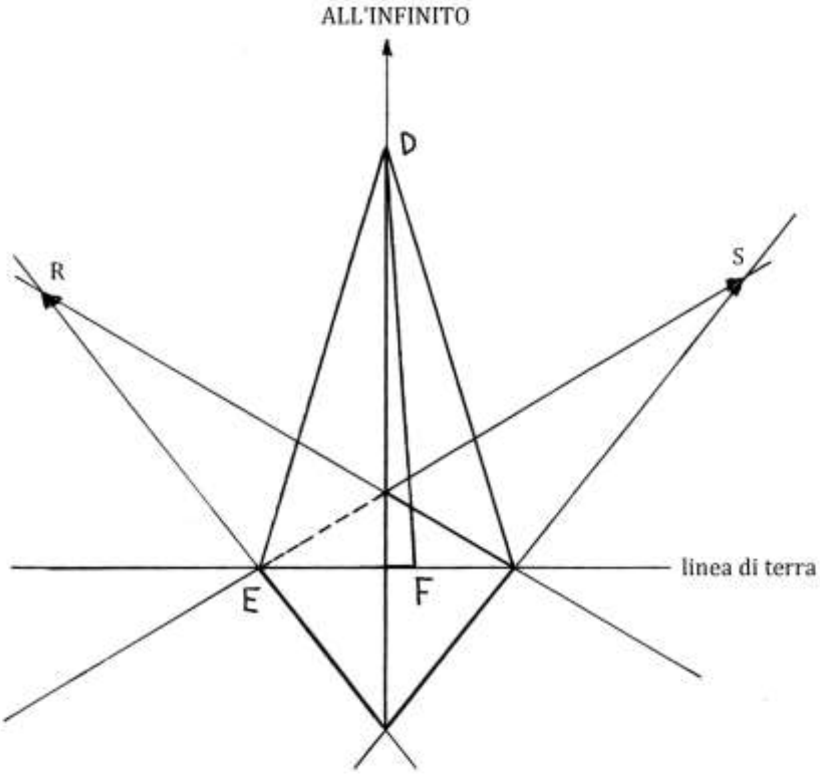
L'area della base è:

$Area_{BASE} = (2 * EF)^2/2 = 4 * 6^2/2 = 72$ braccia^2.

Il volume della piramide è:

$Volume = Area_{BASE} * altezza/3 = 72 * 16/3 = 384$ braccia^3.

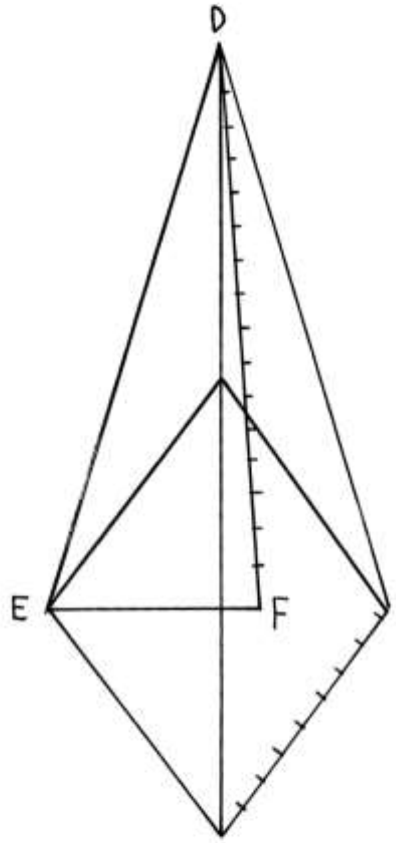
La piramide è disegnata in prospettiva con tre punti di fuga:



Un punto è all'*infinito* e gli altri due sono R e S.

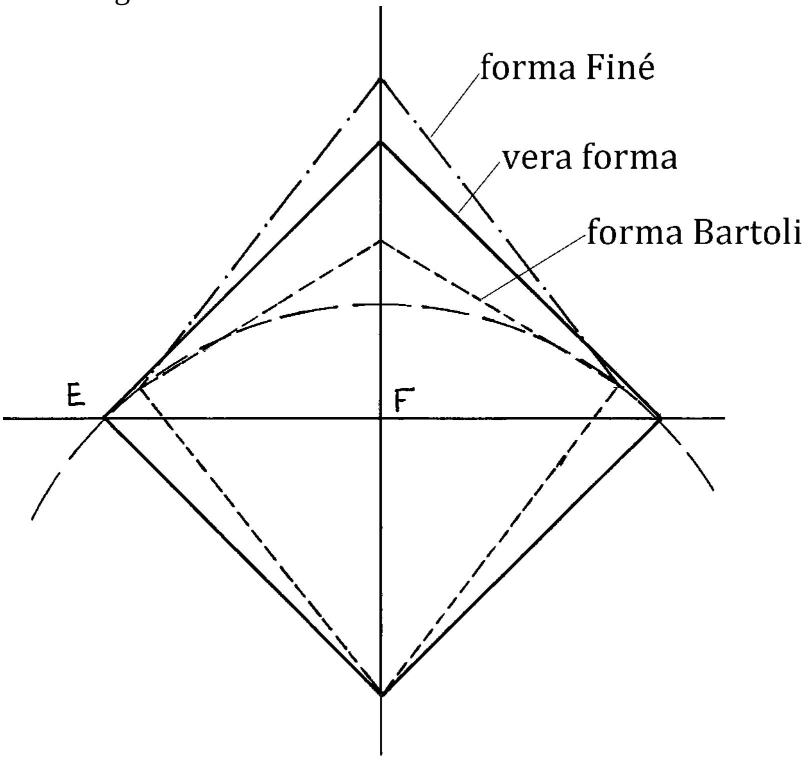
La base presenta una stranezza: essendo la piramide retta, l'altezza DF dovrebbe cadere sull'incrocio delle diagonali del quadrato e invece il punto F, pur rimanendo su una diagonale, è fatto scrorrere verso destra.

La stessa stranezza è presente nel grafico originale di Oronce Finé (nella versione in francese) di cui lo schema che segue è una riproduzione rettificata:



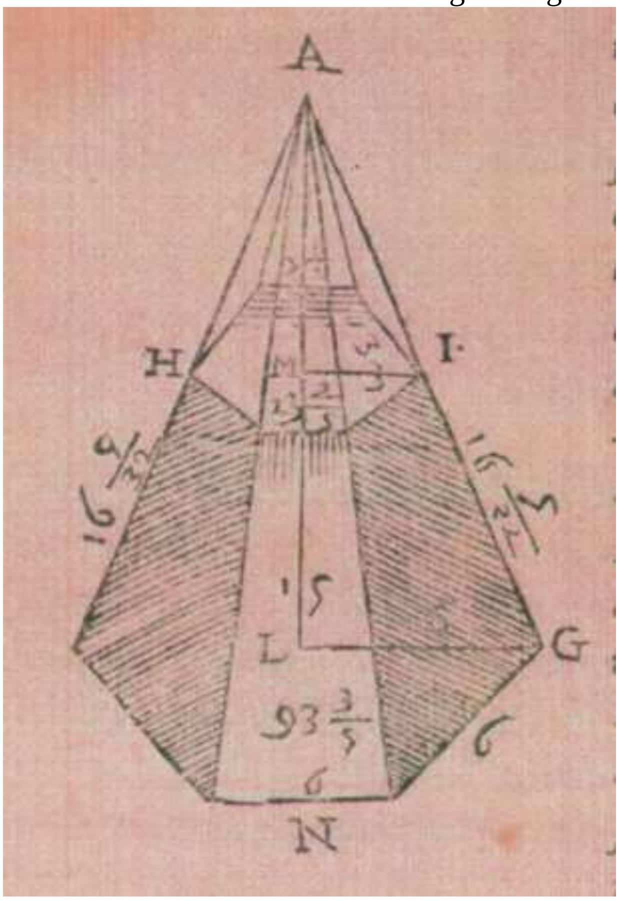
Mentre Bartoli ha deformato la base in un *quadrilatero* che ha lati convergenti a due a due uguali, Finé ha trasformato il quadrato in un *rombo*.

Il grafico che segue mette a confronto la vera forma della base con le due deformazioni:

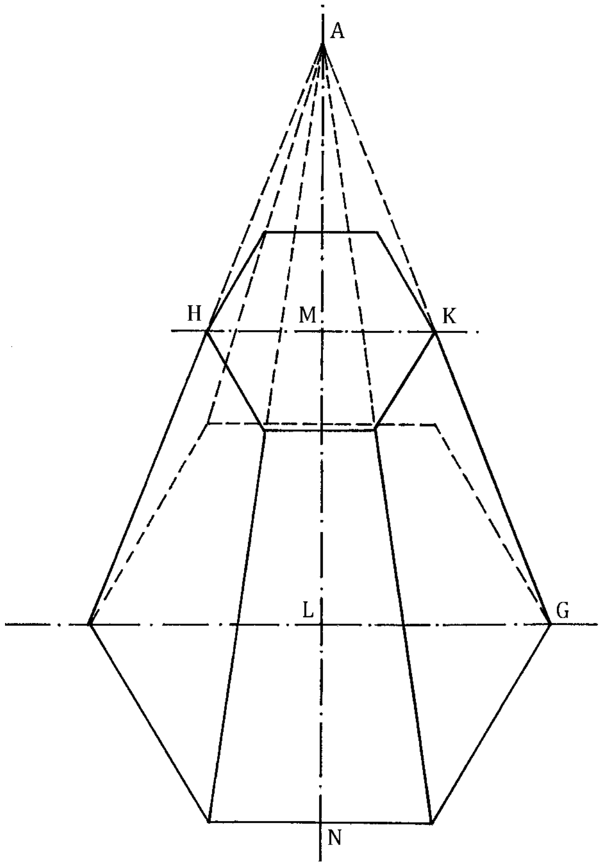


<u>Tronco di piramide esagonale</u>

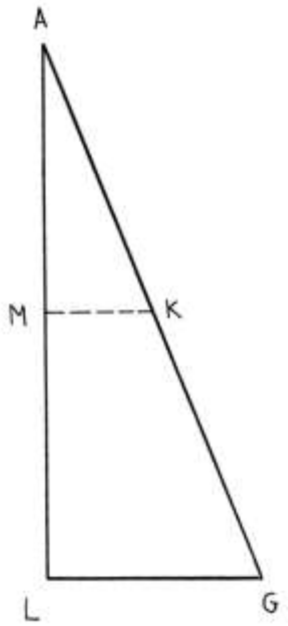
Un tronco di piramide retta ha basi a forma di esagono regolare:



La base inferiore ha lati lunghi 6 braccia e quella superiore 3 braccia.
Il disegno di Bartoli è fuori scala, come spiega il grafico che segue:



L'Autore propone di usare due regoli adagiati su due spigoli laterali del tronco per fissare il loro punto di incontro che è A: questo punto è il vertice della piramide dalla quale deriva il tronco.
Lo spigolo AG è misurato da Bartoli in (16 + 5/32) braccia che coriispondono a ~ 16,155 braccia.
ALG è un triangolo rettangolo di cui sono note le lunghezze del cateto LG e dell'ipotenusa GA:



Il cateto LA è l'altezza dell'intera piramide ed è lungo

$LA = \sqrt{(GA^2 - LG^2)} \approx \sqrt{(16{,}155^2 - 6^2)} \approx 15$ braccia.

Il volume del tronco di piramide è calcolato quale differenza fra quello dell'intera piramide e quello della piramide asportata che ha base sul segmento HK.

Dato che i lati dei due esagoni hanno lunghezze nel rapporto 6 : 3 = 2 : 1, lo spigolo AK è lungo la metà di quello AG e cioè:

$AK = AG/2 = (16 + 5/32)/2 = (8 + 5/64)$ braccia che Bartoli arrotonda a $(8 + 1/10)$ braccia.

Anche il segmento AM è lungo metà dell'altezza AL: AM è l'altezza della piramide asportata ed è 7,5 braccia.

Per calcolare il volume di una piramide della quale è nota l'altezza occorre conoscere anche l'area della sua base.

L'area dell'esagono di lato 6 braccia è data: $(93 + 3/5)$ braccia^2. Il risultato è certamente il frutto dell'applicazione della formula approssimata di Erone:

$\text{Area}_{\text{ESAGONO}} = 13/5 * \text{lato}^2$.

L'area dell'esagono superiore è $(23 + 2/5)$ braccia^2.

Il volume della piramide di altezza AL è dato da:

$V_{\text{PIRAMIDE INTERA}} = \text{Area base} * \text{altezza}/3 = (93 + 3/5) * 15/3 = 468$ braccia^3.

Il volume della piramide tagliata è:

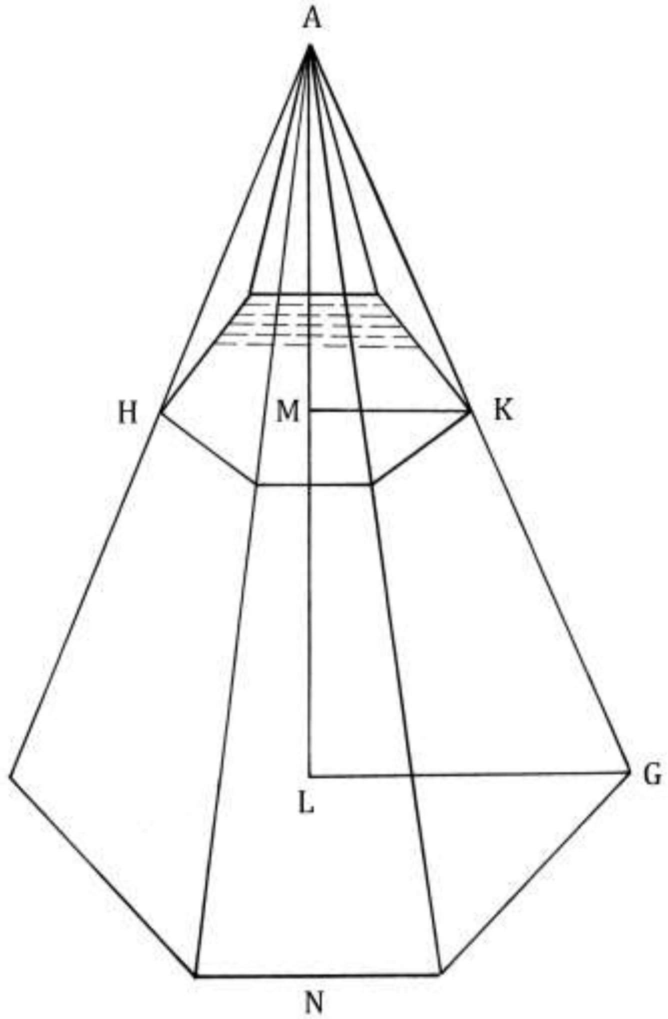
$V_{\text{PIRAMIDE TAGLIATA}} = (23 + 2/5) * 7{,}5/3 = 58{,}5$ braccia^3.

Il volume del tronco di piramide è dato dalla differenza fra i volumi delle due piramidi:

$V_{\text{TRONCO}} = V_{\text{PIRAMIDE INTERA}} - V_{\text{PIRAMIDE TAGLIATA}} = 468 - 58{,}5 = 409 + ½$ braccia^3.

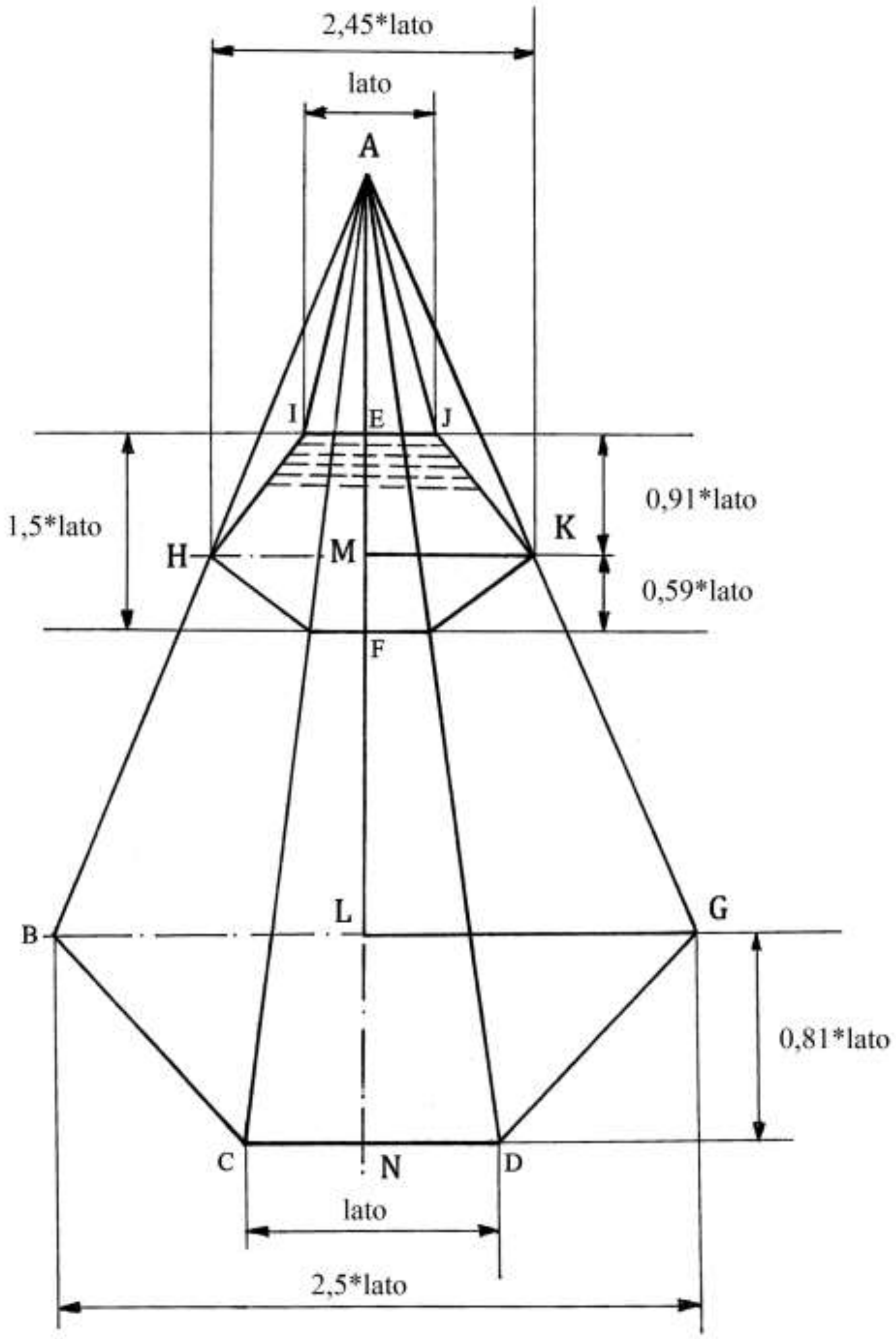
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Il grafico che segue riproduce semplificandolo lo schema di Bartoli:



Sono evidenti diversi errori:

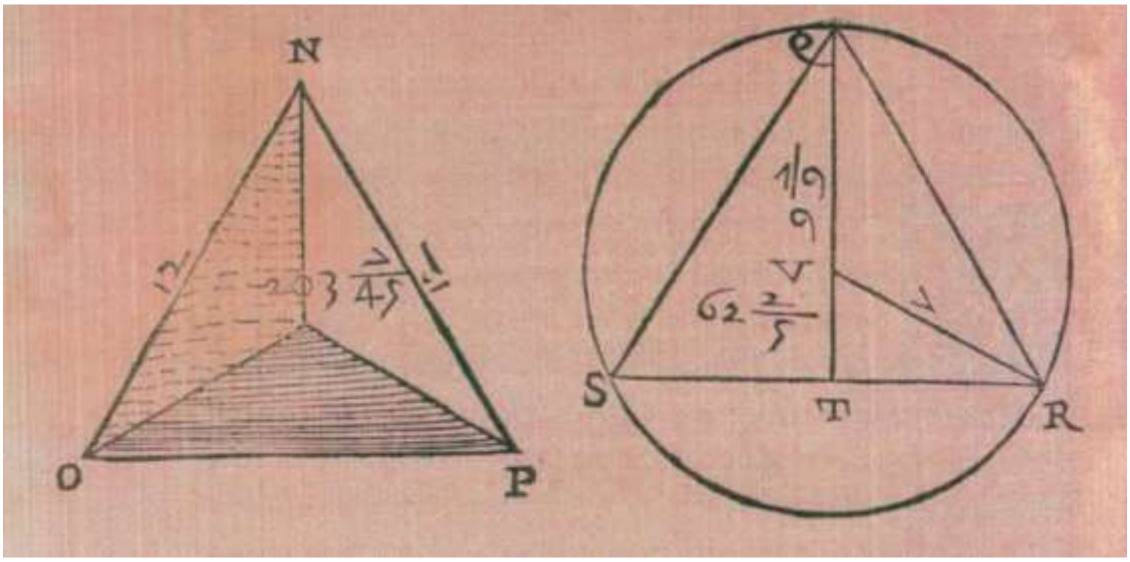
* Il segmento IJ è un lato dell’esagono superiore: HK dovrebbe essere lundo il doppio e invece è ~ 2,45 volte.
* L’esagono superiore è deformato in modo strano: se fosse disegnato in assonometria cavaliera con angolo di fuga di 90°, i segmenti EM e MF sarebbero uguali e lunghi quanto l’*apotema* dell’esagono e cioè ~ 0,866 volte il lato. Il doppio apotema HF è lungo 1,5 volte il lato invece di √3 volte.
* La metà superiore dell’esagono è espansa in senso verticale e EM è più lungo dell’apotema: 0,91 volte il lato invece di 0,866 volte il lato. Al contrario, la metà inferiore dell’esagono è compressa e MF è lungo soltanto 0,59 volte il lato.
* L’esagono della presenta altri errori: CD è il lato e il segmento BG è più lungo del doppio del lato e cioè ~ 2,5 il lato.
* L’apotema LN è più corto del reale: 0,81 volte il lato invece di 0,866 volte.
* Infine, la base superiore è eccessivamente sposta verso l’alto, come è evidente dal confronto con la ricostruzione fatta in precedenza con le misure corrette.



<u>Tetraedro</u>

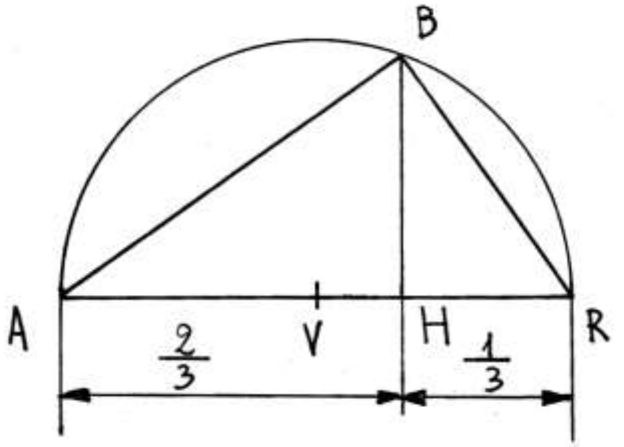
Il tetraedro è un solido delimitato da *quattro* facce che hanno forma di triangoli equilateri.

A sinistra è disegnata la vista in pianta del solido e a destra la proiezione sempre sul piano orizzontale della sfera con il tetraedro inscritto.



Nell'esempio di Bartoli, gli spigoli sono lunghi 12 braccia e il solido è inscritto in una sfera della quale il raggio VR è stimato in 7 braccia.

Nel XIII libro degli *Elementi* di Euclide è spiegata la proporzione esistente fra il diametro della sfera e la lunghezza dello spigolo del tetraedro:



AR è il diametro *d* della sfera e VR è un suo raggio, *r*. Dividere AR in due parti proporzionali a 2 e a 1:

AH : 2 = HR : 1 .

Disegnare la semicirconferenza con centro in V e raggio VA e innalzare dal punto H la perpendicolare a AR: essa interseca la semicirconferenza in B.

ABR è un triangolo rettangolo inscritto nel semicerchio.

L'altezza BH = *h* è medio proporzionale fra le lunghezze di AH e di HR:

AH : BH = BH : HR da cui $BH^2 = AH * HR$.

Dato che AH = 2/3 * d e HR = 1/3 * d, sostituiamo questi valori nelle formule precedenti.

$BH^2 = h^2 = (2/3 * d) * (1/3 * d) = 2/9 * d^2$ da cui

BH = h = (√2)/3 * d .

Nel triangolo rettangolo ABH, l'ipotenusa AB è lunga:

$AB^2 = AH^2 + BH^2 = (2/3 * d)^2 + 2/9 * d^2 = 2/3 * d^2$. Ne consegue che la lunghezza di AB è:

AB = d * √(2/3) .

La corda AB è la lunghezza dello spigolo del tetraedro inscritto in una sfera di diametro

AR = d .

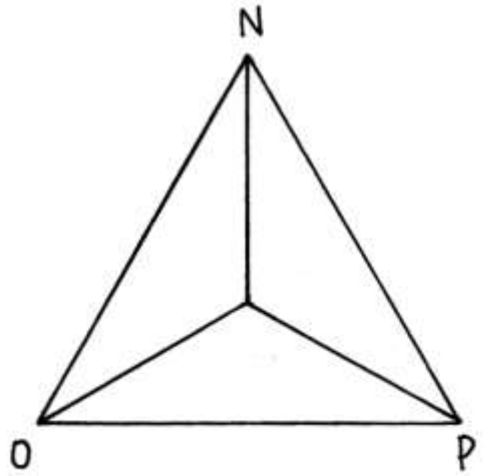
Conoscendo la lunghezza di AB è facile risalire a quella del diametro d:

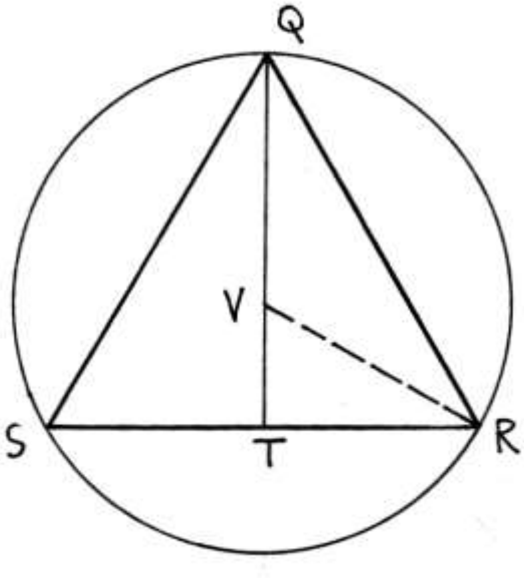
d = 3 * spigolo * √(2/3)/2 .

Conoscendo la lunghezza dello spigolo, 12 braccia, Bartoli calcola il diametro (e il raggio) della sfera:

d = 3 * 12 * √(2/3)/2 ≈ 14,697 braccia. Il raggio è 7,348 braccia che Bartoli arrotonda per difetto a 7 braccia, con uno scostamento abbastanza significativo.

I due schemi che seguono aiutano a calcolare l'altezza QT della base triangolare:





Per calcolare l'area della base QRS è necessario conoscere l'altezza QT. Bartoli la determina in (9 + 7/9) braccia.

QT è data da:

QT = QV + VT = VR + ½ * VR = 3/2 * VR. Ma VR è il raggio della sfera, che Bartoli ha fissato in 7 braccia, per cui l'altezza QT vale:

QT = 3/2 * 7 = 10,5 braccia.

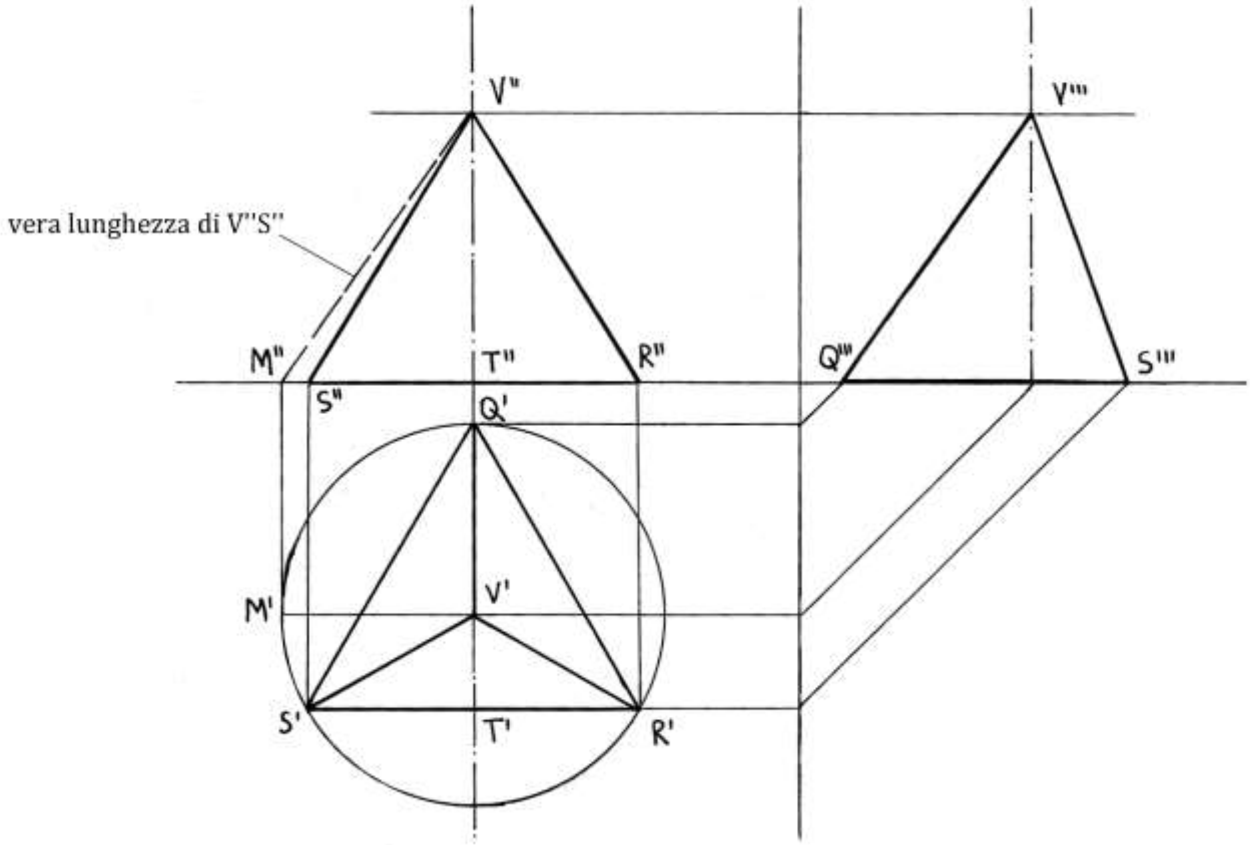
L'area della base è:

Area $_{QRS}$ = lato base * altezza/2 ≈ 12 * 10,5/2 ≈ 63 braccia^2.

Seguendo implicitamente la formula di Erone, Bartoli calcola l'area della base QRS con la formula:

Area $_{QRS}$ ≈ 13/30 * spigolo^2 ≈ 13/30 * 12^2 ≈ 62,4 braccia^2, valore che Bartoli esprime nella forma (62 + 2/5).

Occorre ora determinare l'altezza del tetraedro. Il grafico che segue mostra le tre viste in proiezioni ortogonali secondo il metodo europeo:



V''T'' è l'altezza del solido.

Dal punto M' innalzare la perpendicolare alla *linea di terra* fino a incontrarla nel punto M'': il segmento M''V'' è la *vera lunghezza* dello spigolo V''S''.

Il triangolo M''V''T'' è rettangolo e di esso conosciamo la lunghezza dell'ipotenusa M''V'' (che è lo spigolo del solido) e quella del cateto M''T'' (che è il raggio della sfera). L'altezza è data da:

$(V''T'')^2 = (M''V'')^2 - (M''T'')^2 = 12^2 - 7^2 = 144 - 49 = 95$ da cui

$(V''T'') = \sqrt{(95)} \approx 9{,}746$ braccia che Bartoli arrotonda a (9 + 7/9).

Il volume del solido è:

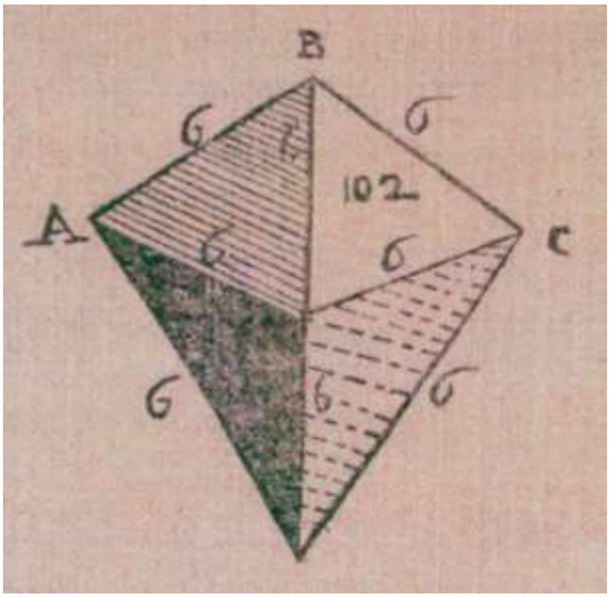
Volume = Area base * altezza/3 ≈ (62 + 2/5) * (9 + 7/9)/3 ≈ 203,37 braccia^3.

Bartoli ricava un volume di (203 + 7/41) braccia^3 → (203 +1/6) arrotondate a 203 braccia^3.

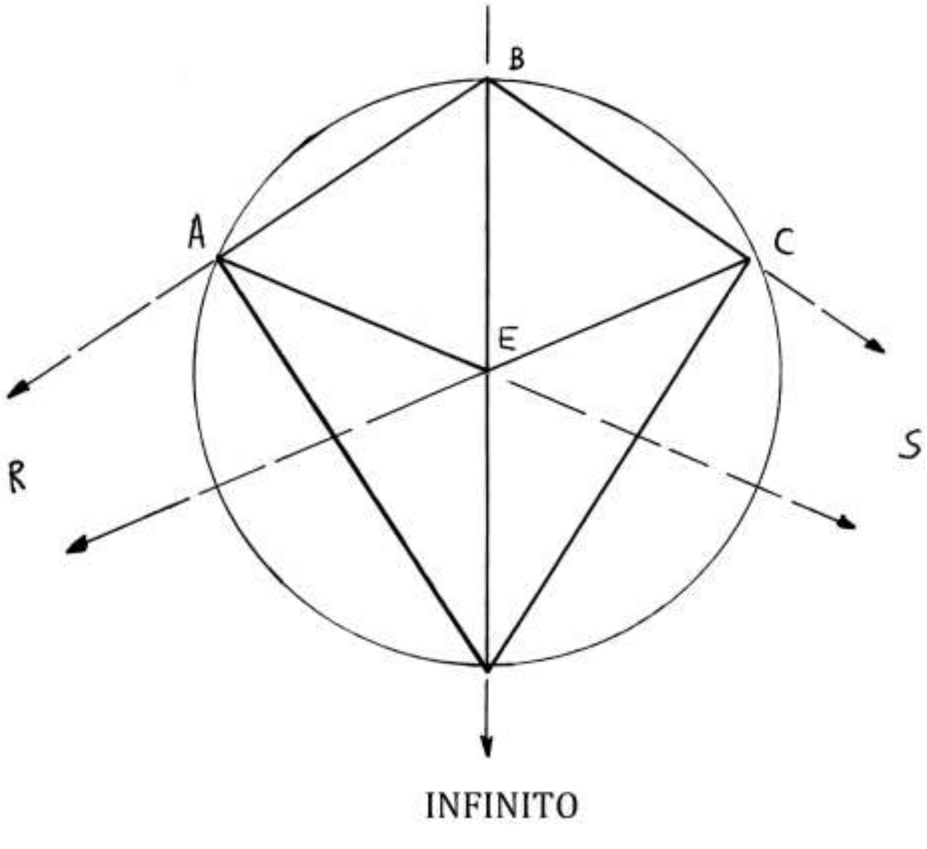
<u>Ottaedro</u>

L'ottaedro è il solido delimitato da *otto* facce che hanno la forma di triangoli equilateri: esso è inscrivibile in una sfera.

Bartoli ne propone uno che ha lati lunghi 6 braccia:



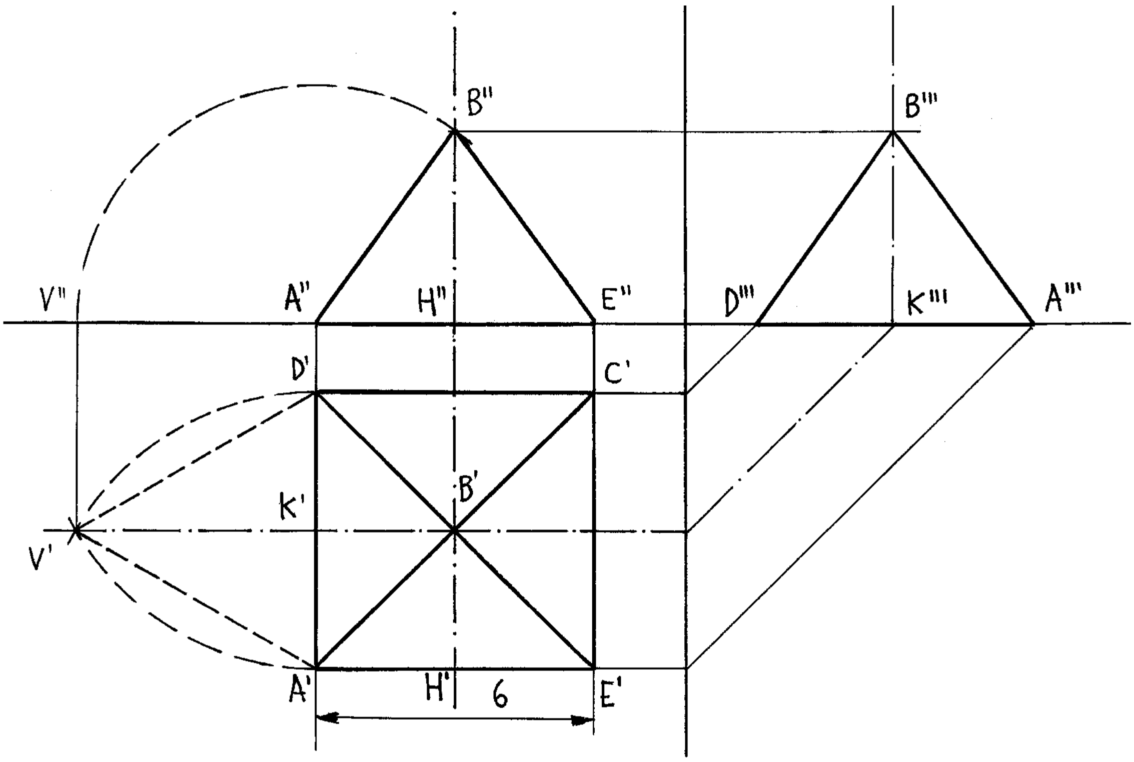
Lo schema di Bartoli pare rappresentato in prospettiva con tre punti di fuga: uno all'infinito e due determinati dalle convergenze degli spigoli verso i punti R e S.



Lo schema così tracciato pare avere i vertici giacenti su una circonferenza di centro E e raggio EA, di lunghezza uguale a quella della proiezione dello spigolo dell'ottaedro.

La circonferenza è il profilo della sfera nella quale è inscritto l'ottaedro.

Il solido è formato da due piramidi a base quadrata unite per le basi. Le quattro facce di ciascuna piramide sono triangoli equilateri e le basi quadrate hanno lati lunghi quanto quelli dei triangoli:



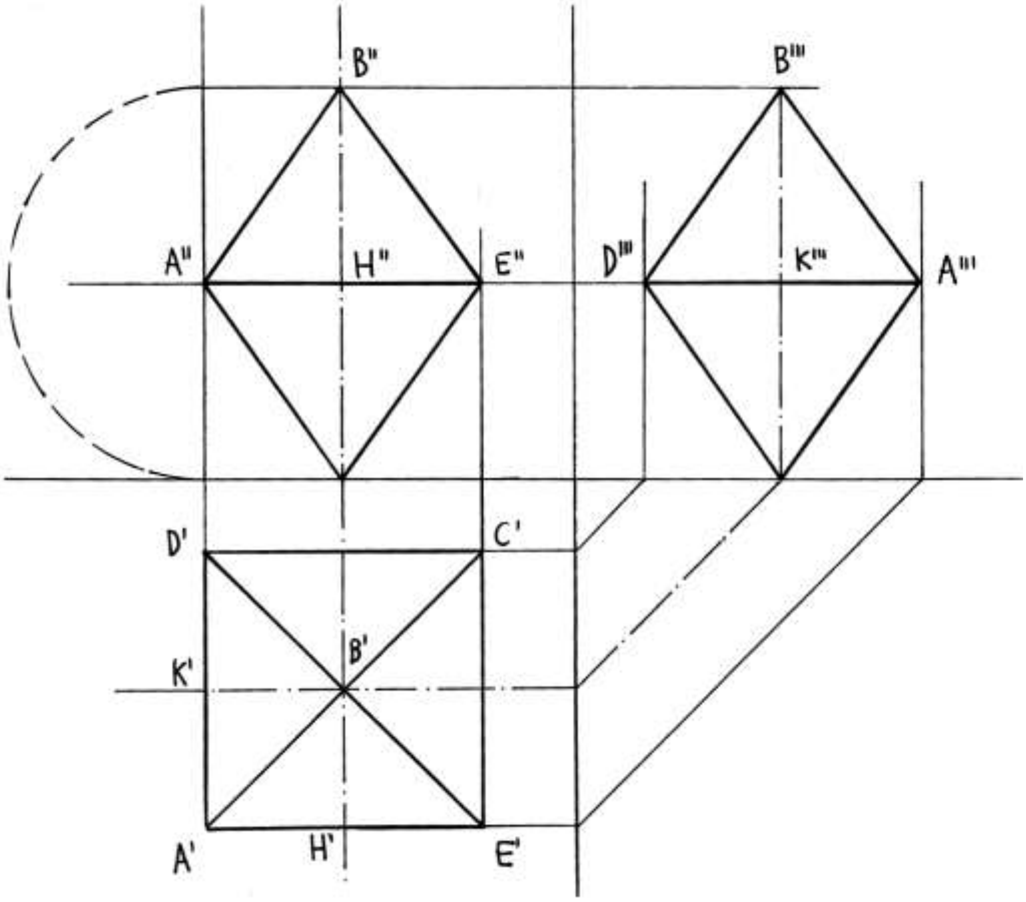
Il disegno qui sopra contiene le proiezioni ortogonali di una piramide, che è metà dell'ottaedro, secondo il *metodo europeo*.

Per determinare l'altezza della piramide (B''H'' e B'''K''') occorre procedere come in figura: sul lato D'A' costruire il triangolo equilatero D'A'V' e l'altezza K'V': il triangolo ha le stesse dimensioni di una qualsiasi faccia dell'ottaedro.

Proiettare il punto V' sulla linea di terra fino a fissare il punto V''.

Fare centro in A'' e con raggio A''V'' tracciare un arco da V'' fino a intersecare l'asse di simmetria verticale in un punto, B'': B''H'' è l'altezza della piramide (che, come vedremo, in seguito, è lunga quanto le quattro semidiagonali del quadrato A'D'C'E').

È ora possibile disegnare le proiezioni ortogonali dell'intero ottaedro:



La procedura usata da Bartoli per calcolare il volume dell'ottaedro è la seguente. In primo luogo egli determina il *diametro* della base quadrata e cioè la lunghezza della diagonale AC = d:

$AC = d = \sqrt{(AD^2 + DC^2)} = \sqrt{(lato^2) + lato^2)} = \sqrt{(6^2 + 6^2)}\ \sqrt{(72)} \approx 8{,}485$ braccia che Bartoli arrotonda per eccesso a (8 + ½) braccia.

Il volume è calcolato da Bartoli con la seguente formula:

$V = lato^2 * diagonale/3 \approx 6^2 * 8{,}5/3 \approx 102$ braccia^3.

Il metodo impiegato da Bartoli è sintetizzato nella formula che segue:

$V = lato^2 * diagonale/3 = lato^2 * (\sqrt{2} * lato)/3 = 1/3 * \sqrt{2} * lato^3$ che è la formula corretta.

Verifichiamo l'origine della formula. L'altezza *h* di una piramide è B''H'' che è un cateto del triangolo rettangolo A''B''H''. L'ipotenusa A''B'' è lunga quanto l'altezza K'V' di un triangolo equilatero:

$A''B'' = \sqrt{(3)}/2 * lato$.

Il cateto A''H'' è lungo metà del *lato* dei triangoli equilateri; quindi:

$(B''H'')^2 = (A''B'')^2 - (A''H'')^2 = 3/4 * lato^2 - 1/4 * lato^2 = 1/2 * lato^2$. Ne consegue:

$B''H'' = lato * \sqrt{(2)}/2 = 6 * \sqrt{(2)}/2 = 3 * \sqrt{2}$ braccia.

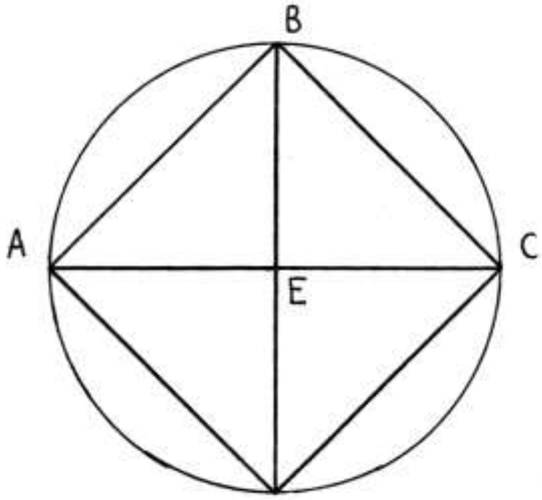
Il volume dell'ottaedro è:

$V = (2 * B''H'') * lato^2/3 = 2 * \sqrt{2} * 36 \approx 101{,}82$ braccia^3, da arrotondare per eccesso a 102 braccia^3, che è il valore calcolato da Bartoli, che chiama *braccia sode* le braccia cubiche.

Infine, il raggio della sfera nella quale è inscritto l'ottaedro è lungo:

$raggio = lato/\sqrt{2} = \sqrt{2} * lato/2$.

Nella figura che segue, AB è il lato dei triangoli equilateri e EA è il raggio della sfera:

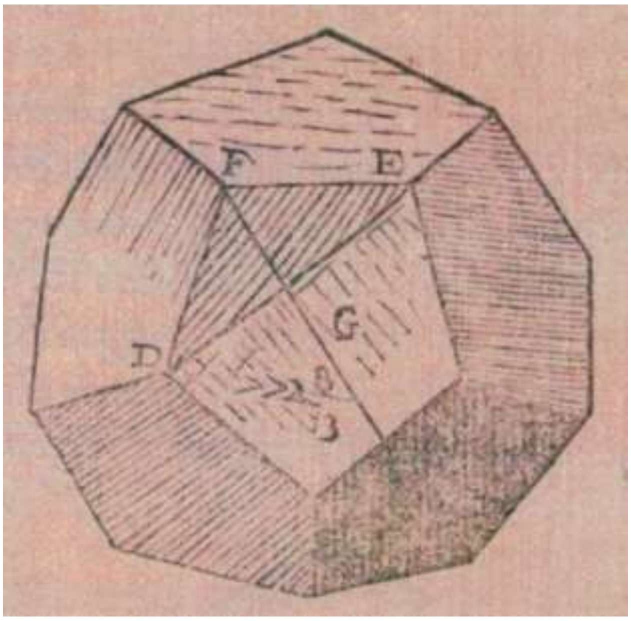


AB è l'ipotenusa del triangolo rettangolo isoscele ABE e la sua lunghezza è √2 volte quella di AE.

Dodecaedro

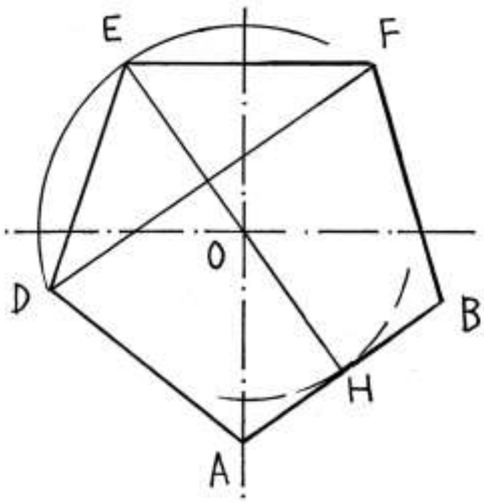
Un altro poliedro regolare è il complesso dodecaedro che è delimitato da *dodici* facce a forma di pentagono regolare.

Bartoli semplifica il calcolo del suo volume immaginando di scomporlo in *dodici* piramidi a base pentagonale.



Per calcolare il volume di ciascuna piramide occorre determinare la sua altezza.

Una faccia pentagonale è un poligono inscritto in un cerchio che ha raggio *r* lungo 4 braccia: OE è un raggio.



Nel pentagono è inscrivibile una seconda circonferenza che ha raggio OH: è l'*apotema*, *a*.

EH è un'altezza, *h*, e cioè un segmento che collega un vertice, E, con il punto medio, H, del lato opposto.

L'altezza è formata da:

EH = EO + OH = raggio esterno + apotema = r + a.

Per comprendere la procedura impiegata da Bartoli occorre calcolare le lunghezze delle entità del pentagono.

L'apotema è lunga:

$a = r * (1 + \sqrt{5})/4 \approx 0{,}809 * r$.

L'altezza *h* è lunga:

$h = r + a \approx 1{,}809 * r$.

La diagonale DF = d è:

$d = (1 + \sqrt{5})/2 * \text{lato} \approx 1{,}618 * \text{lato}$.

Infine, fra le lunghezze del lato del pentagono (e spigolo del dodecaedro) e del raggio del cerchio circoscritto, *r*, vale la seguente relazione:

EF/OE = lato/r ≈ 1,1755.

Nel caso di questo pentagono il lato è:

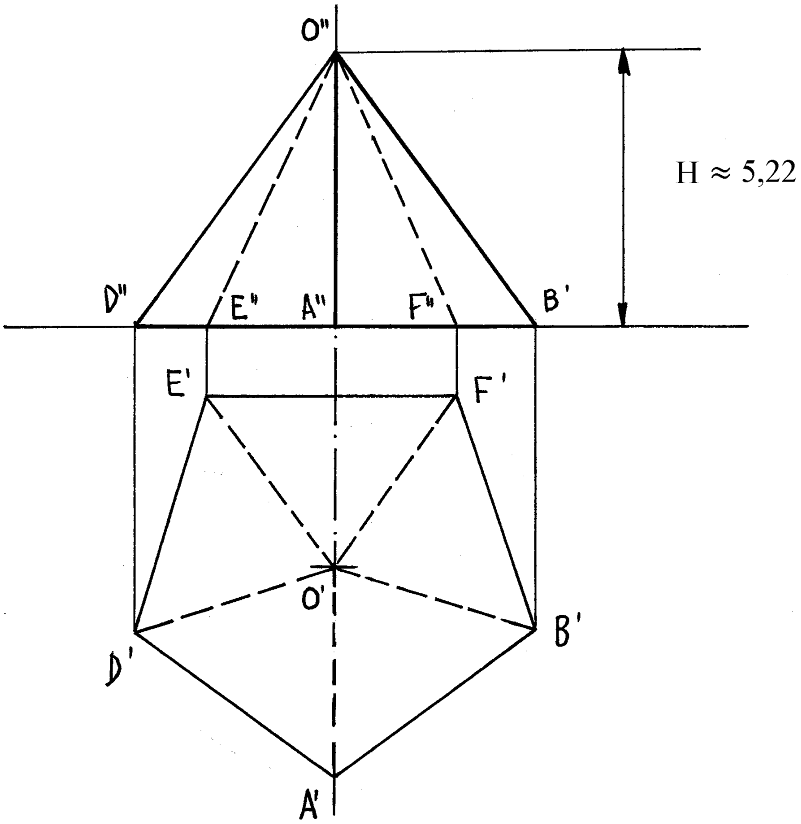
lato ≈ 1,1755 * r ≈ 1,1755 * 4 ≈ 4,702 braccia (che Bartoli arrotonda a 4 + 2/3).

Quindi, la diagonale *d* è lunga:

d ≈ 1,618 * 4,702 ≈ 7,6 braccia (che Bartoli indica come 7 + 3/5).

La procedura impiegata da Bartoli contiene i seguenti passi:

* Moltiplicare la lunghezza della diagonale per se stessa: 7,6 * 7,6 ≈ 57,76 (che Bartoli approssima a 57 + 2/3).
* Moltiplicare per 3: 57,76 * 3 ≈ 173,28 (per Bartoli 172 + 1/3).
* Estrarre la radice quadrata: √(173,28) ≈ 13,16 (per Bartoli è 13 + 8/65).
* Dividere per 2: 13,16 : 2 = 6,58 (per Bartoli è 6 + 73/130).
* Moltiplicare l'ultimo quoziente per se stesso: 6,58 * 6,58 ≈ 43,32 (per Bartoli 42 + 48/65).
* Sottrarre dall'ultimo quadrato il quadrato del raggio OE: $43{,}32 - 4^2 \approx 27{,}32$ (per Bartoli 26 + 48/65).
* Estrarre la radice quadrata: √(27,32) ≈ 5,22 braccia, altezza *H* di una piramide a base pentagonale (per Bartoli 5 + 113/650).



La procedura fin qui messa in opera da Bartoli è riassunta con la formula che segue:

$$H = \sqrt{\frac{\sqrt{3 \cdot d^2}}{2} - r^2}$$

Occorre ora calcolare l'area di un pentagono che Bartoli calcola con il metodo illustrato nel Libro Secondo e indica in (37 + 1/3) braccia^2.

Applicando la più corretta formula approssimata di Erone si ha:

Area $_{\text{PENTAGONO}}$ ≈ 12/7 * lato^2 ≈ 12/7 * 4,702^2 ≈ 37,9 braccia^2 (per Bartoli 37 + 1/3).

Moltiplicare l'area per l'altezza H e dividere per 3:

Volume $_{\text{PIRAMIDE}}$ ≈ Area $_{\text{PENTAGONO}}$ * H/3 ≈ 37,9 * 5,22/3 ≈ 65,946 braccia^3 , volume della piramide (per Bartoli 64 + 5/23).

Il volume del dodecaedro è *dodici* volte quello di una singola piramide:

Volume $_{\text{DODECAEDRO}}$ = 12 * Volume $_{\text{PIRAMIDE}}$ ≈ 12 * 65,946 ≈ 791,352 braccia^3 (per Bartoli 772 + 3/13).

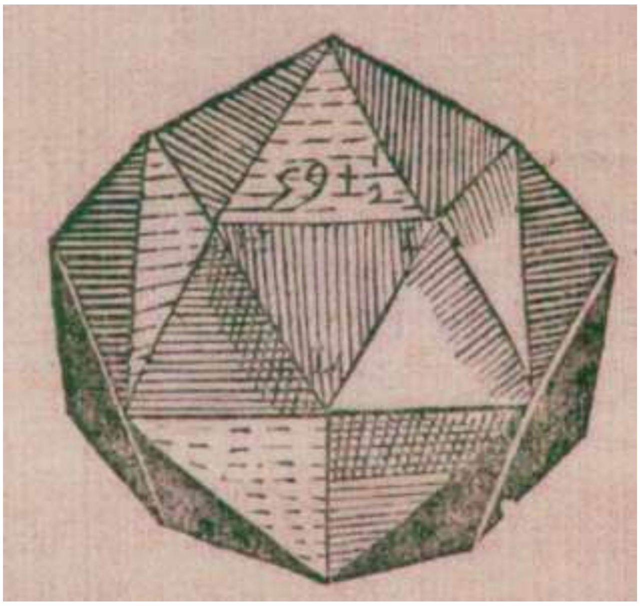
Per calcolare il volume del dodecaedro è oggi usata una formula approssimata:

V $_{\text{DODECAEDRO}}$ ≈ 7,663 * lato^3 ≈ 7,663 * 4,702^3 ≈ 796,61 braccia^3.

I risultati ottenuti sopra sono abbastanza vicini a questo ultimo.

Icosaedro regolare

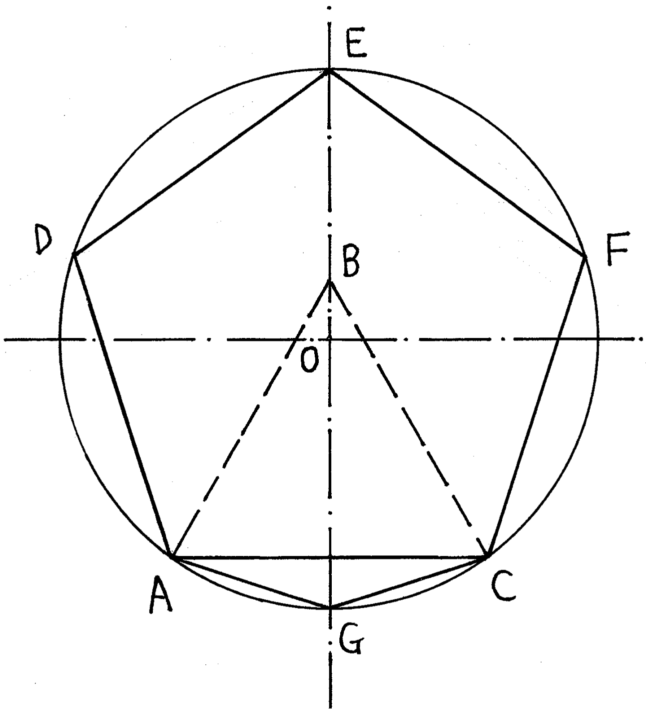
L’icosaedro è un solido delimitato da *venti* facce a forma di triangoli equilateri:



Bartoli calcola il volume del solido impiegando un metodo simile a quello già applicato nel caso del dodecaedro: la sua scomposizione virtuale in piramidi (in questo caso *venti*).

Gli spigoli o lati del solido sono lunghi 6 braccia.

La costruzione proposta da Bartoli coinvolge un pentagono inscritto e un decagono ad esso collegato.



ABC è un triangolo equilatero con lati lunghi 6 braccia ed è una delle facce del solido. Sul lato AC costruire il pentagono ADEFC e determinare il punto O, intersezione delle altezze del poligono, e centro del cerchio in cui è inscritto.

Tracciare i due assi perpendicolari passanti per O. Le corde AG e GC sono due lati del decagono inscritto nello stesso cerchio.

Il raggio OA è legato alla lunghezza del lato AC dalla relazione

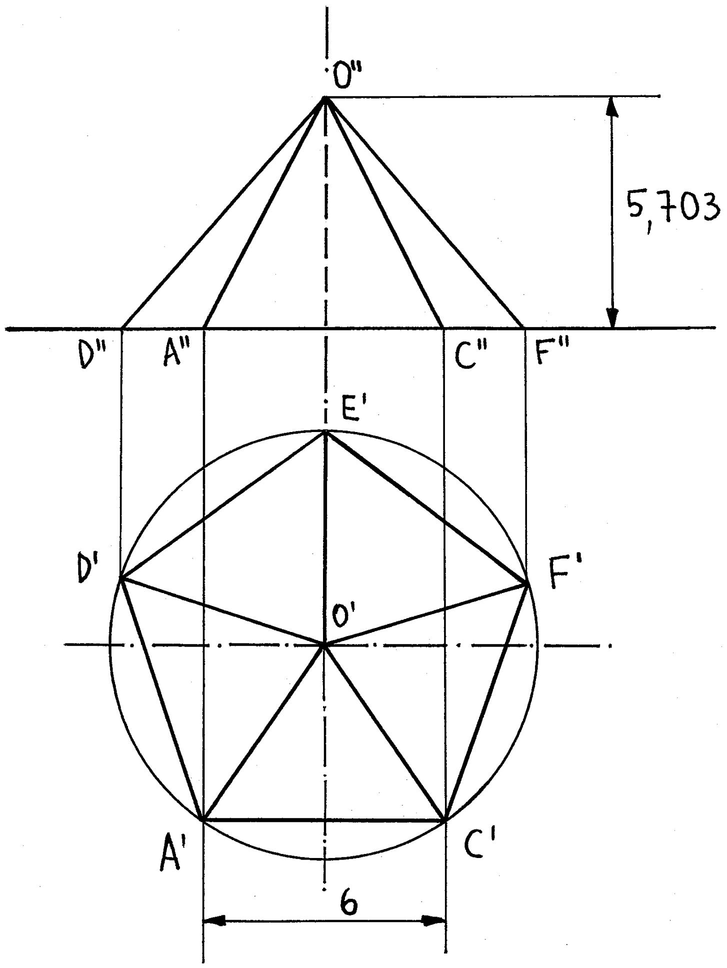
$$OA \approx AC/1{,}176 \approx 6/1{,}176 \approx 5{,}10 \text{ braccia.}$$

A sua volta, il lato del decagono è legato al raggio del cerchio dalla seguente relazione:

AG = ($\sqrt{5}$ – 1)/2 * raggio ≈ 0,618 * 5,1 ≈ 3,153 braccia (qui fa la sua comparsa la *sezione aurea*).

La procedura impiegata da Bartoli per calcolare il volume di una delle venti piramidi virtuali che compongono l'icosaedro contiene i seguenti passi:

* Moltiplicare per se stessa la lunghezza di uno spigolo del solido: 6 * 6 = 36 ;.
* Moltiplicare per se stessa la lunghezza del lato del decagono: 3,153 * 3,153 = 9,941 [per Bartoli il lato del decagono è lungo (3 + 1/8)].
* Sottrarre l'ultimo quadrato dal precedente: 36 – 9,941 = 26,059 che è il quadrato del raggio del cerchio nel quale sono inscritti il pentagono e il decagono [per Bartoli è (26 + ¼)].
* Estrarre la radice quadrata: $\sqrt{(26,059)}$ ≈ 5,10 braccia, raggio del cerchio [per Bartoli è (5 + 1/7)].
* Sommare la lunghezza del lato del decagono e quella di metà del raggio: 3,153 + 5,1/2 = 3,153 + 2,55 = 5,703 braccia [per Bartoli è (5 + 11/16)], che è l'altezza di una piramide.



Occorre ora calcolare l'area della base della piramide, che è un triangolo equilatero:

Area $_{\text{TRIANGOLO}}$ = 13/30 * lato^2 ≈ 15,6 braccia^2 [per Bartoli è (15 + 3/5)].

Il volume di una piramide è:

V $_{\text{PIRAMIDE}}$ = Area $_{\text{TRIANGOLO}}$ * altezza/3 = 15,6 * 5,703/3 = 29,65 braccia^3 [per Bartoli (29 + 23/40)].

Il volume dell'icosaedro è *venti* volte quello di una piramide:

V $_{\text{ICOSAEDRO}}$ = 20 * V $_{\text{PIRAMIDE}}$ = 20 * 29,65 braccia^3 [per Bartoli (591 + ¾)].

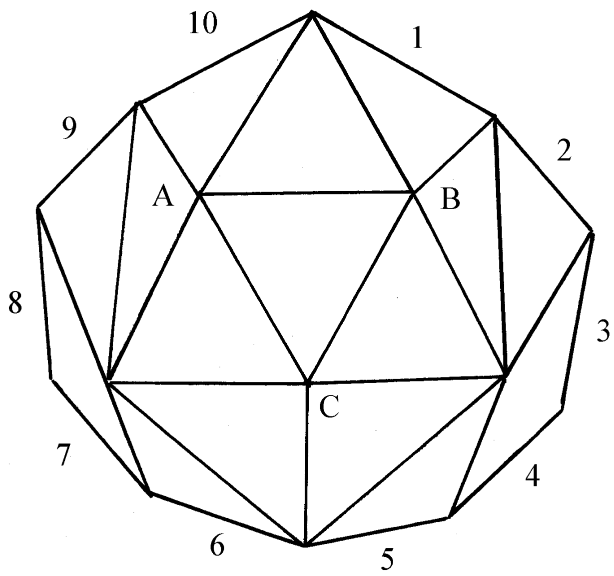
Oggi, il volume è calcolato con una formula:

$V \approx 5/12 * (3 + \sqrt{5}) * spigolo^3 \approx 471{,}25$ $braccia^3$.

Il metodo di Bartoli porta a un risultato errato per eccesso.

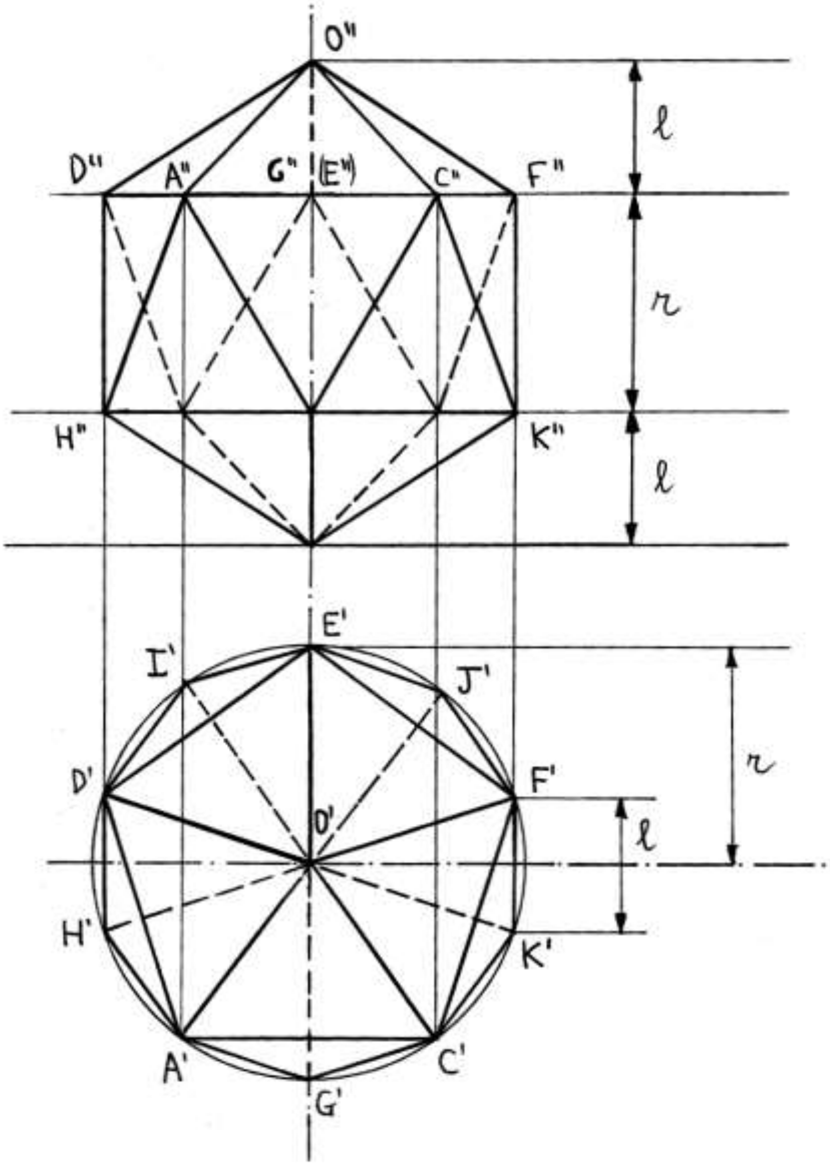
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Si rende opportuno un approfondimento per chiarire il coinvolgimento del decagono. Lo schema di Bartoli è semplificato nel grafico che segue:



Il profilo esterno è un poligono formato da *dieci* segmenti: è un decagono. Il triangolo ABC è equilatero anche nella figura originale di Bartoli.

Il grafico seguente è la proiezione ortogonale (metodo europeo) sul piano orizzontale e su quello verticale dell'icosaedro:



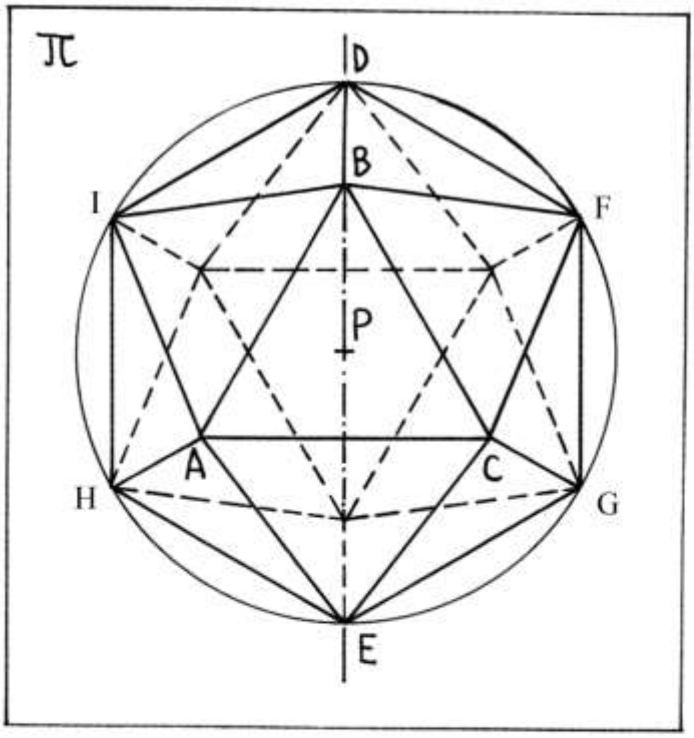
In pianta, è visibile il decagono A'H'D'I'E'J'F'K'C'G', forma che il solido visualizza. Vi è pure disegnata la circonferenza circoscritta di centro O' e raggio O'A' nella quale sono inscritti il pentagono e il decagono. O'A' è anche il raggio *r* della sfera nella quale è inscritto l'icosaedro.

Con ℓ è indicata la lunghezza del lato del decagono.

La vista sul piano verticale genera un profilo esterno a forma di esagono *non regolare*.

%%%%%%%%%%%%%%%%%

Π è un piano trasparente interposto fra un icosaedro e l'osservatore: su π è disegnato il solido che ha la faccia ABC parallelo al piano stesso:



Il metodo i proiezione impiegato in questo caso è quello *americano*.

ABC è un triangolo equilatero anche nella proiezione.

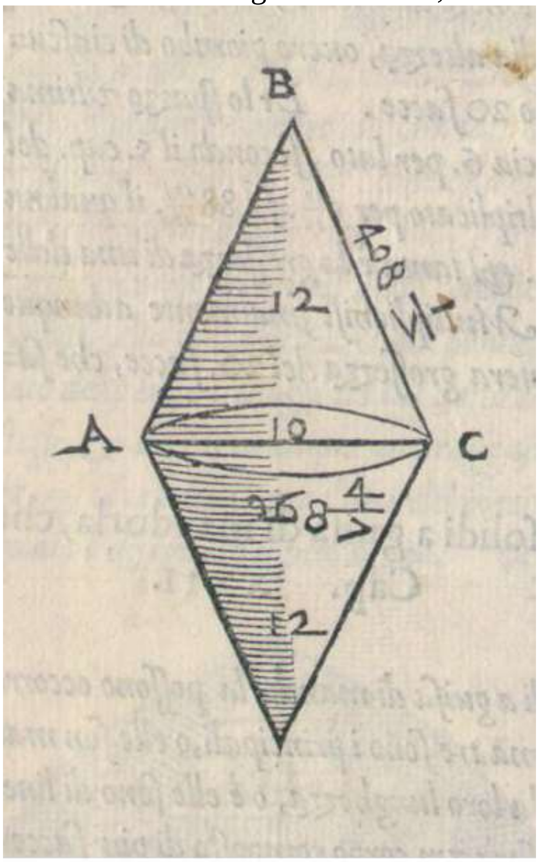
Il solido è inscritto in una sfera di centro P e raggio PD = PE.

Sei degli spigoli del solido formano l’esagono regolare DFGEHI inscritto nella circonferenza che rappresenta il profilo della sfera.

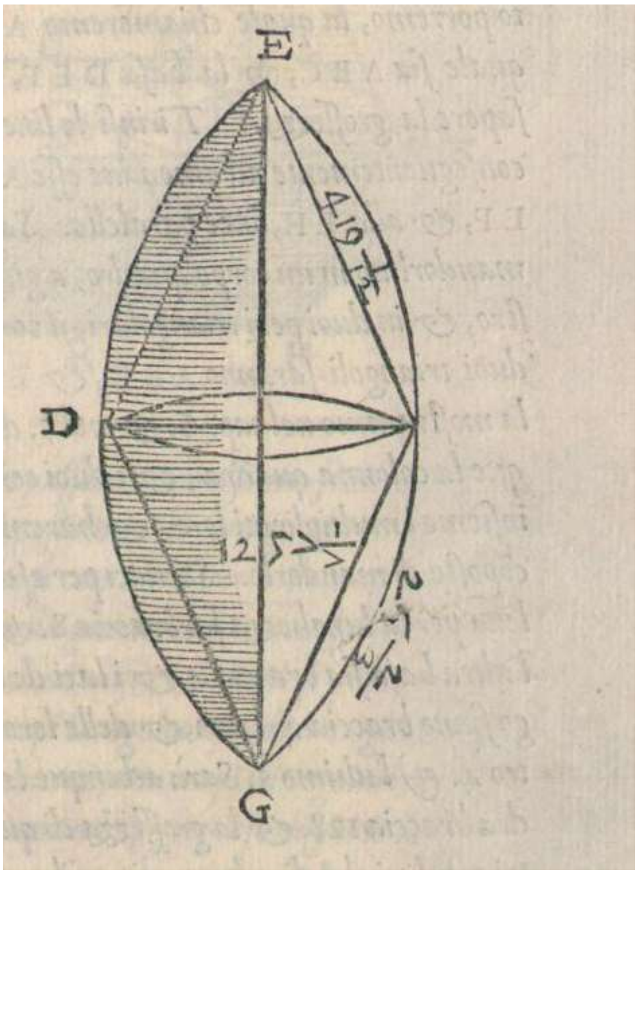
Misura di corpi solidi a forma di mandorla

Bartoli distingue *tre* diversi tipi di solidi a forma di *mandorla*:

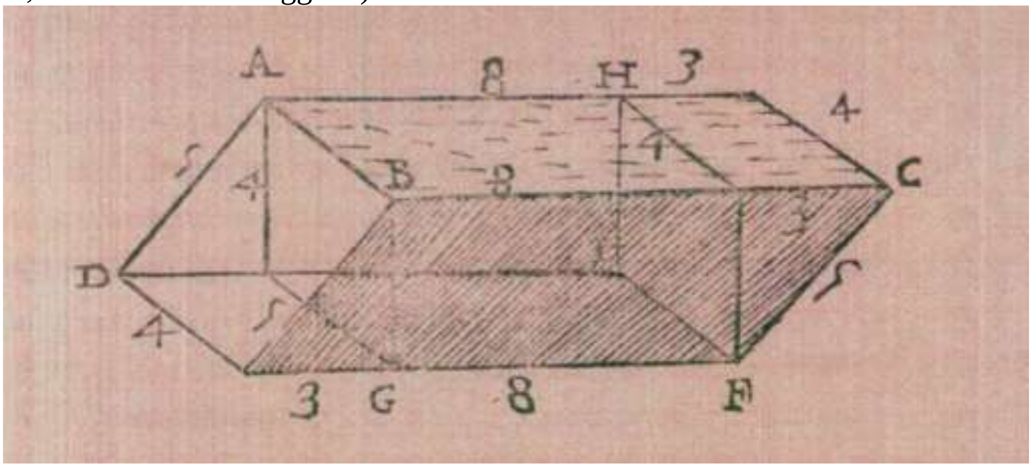
* Solidi circolari lateralmente definiti da segmenti di retta, come è il caso del *doppio cono*:



* Solidi circolari racchiusi fra linee curve:

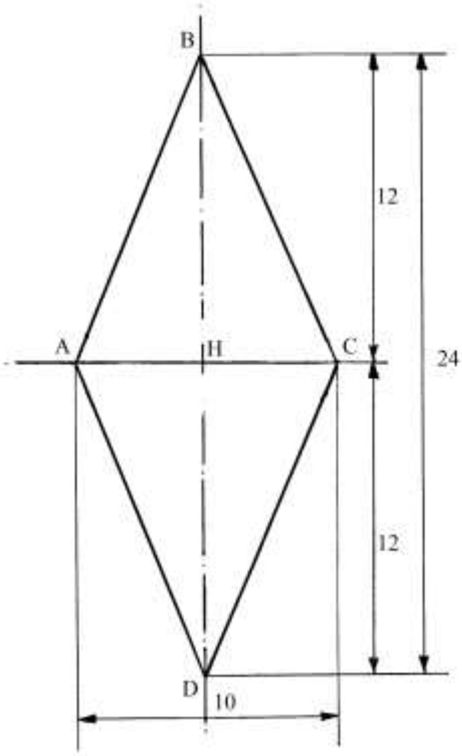


* Solidi definiti da superfici piane (che in realtà sono dei *parallelepipedi o dei prismi a base quadrata*, come nel caso in oggetto):



<u>Il doppio cono</u>

Il doppio cono è generato dalla rotazione del rombo ABCD intorno all'asse passante per gli estremi BD della sua diagonale maggiore:



I punti D e H non sono presenti nello schema originale di Bartoli.

Il rombo è creato dall'unione dei triangoli isosceli ABC e ADC (di uguali dimensioni), lungo la base comune AC.

I due coni hanno uguali dimensioni: il diametro della base comune è 10 braccia e l'altezza di ciascun cono è 12 braccia.

Talvolta, Bartoli chiama *piramide* il cono.

Il volume di ciascun cono è:

$\text{Volume}_{\text{CONO}} = 1/3 * \pi * d^2/4 * h$, dove *h* è l'altezza. Sostituendo a π la consueta costante 22/7, il volume di un cono è:

$$\text{Volume}_{\text{CONO}} \approx 1/3 * 22/7 * 10^2/4 \approx 314 + 2/7 \text{ braccia}^3 .$$

Il volume del doppio cono è:

$$\text{Volume}_{\text{DOPPIO CONO}} = 2 * \text{Volume}_{\text{CONO}} \approx 2 * (314 + 2/7) \approx 628 + 4/7 \text{ braccia}^3 .$$

La superficie laterale di un cono è calcolata da Bartoli con la seguente formula:

$$\text{Area}_{\text{LATERALE CONO}} = \frac{1}{2} * \text{circonferenza base} * \text{apotema} = \frac{1}{2} * 2*\pi*d/2 * AB = \\ = \pi*d/2 * AB .$$

Come è noto, l'*apotema* di un cono è il segmento AB e cioè la lunghezza dell'ipotenusa del triangolo rettangolo ABH che è ricavabile con l'applicazione del teorema di Pitagora:

$$AB = \sqrt{(AH^2 + BH^2)} = \sqrt{(5^2 + 12^2)} = \sqrt{(169)} = 13 .$$

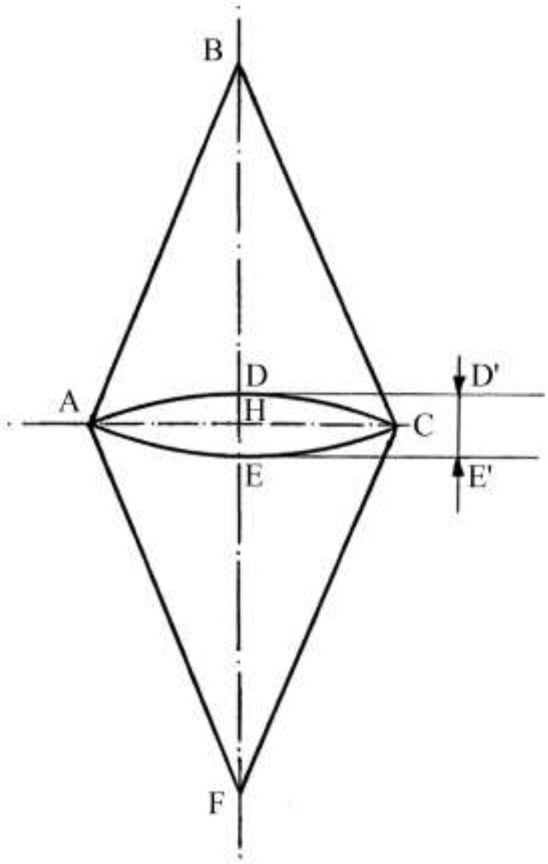
La superficie è:

$$\text{Area}_{\text{LATERALE CONO}} \approx 22/7 * 5 * 13 \approx 204 + 2/7 \text{ braccia}^2 .$$

La superficie laterale del doppio cono è:

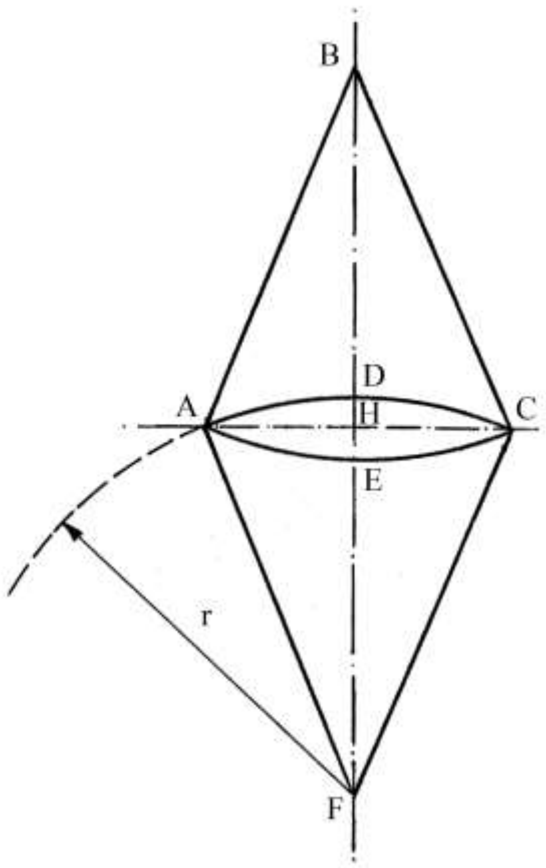
$$\text{Area}_{\text{DOPPIO CONO}} = 2 * \text{Area}_{\text{LATERALE CONO}} \approx 2 * (204 + 2/7) \approx 408 + 4/7 \text{ braccia}^2 .$$

Nell'esempio del *doppio cono* il rapporto di fuga RF vale:



$$RF = D'E'/DE \approx 0{,}24 .$$

L'ellisse cuspidata è delimitata da due due archi di circonferenza con centri nei vertici B e F e raggio r = BA = FA:



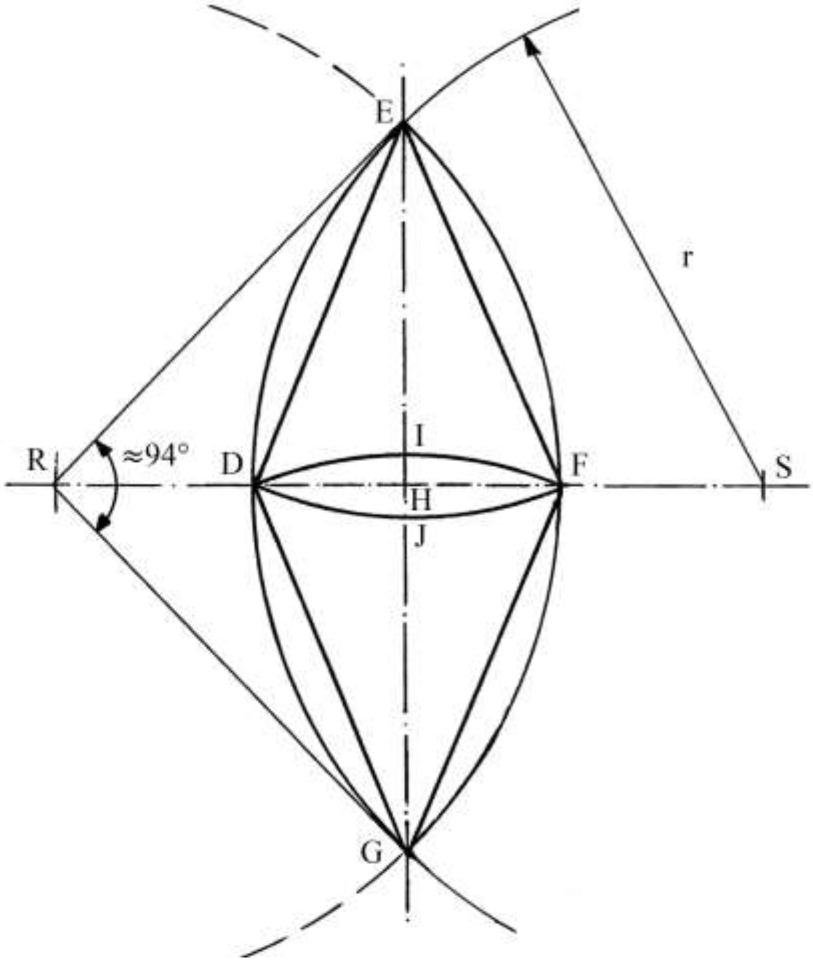
Il raggio *r* ha lunghezza:

$$r = \sqrt{(BH^2 + AH^2)} = \sqrt{(12^2 + 5^2)} = \sqrt{169} = 13 \text{ braccia.}$$

I numeri 5, 12 e 13 formano la *seconda terna pitagorica primitiva*.

Mandorla ovata

Il secondo solido è una *mandorla ovata*, che è generato dalla rotazione del *segmento circolare* EDG intorno alla corda EG:



Il solido è costruito sul doppio cono dell'esempio precedente: la mandorla ovata conserva le dimensioni della base circolare e l'altezza totale.

Il rapporto di fuga RF relativo all'ellise cuspidataè uguale a quello del doppio cono.

Bartoli fornisce la lunghezza degli archi EDG e EFG: (26 + 2/3) braccia.

L'area della base che ha diametro DF = *d* = 10 braccia è:

$\text{Area}_{\text{CERCHIO}} = \pi * (d/2)^2 \approx 22/7 * 5^2 \approx 78{,}57$ braccia^2, che Bartoli esprime come (78 + 4/7) braccia.

La circonferenza *c* di questo cerchio è lunga:

$c = \pi * d \approx 22/7 * 10 \approx 31{,}42$ braccia che Bartoli scrive nella forma (31 + 3/7) braccia.

L'Autore calcola l'area laterale del solido con tre diverse alternative:

$\text{Area}_{\text{LATERALE}} = \text{Arco}_{\text{EDG}} * (c/2)$

$\text{Area}_{\text{LATERALE}} = c * (\text{Arco}_{\text{EDG}}/2)$

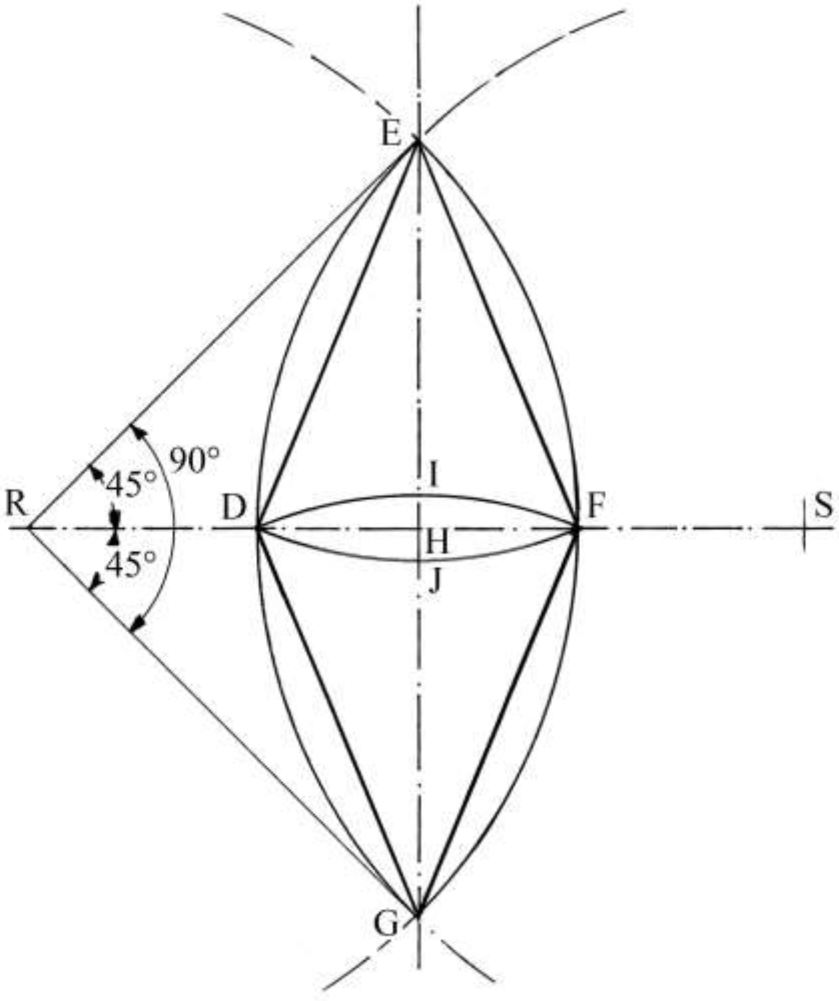
$\text{Area}_{\text{LATERALE}} = (\text{Area}_{\text{CERCHIO}} * \text{Arco}_{\text{EDG}})/\text{raggio}_{\text{CERCHIO}}$.

Il risultato ottenuto da Bartoli è (419 + 1/21) braccia^2.

I centri degli archi di circonferenza che delimitano la superficie laterale del solido sono i punti R e S, simmetrici rispetto alla corda EG e posizionati sui prolungamenti dell'asse di simmetria passante per D, H e F.

L'angolo sotteso dall'arco EFG è ampio 94° e lo stesso vale per quello definito dall'arco EDG.

A causa dell'imprecisione della stampa (e dei disegni originali), pare ragionevole suggerire l'ipotesi che gli angoli ERG e ESG (non costruito nella figura che segue) abbiano ampiezza di 90°:

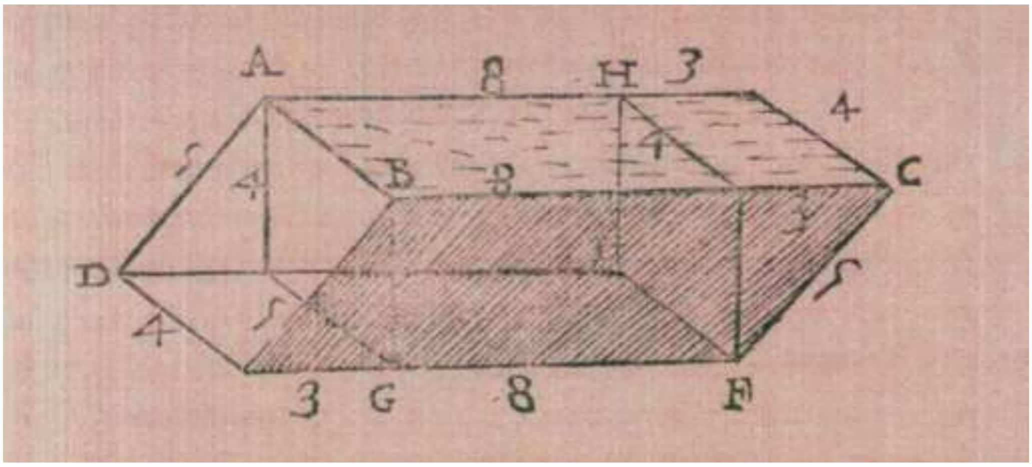


Ne consegue che gli angoli ERH e GRH hanno ampiezza di 45°: essendo gli angoli EHR e GHRentrambi *retti*, gli angoli REH e EGH hanno anch'essi ampiezza uguale a 45°.

In sintesi, i triangoli RHE e RHG sono rettangoli e isosceli.

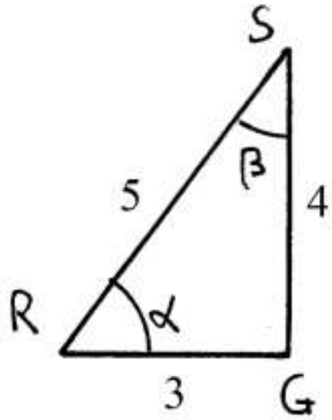
Prisma quadrato sezionato

Torniamo al prisma che ha sezione quadrata con lati lunghi 4 braccia.



Il prisma è disegnato a *filo di ferro* con tutti gli spigoli, anche quelli nascosti, visibili.

Il solido è sezionato a una o a entrambe le estremità con piani inclinati i cui profili formano un triangolo rettangolo con lati formanti la terna 3-4-5:



La sezione è effettuata con un piano che forma gli angoli α e β della figura.

SG è il lato del prisma quadrato (4 braccia) e RG è il cateto orizzontale (3 braccia).

L'ipotenusa RS giace sul piano di taglio ed è lunga:

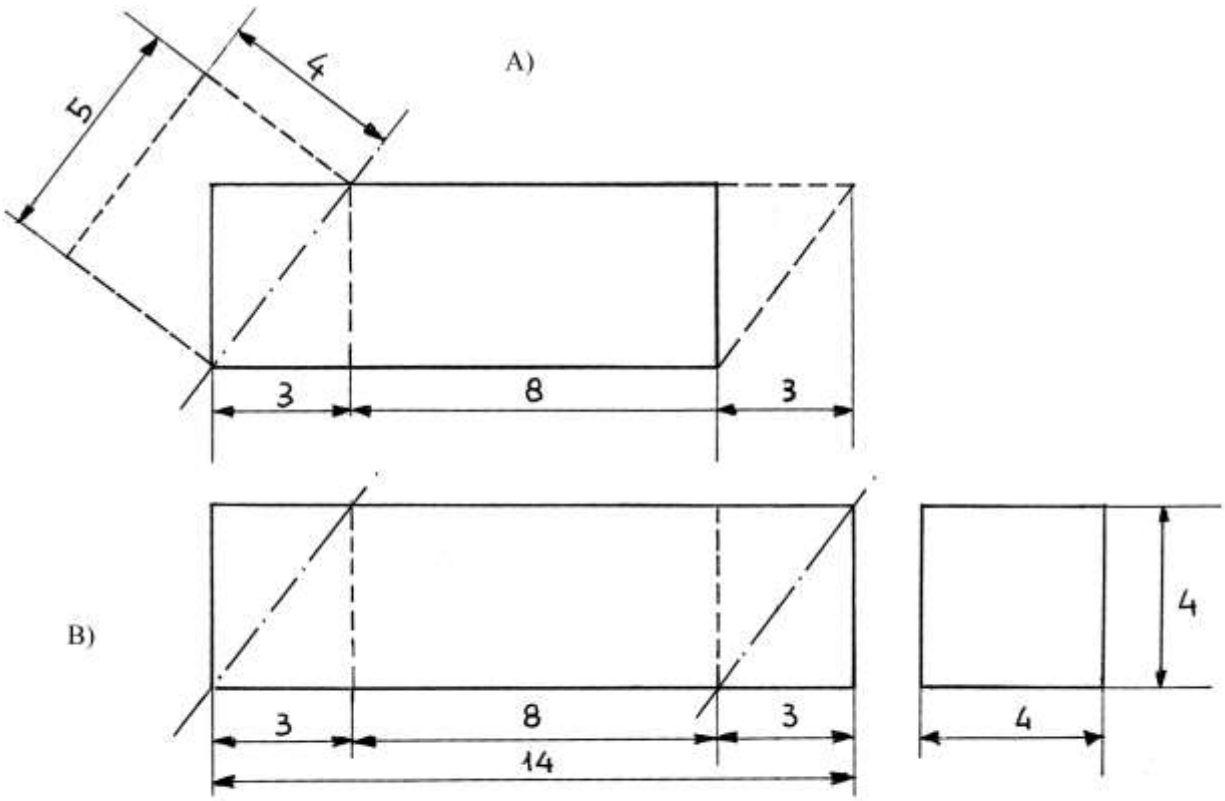
$$RS = \sqrt{(SG^2 + RG^2)} = \sqrt{(4^2 + 32)} = \sqrt{(2^5)} = 5 \text{ braccia.}$$

La tangente dell'angolo α è:

$$tg\ \alpha = SG/RG = 4/3 \approx 1,(33)$$ alla quale corrisponde $\alpha \approx 53°$ e $\beta \approx 37°$.

Per effetto del sezionamento, il prisma a base quadrata è divenuto un prisma irregolare che per il calcolo del volume è scomposto in un prisma quadrato e in due prismi con basi a forma di triangoli rettangoli.

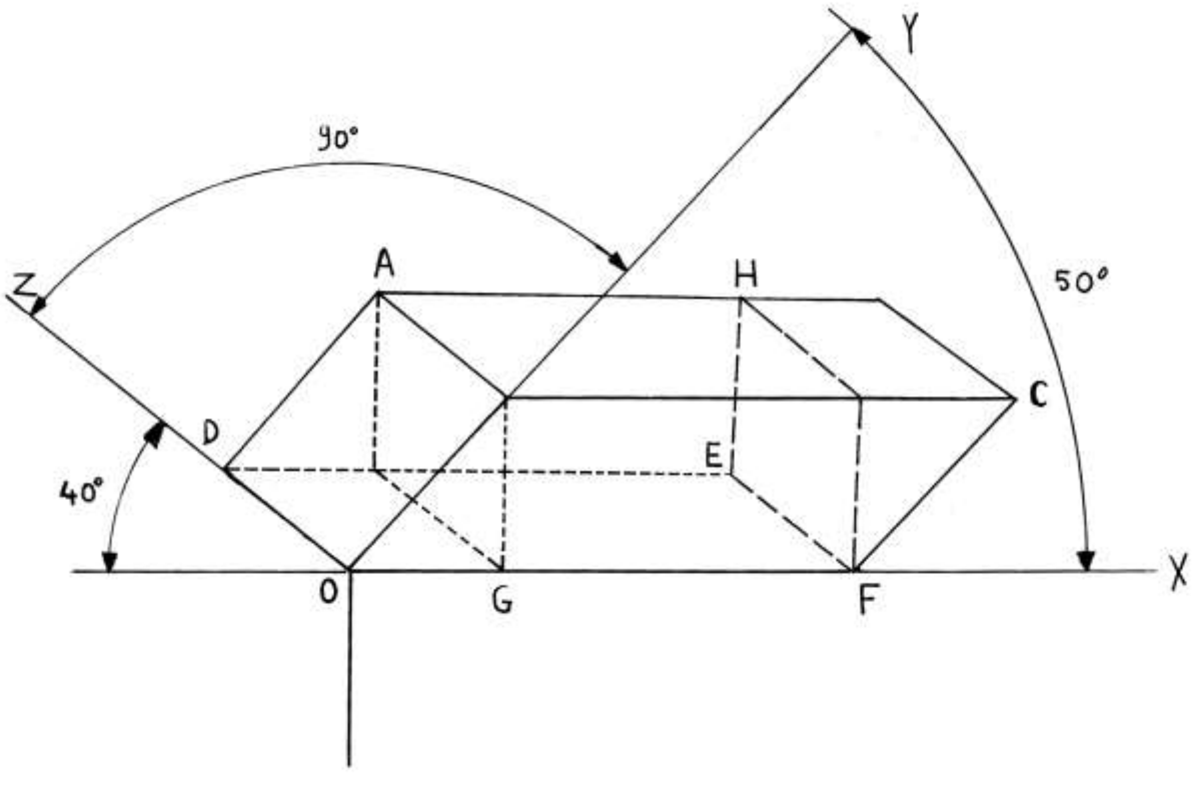
Il solido descritto da Bartoli può essere originato da uno dei due solidi mostrati nella figura:



Nel caso A) il solido è sezionato a sinistra e la parte asportata è spostata, ruotata e unita nella regione destra.

Nel caso B) il prisma è sezionato ad entrambe le estremità ma è in origine più lungo di quello del caso A).

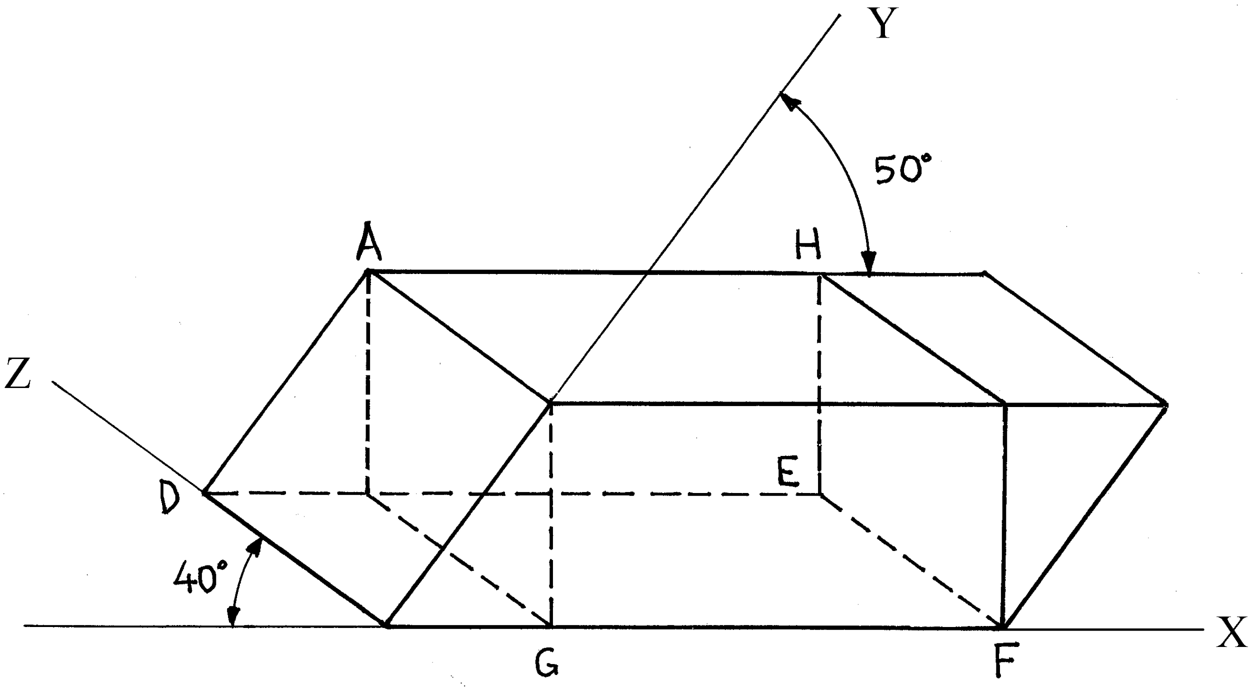
Lo schema che segue riproduce, semplificandolo, il peofilo del solido:



Con buona probabilità, il solido è stato disegnato in una forma di assonometria cavaliera con rapporto di fuga RF sull'asse Z uguale a RF ≈ 0,87.

Lungo gli assi X e Y non sembrano esservi degli scorciamenti.

Il grafico che segue rappresenta il disegno in assonometria cavaliera del solido, secondo i tre assi, e senza alcuno scorciamento:



APPENDICE

La mandorla

Nel suo fondamentale studio sul *disegno obliquo*, Massimo Scolari dedica un intero capitolo a "*Le figure della dimostrazione*".

Fra gli altri argomenti egli vi affronta quello dell'*ellisse cuspidata* o *mandorla,* figura con la quale è stata spesso rappresentata la base circolare di un cono o di un cilindro nei trattati geometrici.

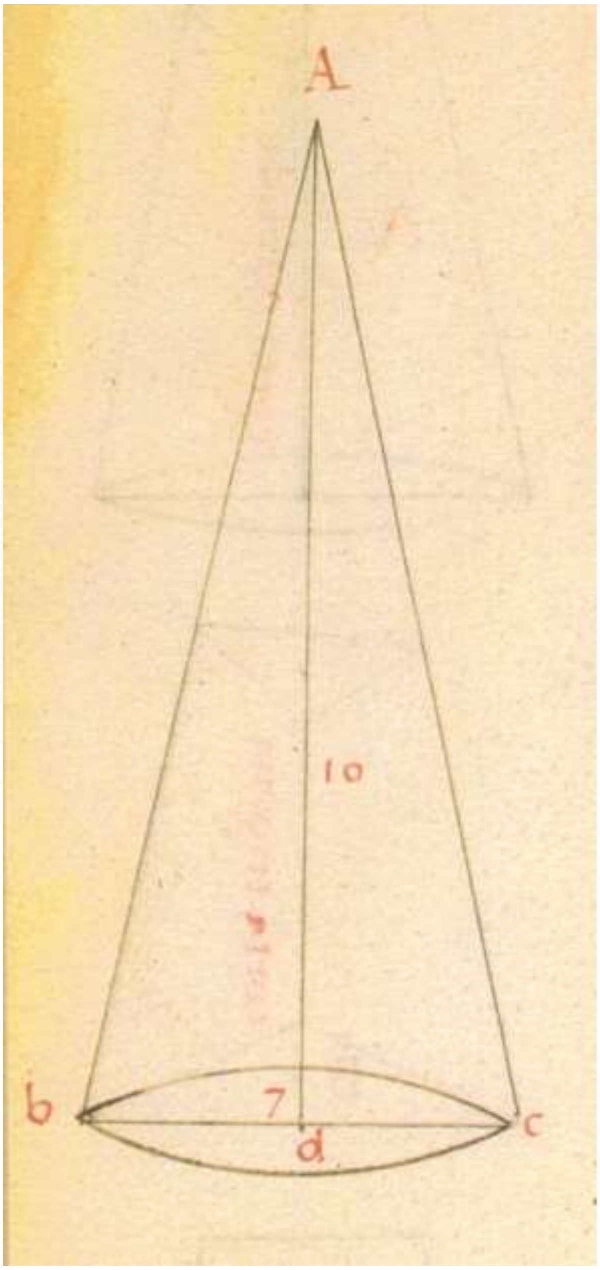
Le opere matematiche di Luca Pacioli (circa 1445 – 1517), pur con tutte le riserve sui suoi numerosi plagi, non sono mai ricordate da Cosimo Bartoli: ma fra le sue fonti egli cita l'opera di Albrecht Dürer (1471-1528), che doveva ben conoscere i testi stampati da Pacioli a Venezia, città da lui ripetutamente visitata.

L'uso dell'*ellisse cuspidata* (espressione introdotta da Scolari) da parte di Bartoli nel *Libro Secondo* e nel *Libro Terzo* può essere fatta risalire all'influenza di Pacioli.

Ma secondo Scolari non è stato questo ultimo Autore a introdurre il suo impiego: infatti egli ne attribuisce il primo uso conosciuto al matematico e astronomo greco Autolico di Pitane (360-290 a.C.).

Successivi trattati geometrici e astronomici greci e arabi utilizzano l'ellisse cuspidata.

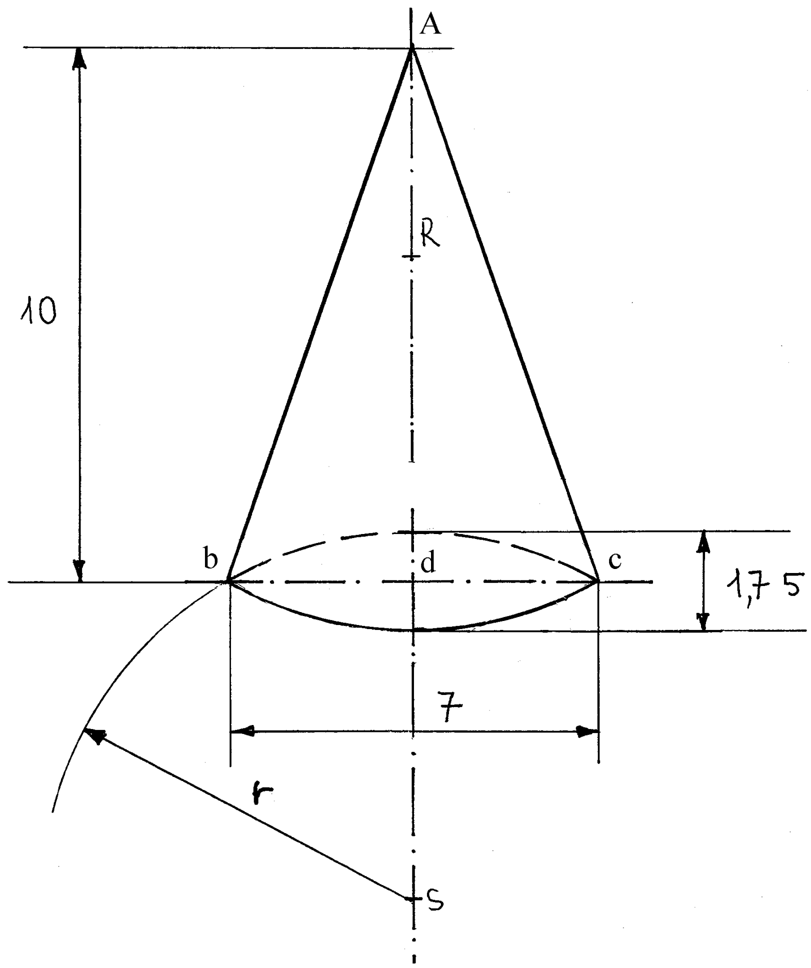
Nel *De Divina Proportione,* Luca Pacioli usò questa particolare figura per rappresentare il cerchio di un solido in una forma di assonometria, come è il caso della base del cono:



Egli usa questa figura più volte nello stesso trattato e sempre per rappresentare le basi di coni e cilindri.

Il disegno del cono di Pacioli è del tutto fuori scala perché l'altezza di 10 unità è dilatata, con un rapporto rispetto alla scala del diametro della base di 7 unità: grosso modo, l'altezza *Ad* è lunga 1,64 volte.

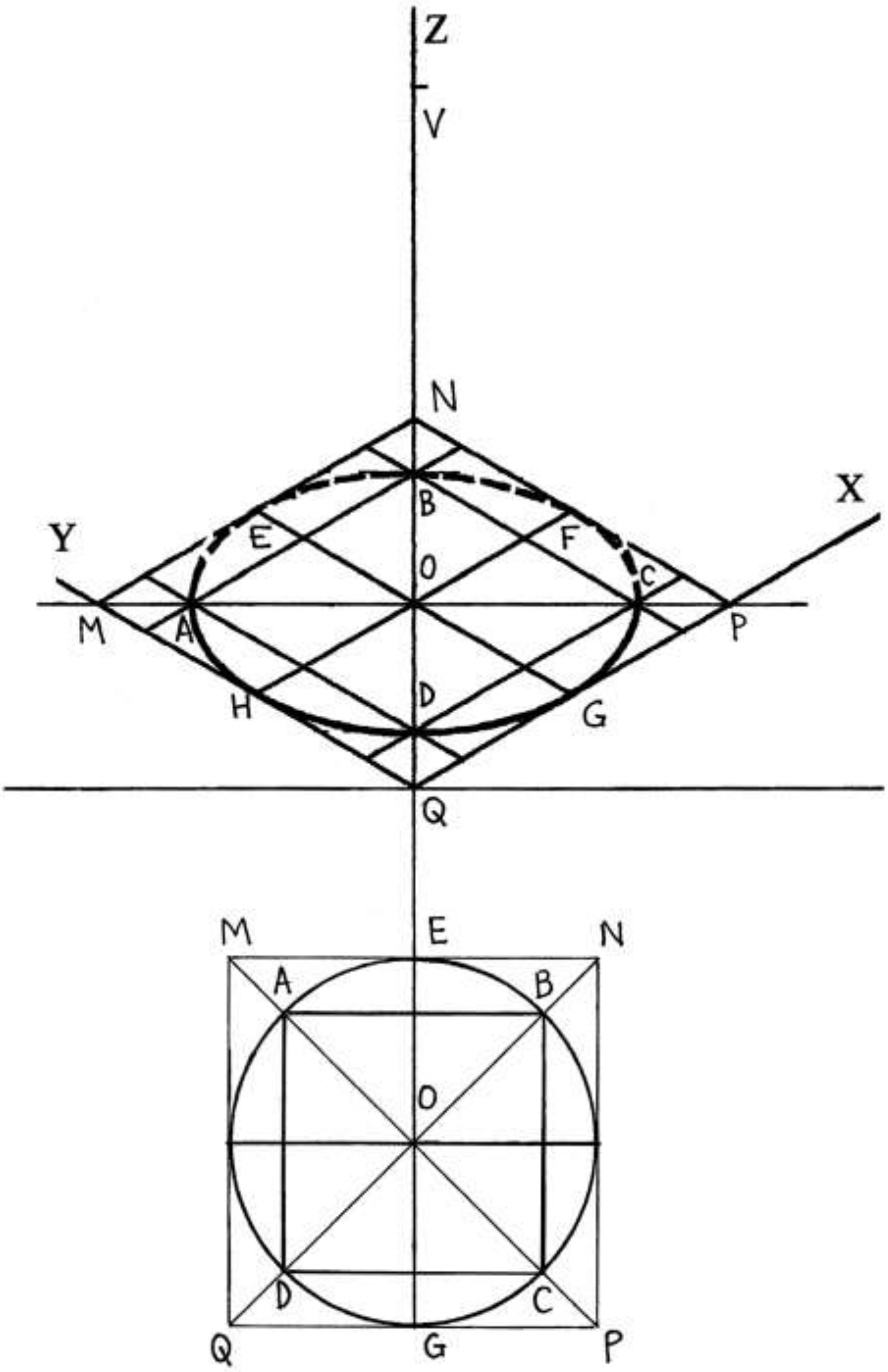
La mandorla è definita da due archi di circonferenza di centri R e S, punti situati sull'asse di simmetria verticale. Il raggio $r = Rb = Sb$ è con buona approssimazione uguale a 8/7 del diametro *bc* e quindi è lungo 8 unità.



Il rapporto di fuga RF vale:

$RF \approx 1{,}75/bc \approx 1{,}75/7 \approx 0{,}25.$

Lo schema che segue mostra la base di un cono retto disegnata in assonometria isometrica riferita ai tre assi X, Y e Z:



Il cerchio AEBCGD è deformato in una perfetta ellisse AEBFCGDH.

Il rapporto di fuga dell’ellisse è:

$$RF = BD/AC.$$

BD è il lato comune dei triangoli equilateri ABD e BCD mentre il segmento AC è la doppia altezza degli stessi triangoli:

$$AC = AO + OC.$$

L’altezza *h* di un triangolo equilatero è legata ai suoi lati ℓ dalla relazione:

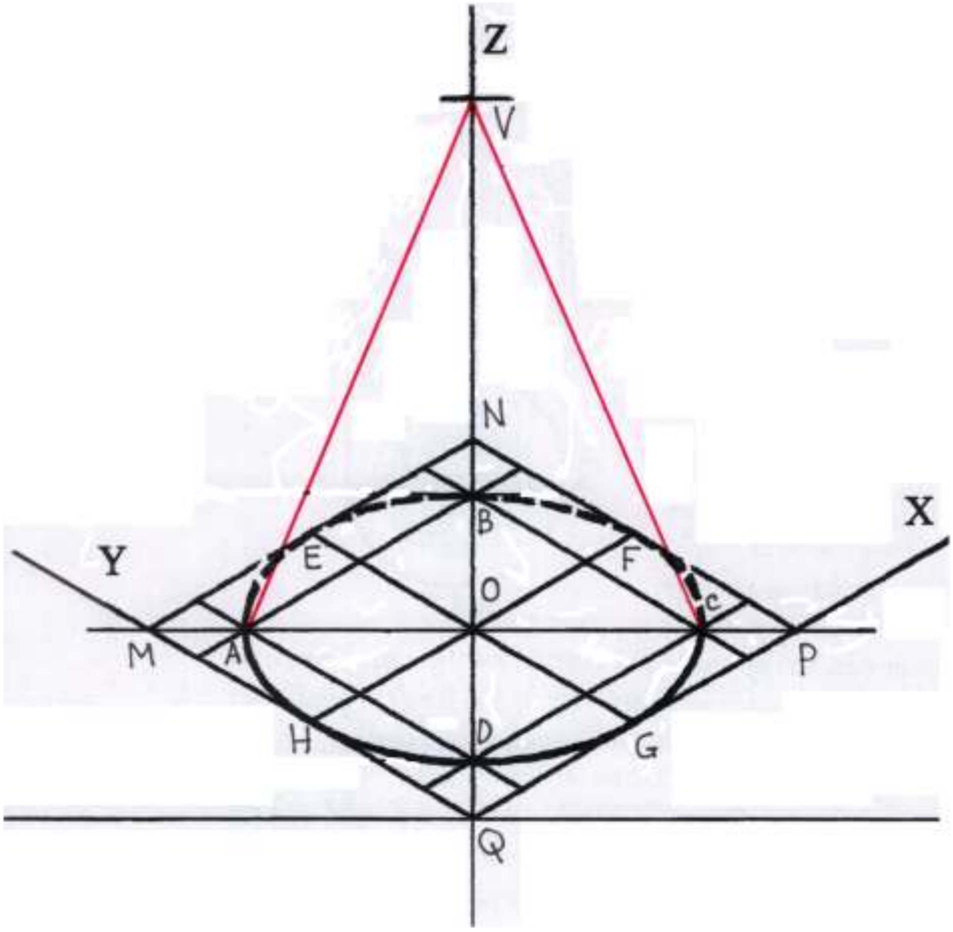
$$h = (\sqrt{3})/2 * \ell.$$

Sostituendo questo dato nella formula di RF si ha:

$$RF = \ell/[2 * (\sqrt{3})/2 * \ell] = 1/\sqrt{3} = (\sqrt{3})/3 \approx 0{,}577.$$

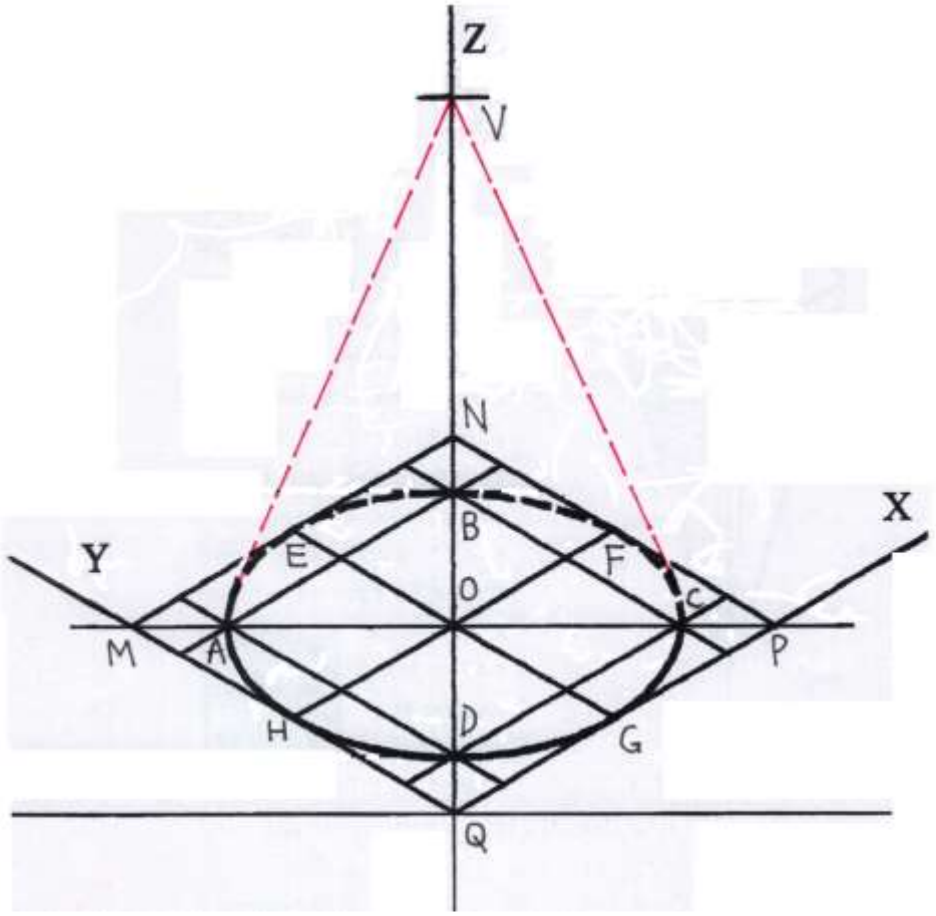
Il punto V, collocato sull’asse Z, è il vertice del cono, peraltro non disegnato.

Nel grafico che segue è tracciato in colore *rosso* il profilo del cono:



Le generatrici collegano V con i punti A e C *tagliando* il profilo della base.

La soluzione più adottata per rimediare all'inconveniente del *taglio* è mostrata nella figura che segue:



In questo caso le generatrici del cono non raggiungono gli estremi A e C del diametro, ma sono tangenti all’ellisse.

La soluzione dell’impiego dell’*ellisse cuspidata* elimina tutti i possibili fraintendimenti.

La conclusione è datta dalla citazione che segue, tratta da pagina 214 dello studio di Massimo Scolari:

“…Una prima ragionevole ipotesi della forma cuspidata potrebbe essere proprio la ricerca della precisione. Infatti se la base fosse stata rappresentata da un cerchio, le due tangenti tracciate da un punto finito (vertice) non lo toccherebbero in corrispondenza del diametro. Invece il cerchio di base ridotto nella sua forma cuspidata presenta l'interessante vantaggio di evidenziare esattamente i punti di intersezione del cerchio di base con il diametro e di poter condurre con precisione le due tangenti dal vertice. Supponendo questa considerazione corretta, il carattere di questo diagramma rimanda immediatamente ai protocolli procedurali della tradizione astronomica e pneumatica araba e, per naturale filiazione, alla grafica dell'astronomia greca pretolemaica. Si tratterebbe di un indizio dell'origine classica dei metodi di rappresentazione stereometrici in uso tra la fine del Quattrocento e gli inizi del Cinquecento…”.

Bibliografia

1. Bartoli Cosimo, “Del Modo di Misurare le Distantie, le Superficie, i Corpi, le Piante, le Provincie, le Prospettive, e Tutte le Altre Cose Terrene, Che Possono Occorrere a Gli Huomini, Secondo le Vere Regole d’Euclide, e De Gli Altri Più Lodati Scrittori”, Venezia, Francesco Franceschi, 1564, pp. 301.
2. “Cosimo Bartoli (1503 – 1572)”. Atti del Convegno internazionale Mantova-Firenze 2009, a cura di Francesco Paolo Fiore e Daniela Lamberini, Firenze, Olschki, 2011, pp. XVII-422.
3. Calzolani Sergio, “Erone.pdf”, 2018, pp. 35, www.geometriapratica.it
4. Cataneo Pietro, “L’architettura di Pietro Cataneo, Senese, Alla quale, oltre al essere stati dall’istesso autore rivisti, meglio ordinati et di diversi desegni e discorsi arricchiti i primi quattro libri per l’adietro stampati, Sono aggiunti di più il Quinto, Sesto, Settimo, e Ottavo libro”, Venezia, Manuzio, 1567, pp. 220.
5. Dürer Albrecht, “Institutiones Geometricæ”. “I geometrici elementi di Alberto Durero” traduzione di Cosimo Bartoli”, a cura di Giovanni Maria Fara, Torino, Nino Aragno Editore, 2008, pp. XV-546.
6. Finé Oronce, “La practique de la geometrie”, Parigi, Gilles Gourbin, 1570, pp. 134.
7. “Opere di Orontio Fineo del Delfinato: Divise in cinque parti; Aritmetica, Geometria, Cosmografia e Oriuoli”, tradotte da Cosimo Bartoli, Venezia, Francesco Franceschi, 1587, pp. 811.
8. Gessner Samuel, “Le “per numero” et le “per linea” dans les écrits d’architecture du Cinquecento”, “Scholion”, Bulletin 3/2004, pp. 61-81.
9. Gessner Samuel, “Savoir manier les instruments: la géométrie dans les écrits italiens d’architecture (1545-1570)”, “Revue d’Histoire des Mathématiques”. Tome 16 Fascicule 1, 2010, pp. 1-62.
10. Pacioli Luca “De Divina Proportione”, ristampa anastatica con introduzione di Augusto Marinoni, Milano, Silvana Editoriale, 1982, ristampa 1986.
11. Picutti Ettore, “Sui plagi matematici di frate Luca Pacioli”, “Le Scienze – Scientific American”, n. 246, febbraio 1989, pp. 72-79.
12. Scolari Massimo, “Il disegno obliquo”: Una storia dell’antiprospettiva, Marsilio, Venezia, 2005, pp. 348.