COLUMBIA ALGORISMO

====================

IL TRATTATO DI ARITMETICA DELLA COLUMBIA UNIVERSITY DI NEW YORK

Il *Trattato di aritmetica* (“Columbia Algorism” o in versione italiana “Columbia Algorismo”) conservato presso la Columbia University di New York, con il riferimento X 511 A 13, faceva parte della collezione di testi matematici posseduta dal principe Baldassare Boncompagni (1821-1894) la cui raccolta fu venduta all’asta nel 1898. Il manoscritto in oggetto fu acquisito dalla Columbia University.

Come accade ad altri testi medievali di aritmetica, anche questo nella parte finale contiene alcuni problemi geometrici che sono esaminati in questo articolo.

Lo storico della matematica tedesco Kurt Vogel (1888-1985) ne pubblicò una trascrizione nel 1977 e datò il manoscritto al XIV secolo: la sua attribuzione era basata sulla presenza di alcune monete nella lista che l’Anonimo autore aveva inserito.

Lucia Travaini, professore di Numismatica presso l’Università degli Studi di Milano, una delle maggiori autorità internazionali sul tema delle monete medievali, ha dimostrato già con l’edizione del 2003 del suo trattato che la datazione di Vogel era errata: fra i motivi che l’hanno condotta a anticipare la datazione è l’assenza dalla lista di alcune monete e in particola quella del ducato d’oro della Repubblica di Venezia, coniato a partire dal 1284.

La Travaini ha attribuito il manoscritto a un periodo compreso fra il 1278 e 1282: la sua compilazione è avvenuta a Cortona o in area cortonese-umbra.

Lo storico della matematica danese Jens Høyrup ha preso atto delle conclusioni della Travaini, confermando l’importanza dello studio delle liste di monete contenute nei trattati di abaco e nei libri di mercatura per una più corretta datazione dei testi matematici medievali.

L’Autore di questo trattato è *anonimo*: si trattava forse di un maestro di abaco e/o di un mercante con qualche conoscenza matematica e geometrica?

Nella monumentale trascrizione del contemporaneo “*Lo livero de l’abbecho*” in umbro perugino, Andrea Bocchi (Università di Udine) ha spesso confrontato quel testo sia con il *Liber Abaci* di Fibonacci sia con il manoscritto della Columbia.

Anche nel successivo lavoro su “Lo Zibaldone Riccardiano 2161”, Andrea Bocchi fa effettuato dei confronti con il Columbia.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Molto spesso gli schemi grafici contenuti nei primi trattati sono più artistici che tecnici: una loro corretta edizione richiede la riproduzione dell’originale e a fianco il ridisegno degli schemi secondo le regole geometriche oggi usate.

Una metodologia utile chiederebbe la riproduzione con gli strumenti dei diversi schemi, metodo che è stato applicato allo studio dei disegni geometrici contenuti nei trattati di Piero della Francesca. In particolare due autorevoli studiosi italiani, Francesco Paolo Di Teodoro e Vladimiro Valerio hanno dato notevoli contributi su questo tema.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Nei testi medievali sono evidenti due classi di problemi: l’identificazione delle monete e dei loro rapporti e quello delle unità di misura.

Definire caotico il mondo della metrologia medievale è solo un complimento: la stessa unità di misura lineare più usata, il *braccio*, assumeva lunghezze differenti in Comuni confinanti. Le classi mercantili che spesso governavano quelle Città-stato si facevano talvolta promotrici di accordi a livello almeno regionale per uniformare monete e unità di misura.

Importanti informazioni sulla metrologia medievali sono contenute nei testi di Ascani e di Chiovelli citati in bibliografia.

Alcuni problemi contenuti nel manoscritto della Columbia citano il *braccio* quale unità di misura lineare: quale braccio fosse usato non è dato sapere. Era il braccio da panno o il braccio toscano da terra? Era un braccio di Arezzo, di Pisa, di Perugia o di Firenze?

Nella Ragione 77 è usata un'altra unità di misura, il *palmo*, che possiamo collegare al braccio di era lungo la metà.

Il classico testo dello Zupko non fornisce alcuna indicazione sulle unità di misura lineari e superficiali usate a Cortona.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Nei vari trattati si incontrano spesso problemi geometrici uguali e con gli stessi dati: sarebbe utile poter disporre di un inventario per verificare l'origine di quei problemi. I maestri di abaco "copiavano" gli uni dagli altri gli esercizi, un po' come accade a certi libri di testo per le scuole secondarie i cui contenuti, figure ed esercizi sono spesso "ispirati" a quelli della concorrenza.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

In questo articolo sono descritte soltanto le Ragioni di argomento esclusivamente geometrico.

<u>Ragione 57</u>

Il tronco fuori terra di un albero è lungo 12 braccia: sottoterra vi sono (1/3 + 1/5) della lunghezza totale.

Il problema chiede la lunghezza dell'intero albero.

La soluzione impiegata dall'Autore è:

* ridurre allo stesso denominatore le frazioni 1/3 e 1/5: (1/3 + 1/5) = (5 + 3)/15 = 8/15;
* per ipotesi, l'intero albero è lungo quanto il denominatore, 15 braccia;
* sottrarre da 15 le frazioni 1/3 e 1/5: 15 – (1/3 + 1/5) * 15 = 15 – (8/15) * 15 = = 15 – 8 = 7;
* risolvere la proporzione 7 : 12 = 15 : (lunghezza totale), da cui (lunghezza totale) = (12 * 15)/7 = (25 + 5/7) braccia, lunghezza dell'intero albero.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

La soluzione è semplificabile con l’aiuto di un’equazione di primo grado. “x” è la lunghezza complessiva dell’albero.

$x = 12 + (1/3 * x + 1/5 * x)$
$x – 1/3 * x – 1/5 * x = 12$
$7/15 * x = 12$
$x = (15 * 12)/7 = (25 + 5/7)$ braccia,

<u>Ragione 77</u>

Una lancia è conficcata verticale nel terreno per (1/3 + ¼) della sua lunghezza:

La parte che emerge dal terreno è lunga 30 *palmi*: un palmo era lungo metà di un braccio.
Il problema chiede la lunghezza dell’intera lancia.
La soluzione riproduce quella già usata per la Ragione 57:

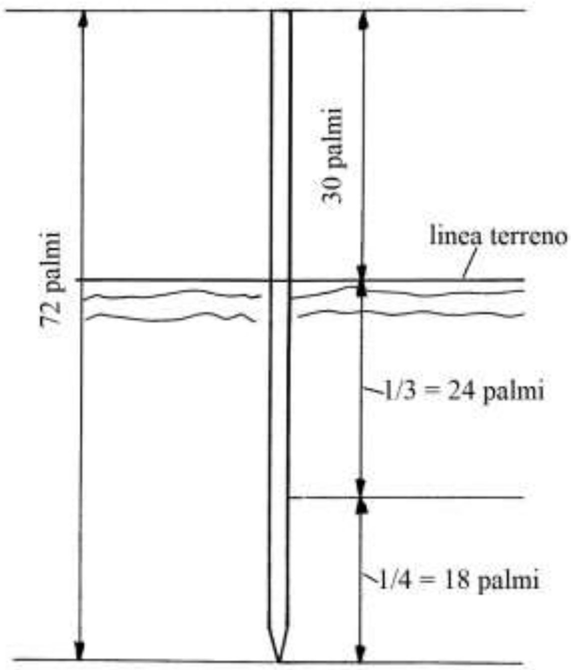
* ridurre allo stesso denominatore le due frazioni: (1/3 + ¼) = (4 + 3)/12 = 7/12;
* per ipotesi, la lancia è lunga quanto il denominatore, 12 palmi;
* sottrarre 7 da 12: 12 – 7 = 5;
* risolvere la proporzione 5 : 12 = 30 : (lunghezza totale) da cui
  (lunghezza totale) = (12 * 30)/5 = 72 palmi, lunghezza della lancia.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

È possibile risolvere il problema in modo più semplice: “x” è la lunghezza totale della lancia.

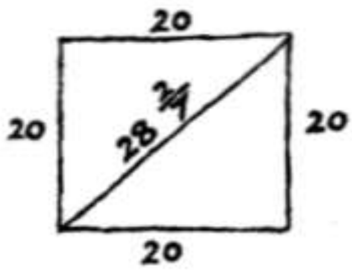
$1/3 * x + ¼ * x + 30 = x$
$30 = 5/12 * x$ e
$x = (30 * 12)/5 = 72$ palmi.

Lo schema che segue riproduce la posizione della lancia correttamente conficcata nel terreno:



<u>Ragione 127</u>

Un campo ha forma quadrata con lati lunghi 20 unità:

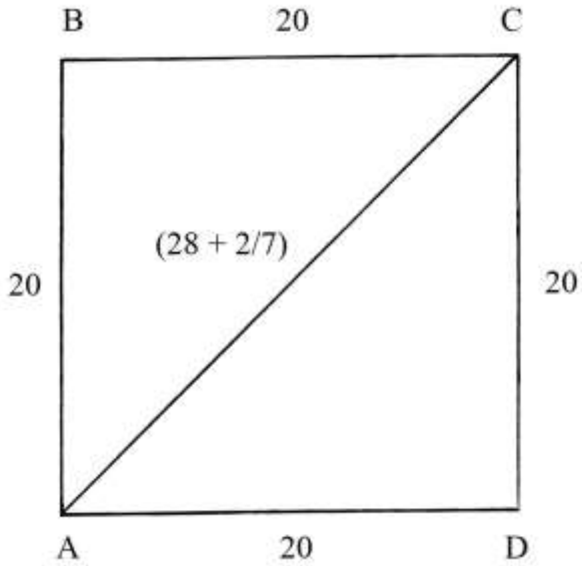


I lati sono detti *teste* e sono lunghi 20 unità: non è indicata alcuna unità di misura, ma probabilmente si tratta di "braccia da terra". In precedenti Ragioni sono considerati problemi di natura commerciale concernenti compravendite o baratti concernenti *panni* che sono misurati in *braccia*, forse braccia da panno: nel manoscritto il simbolo usato per questo braccio usato per i panni è:

b$\bar{\text{r}}$

Il problema chiede la lunghezza della diagonale o *chantone*.

La figura originale è priva di lettere ed è piuttosto imprecisa: è tracciata con un righello. Anche le figure contenute nelle altre Ragioni di natura geometrica sono prive delle lettere. Lo schema che segue contiene le contiene, in forma di maiuscole:



La soluzione offerta dall'Autore è la seguente:

* moltiplicare la lunghezza di un lato per sé stessa [ad esempio AD]: 20 * 20 = 400;
* moltiplicare la lunghezza di un altro lato [CD] per sé stessa: 20 * 20 = 400;
* sommare i due quadrati: 400 + 400 = 800;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{800} \approx (28 + 2/7)$, lunghezza della diagonale [AC].

L'Autore fornisce un risultato per la lunghezza della diagonale che è un numero misto, con una frazione: fra l'intero – 28 – e la frazione – 2/7– non vi è il simbolo infisso dell'addizione – + –, all'epoca sconosciuto: infatti fu introdotto dal matematico tedesco Johannes Widmann (1460-1498) in una sua opera del 1489. Nella stessa opera utilizzò pure il simbolo "-" per la sottrazione.

- APPROFONDIMENTO -

* Nel testo di alcune Ragioni di natura geometrica, le lunghezze sono espresse con numeri non accompagnati da alcuna unità di misura: si può sottintendere che possa trattarsi di *braccia* e loro multipli. Nella trascrizione di questi problemi si è preferito usare i termini *unità* per le lunghezze e *unità*^{2} per le superfici.
* Il *braccio* era generalmente fornito di sottomultipli:
  1 braccio = 20 soldi;
  1 soldo = 12 denari;
  1 denaro = 12 punti.

Con un editto del Granduca Pietro Leopoldo di Toscana (1747-1792) del 13 marzo 1781, a partire dal 1782 le unità di misura toscane furono uniformate a quelle di Firenze e a cura di Francesco Assandri furono pubblicate le "*Tavole di ragguaglio*", contenute in un grosso volume. Lo scopo di Pietro Leopoldo era quello di uniformare il gran numero di unità di misura usate nel Granducato a quelle di Firenze. La riforma era cronologicamente lontana secoli dall'epoca nella quale fu compilato il manoscritto della Columbia University e i dati contenuti nelle *Tavole di ragguaglio* devono essere presi con cautela, pur considerando il forte conservatorismo che nel tempo caratterizza le unità di misura.

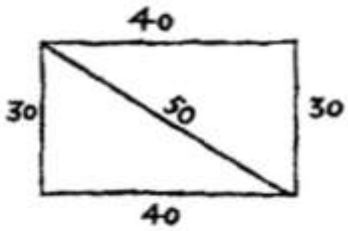
Il braccio da panno di Arezzo era leggermente più lungo del corrispondente fiorentino di *3 soldi + 7 denari + 2 punti*.

Sempre nelle *Tavole di ragguaglio* il braccio di Cortona risultava più lungo di quello fiorentino di *4 denari*.

- -

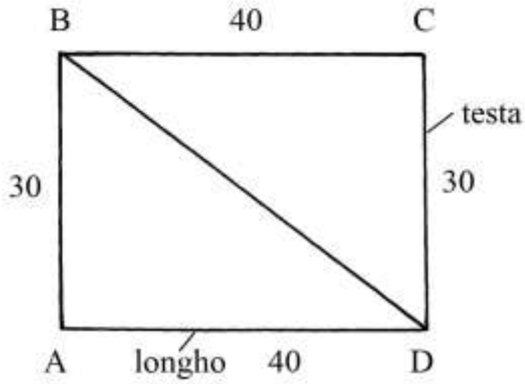
Ragione 128

Un terreno ha la forma di un rettangolo:



La larghezza – o *testa* – è lunga 30 unità e la lunghezza, che l'Autore chiama *longho*, è 40 unità.

Il problema chiede la lunghezza da un *chantto* all'altro, cioè quella di una diagonale [BD nello schema che segue]:



La soluzione è:

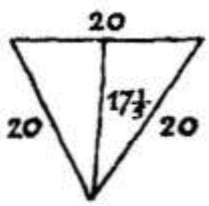
* moltiplicare la lunghezza di una *testa* [AB] per sé stessa: 30 * 30 = 900;
* moltiplicare la lunghezza di un *longho* [AD, secondo cateto del triangolo rettangolo ABD] per sé stessa: 40 * 40 = 1600;
* sommare i due quadrati: 900 + 1600 = 2500;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{2500}$ = 50 unità, lunghezza di una diagonale [BD].

Le lunghezze dei lati e della diagonale, 30-40-50, formano una terna derivata dalla primitiva 3-4-5.

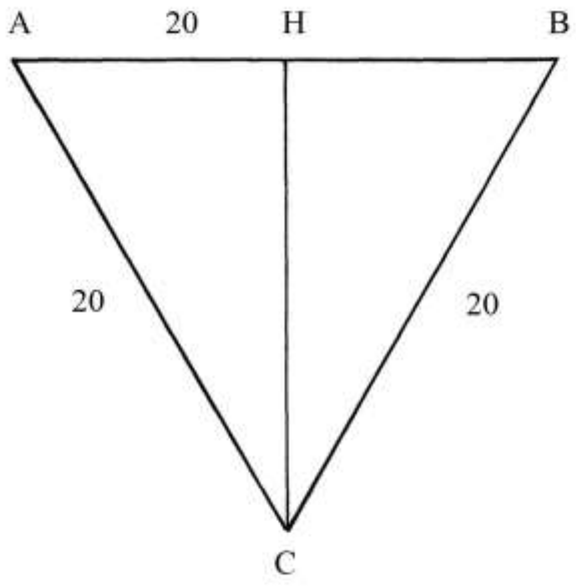
Nella soluzione della Ragione 127 e in quella di questa Ragione è stato applicato il teorema c.d. di Pitagora.

Ragione 129

Un campo ha la forma di uno *scudo*, un triangolo che nell'esempio è equilatero. Come accade in altri trattati medievali e rinascimentali, il triangolo è disegnato con la base orizzontale in alto e il vertice ad esso opposto in basso:



L’Autore definisce il vertice inferiore [C] “…*la ponta in fine a gioso*…”:



Il problema chiede la lunghezza dell’altezza [HC]: è sufficiente applicare il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo [AHC]:

$$[HC]^2 = [AC]^2 – [AH]^2 = 20^2 – (20/2)^2 = 400 – 100 = 300.$$

Estrarre la radice quadrata:

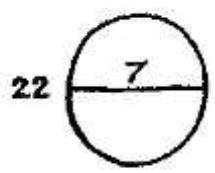
$$\sqrt{300} \approx (17 + 1/3) \text{ unità.}$$

Il valore calcolato dall’Autore è leggermente approssimato per eccesso, perché il corretto risultato è:

$$\sqrt{300} \approx 17{,}32 \text{ unità.}$$

Ragione 130

Un cerchio ha diametro *d* lungo 7 unità.



Il problema chiede la lunghezza della circonferenza *c*.

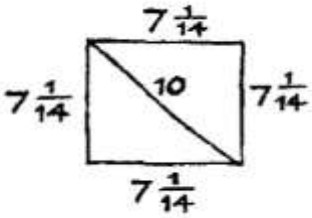
L’Autore moltiplica la lunghezza del diametro per la costante (3 + 1/7) che equivale a 22/7, l’approssimazione del valore di π largamente usata dall’Antichità:

$$c = d * (3 + 1/7) = 7 * (3 + 1/7) = 7 * 3 +7 * (1/7) = 21 + 1 = 22 \text{ unità.}$$

È da notare la particolare forma che assume la moltiplicazione: la lunghezza del diametro *d* non viene moltiplicata per la costante espressa in forma compatta – 22/7 – ma è moltiplicata per i due componenti parziali della stessa: 3 e 1/7.

Ragione 131

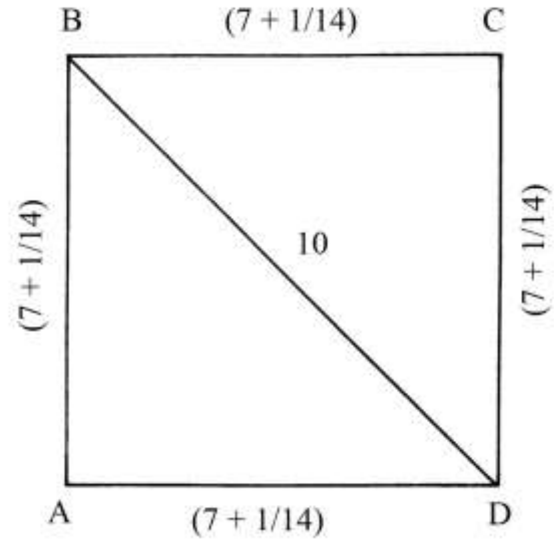
Un campo ha la forma di un quadrato – un *ricto quadro* – che ha una diagonale lunga 10 unità:



Il problema chiede di ricavare la lunghezza dei lati, definiti con l'espressione "*testa di fuore*".

La soluzione è la seguente:

* moltiplicare la lunghezza della diagonale [BD] per sé stessa: 10 * 10 = 100;
* dividere per 2: 100/2= 50;
* estrarre la radice quadrata: $\sqrt{50} \approx (7 + 1/14)$ unità.



La soluzione è corretta: il quadrato della lunghezza della diagonale è il *doppio* del quadrato della lunghezza di un lato: è sufficiente considerare uno dei triangoli rettangoli isosceli che la diagonale BD crea:

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 = 2 * AB^2.$$

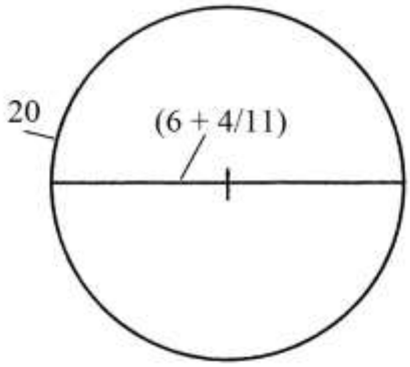
Ragione 132

Un cerchio ha la circonferenza lunga 20 unità:

Il problema chiede il diametro del cerchio.

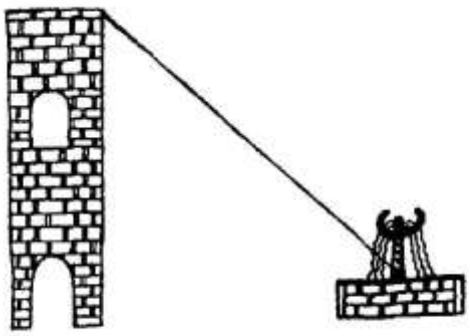
La soluzione impiegata fa ricorso a una proporzione che coinvolge i dati della Ragione 130: se una circonferenza lunga 22 unità ha diametro di 7 unità, quale sarà il diametro di una circonferenza lunga 20 unità?

22 : 7 = 20 : x dove "x" è la lunghezza del diametro di questo cerchio e
x = (7 * 20)/22 = 140/22 = (6 + 4/11) unità.



Ragione 133

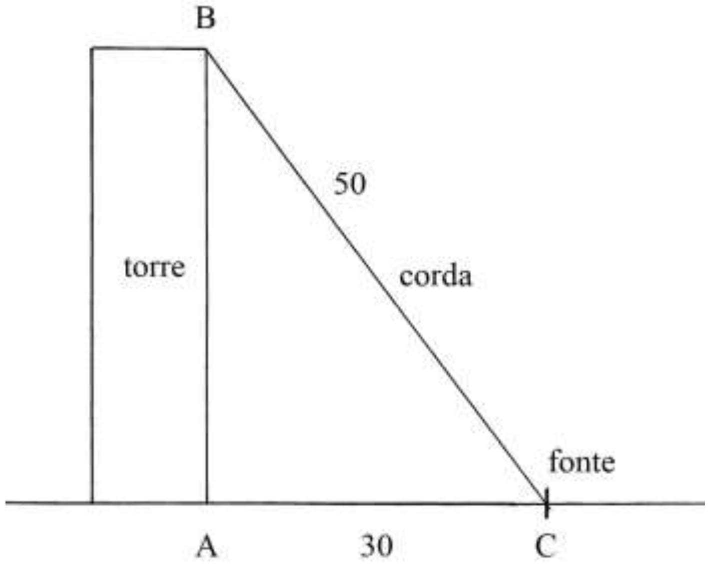
Una torre dista 30 braccia da una fonte collocata nel piano e una corda collega la cima della torre e la fonte: essa è lunga 50 braccia.



Il problema chiede di ricavare l'altezza della torre.

La soluzione è la seguente:

* moltiplicare per sé stessa la lunghezza della corda: 50 * 50 = 2500;
* moltiplicare la distanza fra la torre e la fonte per sé stessa: 30 * 30 = 900;
* sottrarre l'ultimo quadrato dal primo: 2500 – 900 = 1600;
* estrarre la radice quadrata: √1600 = 40 braccia, altezza della torre.

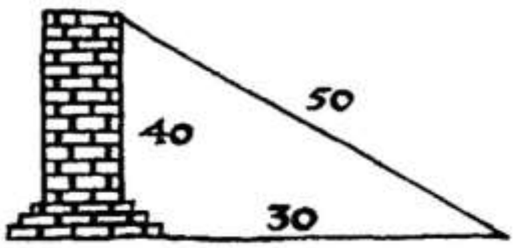


ABC è un triangolo rettangolo con lati lunghi 30-40-50 braccia, lunghezze formanti una terna derivata dalla primitiva 3-4-5.

<u>Ragione 134</u>

Il problema è strettamente collegato a quello della precedente Ragione.

Una torre è alta 40 braccia e una corda è fissata alla sua cima e all’estremo sul terreno è vincolata a un punto che è distante 30 braccia dal piede della torre:



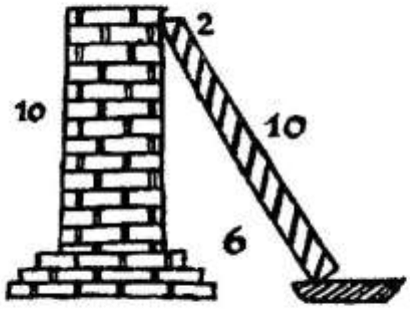
Il problema chiede la lunghezza della corda.

La soluzione è la seguente:

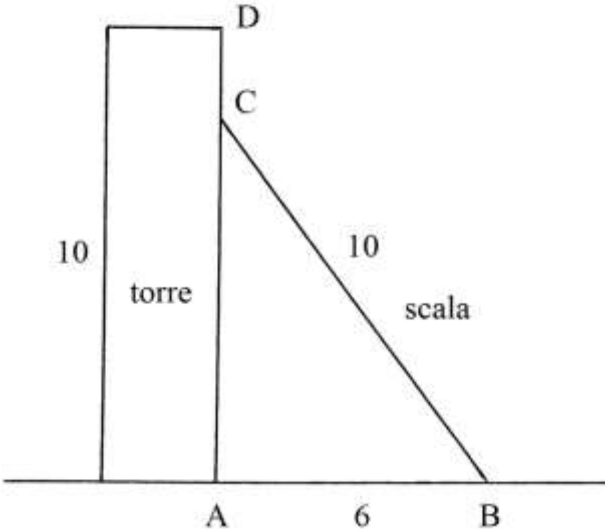
* moltiplicare la distanza dalla torre per sé stessa: 30 * 30 = 900;
* moltiplicare l’altezza della torre per sé stessa: 40 * 40 = 1600;
* sommare i due quadrati: 900 * 1600 = 2500;
* estrarre la radice quadrata: √2500 = 50 braccia, lunghezza della corda.

<u>Ragione 135</u>

Una torre è alta 10 braccia e vi è poggiata una scala anch’essa alta 10 braccia. Il piede della scala è spostato di 6 braccia dalla base della torre:



Il problema chiede la lunghezza dell’abbassamento, DC, subito dalla punta della scala:



AC è un cateto del triangolo rettangolo ABC. La sua lunghezza è data da:

$AC^2 = BC^2 - AB^2 = 10^2 - 6^2 = 100 - 36 = 64$ e

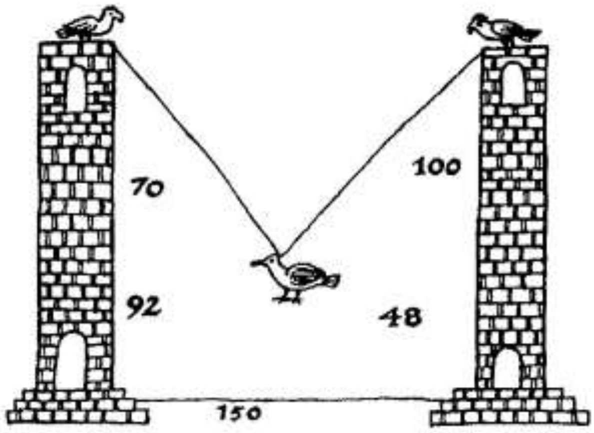
$AC = \sqrt{64} = 8$ braccia.

La lunghezza di DC è:

$DC = AD - AC = 10 - 8 = 2$ braccia.

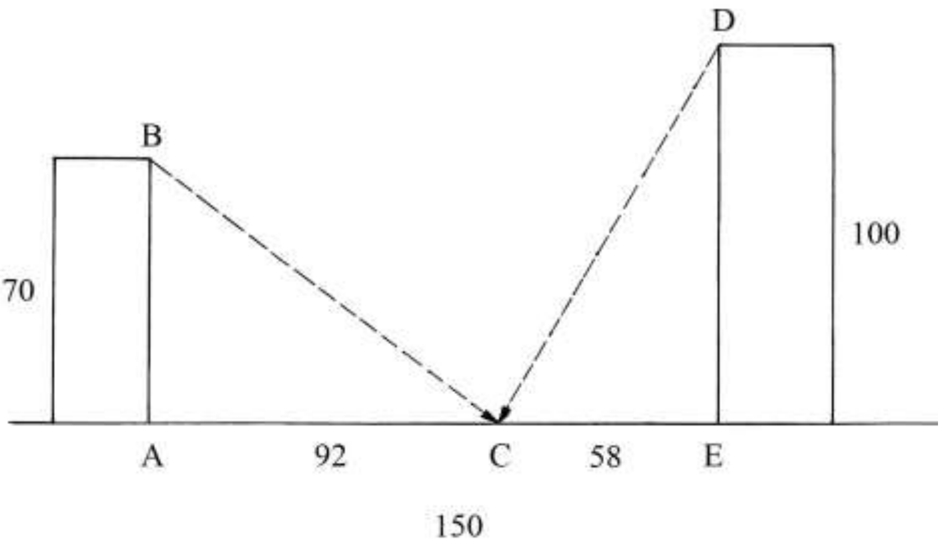
Ragione 136

In una piazza sono costruite due torri fra loro distanziate di 150 braccia.
La torre di sinistra è alta 70 braccia e quella di destra 100.
Sulla cima di entrambe vi è un falco. Nella piazza è portata un’anatra.



I due falchi si muovono contemporaneamente verso l'anatra e la raggiungono nello stesso istante. Lo schema contenuto nell'originale è poco chiaro perché sembra che l'anatra sia in volo in aria, quando dalla soluzione del problema risulta che essa è sul terreno. Inoltre, il valore "48" è errato: la corretta lunghezza è "58", come è calcolato nel testo originale.

Il problema chiede di determinare la distanza dell'anatra dai piedi delle due torri quando viene raggiunta dai due rapaci: questi ultimi compiono un percorso identico.



Inizialmente, i falchi sono in B e in D e l'anatra è in C.

I segmenti BC e DC hanno uguale lunghezza e sono rispettivamente le ipotenuse dei triangoli rettangoli ABC e DCE.

Le lunghezze dei cateti AC e CE sono incognite: è nota solo la loro somma che è 150 braccia.

Assegniamo a AC il valore dell'incognita: $AC = x$.

CE è: $CE = AE – AC = 150 – x$.

L'ipotenusa BC è lunga:

$$BC^2 = BA^2 + AC^2 = 70^2 + x^2.$$

L'ipotenusa DC è lunga:

$$DC^2 = DE^2 + CE^2 = 100^2 + (150 – x)^2.$$

Uguagliando le due espressioni si ha:

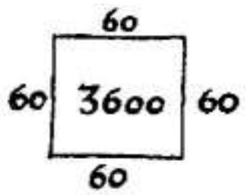
$70^2 + x^2 = 100^2 + (150 – x)^2$
$4900 + x^2 = 10000 + (22500 – 300 * x + x^2)$
$4900 = 10000 + 22500 – 300 * x$
$300 * x = 27600$
$x = 27600/300 = 92$ braccia.
CE è lungo: CE = AE – AC = 150 – 92 = 58 braccia.

L'Autore ricava la stessa soluzione con una procedura che può essere sintetizzata con la seguente formula:

$$CE = (AE^2 + AB^2 – DE^2)/(2 * AE) = (150^2 + 70^2 – 100^2)/(2 * 150) =$$
$$= (22500 + 4900 – 10000)/300 = 17400/300 = 58 \text{ braccia.}$$

Ragione 137

Un terreno ha forma quadrata e ha lati – *teste* – lunghi 60 braccia:



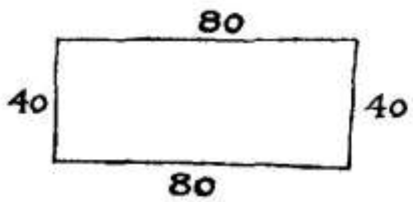
La sua area è correttamente calcolata:

$A = 60 * 60 = 3600$ braccia^2.

L'Autore fornisce il risultato esatto, ma non indica alcuna unità di misura che, ovviamente, è il *braccio quadrato*.

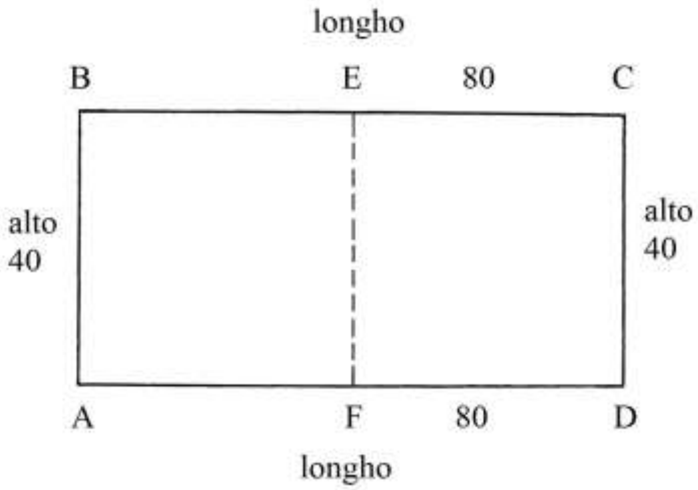
Ragione 138

Un campo ha forma rettangolare ed è lungo 80 braccia e alto 40:



L'Autore chiama *longho* la lunghezza [AD = BC] e *alto* la larghezza [AB = CD].

Il rettangolo è un *bislungo* perché è formato da due quadrati di uguali dimensioni uniti lungo il comune lato [EF]:

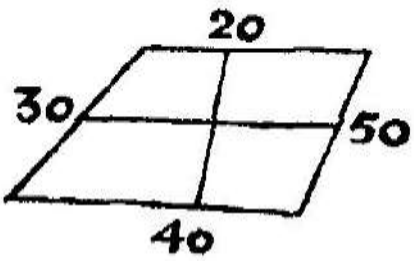


L’area del campo è:

A = alto * longho = 40 * 80 = 3200 braccia^2.

Ragione 139

Un campo ha la forma di un quadrilatero privo di angoli retti:



Le dimensioni sono scritte sullo schema: sia questo ultimo che il testo non indicano alcuna unità di misura.

Il disegno originale è nettamente fuori scala: ad esempio, il lato lungo 50 unità risulta più corto degli altri tre.

La soluzione impiegata dall’Autore è:

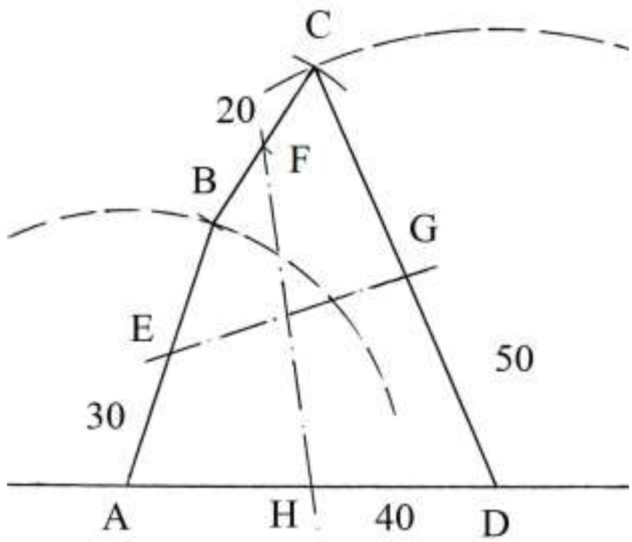
* sommare le lunghezze dei lati opposti e dividere per 2:
  * 20 + 40 = 60;
  * 60/2 = 30;
  * 30 + 50 = 80;
  * 80/2 = 40;
* moltiplicare le due semisomme: 30 * 40 = 1200 unità^2, area del quadrilatero.

La soluzione è errata: essa applica l’antica *formula degli agrimensori*.

- APPROFONDIMENTO -

Maggiori informazioni sulle origini e sulle applicazioni della *formula degli agrimensori* sono presenti nell’articolo citato in bibliografia e presente sul sito www.geometriapratica.it.

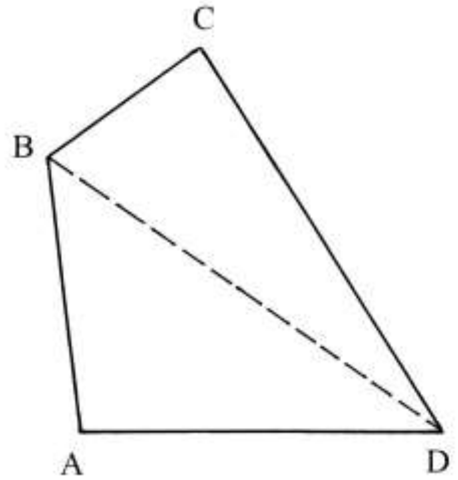
Il quadrilatero della figura che segue ha le stesse dimensioni di quello dello schema originale e tutte in scala:



EG e FH sono le mediane del poligono. Gli archi di circonferenza mostrano le sue possibili articolazioni: infatti il quadrilatero non è stabile ma articolato: solo una diagonale (AC o BD) lo renderebbe rigido.

Costruendo un modello con quattro stecche di legno (o di altro materiale sottile) con lunghezze proporzionali a 20, 30, 40 e 50 si potrebbe verificare la sua instabilità fino a ridurre al minimo la sua area.

La figura che segue mostra un'altra variante dello stesso poligono che cerca di riprodurre l'originale e con lunghezze corrette:



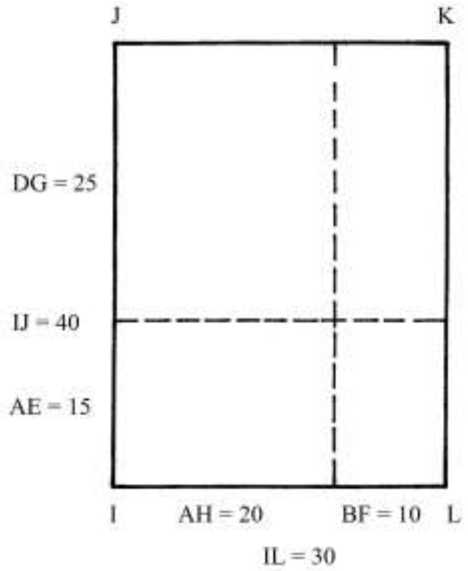
La diagonale BD divide il quadrilatero in due triangoli dei quali è facile calcolare l'area, conoscendo la sua lunghezza: allo scopo serviva la nota formula di Erone di Alessandria per il calcolo dell'area di un triangolo. Forse l'Anonimo non conosceva la formula o aveva difficoltà a usarla.

La misurazione delle altezze AY e CX rendeva facili i calcoli delle aree dei triangoli ABD e BCD.

Il metodo usato dall'Anonimo autore di questo manoscritto converte il quadrilatero in un rettangolo IJKL che ha lati lunghi come segue:

IL = AH + BF = AD/2 + BC/2 = (AD + BC)/2 = (40 + 20)/2 = 30;

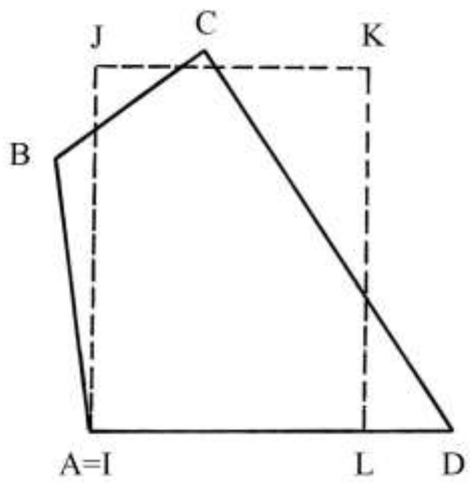
IJ = AE + DG = AB/2 + CD/2 = (AB + CD)/2 = (30 + 50)/2 = 40.



L’area di IJKL è:

A $_{IJKL}$ = IJ * IL = 40 * 30 = 1200 unità^2, che è l’area calcolata dall’Anonimo per il quadrilatero originario.

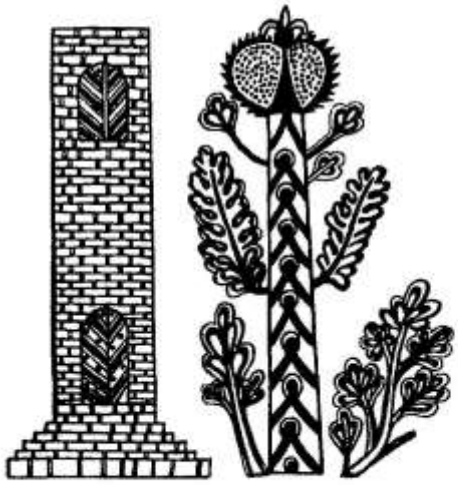
Lo schema che segue confronta il quadrilatero ABCD e il rettangolo IJKL:



\- -

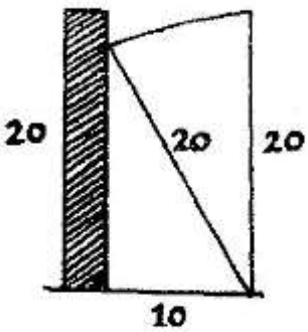
Ragione 140

Una torre è alta 20 braccia e accanto ad essa è piantato un albero di uguale altezza:

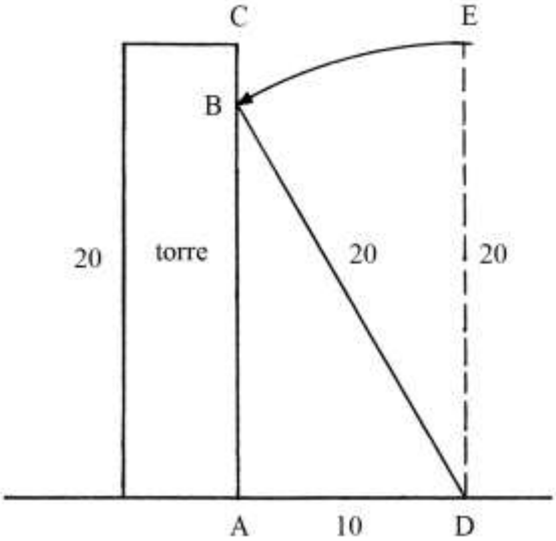


Il piede dell'albero deve essere allontanato di 10 braccia dalla base della torre.

Dal secondo schema originale pare che l'albero sia sradicato e poi poggiato a una parete della torre:



Il vertice E ruota intorno a D fino a poggiare in B sulla parete della torre:



Il problema chiede la lunghezza di BC.

ABD è un triangolo rettangolo di cui è ignota solo la lunghezza del cateto AB:

$AB^2 = BD^2 – AD^2 = 20^2 – 10^2 = 400 – 100 = 300$ e
$AB = \sqrt{300} \approx (17 + 11/34)$ braccia.

La lunghezza di BC è:

$BC = AC – AB = 20 – (17 + 11/34) = (2 + 23/34)$ braccia.

Bibliografia

1. Ascani Valerio, "Il Trecento disegnato". Le basi progettuali dell'architettura gotica in Italia, Roma, Viella, 1997, pp. 178 con 45 figure fuori testo.
2. Bocchi Andrea, "Lo Zibaldone Riccardiano 2161", Udine, FORUM, 2021, pp. 299.
3. Buchanan Cowley Elizabeth, "An Italian mathematical manuscript" [Columbia X 511 A 13], in "Vassar Mediæval studies", New Haven, Yale University Press, 1923, pp. 379-405.
4. Calzolani Sergio, "La formula degli agrimensori", pp. 75, http://www.geometriapratica.it/index.php/it/11-geometria-pratica/31-la-formula-degli-agrimensori.
5. Chiovelli Renzo, "Tecniche costruttive murarie medievali". La Tuscia, Roma, L'Erma di Bretschneider, 2007, pp. 496.
6. Di Teodoro Francesco P.(aolo), "Per una filologia del disegno geometrico", in "Piero della Francesca tra arte e scienza", a cura di Marisa Dalai Emiliani e Valter Curzi, Marsilio, Venezia, 1996, pp. 239-251.
7. Høyrup Jens, "Leonardo Fibonacci and *abbaco* culture. A proposal to invert the roles", "Revue d'histoire des mathématiques", 11 (2005), pp. 23-56.
8. "Lo livero de l'abbecho", a cura di Andrea Bocchi, Vol. I – Introduzione e testo critico, Pisa, Edizioni ETS, 2017, pp. 524.
9. Piero della Francesca, "Trattato d'abaco", 3 voll., (Stampa anastatica del codice Ashburnham 359* della Biblioteca Medicea Laurenziana di Firenze), volume I (testo e note) pp. LXXI-250 e vol. II (Disegni) pp. XXIII-189, Roma, Istituto Poligrafico e Zecca dello Stato, 2012.
   [Nel volume II, "Disegni", è un'ampia *Introduzione* all'analisi dei disegni a cura di Vladimiro Valerio, con la collaborazione di Alessandra Sorci].
10. "Tavole di Ragguaglio per la riduzione dei pesi e misure che si usano in diversi luoghi del Granducato di Toscana al peso e misura vegliante in Firenze", a cura di Francesco Assandri, Firenze, Gaetano Cambiagi Stampator Granducale, 1782, pp. XVII+835.
11. Travaini Lucia, "Monete mercanti e matematica", Roma, Jouvence Editoriale, 2003, pp. 319 con 28 tavole fuori testo.
12. Travaini Lucia, "Monete mercanti e matematica", seconda edizione ampliata con nuove liste inedite, Milano, Editoriale Jouvence, 2020, pp. LXXIII+319 con 28 tavole fuori testo.
13. Vogel Kurt, "Ein italienisches Rechenbuch aus dem 14. Jahrhundert (Columbia X 511 A 13)", Monaco, Deuteschen Museums, 1977, pp. 186 con 5 tavole fuori testo.
14. Zupko Ronald Edward, "Italian Weights and measures from the Middle Ages to the Nineteenth Century", Philadelphia, American Philosophical Society, 1981, pp. lxxxiv+339.