sergio(punto)calzolani(at)outlook(punto)it

Parole chiave: ripetizione rapporti, triangolo aureo, sezione aurea, rapporti metallici, Vera Marta Winitzsky de Spinadel, sezione argentea, successione di Pell, sezione sacra, rettificazione della circonferenza, Ostia romana, sezione di rame, sezione di nickel, sezione di cobalto, sezione di ferro, sezione di manganese, sezione di cromo, proporzioni di Cordova, angoli ottagono regolare, costante di Cordova, poligoni di Cordova, formato ISO A, aquilone e dardo, doppio aquilone, doppio dardo, tassellazione pentagonale, pentagoni di Cordova, ogive di Cordova

La cassetta degli attrezzi

Gli antichi costruttori usavano una serie di strumenti da disegno e un complesso insieme di conoscenze geometriche.

Secondo il matematico americano Jay Kappraff quei costruttori possedevano le seguenti conoscenze avanzate:

1. La *sezione sacra*, largamente impiegata dai Romani e dai loro successori.
2. La tracciatura di *poligoni stellati*.
3. La *rettificazione* approssimata di una circonferenza o di un arco.
4. La creazione di una griglia di circonferenze.
5. La *sezione aurea*.
6. Il principio della ripetizione dei rapporti.

Oltre a queste conoscenze "avanzate" gli Antichi conoscevano alcune basi della geometria euclidea. Fra gli strumenti che essa forniva loro, i più comuni erano:

7) la teoria delle proporzioni.
8) Il principio dei triangoli e dei poligoni simili.
9) Il teorema di Pitagora applicato per mezzo del *triangolo egizio* 3-4-5.

La *sezione sacra* e la *sezione aurea* rientrano fra i *rapporti metallici*.

- APPROFONDIMENTO -

Il principio della ripetizione dei rapporti

Al precedente punto 6. si è fatto un cenno a questo argomento. Per chiarire le cose presentiamo due esempi di impiego di questo principio.

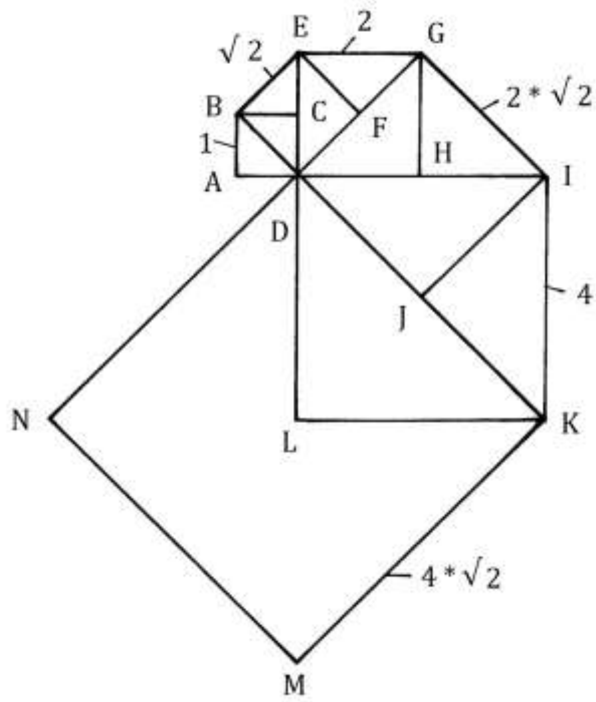
ABCD è un quadrato con lato *convenzionalmente* lungo 1.

La sua diagonale BD è lunga $\sqrt{2}$.

Il quadrato DBEF è costruito sulla diagonale BD e ha lati lunghi $\sqrt{2}$.

La diagonale DE, nel quadrato DBEF, è lunga:

$$DE = \sqrt{(BD^2 + BE^2)} = \sqrt{[(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2]} = \sqrt{(2 + 2)} = \sqrt{4} = 2.$$



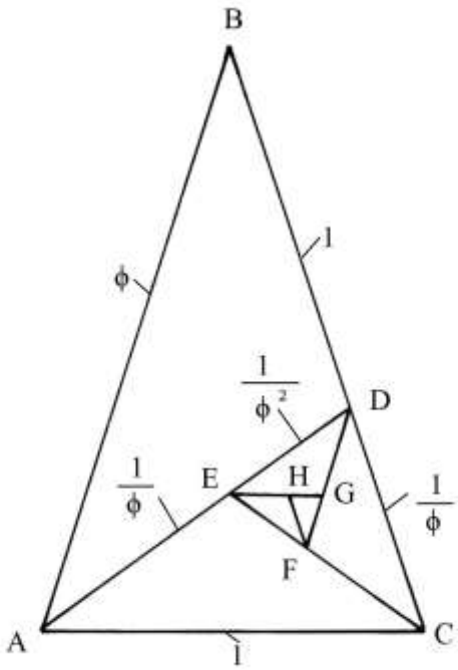
I quadrati successivi hanno lati e diagonali le cui lunghezze crescono in *progressione geometrica* con ragione $\sqrt{2}$.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

ABC è un *triangolo isoscele aureo*.
Gli angoli alla base, BAC e ACB, hanno ampiezza uguale a 72°.
L'angolo al vertice, ABC, è ampio 36°.
I lati hanno lunghezze *convenzionali* pari a $AC = 1$ e $AB = BC = \Phi$.
Fissare il punto D in modo che BD sia lungo 1: anche il segmento è lungo 1.
Il triangolo ADC è isoscele e *simile* a quello ABC.
Il segmento DC è lungo:

$$DC = BC - BD = \phi - 1 = 1/\phi.$$

Stabilire il punto E a distanza da A uguale a DC:



$AE = DC = EC = 1/\phi.$

Il segmento ED è lungo:

$ED = AD – AE = 1 – 1/\phi = (\phi – 1)/\phi = 1/\phi^2$.

Il punto F è a distanza DE da C:

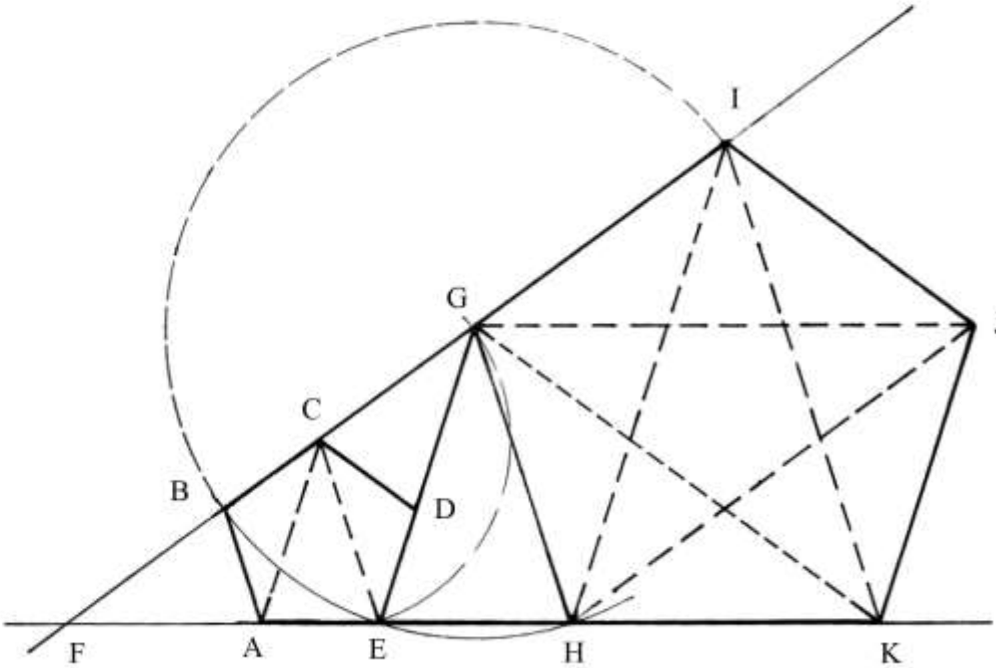
$CF = FD = DE = 1/\phi^2$.

Le successive costruzioni producono triangoli isosceli aurei con lati di lunghezza decrescente secondo una progressione geometrica di ragione $1/\phi$.

La progressione vale pure in senso crescente: in questo caso le dimensioni dei lati dei triangoli aumentano secondo una progressione geometrica di ragione Φ.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Un terzo esempio di applicazione della *legge della ripetizione dei rapporti* è fornita con la costruzione che segue.



ABCDE è un pentagono regolare. Prolungare verso sinistra e verso destra il lato AE e poi i lati BC e ED. Sono così fissati i punti F e G.

Fare centro nel punto G e con raggio GE tracciare un arco di circonferenza che taglia le rette passanti per F in due punti: H e I.

Costruire il pentagono regolare HGIJK, che ovviamente è *simile* a quello ABCDE.

Disegnare le diagonali dei due pentagoni.

Fare centro nel punto C e con raggio CE tracciare un arco da E fino al punto G: CE è una diagonale del pentagono ABCDE.

Il segmento EG è lungo:

$$EG = ED + DG = ED + CE.$$

Ma ED è un lato di ABCDE e CE è una sua diagonale.

Fra le lunghezze di una diagonale e di un lato dello stesso pentagono intercorre la relazione:

diagonale = Φ * lato e cioè $CE = \Phi * ED$.

Se *convenzionalmente* il lato di ABCDE è lungo 1, la diagonale CE è lunga Φ.

Il segmento GH ha la stessa lunghezza di GE ed è il lato del pentagono HGIJK.

La proporzione fra i lati dei due pentagoni è:

$$AE : GI = 1 : (1 + \Phi) = 1 : \Phi^2.$$

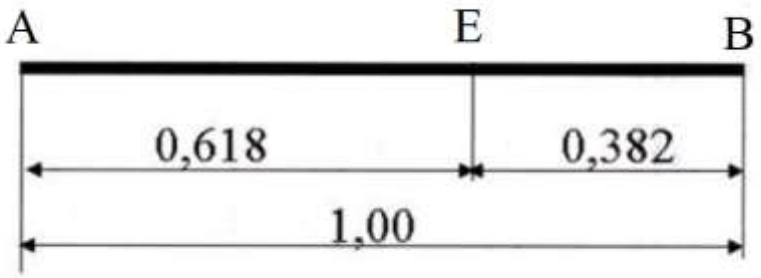
- -

La sezione aurea

Risale a Euclide la prima definizione della *sezione aurea* (ma non l’attuale denominazione, che è assai recente): egli definì la “divisione di un segmento in media e ultima ragione”.

In termini più discorsivi, si tratta di dividere un segmento in modo che il rettangolo che ha per lati l’intero segmento e la sua parte minore sia equivalente al quadrato che ha per lato la parte maggiore.

La figura che segue descrive la situazione:



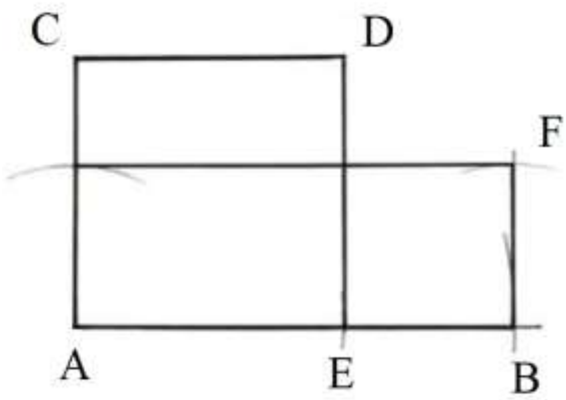
Il segmento AB è convenzionalmente lungo 1 unità. Esso è diviso dal punto E in due parti:

- AE è la *media ragione* ed è lungo 0,618 unità;
- EB è l'*ultima ragione* ed è lungo 0,382 unità.

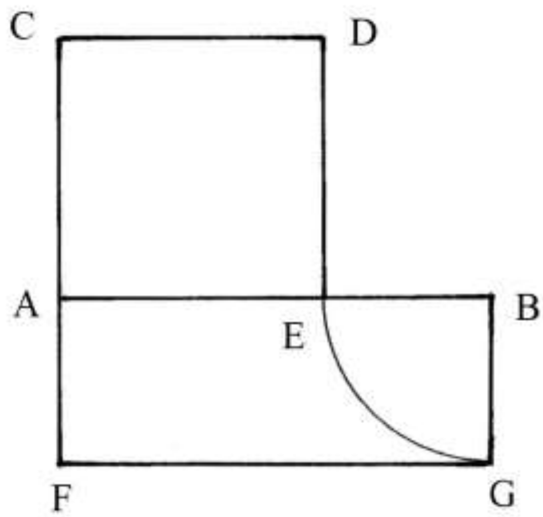
I due coefficienti 0,618 e 0,382 sono leggermente approssimati: il primo per *difetto* e il secondo per *eccesso*.

Il rettangolo AB x FB (con FB = EB) possiede la stessa superficie del quadrato di lato AE:

$AB * FB = AE^2$



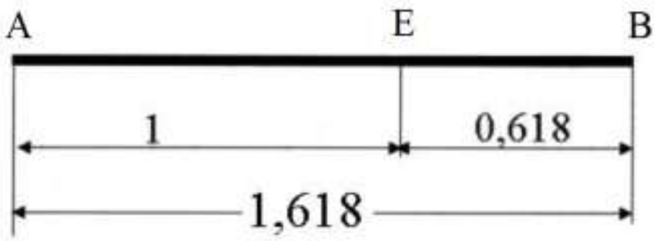
La precedente costruzione può essere leggermente modificata nel modo descritto dalla figura che segue:



Costruire il quadrato ACDE e il rettangolo ABGF: i due quadrilateri hanno la stessa area:

$AE^2 = AB * BG$ ma $BG = EB$ e quindi $AE^2 = AB * EB$.

La divisione del segmento AB può essere presentata anche nel modo che segue:



Il segmento AB è lungo 1,618 unità: AE è lungo 1 e EB è lungo 0,618.

I numeri 0,618 e 1,618 sono entrambi approssimati per *difetto*.

La sezione aurea è legata alla *successione di Fibonacci* (Leonardo Fibonacci, Pisa, 1170 circa – 1240 circa); essa è formata da numeri interi naturali che seguono una regola ben definita: *un numero è uguale alla somma dei due che lo precedono*.

I primi numeri sono i seguenti:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, …

Nella successione, un numero pari è seguito da una coppia di numeri dispari.

Il rapporto fra due numeri consecutivi tende al valore di 1,618.

Le prime cifre del numero Φ sono le seguenti:

1, 6 1 8 0 3 3 9 8 8 7 4 9 8 9 4 8 4 8 2 0 4 5 8 6 8 3 4 3 6 5 6 3 8 1 1 7 7 2 0 3 0 9 1 7 9 8 0 5 7 6 2 8 6 2 1 3 5 4 4 8 6 2 2 7 0 5 2 6 0 4 6 2 8 1 8 9 0 2 4 4 9 7 0 7 2 0 7 2 0 4 1 8 9 3 9 1 1 3 7 4 8 4 7 5
(fonte: http://oeis.org/A001622)

Il numero 0,618 è talvolta indicato con il simbolo φ, lettera dell'*alfabeto greco* phi, minuscola: la lettera corrisponde alla lettera minuscola f dell'alfabeto latino.

Il numero 1,618 viene indicato con il simbolo Φ, lettera *dell'alfabeto greco* Phi, maiuscola: essa corrisponde alla nostra lettera maiuscola F. Il simbolo fu scelto in onore del grande scultore e architetto ateniese Fidia (vissuto fra il 490 e il 430 a.C.).

I RAPPORTI METALLICI

La *sezione aurea* è il più conosciuto rapporto al quale sia attribuito il nome di un metallo o di una lega.

Modificando il tipo di successione, si ricavano altri rapporti ai quali sono stati assegnati differenti nomi.

I rapporti metallici (o sezioni metalliche) hanno importanza nella geometria pratica e applicata, in algebra e in cristallografia.

L'espressione *rapporti metallici (Metallic means)* è abbastanza recente perché è stata introdotta nel 1998 dalla matematica argentina Vera Marta Winitzsky de Spinadel.

\- APPROFONDIMENTO -

Alcune proprietà del numero Φ

Il numero Φ possiede alcune caratteristiche:

* $1/\phi^3 \approx 0,236067\ldots$
* $1/\phi^2 = 1 - 1/\phi \approx 0,381966\ldots$
* $1/\phi = \phi - 1 \approx 0,618033\ldots$
* $1 - \phi = - 1/\phi = (1 - \sqrt{5})/2 \approx - 0,618033\ldots$
* $\phi = 1 + 1/\phi$
* $\phi^2 = \phi + 1$
* $\phi + 1 = (1 + \sqrt{5})/2 + 1 = (3 + \sqrt{5})/2$
* $\phi^2 = [(1 + \sqrt{5})/2]^2 = (1 + 2 * \sqrt{5} + 5)/2 = (6 + 2 * \sqrt{5})/4 = (3 + \sqrt{5})/2.$

In generale:

$$\phi^n = \phi^{(n-1)} + \phi^{(n-2)} = \phi * \phi^{(n-1)}.$$

La funzione mantissa

La *funzione mantissa* definisce la parte decimale di un numero reale.
Essa è calcolata sottraendo dal numero la sua parte intera:

$$\underbrace{m}_{\text{mantissa}}\ \{\underbrace{n}_{\text{numero}}\} = n - \underbrace{\lfloor n \rfloor}_{\text{parte intera di n}}$$

Nel caso del numero Φ si verifica:

$$m\ \{\phi\} = \phi - \lfloor \phi \rfloor \approx 1,618034 - 1 \approx 0,618034 = 1/\phi$$

La *mantissa* di Φ è uguale al suo reciproco $1/\Phi$.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Anche i valori approssimati di $1/\phi^3$ e ϕ^3 hanno uguale *mantissa* e cioè $0,236067\ldots$:

$1/\phi^3 \approx 0,\underline{236067}$
$\phi^3 \approx 4,\underline{236067}.$

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Le prime *dieci* potenze di Φ hanno i valori riportati nell'elenco che segue:

- $\Phi = \underline{1}*\Phi + 0$
- $\Phi^2 = \underline{1}*\Phi + \underline{1}$
- $\Phi^3 = \underline{2}*\Phi + \underline{1}$
- $\Phi^4 = \underline{3}*\Phi + \underline{2}$
- $\Phi^5 = \underline{5}*\Phi + \underline{3}$
- $\Phi^6 = \underline{8}*\Phi + \underline{5}$
- $\Phi^7 = \underline{13}*\Phi + \underline{8}$
- $\Phi^8 = \underline{21}*\Phi + \underline{13}$
- $\Phi^9 = \underline{34}*\Phi + \underline{21}$
- $\Phi^{10} = \underline{55}*\Phi + \underline{34}$

Le frecce collegano fra loro gli elementi delle due successioni di Fibonacci presenti nell'elenco.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

La tabella che segue mostra un'altra proprietà presente nella successione delle prime dieci potenze di Φ:

- $\Phi = \underline{1} * \Phi + 0$
- $\Phi^2 = \underline{1} * \Phi + \underline{1}$
- $\Phi^3 = \underline{2} * \Phi + \underline{1}$
- $\Phi^4 = \underline{3} * \Phi + \underline{2}$
- $\Phi^5 = \underline{5} * \Phi + \underline{3}$
- $\Phi^6 = \underline{8} * \Phi + \underline{5}$
- $\Phi^7 = \underline{13} * \Phi + \underline{8}$
- $\Phi^8 = \underline{21} * \Phi + \underline{13}$
- $\Phi^9 = \underline{34} * \Phi + \underline{21}$
- $\Phi^{10} = \underline{55} * \Phi + \underline{34}$

Le frecce collegano i numeri che formano la successione di Fibonacci: il coefficiente di Φ^n è la parte intera della potenza successiva, Φ^{n+1}.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Dividendo un numero della successione di Fibonacci per il *secondo* successivo si ha, ad esempio:

$21/55 \approx 0{,}381818\ldots \approx 1/\phi^2 \approx 0{,}381966\ldots$

Dividendo un numero per il *terzo* successivo si ottiene:

$21/89 \approx 0{,}235955\ldots \approx 1/\phi^3 \approx 0{,}236067\ldots$

In entrambi i casi i risultati tendono alle *mantisse* (0),*381966…* e (0),*236067…*.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Invece, dividendo un numero per il *secondo* precedente si ha, ad esempio:

$55/21 \approx 2{,}619047\ldots \approx 1 + \phi = \phi^2 \approx 2{,}618033\ldots$

Dividendo un numero per il *terzo* precedente si ottiene:

$55/13 \approx 4{,}230769\ldots \approx (1 + \phi) + \phi = 2 * \phi + 1 = \phi^3 \approx 4{,}236067\ldots$

In questi due esempi ricompaiono due mantisse già incontrate:

(0),*618033…* e (0),*236067…* .

- -

L'origine matematica di alcune sezioni metalliche

Le sezioni metalliche corrispondono alle radici *positive* delle soluzioni di un'equazione di secondo grado:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x_{1,2} = [- b \pm \sqrt{(b^2 – 4ac)}]/2a$$ dove

$$x_1 = [- b + \sqrt{(b^2 – 4ac)}]/2a$$ e

$$x_2 = [- b - \sqrt{(b^2 – 4ac)}]/2a.$$

x_1 e x_2 sono le due radici ricavate con la formula sopra trascritta.

Assegnando valori variabili al *coefficiente* b e il valore 1 al *coefficiente* a e al *termine noto* c, dalla soluzione dell'equazione si ottengono radici che sono interessanti per le varie sezioni metalliche.

L'equazione assume così la forma:

$$ax^2 – bx – 1 = 0$$

La De Spinadel usa anche una seconda famiglia di equazioni di 2° grado:

$$x^2 – x – c = 0$$ in questa seconda famiglia il coefficiente a ha valore 1, quello b ha valore -1 e il *valore noto* c assume valori variabili *negativi*.

In tutti i casi, a, b e c sono sempre *numeri naturali*, interi positivi o negativi.

Nota: in questo capitolo saranno usate indifferentemente le espressioni "sezione metallica" e "numero metallico" quali *sinonimi*.

\- APPROFONDIMENTO -

Operazioni aritmetiche sulle radici di un'equazione di 2° grado

Le radici di un'equazione di 2° grado sono legate da alcuni rapporti che sono evidenziati con due operazioni aritmetiche: somma e moltiplicazione.

La somma delle radici x_1 e x_2 della generica equazione di 2° grado

$$ax^2 + bx + c = 0$$ è:

$$x_1 + x_2 = [- b + \sqrt{(b^2 – 4ac)}]/2a + [- b - \sqrt{(b^2 – 4ac)}]/2a =$$
$$= - 2b/2a = - b/a.$$

La moltiplicazione delle due radici dà il seguente risultato:

$$x_1 * x_2 = [- b + \sqrt{(b^2 – 4ac)}]/2a * [- b - \sqrt{(b^2 – 4ac)}]/2a =$$
$$= [b^2 + b * \sqrt{(b^2 – 4ac)} – b * \sqrt{(b^2 – 4ac)} – (b^2 – 4ac)]/4*a^2 =$$
$$= [b^2 – (b^2 + 4ac)]/4a^2 = – c/a.$$

\- -

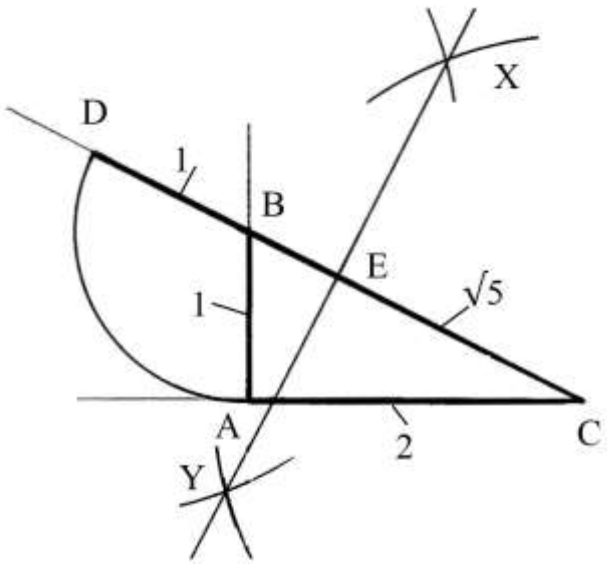
Costruzione della sezione aurea

Ecco il caso della *sezione aurea*:

$$x^2 - x - 1 = 0$$
$$x_{1,2} = [1 \pm \sqrt{(1 + 4)}]/2$$
$$x_1 = (1 + \sqrt{5})/2 = \phi$$
$$x_2 = (1 - \sqrt{5})/2.$$

La seconda radice, x_2, è da scartare perché negativa.

L'espressione $\sqrt{5}$ è un numero *irrazionale* che può essere ricavato per via geometrica con la costruzione contenuta nella figura che segue:



Costruire il triangolo rettangolo ABC: esso ha i cateti lunghi in proporzione a 1 e a 2. L'ipotenusa BC ha lunghezza proporzionale a $\sqrt{5}$. Prolungare verso sinistra l'ipotenusa BC.

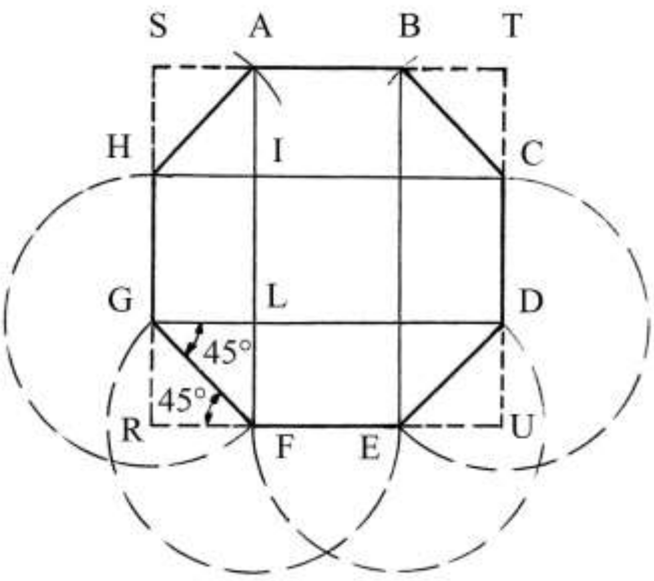
Fare centro in B e, con raggio BA, tracciare un arco da A fino a tagliare in D il prolungamento dell'ipotenusa.

Il segmento DC è lungo proporzionalmente a $(\sqrt{5} + 1)$. Esso deve essere diviso a metà, con l'aiuto della costruzione dell'asse del segmento, passante per i punti X e Y.

Il punto E divide DC in due parti uguali (DB = EC) di lunghezza proporzionale a $(\sqrt{5} + 1)/2$ e cioè al valore della *sezione aurea*.

La sezione argentea

Nell'ottagono regolare ABCDEFGH nella figura che segue, il lato del poligono – AB – è lungo ℓ; il segmento AF è una *diagonale* del poligono. Esso è inscritto nel quadrato RSTU.



La lunghezza di AF è facilmente determinabile perché è la somma delle lunghezze di tre segmenti: AI, IL e LF.

AI e LF hanno la stessa lunghezza e AI è il cateto del triangolo rettangolo isoscele HAI e, per il teorema di Pitagora, è lungo:

$AI = AH * (\surd 2)/2 = \ell * (\surd 2)/2.$

Quindi:

$AF = AI + IL + LF = \ell * (\surd 2)/2 + \ell + \ell * (\surd 2)/2 = \ell * (1 + \surd 2)$

L'espressione aritmetica

$(1 + \surd 2) \approx 2{,}414 = S_a$ è chiamata *sezione argentea*. Può essere indicata con il simbolo S_a.

Essa possiede una curiosa proprietà quando è elevata al quadrato:

$(S_a)^2 = (1 + \surd 2)^2 = 1 + 2 + 2 * \surd 2 = 1 + 2 * (1 + \surd 2) = 1 + 2 * S_a$.

Il reciproco di S_a è:

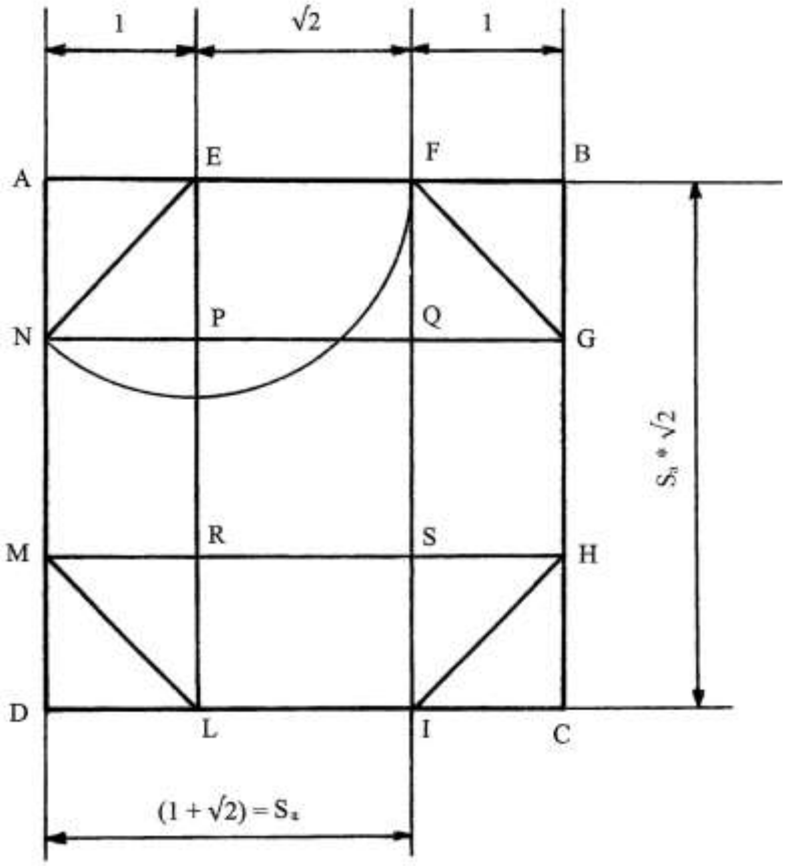
$1/S_a = 1/(1 + \surd 2) = (1 - \surd 2)/[(1 + \surd 2) * (1 - \surd)2] = (1- \surd 2)((-1) = \surd 2 – 1.$

Ne consegue che:

$(1 + 1/S_a) = 1 + (\surd 2 – 1) = \surd 2.$

Un approfondimento riguardo alla sezione argentea

La figura che segue ripropone lo schema della costruzione dell'ottagono regolare:



Disegnare il segmento EN, diagonale del quadrato AEPN.
Con centro in E e raggio EN tracciare l'arco da N a F.
Per semplificare i calcoli, assegniamo al segmento AE la lunghezza 1. EF è lungo $\sqrt{2}$.
Il lato del quadrato grande, ABCD, è lungo:

$$(1 + \sqrt{2}) + 1 = S_a + 1 = 2 + \sqrt{2}.$$

Dividendo $(S_a + 1)$ per S_a si ha:

$$(2 + \sqrt{2})/(1 + \sqrt{2}) = \sqrt{2}.$$

Ecco dimostrato che il lato del quadrato ABCD è lungo:

$$BC = S_a * \sqrt{2}.$$

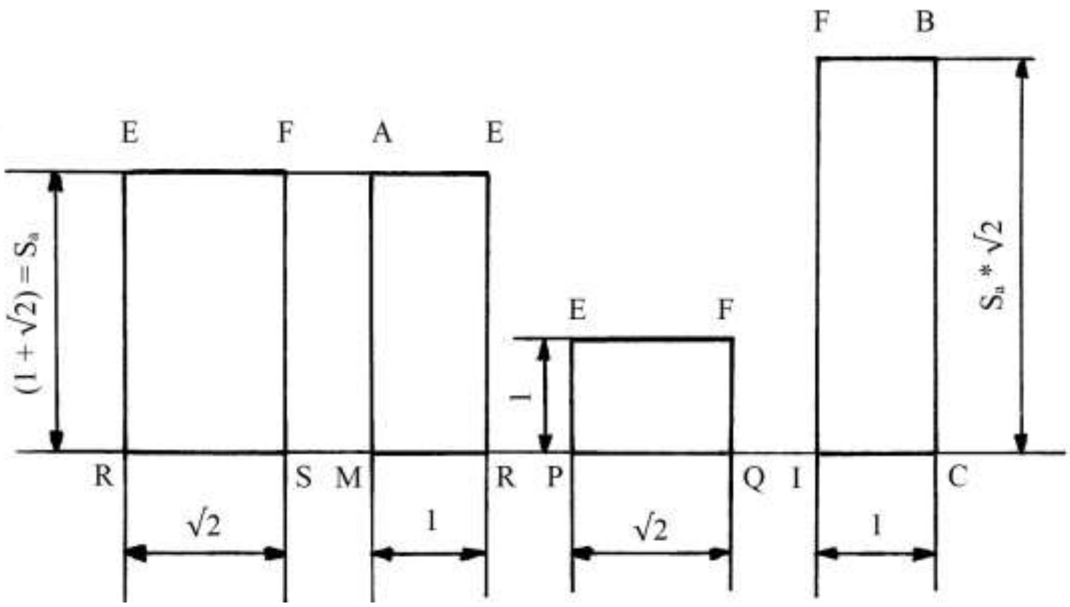
Dalla figura emerge il rapporto esistente fra EF (= LI) e FB (= IC)); il primo segmento è lungo quanto la diagonale di un quadrato di lato FB:

$$EF = \sqrt{2} \quad \text{e} \quad FB = 1$$

Ne consegue:

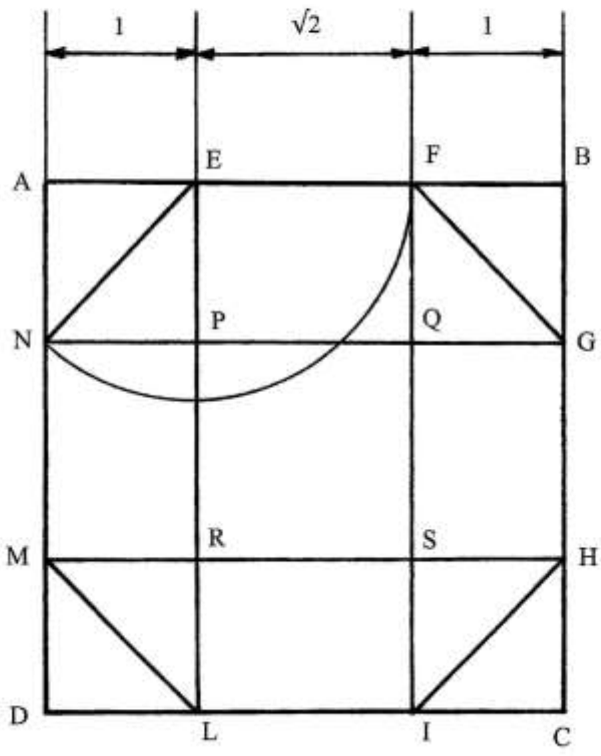
$$EF^2 = 2 = 2 * FB^2$$

Il quadrato ABCD così diviso può essere scomposto in forme rettangolari con dimensioni legate da diversi rapporti nei quali è presente la *sezione argentea* S_a:



Il rettangolo PEFG ha dimensioni nel rapporto $\sqrt{2} : 1$: esso è un *formato A* come codificato dalle norme UNI e ISO sulle dimensioni dei fogli da disegno.

Nella figura che segue consideriamo il trapezio isoscele NEFG:



Il trapezio è isoscele perché i due lati obliqui NE e FG hanno la stessa lunghezza:

$$NE = EF = FG = \sqrt{2}.$$

La base maggiore NG è lunga:

$$NG = NP + PQ + QG = 1 + \sqrt{2} + 1 = 2 + \sqrt{2} = S_a * \sqrt{2}.$$

- APPROFONDIMENTO -

La successione di Pell

La successione di Pell prende il nome dal matematico inglese John Pell (1611-1685).

Essa è caratterizzata da alcune proprietà:

- I numeri che la compongono sono sempre *interi*.
- Un numero qualsiasi P_n è ottenuto dalla seguente espressione

$P_n = 2P_{(n-1)} + P_{(n-2)}$ e cioè un numero P_n è uguale alla somma del doppio del numero che lo precede - $2P_{(n-1)}$ - e di quello che precede questo ultimo, $P_{(n-2)}$.

La tabella che segue riporta alcuni esempi di successioni di Pell:

numero successione	P_1	P_2	$P_3 = 2 * P_2 + P_1$	$P_4 = 2 * P_3 + P_2$	$P_5 = 2 * P_4 + P_3$	$P_6 = 2 * P_5 + P_4$	$P_7 = 2 * P_6 + P_5$	$P_8 = 2 * P_7 + P_6$	$P_9 = 2 * P_8 + P_7$
1	1	2	5	12	29	70	169	408	985
2	1	3	7	17	41	99	239	577	1393
3	1	4	9	22	53	128	309	746	1801
4	1	5	11	27	65	157	379	915	2209
5	1	6	13	32	77	186	449	1084	2617
6	1	7	15	37	89	215	519	1253	3025
7	1	8	17	42	101	244	589	1422	3433
8	1	9	19	47	113	273	659	1591	3841
9	1	10	21	52	125	302	729	1760	4249
10	1	11	23	57	137	331	799	1929	4657
11	1	12	25	62	149	360	869	2098	5065
12	1	13	27	67	161	389	939	2267	5473
13	1	14	29	72	173	418	1009	2436	5881
14	1	15	31	77	185	447	1079	2605	6289
15	1	16	33	82	197	476	1149	2774	6697
16	1	17	35	87	209	505	1219	2943	7105
17	1	18	37	92	221	534	1289	3112	7513
18	1	19	39	97	233	563	1359	3281	7921
19	1	20	41	102	245	592	1429	3450	8329
20	1	21	43	107	257	621	1499	3619	8737
21	1	22	45	112	269	650	1569	3788	9145
22	1	23	47	117	281	679	1639	3957	9553
23	1	24	49	122	293	708	1709	4126	9961
24	1	25	51	127	305	737	1779	4295	10369
25	1	26	53	132	317	766	1849	4464	10777
26	1	27	55	137	329	795	1919	4633	11185
27	1	28	57	142	341	824	1989	4802	11593
28	1	29	59	147	353	853	2059	4971	12001
29	1	30	61	152	365	882	2129	5140	12409
30	1	31	63	157	377	911	2199	5309	12817

- Il rapporto fra due numeri consecutivi di una qualsiasi successione, ad esempio 408 e 169, tende al valore 2,414 che corrisponde alla *sezione argentea*:

  $408/169 \approx 2{,}414 \approx (1 + \sqrt{2}) = S_a$ = sezione argentea.

- -

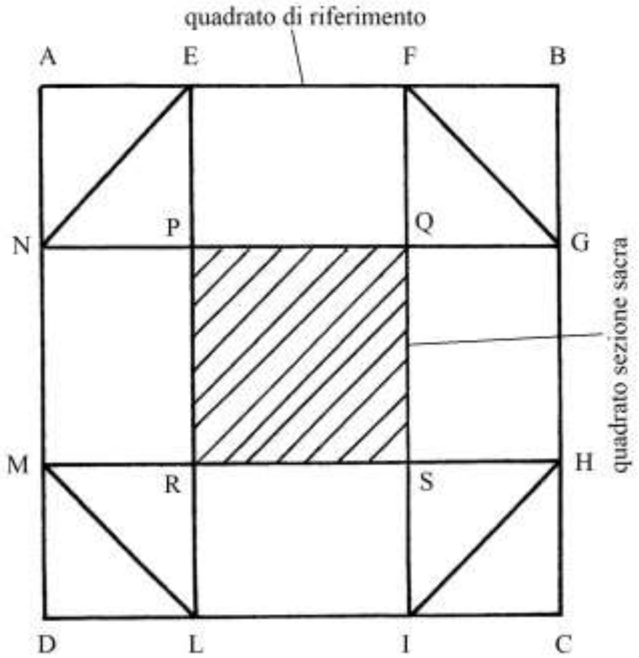
LA SEZIONE SACRA

La sezione argentea risale a tempi molto antichi: almeno in parte, essa deriva anche dalla costruzione della *sezione sacra*.

Questa ultima espressione è più recente e risale al XX secolo: è stata coniata da Tons Brunés, un ingegnere danese che ha studiato in modo approfondito la geometria antica.

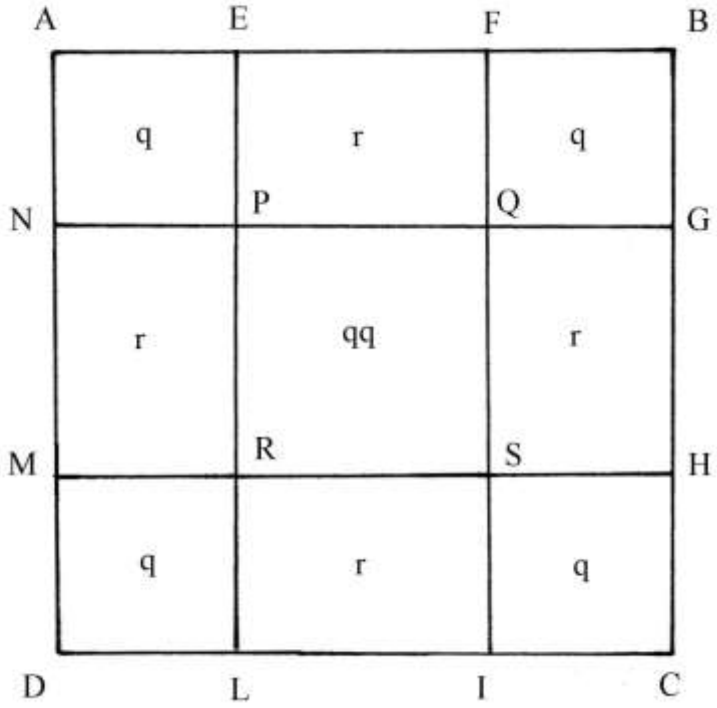
La costruzione è basata sul quadrato. Secondo Brunés essa avrebbe avuto origine presso gli Egiziani: da questi sarebbe stata trasmessa ai Greci (all'epoca di Pitagora, nel VI secolo a.C.). Poi sarebbe passata ai Romani che la impiegarono largamente nella fondazione delle città e nella progettazione della pianta degli edifici civili.

La *sezione sacra* è prodotta dalla divisione del *quadrato di riferimento* ABCD in nove quadrilateri:



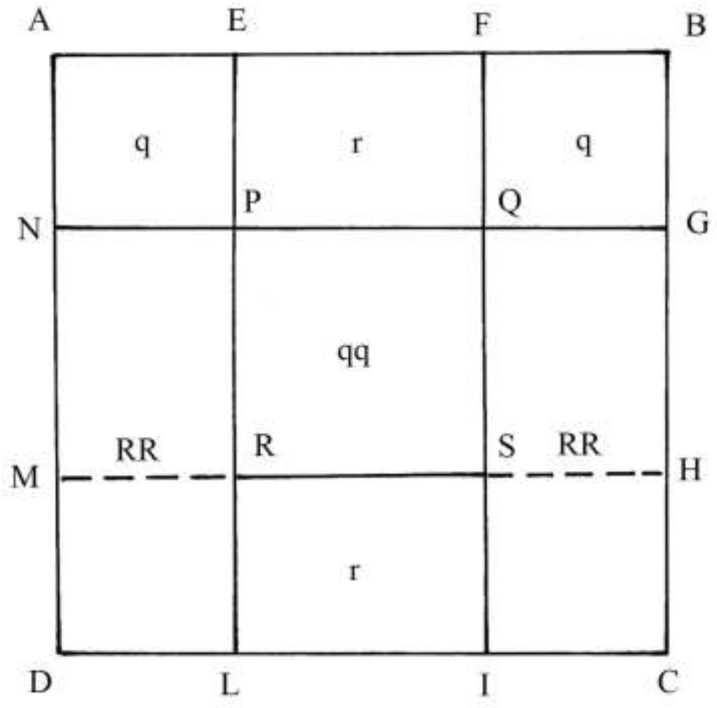
Il quadrato centrale RPQS, tratteggiato nella precedente figura, è la *sezione sacra*.

Il quadrato ABCD risulta così diviso in alcuni quadrilateri:



- quattro quadrati, indicati con la lettera minuscola q nella figura (AEPN, FBGQ, DMRL e ISHC), di uguali dimensioni;
- un quadrato centrale più grande dei precedenti, RPQS, contrassegnato con la coppia di lettere minuscole qq;
- quattro rettangoli di uguali dimensioni, indicati con la lettera minuscola r (EFPQ, QGHS, LRSI e MNPR).

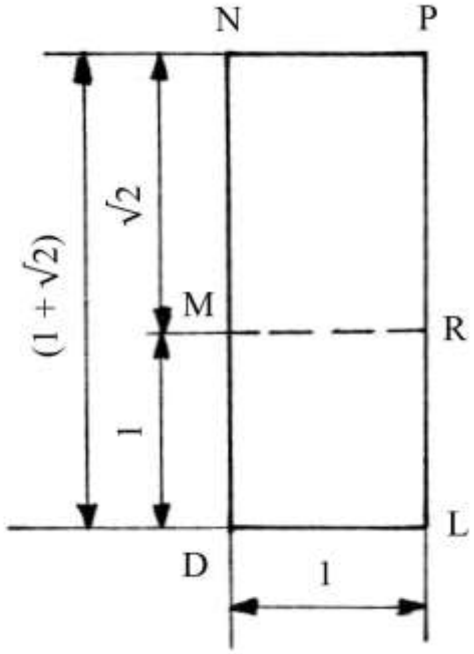
Unendo il rettangolo MNPR con il quadrato adiacente MRLD si ottiene il rettangolo DNPL che nella figura che segue è indicato con le lettere RR, iniziali di *Rettangolo Romano*:



Anche IQGC è un *rettangolo romano*.

Come spiega la figura che segue, un *rettangolo romano* ha le lunghezze dei lati in proporzione $(\sqrt{2} + 1) : 1$:

$$DN : (\sqrt{2} + 1) = DL : 1$$



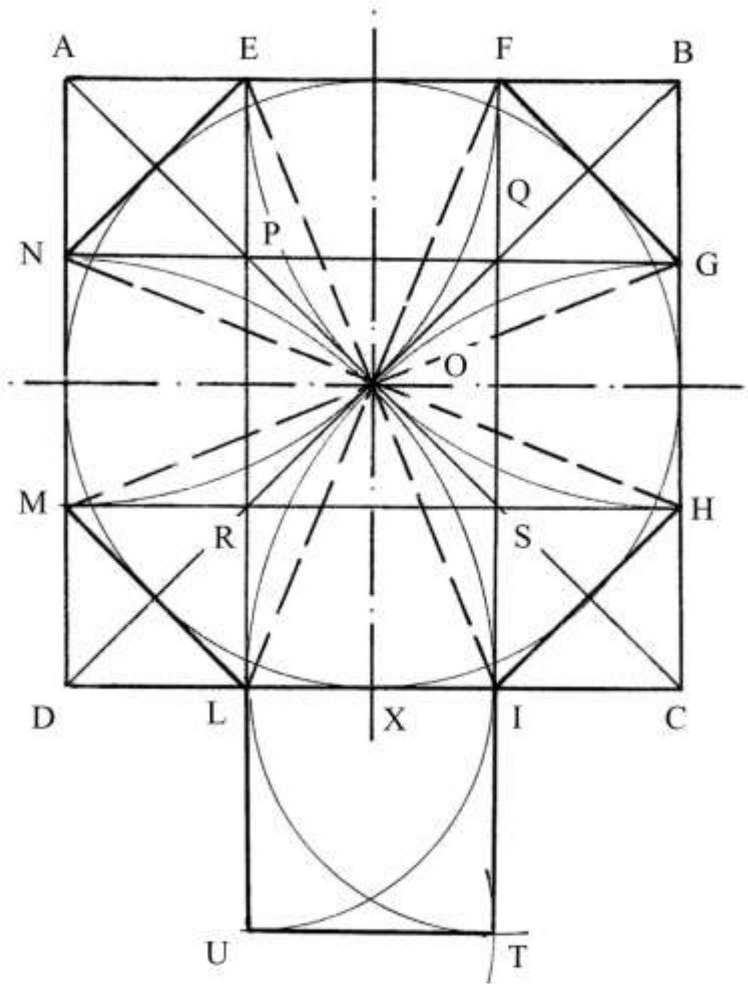
Oltre a DNPL e a IQGC, all'interno del quadrato ABCD sono presenti altri *sei Rettangoli Romani*: MAER, NAFQ, PEBG, FBHS, DMSI e LRHC.

I rettangoli come DNPL sono chiamati *romani* perché sono stati identificati, ad esempio, nella pianta delle abitazioni del quartiere noto come "Case a giardino" nella città romana di Ostia e risalenti al II secolo d.C.

Nello stesso sito archeologico sono stati ritrovati frammenti di mosaici nei pavimenti con motivi ornamentali basati sulla sezione sacra e sul rettangolo romano.

Le aree dei quadrilateri relativi alla sezione sacra

Nella figura che segue è costruito il quadrato LITU: chiaramente, esso ha le stesse dimensioni del quadrato della *sezione sacra*, PQSR:



La lunghezza *convenzionale* del segmento AE è 1.

Il lato dell'ottagono, NE, è la diagonale del quadrato AEPN ed è lungo $\sqrt{2}$. Anche EF è lungo $\sqrt{2}$.

Il lato AB del quadrato ABCD è lungo

$$AB = AE + EF + FB = 1 + \sqrt{2} + 1 = 2 + \sqrt{2} = 1 + (1 + \sqrt{2}) = 1 + S_a$$

Le aree *convenzionali* dei quadrilateri contenuti nella figura sono:

* area quadrato AEPN = $AE^2 = 1^2 = 1$;
* area rettangolo MNPR = MN * MR = $\sqrt{2} * 1 = \sqrt{2}$;
* area *rettangolo romano* DNPL = area DMRL + area MNPR = = area AEPN + area MNPR = $1^2 + \sqrt{2} = 1 + \sqrt{2} = S_{a;}$
* area *sezione sacra* (PQSR e LITU) = $RS^2 = (\sqrt{2})^2 = 2$;
* area quadrato ABCD = $AB^2 = (2 + \sqrt{2})^2 = 4 + 4*\sqrt{2} + 2 = 6 + 4*\sqrt{2}$.

Esiste un rapporto fra le aree di ABCD e l'area della *sezione sacra* PQSR:

$$AB^2 : RS^2 = (6 + 4*\sqrt{2}) : 2 = (3 + 2*\sqrt{2}) : 1 = (1 + 2 + 2*\sqrt{2}) : 1 =$$
$$= [1 + 2*(1 + \sqrt{2})] : 1 = (1 + 2*S_a) : 1$$

L'area dell'ottagono regolare EFGHILMN è data da:

Area $_{\text{ottagono}}$ = 8 * Area $_{\text{LOI}}$.

L'area del triangolo LOI è:

Area $_{\text{LOI}}$ = LI * OX/2.

Ma OX è sia l'altezza del triangolo isoscele LOI rispetto alla sua base LI che l'*apotema* dell'ottagono.

Per calcolare l'*apotema* dei poligoni regolari sono usati dei *numeri fissi*:

apotema = numero fisso [f] * lato [ℓ] e cioè

$a = f * \ell$.

Nel caso dell'ottagono il numero fisso vale:

$f = (1 + \sqrt{2})/2 = S_a/2$.

Convenzionalmente, l'area del triangolo isoscele LOI è:

$\text{Area}_{LOI} = (a * \ell)/2 = (f * \ell) * \ell/2 = (f * \ell^2)/2 = S_a * (\sqrt{2})^2/2 = (S_a * 2)/4 =$
$= S_a/2$ [unità²].

L'area dell'ottagono è:

$\text{Area}_{OTTAGONO} = 8 * \text{Area}_{LOI} = 8 * S_a/2 = 4 * S_a$ [unità²].

Un altro *numero fisso,* F (lettera maiuscola per distinguerlo dall'altro numero, f, già incontrato) fornisce il rapporto fra l'area di un poligono regolare e quella di un quadrato costruito su di un suo lato.

Nel caso dell'ottagono, il numero F è:

$F = 2*(1 + \sqrt{2}) = 2* S_a$.

La costante F può essere utilizzata per ricavare l'area del quadrato costruito su di un lato (LI), conoscendo quella dell'intero ottagono:

$\text{Area}_{LITU} = \text{Area}_{OTTAGONO}/F = (4 * S_a)/(2 * S_a) = 2$ [unità²].

La rettificazione della circonferenza e la sezione sacra

La costruzione della *sezione sacra* potrebbe essere stata usata anche per ricavare un'approssimata quadratura del cerchio o la rettificazione della sua circonferenza.

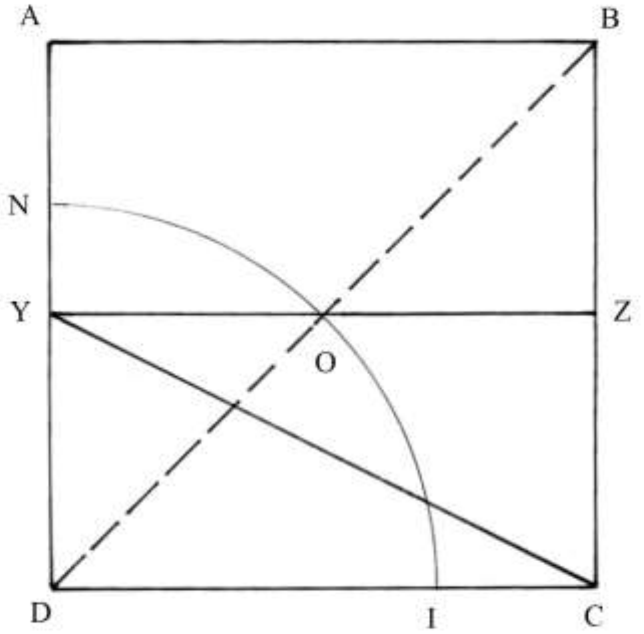
Il materiale che segue e alcuni disegni contenuti in questo paragrafo sono basati sull'articolo di Donald J. Watts e Carol Martin Watts, citato in bibliografia. Da quell'articolo riproduciamo i due periodi seguono:

"...L'espressione sezione sacra non è antica; essa fu coniata una ventina di anni fa dallo studioso danese Tons Brunés. Si dà il caso che nella sezione sacra la lunghezza di un arco sia uguale, con un'approssimazione dello 0,6 per cento circa alla lunghezza della diagonale del rettangolo che è pari alla metà del quadrato dì riferimento. Secondo Brunés, questa quasi eguaglianza di un arco e di una linea retta potrebbe aver convinto gli antichi costruttori di aver trovato un modo per quadrare il cerchio, ossia per costruire un quadrato dal perimetro uguale alla circonferenza di un dato cerchio, e viceversa. (È impossibile quadrare esattamente un cerchio perché il perimetro di un quadrato è un numero razionale, mentre la circonferenza di un cerchio è proporzionale al numero irrazionale π.) Per gli antichi geometri il cerchio simboleggiava la parte spirituale, inconoscibile, dell'universo, e il quadrato rappresentava il mondo comprensibile. La quadratura del cerchio era un modo per esprimere l'inconoscibile attraverso il conoscibile, il sacro attraverso il familiare. Di qui il termine sezione sacra.

"Benché Vitruvio non parli specificatamente di sezione sacra, menziona l'importanza degli schemi geometrici come modo per conseguire quella che considera la qualità più importante di un

buon progetto: i rapporti proporzionali fra i vari elementi. Brunés ha ricostruito l'applicazione della sezione sacra dall'antico Egitto, attraverso i greci e i romani, all'Europa medievale. (Egli ritiene che l'idea sia stata trasmessa dall'Egitto in Grecia, nel VI secolo a.C., da Pitagora.) In particolare, Brunés ha trovato un'applicazione della sezione sacra a Roma, nel progetto del Pantheon, costruito pressappoco nello stesso periodo delle case a giardino di Ostia…".

La figura che segue riproduce in parte la suddivisione del quadrato ABCD nel quale è stata realizzata la sezione sacra:



Y e Z sono i punti medi dei lati verticali e il segmento che li unisce, YZ, è una mediana del quadrato.

Tracciare la corda YC.

Il triangolo DYC è rettangoli e i cateti YD e DC hanno lunghezze in rapporto 1 : 2.

L'ipotenusa YC è lunga:

$YC^2 = YD^2 + DC^2 = (1/2 * DC)^2 + DC^2 = 5/4 * DC^2$ e

$YC = (\sqrt{5})/2 * DC$.

L'arco NI è un quarto di circonferenza ed è costruito con raggio DO. Questo ultimo è lungo quanto metà della diagonale del quadrato ABCD:

$DO^2 = 2 * DY^2 = 2 * (DC/2)^2 = DC2/^2$ e

$DO = DC/\sqrt{2} = (\sqrt{2})/2 * DC$.

L'arco NI è lungo ¼ della circonferenza di raggio DO:

$NI = (2 * \pi * DO)/4 = (2 * \pi)/4 * (\sqrt{2})/2 * DC = (\sqrt{2} * \pi * DC)/4$.

Fissando, *convenzionalmente*, la lunghezza del lato DC = 1, si ha:

$YC = (\sqrt{5})/2 \approx 1,118034$ e

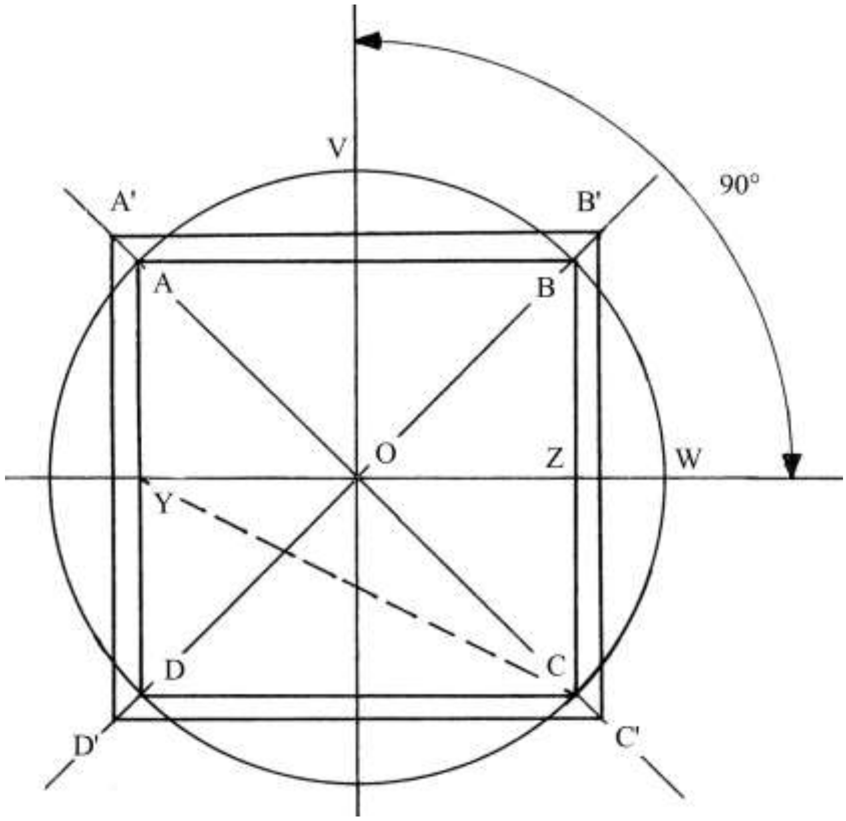
$NI = (\sqrt{2} * \pi)/4 * 1 \approx 1,1107$.

Per π è stato assunto il valore di 3,14159.

La costruzione è basata sull'uguaglianza, *approssimata*, della lunghezza del segmento YC e quella dell'arco NI. La differenza fra i due valori appena calcolati è minima:

$(YC – NI)/YC \approx 0,656\%$.

Tracciare le diagonali (AC e DB) del quadrato e le mediane e prolungarle tutte verso l'esterno:



Con centro in O disegnare la circonferenza di raggio OA che passa per i vertici di ABCD.

La circonferenza taglia in quattro punti i prolungamenti delle mediane di ABCD: qui interessano V e W.

L'arco VW ha la stessa lunghezza approssimata di YC.

La corda YC è il lato del quadrato A'B'C'D', concentrico a quello ABCD. Il quadrato A'B'C'D' ha perimetro approssimativamente uguale alla lunghezza della circonferenza.

Fissiamo *convenzionalmente* la lunghezza di DC uguale a 1. Ne derivano le seguenti relazioni:

perimetro ABCD = 4 * DC = 4 * 1 = 4.
Area ABCD = $DC^2 = 1^2 = 1$.
Circonferenza = 2 * π * DO = 2 * π * [(√2)/2 * DC] = π * √2 * DC ≈
≈ 3,14159 * √2 * 1 ≈ 4,4429.
Area $_{\text{CERCHIO}}$ = $\pi * DO^2 = \pi * [(\sqrt{2})/2 * DC]^2 = \pi * DC^2/2 = \pi * 1^2/2 \approx 1{,}57078$.
Perimetro A'B'C'D' = 4 * D'C' = 4 * YC = 4 * (√5)/2 = 2 * √5 ≈ 4,472.
Area A'B'C'D' = $(D'C')^2 = YC^2 = [(\sqrt{5})/2 * DC]^2 = 5/4 * DC^2 = 5/4 * 1^2 = 5/4 =$
$= 1{,}25$.

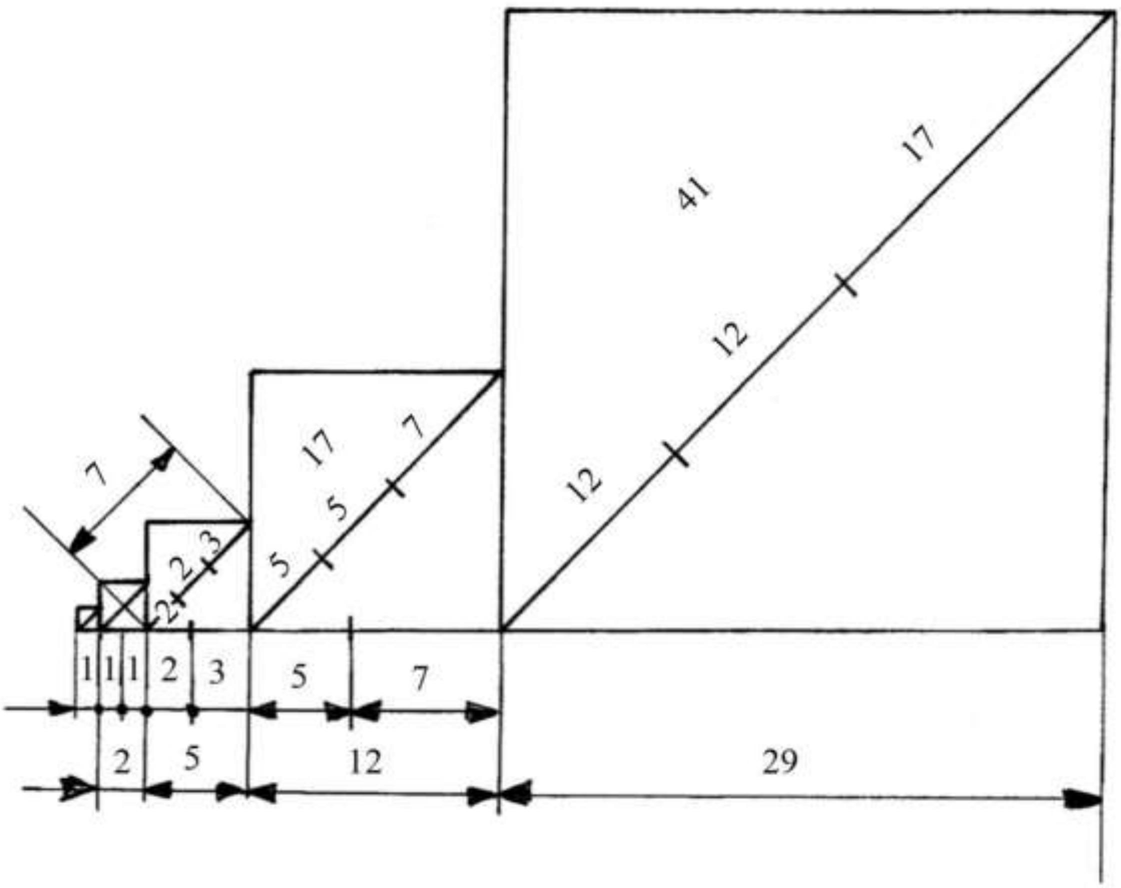
La lunghezza della circonferenza (4,4429) e il perimetro di A'B'C'D' (4,472) sono quasi uguali.

- APPROFONDIMENTO -

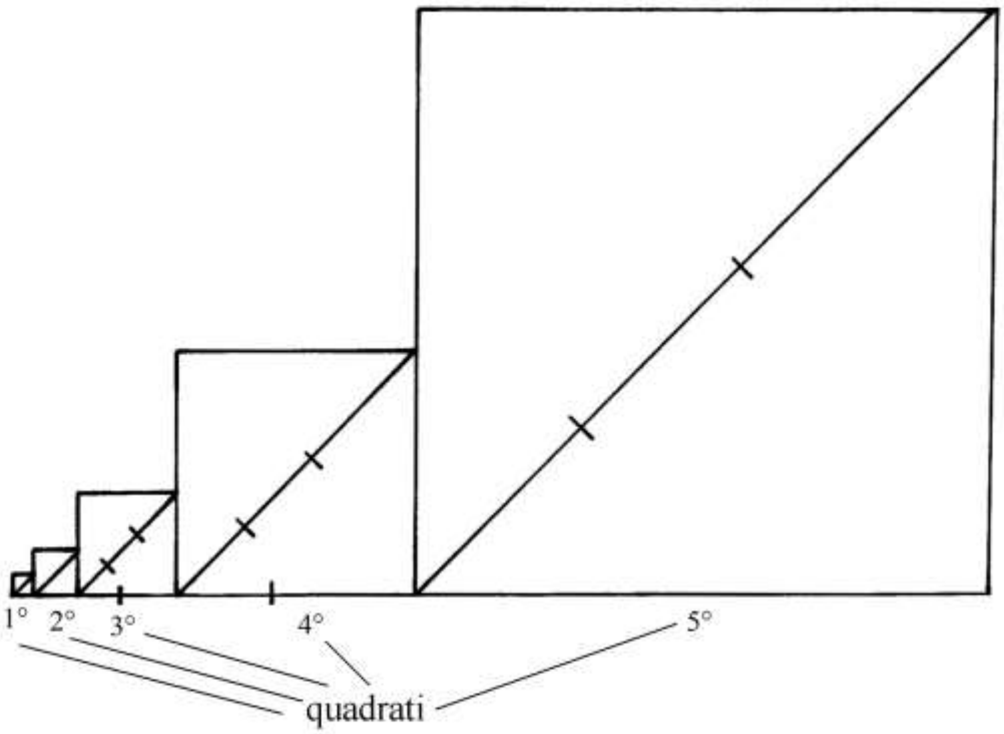
Le approssimazioni successive di $\sqrt{2}$

Le dimensioni impiegate nella costruzione delle “Case a giardino” di Ostia, descritte nel citato articolo dei Watts, sono legate alle costruzioni geometriche che permettono una crescente precisione nell’approssimazione di $\sqrt{2}$.

Il procedimento inizia con la tracciatura di un quadrato con lato *convenzionalmente* lungo $\ell_1 = 1$, che è il primo a sinistra.



La sua diagonale è lunga $d_1 = \sqrt{2}$, ma per i successivi passaggi la sua lunghezza è approssimata per difetto all’intero più vicino: $(d_1)' = 1$.



Il secondo quadrato ha lato lungo $l_2 = l_1 + d_1 = 1 + 1 = 2$.

La diagonale del secondo quadrato, $d_2 = 2 * \sqrt{2}$, è approssimata all'intero più vicino, che è 3 e quindi *per eccesso*.

Questa ultima diagonale è *approssimativamente* uguale alla somma delle lunghezze della diagonale del primo quadrato e del doppio del suo lato:

$$d_2 \approx d_1 + 2 * \ell_1 = 3.$$

Il lato del terzo quadrato, ℓ_3, è lungo quanto la somma del lato e della diagonale del secondo quadrato:

$$\ell_3 = \ell_2 + d_2 = 2 + 3 = 5$$

La diagonale del terzo quadrato è lunga quanto la somma della diagonale e del doppio del lato del secondo quadrato:

$$d_3 \approx d_2 + 2 * \ell_2 = 3 + 2*2 = 7.$$

Nella precedente figura sono contenuti i primi *cinque* quadrati della successione.

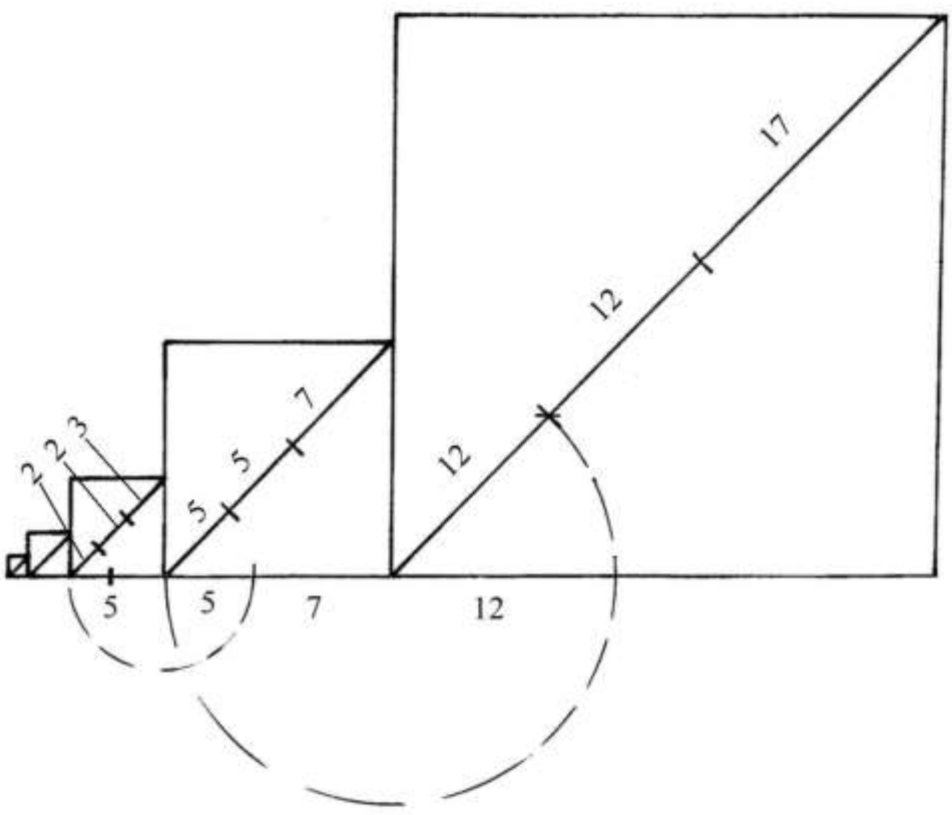
La tabella che segue riassume i dati relativi ai cinque quadrati:

Quadrati	Lati	Diagonali	Rapporti Diagonali/lati
1°	$\ell_1 = 1$	$d_1 \approx 1$	$d_1/\ell_1 = 1/1 = 1$
2°	$\ell_2 = \ell_1 + d_1 \approx 2$	$d_2 = d_1 + 2 * \ell_1 \approx 1 + 2$ $= 3$	$d_2/\ell_2 = 3/2 = 1,5$
3°	$\ell_3 = \ell_2 + d_2 \approx 2 + 3 = 5$	$d_3 = d_2 + 2 * \ell_2 \approx 3 +$ $+ 2*2 = 7$	$d_3/\ell_3 = 7/5 = 1,4$
4°	$\ell_4 = \ell_3 + d_3 \approx 5 + 7 =$ $= 12$	$d_4 = d_3 + 2 * \ell_3 \approx$ $\approx 7 + 2 * 5 = 17$	$d_4/\ell_4 = 17/12 \approx 1,41(6)$
5°	$\ell_5 = \ell_4 + d_4 \approx 12 + 17=$ $= 29$	$d_5 = d_4 + 2 * \ell_4 \approx$ $\approx 17 + 2 *12 = 41$	$d_5/\ell_5 \approx 41/29 \approx 1,4138$

Le lunghezze dei lati e delle diagonali contenute nella tabella sono espresse in *piedi romani*, secondo il campione presente nel tempio di Giunone Moneta a Roma, un piede romano era lungo 29,57 cm. Nell'Impero, in tutte le località, non sempre è stata rispettata questa misura standard.

Le dimensioni sono state determinate dai Watts nel sito di Ostia e riprodotte nel loro articolo citato nella bibliografia.

La successione dei quadrati è costruibile con l'aiuto del compasso e della riga come spiega lo schema che segue:



- -

Costruzione della sezione argentea

La costruzione della *sezione argentea* è collegata alla soluzione di un'equazione di 2° grado che ha il coefficiente b = – 2:

$$x^2 - 2 * x - 1 = 0.$$

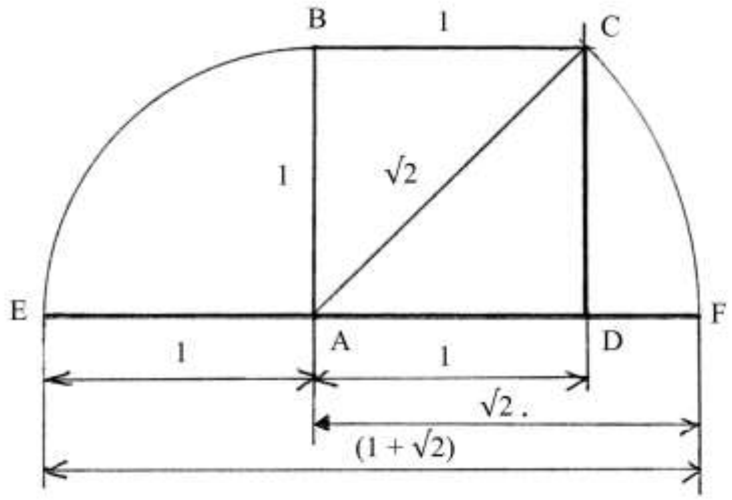
Le radici dell'equazione sono:

$x_1 = 1 + \sqrt{2}$

$x_2 = 1 - \sqrt{2}$.

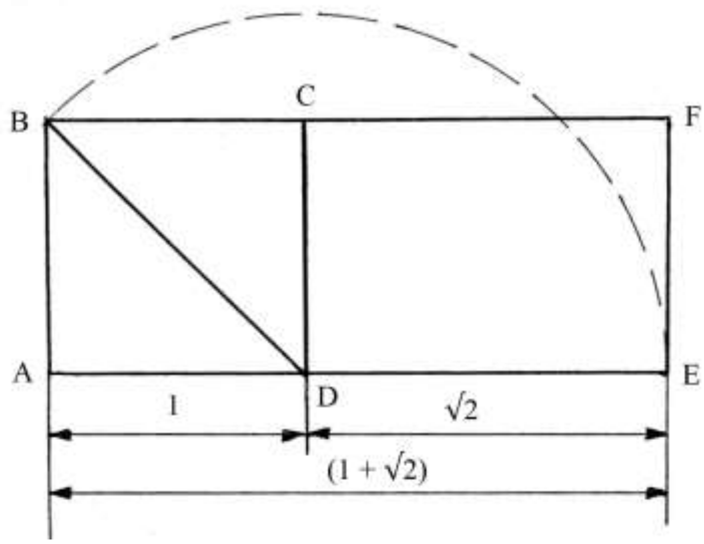
La prima soluzione, x_1, è la *sezione argentea*.

Essa può essere disegnata con la costruzione di seguito presentata:



Disegnare il quadrato ABCD con lati lunghi, convenzionalmente, 1 e la diagonale AC, lunga $\sqrt{2}$. Prolungare il lato AD verso sinistra e verso destra.

Con centro in A e raggio AB disegnare l'arco da B fino a tagliare in E il prolungamento: il segmento EA è lungo 1. Sempre con centro in A e apertura AC, tracciare l'arco da C fino a determinare il punto F. Il segmento AF è lungo $\sqrt{2}$ e quello EF è lungo $(1 + \sqrt{2})$ e cioè la *sezione argentea*. Lo stesso risultato è ottenuto con la costruzione che segue, simile alla precedente, ma più semplice:



Costruzione della sezione di rame

Talvolta questa media metallica è conosciuta con l'espressione *sezione di bronzo*.

La sezione di *rame* è la soluzione dell'equazione con il coefficiente b = – 3:

$$x^2 - 3 * x - 1 = 0.$$

Le radici dell'equazione sono:

$$x_1 = (3 + \sqrt{13})/2$$

$$x_2 = (3 - \sqrt{13})/2.$$

La radice x_1 vale ≈ 3,302 ed è la sezione di rame.

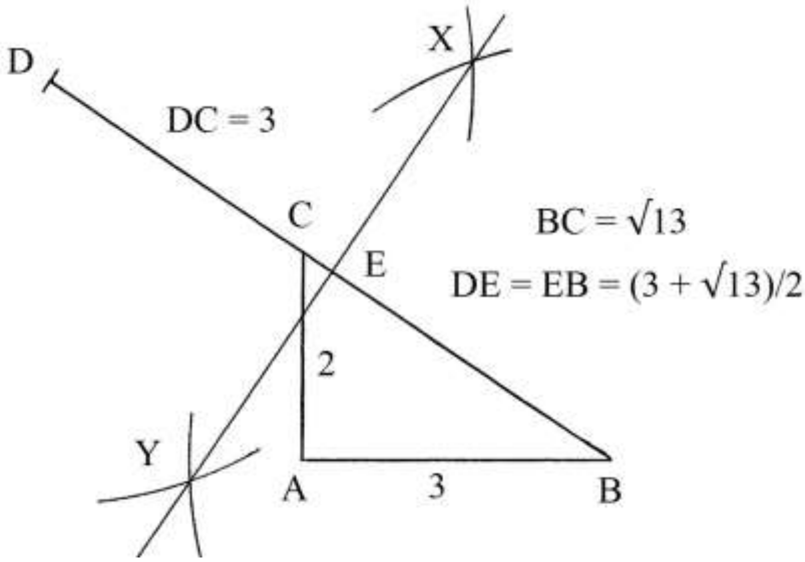
La radice x_2 è un numero negativo.

Disegnare il triangolo rettangolo ABC con dimensioni tali che il cateto AB sia lungo proporzionalmente a 3 e quello AC a 2. L'ipotenusa BC è lunga:

$$BC = \sqrt{(AB^2 + AC^2)} = \sqrt{(3^2 + 2^2)} = \sqrt{(9 + 4)} = \sqrt{13}.$$

Prolungare l'ipotenusa CB verso sinistra. Fissare il punto D tale che il segmento CD sia lungo 3.

Per ricavare la *sezione di rame* procedere come segue:



Costruire l'asse del segmento DB (facendo centro in D e in B): esso passa per i punti X e Y e taglia in E il segmento DB.

I segmenti DE e EB hanno la stessa lunghezza e rappresentano la *sezione di rame*.

Le tre sezioni metalliche – oro, argento e rame – hanno origini simili: le loro equazioni di secondo grado differiscono soltanto per il valore assegnato al *coefficiente* **b**, che è sempre *negativo*.

<u>Costruzione della sezione di nickel</u>

Portando a – 4 il valore del coefficiente b, si ottiene una soluzione che contiene la radice quadrata $\sqrt{5}$, presente anche nel rapporto aureo (Φ):

$$x^2 - 4 * x - 1 = 0.$$

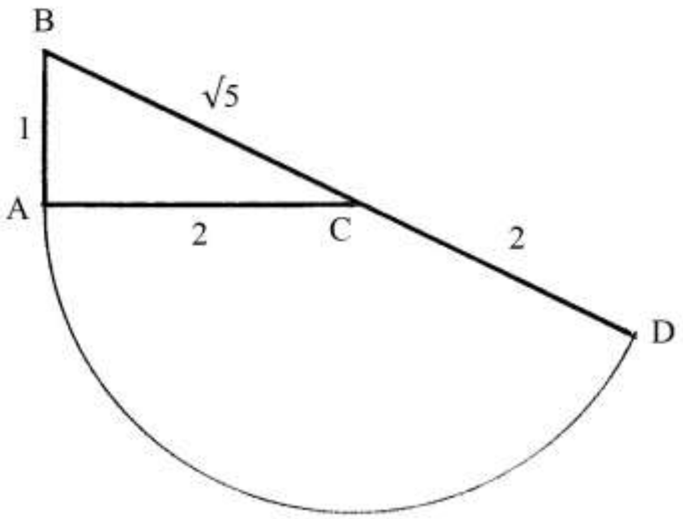
Le radici dell'equazione sono:

$x_1 = (2 + \sqrt{5}) \approx 4{,}236$, che è la sezione di nickel.

$x_2 = (2 - \sqrt{5})$.

La seconda radice, x_2, ha valore negativo ed è scartata.

Disegnare un triangolo rettangolo ABC con i cateti lunghi in proporzione a 1 e 2:



L'ipotenusa BC è lunga √5. Prolungare BC verso il basso.

Fare centro in C e, con raggio CA, tracciare un arco da A fino a tagliare nel punto D il prolungamento di BC: CD è lungo 2.

Il segmento BD è lungo quanto la somma di BC e CD e cioè (2 + √5).

<u>La costruzione della sezione di cobalto</u>

Nell'equazione di 2° grado, il coefficiente b ha valore – 5:

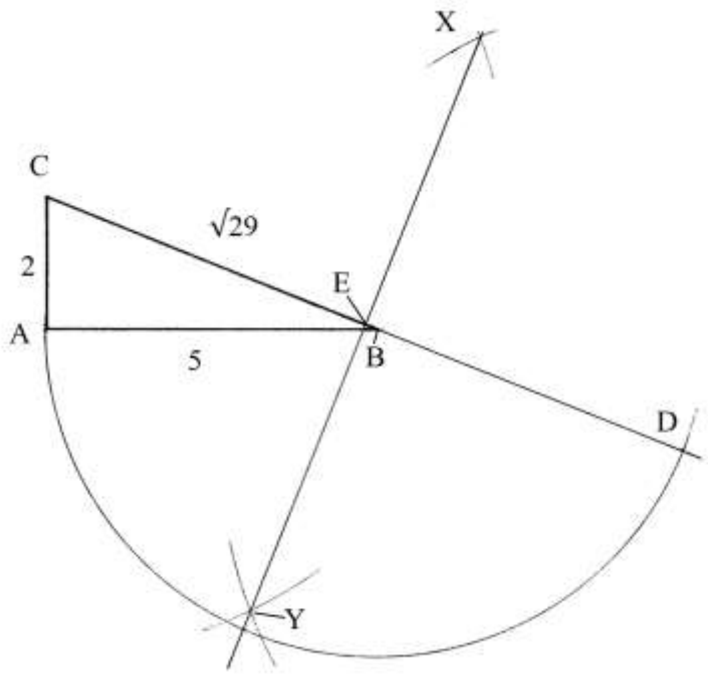
$$x^2 - 5 * x - 1 = 0.$$

Risolvendo l'equazione si ottengono i seguente valori per le due radici:

$x_1 = (5 + \sqrt{29})/2 \approx 5{,}192582$ che è la sezione di cobalto..

$x_2 = (5 - \sqrt{29})/2$, che è un numero negativo e va scartato..

La figura che segue presenta una prima costruzione geometrica del numero di cobalto. Disegnare il triangolo rettangolo ABC con i cateti lunghi in proporzione a 2 e a 5: l'ipotenusa CB è lunga proporzionalmente a √29. Prolungare l'ipotenusa verso destra:



Fare centro nel punto B e con raggio BA tracciare un arco da A fino a tagliare il prolungamento dell'ipotenusa in un punto, D.

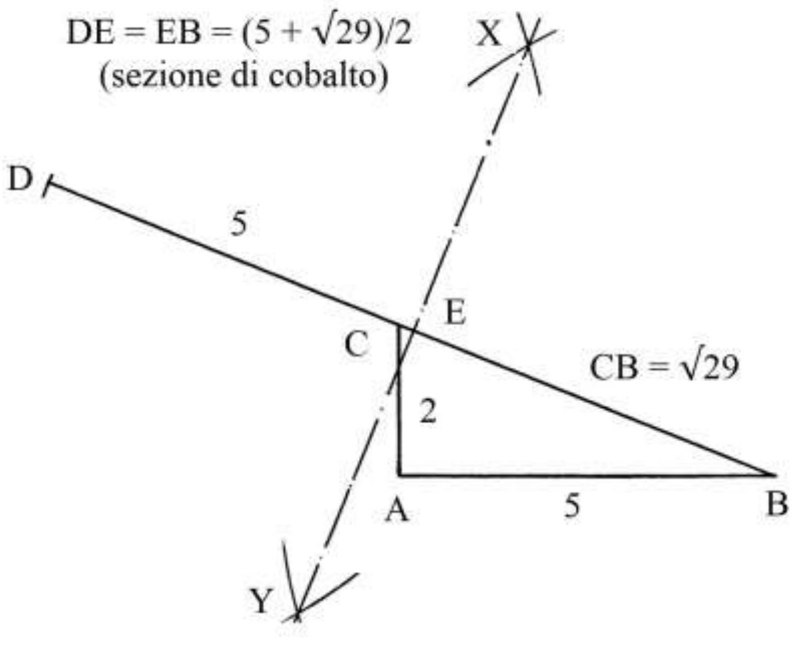
Il segmento CD è lungo $(5 + \sqrt{29})$. Occorre determinarne il punto medio.

Con centro in C e in D, costruire l'asse del segmento CD, passante per i punti X e Y: il punto E è medio di CD.

CD è uguale a ED e rappresenta il numero o sezione di cobalto:

$$CE = ED = (5 + \sqrt{29})/2.$$

Lo stesso risultato si può raggiungere con una diversa costruzione, leggermente più complessa:



Dopo aver costruito il triangolo rettangolo ABC con le stesse dimensioni della figura precedente, occorre prolungare l'ipotenusa BC verso sinistra e riportare con il compasso la lunghezza di AB dal punto C fino a tagliare il prolungamento in un punto, D.

Occorre ora costruire il consueto asse del segmento DB che determina il punto medio E.

DE è lungo quanto EB ed è la sezione di cobalto.

<u>Costruzione della sezione di ferro</u>

Il numero di ferro ha il valore del coefficiente b uguale a – 6:

$$x^2 - 6 * x - 1 = 0.$$

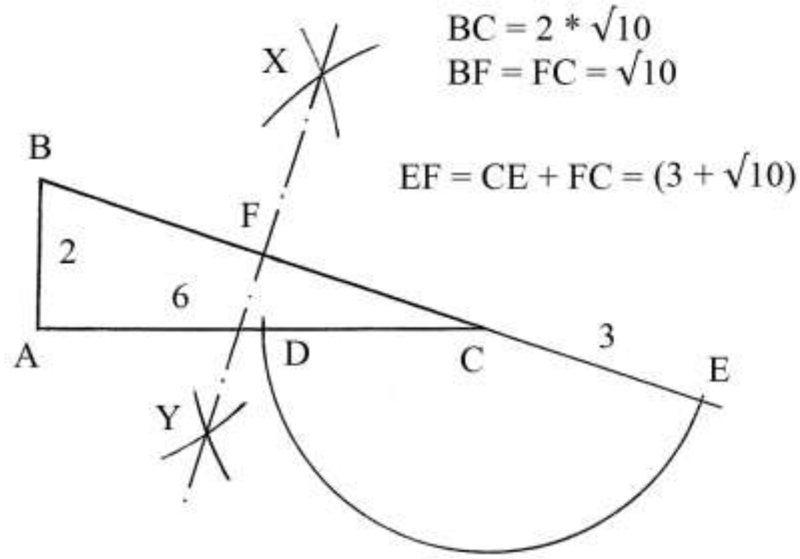
Le radici dell'equazione sono:

$x_1 = (3 + \sqrt{10}) \approx 6{,}162$, che è la sezione di ferro.

$x_2 = (3 - \sqrt{10})$.

La seconda radice, x_2, ha valore negativo e non è presa in considerazione.

La costruzione geometrica è contenuta nella figura che segue:



Costruire il triangolo rettangolo ABC con i cateti lunghi 2 (AB) e 6 (AC). Fissare il punto medio del cateto AC: è D.

AD = DE = 3.

Tracciare l'ipotenusa BC e prolungarla verso destra.

Fare centro in C e, con raggio CD, disegnare un arco da D fino a tagliare in E il prolungamento dell'ipotenusa.

L'ipotenusa BC è lunga $\sqrt{40} = 2\sqrt{10}$. Deve essere determinato un segmento lungo la metà di BC e cioè lungo $\sqrt{10}$.

Costruire l'asse del segmento BC: la retta passante per i punti X e Y stabilisce il punto F, medio di BC.

Il segmento CF è lungo $(3 + \sqrt{10})$ ed è la *sezione di ferro*.

<u>Costruzione della sezione di manganese</u>

Il coefficiente b vale – 7 e l’equazione è:

$x^2 - 7x - 1 = 0$.

Le radici dell’equazione sono:

$x_1 = (7 + \sqrt{53})/2 \approx 7{,}14$, che è la sezione di manganese.

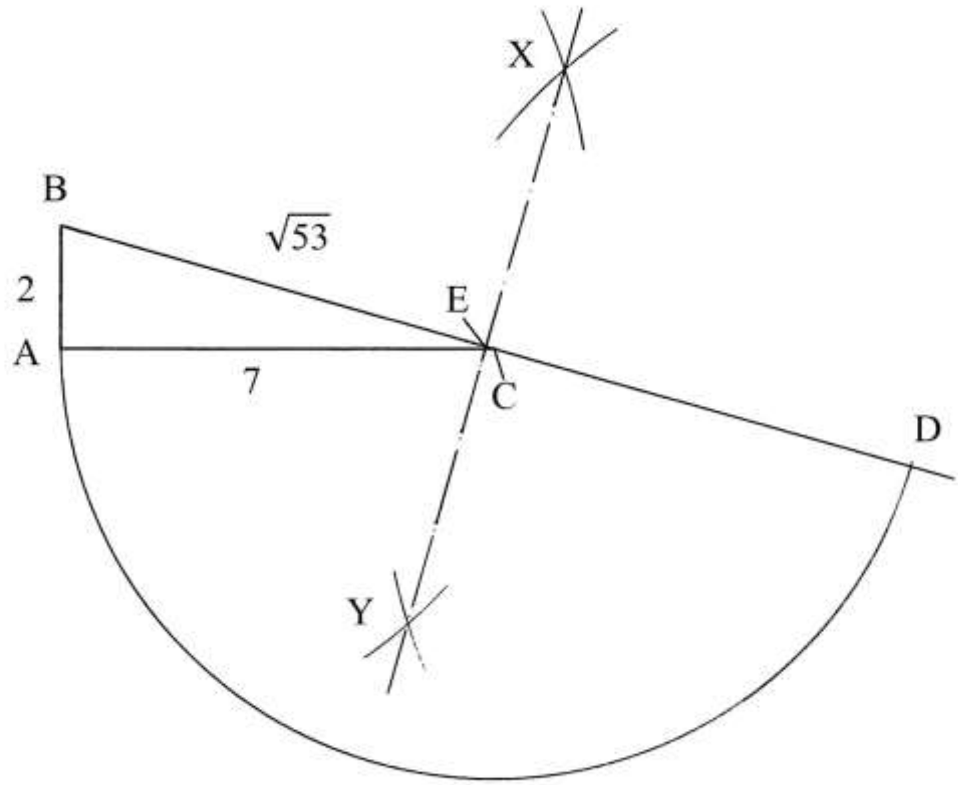
$x_2 = (7 - \sqrt{53})/2$.

La seconda radice, x_2, ha valore negativo ed è scartata.

È possibile determinare per via geometrica la lunghezza della radice x_1.

Disegnare il triangolo rettangolo ABC, con cateti lunghi 7 (AC) e 2 (AB): ne risulta l’ipotenusa BC lunga $\sqrt{53}$:

$BC^2 = AC^2 + AB^2 = 7^2 + 2^2 = 49 + 4 = 53$ e $BC = \sqrt{53}$.



/

Prolungare BC verso destra.

Fare centro in C e, con raggio CA (= 7), tracciare un arco da A fino a intersecare il prolungamento di BC in un nuovo punto, D.

Il segmento BD è pertanto lungo:

$BD = BC * CD = \sqrt{53} + 7 = 7 + \sqrt{53}$.

Occorre dividere in *due* parti uguali il segmento BD per ricavare la lunghezza della radice positiva x_1. A questo scopo, è sufficiente costruire l’*asse del segmento* BD, che passa per i punti X e Y determinati con archi tracciati facendo centro nei punti B e D.

Il punto E è il punto medio e

$BE = ED = BD/2 = (7 + \sqrt{53})/2$.

BE è la sezione di manganese.

Costruzione della sezione di cromo

Il coefficiente b vale -8 e la soluzione della relativa equazione di 2° grado è la seguente:

$x^2 - 8x - 1 = 0$.

Le radici dell'equazione sono:

$x_1 = (4 + \sqrt{17}) \approx 8{,}123$, che è la sezione di cromo.

$x_2 = (4 - \sqrt{17})$.

La seconda radice, x_2, ha valore negativo e va accantonata.

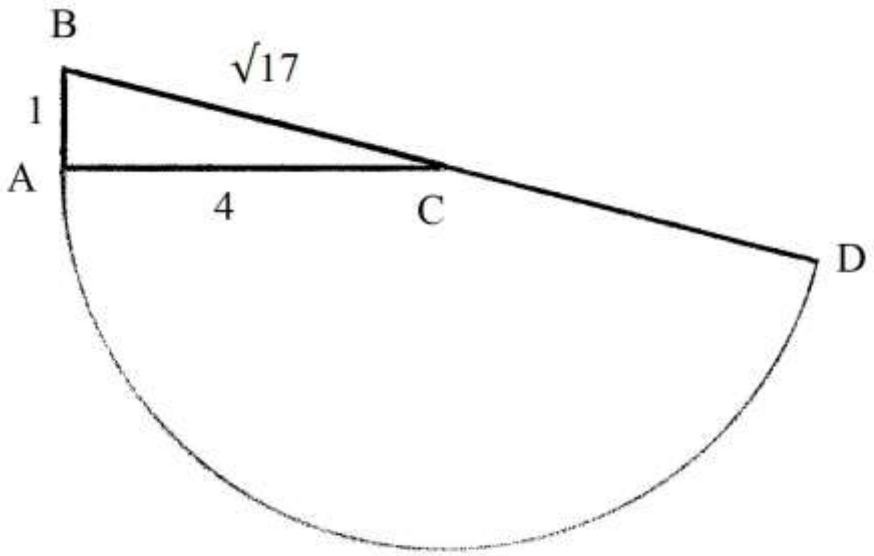
Entrambe le radici, x_1 e x_2, contengono l'espressione $\sqrt{17}$.

È necessario costruire un triangolo rettangolo con cateti che devono sottostare a una semplice condizione aritmetica: la somma dei quadrati delle loro lunghezze deve essere uguale a 17 (o a un suo multiplo).

La soluzione più semplice è data da:

$$(1)^2 + (4)^2 = 1 + 16 = 17.$$

Disegnare il triangolo rettangolo ABC con i cateti lunghi 4 (AC) e 1 (AB). L'ipotenusa BC è lunga $\sqrt{17}$:



Prolungare BC verso destra. Fare centro in C e, con raggio CA, tracciare un arco da A fino a incontrare il prolungamento di AC in un nuovo punto, D.

CD è lungo 4.

Il segmento BD è lungo quanto la radice x_1:

$BD = BC + CD = \sqrt{17} + 4 = 4 + \sqrt{17}$.

- APPROFONDIMENTO -

Una regola generale

Dalle precedenti costruzioni di medie metalliche basate sull'equazione di 2° grado

$ax^2 - bx - c = 0$ con $c = -1$ sempre.

Si può proporre una regola generale.

L'espressione contenuta all'interno della radice quadrata della formula che risolve l'equazione (in aritmetica chiamata *discriminante*) è:

$(\sqrt{b^2 - 4ac})$.

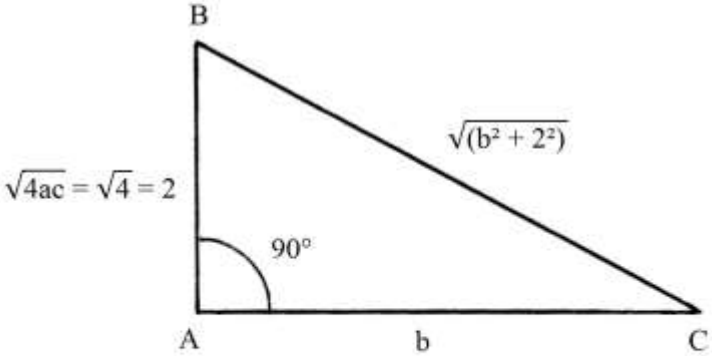
Per effetto del valore dei segni dei coefficienti a (*positivo*) e b (*negativo*) e del segno negativo del *termine noto* c, l'espressione è la somma di due quadrati perfetti, dato che il prodotto $(-4ac)$ è sempre positivo perché è il risultato di $-4*1*(-1)$.

La regola generale permette la costruzione geometrica di una qualsiasi media metallica con l'applicazione del *teorema di Pitagora*: un triangolo rettangolo ha come cateti le lunghezze del coefficiente b e della radice di 4ac e cioè $\sqrt{4} = 2$.

La lunghezza dell'ipotenusa è data da:

$\sqrt{(b^2 - 4ac)} = \sqrt{(b^2 + 4)} = \sqrt{(b^2 + 2^2)}$ e cioè il risultato è sempre la radice quadrata della somma di due quadrati $(b^2 + 2^2)$ e solo in pochissimi casi questa somma è un *quadrato perfetto*.

La figura che segue riassume questi concetti:



Come visto in precedenza, le singole costruzioni delle medie metalliche richiedono ulteriori passaggi oltre al disegno di un semplice triangolo rettangolo.

I *sei* numeri metallici dei quali è stata descritta la costruzione nei precedenti paragrafi sono *elementi* che sono presenti nella *tavola periodica degli elementi* dalla quale è ricavato il grafico della figura che segue:

numeri atomici | simboli chimici

24 Cr CROMO	25 Mn MANGANESE	26 Fe FERRO	27 Co COBALTO	28 Ni NICKEL	29 Cu RAME
42 Mo MOLIBDENO	43 TC TECNEZIO	44 Ru RUTENIO	45 Rh RODIO	46 Pd PALLADIO	47 Ag ARGENTO
74 W WOLFRAMIO	75 Re RENIO	76 Os OSMIO	77 Ir IRIDIO	78 Pt PLATINO	79 Au ORO

Nel grafico sono riportati i *numeri atomici*, i *simboli chimici* degli elementi (formato da *due* lettere, la prima maiuscola e la seconda minuscola, tranne nel caso del wolframio o tungsteno che possiede solo la maiuscola W) e il nome in MAIUSCOLO.

Una linea spezzata si muove dalla casella dell'*oro* e percorre nell'ordine le caselle dell'*argento,* del *rame*, del *nickel*, del *cobalto*, del *ferro,* del *manganese* e si arresta in quella del *cromo*: il percorso corrisponde al crescente valore assoluto, da –1 a – 8, del coefficiente b dell'equazione di 2° grado $ax^2 - bx - c = 0$.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

La tabella che segue riassume i dati relativi alle *otto* sezioni metalliche considerate:

Sezione metallica	$ax^2 - bx - 1 = 0$	Valore di "b"	Espressione di x_1	Valore approssimato di x_1
Aurea	$ax^2 - x - 1 = 0$	– 1	$(1 + \sqrt{5})/2$	1,618
Argento	$ax^2 - 2x - 1 = 0$	– 2	$(1 + \sqrt{2})$	2,4142
Rame	$ax^2 - 3x - 1 = 0$	– 3	$(3 + \sqrt{13})/2$	3,302
Nickel	$ax^2 - 4x - 1 = 0$	– 4	$(2 + \sqrt{5})$	4,236
Cobalto	$ax^2 - 5x - 1 = 0$	– 5	$(5 + \sqrt{29})/2$	5,1925
Ferro	$ax^2 - 6x - 1 = 0$	– 6	$(3 + \sqrt{10})$	6,162
Manganese	$ax^2 - 7x - 1 = 0$	– 7	$(7 + \sqrt{53})/2$	7,14
Cromo	$ax^2 - 8x - 1 = 0$	– 8	$(4 + \sqrt{17})$	8,123

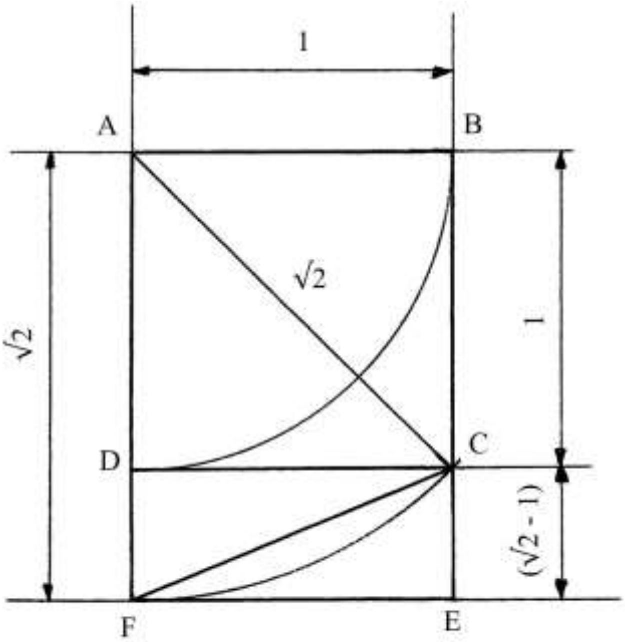
Nota: aumentando il valore del coefficiente "b", la differenza fra due successivi valori di x_1 tende a 1: una legge aritmetica può spiegare questo dato di fatto?

- -

<u>LE PROPORZIONI DI CORDOVA</u>

<u>Il formato A4</u>

La figura che segue riproduce la struttura di un foglio qualsiasi, ad esempio A4, dei formati della serie A secondo la norma ISO 216 (recepita in Italia dall'UNI):



La prima esplicita proposta tesa a usare questo formato risale al fisico tedesco Georg Christoph Lichtenberg (1742-1799) che la espose in una lettera inviata a Johann Beckmann il 25 ottobre 1786.

Se la lunghezza del lato AB è, *convenzionalmente*, eguale a 1, i rapporti fra i diversi segmenti sono i seguenti:

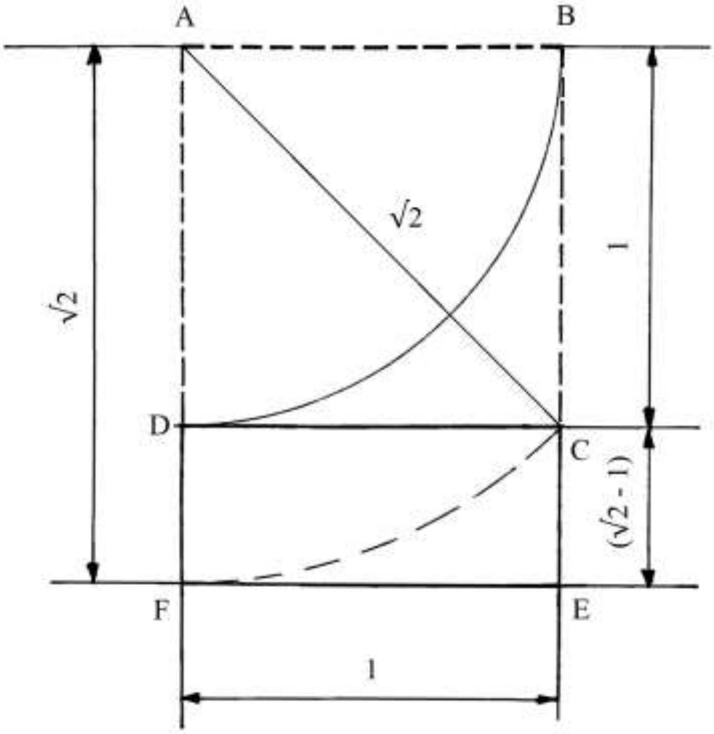
$AF = \sqrt{2}$
$AD = 1$
$DF = AF – AD = \sqrt{2} – 1$.

Applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo FDC possiamo calcolare la lunghezza dell'ipotenusa CF:

$CF = \sqrt{(DC^2 + DF^2)} = \sqrt{[1^2 + (\sqrt{2} – 1)^2]} = \sqrt{(1 + 2 – \sqrt{2} – \sqrt{2} +1)} =$
$= \sqrt{(4 – 2 * \sqrt{2})} = \sqrt{[2 * (2 – \sqrt{2})]} \approx 1,086$.

- APPROFONDIMENTO -

Lo schema che segue riproduce quello della precedente figura:



Se dal rettangolo ABEF tagliamo il quadrato ABCD, resta il rettangolo DCEF che ha lati lunghi:

* DC = FE = 1;
* DF = CE = (√2 – 1).

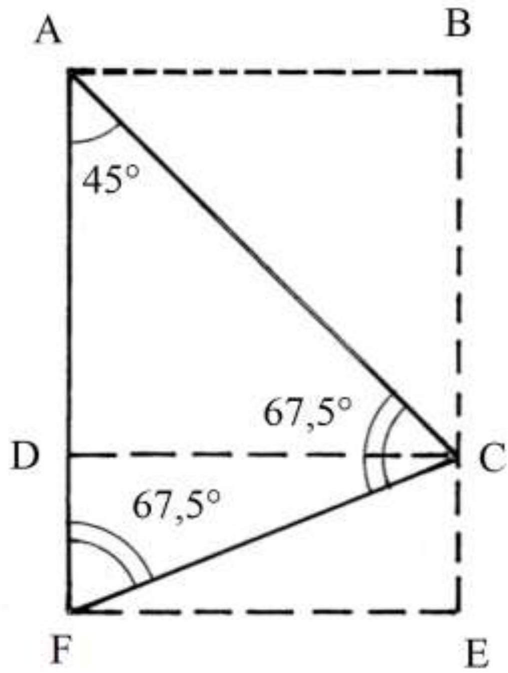
Il rapporto fra le lunghezze dei lati è:

BC/BF = 1/(√2 – 1) = (√2 + 1)/[(√2 – 1) * (√2 + 1) = (√2 + 1)/(2 + √2 - √2 – 1) =
= (√2 + 1) ≈ 2,41421356…, che è un numero irrazionale perché lo è anche √2: questo numero è la sezione argentea.

BCEF è un *rettangolo argenteo*, la cui presenza è una caratteristica di qualsiasi ottagono regolare.

- -

Come vedremo in seguito, il triangolo isoscele ACF è un *triangolo di Cordova*: i lati AF e AC hanno uguale lunghezza, pari a quella della diagonale del quadrato ABC:



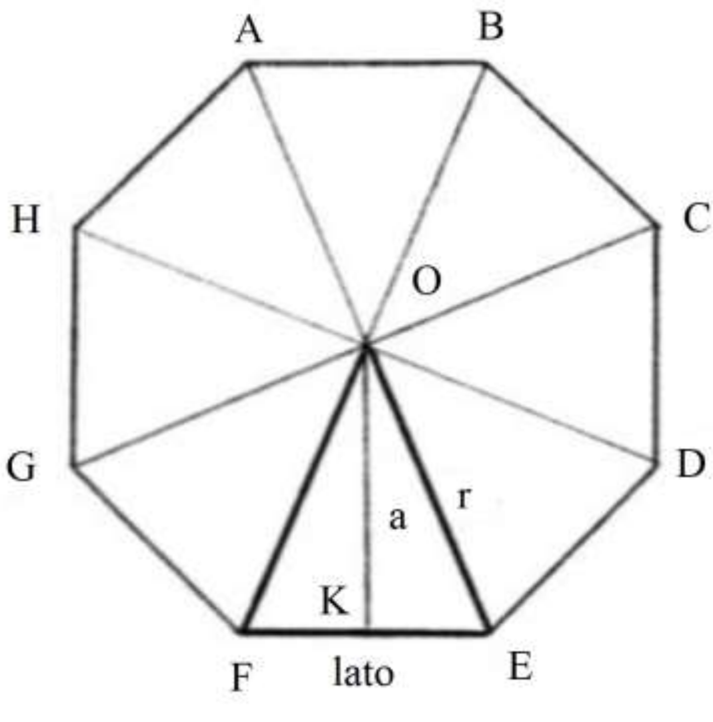
L’angolo FAC è ampio 45° e gli angoli AFC e ACF hanno uguale ampiezza, pari a 67,5°

È facile calcolare l’area del triangolo isoscele ACF; il poligono è formato da due triangoli rettangoli: ACD e DCF. Le loro aree sono uguali alla metà dei rispettivi quadrilateri di riferimento. Infatti, ACD è la metà di ABCD e DCF è la metà di DCEF.

L’area del triangolo AFC è uguale alla somma delle aree dei triangoli ACD e DCF ed è la *metà dell’area del rettangolo ABEF*.

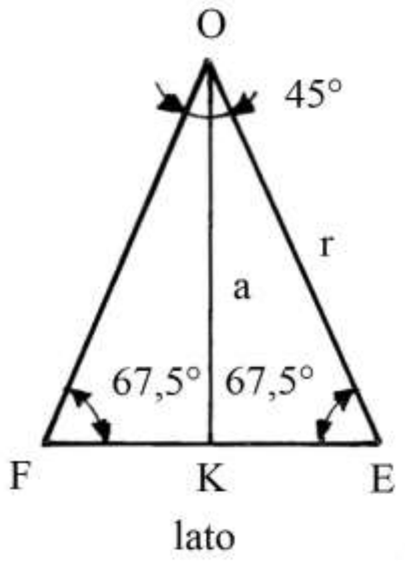
Un triangolo di Cordova ha area uguale alla metà di un rettangolo in formato A.

Il triangolo isoscele ACF è uno degli otto triangoli nei quali viene scomposto un ottagono regolare: AC e AF sono due raggi del cerchio in cui è inscritto un ottagono regolare. ACF corrisponde al triangolo FOE del prossimo schema.



L'angolo FOE è ampio 1/8 dell'angolo giro e cioè

$FOE = 360/8 = 45°$.



Il triangolo FOE è isoscele e gli angoli OFE e OEF hanno uguale ampiezza: 67,5°.

Il triangolo FOE è un triangolo di Cordova.

Il rapporto **c** fra il raggio **r** della circonferenza circoscritta all'ottagono e la lunghezza del suo lato, **ℓ,** è una *costante* ed è facilmente ricavabile applicando ripetutamente il teorema di Pitagora (ai triangoli rettangoli OFK e OKE) o ricorrendo a semplici regole di trigonometria piana. Questo rapporto è un *numero fisso*, conosciuto come la *costante di Cordova*:

$$c = r/lato = OF/FE = 1/\sqrt{(2 - \sqrt{2})} = [\sqrt{(2 + \sqrt{2})}]/\{[\sqrt{(2 + \sqrt{2})}] * [\sqrt{(2 - \sqrt{2})}]\} =$$
$$= [\sqrt{(2 + \sqrt{2})}]/\sqrt{2} = \sqrt{2} * [\sqrt{(2 + \sqrt{2})}]/2 = [\sqrt{(4 + 2 * \sqrt{2})}]/2 \approx 1{,}306563\ldots$$

- APPROFONDIMENTO -

Alcune potenze significative della costante di Cordova

Le potenze significative della costante **c** sono le seguenti:

c^2, $1/c$ e $1/c^2$.

La prima vale:

$$c^2 = \{[\sqrt{(4 + 2 * \sqrt{2})}]/2\}^2 = (4 + 2 * \sqrt{2})/4 = (2 + \sqrt{2})/2 \approx 1{,}70710678\ldots$$

La seconda è:

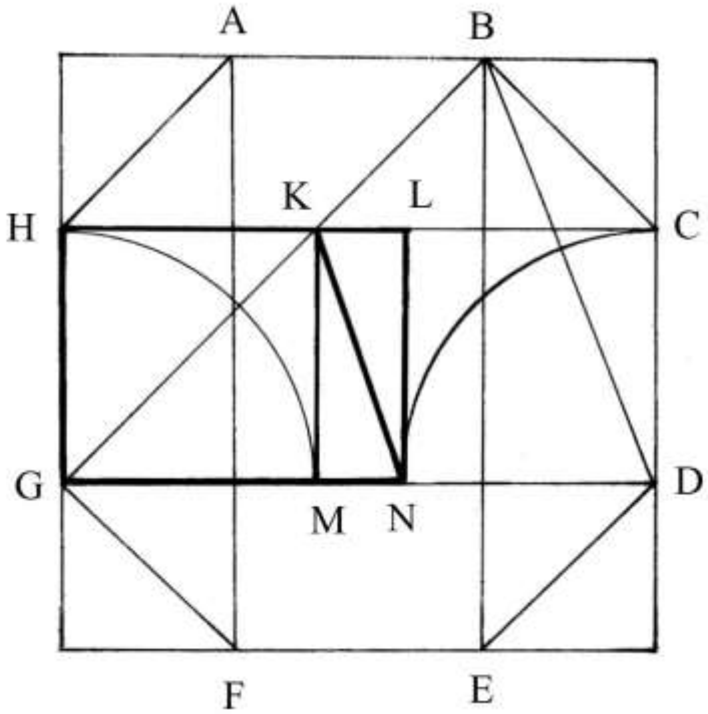
$$1/c = 1/\{[\sqrt{(4 + 2 * \sqrt{2})}]/2\} = \sqrt{(2 - \sqrt{2})} \approx 0{,}76536686473\ldots$$

La terza potenza è:

$$1/c^2 = (1/c) * (1/c) = [\sqrt{(2 - \sqrt{2})}]^2 = (2 - \sqrt{2}) \approx 0{,}585785\ldots$$

- -

La figura che segue ripropone l'ottagono regolare nel quale sono tracciate quattro diagonali fra loro perpendicolari: AF, BE, HC e GD.



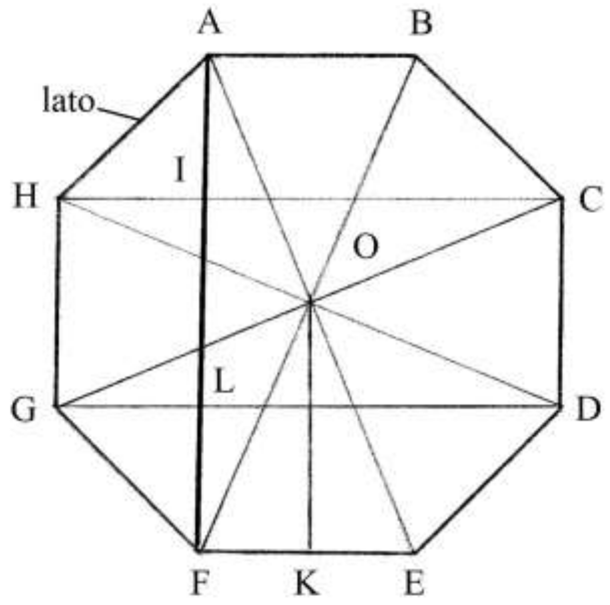
I rettangoli HLNG e KCDM sono simili al rettangolo ABEF della prima figura di questo paragrafo: ne consegue che i due rettangoli hanno dimensioni che sono nelle proporzioni del *formato A*.

Georg Christoph Lichtenberg trasse forse ispirazione dalle regole costruttive usate dai Romani e dai costruttori e artigiani medievali e rinascimentali?

LE PROPORZIONI DI CORDOVA

L'espressione *proporzioni di Cordova* fu introdotta nel 1973 da un architetto spagnolo (Rafael de la Hoz Arderius, 1924-2000), quale risultato dei suoi studi sull'architettura della città di Cordova, già importante centro della cultura islamica.

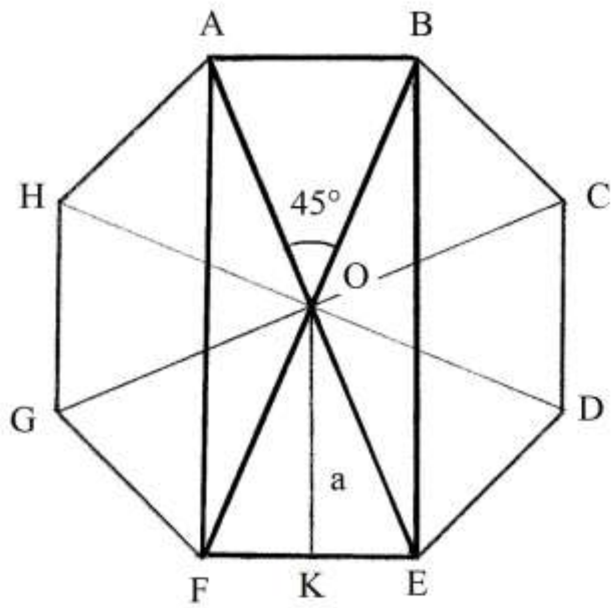
Lo studio della figura dell'ottagono regolare lo portò a individuare la proporzione o costante di Cordova, **c**:



$$AF = (1 + \sqrt{2}) * \text{lato} = (1 + \sqrt{2}) * AH$$

La lunghezza della diagonale AF è legata a quella del lato dall'espressione $(1 + \sqrt{2})$ che esprime la *sezione argentea*.

Nella figura seguente sono disegnate le due diagonali AF e BE:



AF e BE sono pure le lunghezze del rettangolo ABEF.

Come già spiegato, il rapporto fra i due lati del rettangolo ABEF è:

$AF/FE = (1 + \sqrt{2})$.

È quindi uguale alla *sezione argentea*.

Una migliore approssimazione della costante è:

$c = 1{,}306562964 \ldots$

Esiste una relazione fra il valore della *costante* c e il valore della *sezione argentea*:

$$c^2 = (1 + \text{sezione argentea})/2$$
$$c^2 = [1 + (1 + \sqrt{2})]/2.$$

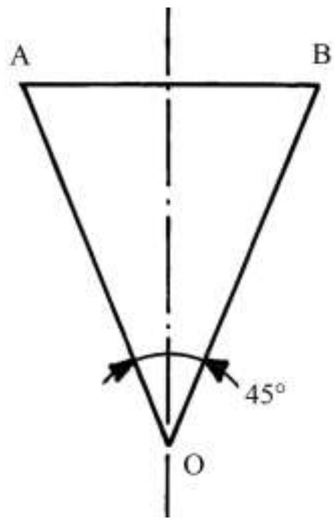
Sostituendo i valori aritmetici già noti, verifichiamo l'uguaglianza introdotta dalla formula precedente:

$$(2 + \sqrt{2})/2 = [1 + (1 + \sqrt{2})]/2$$
$$(4 + 2 * \sqrt{2})/2 = (2 + \sqrt{2})/2$$
$$(2 + \sqrt{2})/2 = (2 + \sqrt{2})/2$$

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

La precedente costruzione è ricavabile anche con i passi che sono descritti di seguito.

ABO è un triangolo isoscele di Cordova:



In precedenza abbiamo già definito le lunghezze dei lati di un triangolo di Cordova:

$AO = BO = \sqrt{2}$

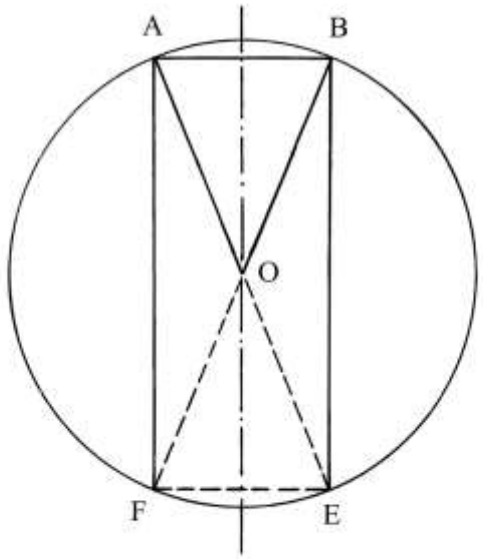
$AB = \sqrt{[2 * (2 - \sqrt{2})]}$.

L'angolo nel vertice O ha ampiezza uguale a 45° e gli angoli OAB e ABO hanno identica ampiezza:

$OAB = ABO = (180 – 45)°/2 = 67{,}5°$.

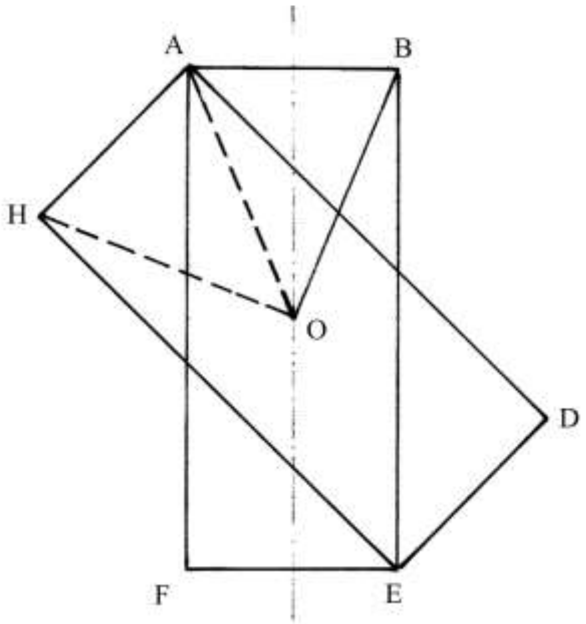
Prolungare l'altezza passante per il vertice O. Per i punti A e B condurre due parallele all'altezza.

Fare centro nel punto O e con raggio OA = OB tracciare una circonferenza che determina i punti E e F.

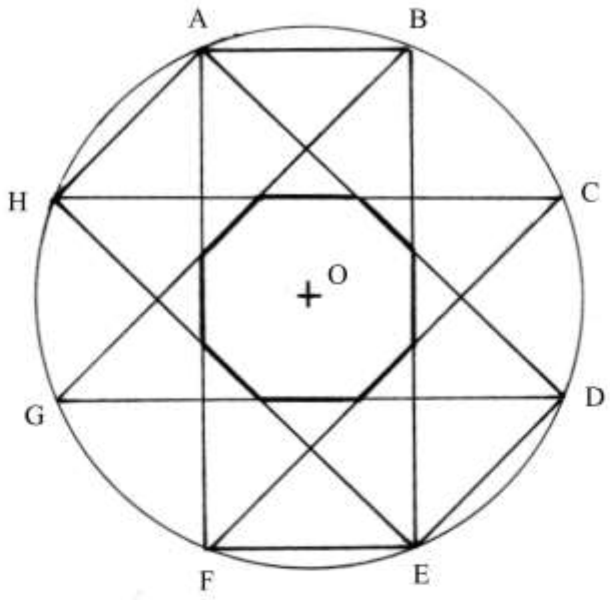


Il triangolo FOE è *simmetrico* di quello OAB rispetto al punto O.

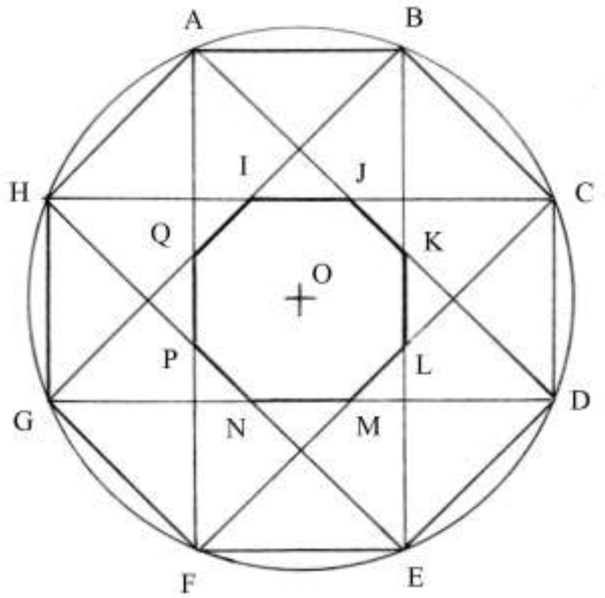
Ruotare di 45°, intorno al punto O, in *senso antiorario* il triangolo OAB fino a far coincidere B con A e F con E:



Sulla circonferenza sono stabiliti i punti A, B, C, D, E, F, G e H che sono i vertici di un ottagono regolare:



All’interno della figura è evidenziato un secondo ottagono regolare:

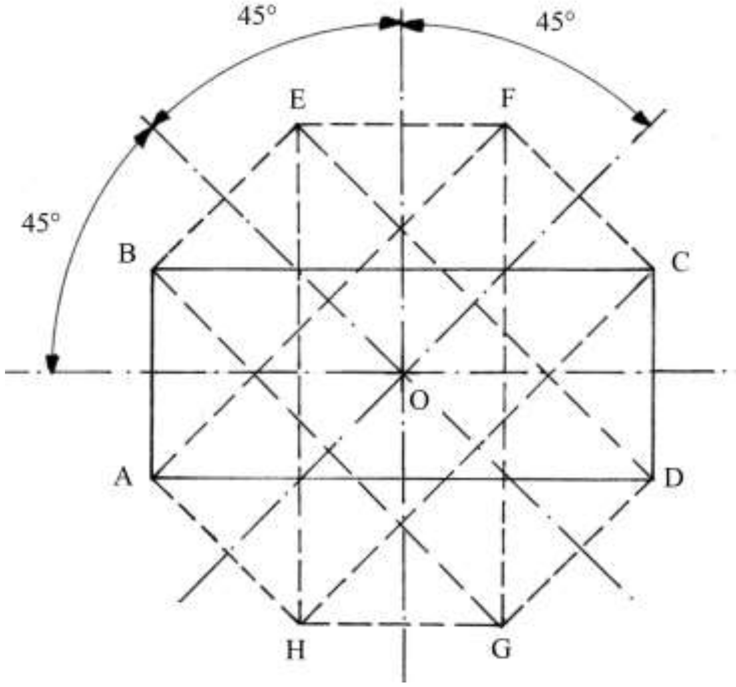


Fra le lunghezze dei lati dei due ottagoni concentrici esiste una proporzione:

$$AB : IJ = (\sqrt{2} + 1) : 1 = S_a : 1$$

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Un ottagono regolare è costruibile con la rotazione di un *rettangolo argenteo* come quello ABCD della figura che segue [un *rettangolo argenteo* ha lati lunghi in proporzione a:
$1 : (1 + \sqrt{2}) = 1 : S_a = AB : AD$]:



ABCD è disposto con i lati lunghi orizzontali. O è il suo baricentro e per esso passa un asse di simmetria, anch’esso orizzontale.

Ruotare il rettangolo ABCD in successione per tre volte di 45° in senso orario intorno al punto O: esso assume delle posizioni che determinato altri tre *rettangoli argentei*: BEDG, EFGH e FCHA.

L’ottagono regolare ABEFCDGH è formato da quattro rettangoli argentei.

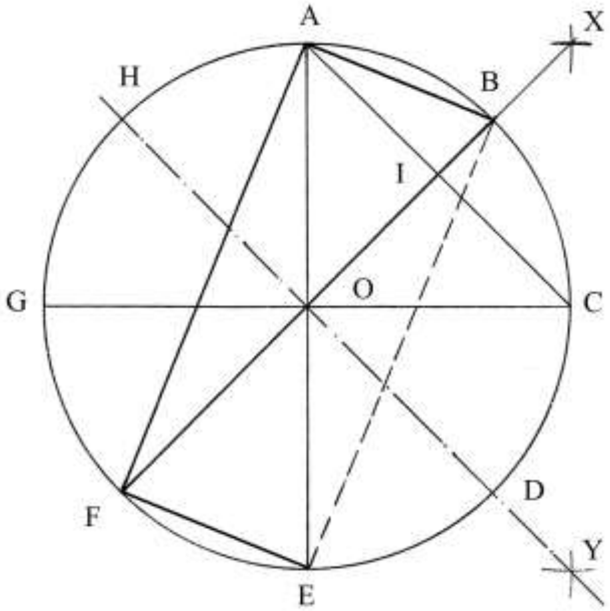
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

La determinazione per via geometrica della *costante di Cordova* è ottenibile con la costruzione che segue e con le formule ad essa collegate.

L’ottagono ABCDEFGH della precedente figura è inscrivibile in un cerchio di centro O e raggio OA.

Disegnare una circonferenza di centro O. AE e GC sono due diametri fra loro perpendicolari.

Costruire le bisettrici degli angoli AOC e EOC: esse passano per il centro O e per i punti X e Y. Queste due bisettrici sono due diametri fra loro perpendicolari.



Tracciare le corde AC e AF.

AC incontra il diametro FB nel punto I formandovi quattro angoli retti.

La lunghezza del lato AB è l'incognita. Il raggio della circonferenza, OA, è *convenzionalmente* lungo 1.

Applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo OAC calcoliamo la lunghezza della corda AC:

$AC = \sqrt{(OA^2 + OC^2)} = \sqrt{(1^2 + 1^2)} = \sqrt{2}$.

Nel triangolo rettangolo isoscele OAI si ha:

$OI = IA = ½ * AC = (\sqrt{2})/2$.

Il triangolo FAB è *rettangolo* e applicando ad esso il 1° teorema di Euclide si ha:

$FB : AB = AB : IB$.

Ma:

$IB = OB – OI = 1 - (\sqrt{2})/2$ e $FB = 2$.

Sostituendo questi valori nella precedente proporzione si ottiene:

$AB^2 = FB * IB = 2 * [1 – (\sqrt{2})/2] = 2 – \sqrt{2}$ e

$AB = \sqrt{(2 – \sqrt{2})}$

L'ultimo risultato fornisce la lunghezza del lato AB dell'ottagono regolare.

Il rapporto fra il raggio OA e il lato AB è:

$OA/AB = 1/[\sqrt{(1 - \sqrt{2})}] = [\sqrt{(2 + \sqrt{2})}]/\sqrt{2} = [\sqrt{(4 + 2 * \sqrt{2})}]/2 =$

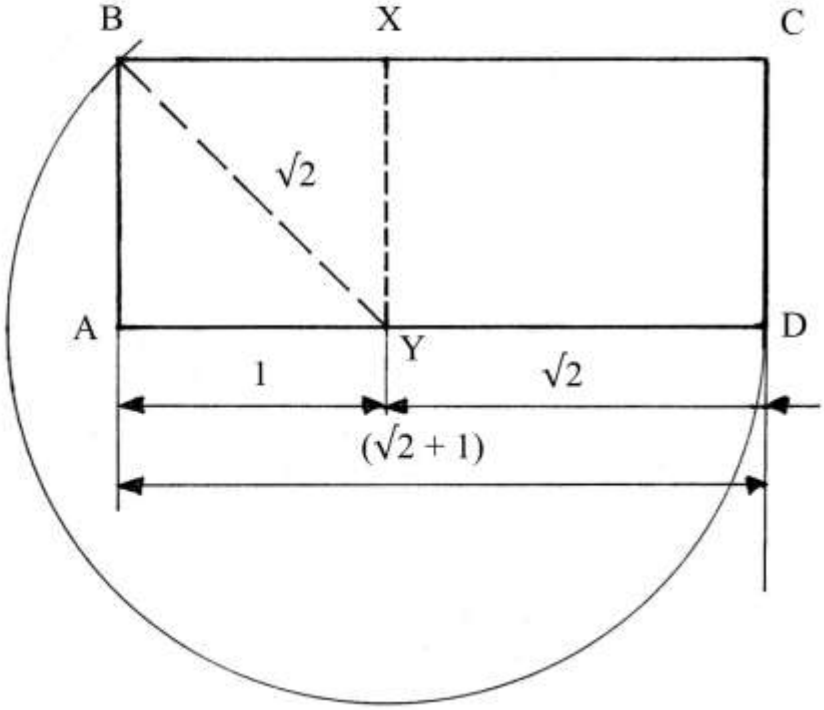
$= -$ c [costante di Cordoba] ≈ 1,306562964…

Sezione argentea e costante di Cordova

Fra la sezione aurea S_a e la costante di Cordova, **c**, esiste una relazione.

ABCD è un *rettangolo argenteo* i cui lati hanno lunghezze nella proporzione data dalla sezione argentea S_a:

$AD : AB = (\sqrt{2} + 1) : 1 = S_a : 1$



In un precedente paragrafo è già stata spiegata la costruzione geometrica della sezione argentea. Per semplificare le ulteriori spiegazioni, qui sopra mostriamo una sua variante.

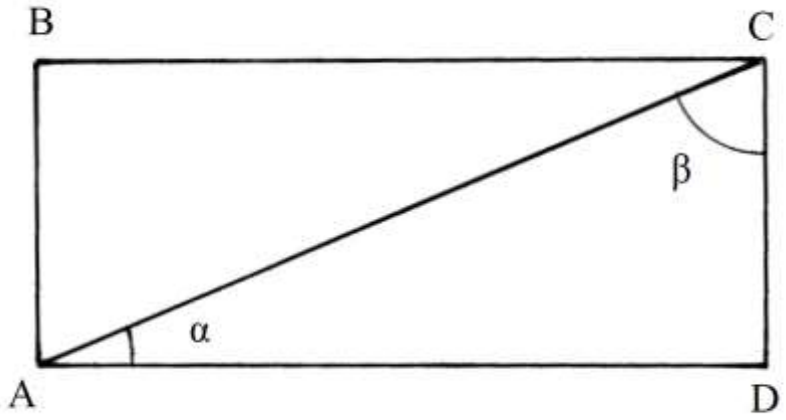
ABXY è un quadrato con lato *convenzionalmente* lungo 1. La diagonale BY è lunga $\sqrt{2}$.

Prolungare verso destra i lati AY e BX.

Fare centro nel punto Y e con raggio YB tracciare un arco da B fino a intersecare nel punto D il prolungamento di AY.

Il segmento AD è lungo: $AD = AY + YD = 1 + \sqrt{2} = \sqrt{2} + 1 = S_a$.

Disegnare la diagonale AC:



Nei due triangoli rettangoli essa forma due *angoli complementari,* α e β.

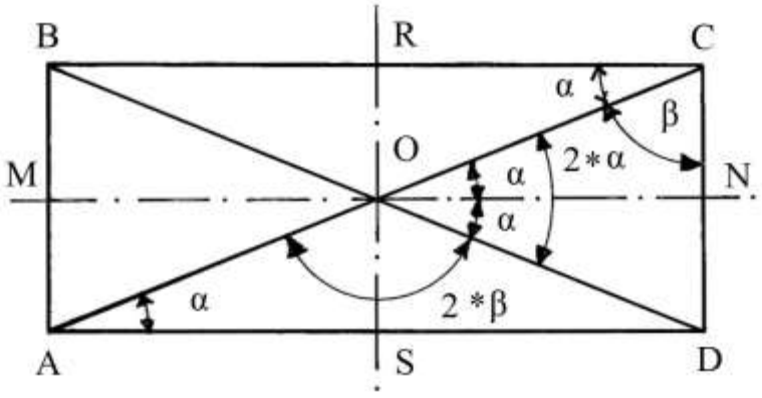
La tangente dell'angolo α è data da:

$$tg\ \alpha = CD/AD = 1/(\sqrt{2} + 1) = (\sqrt{2} - 1)/[(\sqrt{2} + 1) * (\sqrt{2} - 1) =$$
$$= (\sqrt{2} - 1)/(2 - \sqrt{2} + \sqrt{2} - 1) = (\sqrt{2} - 1)/1 = (\sqrt{2} - 1) \approx 0{,}41421356 = 1/S_a.$$

A questo valore corrisponde un angolo $\alpha = 22.5°$.

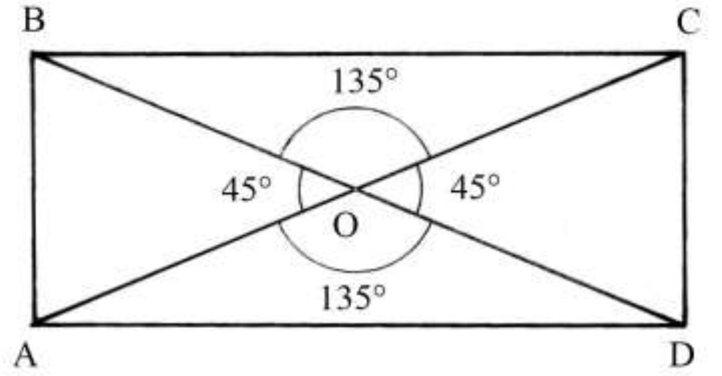
L'angolo β è ampio: $\beta = 90° – \alpha = 90° – 22,5° = 67,5°$.

Nel rettangolo argenteo ABCD, tracciare anche la seconda diagonale, BD, e le mediane MN e RS:



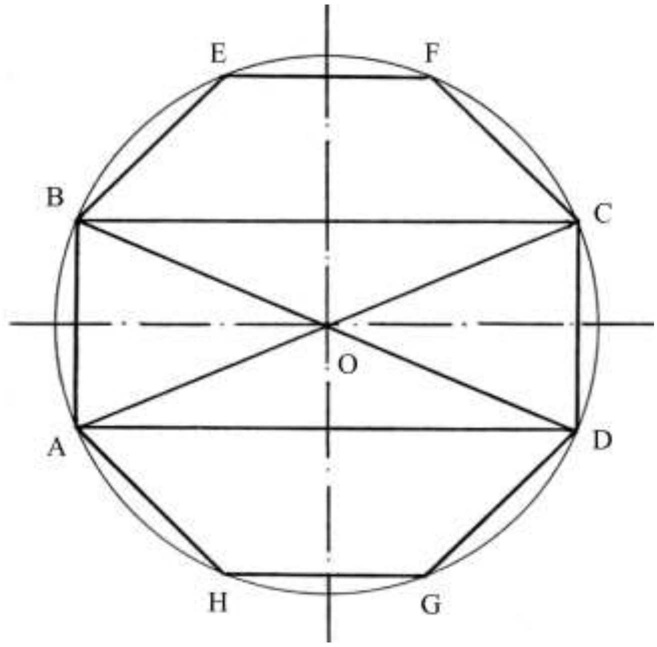
L'angolo COD è doppio di quello CAD e cioè: $COD = 2 * \alpha = 2 * 22.5° = 45°$.

Il rettangolo argenteo ABCD contiene al suo interno due *triangoli di Cordova*, ABO e OCD:



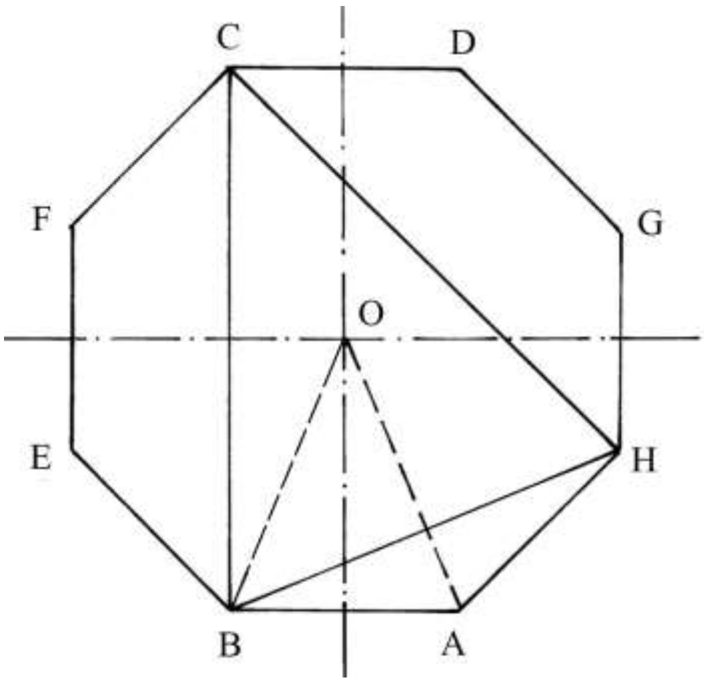
Riassumendo: $AD : AB = (\sqrt{2} + 1) = S_a : 1$ e $OA : AB = c : 1$.

Infine, il rettangolo argenteo ABCD è già stato incontrato in precedenza: i segmenti AD e BC sono due diagonali dell'ottagono regolare che collegano i vertici di due lati paralleli (AB e CD) e sono anche due diametri del cerchio circoscritto:



%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Ruotare in senso antiorario di 90° il precedente ottagono e tracciarvi le corde BC, BH e CH:



I trapezi BEFC e CDGH sono isosceli perché hanno i lati obliqui e la base minore (costituiti da lati dell’ottagono regolare) di uguale lunghezza.

Le basi maggiori (CB e CH) sono parallele alle basi minori (rispettivamente EF e DG).

L’ampiezza di un angolo interno dell’ottagono regolare, ad esempio quello EFG, è dato dalla formula:

angolo interno = (somma angoli interni)/(numero lati poligono) =
(numero lati – 2)* 180/8 = (8 – 2) * 180/8 = 135°.

Nel trapezio CDGH gli angoli CDG e DGH hanno ampiezza 135° e gli altri due angoli sono ampi: DCH = CHG = (360 – 2 * 135)/2 = 90/2 = 45°.

Anche nel trapezio BEFC gli angoli hanno le stesse ampiezze dei corrispondenti angoli del trapezio CDGH.

L'angolo BCH è ampio:

BCH = FCD – FCB – DCH = 135° – 45° – 45° = 45°

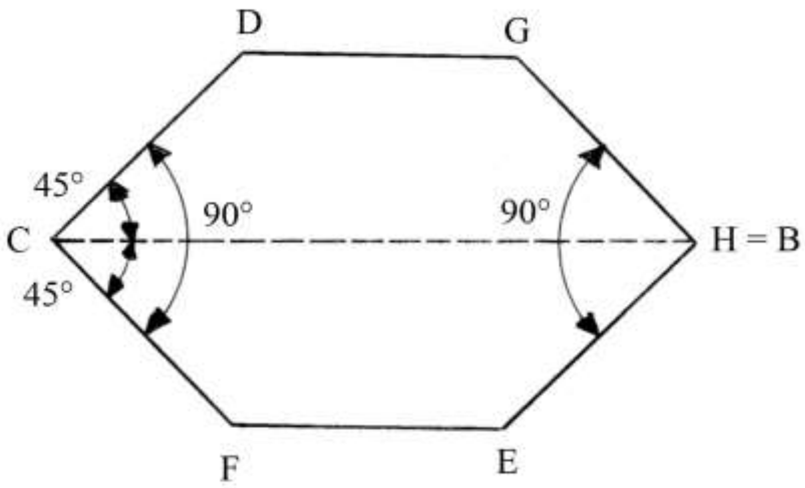
Il triangolo BCH è *isoscele* perché i due lati BC e CH hanno uguale lunghezza e gli angoli CBH e CHB sono di uguale ampiezza:

CBH = CHB = (180 – BCH)/2 = (180 – 45)/2 = 67,5°.

Il triangolo BCH è un *triangolo di Cordova* come quello BOA.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Ridisegnare il trapezio CDGH con le basi orizzontali e, intorno al punto C, ruotare in senso antiorario di 45° il trapezio BEFC fino a far coincidere le due basi maggiori (CH e CB) e i punti H e B.

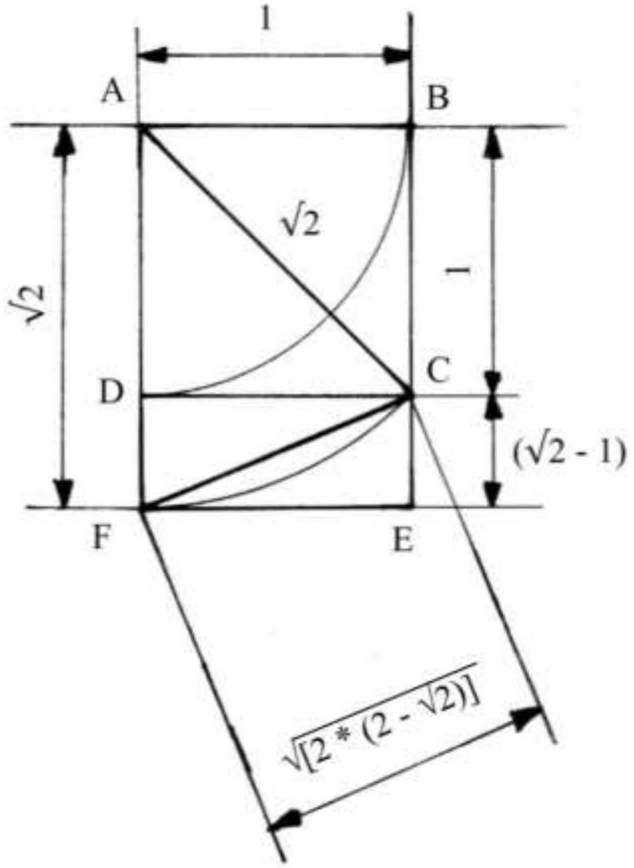


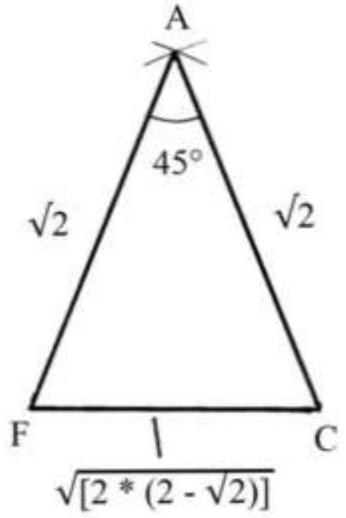
Il nuovo poligono CDGHEF è un esagono *non regolare*, equilatero ma non equiangolo.

Gli angoli DCF e GHE hanno ampiezza di 90°. Le coppie di lati DC-CF e GH-HE formano angoli retti.

I POLIGONI DI CORDOVA

La costante di Cordova, **C**, è presente anche in poligoni più complessi del triangolo isoscele legato al formato A e già incontrato in precedenza:

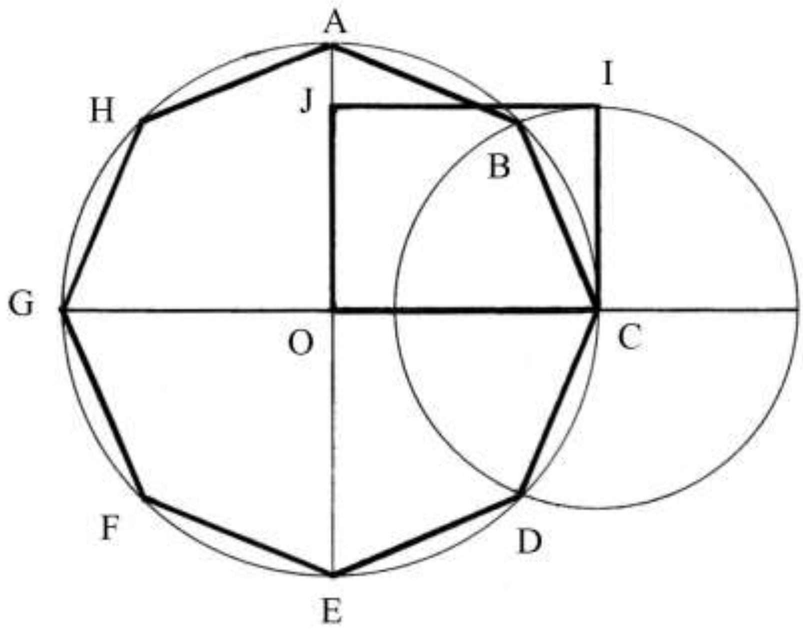




A destra, il triangolo di Cordova FAC è disegnato ruotato, in senso orario, con il lato di base FC orizzontale.

La figura che segue presenta l'ottagono regolare ABCDEFGH inscritto nel cerchio di centro O e raggio OA.

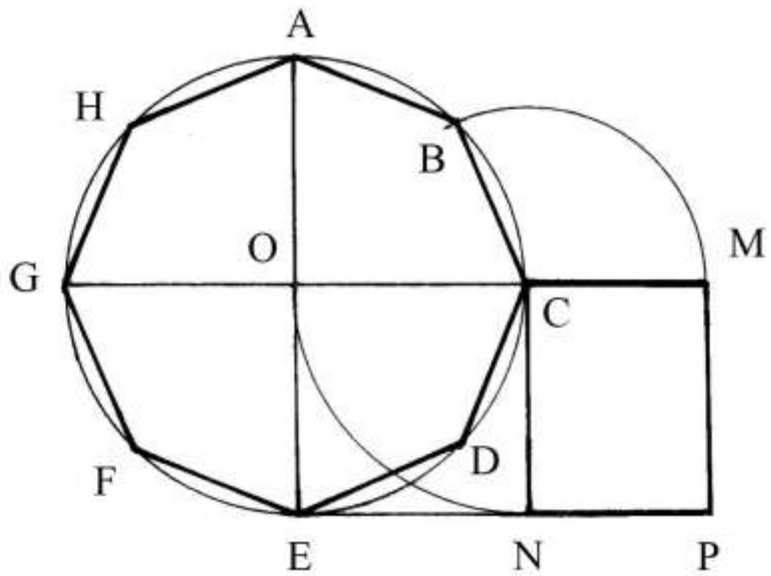
Fare centro nel punto C e con raggio CB disegnare una circonferenza: dal punto C elevare la perpendicolare al diametro GC fino a intersecarla nel punto I. Da questo ultimo condurre la perpendicolare al diametro AE fino a incontrarlo nel punto J:



Il quadrilatero OJIC è un *rettangolo di Cordova*. Le sue dimensioni sono in proporzione:
CI : OC = lato ottagono : raggio = 1 : c

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Una variante della precedente costruzione è presentata nella figura che segue:



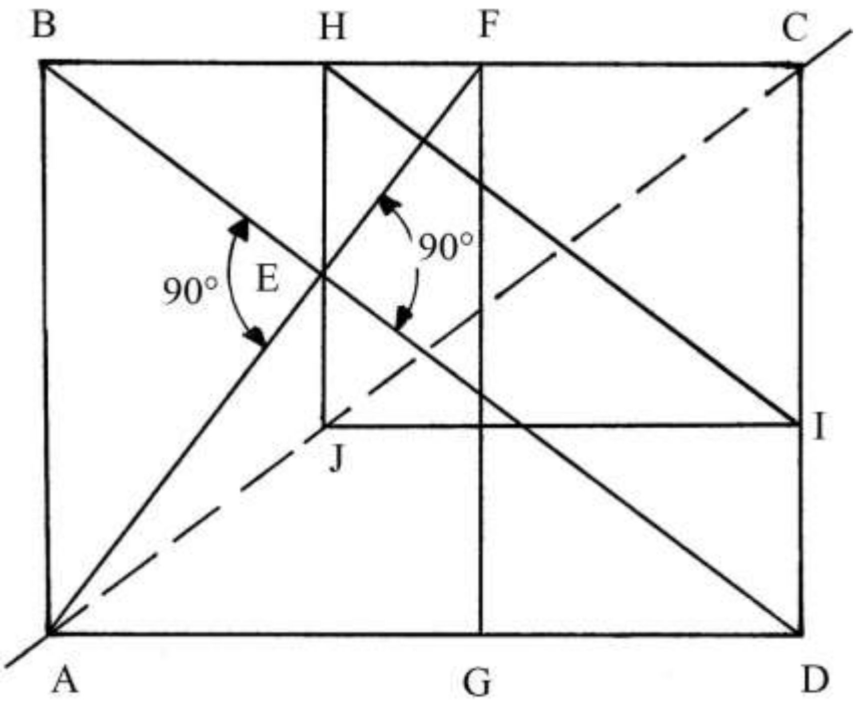
Prolungare verso destra il diametro GC.
Dal punto E condurre la tangente alla circonferenza.
Fare centro nel punto C e con raggio CB tracciare un arco da B fino a fissare il punto M.
Da C abbassare la parallela a AE fino a incontrare la tangente in N.
Da M condurre una seconda parallela a AE fino a fissare P.

Il quadrilatero CMPN è un *rettangolo di Cordova* per il quale valgono le proporzioni già descritte per il caso precedente.

La pianta della Grande Moschea di Cordova

Il rettangolo di Cordova che è spiegato nella figura che segue è presente nella pianta della Grande Moschea di Cordova, oggi Cattedrale cattolica dell'Immacolata Concezione di Maria Santissima.

ABCD è un rettangolo di Cordova:



Le lunghezze dei suoi lati sono in proporzione: AD : AB = c : 1 .

Tracciare la diagonale BD e dal punto A condurre ad essa la perpendicolare: i due segmenti si intersecano nel punto E formando quattro angoli retti.

La perpendicolare taglia il lato BC nel punto F: da questo punto abbassare la perpendicolare al lato AD.

Il rettangolo ABFG è simile a quello ABCD ed è anch'esso un *rettangolo di Cordova*:

AD : AB = AB : BF; il segmento AB è *medio proporzionale* fra AD e BF.

Dal punto E tracciare la perpendicolare al lato BC che viene incontrato nel punto H; da questo ultimo disegnare una parallela alla diagonale BD fino a tagliare CD nel punto I.

Infine, dal punto I tracciare la parallela ai lati AD e BC fino a stabilire il punto J.

Anche il rettangolo JHCI è un *rettangolo di Cordova* ed è simile a quello ABCD come dimostra l'allineamento delle diagonali AC e JC:

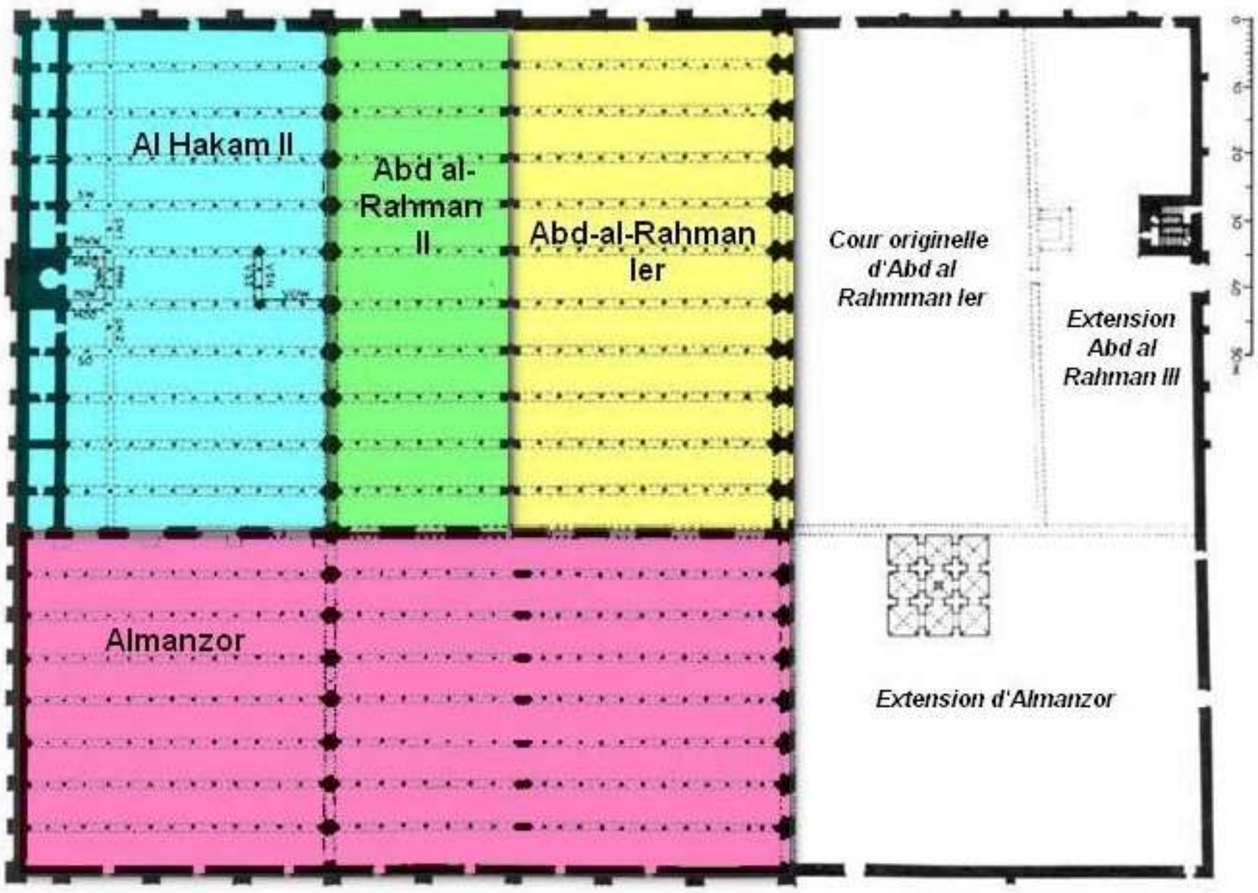
AB : BF = HC : HJ.

La proporzione può essere completata unendo le due ultime relazioni:

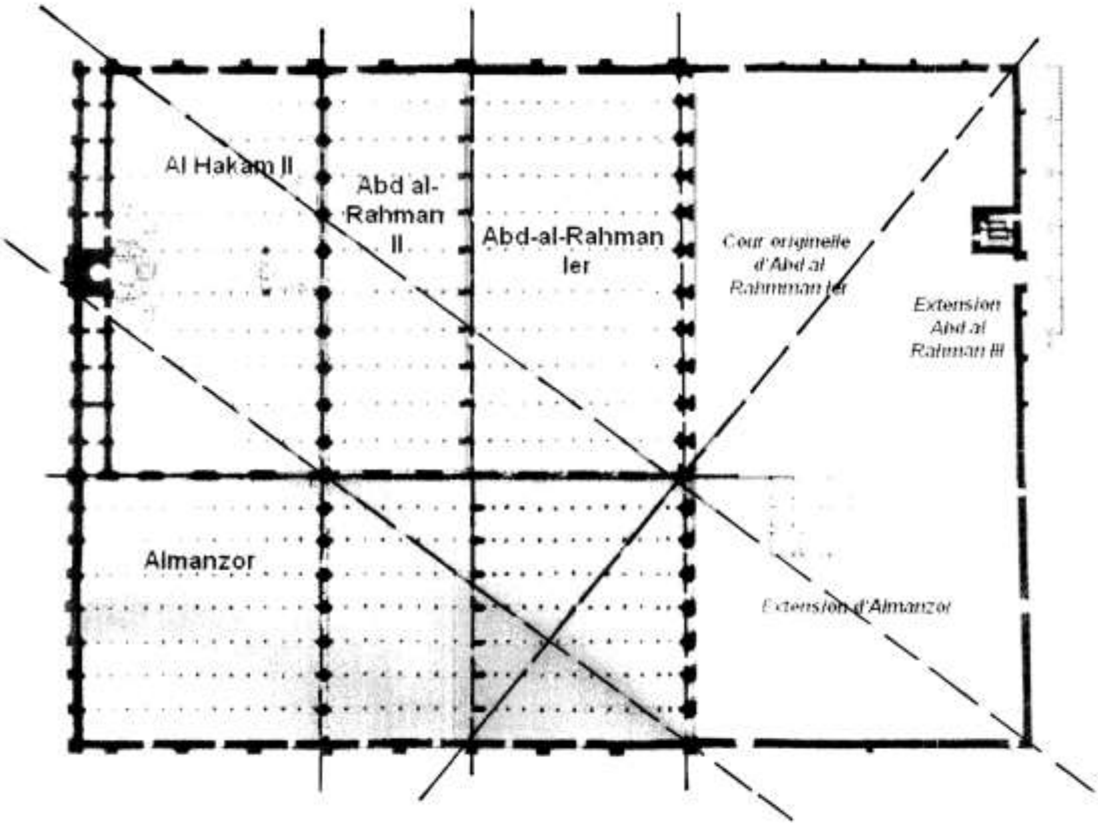
.

A loro volta, i rettangoli ABFG e JHCI possono essere suddivisi per formare altri rettangoli di Cordova di dimensioni sempre più ridotte.

La struttura sopra descritta è presente nella pianta della Grande Moschea di Cordova (che contiene i nomi dei committenti degli ampliamenti), come mostra la figura che segue (da Wikipedia):

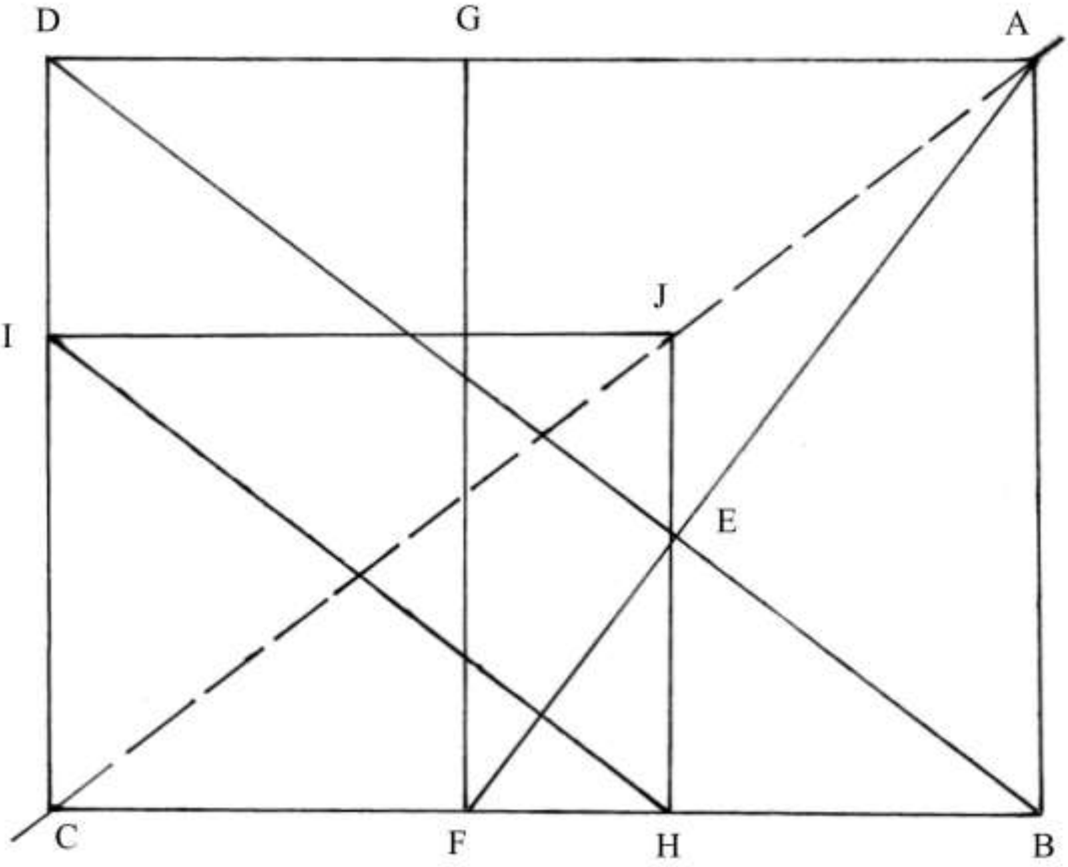


Nella figura che segue è disegnata – con linee *tratteggiate* – la griglia che forma i rettangoli di Cordova sulla precedente mappa:



%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

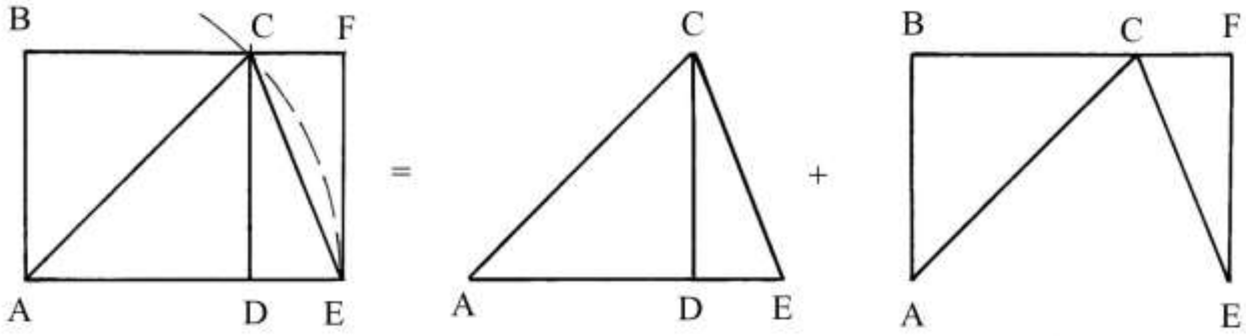
Ingrandendo opportunamente, ruotando e riflettendo il rettangolo di Cordova ABCD presentato all'inizio del paragrafo, possiamo sovrapporre la sua struttura sulla pianta della Grande Moschea di Cordova per verificare in questa ultima la presenza di più rettangoli di Cordova:



Tener presente che le ultime due figure sono state disegnate con la stessa scala di rappresentazione.

Formato A e rombo di Cordova

Il rettangolo ABFE è un formato A:



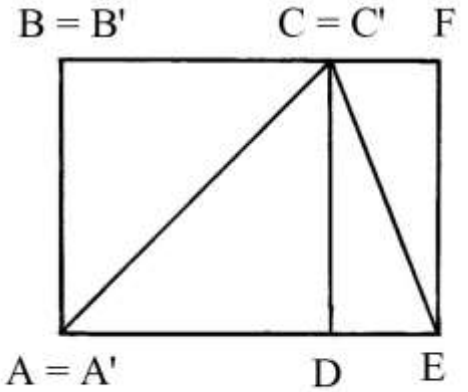
Il lato AE è lungo quanto la diagonale AC è lunga quanto il lato AE e

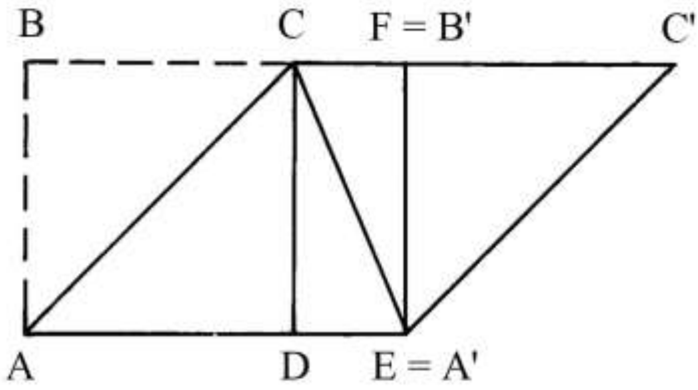
AE : √2 = AB : 1.

Il rettangolo ABFE è generato a partire dal quadrato ABCD e dalla sua diagonale AC.

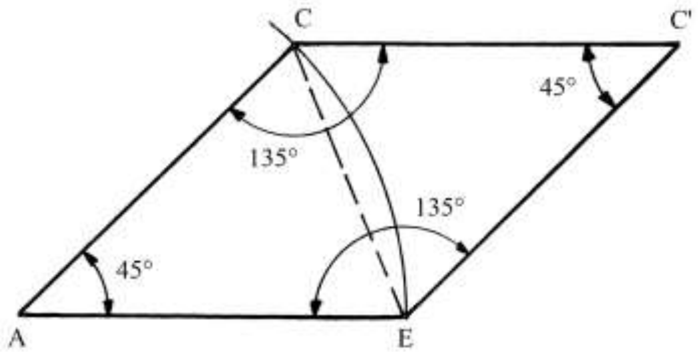
Esso nasce dall'unione del triangolo di Cordova ACE e dei triangoli rettangoli ABC (isoscele) e CFE.

I quattro triangoli rettangoli che compongono ABFE sono assemblati in modo diverso, per creare il *rombo* ACC’E:



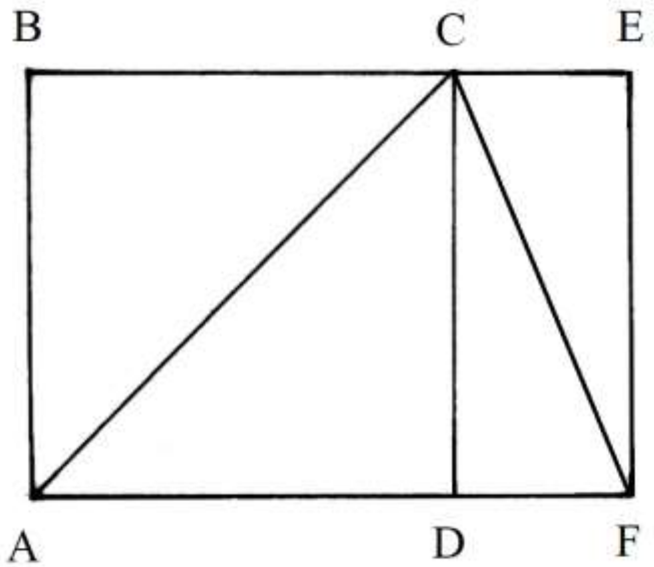


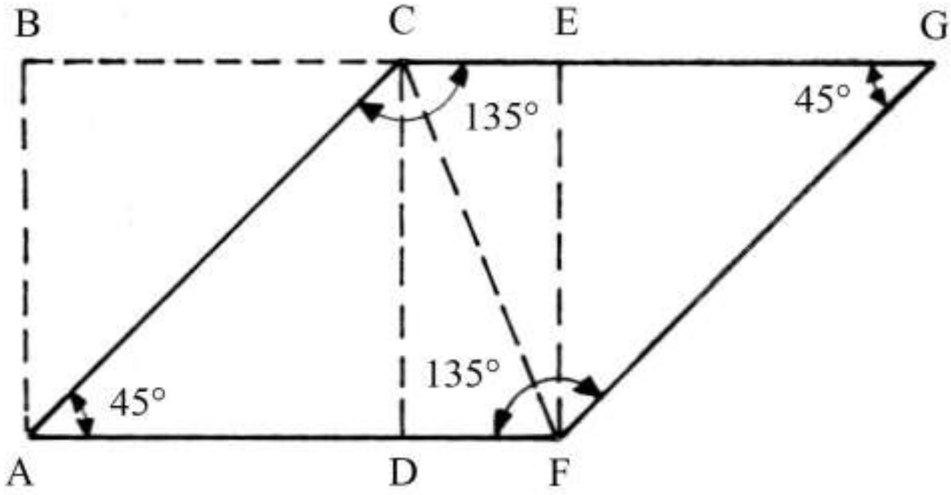
Il rombo ACC’E origina dall’unione dei triangoli di Cordova ACE e CEC’ (di uguali dimensioni) lungo il lato più corto CE: esso ha angoli interni di 45° e di 135°:



<u>Il diamante di Cordova</u>

Prendiamo in considerazione il rettangolo ABEF che è un formato A.

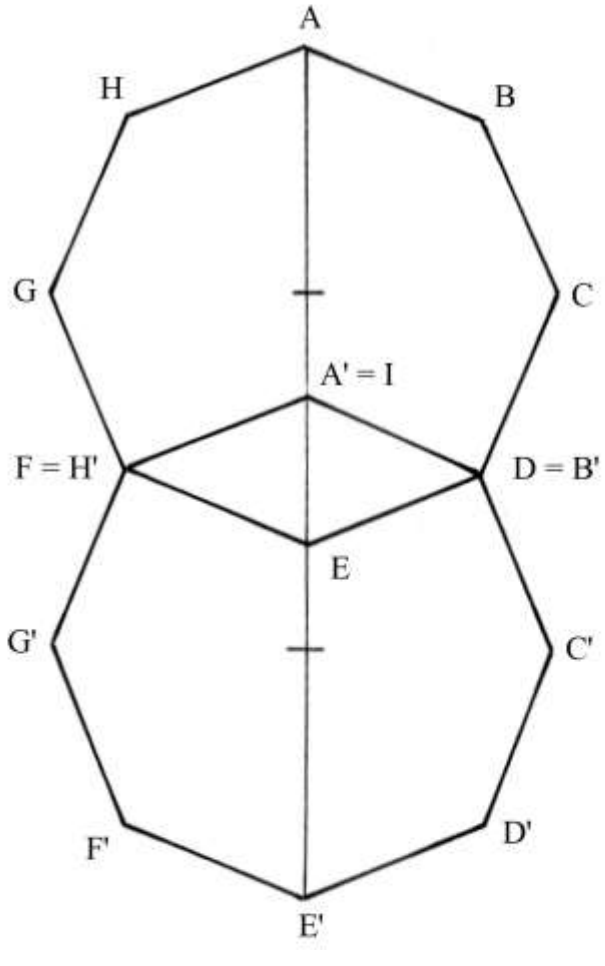




Il quadrilatero ACGF è un *rombo* che ha la stessa superficie del rettangolo ABEF.

Come visto nel precedente paragrafo, gli angoli CAF e CGF sono ampi 45° e gli angoli ACG e AFG sono ampi 135°.

Il rombo può essere ottenuto con la parziale sovrapposizione di due ottagoni regolari di uguali dimensioni: ABCDEFGH e A'B'C'D'E'F'G'H', facendo combaciare i punti F e H' e D con B'.

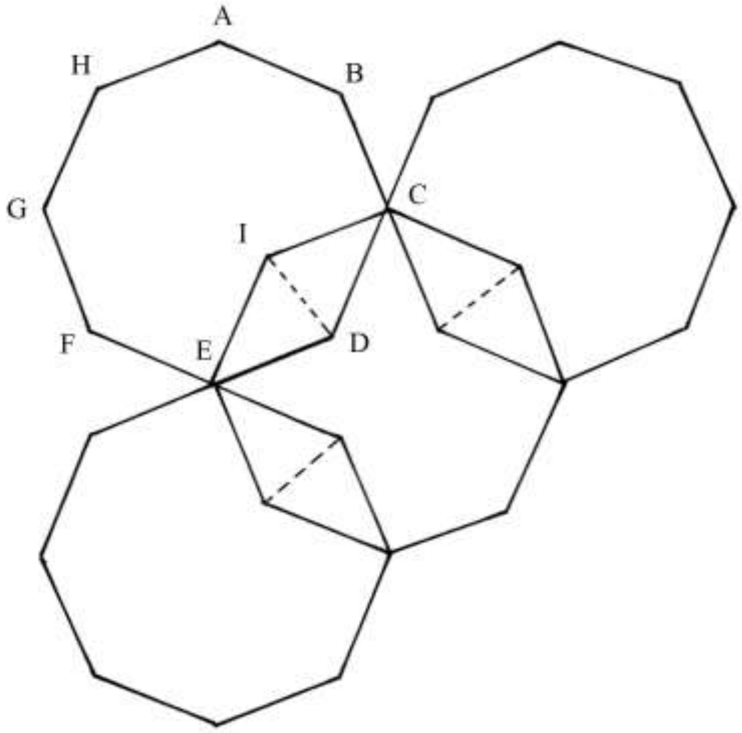


Il punto A' viene a trovarsi sull'asse di simmetria passante per i punti A e E'.

Il quadrilatero FIDE è un rombo formato da due triangoli di Cordova (FIE e IDE) uniti lungo la diagonale minore IE.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Quattro ottagoni regolari di uguali dimensioni si intersecano formando *tre rombi* ciascuno dei quali è generato da due triangoli di Cordova uniti lungo le diagonali minori (tratteggiate in figura):

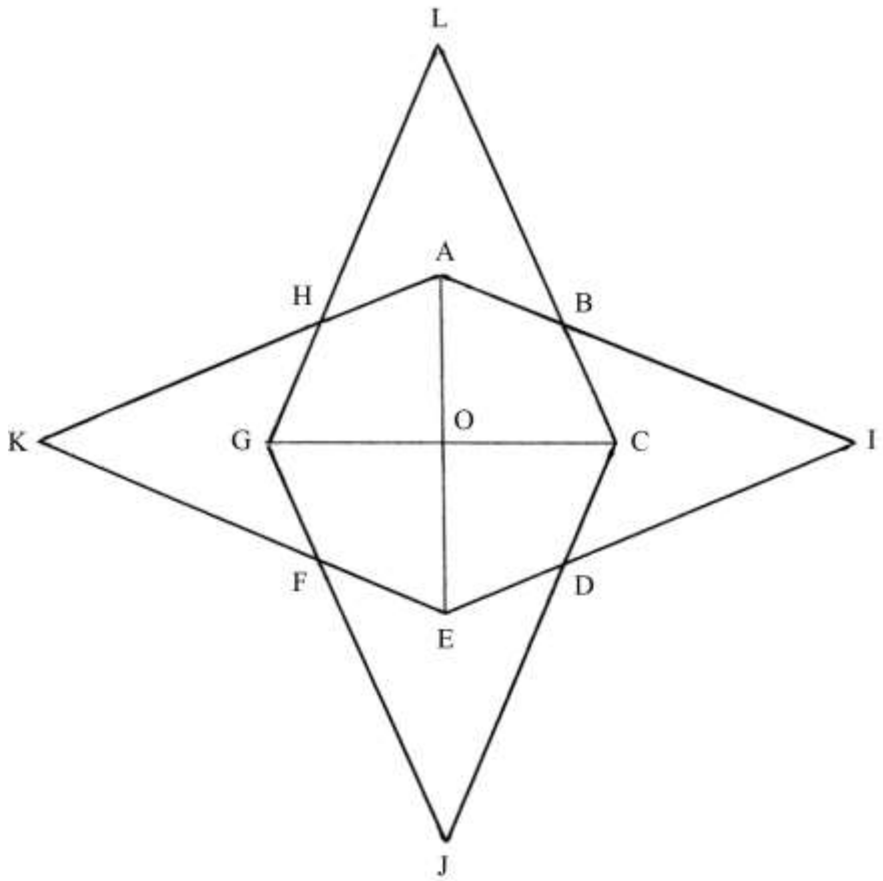


Uno dei rombi è il quadrilatero EICD.

Questa struttura fu impiegata per ricoprire pavimenti e pareti: uno degli esempi è presente nell'Alhambra di Granada.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

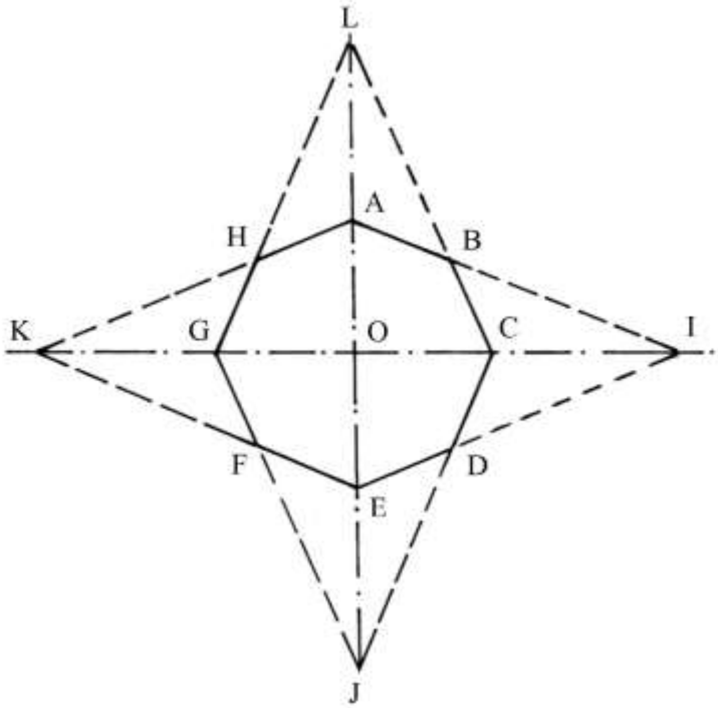
Due rombi formati da triangoli isosceli di Cordova (KAIE e LCJG), di uguali dimensioni, sono disposti come nella figura che segue:



Le diagonali minori AE e GC si intersecano ad angolo retto nel punto O: ciascuna di esse è l'*asse del segmento* dell'altra.

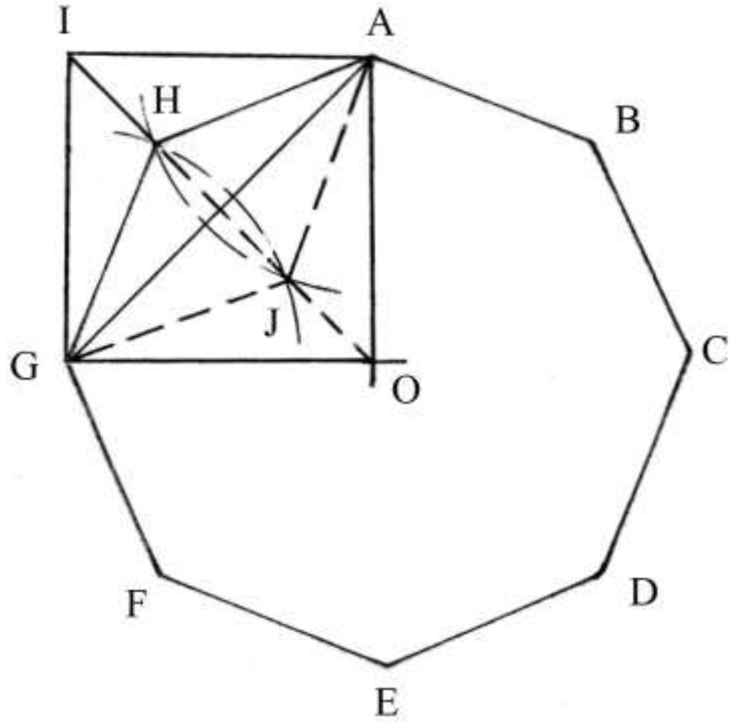
I lati dei due rombi si intersecano in una serie di punti che sono quattro vertici (B, D, F e H) dell'ottagono regolare ABCDEFGH.

All'inverso, partendo dall'ottagono regolare ABCDEFGH e prolungando verso l'esterno i suoi lati, sono ricreati i rombi KAIE e LCJG:



<u>Stella e ottagono</u>

ABCDEFGH è il solito ottagono regolare con centro in O:



Costruire il quadrato GOAI con lato lungo GO = OA.

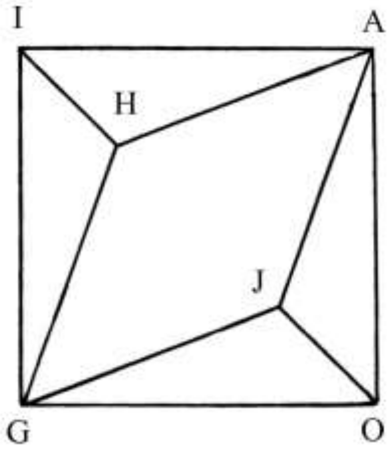
Tracciare le diagonali GA e OI.

Con raggio AH fare centro nei punti A e G e disegnare due archi che si intersecano nei punti H e J.

Tracciare i segmenti GJ e JA.

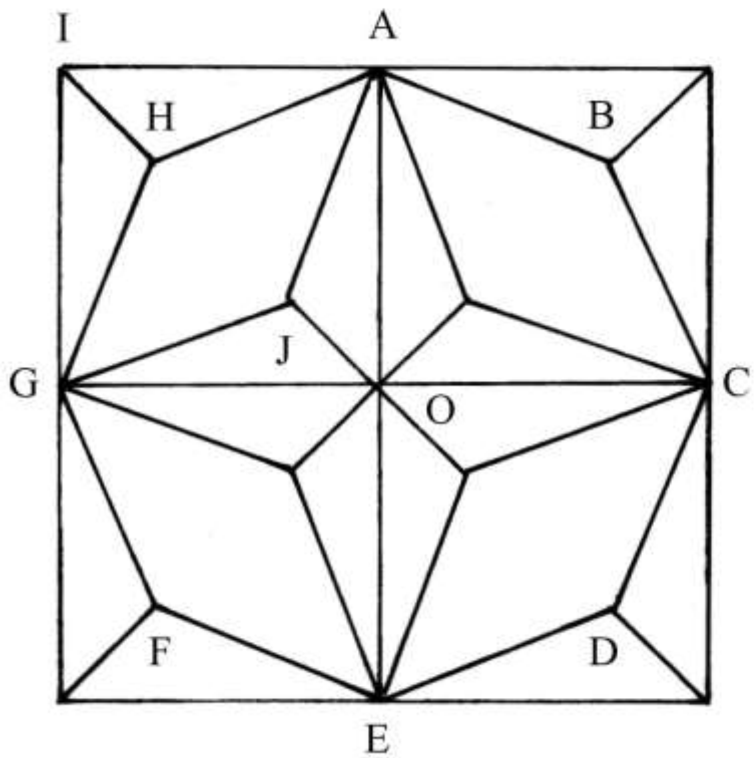
Il quadrilatero GHAJ è un *rombo* formato da due triangoli di Cordova (GHJ e HAJ) uniti lungo la loro base comune, HJ, che è pure la diagonale minore del rombo.

Nella figura che segue è riprodotto il solo quadrato GIAO:



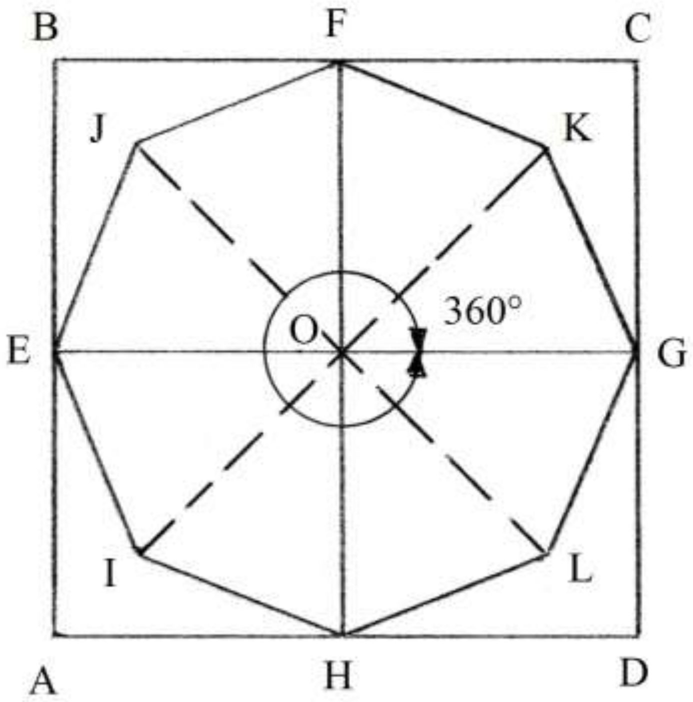
In esso è chiaramente riconoscibile il rombo GHAJ.

La costruzione precedente viene riprodotta su tutto l'ottagono originario:

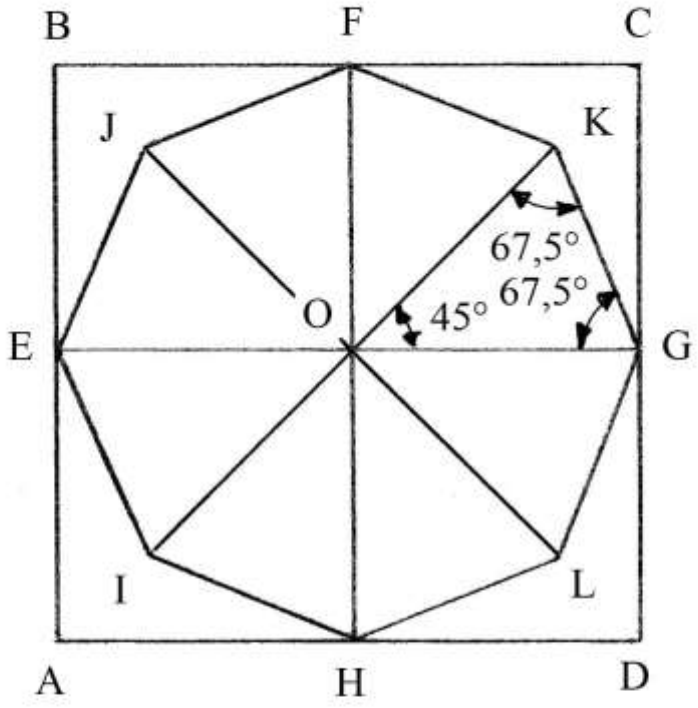


<u>Alcune costruzioni derivate dall'ottagono regolare</u>

ABCD è un quadrato al cui interno è inscritto l'ottagono regolare EJFKGLHI:



L'ottagono è composto da *otto* triangoli isosceli di uguali dimensioni. Ciascun triangolo contiene tre angoli interni la cui somma è 180°:



La somma degli angoli interni degli otto triangoli è $180 * 8 = 1440°$.

La somma degli angoli interni dell'ottagono è uguale alla somma degli angoli interni degli otto triangoli isosceli *meno* la somma degli otto angoli nel vertice O.

In generale:

Somma angoli interni poligono = (numerolati – 2) * 180°

Nel caso dell'ottagono:

Somma angoli ottagono = (8 – 2) * 180 = 1080°.

Nella formula precedente dal *numerolati* è stato sottratto il valore 2 per tener conto dell'*angolo giro* al centro: 360° = 2 * 180°.

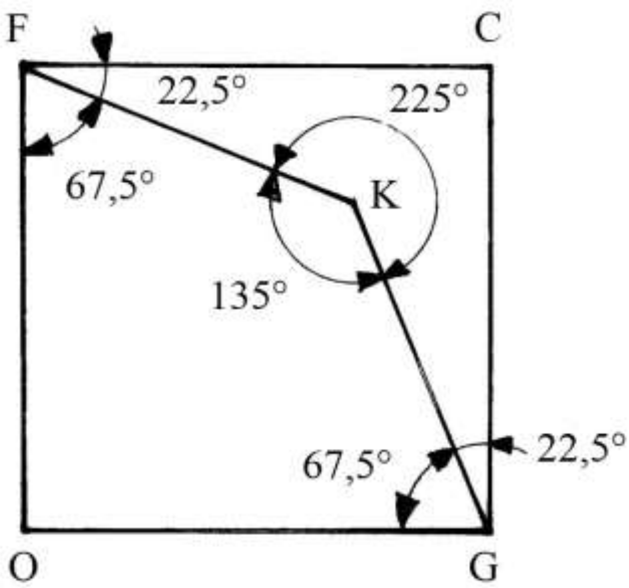
Come già visto in precedenza, gli angoli interni dell'ottagono hanno ampiezza uguale a:

EJF = 1080/8 = 135°.

Lo stesso risultato poteva essere ottenuto semplicemente sommando le ampiezze degli angoli interni adiacenti di due triangoli:

EJF = EJO + FJO = 67,5° + 67,5° = 135°.

Nella figura che segue è riprodotto soltanto il quadrante OFCG:



Nello schema sono presenti diversi angoli significativi:

FKG = 135° e GKF = 360° – 135° = 225°

OFK = OGK = FKG/2 = 135°/2 = 67,5°

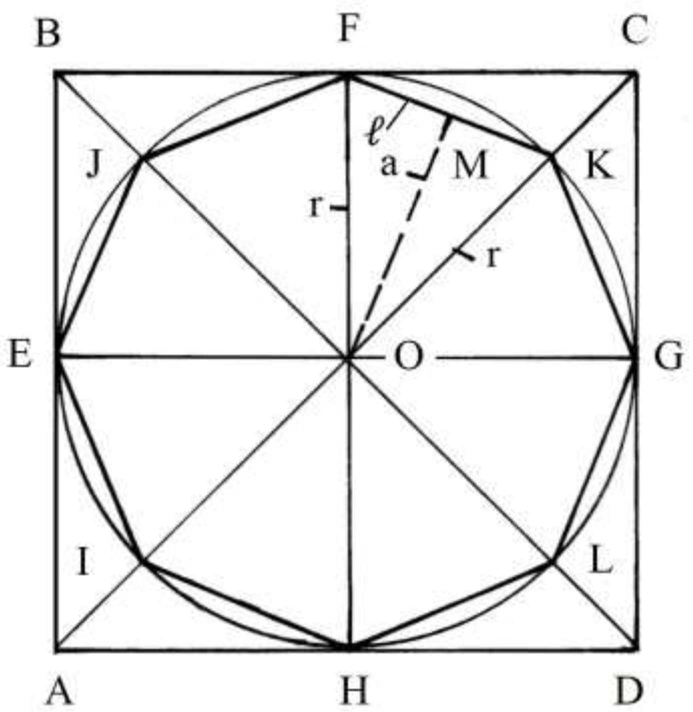
OFC = OGC = 90°

CFK = OFC – OFK = 90° – 67,5° = 22,5°.

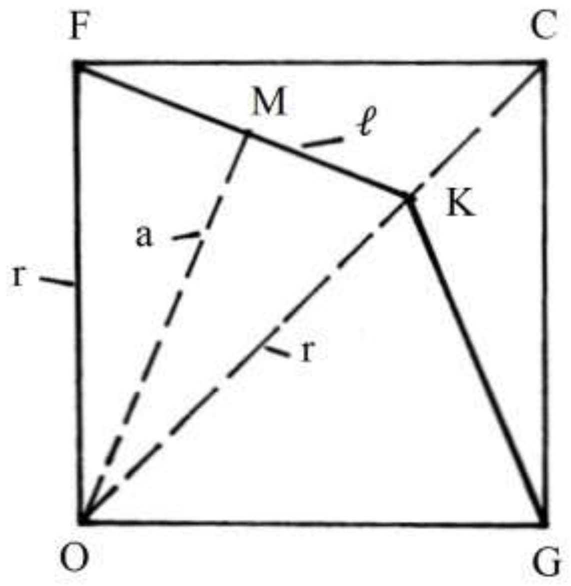
Nella figura che segue, OF è il raggio r della circonferenza inscritta nel quadrato ABCD e circoscritta all'ottagono regolare.

FK è un lato, ℓ, dell'ottagono.

OM congiunge il vertice O con il punto medio del lato FK: è l'*apotema* a dell'ottagono e l'altezza del triangolo isoscele OFK rispetto alla base FK.



Torniamo al quadrante OFCG. I lati dell'ottagono, FK e KG, dividono il quadrato OFCG in due *quadrilateri*:



- OFKG che è un *aquilone* (*kite* in inglese),
- FCGK che è chiamato *dardo* (*dart* in inglese).

Anche questi quadrilateri fanno parte della famiglia dei poligoni di Cordova.

Come già spiegato in precedenza, la *costante di Cordova*, **c,** è data dal rapporto:

c = (raggio circonferenza circoscritta)/(lato ottagono).

Nel caso della precedente figura vale la seguente relazione:

c = OF/FK = r/ℓ   da cui: ℓ = r/c.

Se r = c, allora si ha: ℓ = 1.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

L'area del quadrato OFCG è :

$Area_{OFCG} = OF^2 = r^2 = c^2$.

L'area del triangolo isoscele OFK è data da:

$Area_{OFK} = (FK * OM)/2$.

Ma $FK = \ell = 1$ e OM è l'*apotema* dell'ottagono di lati FK e KG.
Ricordiamo che l'apotema di un poligono regolare è lungo:

apotema = numero fisso f * lato.

Nel caso dell'ottagono il numero fisso f è:

$f = (1 + \sqrt{2})/2 = S_a/2$.

Pertanto l'apotema a è lungo:

$a = f * \ell = (S_a/2) * 1 = S_a/2 = OM$.

L'area del triangolo OFK è:

$Area_{OFK} = OM * FK/2 = (S_a/2) * \ell/2 = (S_a/2) * ½ = S_a/4$.

L'area del quadrilatero OFKG (un *aquilone*) è doppia di quella di OFK:

$Area_{OFKG} = 2 * Area_{OFK} = S_a/2$.

L'area del quadrato OFCG è:

$Area_{OFGC} = OF^2 = r^2 = c^2$.

L'area del quadrilatero FCGK (un *dardo*) è data da:

$Area_{FCGK} = Area_{OFCG} – Area_{OFKG} = c^2 – S_a/2 = (2 * c^2 – S_a)/2$.

L'area dei triangoli FCK e CGK è la metà di quella di FCGK:

$Area_{FCK} = Area_{CGK} = Area_{FCGK}/2 = (2 * c^2 – S_a)/4$.

\- APPROFONDIMENTO -

<u>Proporzioni fra le aree del quadrato OFCG</u>

Con i calcoli mostrati in precedenza sono state ricavate le aree dei quadrilateri contenuti in OFCG:

area quadrato OFCG = c^2
area aquilone OFKG = $S_a/2$
area dardo FCGK = $(2 * c^2 – S_a)/2$

Ricordiamo i valori di c^2 e S_a:

$c^2 = (2 + \sqrt{2})/2$e $\qquad S_a = (1 + \sqrt{2})$

Calcoliamo il rapporto fra le aree del quadrato OFCG e dell'*aquilone* OFKG:

rapporto $Area_{OFCG}/Area_{OFKG} = c^2/(S_a/2) = 2 * c^2/S_a = [2 * (2 + \sqrt{2})/2]/S_a =$
$= (2 + \sqrt{2})/(1 + \sqrt{2}) = \sqrt{2}$.

Il rapporto fra l'area del quadrato OFCG e quella del *dardo* FCGK è:

rapporto $Area_{OFCG}$/Area FCGK $= c^2/[(2 * c^2 – S_a)/2] = (2 * c^2)/(2 * c^2 – S_a) =$
$= [2 * (2 + \sqrt{2})/2]/\{[2 * (2 + \sqrt{2})/2] – (1 + \sqrt{2})\} = (2 + \sqrt{2})/(2 + \sqrt{2} – 1 – \sqrt{2}) =$
$= (2 + \sqrt{2})$.

Fra le aree dell'*aquilone* e del *dardo* intercorre una proporzione:

Area $_{OFKG}$: $1/\sqrt{2}$ = Area $_{FCGK}$: $1/(2 + \sqrt{2})$.

Permutando i *medi* della precedente proporzione si ha:

Area $_{OFKG}$: Area $_{FCGK}$ = $1/\sqrt{2} : 1/(2 + \sqrt{2})$.

Infine, il rapporto fra le aree dei due quadrilateri è:

Area $_{OFKG}$/Area $_{FCGK}$ = $(1/\sqrt{2}) * (2 + \sqrt{2}) = (2 + \sqrt{2})/\sqrt{2} = (2 * \sqrt{2} + 2)/2 =$
$= (1 + \sqrt{2}) = S_a$.

Riappare la costante *sezione argentea* S_a.

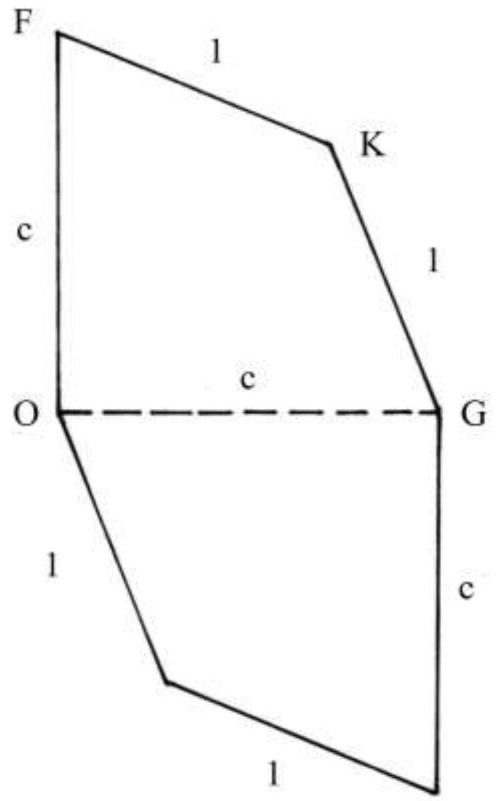
- -

Poligoni non regolari con aquiloni e dardi

L'aquilone e il dardo possono essere uniti per formare *tre* poligoni con *sei* lati: si tratta di esagoni non regolari che hanno lati lunghi convenzionalmente 1 e c.

Le combinazioni possibili sono tre e sono mostrate nelle tre figure che seguono:

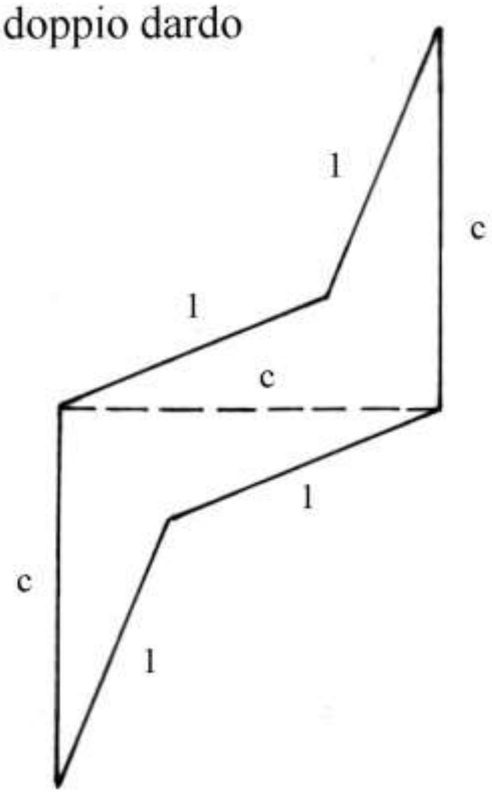
- Doppio aquilone:



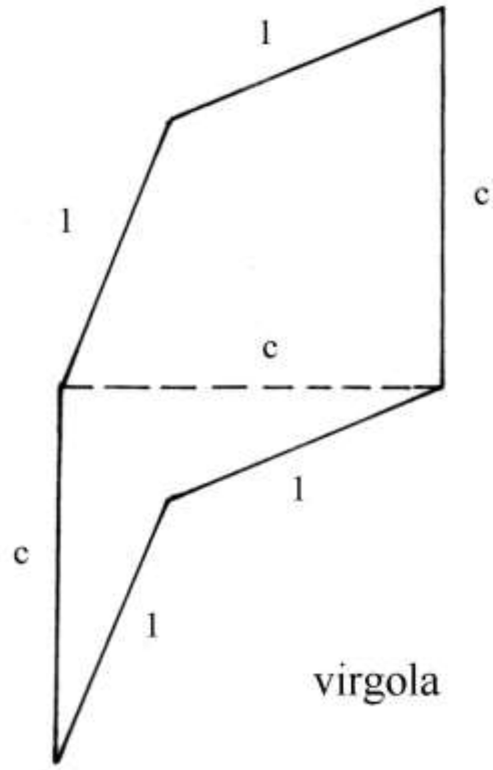
doppio aquilone

- Doppio dardo:

doppio dardo

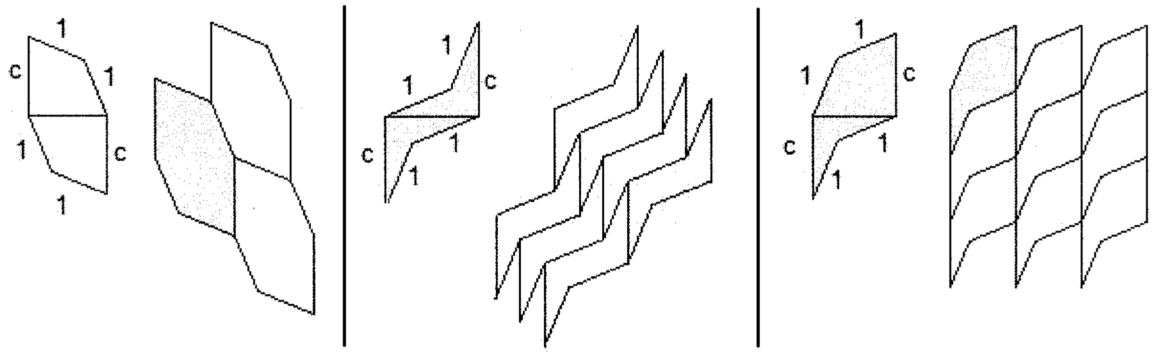


- Virgola:



virgola

Opportunamente collocati, questi tre poligoni non regolari sono in grado di coprire una superficie piana:



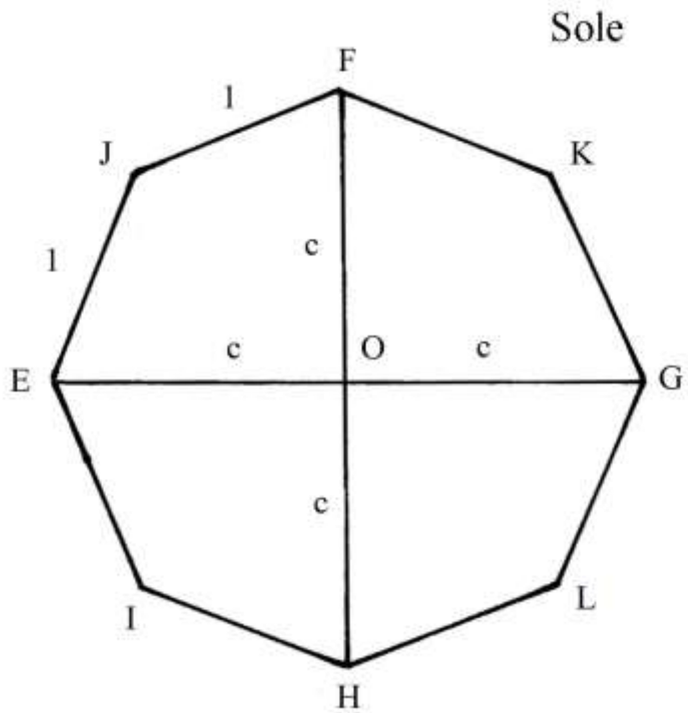
(da Redondo Buitrago e Reyes Iglesias, citato in bibliografia).

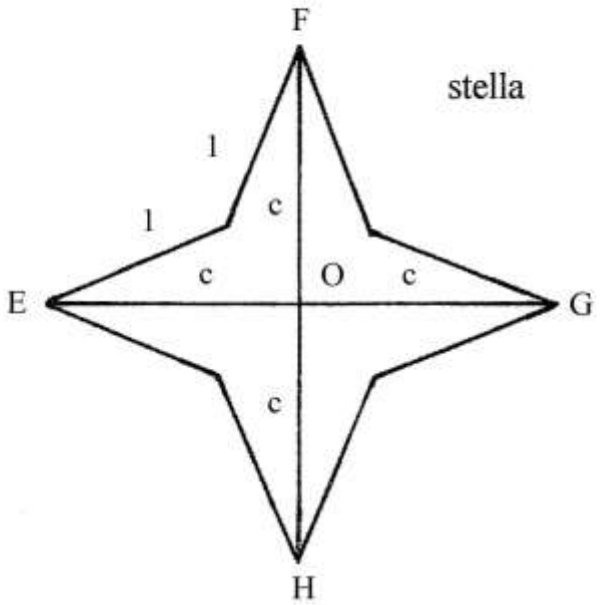
%%%%%%%%%%%%%%%%%%

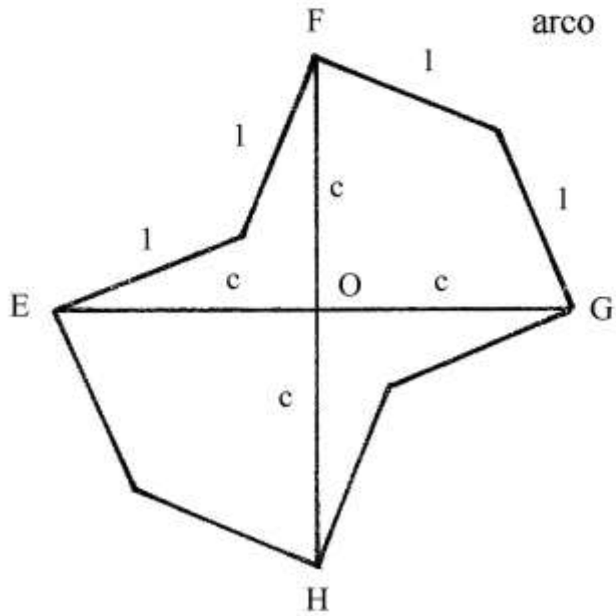
Gli aquiloni e i dardi sono abbinabili in altre forme più complesse delle tre precedenti ma anch’esse in grado di tassellare perfettamente un piano.

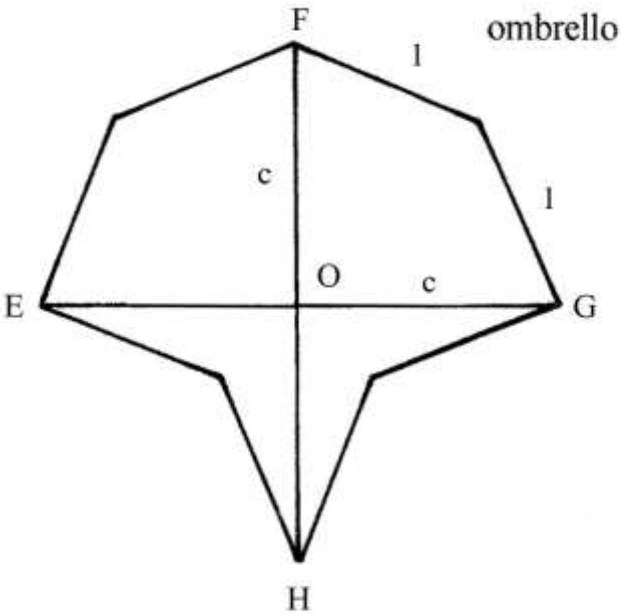
Queste altre forme creano ottagoni non regolari ma equilateri, perché i loro lati hanno lunghezza convenzionale 1 e le diagonali interne lunghe (c + c) = 2*c = EG = FH: esse sono diametri del cerchio circoscritto all’ottagono regolare.

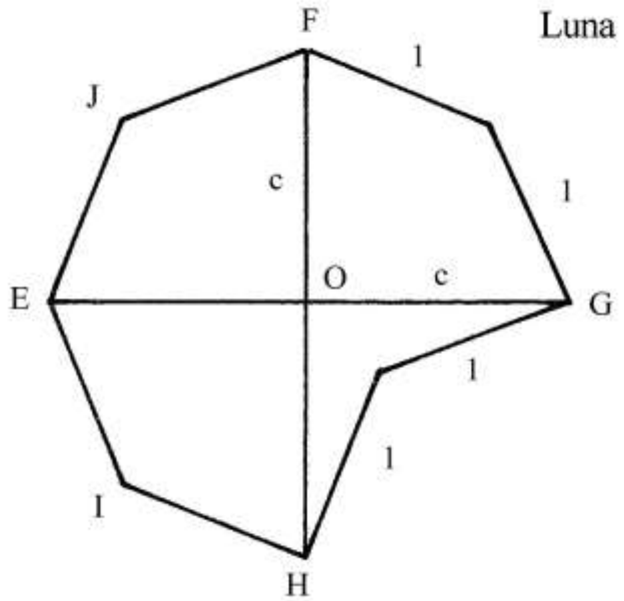
I poligoni che seguono hanno differenti nomi per somiglianza con oggetti o entità naturali: *Sole, stella, arco, ombrello, Luna, pesce*.

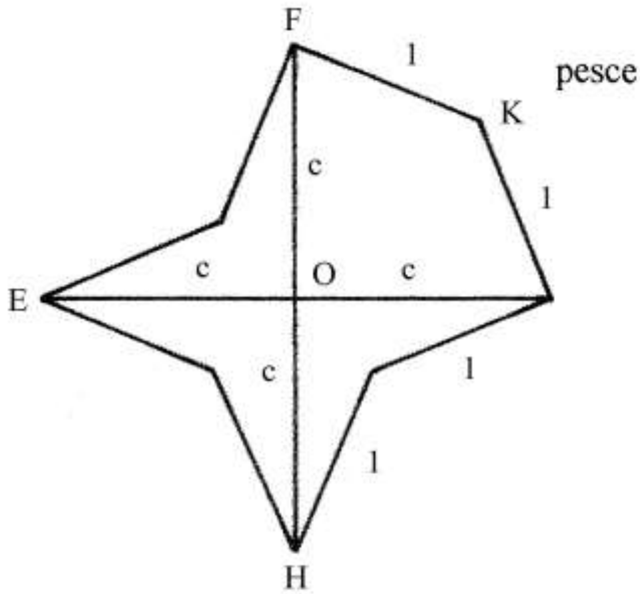



F
stella
l
l
c
c
O
c
E
G
c
H


F
arco
l
l
c
l
l
c
O
c
E
G
c
H

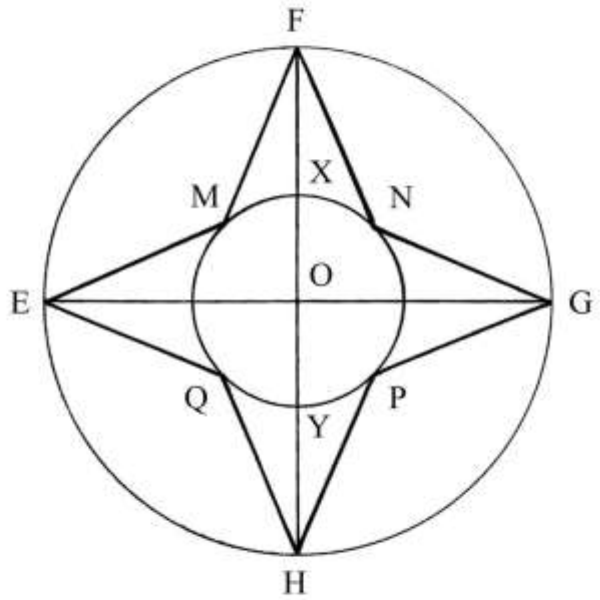

ombrello
F
l
c
l
O
c
E
G
H


Luna
F
l
J
c
l
O
c
E
G
l
l
I
H



- APPROFONDIMENTO -

La *Stella*, l'*arco*, l'*ombrello*, la *Luna* e il *pesce* hanno una proprietà in comune: i loro vertici giacciono sulle due circonferenze concentriche che hanno in comune il centro O:

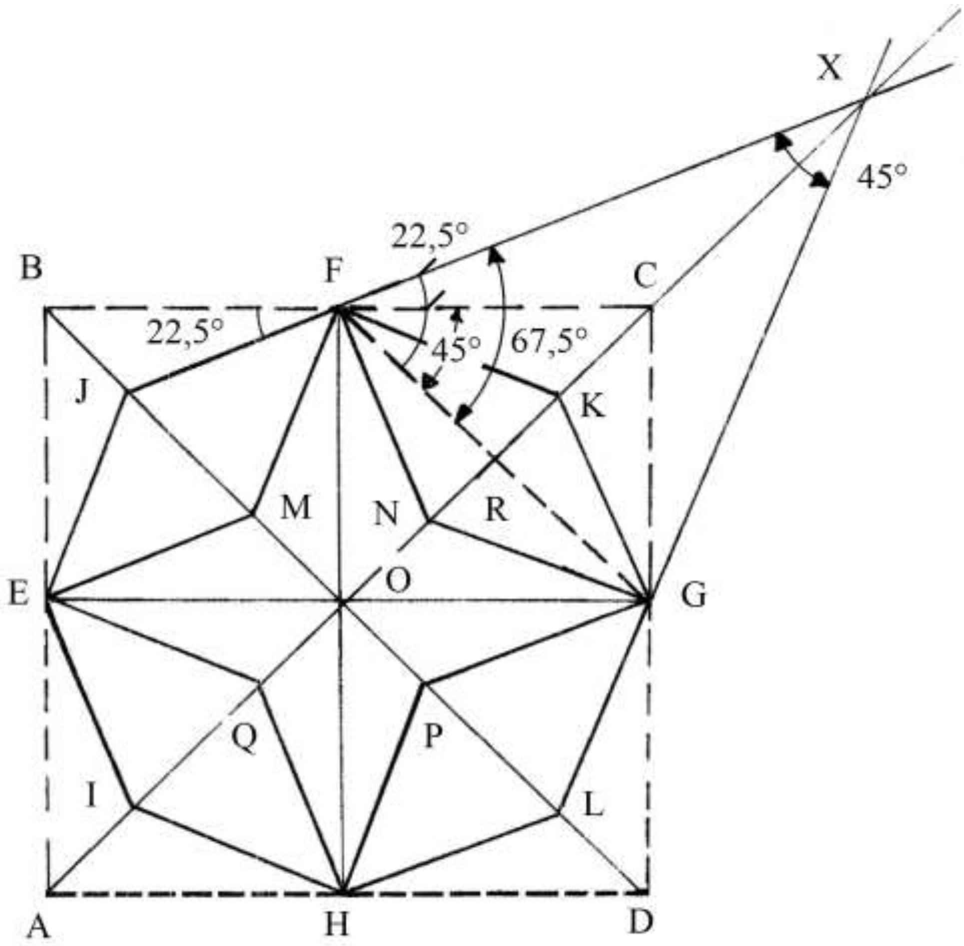


Il raggio della circonferenza esterna, OE, è lungo *c*.
La circonferenza interna ha raggio OX = OY.

- -

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Nel quadrato ABCD è inscritto il solito ottagono regolare EJFKGLHI. Al suo interno è disegnato il poligono stellato EMFNGPHQ, che ha otto lati di uguale lunghezza.



Prolungare verso l'esterno e verso destra la diagonale AC e i lati JF e LG: le tre linee si incontrano nel punto X.

Tracciare la corda FG.

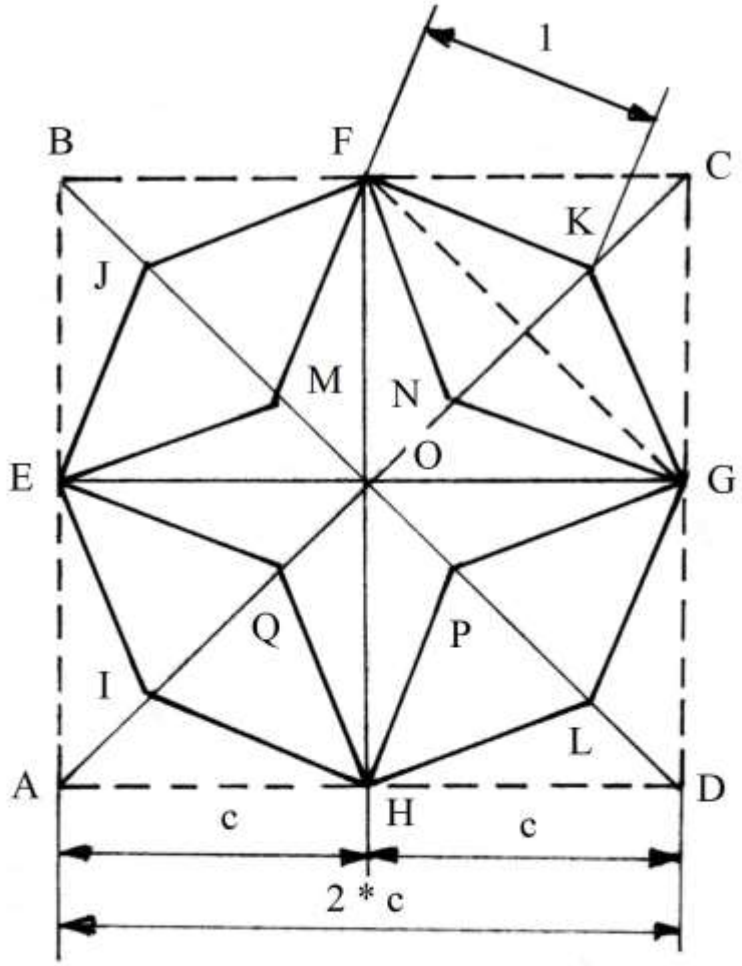
Con le precedenti costruzioni sono state determinate le ampiezze degli angoli presenti in questa figura:

- BFJ = 22,5°;
- XFC = 22,5°;
- CFK = 22,5°;
- KFG = 22,5°;
- XFG = XFC + CFK + KFG = 22,5° * 3 = 67,5°;
- CFG = 45°.

L'angolo XGF è simmetrico rispetto a quello XFG e anch'esso è ampio 67,5°. Ne consegue che l'angolo FXG è ampio 45°.

Il triangolo FXG è isoscele ed è un *triangolo di Cordova*.

FK è *convenzionalmente* lungo 1: allora il segmento OG è lungo c e il lato AD è lungo 2*c:



La corda FG è l'ipotenusa dei triangoli rettangoli isosceli FCG e FOG (che hanno uguali dimensioni):

$FG = \sqrt{(OG^2 + OF^2)} = \sqrt{(c^2 + c^2)} = c * \sqrt{2}$.

Riconsideriamo il triangolo isoscele FXG contenuto nella penultima figura che è, lo ricordiamo, un *triangolo di Cordova*.

Il rapporto fra le lunghezze dei lati di un triangolo di Cordova è:

lato obliquo/lato base = FX/FG = c.

Conoscendo la lunghezza del lato di base FG è facile calcolare quella dei lati obliqui FX e GX:

FX : FG = c : 1.

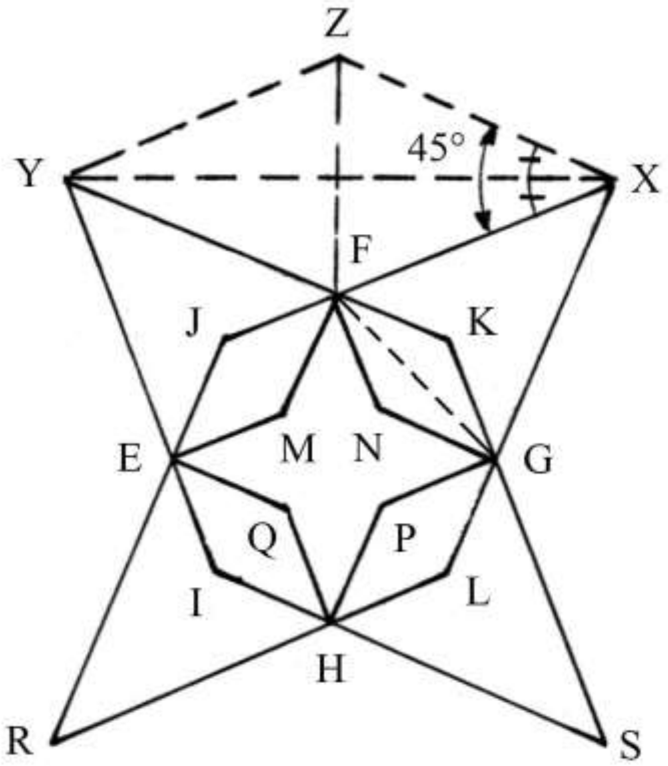
Estraendo da questa proporzione l'incognita FX e sostituendo a c il suo valore, si ottiene:

$FX = (FG * c)/1 = (c * \sqrt{2}) * c = \sqrt{2} * c^2 = \sqrt{2} * \{[\sqrt{(4 + 2 * \sqrt{2})}]/2\}^2 =$

$= [\sqrt{2} * (4 + 2 * \sqrt{2})]/4 = (4 * \sqrt{2} + 4=/4 = (\sqrt{2} + 1) = S_a$.

Riappare la relazione fra la *costante di Cordova*, c, e la *sezione argentea*, S_a.

La precedente costruzione è estesa fino a tracciare le linee occorrenti per fissare gli altri tre vertici – R, S e Y – come quello indicato con X:

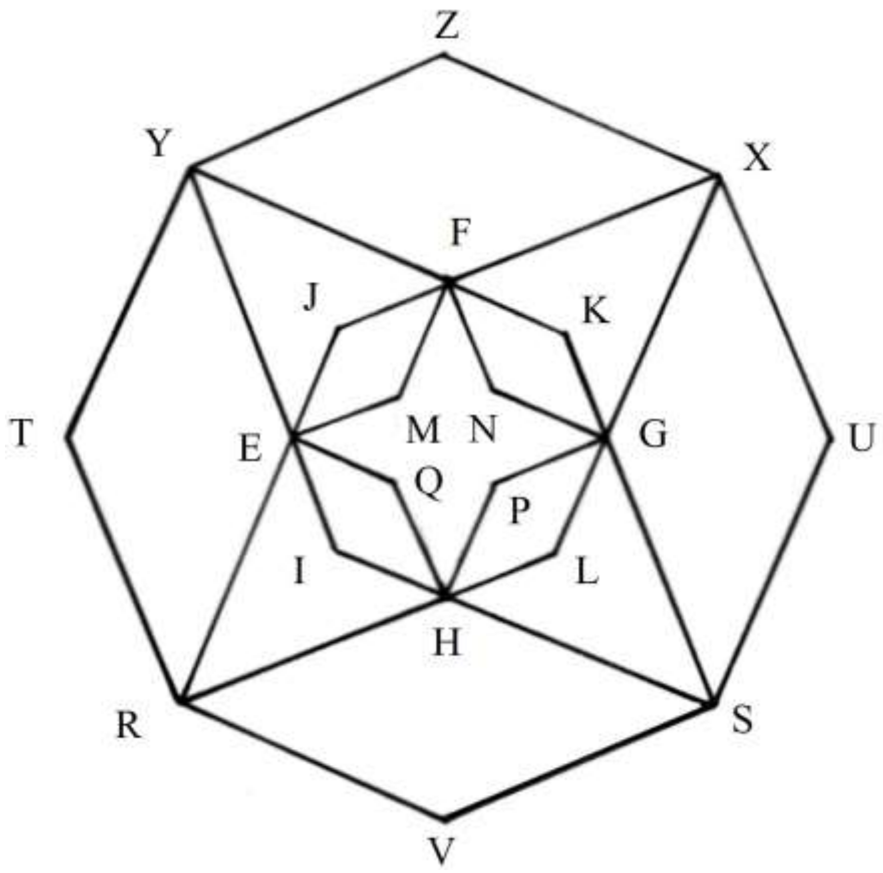


I segmenti YZ e YF hanno la stessa lunghezza di quelli FX e ZX: i triangoli isosceli YZF e ZFX sono triangoli di Cordova e hanno le stesse dimensioni di quello FXG.

Il quadrilatero YZXF è formato da due triangoli di Cordova ed è un *rombo*, con gli angoli interni ampi:

- ZYF = ZXF = 45°;
- YZX = YFX = 135°.

La figura che segue completa la precedente:

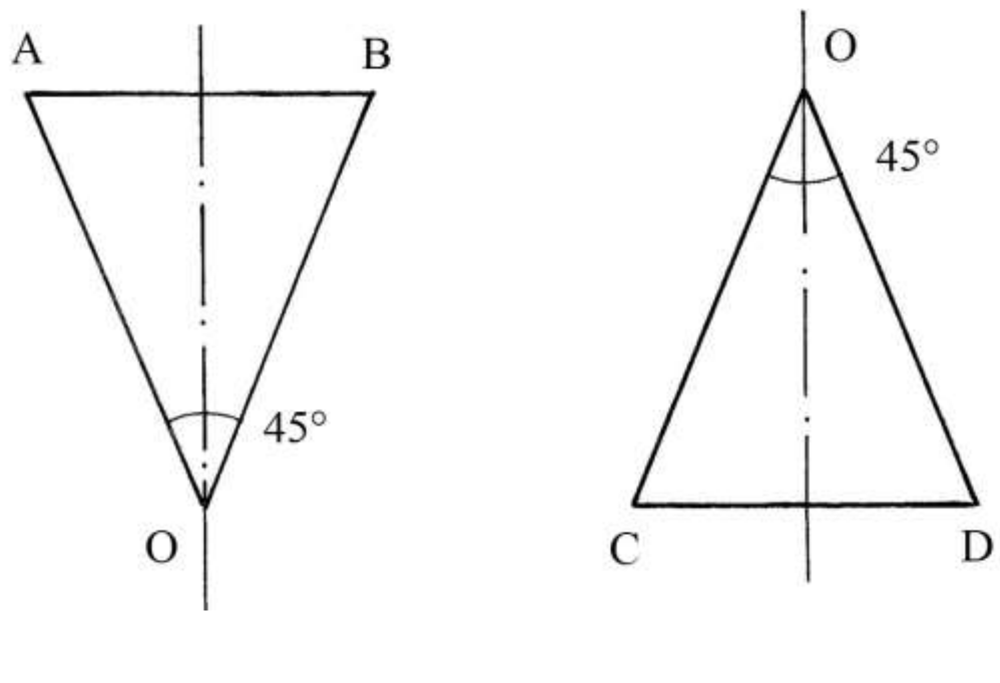


Trapezi di Cordova

I triangoli OAB e COD sono isosceli, hanno uguali dimensioni e gli angoli corrispondenti della stessa ampiezza: sono entrambi *triangoli di Cordova*.

Le lunghezze dei lati sono nella proporzione di Cordova, c:

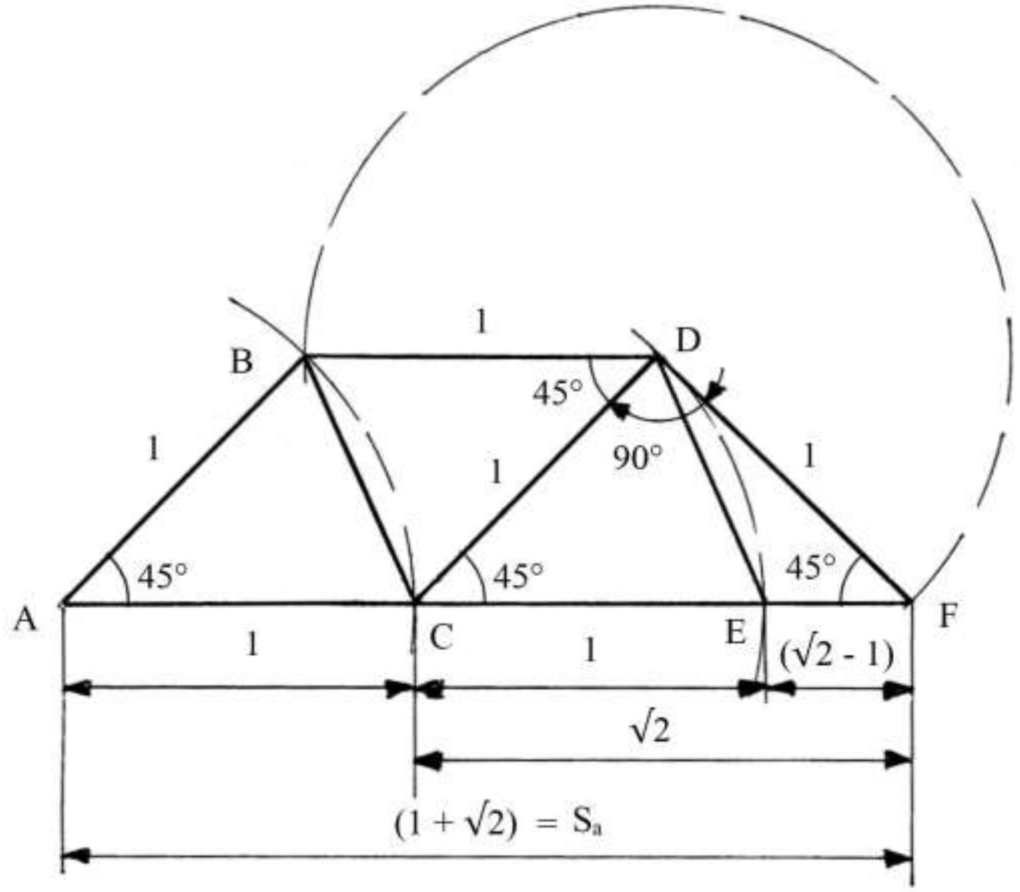
OA : AB = c : 1.



Se convenzionalmente attribuiamo ai lati obliqui OA e OB la lunghezza 1 e sostituiamo questo valore nella precedente proporzione, risulta che il lato AB è lungo:

AB = (OA * 1)/c = (1 * 1)/c = 1/c.

La figura che segue mostra un trapezio formato da tre triangoli di Cordova uniti, ABC, CBD e CDE, di uguali dimensioni:



Fare centro nel punto D e con raggio DB (= 1) tracciare un arco da B fino a intersecare il prolungamento di AE nel punto F.

Il triangolo CDF è isoscele perché i lati CD e DF hanno uguale lunghezza (= 1). Gli angoli DCF e DFC hanno la stessa ampiezza, pari a 45°: di conseguenza l'angolo CDF è retto.

I lati del trapezio ABDF hanno le seguenti lunghezze:

AB = AC = BD = CD = CE = DF = 1 e
BC = DE = 1/c.

Dato che i lati AB e DF hanno la stessa lunghezza convenzionale (= 1), il trapezio ABDF è *isoscele*.

Il segmento CF è l'ipotenusa del triangolo rettangolo isoscele CDF e la sua lunghezza convenzionale è:

$CF = \sqrt{}(CD^2 + DF^2) = \sqrt{}(1^2 + 1^2) = \sqrt{}2.$

Il segmento EF è lungo:

$EF = CF – CE = \sqrt{}2 – 1 = (\sqrt{}2 – 1) = 1/S_a.$

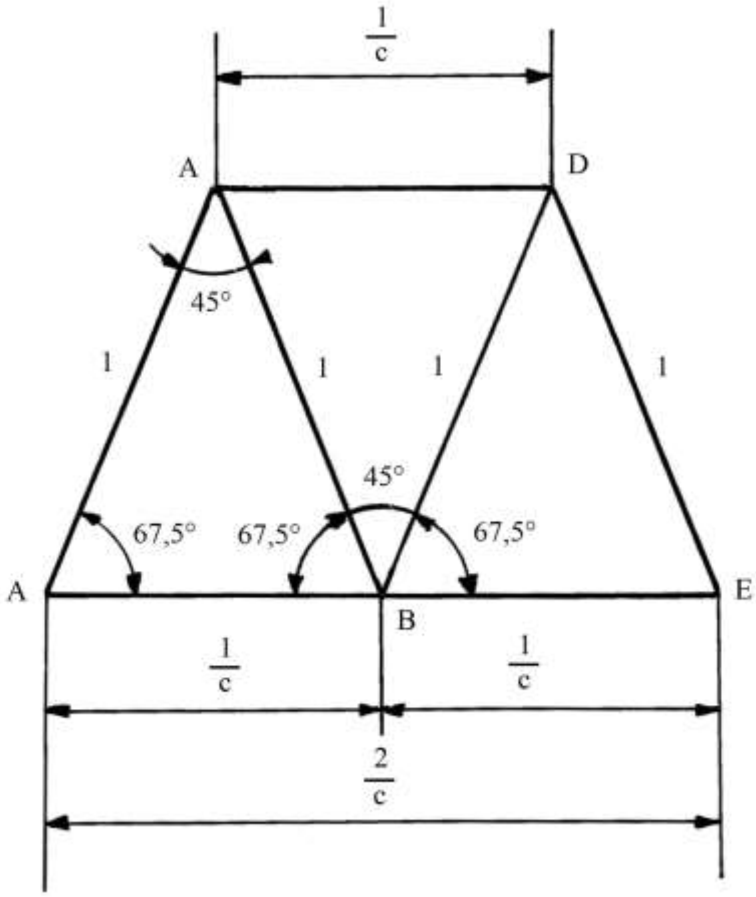
La base maggiore AF è lunga:

$$AF = AC + CF = 1 + \sqrt{2}.$$

Questo valore è quello della *sezione argentea* $S_a = (1 + \sqrt{2})$: di nuovo appare una relazione fra la costante di Cordova e la sezione argentea.

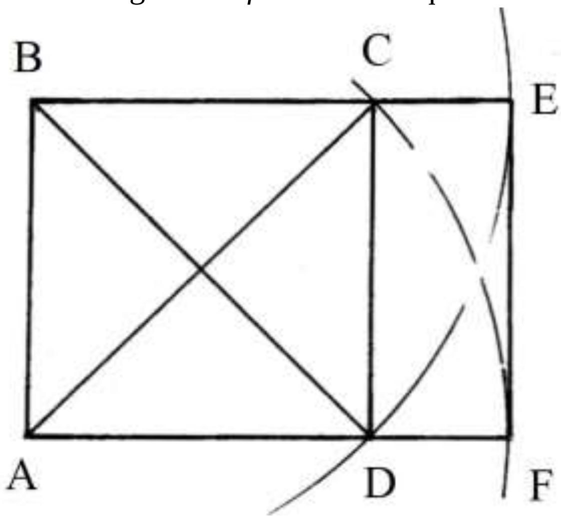
Unendo *tre* triangoli di Cordova di uguali dimensioni lungo i loro lati più lunghi si genera un trapezio isoscele. Le basi AD e CE hanno lunghezze che stanno in proporzione (1 : 2):

$$AD : CE = 1/c : 2/c = 1 : 2.$$



%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Riprendiamo la costruzione di un generico *formato A*. Il quadrato ABCD ha lato lungo 1:

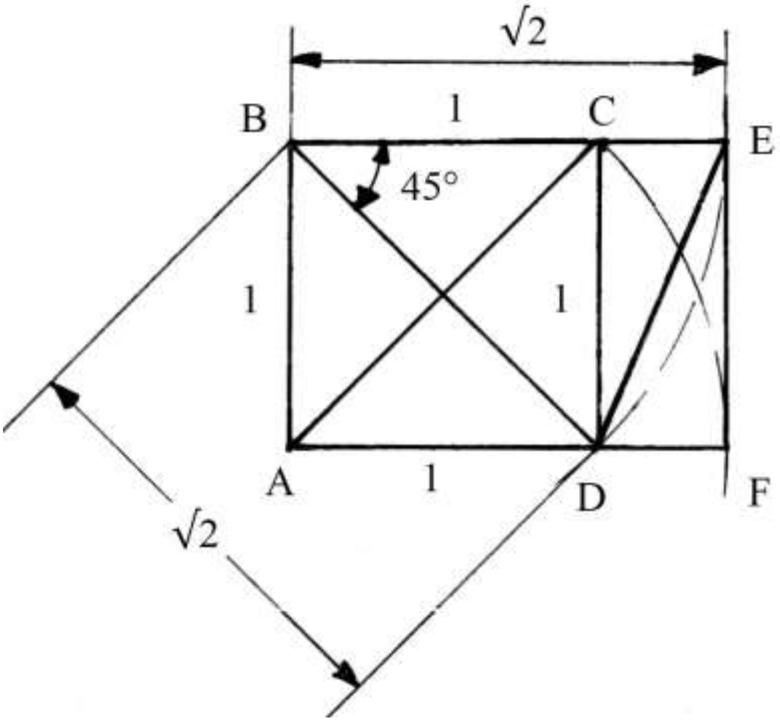


Prolungare verso destra i lati AD e BC.

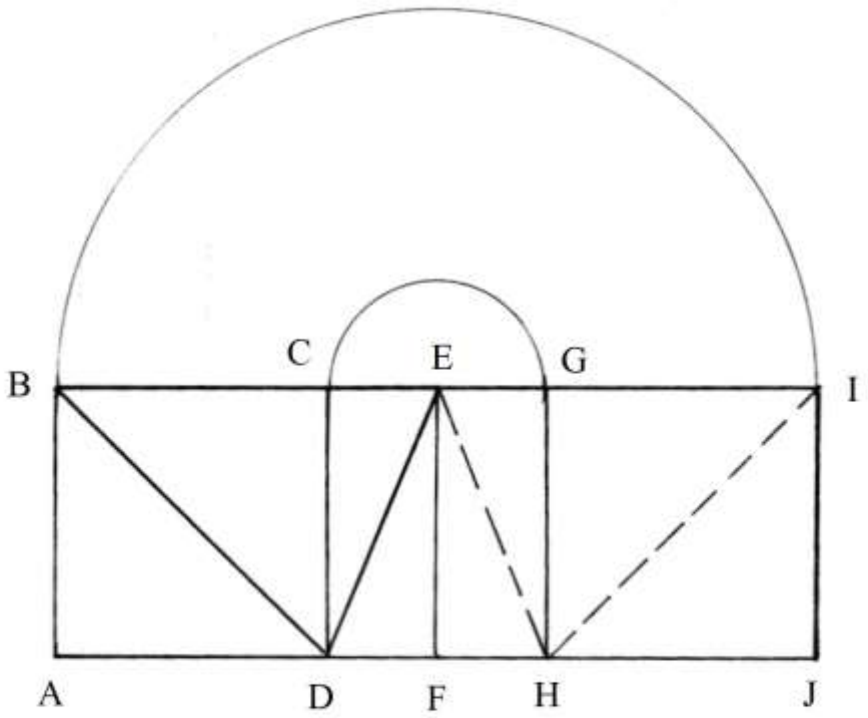
Disegnare le diagonali AC e BD. Fare centro nei punti A e B con raggio AC e tracciare due archi per stabilire i punti E e F.

Le diagonali AC e BD e i lati AF e BE sono lunghi $\sqrt{2}$.

Il triangolo BED è isoscele perché i suoi lati BE e BD hanno uguale lunghezza (pari a $\sqrt{2}$) e l'angolo EBD ha ampiezza 45°: è un *triangolo di Cordova*.



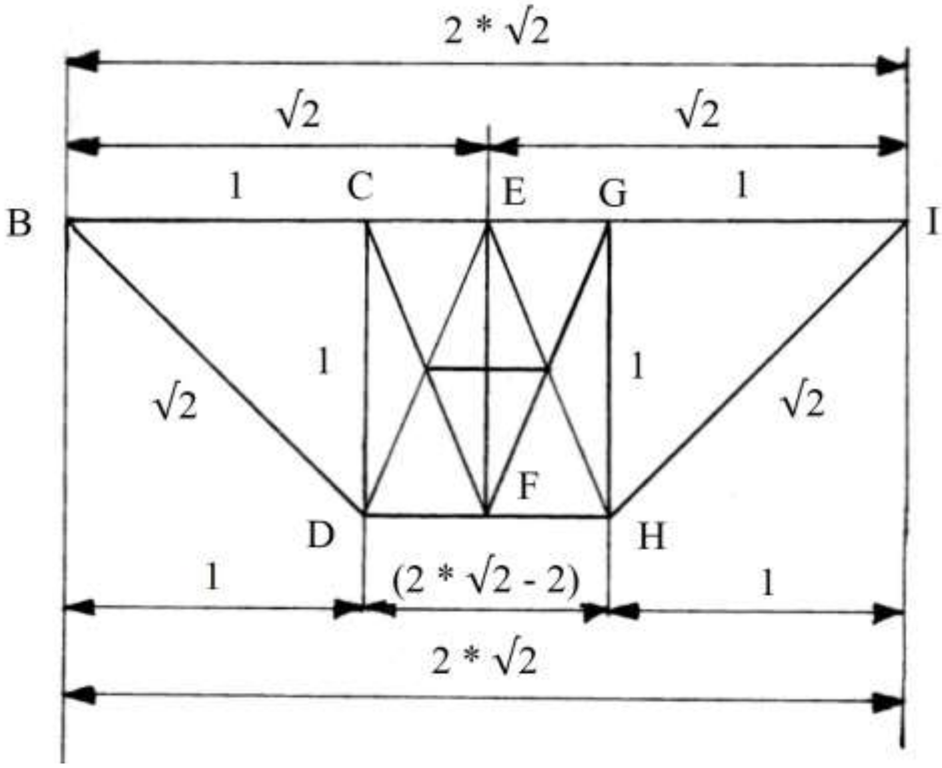
Prolungare verso destra i lati AF e BE. Fare centro nel punto E e con raggi EC e EB disegnare due semicirconferenze: è fissato il punto I. Da questo ultimo abbassare la perpendicolare al prolungamento di AF fino a stabilire il punto J:



I rettangoli ABEF e FEIJ sono simmetrici rispetto al segmento EF.

Dall'ultima figura estraiamo il trapezio DBIH.

Esso è *isoscele* perché le due basi (BI e DH) sono parallele e i due lati obliqui BD e HI hanno uguale lunghezza, pari a $\sqrt{2}$.



La base minore DH ha la stessa lunghezza di CG e cioè:

$DH = CG = BI – BC – GI = 2*\sqrt{2} – 1 – 1 = 2*\sqrt{2} – 2 = 2*(\sqrt{2} – 1) = \sqrt{2}*(2 - \sqrt{2})$.

Come già spiegato in precedenza, l'espressione $(2 – \sqrt{2})$ è il valore di $(1/c^2)$ per cui:

$DH = \sqrt{2} * (2 - \sqrt{2}) = \sqrt{2}/c^2$.

$DH = \sqrt{2} * (2 - \sqrt{2}) = 2 * (\sqrt{2} – 1)$.

Ma:

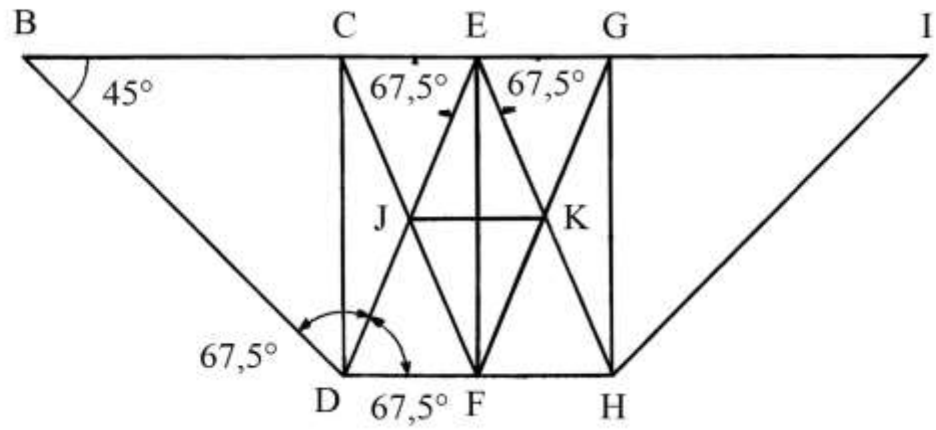
$(\sqrt{2} – 1) = 1/S_a$, quindi:
$DH = 2/S_a = (\sqrt{2})/c^2$.

Il rapporto fra la lunghezza del lato obliquo (BD) e quella della base minore (DH) è:
$BD/DH = (\sqrt{2})/[(2 * \sqrt{2}) – 2)] = (4 + 2 * \sqrt{2})/4 = (2 + \sqrt{2})/2 = c^2$.

Il rapporto fra le lunghezze delle due basi (maggiore e minore) del trapezio isoscele BIHD è:
$BI/DH = (2 * \sqrt{2})/[(2 * \sqrt{2}) – 2] = (\sqrt{2})/(\sqrt{2} – 1) = 2 + \sqrt{2} = 2 * c^2$.

Le diagonali dei rettangoli DCEF e FEGH si incontrano nei punti J e K e il segmento JK li collega.

Come visto in precedenza, i triangoli isosceli BED e EIH sono *triangoli di Cordova*:



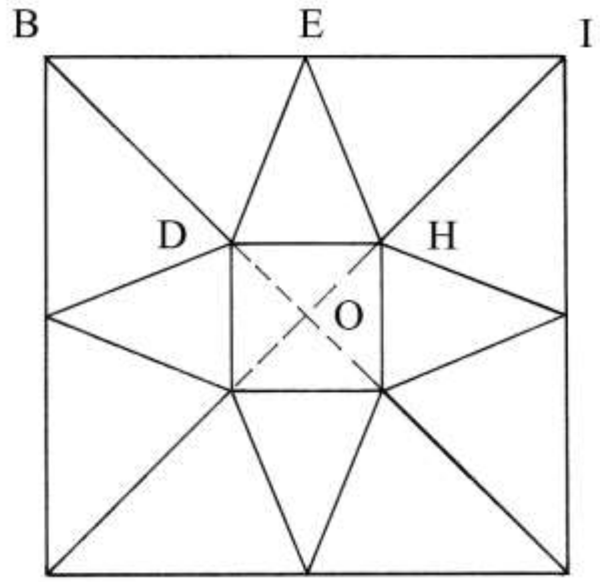
L'angolo CBD è ampio 45° e gli angoli BED e BDE hanno uguale ampiezza, 67,5°.

All'interno del rettangolo DCGH sono creati ben *otto* triangoli di Cordova:

- DEH;
- CFG;
- DJF, FJK, FKH;
- CEJ, JEK, EGK.

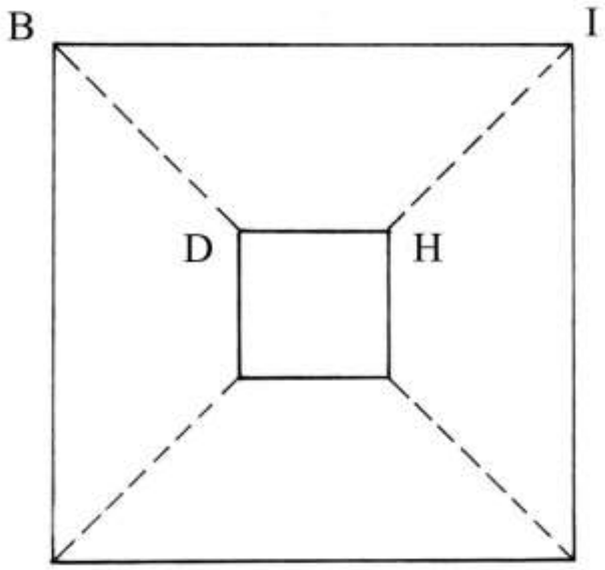
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Quattro copie del trapezio isoscele DBIH sono unite intorno a un quadrato centrale costruito sul lato DH e cioè sulla base minore del trapezio; l'unione dei quattro trapezi origina un quadrato di lato BI:

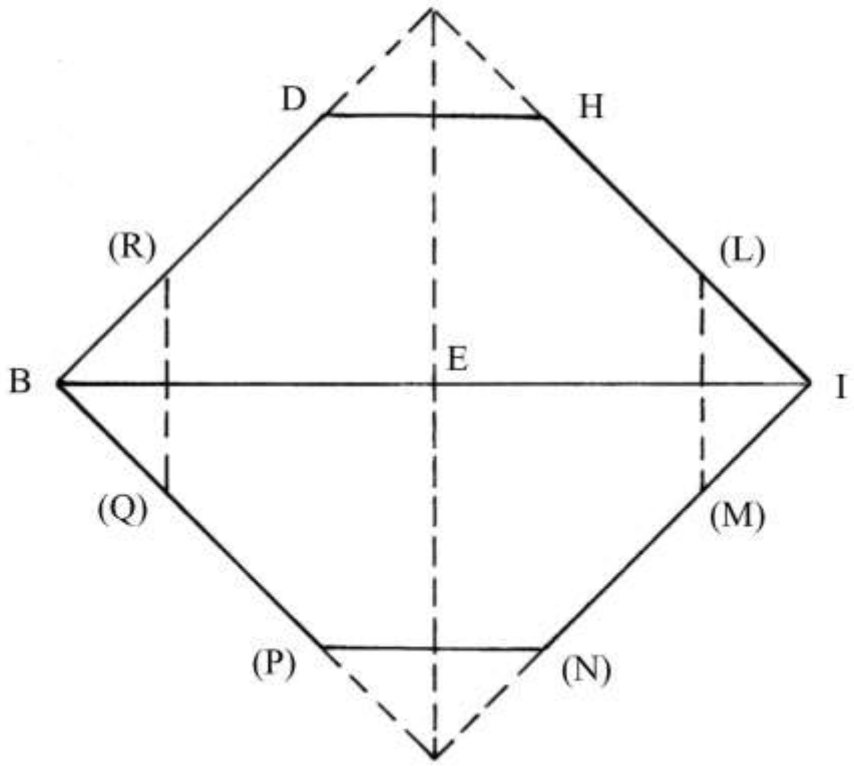


I prolungamenti dei lati obliqui dei quattro trapezi convergono nel centro dei due quadrati concentrici, O.

I quattro trapezi sono in grado di coprire una superficie piana con l'aggiunta di un quadrato di lato DH per coprire il vuoto centrale:

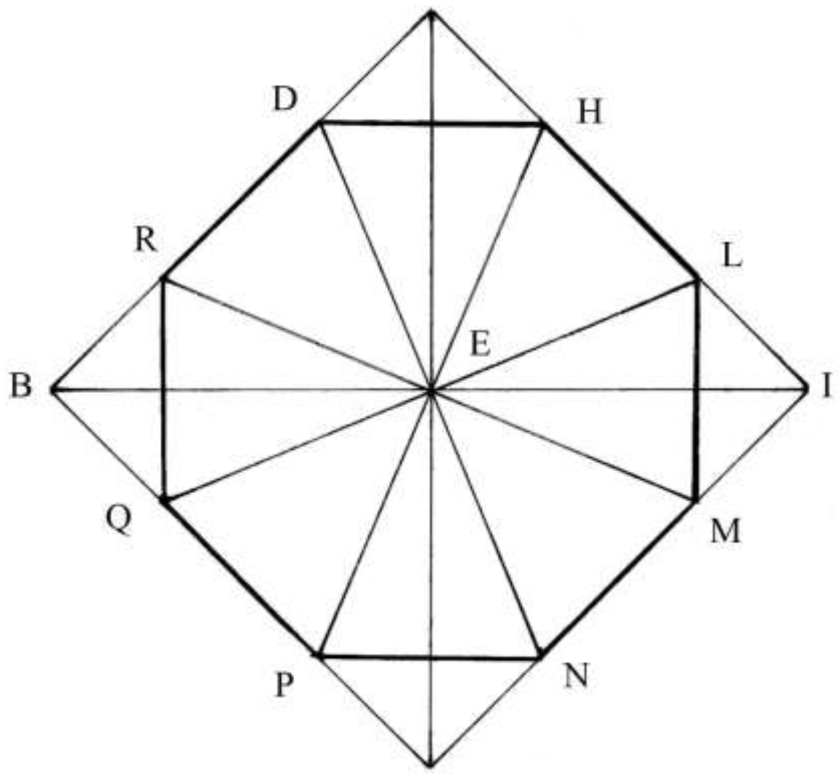


Nella figura che segue i quattro trapezi isosceli di dimensioni uguali a quello DHIB sono uniti lungo le basi maggiori:

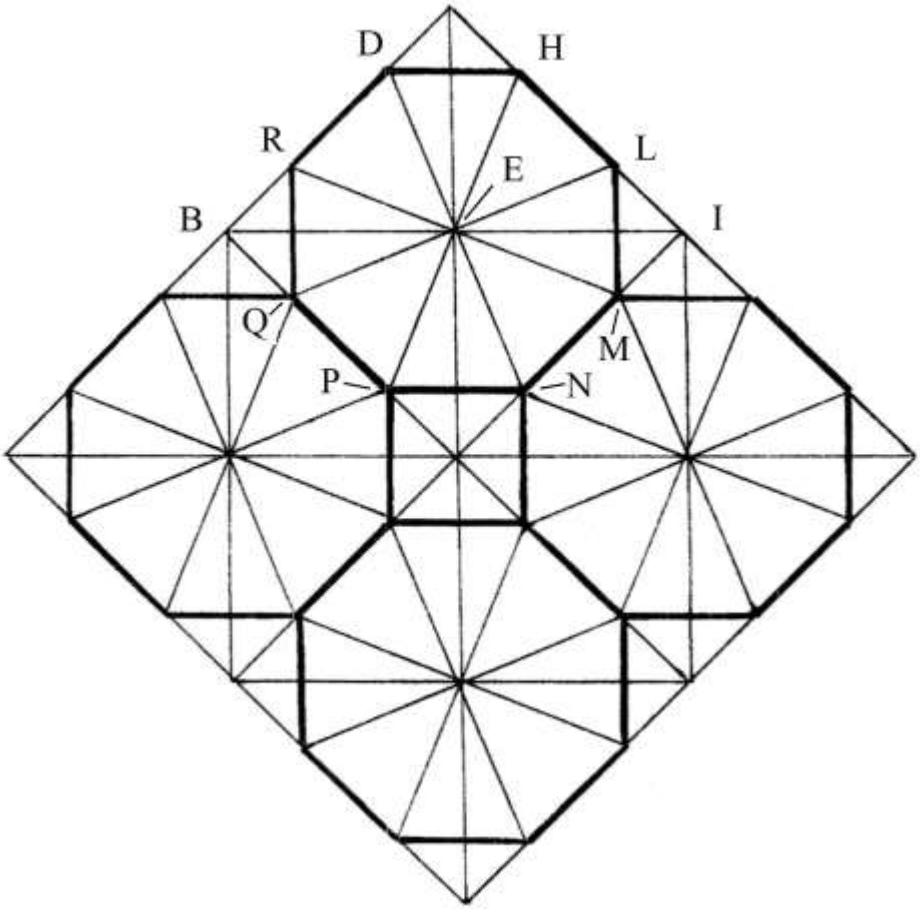


Due trapezi hanno la base maggiore comune disposta orizzontalmente (BI) e altri due sono disegnati con la base maggiore comune perpendicolare a BI e con i lati in parte tratteggiati.

Dall’ultima figura emerge l’ottagono regolare DHLIMNPQR:

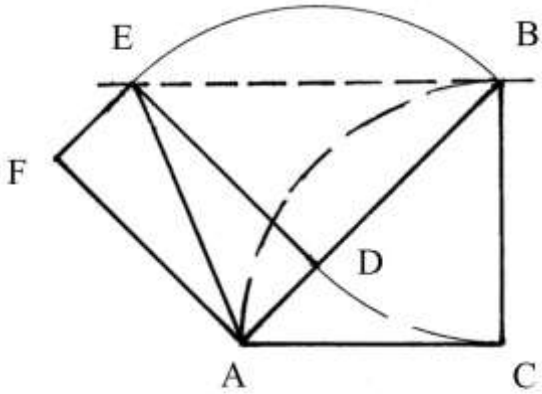


Nella figura che segue sono disegnati *quattro* ottagoni di uguali dimensioni, assemblati intorno a un quadrato centrale costruito sullo spigolo PN:



Una tassellazione pentagonale

ABC è un triangolo rettangolo isoscele. I suoi cateti sono *convenzionalmente* lunghi quanto la costante di Cordova *c*: AC = CB = c.



L'ipotenusa AB è lunga:

$AB^2 = \sqrt{(AC^2 + CB^2)} = \sqrt{(c^2 + c^2)} = c * \sqrt{2}$.

Fare centro nel punto B e con raggio BC tracciare un arco da C fino a incontrare l'ipotenusa AB in un punto, D.

Dai punti A e D elevare le perpendicolari a AB.

Fare centro nel punto D e con raggio DB disegnare un arco da B fino a stabilire il punto E.

Il segmento EB è parallelo al cateto AC.

Dal punto E condurre la parallela a AB fino a fissare il punto F.

Tracciare la diagonale AE.

Il segmento AD è lungo:

$AD = AB – DB = c * \sqrt{2} – c = c * (\sqrt{2} – 1)$.

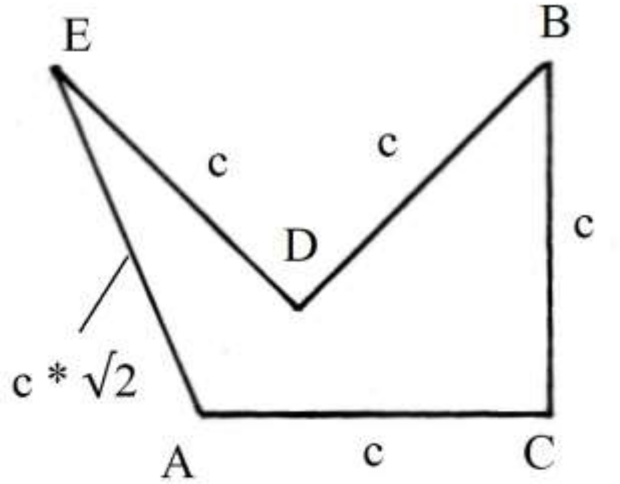
Ma l'espressione $(\sqrt{2} – 1)$ può essere opportunamente trasformata come segue:

$(\sqrt{2} – 1) = [(\sqrt{2} – 1) * (\sqrt{2} + 1)]/(\sqrt{2} + 1) = (2 + \sqrt{2} - \sqrt{2} – 1)/(\sqrt{2} + 1) =$
$= 1/(\sqrt{2} + 1) = 1/S_a$.

Quindi: $AD = c/S_a$.

Il segmento AD lega fra loro la costante **c** e la sezione argentea S_a.

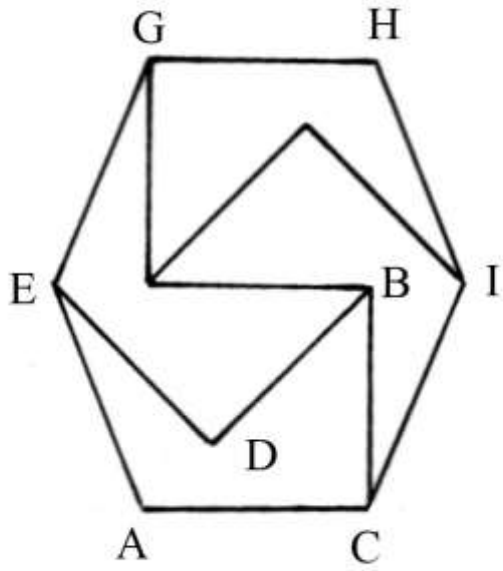
Il poligono che emerge dalla precedente costruzione è il *pentagono non regolare* AEDBC:



Per costruzione (rivedere la penultima figura), si ha: $AE = AB = c * \sqrt{2}$.

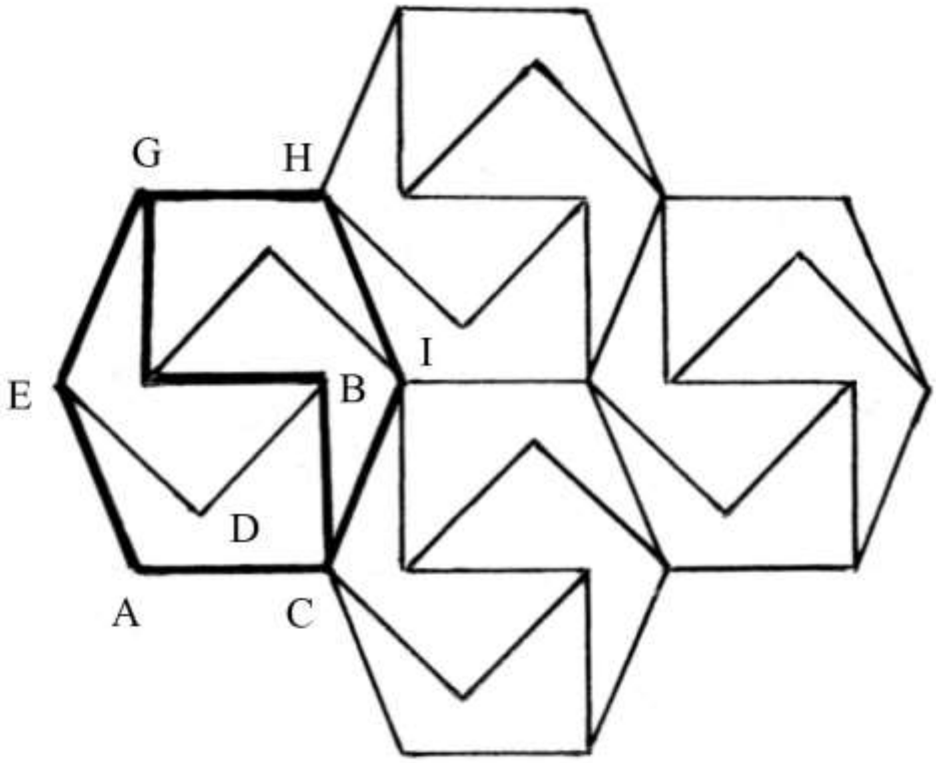
Esso ha *quattro* lati lunghi **c** e il quinto (AE) lungo: $c * \sqrt{2}$.

Questo poligono è in grado di coprire una superficie piana come spiega la figura che segue creata dall'unione di *quattro* pentagoni non regolari come quello AEDBC:



Il nuovo poligono AEGHIC è un esagono non regolare: i suoi due lati orizzontali, AC e GH, sono lunghi c e i quattro lati obliqui lunghi c * $\sqrt{2}$.

Quattro esagoni non regolari come quello appena mostrato sono uniti per formare una figura più complessa come mostra lo schema che segue:

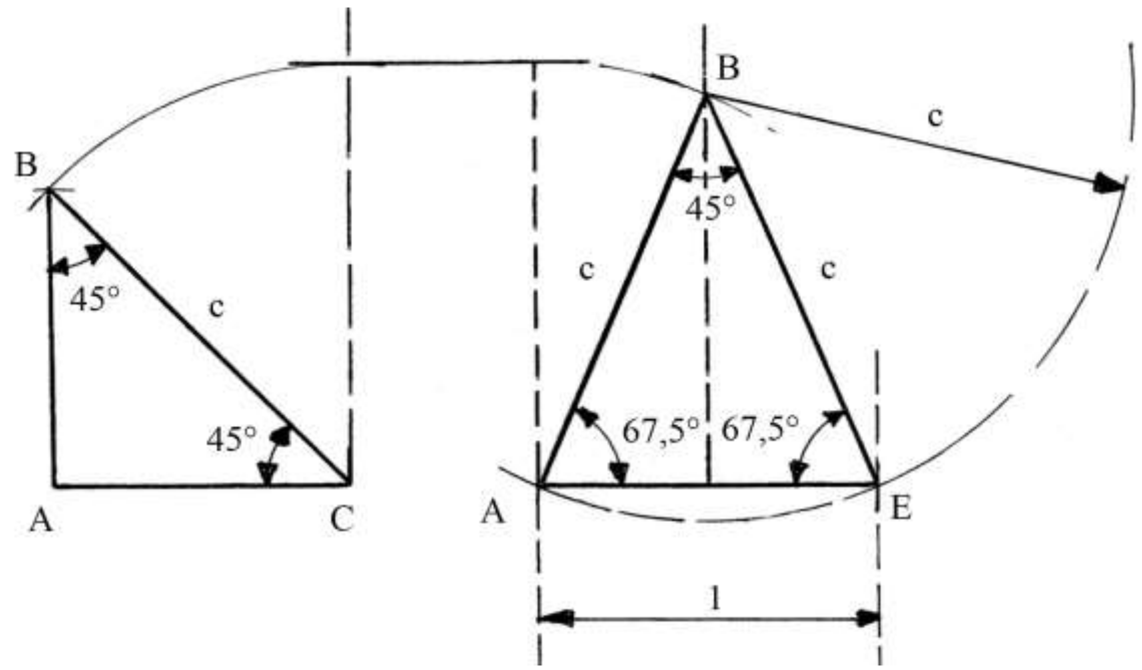


PENTAGONI DI CORDOVA

ABC è un triangolo rettangolo isoscele con l'ipotenusa BC lunga in proporzione alla *costante di Cordova*, c.

I due cateti AB e AC hanno lunghezza uguale pari a:

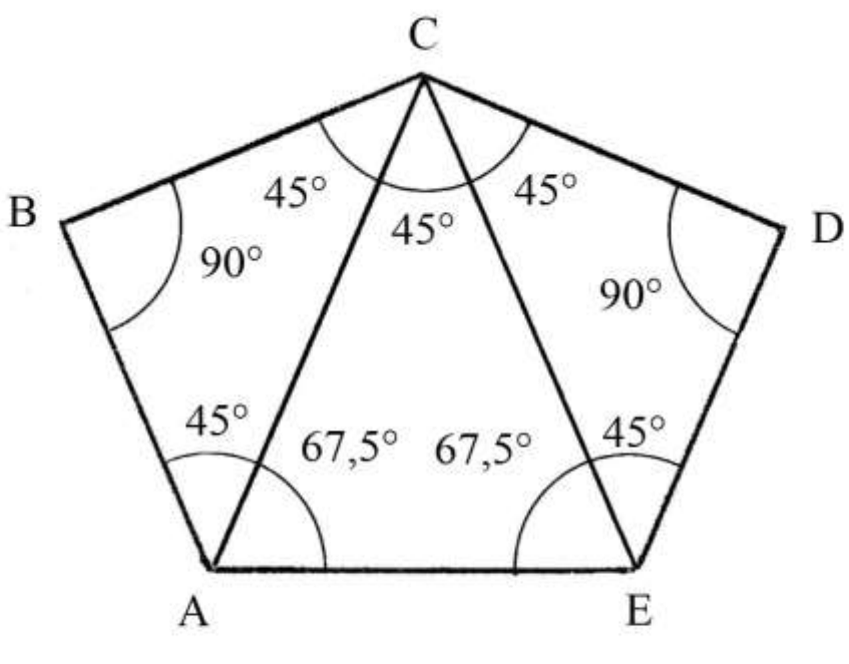
$$AB = AC = BC/\sqrt{2} = c/\sqrt{2} = c * (\sqrt{2})/2.$$



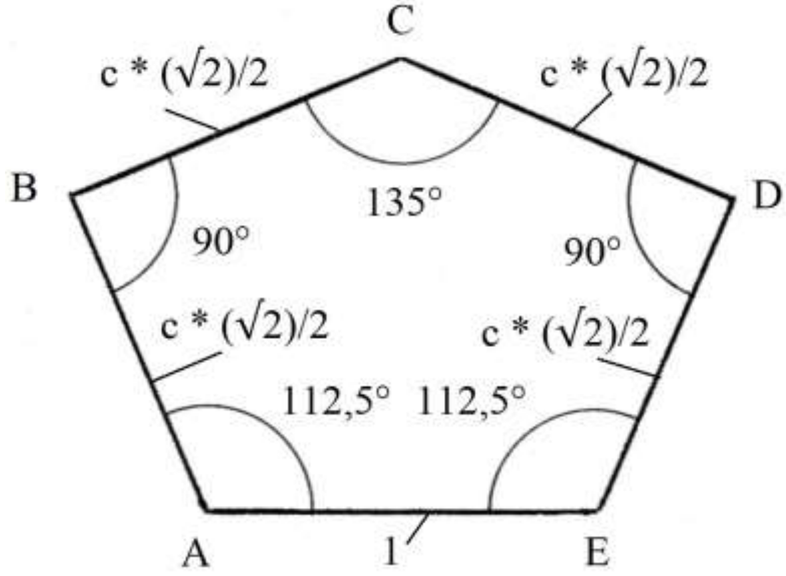
Costruire il triangolo isoscele ABE (a destra nella figura) con la base AE *convenzionalmente* lunga 1. Come è evidente dalla figura, i lati del triangolo isoscele, AB e BE, per costruzione, hanno lunghezza uguale a c, come quella dell'ipotenusa BC della figura a sinistra.

L'angolo nel vertice B del triangolo isoscele è ampio 45° e gli angoli alla base (in A e in E) sono di uguale ampiezza, pari a 67,5°.

Unire il triangolo ABE a due copie del triangolo ABC: ABC e CDE:



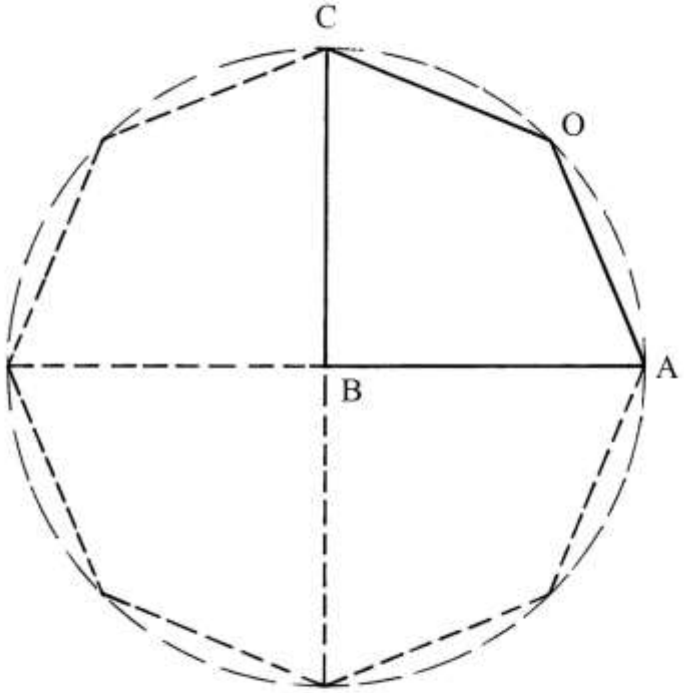
Eliminando le diagonali AC e CE si ottiene il seguente poligono:



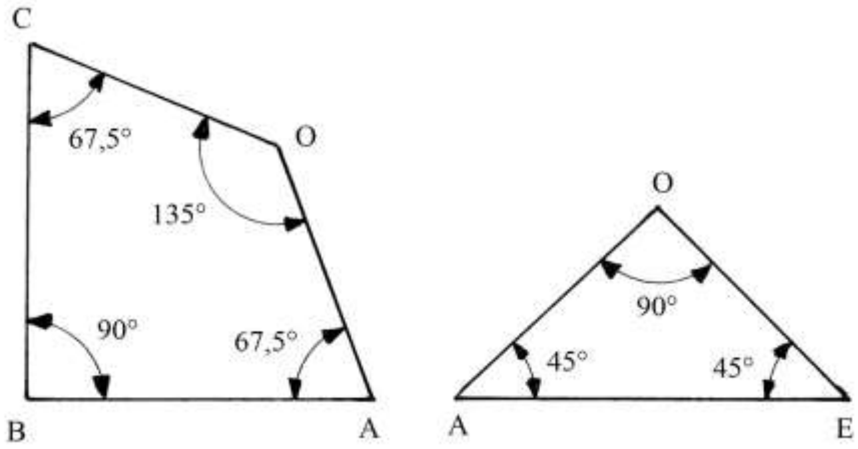
Il pentagono ABCDE *non è regolare*, perché non è equiangolo né è equilatero. I quattro lati obliqui sono convenzionalmente lunghi 'c * (√2)/2' e il lato orizzontale AE è lungo '1'.

%%%%%%%%%%%%%%%%%

Lo schema che segue presenta un ottagono regolare inscritto:

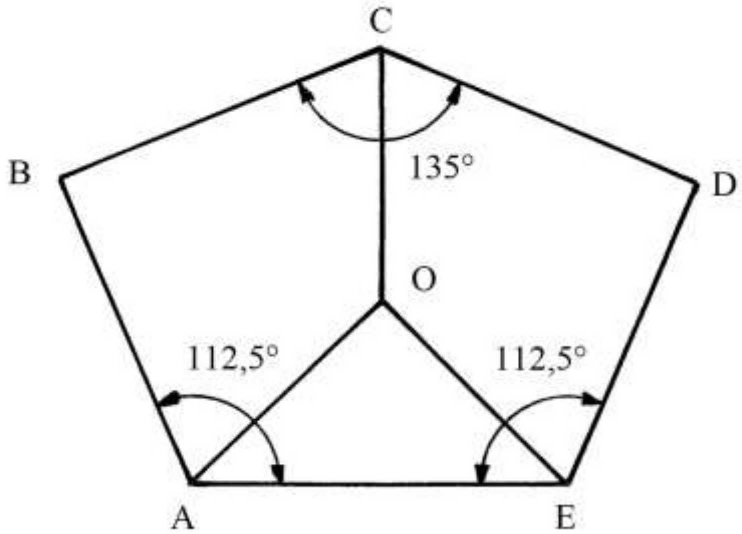


Il quadrilatero ABCO è un *quarto* dell'*ottagono* regolare:

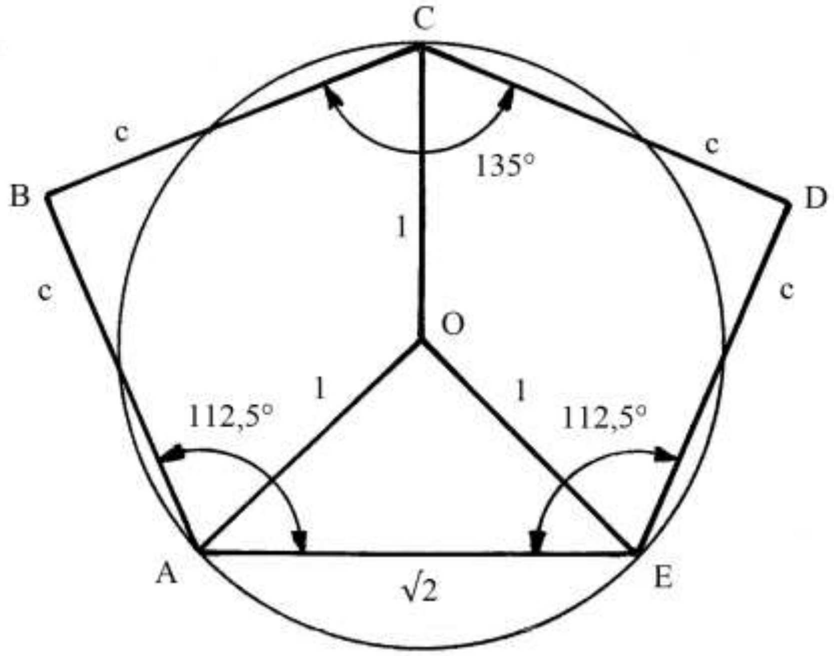


AOE è un triangolo rettangolo isoscele.

Il pentagono *non regolare* presentato nella figura che segue è formato dall'unione di un triangolo rettangolo uguale a quello AOE e da due copie del quadrilatero ABCO:



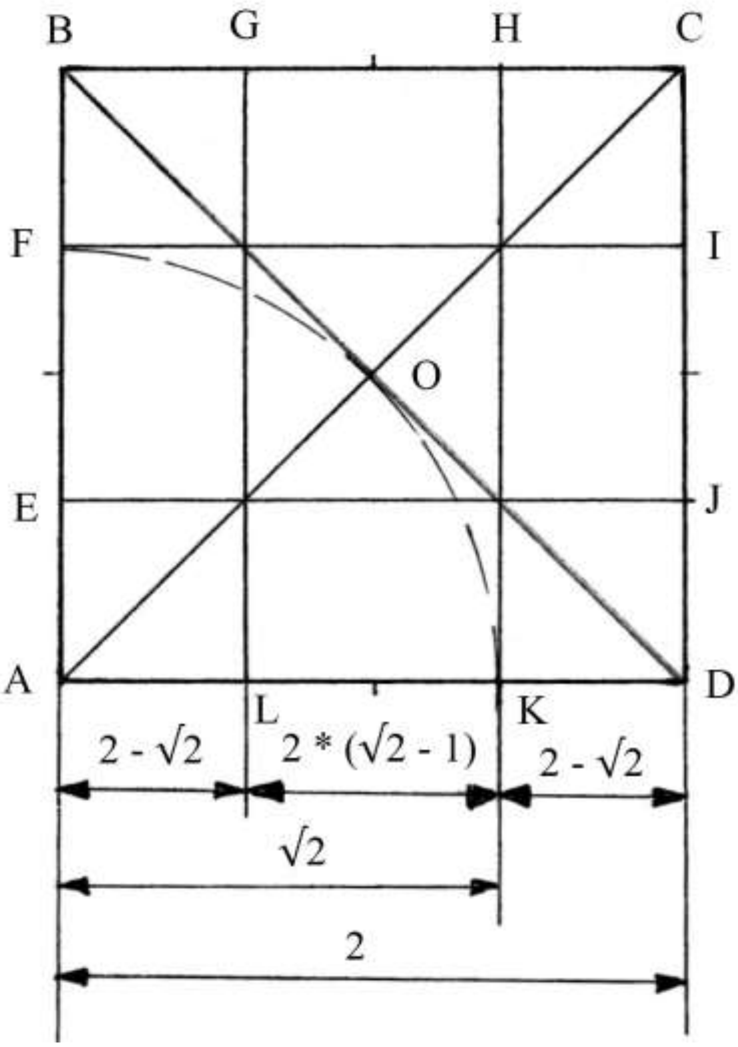
Fare centro nel punto O e, con raggio OA = OE = OC = '1', tracciare una circonferenza e i suoi raggi OA, OC e OE:



Il pentagono ABCDE ha quattro lati *convenzionalmente* lunghi quanto la costante di Cordova c e la base AE lunga $\sqrt{2}$.

<u>Poligoni inscritti in un quadrato</u>

Il quadrato ABCD la lati *convenzionalmente* lunghi 2.



Le diagonali AC e BD sono lunghe:

$AC = BD = \sqrt{(AD^2 + DC^2)} = \sqrt{(2^2 + 2^2)} = \sqrt{8} = 2 * \sqrt{2}$.

La semidiagonale AO è lunga:

$AO = AC/2 = (2 * \sqrt{2})/2 = \sqrt{2}$.

Facendo centro nei punti A, B, C e D con raggio AO sono tracciati gli archi che fissano i punti E, F, G, H, I, J, K e L.

Il segmento KD è lungo:

$KD = AD – AK = AD – AO = (2 – \sqrt{2})$.

Anche il segmento AK è lungo $(2 – \sqrt{2})$.

Questa lunghezza è comune a *otto* segmenti:

$AL = KD = AE = FB = BG = HC = CI = JD = (2 – \sqrt{2})$.

Il segmento LK è lungo:

$LK = AD – AL – KD = 2 – (2 – \sqrt{2}) – (2 – \sqrt{2}) = 2 * \sqrt{2} – 2 = 2 * (\sqrt{2} – 1) = 2/S_a$.

Fissiamo $LK = 2 * (\sqrt{2} – 1) = a$.

Nella seguente proporzione assegniamo il valore x alla lunghezza di AL:

$LK : AL = 2*(\sqrt{2} – 1) : 2 – \sqrt{2} = a : x$.

Risolvendo la proporzione si ricava:

$$x = [(2 - \sqrt{2}) * a]/[2 * (\sqrt{2} - 1)] = [\sqrt{2} * (\sqrt{2} - 1) * a]/[2 * \sqrt{2} - 1)] =$$
$$= a * (\sqrt{2})/2 = AL = KD = AE.$$

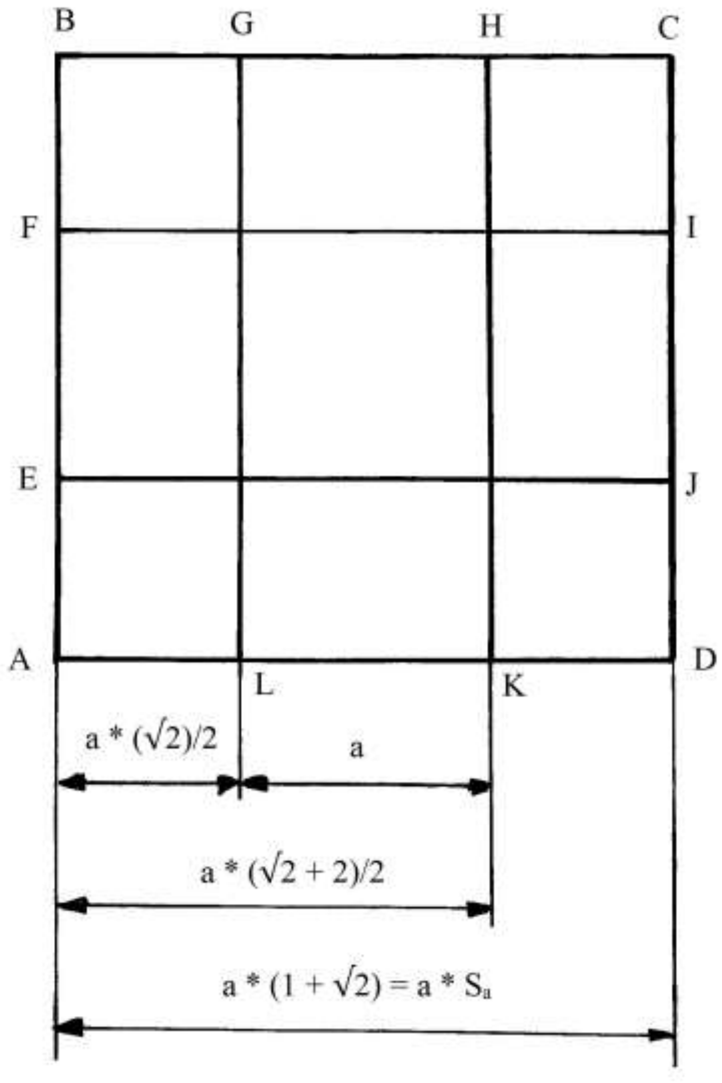
Ne deriva che:

$$AK = AL + LK = a * (\sqrt{2})/2 + a = a * (\sqrt{2} + 2)/2 = a * \sqrt{2} * (\sqrt{2} + 1)/2 =$$
$$= a * \sqrt{2} * S_a/2.$$

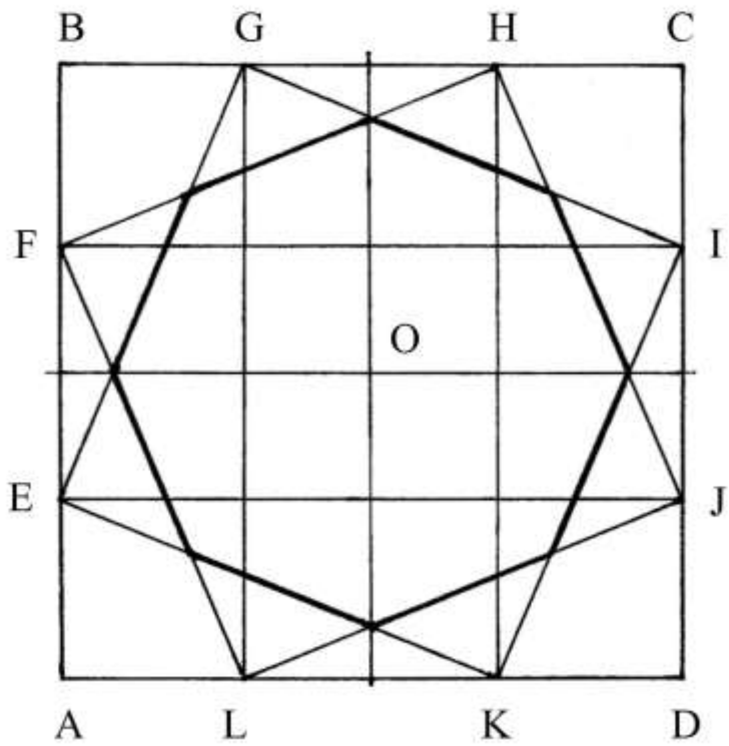
La lunghezza del lato AD del quadrato ABCD è:

$$AD = LK + AL+ KD = a + a * (\sqrt{2})/2 + a * (\sqrt{2})/2 = a * (1 + \sqrt{2}) = a * S_a.$$

La figura che segue riporta le dimensioni appena calcolate:



Riprodurre il precedente quadrato ABCD e tracciarvi le corde FI, EJ, GL e HK. Disegnare i quadrati EGIK e FHJL; essi hanno uguali dimensioni.



Il lato EK è lungo:

$$EK^2 = EA^2 + AK^2 = AL^2 + AK^2 = [(a * \sqrt{2})/2]^2 + [a * (\sqrt{2} + 2)/2]^2 =$$
$$= a^2/2 + a^2 * (2 + 2 * \sqrt{2} + 2 * \sqrt{2} + 4)/4 = a^2 + a^2 * (3 + 2 * \sqrt{2})/2 =$$
$$= a^2 * (2 + \sqrt{2}) = a^2 * (2 * c^2) = 2 * a^2 * c^2.$$

L'area del quadrato EGIK è:

$$\text{Area}_{EGIK} = \text{Area}_{FHJL} = EK^2 = 2 * a^2 * c^2.$$

L'area del quadrato ABCD è:

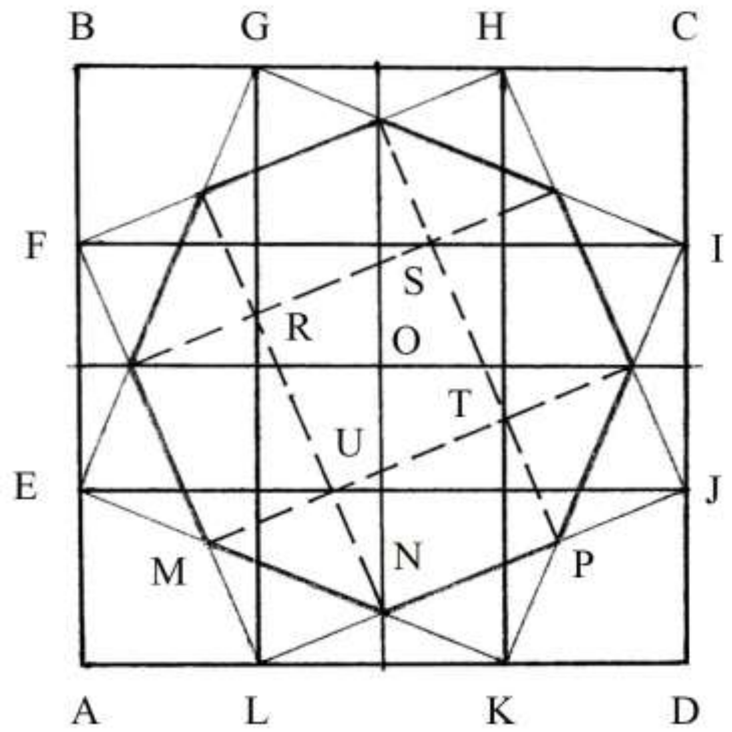
$$\text{Area}_{ABCD} = AD^2 = a^2 * (1 + \sqrt{2})^2 = a^2 * (S_a)^2.$$

Il rapporto fra le aree dei due quadrati è:

$$\text{Area}_{ABCD}/\text{Area}_{EGIK} = [a^2 * (S_a)^2]/(2 * a^2 * c^2) = (S_a)^2/(2 * c^2) = [(S_a)^2/2] * (1/ c^2) =$$
$$= (1 + \sqrt{2})^2/2 * (2 - \sqrt{2}) = (1 + \sqrt{2} + \sqrt{2} + 2) *(2 - \sqrt{2})/2 = (6 + -2 - 4)/2 =$$
$$= (2 + \sqrt{2})/2 = c^2.$$

L'intersezione dei quadrati EGIK e FHJL genera un *ottagono regolare*.

All'interno dell'ottagono disegnare *tratteggiate* le diagonali che formano due *rettangoli argentei*:



I quadrati EGIK e ABCD sono ovviamente simili per cui vale la seguente proporzione:

$$MN : LK = EK : AD.$$

La lunghezza del segmento MN è data da:

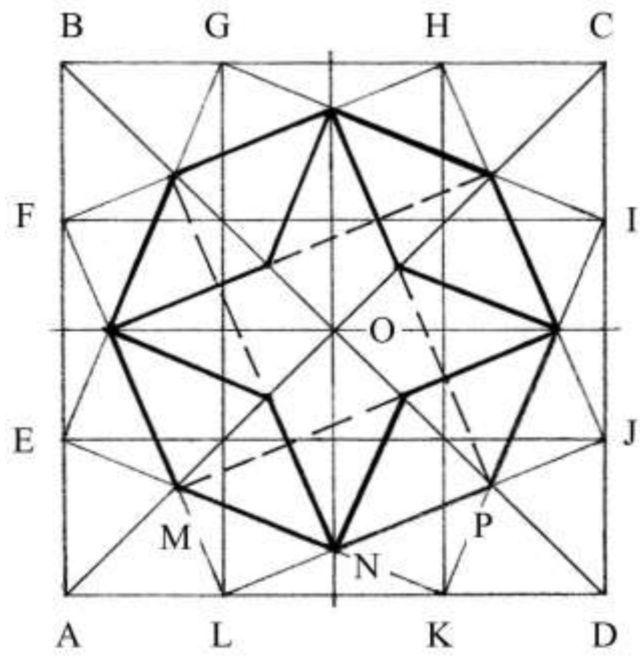
$$MN = (LK * EK)/AD = [a * (a * c * \sqrt{2})]/[a * (1 + \sqrt{2})] = (a * c * \sqrt{2})/(1 + \sqrt{2}) =$$
$$= [a * c * \sqrt{2} * (1 - \sqrt{2})]/[(1 + \sqrt{2}) * (1 - \sqrt{2})] = [a * c * (\sqrt{2} - 2)]/(1 - \sqrt{2} + \sqrt{2} - 2) =$$
$$= a * c * (\sqrt{2} - 2)/(-1) = a * c * (2 - \sqrt{2}) = a * c * 1/c^2 = a/c.$$

Quindi, il lato dell'ottagono, MN = NP, è lungo a/c.

Al centro della precedente figura è presente il quadrato RSTU che ha lati lunghi UT = NP. La sua area è:

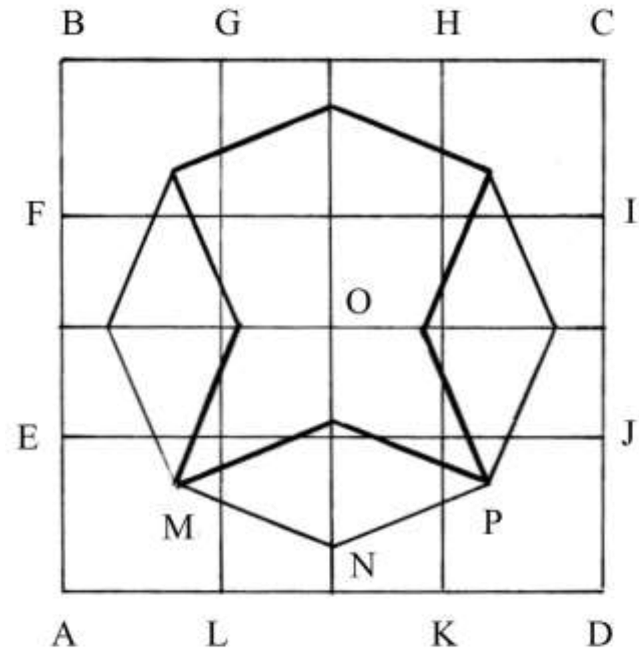
$$Area_{RSTU} = UT^2 = NP^2 = MN^2 = a^2/c^2.$$

Tracciare le diagonali AC e BD:

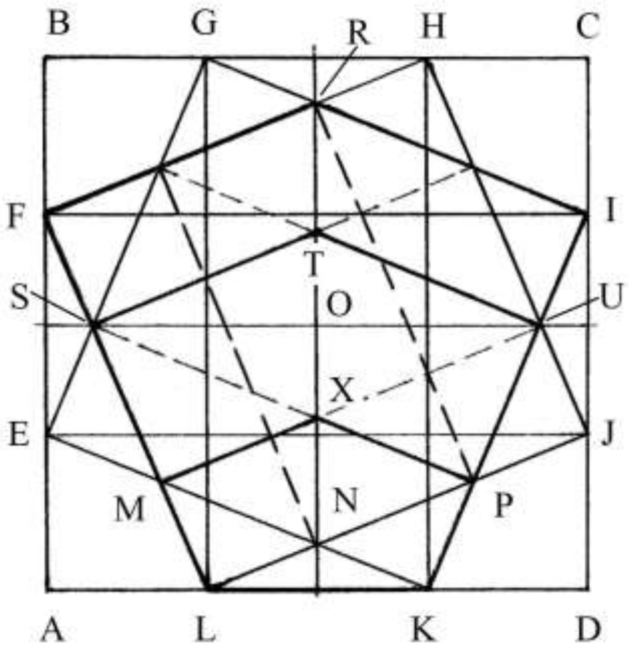


All’interno dell’ottagono regolare inscrivere una stella a quattro punte e con i lati paralleli a quelli dell’ottagono stesso e di uguale lunghezza.

Sempre all’interno del quadrato ABCD tracciare un *ottagono non regolare* ma *equilatero* come quello mostrato nella figura che segue:



Con l’aiuto dei reticolati già disegnati costruire i pentagoni LFRIK, LSTUK e LMXPK:

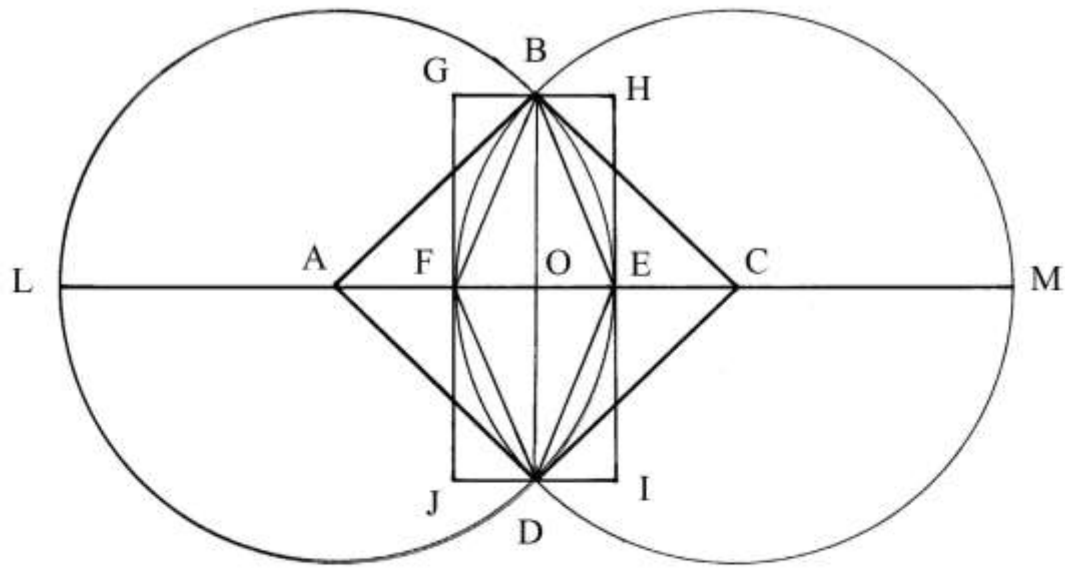


Essi hanno in comune il lato LK che è lungo a.

Le ogive di Cordova

L'argomento è stato affrontato nell'articolo di Cristian Lăzureanu, citato in bibliografia.

Costruire il quadrato ABCD con la diagonale AC orizzontale e quella DB verticale e perpendicolare alla prima:



Prolungare verso sinistra e verso destra la diagonale AC.

Fare centro nei punti A e C e con raggio AB = CB tracciare due circonferenze che si intersecano nei punti B e D.

Se fissiamo la lunghezza convenzionale delle diagonali AC e BD in $\sqrt{2}$, i lati del quadrato ABCD sono lunghi 1.

Il segmento AF è lungo: $AF = AC – FC = \sqrt{2} – 1$.

Anche il segmento EC ha la stessa lunghezza: $EC = AC – AE = \sqrt{2} – 1$.

Il segmento FE è lungo:

$$FE = AC – AF – EC = \sqrt{2} – (\sqrt{2} – 1) – (\sqrt{2} – 1) = \sqrt{2} – \sqrt{2} + 1 – \sqrt{2} + 1 =$$
$$= 2 – \sqrt{2} = \sqrt{2} * (\sqrt{2} – 1).$$

L'espressione $(\sqrt{2} – 1)$ è l'*inverso* della *sezione argentea* $1/S_a = (\sqrt{2} – 1)$, per cui:

$$FE = \sqrt{2} * (\sqrt{2} – 1) = \sqrt{2} * 1/S_a = \sqrt{2}/(\sqrt{2} + 1).$$

Per i punti B, E, D e F disegnare linee parallele alle diagonali del quadrato ABCD fino a ottenere il rettangolo GHIJ; tracciare i segmenti BF, BE, DF e DE.

Questo rettangolo ha lati lunghi:

$$GH = JI = FE = \sqrt{2}/(\sqrt{2} + 1) = \sqrt{2} * (\sqrt{2} – 1)/[(\sqrt{2} + 1) * (\sqrt{2} – 1) = (2 – \sqrt{2})$$ e

$$GJ = HI = BD = \sqrt{2}.$$

Il rapporto fra le lunghezze dei lati del rettangolo è:

$$GH/GJ = (2 – \sqrt{2})/\sqrt{2} = \sqrt{2} * (2 – \sqrt{2})/2 = (2 * \sqrt{2} – 2)/2 = (\sqrt{2} – 1) = 1/S_a.$$

La precedente proporzione può essere scritta sotto altra forma:

$$GH : GJ = 1 : S_a.$$

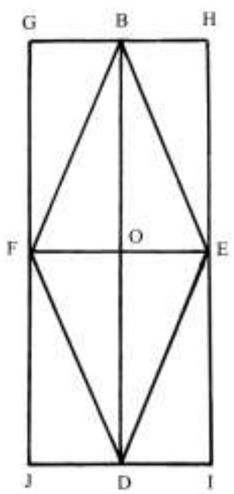
Il rettangolo GHIJ è un *rettangolo argenteo.*

Consideriamo ora l'area FBED: essa è formata dallo spazio generato dall'intersezione dei due cerchi di centro A e D.

L'area ha due assi di simmetria: quello minore è FE e quello maggiore è BD: le loro lunghezze sono nel rapporto $(1 : S_a)$.

Il rettangolo GHIJ è diviso in triangoli dai segmenti BF, BE, DF e DE.

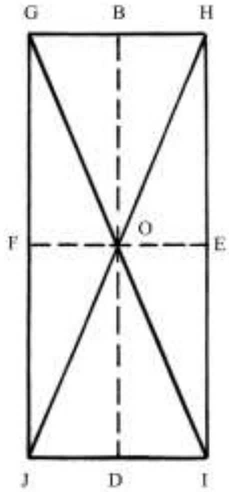
I triangoli FBE e FDE sono isosceli e sono *triangoli di Cordova*:



Come già visto in precedenza, il rapporto fra la lunghezza di un lato obliquo e quella del lato di base di un triangolo di Cordova è:

$$FB : FE = c : 1.$$

La figura è equivalente a quella mostrata nello schema che segue:



%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

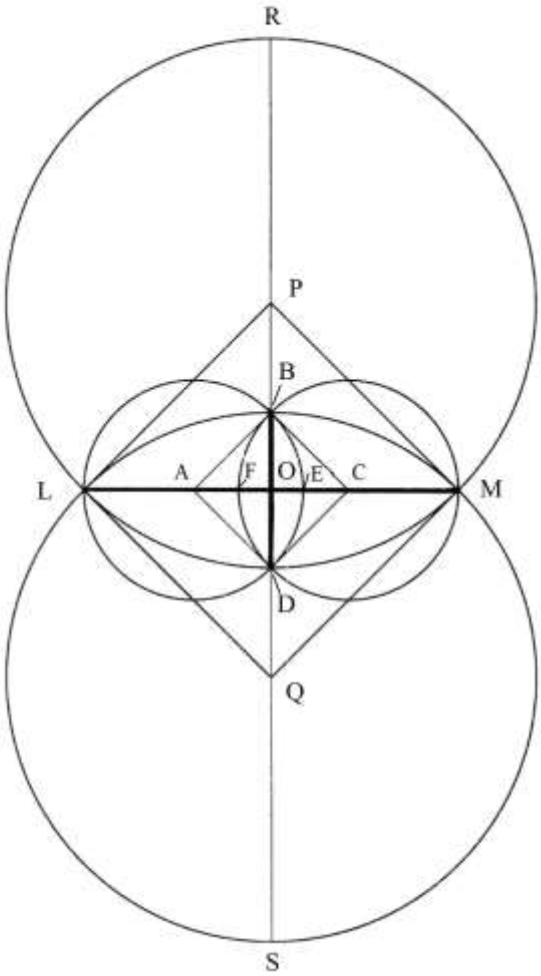
Riprendere lo schema contenuto nella prima figura di questo paragrafo e a partire dai punti L e M tracciare linee parallele ai lati del quadrato ABCD: viene creato il quadrato LPMQ.

Fare centro nei punti P e Q con raggio PL = QL e disegnare due circonferenze che fissano i punti R e S.

Le due circonferenze si intersecano formando la doppia ogiva LBMD che è disposta *perpendicolarmente* a quella BEDF.

Proseguendo nella costruzione dei successivi quadrati, esterni a quello LPMQ, le doppie ogive sono orientate in senso perpendicolare rispetto alla precedente e alla successiva.

Nella figura che segue sono evidenziati gli assi delle due doppie ogive delimitate dalle curve BEDF e LBMD:



Gli assi maggiori delle due doppie ogive, BD e LM, sono fra loro perpendicolari.

L'asse maggiore – BD – della doppia ogiva BEDF è l'asse minore della doppia ogiva LBMQ.

Esiste una relazione fra le lunghezze dei due assi:

FE : BD = BD : LM

In altri termini, l'asse BD è *medio proporzionale* fra gli assi FE e LM, entrambi disposti orizzontalmente.

Sappiamo già che:

$FE = \sqrt{2}/(\sqrt{2} + 1) = \sqrt{2}/S_a$ e

$BD = GJ = \sqrt{2}$.

Dalla precedente proporzione possiamo ora ricavare la lunghezza di LM:

$LM = BD^2/FE = (\sqrt{2})^2/(\sqrt{2}/S_a) = 2 * S_a/\sqrt{2} = \sqrt{2} * S_a$.

Il rapporto fra le lunghezze dei due assi maggiori LM e BD è:

$LM/BD = \sqrt{2} * S_a/\sqrt{2} = S_a$.

La lunghezza dell'asse maggiore della doppia ogiva cresce in *progressione geometrica* di ragione S_a. Lo stesso vale per il rapporto fra i successivi *assi minori*:

$BD : FE = S_a : 1$.

Bibliografia

1. Brunés Tons, “The Secrets of Ancient Geometry and its use, volume I, Rhodos International Science Publishers, Copenaghen, 1967, pp. 331.
2. Brunés Tons, “The Secrets of Ancient Geometry and its use, volume II, Rhodos International Science Publishers, Copenaghen, 1967, pp. 252.
3. Redondo Buitrago Antonia – Reyes Iglesias Encarnación, “The Geometry of Cordovan Polygons”, http://www.mi.sanu.ac.rs/vismath/redondo2009/cordovan.pdf
4. De Spinadel Winitzky Vera Martha, “The family of metallic means”, in “SMARANDACHE NOTIONS JOURNAL”, Vol. 8, No. 1-2-3, 1997, pp. 81-116.
5. Fletcher Rachel, “Infinite Measure”, George F. Thompson Publishing, Staunton (USA), 2013, pp. 399.
6. Kappraff Jay, “Beyond measure”, Singapore, World Scientific, 2002, pp. xxx-582.
7. Lăzureanu Cristian, “On the Cordovan ogive”, “Visual Mathematics”, vol. 14, n. 3, 2012, pp. 8 (www.mi.sanu.ac.rs/vismath/lazureanu/Lazureanu.pdf).
8. Watts Donald J. – Watts Martin Carol, “Un complesso di appartamenti dell’antica Roma”, Le Scienze, febbraio 1987, n. 222, pp. 88-95.
9. Williams Kim, “The Sacred Cut Revisited: The Pavement of the Baptistery of San Giovanni, Florence”, in “Mathematical Conversations” a cura di Robin Wilson e Jeremy Gray, New York, Springer, 2001, pp. 315-322.