sergio(punto)calzolani(at)outlook(punto)it

Parole chiave: Provenza medievale, misura terreni, strumenti misura, determinazione confini, formula degli agrimensori, unità di misura provenzali, area poligoni, moltiplicazione in croce, parallelogramma di Varignon, divisione terreni, disegni tridimensionali

Gli strumenti di Bertrand Boysset

Bertrand Boysset [Bertran(d) Boisset, in *provenzale antico* o *occitano antico*] è stato uno scrittore e agrimensore vissuto a Arles, in Provenza, fra il 1355 circa e il 1416.

Come noto, l'*occitano antico*, anche conosciuto come *provenzale antico,* è una lingua romanza parlata nel meridione dell'attuale Francia, in Provenza e in regioni confinanti. Dall'occitano antico fra l'XI e il XV secolo si distaccò la *lingua catalana*.

Boysset ha lasciati alcuni manoscritti in *provenzale* e fra di essi due opere geometriche:

- *La siensa de destrar*, sull'agrimensura.
- *La siensa d'atermenar* (determinazione dei confini).

Entrambi i trattati sono, nell'ordine, contenuti nello stesso manoscritto n. 327 della Biblioteca Municipale di Carpentras. La numerazione dei fogli è continua: fino al numero 105 si riferisce al primo trattato e dal numero 106 in poi al secondo trattato.

Le numerose immagini che Boysset ha inserito nei due trattati possono sembrare un po' primitive, ma in realtà svolgono un'essenziale funzione didattica perché mostrano la forma degli strumenti e il modo di usarli. Inoltre, la qualità delle immagini, a colori, mostra il possesso da parte dell'Autore di una notevole abilità grafica e di una notevole sensibilità artistica.

L'inizio della carriera di agrimensore da parte di Boysset non può essere fissato con certezza: è sicuro che negli anni 1403-1404 procedette al rilievo di una proprietà privata nella Camargue.

La composizione del manoscritto contenete i due trattati risale al 1406, per cui egli dovrebbe aver iniziato la sua carriera ben prima degli anni 1403-1404.

Il manoscritto contiene numerose illustrazioni a colori nelle quali la rappresentazione umana è associata a disegni di strumenti e di schemi geometrici utilizzati dall'agrimensore.

Nota: Le immagini contenute in questo articolo sono tratte dalle tavole collocate in calce al volume della Motte o dal sito LAMOP gestito da Pierre Portet, entrambi citati in bibliografia.

Gli studi della compianta Magdeleine Motte, citati in bibliografia, sono fondamentali per la conoscenza dell'opera di Boysset e per l'approfondimento degli studi sulle unità di misura impiegate dalla preistoria al XVIII secolo in Catalogna e in Provenza.

Il primo trattato è caratterizzato dalla presenza di figure geometriche piane e da metodi per calcolarne la superficie.

Il secondo trattato descrive *termini* e *testimoni* impiegati per la divisione delle terre: i solidi sono disegnati in forme un po' semplificate derivanti dai metodi delle proiezioni ortogonali e delle assonometrie

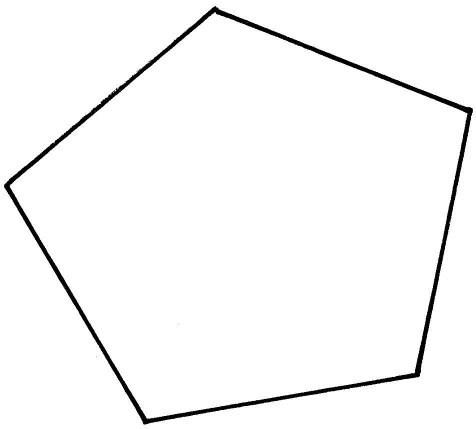
Durante il Medioevo, la Provenza era in strette relazioni con l'Italia e, in particolare, con Pisa, con Genova e poi con Firenze e con la Catalogna.

Fra le altre attività svolte da Boysset rientra la fissazione delle unità di misura di lunghezza e di superficie della città di Arles e dei loro valori e rapporti.

Fra gli strumenti usati da Boysset per misurare i terreni e poi per riportare le misure sulla carta sono:

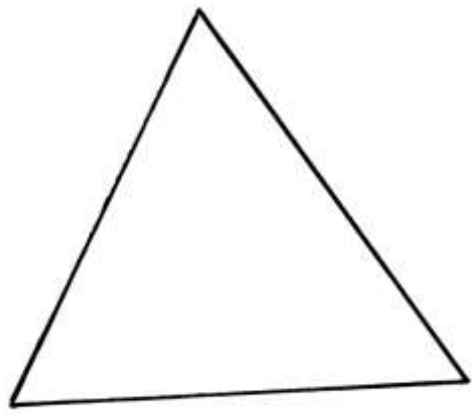
- La *destre*, un'asta divisa in 16 parti lunghe ciascuna *1 palmo di Arles* (fra 25 e 25,5 cm) e quindi lunga fra 4 e 4,08 m, con una media di 4,06 m. Le singole divisioni erano evidenziate con due colori differenti, alternati: era un'*asta graduata*. È necessario ricordare la grande varietà metrologica del Medioevo: ciascun Comune o ciascuna città possedevano proprie unità di misura, anche recanti lo stesso nome ma di diverso valore le une dalle altre. Molte unità di lunghezza avevano origine anatomica: dito, palmo, piede, braccio. Per misurare i terreni venivano usati i loro multipli. La destre è sia uno strumento che un'unità di misura della lunghezza. Sembra che il termine *destre* derivi dal latino *dextans* che significava 5/6 o 10/12 di un'unità di misura (lineare o di peso).

  In provenzale, *destre* è maschile: *lo destre* e lo è pure in francese: *le dextre*. Traduco al femminile per analogia con termini simili: *la* pertica, *la* canna, *la* verga, *la* asta, *la* tesa.
  La lunghezza del palmo di Arles fu fissata da Boysset nel suo primo trattato con il disegno di un pentagono *quasi* regolare (ma non equiangolo) con lato lungo mediamente 1/5 di palmo (equivalente a 5,1 cm): il perimetro del poligono è lungo l'equivalente di 26 cm, un po' più della misura convenzionale del palmo, fissata in 25,5 cm.



perimetro = 1 palmo = 25,5 cm

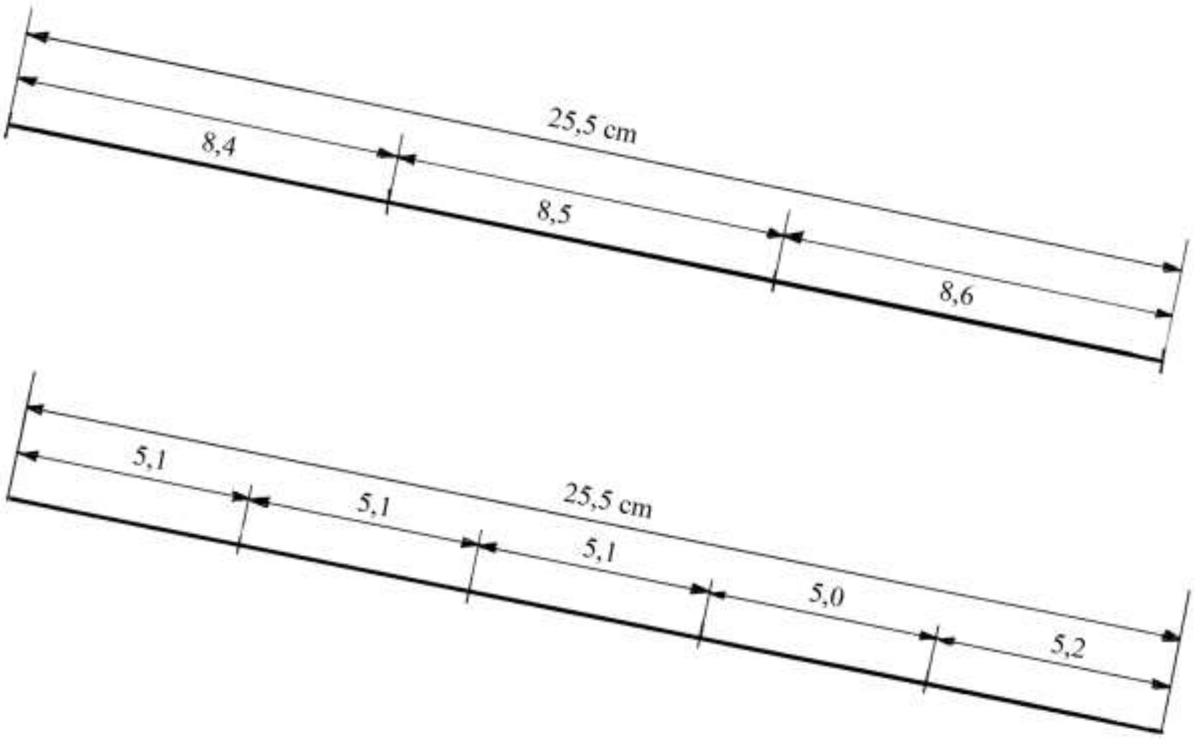
Egli la definì anche con il disegno di un triangolo equilatero con lati lunghi 1/3 di palmo (e cioè 8,5 cm) per un perimetro di lunghezza equivalente a 25,5 cm:



perimetro = 1 palmo = 25,5 cm

I due poligoni sono qui riprodotti inclinati come nel manoscritto di Boysset: i lati sono disegnati retti, con la riga, mentre nell'originale sono tracciati a mano e quindi assai tremolanti, forse a causa della cattiva qualità delle penne, degli inchiostri usati e del supporto scrittorio.

In realtà, i due disegni non sono molto precisi e i poligoni non sono esattamente *equilateri* poiché le lunghezze dei lati non sono perfettamente uguali, come spiegano i grafici contenuti nella figura che segue:



Il primo riporta le lunghezze dei lati del *triangolo* e il secondo fornisce le lunghezze dei lati del *pentagono*.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

La figura che segue mostra una *destre*:

La scena è disegnata con una pluralità di punti di vista: il coltello affilato era conficcato in un'estremità dell'asta per poterla mantenere stabile e contare in successione il numero di volte che la *destre* stessa era contenuta nella lunghezza da misurare.

La *canna* era lunga 8 palmi e quindi era la metà di una *destre*: la canna misurava 2,03 m. È utile notare che le tre unità di misura della lunghezza hanno una comune base di numerazione *binaria* poiché valgono le relazioni: 1 destre = 2 canne = 16 palmi

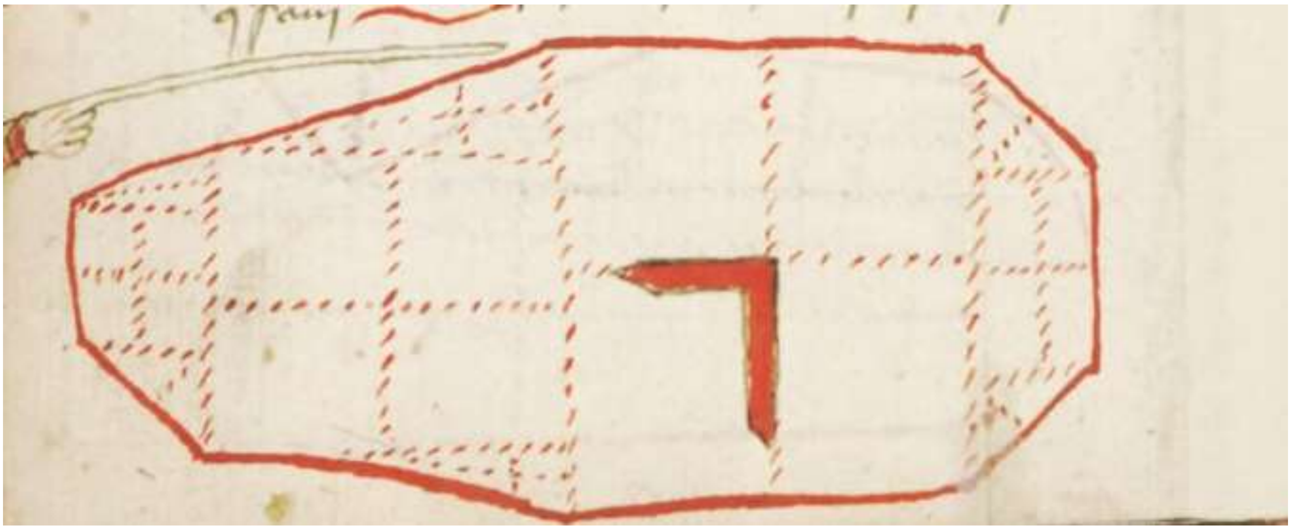
1 destre = 16 palmi = 2^4 palmi e 1 canna = 8 palmi = 2^3 palmi .

- La *squadra* serviva a verificare la perpendicolarità:

Nell’immagine qui sopra sono rappresentati degli agrimensori che impugnano delle squadre: se l’altezza media di un uomo dell’epoca medievale era stimabile in 1,70 m, facendo le dovute proporzioni il cateto lungo di una squadra misurerebbe 67,5 cm e quello corto 39,3 cm.

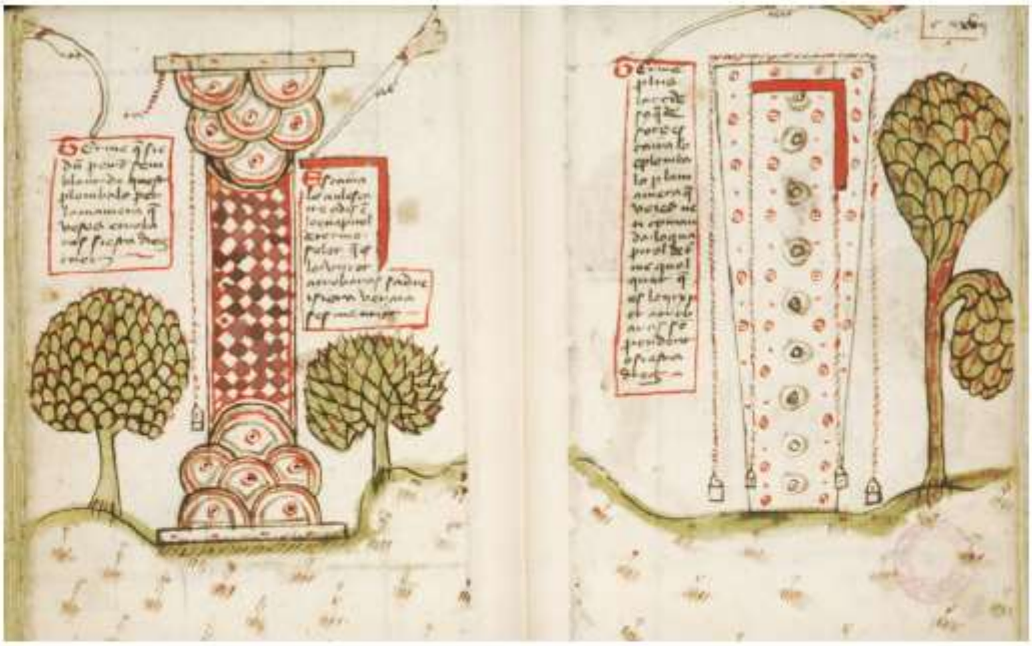
Un’altra squadra, ovviamente di più piccole dimensioni, era usata sul foglio da disegno (di carta) per riportarvi le misure sulla base di triangolazioni e quadrature effettuate sul terreno.

Come spiega la figura che segue, la grande squadra dell’agrimensore permetteva di tracciare sul terreno *angoli retti* e di verificare angoli retti:



La squadra mostrata nella figura precedente (*foglio 60v*) ha le estremità dei bracci smussate verso l'interno.

Altre squadre hanno le estremità smussate verso l'esterno (come nella figura a sinistra) oppure le hanno diritte (figura a destra):



I bordi delle squadre – esterno e interno – erano paralleli e permettevano di verificare gli angoli retti con entrambi i bordi.

Nelle vigne era usato un altro strumento: la *destre delle vigne*, lunga solo 13 palmi e quindi mediamente 3,29875 m. È probabile che il suo impiego fosse giustificato dalla ristrettezza dello spazio di manovra fra i filari delle viti.

Le unità di misura di Arles erano legate a quelle di Avignone: ad esempio la *canna avignonese* era lunga 39/40 di quella di Arles e cioè 39/40 * 2,03 = 1,97925 m.

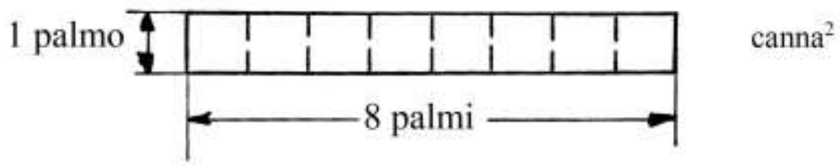
Riassumiamo le unità lineari di Arles:

* Palmo = 25 – 25,5 cm.
* Canna = 2,03 m.
* Destre = 4,06 m.

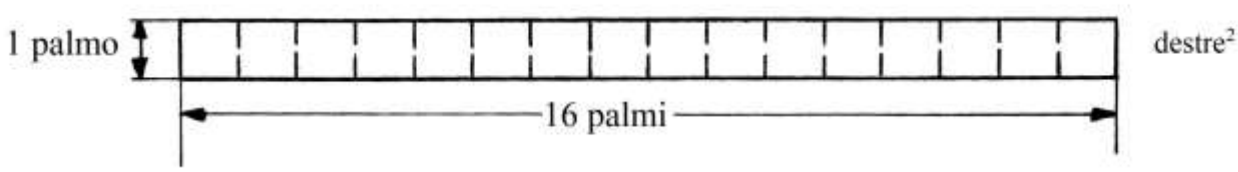
Le unità di misura delle superfici

Le superfici erano misurate con diverse unità: le più piccole erano la *canna*^{2}, la *destre*^{2} e la (*destre delle vigne*)^2.

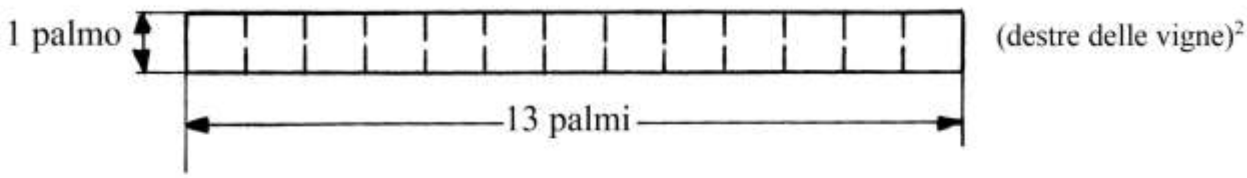
Una canna^2 era un rettangolo largo 1 palmo e lungo 8 palmi:



Una destre^2 rappresentava un rettangolo largo 1 palmo e lungo 16 palmi:



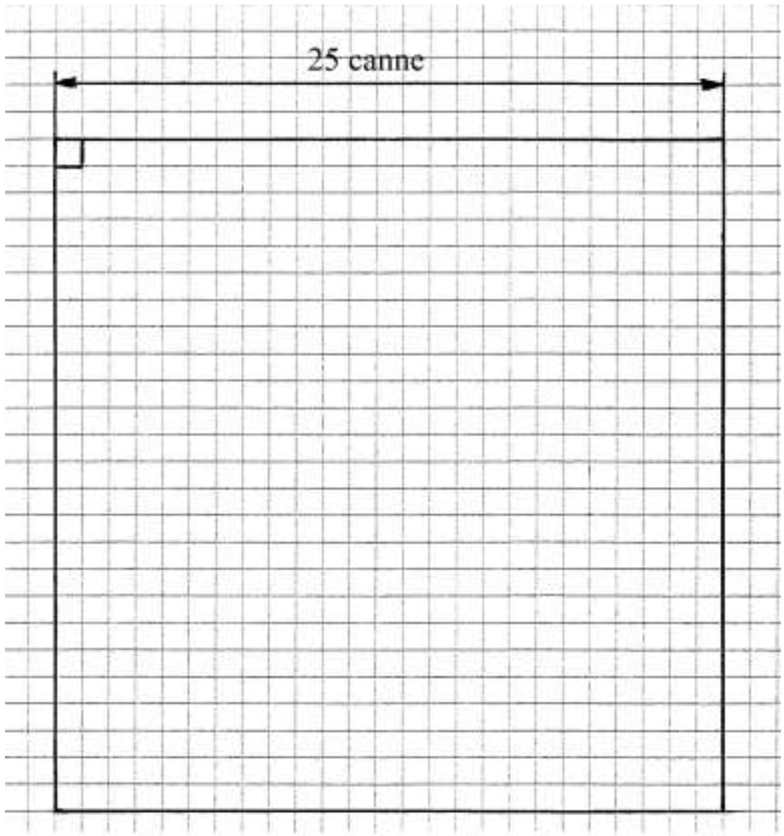
Infine, una (destre delle vigne)^2 era un rettangolo sempre largo 1 palmo e lungo 13 palmi:



%%%%%%%%%%%%%%%

Per la misura delle superfici erano usate altre due unità: la *séterée* e la *cartérée*.

La *séterée* valeva 625 canne^2: questa unità è diversa dalla *canna quadrata* incontrata sopra. Essa corrispondeva alla superficie di un quadrato con lati lunghi 25 canne:



Solo per la misura delle vigne era impiegata una seconda unità di superficie, la *cartérée*, equivalente a 454 canne^2.

454 è un numero scomponibile soltanto in: 454 = 2 * 227.

Il 227 è un *numero primo* come mostra la tabella che segue contenente i 48 numeri primi, compresi fra il 2 e il 317:

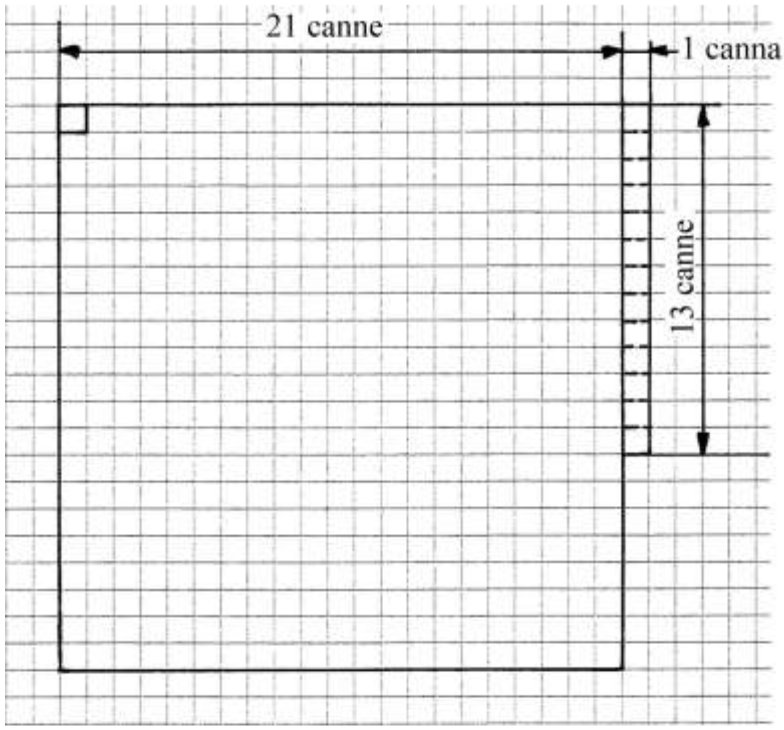
	2	3	5	7	11	13
29	31	37	41	43	47	53
71	73	79	83	89	97	101
113	127	131	137	139	149	151
173	179	181	191	193	197	199
229	233	239	241	251	257	263
281	283	293	307	311	313	317

Dividendo il 227 per 2 si ha: 227/2 = 113 + ½. Anche il numero 113 è *primo*.

Il numero 454 può essere scomposto come segue:

$$454 = 441 + 13 = 21^2 + 13.$$

Lo schema che segue mostra un quadrato con lati lunghi 21 canne al quale è unita una striscia rettangolare che ha dimensioni 1*13 canne:



Questa ricostruzione della *cartérée* è puramente ipotetica.

La grafica di Boysset

È probabile che i disegni geometrici tridimensionali contenuti nei trattati di Boysset siano stati influenzati da almeno tre diverse fonti:

- i testi dei Gromatici romani;
- manoscritti matematici e geometrici in possesso dell'autore o presenti nelle biblioteche private (a Arles) o papali (a Avignone) alle quali poteva accedere;
- le opere dei pittori Simone Martini (1284 – 1344) e Matteo Giovannetti (inizio del XIV secolo – circa 1370) che operarono a Avignone. Seguendo la lezione di Giotto (1267 – 1337), anche essi introdussero artifici grafici e pittorici per rappresentare la tridimensionalità.

Nei testi dei Gromatici sono contenute molte *vignette* che rappresentano città o edifici in tre dimensioni: in proiezioni ortogonali e in assonometria.

Inoltre, in Provenza erano ben visibili le tracce della centuriazione romana a Orange e a Arles: si erano conservate le divisioni del terreno basate sulle centurie quadrate di lato lungo 704 m.

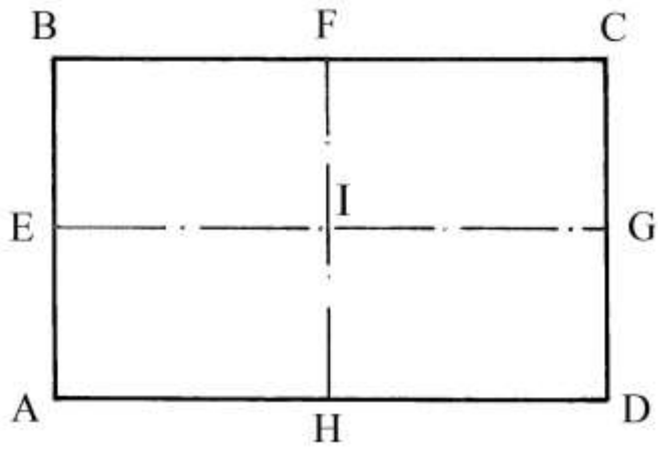
Come molti pittori dell'antichità e del Medioevo Giotto conosceva l'assonometria cavaliera.

Giovannetti lavorò molto a Avignone alla decorazione del Palazzo dei Papi: Boysset ebbe sicuramente numerose occasioni per vedere le sue pitture e afferrarne la logica tridimensionale.

Boysset impiegò differenti metodi empirici per disegnare i solidi: nei suoi disegni si avverte la presenza di proiezioni ortogonali (vista frontale e pianta), di abbozzi di assonometrie cavaliere e di altri metodi assonometrici (fra le quali la isometrica). Alcune sue rappresentazioni mostrano la presenza di una pluralità di punti di vista, non sempre fra loro coordinati.

L’area di un rettangolo

In un caso, Boysset usò un curioso metodo per calcolare l’area di un rettangolo: la *moltiplicazione in croce*.



Invece di determinare le lunghezze di due lati (AD e DB), egli misurò le lunghezze delle due *mediane* (EG e FH) che si incontrano nel punto I formando una croce costituita da quattro angoli retti:

formula di Boysset: $\text{Area}_{ABCD} = EG * FH$

Nel caso ABCD sia un rettangolo perfetto, il risultato ottenuto da Boysset è uguale a quello della formula oggi usata:

$$\text{Area}_{ABCD} = AD * AB = EG * FH$$

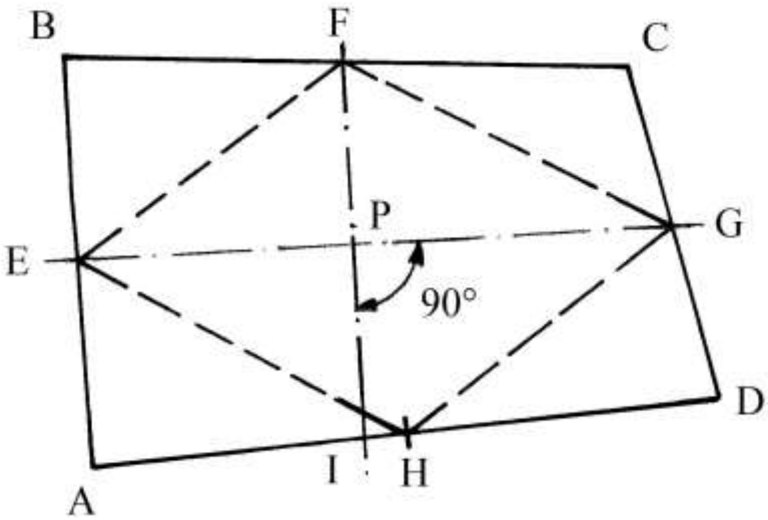
In questo caso valgono le relazioni:

$$AD = EG = BC \quad \text{e} \quad AB = FH = CD$$

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Il metodo usato da Boysset è un po’ più complicato.

ABCD è il quadrilatero e E, F, G e H sono i punti medi dei quattro lati:



Tracciare il segmento EG. Dal punto F abbassare la perpendicolare alla mediana EG che incontra nel punto P (formando angoli retti).

Disegnare *tratteggiati* i lati del quadrilatero inscritto EFGH. Questo ultimo ha superficie uguale a metà di quella di ABCD.

Boysset calcolò l'area di EFGH con la seguente formula:

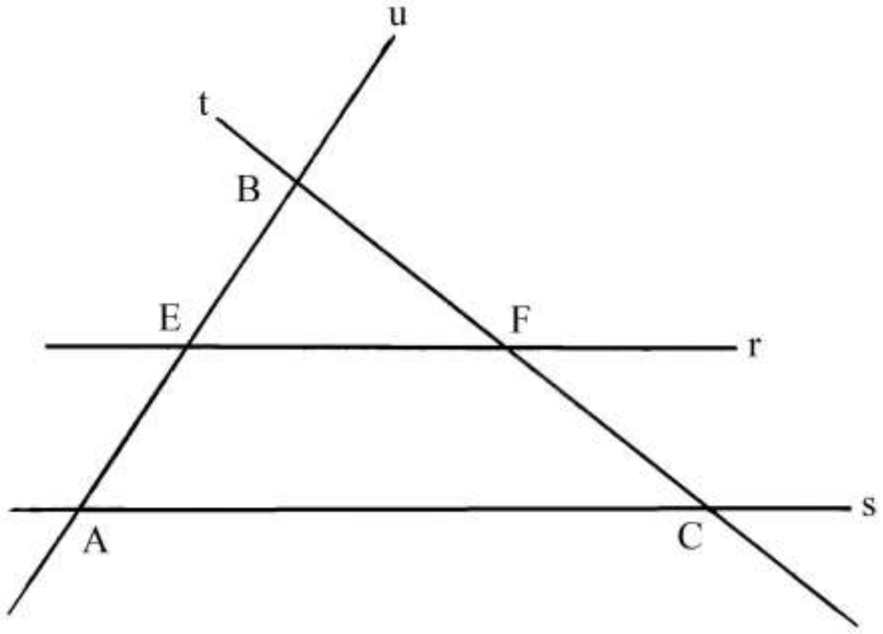
$$\text{Area}_{EFGH} = EG * FP$$

Di conseguenza, l'area di ABCD è

$$\text{Area}_{ABCD} = 2 * \text{Area}_{EFGH} = 2 * EG * FP$$

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

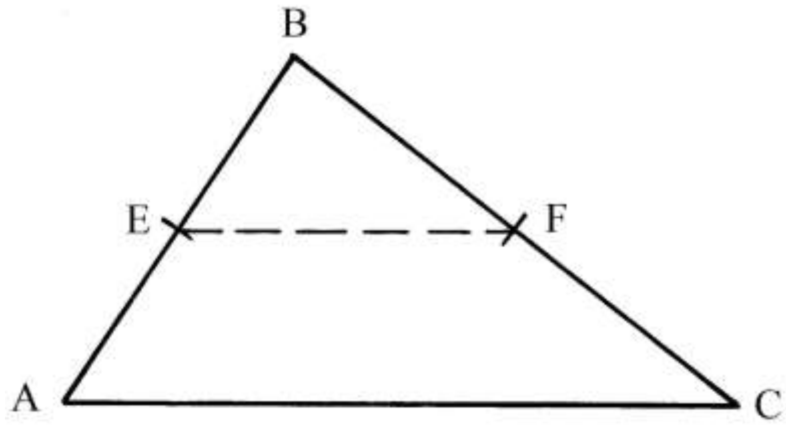
Un'altra ipotesi può essere suggerita riguardo al metodo impiegato da Boysset per calcolare l'area di un quadrilatero, presumendo che egli avesse conoscenza del *teorema di Talete*: un fascio di rette parallele (*r* e *s*) che sono tagliate da due rette trasversali (*t* e *u*) originano segmenti corrispondenti sulle prime, con rapporti costanti:



I punti A, B, C, E e F sono le intersezioni fra le quattro rette.

Valgono le seguenti proporzioni:
BE : BF = EA : FC
AB : BC = BE : BF
EF : AC = BE : AB

Vediamone subito un'applicazione.
ABC è un generico triangolo scaleno:



Il punto B corrisponde all'intersezione delle rette t e u. Il segmento AB giace sulla retta s e quello EF è posizionato sulla retta r.

E e F sono i punti *medi* dei lati AB e BC.

EF divide ABC in due poligoni: il triangolo EBF e il trapezio AEFC.

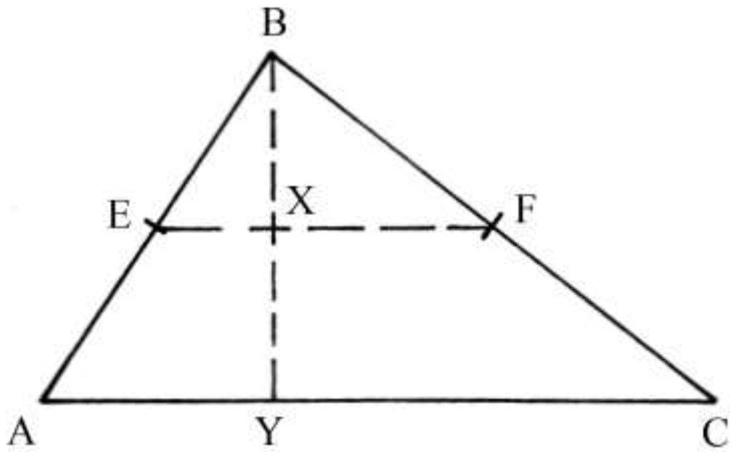
I triangoli ABC e EBF sono *simili* per cui valgono le seguenti proporzioni:

AB : EB = 2 : 1 BC: BF = 2 : 1

Ne consegue che AC : EF = 2 : 1.

La lunghezza del segmento è la *metà* di quella di AC.

BY è l'altezza relativa a AC e BX è l'altezza relativa al lato EF:



L'area del triangolo ABC è data da

$$\text{Area}_{ABC} = AC * BY/2 .$$

L'altezza BX è lunga

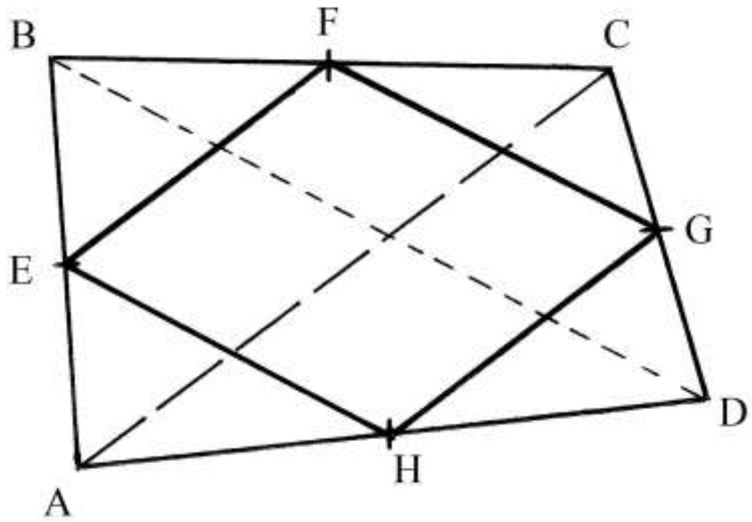
$$BX = BY/2 .$$

L'area di EBF è:

$$\text{Area}_{EBF} = EF * BX/2 = ½ * AC/2 * BY/2) = ¼ * (AC * BY/2) = ¼ * \text{Area}_{ABC} .$$

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

ABCD è un quadrilatero con le diagonali AC e BD:



Il triangolo ABC corrisponde al triangolo usato nella penultima figura.

Anche i punti G e H sono i medi dei lati CD e AD.

EFGH è un quadrilatero inscritto in ABCD e ottenuto collegando i punti medi di questo ultimo.

I lati EF e GH sono fra loro paralleli e paralleli anche a BD e hanno la stessa lunghezza:

EF = GH = ½ BD.

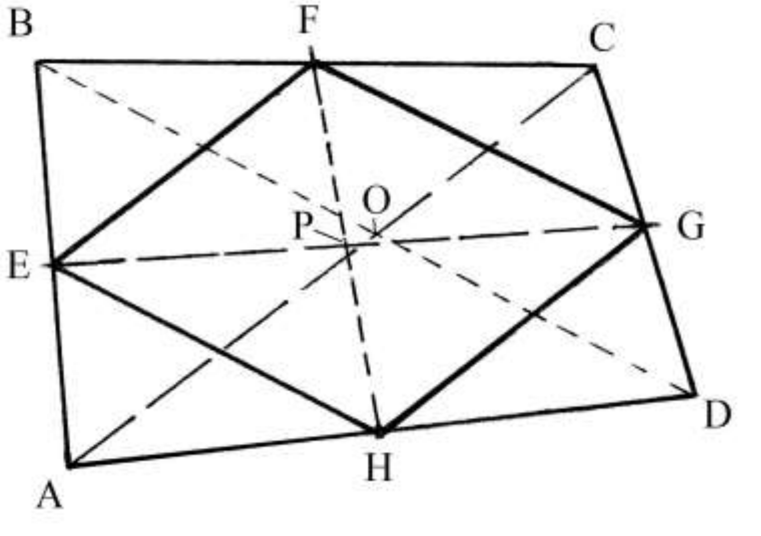
Applicando al triangolo BCD le considerazioni utilizzate per il triangolo ABC, risulta che i lati EH e FG sono paralleli alla diagonale BD e hanno la stessa che è pari alla metà di quella di AC.

EFGH è un perfetto *parallelogramma*.

Esso è noto come *quadrilatero* o *parallelogramma* di Varignon, dal nome del matematico francese Pierre Varignon (1654 – 1722): esso ha superficie uguale alla metà di quella del quadrilatero ABCD.

Magdeleine Motte ha avanzato l'ipotesi che Boysset avesse in qualche modo utilizzato un metodo simile a quello codificato da Varignon tre secoli dopo, ma non le è chiara la fonte alla quale avrebbe attinto.

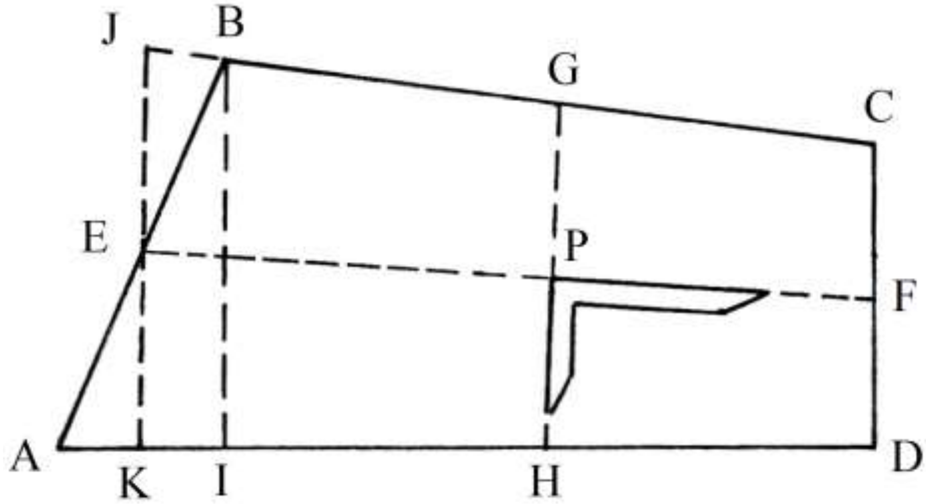
Le diagonali del quadrilatero ABCD si incontrano nel punto O, che *non* coincide con il punto P, intersezione delle sue mediane (che sono le diagonali di EFGH):



- APPROFONDIMENTO -

Il parallelogramma di Varignon

Nel capitolo 38 del trattato di agrimensura, con il *foglio 58 verso,* Boysset suggerì ai suoi lettori la scelta fra due metodi per la misura e il calcolo dell'area di un terreno a forma di quadrilatero. Il *primo metodo*, sconsigliato da Boysset, implicitamente rinvia all'uso della *formula degli agrimensori*:

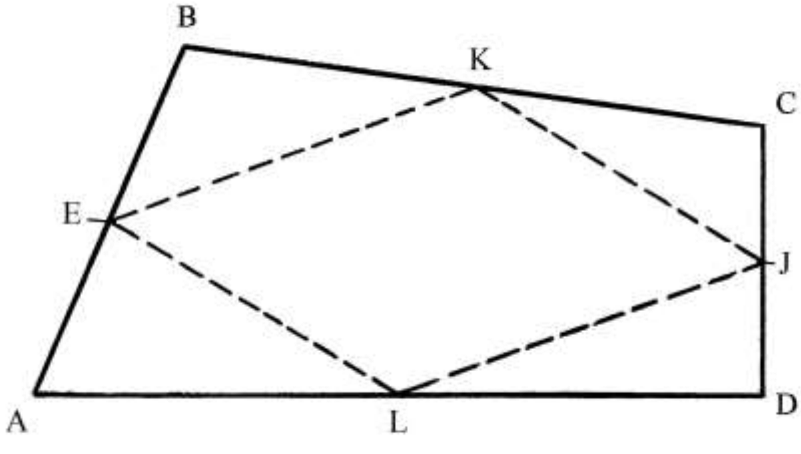


Applicandola, occorreva misurare i quattro lati del quadrilatero e poi moltiplicare le semisomme dei lati opposti.

Il *secondo metodo,* consigliato da Boysset e descritto nella figura qui sopra, consisteva nella scomposizione del quadrilatero ABCD nel quasi trapezio BCDI e nel triangolo rettangolo ABI: ad Arles era questo il metodo più impiegato.

Boysset usò la *formula degli agrimensori* solo nel caso della misura delle dimensioni di un territorio complesso e accidentato contenente montagne, vallate e fitti boschi: era evidente l'impossibilità di penetrare all'interno dei boschi (da Magdeleine Motte, p. 277).

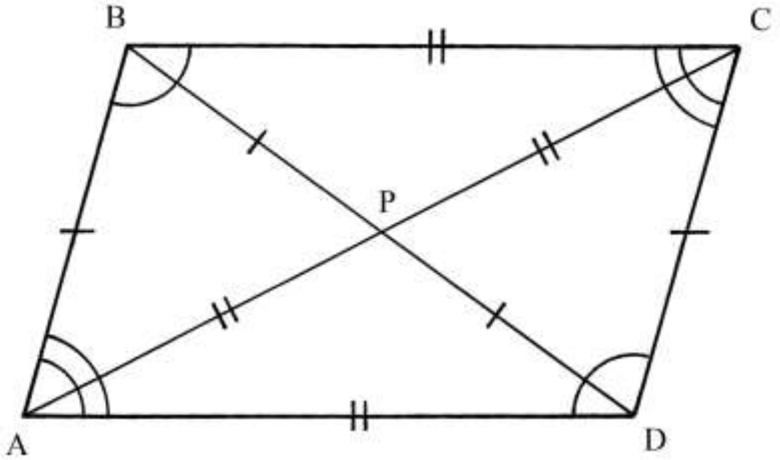
Consideriamo le proprietà geometriche del quadrilatero utilizzato da Boysset per calcolare la sua area; per semplificare i calcoli, il quadrilatero da lui considerato nella figura del *foglio 58 verso* presenta un *angolo retto* nel vertice D:



E, K, J e L sono i *punti medi* dei quattro lati e EKJL è conosciuto con l'espressione *parallelogramma di Varignon*.

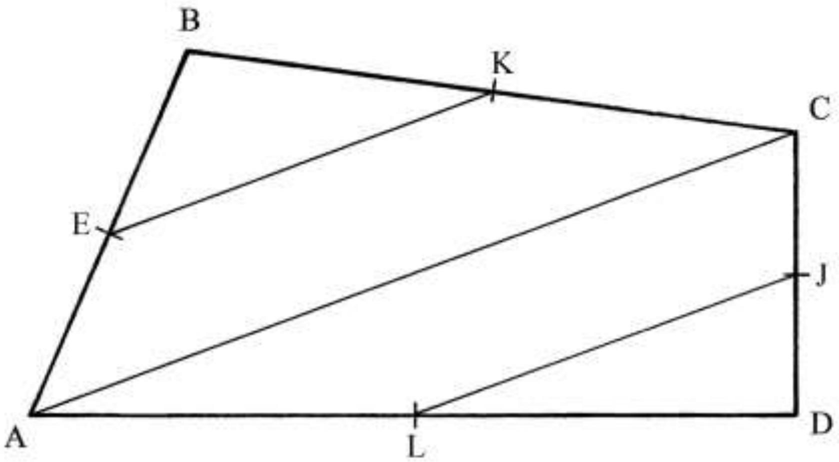
Un *parallelogramma* è un quadrilatero che ha i lati opposti paralleli e di uguale lunghezza; anche gli angoli opposti hanno uguale ampiezza.

Tagliandosi reciprocamente, le diagonali si dividono in *due* parti uguali:



Il quadrilatero considerato da Boysset non è un parallelogramma. Vediamo la dimostrazione della sua soluzione.

Tracciare la diagonale AC e le corde EK e LJ:



ABC e EBK sono due triangoli simili e i lati AC e EK sono paralleli.

Valgono le seguenti relazioni:

$$AB : EB = BC : BK = 2 : 1 .$$

Ne consegue: $AC : EK = 2 : 1$.

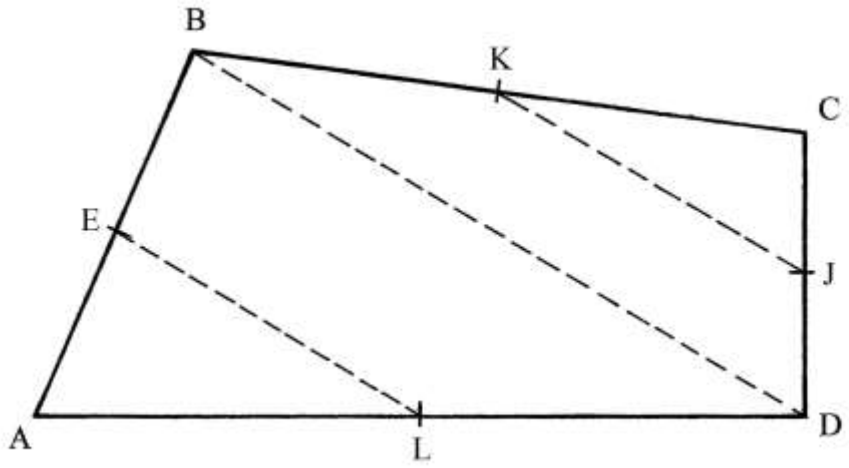
Le aree dei due triangoli stanno in proporzione:

$$ABC : EBK = AC^2 : EK^2 = AC^2 : (AC/2)^2 = AC^2 : (AC^2)/4 .$$

Analoghe considerazioni valgono per i triangoli ACD e LJD:

$$ACD : LJD = AC^2 : LJ^2 = AC^2 : (LJ/2)^2 = AC^2 : (AC^2)/4 .$$

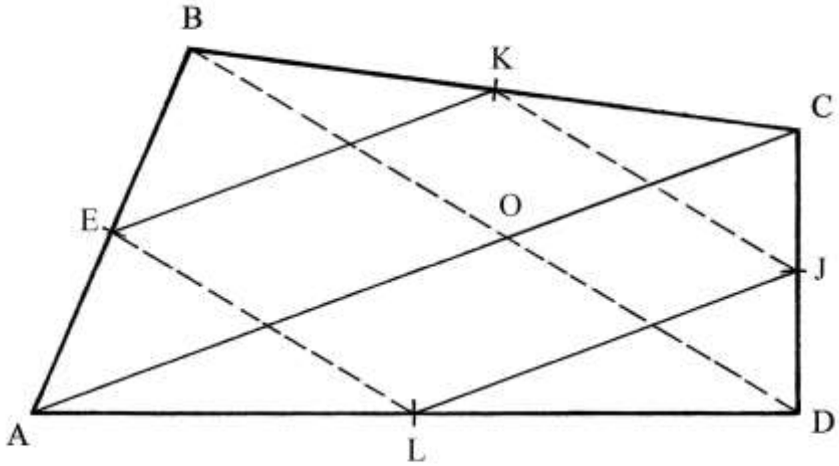
Consideriamo la figura che segue:



Sono disegnate la diagonale BD e le corde EL e KJ.
Anche in questo caso valgono le proporzioni 2:1 già incontrate:

AB : AE = AD : AL = 2 : 1 e BD : EL = 2 : 1.

Uniamo i due precedenti grafici in un unico schema:



EKJL è il parallelogramma di Varignon. La sua area, per semplicità indicata come per gli altri poligoni con le sole lettere dei vertici senza il termine 'Area', è data da:

EKJL = ABCD – EBK – KCJ – LJD – AEL =
= ABCD – ¼ * ABC – ¼ * BCD – ¼ * ACD – ¼ * ABD =
= ABCD – (1/4 * ABC + ¼ * ACD) – (1/4 * BCD + ¼ * ABD) (1)

Ma: (¼* ABC + ¼ * ACD) = ¼ * (ABC + ACD) = ¼ * ABCD e
(¼ * BCD + ¼ * ABD) = ¼ * (BCD + ABD) = ¼ * ABCD .

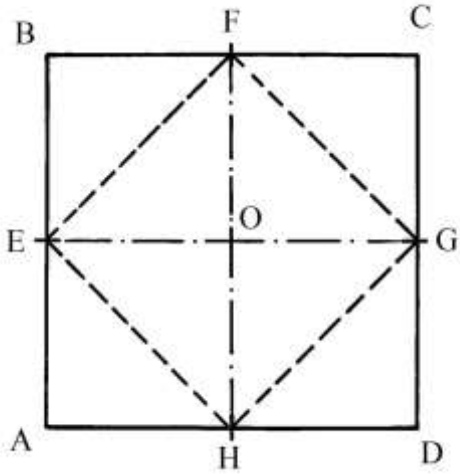
Sostituendo questi ultimi due valori nella formula (1) si ha:

EKJL = ABCD – (¼ * ABCD) – (¼ *ABCD) = ½ * ABCD.

La soluzione proposta da Boysset è corretta ed è confermata dal lavoro di Varignon.

Una curiosità

Nel quadrato ABCD, i punti E, F, G e H sono i punti medi dei lati:

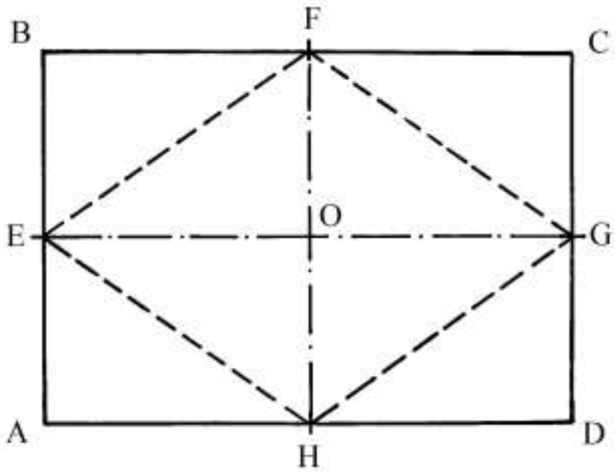


La figura EFGH è un *rombo* particolare che ha le diagonali EG e FH di uguale lunghezza e quindi questo quadrilatero è un *quadrato*.

L'area di EFGH è:

$$EFGH = (EG * FH)/2 = AD^2/2 = ABCD/2 .$$

ABCD è un rettangolo e E, F, G e H sono i punti medi dei lati:



EFGH è un rombo e ha i lati, EF, FG, GH e HE, di uguale lunghezza.

L'area di EFGH è data dal semiprodotto delle lunghezze delle due diagonali:

$$EFGH = (EG * FH)/2 = ABCD/2 .$$

La regola di Varignon è applicabile anche al quadrato e al rettangolo. Dato che essa vale per qualsiasi quadrilatero irregolare, essa è applicabile anche ai quadrilateri inscritti nei due precedenti rombi in modo *ricorsivo*.

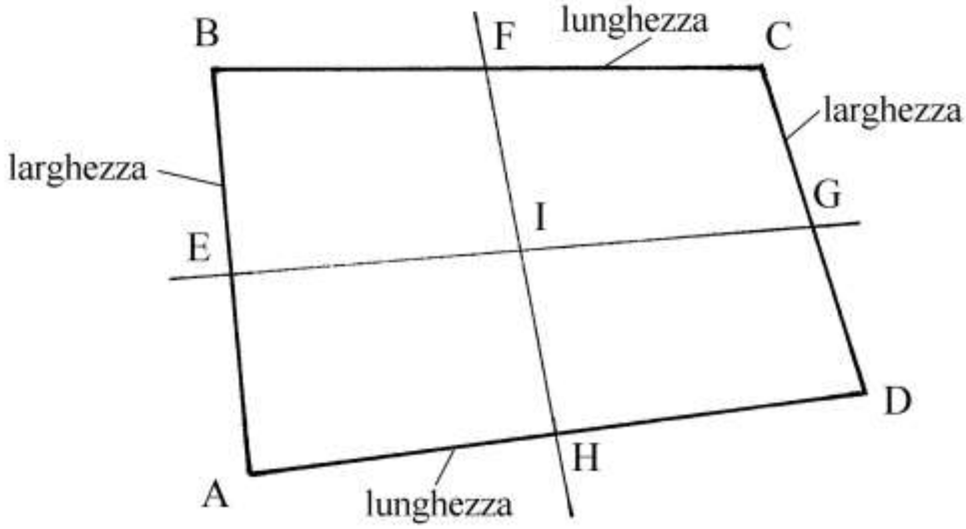
Essa è verificabile con qualunque *trapezio*.

- -

La formula degli agrimensori

Il metodo della *moltiplicazione in croce* di Boysset richiama – *ma solo alla lontana* – quello conosciuto come la *formula degli agrimensori*, già nota ai geometri Sumeri e Babilonesi e di altri popoli antichi.

ABCD è un quadrilatero generico. I suoi lati opposti non sono paralleli.



E, F, G e H sono i punti medi dei quattro lati: per determinare le loro posizioni, Boysset era costretto a misurare tutti e *quattro* lati.

Gli agrimensori Sumerici usavano una formula pratica per calcolare l'area S di un quadrilatero ABCD con lati non paralleli, come quelli della figura e di differenti lunghezze, moltiplicando la *lunghezza media* (EG) per la *larghezza media* (FH):

$$S_{ABCD} = EG * FH$$

Alcuni papiri egizi proponevano una soluzione leggermente diversa per lo stesso calcolo. L'area veniva ricavata con il prodotto delle *semisomme* dei due lati opposti:

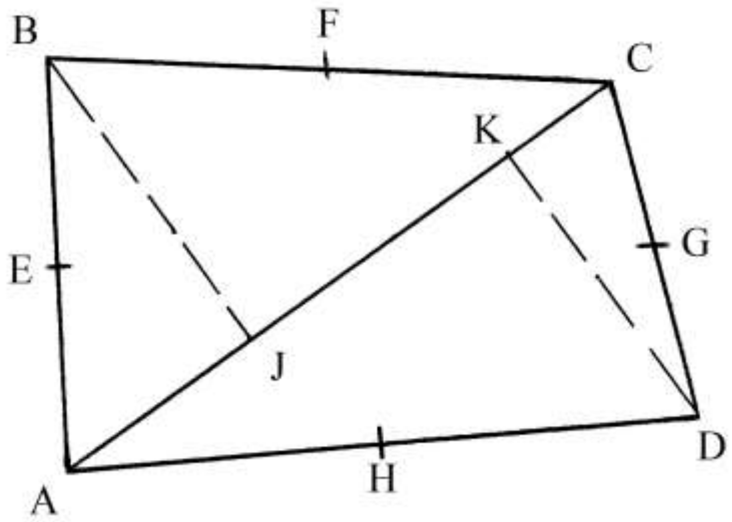
$$S_{ABCD} = (AD + BC)/2 * (AB + DC)/2$$

Queste due espressioni sono varianti della *formula degli agrimensori*.

Nell'articolo citato in bibliografia, il medievista francese Alain Guerreau ha suggerito un'ipotesi per spiegare la misurazione in croce di Boysset: a suo avviso, nel Medioevo, sia in Provenza che a Genova le misure effettuate su edifici si riferivano sempre all'*interno* (perché portatore di valori positivi) al contrario dell'*esterno* (carico di valori negativi) e il centro di un *interno* era il punto più positivo, da cui derivava il predominio degli assi mediani.

Una pianta quotata di una abitazione recava solo le dimensioni interne delle varie stanze o ambienti e nessuna indicazione sulle dimensioni esterne e sullo spessore dei muri.

Come già accennato, il metodo usato da Boysset per calcolare la superficie di un quadrilatero richiedeva *quattro* misure, mentre a partire dal XIX secolo gli agrimensori si limitavano a *tre* misure, come spiega la figura che segue:



Il quadrilatero ABCD è lo stesso degli esempi che precedono e E, F, G e H sono i punti medi dei lati.

Il quadrilatero è diviso in due triangoli da parte della diagonale.

BJ e DK sono, rispettivamente, le altezze relative alla base comune AC dei due triangoli ABC e ACD.

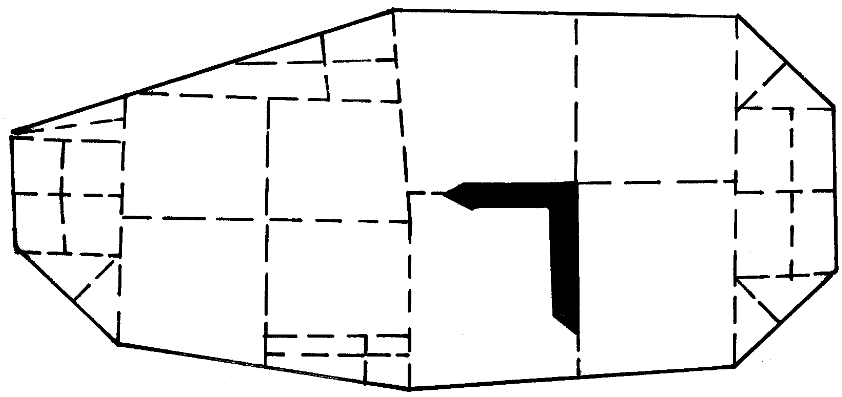
Con questo metodo è sufficiente effettuare *tre* sole misurazioni: quelle della diagonale AC e quelle delle due altezze BJ e DK, invece delle *quattro* misurazioni occorrenti a Boysset.

L'area del quadrilatero ABCD è calcolata con assoluta precisione con la somma delle arre dei due triangoli:

Area ABCD = AC * BJ/2 + AC * DK/2 = AC *(BJ/2 + DK/2) = AC * (BJ + DK)/2

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

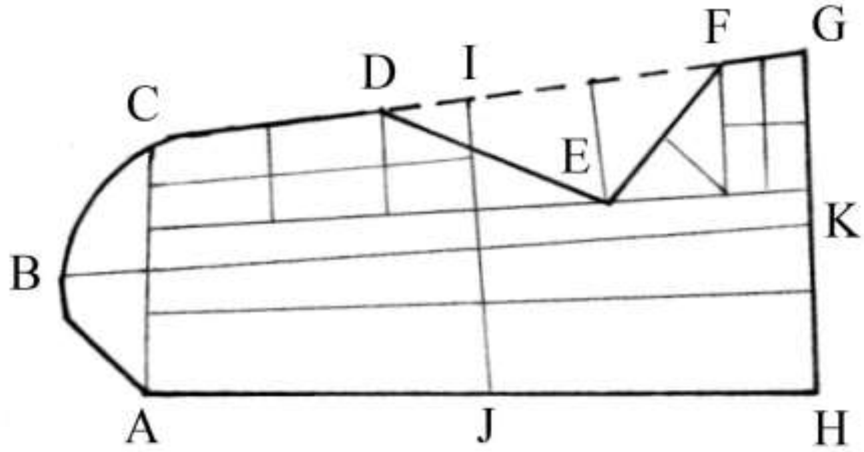
Nel foglio *60 verso*, già presentato in un precedente paragrafo, Boysset mostrò la pianta di un terreno dai confini piuttosto complicati:



Il disegno è stato qui semplificato e le linee del confine sono state tutte rettificate: Boysset realizzò una divisione del terreno in figure semplici quali triangoli, rettangoli e trapezi dei quali gli era facile calcolare l'area.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Nell’esempio che segue, dal foglio 60, la situazione è ancora più complessa della precedente:



A sinistra, il tratto ABC è in parte curvo, a destra il lato GH è rettilineo.

Il terreno è delimitato dalla linea chiusa ABCDEFGKHJ.

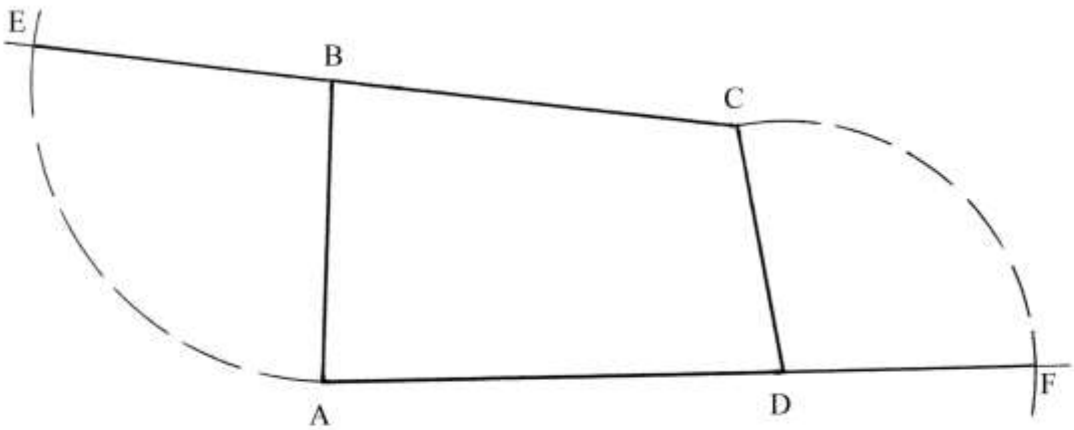
Il triangolo DEF è una porzione di una proprietà confinante.

Per semplificare i calcoli, Boysset propose di dividere la superficie racchiusa da ABCDIFGKHJ in poligoni più semplici: l’area occupata da ABC e il trapezio ACGH (a sua volta scomposto in triangoli, rettangoli e trapezi).

In secondo luogo provvide a misurare l’area del triangolo DFE preso in prestito e sottrarne la superficie da quella lorda di ABCDIFGKHJ.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Il matematico catalano Abraham bar Hiyya, anche conosciuto come Savasorda, scoprì in Provenza l’uso di metodi errati per calcolare l’area di un terreno a forma di quadrilatero. Oltre alla *formula degli agrimensori*, Savasorda notò l’uso di un secondo metodo errato (torneremo su questo Autore in un successivo paragrafo) :



ABCD è il solito quadrilatero. Prolungare verso sinistra il lato BC e verso destra quello AD: Con il compasso *ribaltare* le lunghezze dei lati AB e CD.

Il metodo proponeva di calcolare l'area moltiplicando le lunghezze di *due lati consecutivi*:

$$\text{Area}_{ABCD} = AB * BC = BE * BC$$

oppure

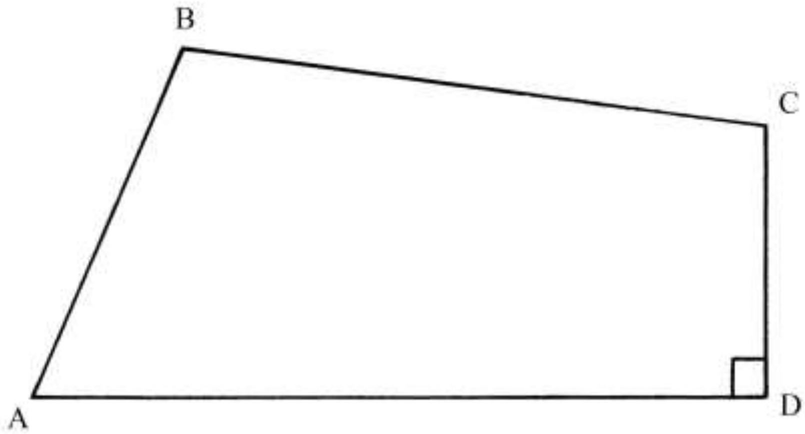
$$\text{Area}_{ABCD} = AD * DC = AD * DF$$

Entrambe le formule sono approssimate e forniscono risultati tanto più errati quanto più il quadrilatero si allontana dalla forma rettangolare.

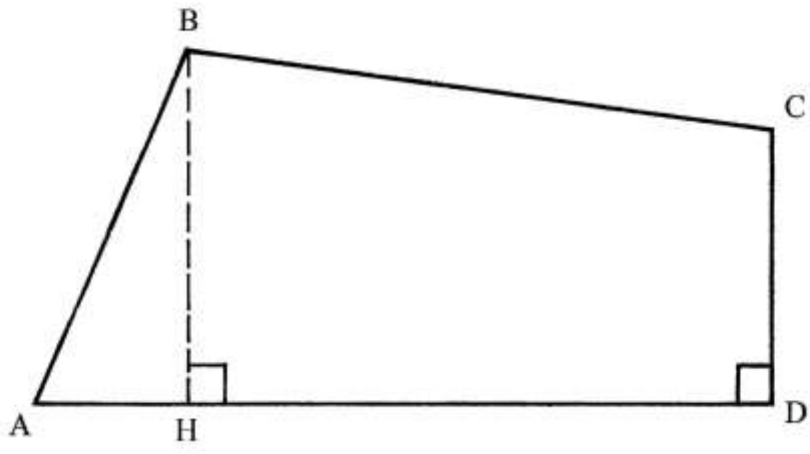
- APPROFONDIMENTO -

Confronto fra i diversi metodi per calcolare l'area di un quadrilatero

Confrontiamo i tre possibili metodi impiegati o impiegabili da parte di Boysset per calcolare l'area del quadrilatero ABCD:



Il *primo* metodo prevede la tracciatura dell'altezza BH:



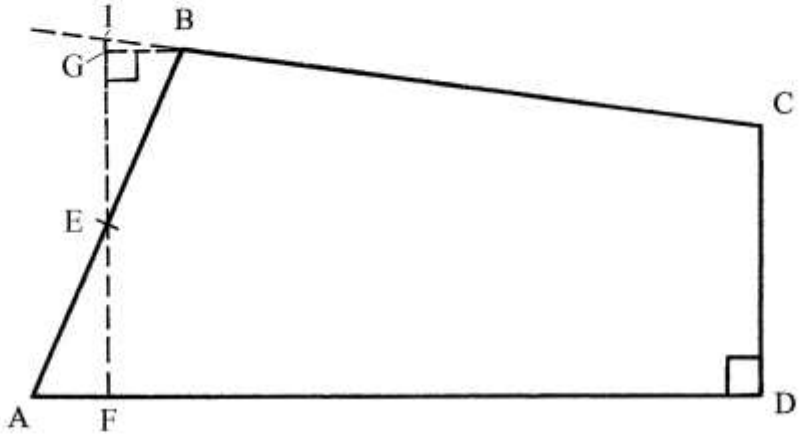
Il quadrilatero è ora scomposto in un triangolo rettangolo, ABH, e in un trapezio rettangolo, BCDH.

La procedura impiegata per calcolare l'area contiene i seguenti passi:

* Condurre la perpendicolare da B a AD: è BH.
* Misurare le lunghezze di AH, HD, CD e BH.
* Calcolare l'area del trapezio BCDH: $\text{Area}_{BCDH} = HD * (BH + CD)/2$.
* Calcolare l'area del triangolo rettangolo ABH: $\text{Area}_{ABH} = AH * BH/2$.
* Sommare le due aree: $\text{Area}_{ABCD} = \text{Area}_{BCDH} + \text{Area}_{ABH}$.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Il *secondo* metodo è presentato nella figura:



La procedura prevede i seguenti passi:

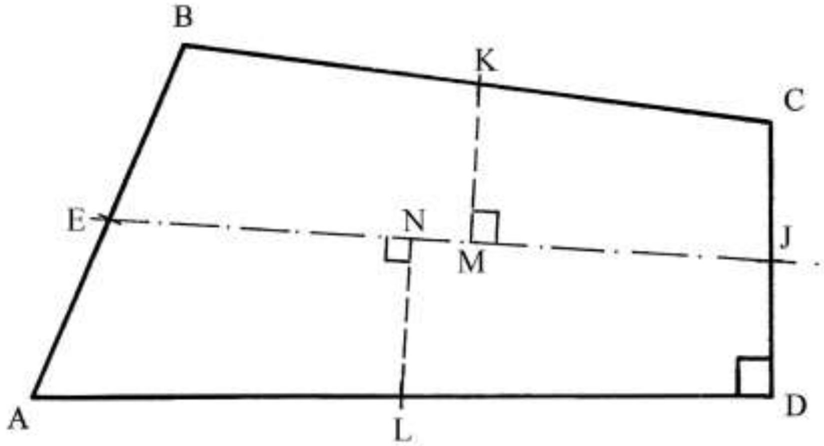
* Prolungare verso sinistra il lato CB.
* Dal punto B condurre la parallela a AD.
* Determinare il punto medio di AB: è E.
* Per il punto E tracciare la perpendicolare a AD fino a fissare i punti F, G e I.
* Misurare le lunghezze di FI, GI, GB, FI, AF, FD e CD.
* Calcolare l'area del trapezio FICD: Area $_{FICD}$ = FD * (FI + CD)/2 .
* Calcolare l'area del triangolo rettangolo GIB: Area $_{GIB}$ = GI * GB/2 .
* Sottrarre l'area del triangolo GIB da quella di FICD:

  Area $_{ABCD}$ = Area $_{FICD}$ – Area $_{GIB}$.

I triangoli rettangoli AEF e EGB hanno uguali dimensioni e non interferiscono con i calcoli.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Il *terzo* metodo, quello *in croce*, è raccomandato da Boysset:

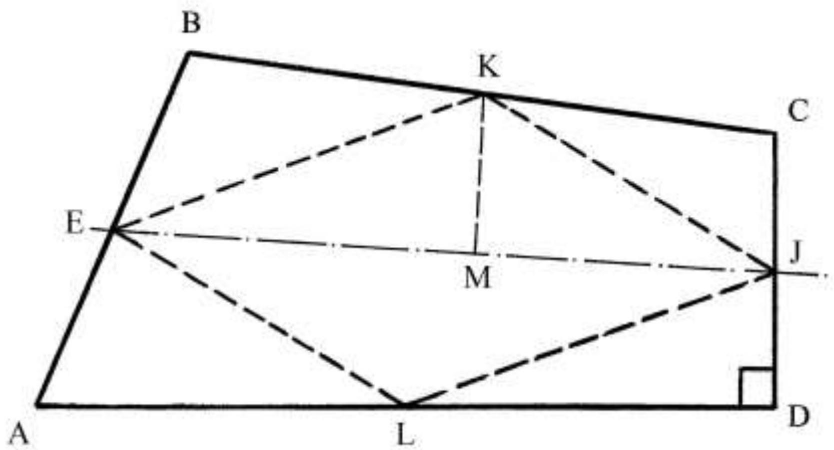


La procedura richiede i seguenti passi:

* Determinare i punti medi dei quattro lati del quadrilatero: sono E, K, J e L.
* Tracciare la mediana più lunga: è EJ.

* Dai vertici K e L condurre le perpendicolari a EJ: sono KM e LN: le due altezze hanno uguale lunghezza e cioè: KM = LN.
* Disegnare il parallelogramma EJJL.
* Misurare le lunghezze di EJ, KM e LN.
* Calcolare l'area di EKJ: Area $_{EKJ}$ = EJ * KM/2 .
* Calcolare l'area di EJL: Area $_{EJL}$ = EJ * LN/2 .
* Sommare le due aree: Area $_{EKJL}$ = Area $_{EKJ}$ + Area $_{EJL}$ = EJ * KM/2 + EJ * LN/2 =
= 2 * EJ * KM/2 = EJ * KM .
* Calcolare l'area di ABCD: Area $_{ABCD}$ = 2 * Area $_{EKJL}$ = 2 * EJ * KM = EJ * (KM + NL) .

Il *terzo* metodo è semplificabile tracciando e misurando solo un'altezza rispetto alla mediana EJ, ad esempio quella KM:



La procedura risulta abbreviata:
* Determinare i punti medi dei quattro lati del quadrilatero: sono E, K, J e L.
* Tracciare la mediana più lunga: è EJ.
* Dal vertice K e L condurre la perpendicolare a EJ: è KM.
* Disegnare il parallelogramma EJJL.
* Misurare le lunghezze di EJ e KM.
* Calcolare l'area di EKJ: Area $_{EKJ}$ = EJ * KM/2 .
* Calcolare l'area di ABCD: Area $_{ABCD}$ = 2 * (2 * Area $_{EKJ}$) = 4 * (EJ * KM/2) =
= 2 * EJ * KM .

Il numero delle operazioni aritmetiche (moltiplicazioni, divisioni e somme) è inferiore nel caso del *terzo* metodo e della sua variante: all'epoca di Boysset le operazioni aritmetiche (almeno le moltiplicazioni, le divisioni e l'estrazione di radice quadrata) rappresentavano un serio problema per moltissime persone.

Le fonti di Boysset riguardo alla moltiplicazione in croce

Boysset giunse da solo a scoprire il metodo e i vantaggi della moltiplicazione in croce, anticipando il teorema di Varignon? Se l'ipotesi fosse fondata egli sarebbe giunto alla scoperta grazie alla divisione del quadrilatero in due triangoli uniti lungo la diagonale maggiore.

Altre possibili fonti possono essere:

*	Uno sconosciuto trattato italiano di geometria pratica disponibile in Provenza, grazie alla notevole presenza italiana nella regione.
*	Un eventuale testo di geometria pratica disponibile in Catalogna, regione in stretti rapporti con la Provenza.
*	L'influenza esercitata da esponenti delle Comunità ebraiche presenti in Provenza. Un particolare cenno va fatto all'opera del già ricordato matematico ebreo catalano Abraham Bar Hiyya (circa 1065-1070 – intorno al 1136), noto anche con il nome di *Savasorda*, corruzione latina del titolo arabo di "Capo della Guardia".

Fra le opere di Savasorda è un importante trattato di geometria pratica, lo *Hibbur hameixihà uehatixbóret*, tradotto in latino da Platone da Tivoli con il titolo di *Liber Embadorum* ("Il libro delle aree"). In questo testo Savasorda criticò l'uso presso le Comunità ebraiche della Provenza della *formula degli agrimensori* per calcolare l'area di un terreno di forma quadrangolare e suggerì l'impiego di un altro metodo: la scomposizione delle figure con numero di lati maggiore di 3 in triangoli, rettangoli e trapezi.

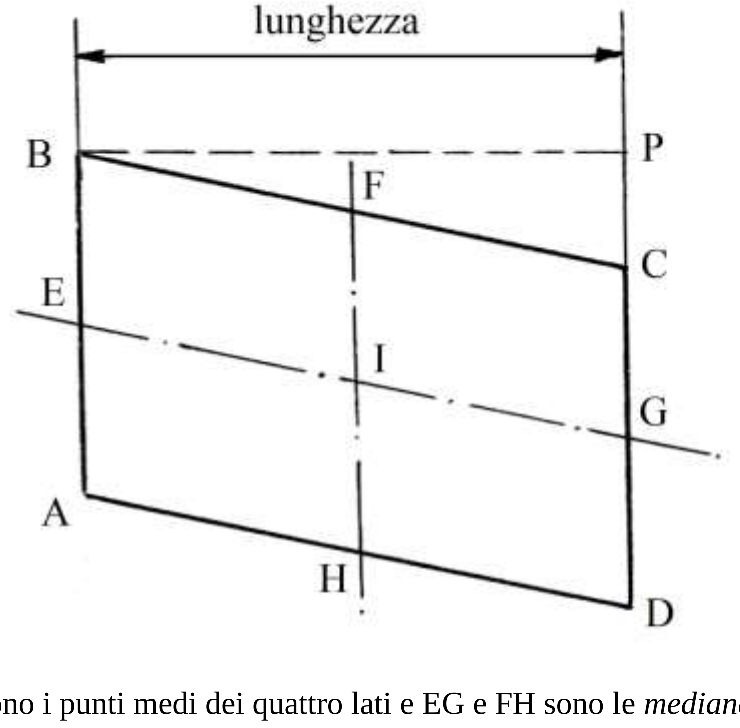
Sembra che grazie alle sue conoscenze matematiche e geometriche Savasorda collaborasse con la Corte cristiana di Barcellona e con i Cavalieri Templari per misurazioni e divisioni di terreni e cioè svolgeva anche la professione di agrimensore.

Savasorda può avere influenzato Boysset?

- -

La formula degli agrimensori applicata a un parallelogramma

ABCD è un parallelogramma (con i lati opposti paralleli e di uguale lunghezza):



E, F, G e H sono i punti medi dei quattro lati e EG e FH sono le *mediane* del quadrilatero.

La formula *corretta* per calcolare l'area del parallelogramma è data da

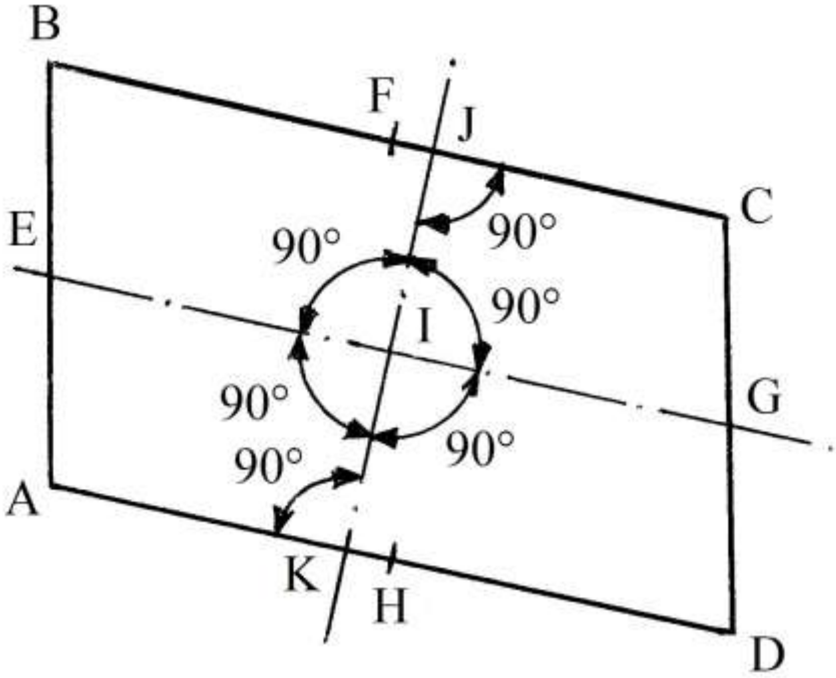
Area $_{ABCD}$ = AB * BP

Il segmento BP è *perpendicolare* al lato AB e il suo punto P è collocato sul prolungamento di DC.

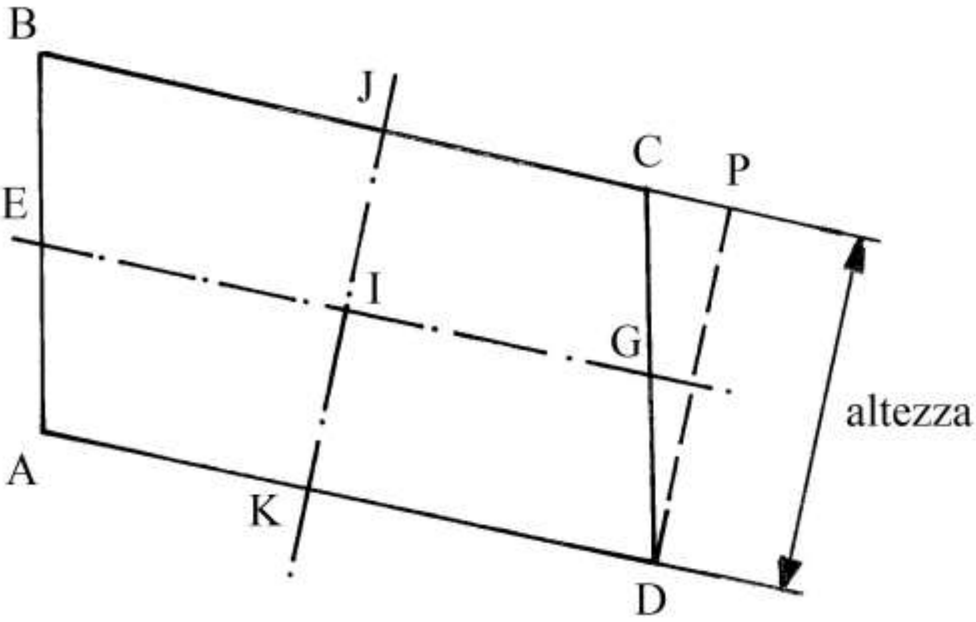
Applicando la *formula degli agrimensori* l'area è data da:

Area $_{ABCD}$ = EG * HF = AD * AB e il risultato è *errato per eccesso*.

Se le sue conoscenze geometriche fossero state un po’ più solide, un agrimensore avrebbe dovuto applicare il metodo *corretto* descritto nella figura che segue:



EG è una mediana e I è il suo punto medio.
Per il punto I tracciare la perpendicolare alla mediana: è JK.
Questo ultimo segmento è l’altezza relativa ai lati AD e BC.
L’area *corretta* del parallelogramma è data dal prodotto
Area $_{ABCD}$ = base * altezza = AD * JK = EG * JK.
Il segmento PD è *perpendicolare* al lato AD ed è la sua altezza relativa:

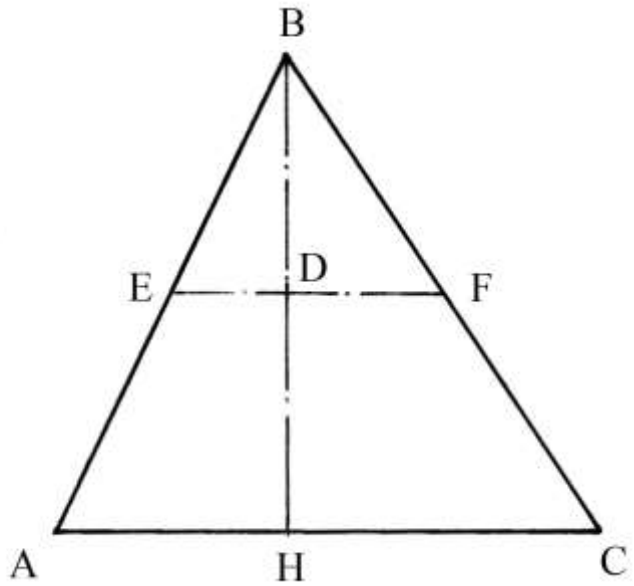


Ma PD è parallelo a JK ed ha la stessa lunghezza: quindi, la formula precedente può essere scritta come segue:

$$\text{Area}_{ABCD} = AD * PD \,.$$

L'area di un triangolo

Boysset usò la misurazione *in croce* anche per calcolare le aree di un *triangolo generico* e poi quella di un *triangolo rettangolo*, mentre negli altri esempi impiegò la formula consueta (area = base * altezza /2).



Nel primo caso, egli fissò il punto medio dell'altezza BH, D. Per questo punto tracciò un segmento parallelo alla base AC: è EF.

I triangoli EBF e ABC sono simili e i loro corrispondenti lati hanno lunghezze nel rapporto 1 : 2 :

$$EF = AC/2 \,.$$

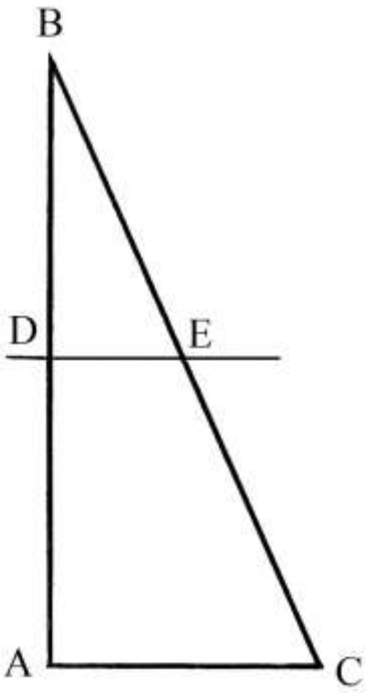
Boysset calcolò l'area moltiplicando l'altezza BH per la semi base EF:

area $_{ABC}$ = BH * EF.

Il risultato è uguale a quello ottenuto dalla formula consueta:

$$\text{Area}_{ABC} = AC * BH/2 \,.$$

Nel secondo caso, quello del triangolo rettangolo ABC con un angolo (ABC) molto più acuto del suo complementare (BCA), egli tracciò l'asse del segmento AB: si tratta di DE.



Il punto D divide a metà il cateto AB e l'ipotenusa BC.

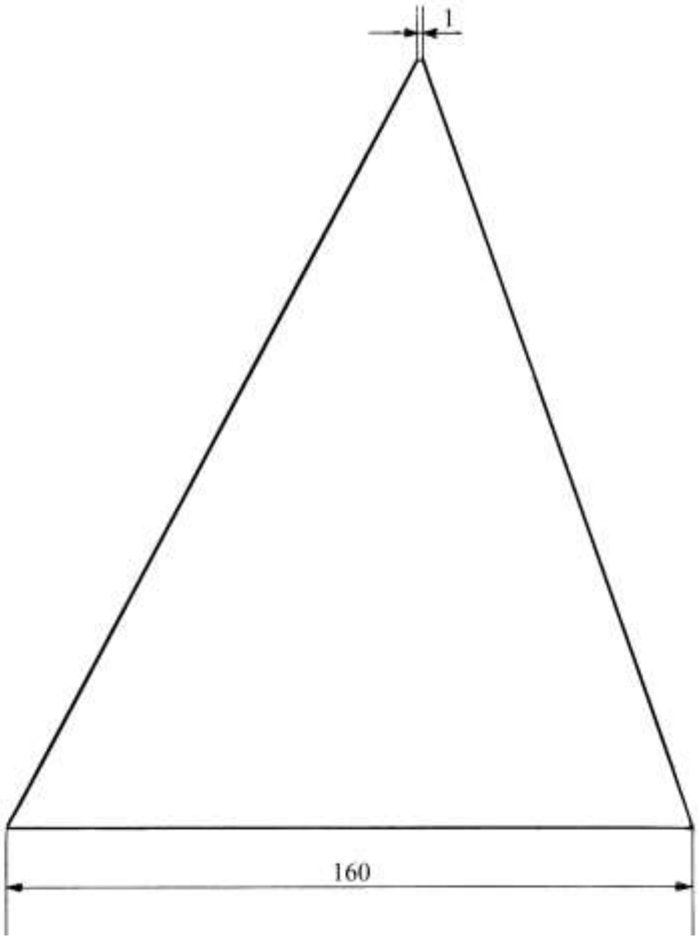
I triangoli BDE e BAC sono *simili* e le lunghezze dei corrispondenti lati stanno in proporzione 1 : 2. Di conseguenza, il segmento DE è lungo la *metà* del cateto AC.

Boysset usò la seguente formula:

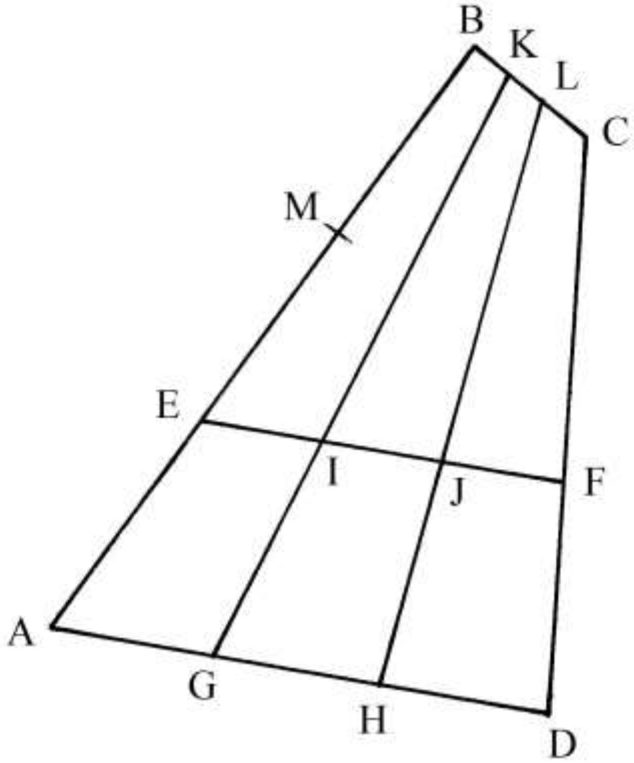
Area $_{ABC}$ = altezza * mediatrice dell'altezza = AB * DE.

<u>Divisione di un terreno a forma di quadrilatero allungato</u>

Il problema descritto da Boysset si riferiva a un terreno di forma trapezoidale molto allungata, quasi un triangolo al quale fosse stato spuntato un vertice, in alto. L'esempio che fornì è quello di una figura che ha le lunghezze dei lati opposti, le *basi* del trapezio, in proporzione 1 : 160:



La figura che segue, riprodotta da Motte p. 275, è modificata e accorciata rispetto a quella originale al fine di spiegare il metodo di Boysset:



Il terreno doveva essere suddiviso in un certo numero di parti di uguale superficie, *sei* nell'esempio.

Il campo venne inizialmente diviso in due parti uguali nel senso della lunghezza, con il segmento EF, parallelo alla base AD.

Boysset non spiegò il metodo con il quale giunse a stabilire la posizione di EF.

Nell'esempio, i trapezi AEFD e EBCF hanno la stessa superficie.

Il punto M è il medio di EB, utilizzabile per divisioni in un numero maggiore di parti uguali, rispetto alle *sei* realizzate.

Nella figura, i segmenti AD e EF sono divisi in *tre* parti uguali.

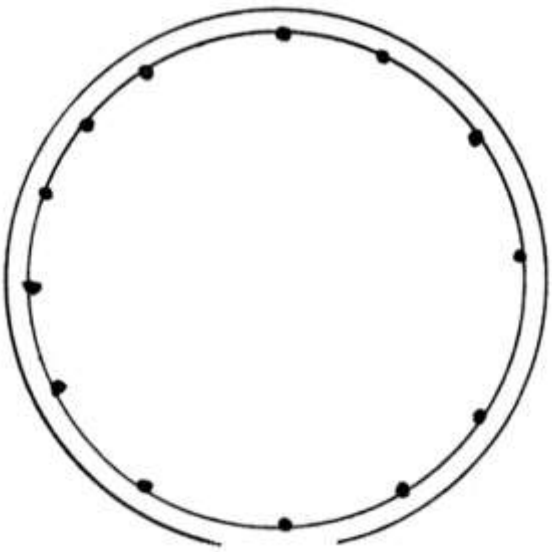
Tracciare i segmenti GI e HJ e prolungarli fino a intersecare il lato BC.

I *sei* quadrilateri AEIG, GIJH, HJFD, EBKI, IKLJ e JLCF avrebbero la stessa superficie.

Circonferenza e cerchio

Boysset non ha espressamente spiegato il metodo da lui impiegato per misurare la lunghezza della circonferenza di un terreno circolare: probabilmente egli usava una corda che poi distendeva su un terreno pianeggiante per misurarla.

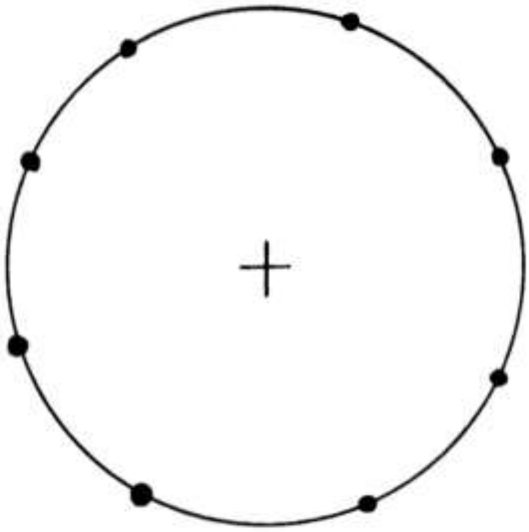
Lo schema che segue è rielaborato dal foglio 57 del manoscritto di Carpentras:



Sulla circonferenza interna sono definiti 13 punti. La loro presenza confermerebbe l'uso della corda per misurare una circonferenza.

Nel suo primo trattato, "*La siensa de destrar*" Boysset fornisce un metodo per calcolare l'area di un campo di forma circolare.

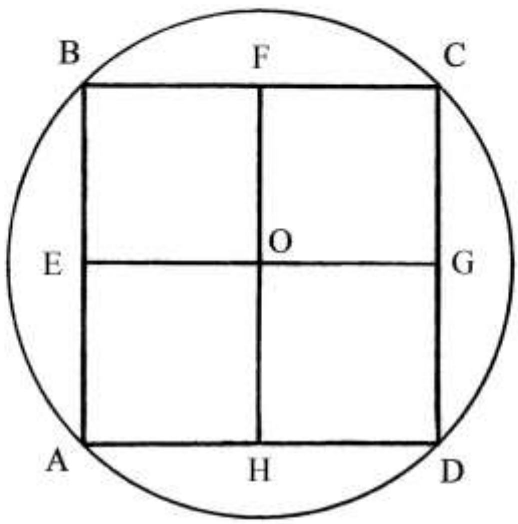
Fra i disegni a mano libera tracciati da Boysset nel foglio 48 *verso* del manoscritto di Carpentras vi è un cerchio:



La circonferenza è segnata da 8 punti che rappresentano altrettanti cippi.
Boysset non avrebbe usato – e conosciuto – la formula
$\pi * r^2 \approx 22/7 * r^2$ per calcolare l'area di un cerchio.

Una spiegazione può essere ricavata da un paragrafo contenuto nel foglio 6 *verso* del quale è data una traduzione abbastanza libera:
"…*Se devi misurare un terreno rotondo, tu lo squadrerai per la metà e lo dividerai in croce e lo misurerai ancora in croce e misurerai la parte più larga delle gobbe e la metà delle loro lunghezze e aggiungerai alla misura in croce*…".

La *squadratura* consiste nella tracciatura del più grande quadrato inscrivibile, ABCD:



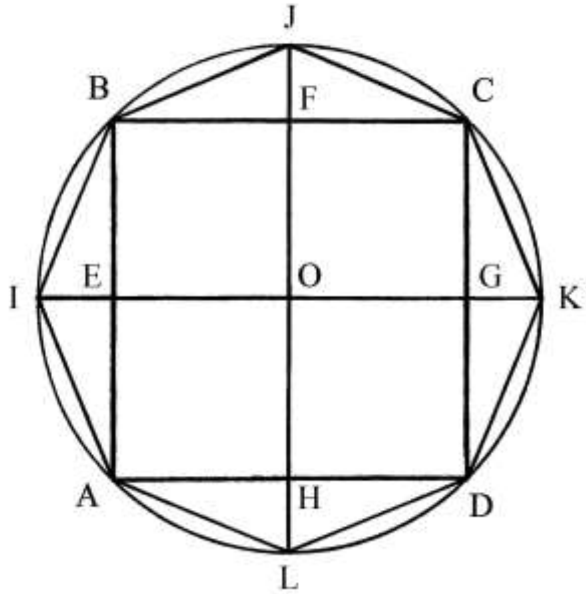
Le misure in croce consistono nella tracciatura delle mediane del quadrato, EG e FH, e nella loro misurazione.
Le *gobbe* sono i triangoli isosceli compresi fra i lati dei poligoni inscritti nel cerchio e la sua circonferenza: le figure che seguono chiariscono i concetti.

Esse sono state rielaborate dall'importante studio sulle forme circolari di Armelle Querrien, citato in bibliografia.

Una volta misurate le mediane è facile calcolare l'area del quadrato:

$$\text{Area}_{ABCD} = EG * FH .$$

Prolungare le mediane fino a incontrare la circonferenza nei punti I, J, K e L:



Disegnare l'ottagono inscritto.

Fra il quadrato ABCD e la circonferenza sono ora presenti quattro triangoli isosceli: AIB, BJC, CKD e DLA: essi hanno uguali dimensioni e sono le *gobbe* definite da Boysset. Ad esempio, nel triangolo AIB, IE è *la parte più larga della gobba* e AB è la sua *lunghezza*, per usare la terminologia di Boysset.

L'area di una gobba è indicata come:

Area_{GOBBA} = parte larga * metà lunghezza, espressione che scriviamo come segue:

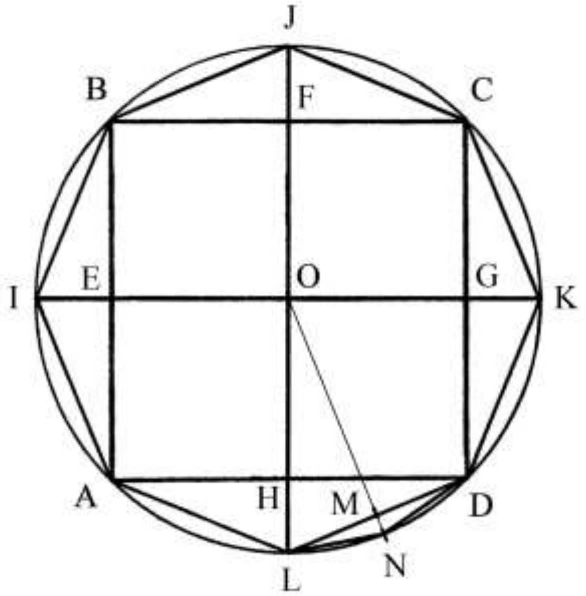
$$\text{Area}_{AIB} = IE * AB/2 = IE * AE .$$

L'area approssimata *per difetto* del cerchio è:

$$\text{Area}_{CERCHIO} = \text{Area}_{ABCD} + (\text{Area}_{AIB} + \text{Area}_{BJC} + \text{Area}_{CKD} + \text{Area}_{DLA}) =$$
$$= \text{Area}_{ABCD} + 4 * \text{Area}_{AIB} .$$

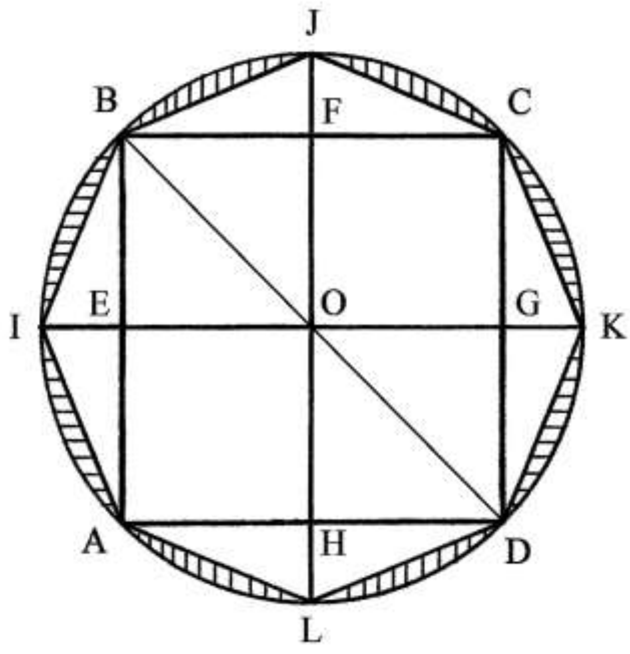
In realtà, Boysset calcolò l'area dell'*ottagono regolare* inscritto AIBJCKDL.

Una migliore approssimazione dell'area del cerchio è mostrata nella figura che segue, una soluzione che non sembra sia stata presa in considerazione da Boysset limitatosi alla divisione del cerchio e della circonferenza in 8 parti:



Determinare il punto medio di un lato dell’ottagono, ad esempio LD: è M. Tracciare il raggio passante per M: esso incontra la circonferenza in N: questo punto è un vertice dell’esadecagono inscritto, un poligono di 16 lati. Anche questa soluzione non sembra sia stata studiata da Boysset.

Per determinare l’importanza dell’errore commesso da Boysset, fissiamo il valore *convenzionale* del diametro del cerchio: BD = 2.



Nella figura sono tratteggiate le aree occupate dagli otto *segmenti circolari* delimitati dal cerchio e dai lati dell’ottagono: Boysset trascurò le loro aree.

Il diametro BD è una diagonale del quadrato ABCD per cui il suo lato AB è lungo:

$AB = BD/\sqrt{2} = 2/\sqrt{2} = (2 * \sqrt{2})/2 = \sqrt{2}$.

Il diametro IK è dato da:

$$IK = IE + EG + GK = EG + 2*IE = 2 + 2*IE.$$

Ne consegue:

$$IE = (IK – EG)/2 = (BD – AB)/2 = [(2 – \sqrt{2})]/2 .$$

L'area del triangolo isoscele AIB è:

$$\text{Area}_{AIB} = IE * AB/2 = [(2 – \sqrt{2})]/2 * [(\sqrt{2})/2] = (2*\sqrt{2} – 2)/4 = (\sqrt{2} – 1)/2 .$$

L'area dei *quattro* triangoli isosceli uguali a AIB è:

$$\text{Area}_{4\ TRIANGOLI} = 4 * \text{Area}_{AIB} = 4 * [(\sqrt{2} – 1)/2] = 2 * (\sqrt{2} – 1) .$$

L'area del quadrato ABCD è:

$$\text{Area}_{ABCD} = AB^2 = (\sqrt{2})^2 = 2 .$$

L'area del quadrato EFGH è:

$$\text{Area}_{EFGH} = EF^2 = (\sqrt{2})^2 = 2$$

L'area calcolata da Boysset è

$$\text{Area}_{CERCHIO}\ \text{Boysset} = AB^2 + \text{Area}_{4\ TRIANGOLI} = 2 + 2*(\sqrt{2} – 1) =$$
$$= 2 + 2*\sqrt{2} – 2 = 2 * \sqrt{2} \approx 2{,}8284$$

L'area corretta del cerchio è

$$\text{Area}_{CERCHIO} = \pi * r^2 \approx 3{,}1416 *(2/2)^2 \approx 3{,}1416 .$$

L'errore per difetto commesso da Boysset è:

$$\text{errore} = (\text{Area corretta} – \text{Area Boysset})/\text{Area corretta} \approx (3{,}1416 – 2{,}8284)/3{,}1416 \approx$$
$$\approx 9{,}969\ \%.$$

L'errore commesso da Boysset è significativo perché sfiora il 10%.

Se egli avesse applicato la formula approssimata per π risalente a Archimede $\pi \approx 22/7$, l'area del cerchio sarebbe più vicina a quella calcolata con $\pi = 3{,}1416$ e cioè:

$$\text{Area}_{CERCHIO} = \pi * r^2 \approx 22/7 * 1^2 \approx 3{,}1428 .$$

- APPROFONDIMENTO -

Gli arcaismi di Boysset

Benché fin dal 1202 Leonardo Fibonacci avesse introdotto nel "*Liber abbaci*" l'uso delle cifre arabe (0, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1 inizialmente scritte da destra verso sinistra seguendo l'analogo andamento della scrittura araba) e così avessero fatto sulla scia di Fibonacci i primi matematici e geometri toscani, Boysset continuò a manifestare difficoltà.

Boysset avrà pure avuto dei contatti con gli esponenti delle numerose comunità di toscani e di genovesi che vivevano nelle città della Provenza e vi esercitavano il commercio e l'attività bancaria, usando anche le cifre arabe e effettuando i calcoli su carta, ma sembra che la loro influenza su Boysset a questo riguardo abbia sortito solo effetti parziali. Egli infatti nella *Siensa de destrar* usò le *cifre romane* per numerare i fogli del manoscritto e le *cifre arabe* per i capitoli: la sua padronanza di queste ultime era piuttosto limitata perché i capitoli successivi al n. 10 furono numerati .101., .102. ecc., .201. fino a .303. Invece, nel secondo trattato, *La siensa d'atermenar*, la foliazione in cifre arabe è corretta.

Un altro arcaismo riscontrato nei lavori di Boysset è dato dalla povertà dei metodi di calcolo delle superfici piane. Per ciascuna figura egli usò quasi sempre una sola formula, al contrario della pluralità di formule impiegate dagli autori dei testi matematici del Duecento e del Trecento.

Un terzo arcaismo è rappresentato dalla tardiva scoperta da parte di Boysset dell'esistenza di un rapporto fisso fra la lunghezza di una circonferenza e quella del suo diametro.

- -

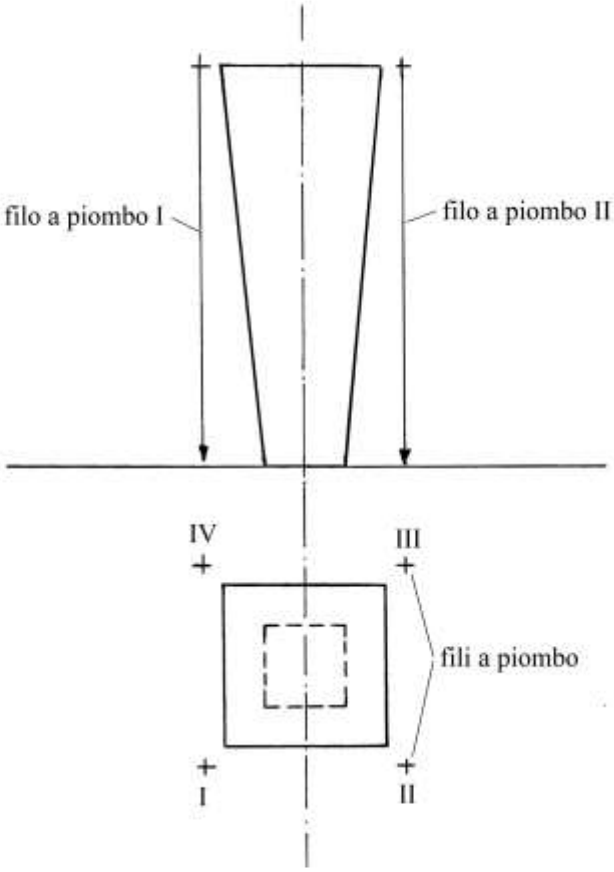
LA GEOMETRIA PRATICA DI BOYSSET

Alcuni fogli del manoscritto contengono delle costruzioni geometriche di figure piane (già in parte descritte nei precedenti paragrafi) e disegni di solidi.

Apparentemente, Boysset si impose una regola: qualsiasi oggetto che faceva parte di una spiegazione doveva essere visibile sul disegno, anche se risultava nascosto all'operatore.

Nel foglio 142 un *termine* è stato disegnato in proiezione frontale, ma l'immagine risulta falsata perché essa mostra *quattro* fili a piombo invece dei *due* visibili:

Il disegno che segue contiene due viste in *proiezioni ortogonali* (vista frontale e pianta) del termine:



Nella vista frontale sono visibili soltanto i fili a piombo numerati I e II.

<u>Il foglio 146 *recto*</u>

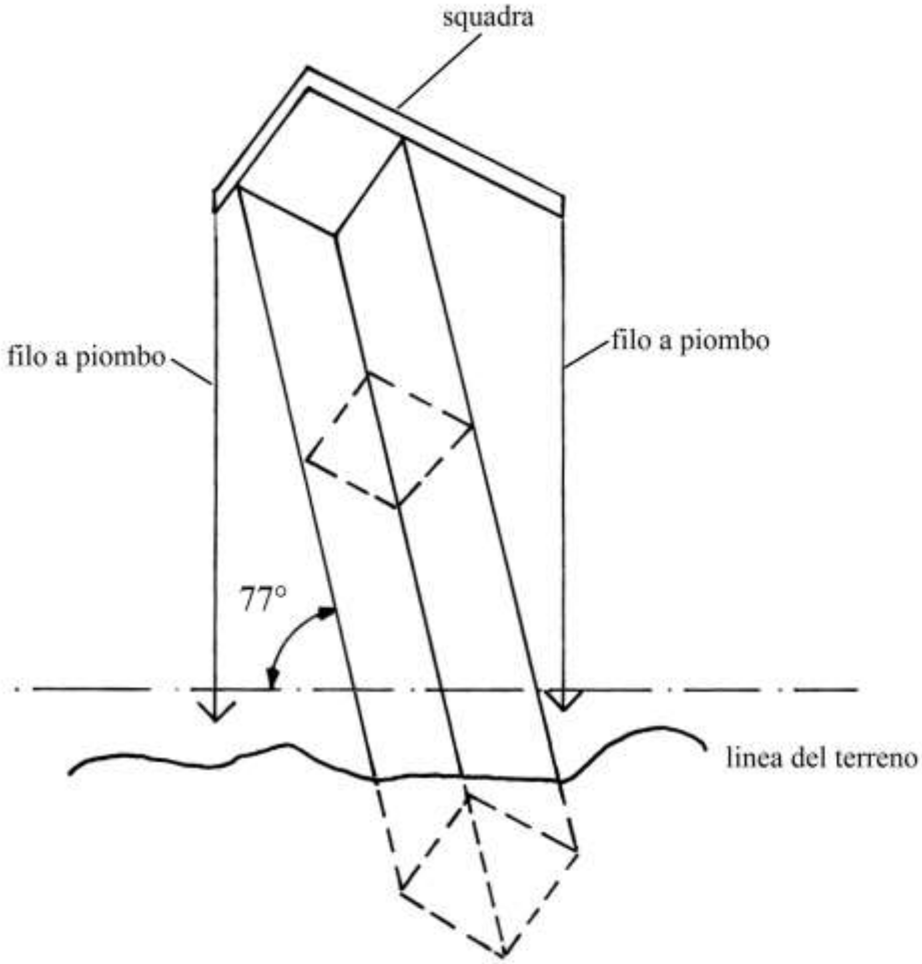
Nella tavola è disegnato un termine inclinato verso sinistra:

Boysset usò un’assonometria simile a quella *militare* con vista dall’alto.

Egli verificò la stabilità del termine con l'aiuto di una squadra e di due fili a piombo: è interessante notare le estremità *smussate* dei bordi della squadra.

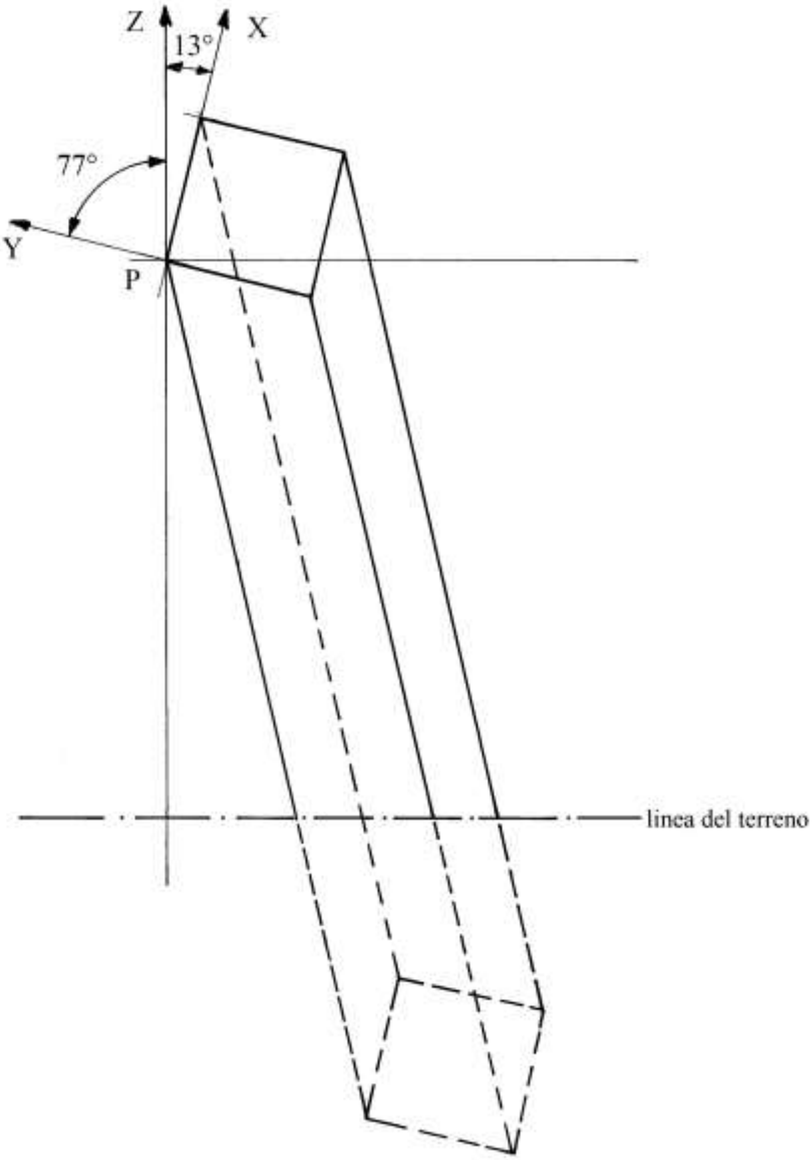
Con buona approssimazione si può ritenere che sia la base superiore (visibile in figura) sia quella inferiore (non visibile perché conficcata nel terreno) fossero quadrate: il disegno non è molto preciso perché fu realizzato in parte a mano libera e il solido con una riga o con una squadra. Il filo a piombo di sinistra è tracciato parallelo alla linea della rigatura verticale del foglio, ben visibile a destra dell'albero.

Il termine sembra essere formato da due prismi a base quadrata, sovrapposti:



Il solido è inclinato di 77° verso sinistra.

Lo schema che segue mostra una probabile ricostruzione dell'assonometria secondo i criteri moderni:

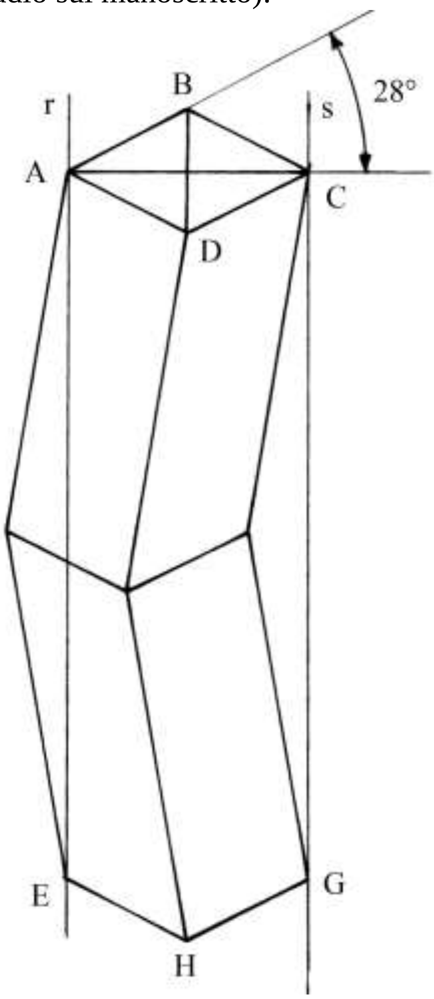


L'assonometria cavaliera militare è quella che la norma UNI EN ISO 5456-3 del febbraio 2001 chiama *planometrica*.

Il foglio 147*recto*

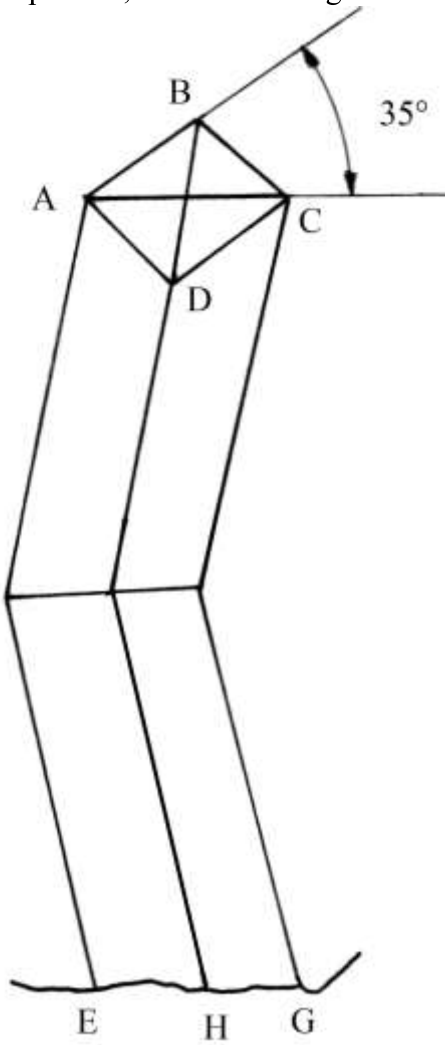
Il disegno mostra un *termine* deformato di sua natura:

Con la figura Boysset spiegò come fare per verificare la stabilità del termine usando il filo a piombo e una squadra. A questo scopo controllò con gli strumenti il parallelismo delle rette r e s rispettivamente passanti per i vertici AE e CG (secondo la ricostruzione che ne dà Magdeleine Motte a p. 330 del suo studio sul manoscritto):

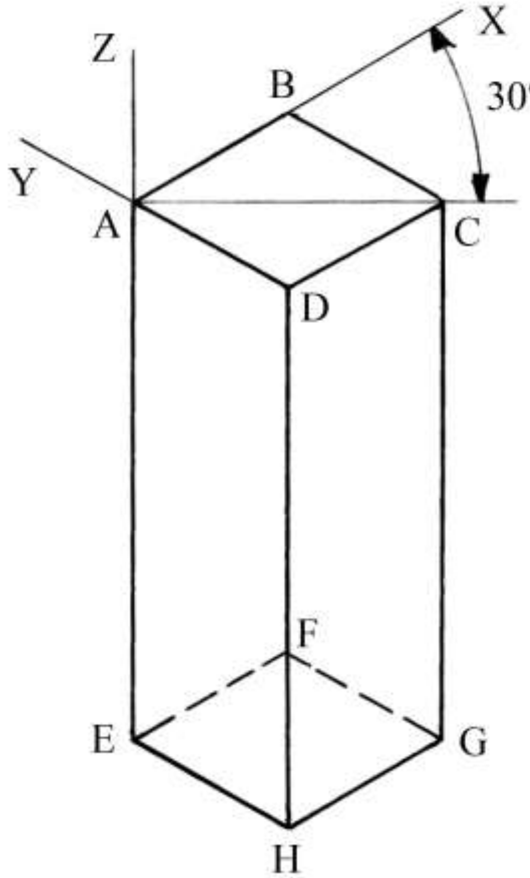


L'Autrice ha scomposto il solido deformato in due prismi a base quadrata di uguali dimensioni e uniti lungo una faccia comune.

L’angolo BAC è ampio 28°, mentre nella figura di Boysset è ampio 35°:



Queste considerazioni portano a ipotizzare che la faccia superiore del termine sia stata disegnata da Boysset in un’assonometria che si avvicina a quella *isometrica*:

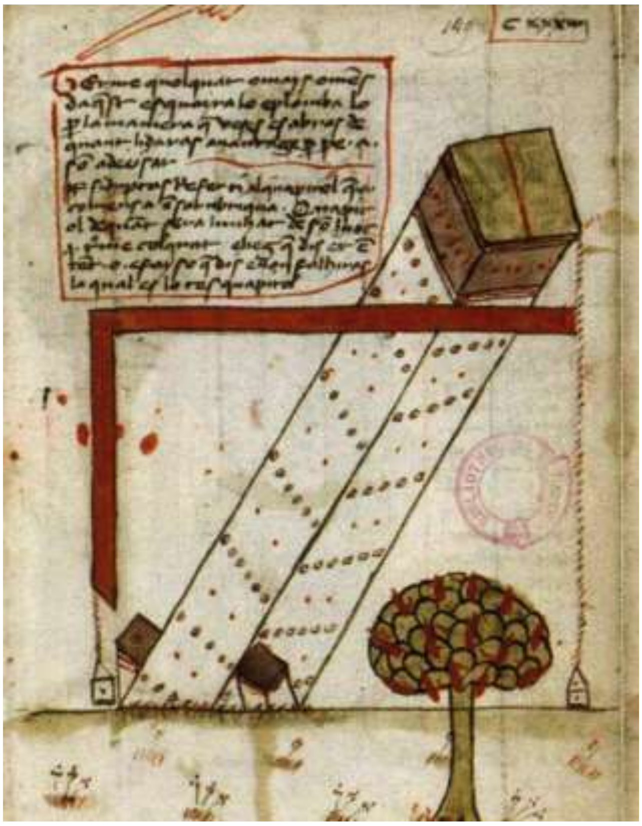


La parte superiore del corpo del termine pare disegnata in assonometria e la parte inferiore al di sotto della faccia comune ai due tronconi sembra rappresentata in vista frontale.

Il foglio 149 *recto*

Nell'immagine è disegnato un termine inclinato verso destra.

Con una grande squadra recante un filo a piombo e con un secondo filo a piombo , Boysset intendeva determina l'inclinazione da impartire al termine per raddrizzarlo verticalmente:



Alla base del termine sono disegnati due piccoli solidi a forma di prisma a base quadrata: sono i *testimoni* che in numero variabile accompagnavano sempre un termine.

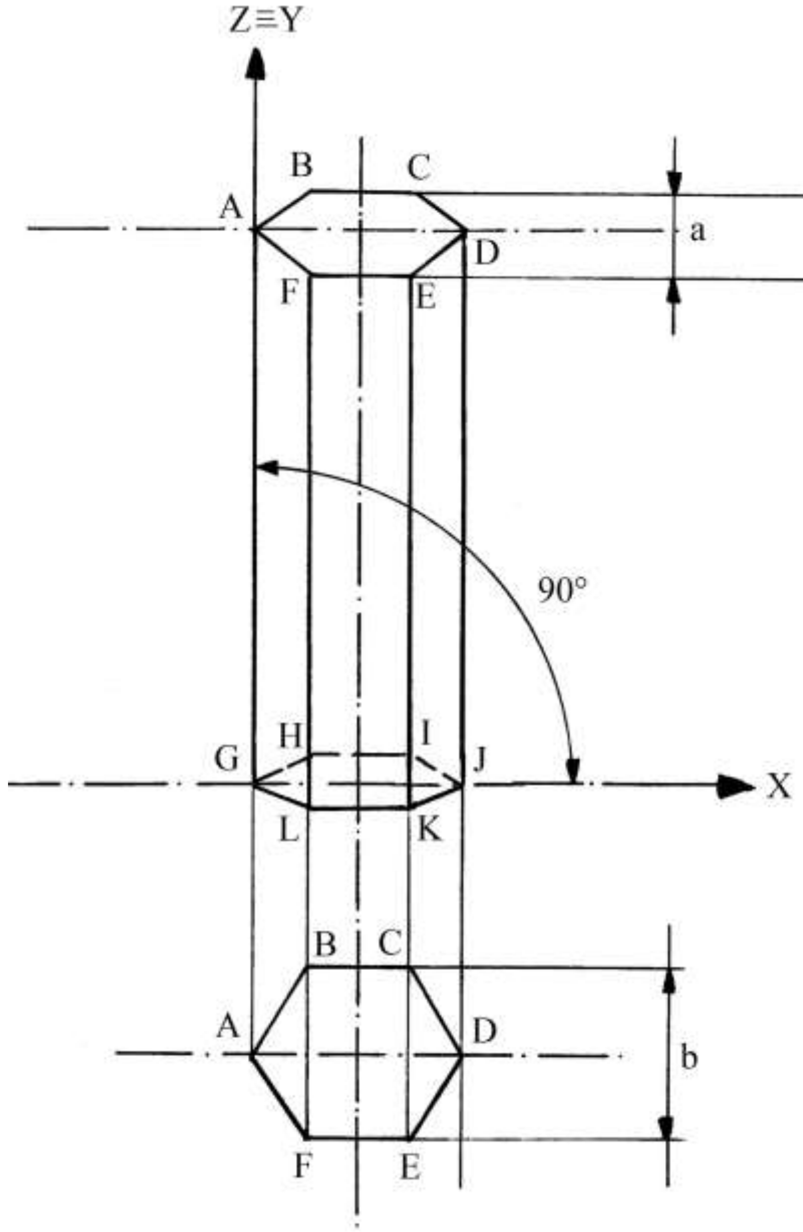
In alto a destra sono evidenti due numerazioni dei fogli: quella di destra, in inchiostro nero, è di mano di Boysset ed è in *cifre romane*. Quella alla sinistra è in tratto meno nitido. è in cifre arabe ed è più recente.

Il foglio 149 *verso*

Il foglio 149 *verso* contiene il disegno di un termine a forma di prisma esagonale:

La qualità del disegno è abbastanza scadente perché Boysset lo eseguì *a mano libera*, forse perché aveva maggiore familiarità con il disegno artistico.

Il grafico della figura che segue ha estrapolato il prisma esagonale e rettificato i suoi spigoli:



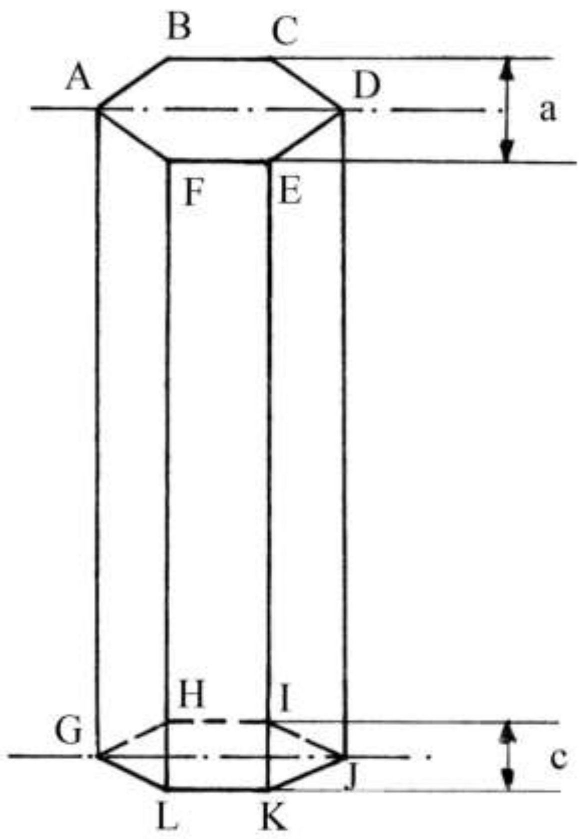
È da notare la mancanza di parallelismo dei quattro spigoli obliqui della faccia superiore e i corrispondenti spigoli di quella inferiore, come è facilmente verificabile confrontando i segmenti AF e GL: inoltre gli spigoli obliqui della faccia inferiore sono più corti di quelli corrispondenti della faccia superiore. Tutto ciò è dovuto anche allo scorciamento prospettico.

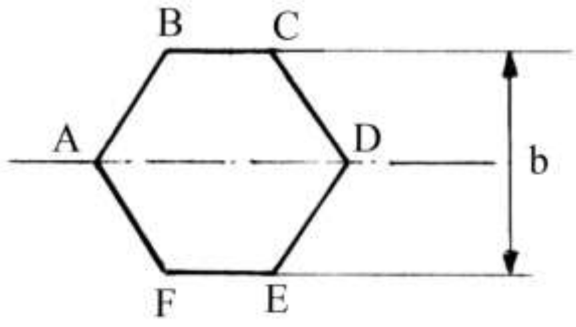
Nella precedente figura, in basso è disegnata la proiezione ortogonale o pianta della faccia superiore del prisma.

Il termine è disegnato in una variante dell’assonometria cavaliera. Il vertice G è il centro della proiezione (è l’origine dei tre assi X, Y e Z). Lo spigolo GA è costruito sull’asse Z: su di esso è posizionato anche l’asse Y che rappresenta la *direzione di fuga*; l’*angolo di fuga* è AGJ che è ampio 90°.

Il corpo del prisma sembrerebbe in proiezioni ortogonali, in vista frontale.

Lo schema seguente approfondisce la probabile struttura del disegno di Boysset, però *esaminata con metodi moderni*:





I segmenti BF e CE nella pianta misurano quanto il doppio apotema dell'esagono: essi sono lunghi b.

Con a e con c sono indicati le lunghezze scorciate dei doppi apotemi sulla faccia superiore e su quella inferiore del prisma.

Con una certa approssimazione, i rapporti fra le lunghezze di a, b e c sono i seguenti:

$b : a : c \approx 33 : 15 : 10$.

Il rapporto di fuga relativo alla faccia superiore è:

$a/b \approx 15/33 \approx 0{,}45$.

Infine, il rapporto di fuga relativo alla faccia inferiore è dato da:

$c/b \approx 10/33 \approx 0{,}30$.

A sei secoli di distanza dall’epoca durante la quale Boysset scrisse i suoi trattati è piuttosto difficile spiegare la differenza fra i due rapporti di fuga delle basi. Forse egli scorciò maggiormente la base inferiore perché andava interrata? O forse perché osservava dall’alto il prisma e la base gli risultava più scorciata (come accade nel caso della visione prospettica)?

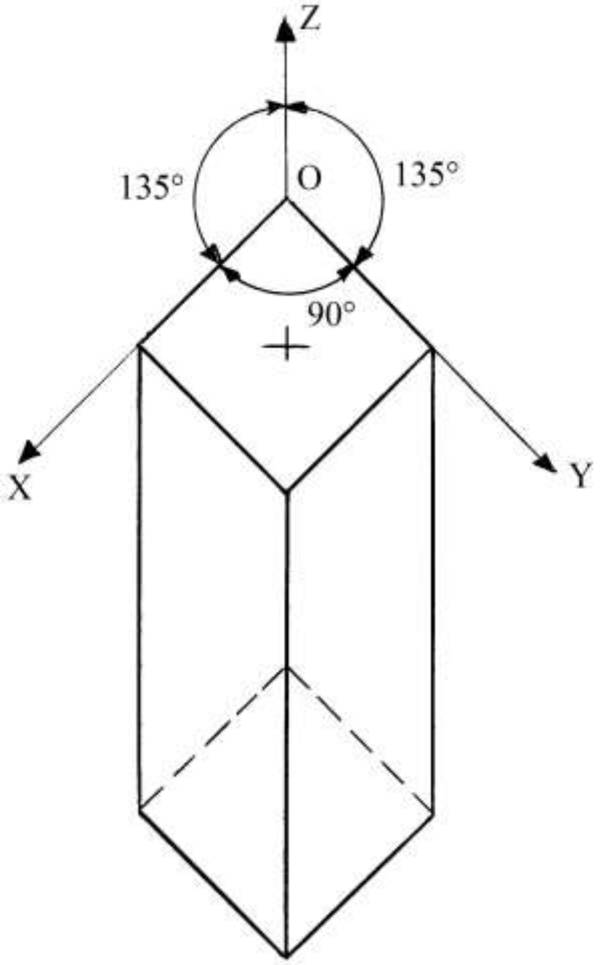
Foglio 155 *verso*

Nell’immagine sono disegnati tre termini a forma di prisma a base quadrata con due *testimoni* della stessa forma per ciascuno dei termini. Un testimone del termine centrale è divelto ed è disteso sul terreno:

I solidi (*termini* e *testimoni*) sono disegnati in assonometria militare.

Il punto O è l’origine comune ai tre assi X, Y e Z.

Gli assi X e Y formano un angolo di 90° e gli angoli compresi fra gli assi X e Z e Y e Z hanno uguale ampiezza pari a 135°:



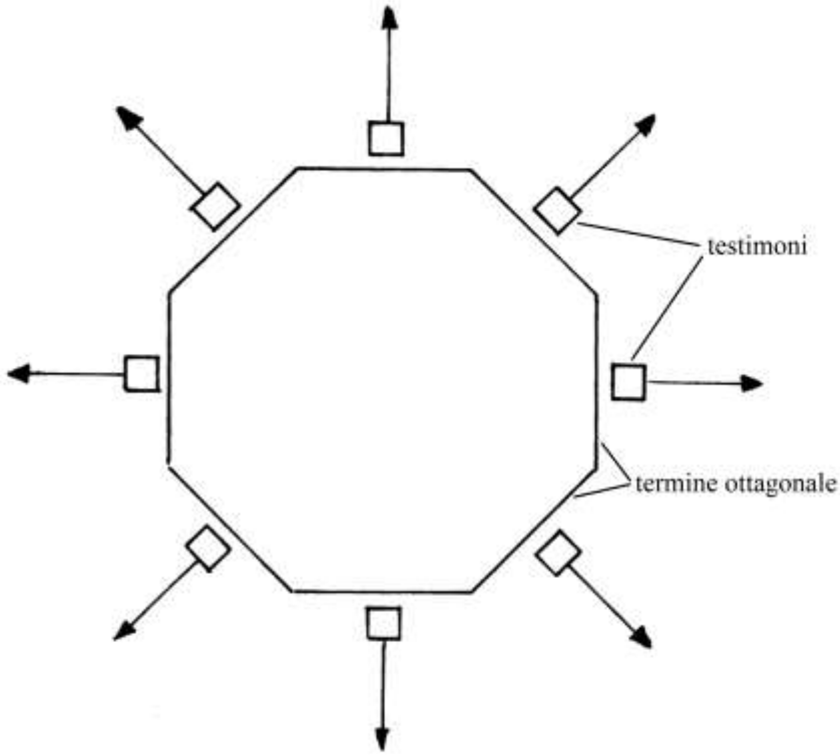
L’immagine è utile pure per ricavare un’idea dei rapporti dimensionali intercorrenti fra un termine e un testimone.

Nell’immagine che segue sono evidenziate due linee della *rigatura* della pagina:

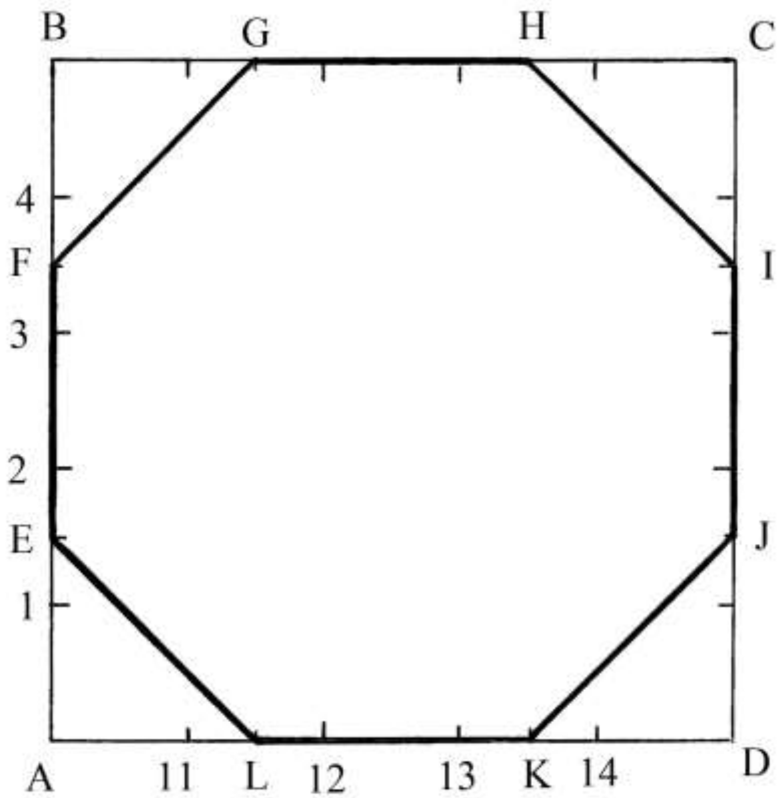
La linea verticale fu usata da Boysset per appoggiarvi lo spigolo di destra del termine più a destra. Una linea orizzontale della rigatura taglia le facce superiori dei tre termini, ma i centri delle facce non sono allineati, mentre la linea di terra è praticamente parallela a quella linea orizzontale. Ciò fa supporre che Boysset abbia almeno in parte disegnato a mano libera.

Foglio 212 *verso*

Boysset descrisse un problema: un *pilastro* a forma di prisma quadrato doveva essere modificato in un prisma a base *ottagonale* per essere usato allo scopo di delimitare una successiva divisione di un terreno in *otto* parti. Addossata a ciascuna faccia verticale del termine doveva essere applicato un testimone:



Il lato del quadrato della base era lungo *2 palmi* (e cioè 50 – 51 cm).
Boysset usò il metodo descritto nella figura che segue:



I passi che seguono riproducono il metodo impiegato da Boysset con l'ausilio di due strumenti: il compasso e la squadra.

ABCD è il quadrato originario con lati lunghi *convenzionalmente* 5 unità.

Dividere ciascun lato in *cinque* parti uguali: fra gli altri, sono così fissati i punti 1, 2, 3, 4 e 11, 12, 13, 14. Ciascuno di queste divisioni è lunga 1 unità.

Stabilire i punti medi dei segmenti "1 ÷ 2", "11 ÷ 12" e degli altri a partire dai vertici B e C.

Il segmento AE è lungo

$$AE = [A \div 1] + [1 \div 2]/2 = 1 + ½ = 1{,}5 .$$

Anche AL è lungo 1,5.

EFGHIJKL è l'ottagono *approssimato* inscritto nel quadrato ABCD.

A questo punto, Boysset doveva far asportare il materiale ai quattro prismi a base triangolare che hanno come facce superiori i quattro triangoli rettangoli isosceli AEL, BGF, CIH e DKJ.

Il lato EF è lungo

$EF = AB – AE – FB = 5 – 1{,}5 – 1{,}5 = 2$

I lati GH, IJ e LK hanno la stessa lunghezza di EF e cioè 2.

Il lato LE è lungo

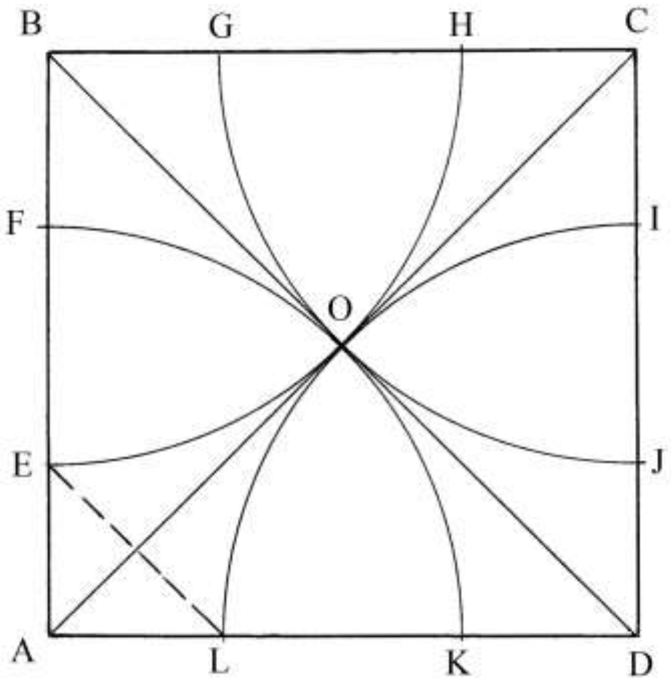
$$LE = \sqrt{(AE^2 + AL^2)} = \sqrt{(1{,}5^2 + 1{,}5^2)} = \sqrt{(2 * 1{,}5^2)} = 1{,}5 * \sqrt{2} \approx 2{,}1213 .$$

I lati obliqui dell'ottagono – FG, HI, JK e LE – hanno la stessa lunghezza che è *leggermente* maggiore di quella degli altri lati (EF, GH, IJ e KL).

Il metodo proposto da Boysset portava alla costruzione di un ottagono *quasi regolare*.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Per un confronto con il metodo di Boysset costruiamo un ottagono regolare inscritto in un quadrato ABCD con lati di lunghezza convenzionale uguale a 5:



Tracciare le diagonali AC e BD che si incontrano nel punto O.

I segmenti OA, OB, OC e OD hanno identica lunghezza che è uguale a metà di quella delle diagonali AC e BD.

Fare centro nei vertici A, B, C e D e con raggio AO disegnare quattro archi di circonferenza che si intersecano nel punto O e tagliano i quattro lati in complessivi otto punti: E, F, G, H, I, J, K e L.

La lunghezza della diagonale AC è data da:

$$AC = \sqrt{(AD^2 + DC^2)} = \sqrt{(2 * AD^2)} = \sqrt{(2 * 5^2)} = 5 * \sqrt{2} .$$

La semi diagonale OA è lunga:

$$OA = AC/2 = (5 * \sqrt{2})/2$$

Consideriamo ora il lato AD: i suoi segmenti AK e LD hanno la stessa lunghezza di OA e cioè $(5 * \sqrt{2})/2$.

Il segmento AL è lungo:

$$AL = AD - LD = 5 - (5 * \sqrt{2})/2 = 5 * [1 - (\sqrt{2})/2] = 5 * (2 - \sqrt{2})/2 .$$

KD è lungo quanto AL.

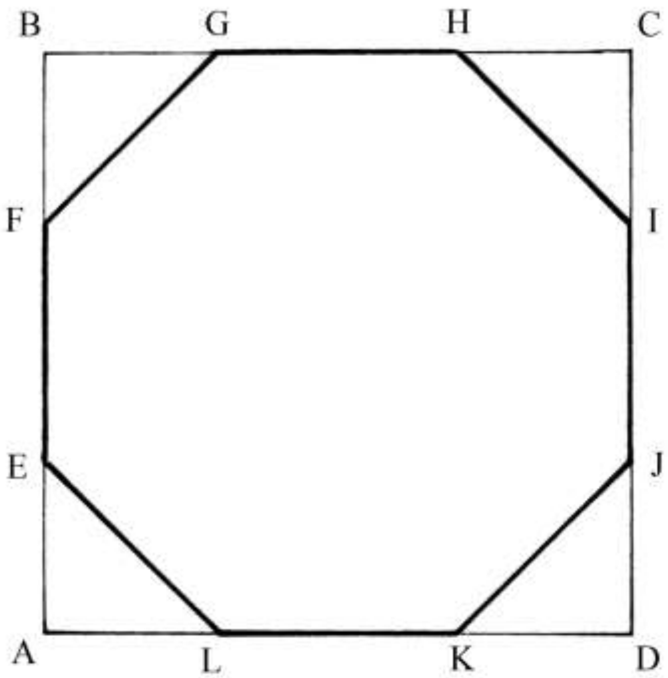
Il segmento LK è lungo:

$$LK = AD - AL - KD = AD - 2*AL = 5 - 2 * [5 * (2 - \sqrt{2})/2] = 5 - 5 * (2 - \sqrt{2}) =$$
$$= 5 * (1 - 2 + \sqrt{2}) = 5 * (\sqrt{2} - 1) .$$

Il segmento EL è l'ipotenusa del triangolo rettangolo isoscele EAL e la sua lunghezza è:

$$EL = \sqrt{(AE2 + AL2)} = \sqrt{(2 * AL2)} = AL * \sqrt{2} = [5 * (2 - \sqrt{2})/2] * \sqrt{2} =$$
$$= 5 * (\sqrt{2} - 1) \approx 2,071 .$$

I segmenti EL e LK hanno la stessa lunghezza che è quella del lato dell'*ottagono regolare* inscritto nel quadrato ABCD:



La lunghezza del lato EL – 2,071 – è compresa fra i due valori calcolati per la costruzione di Boysset: quattro lati lunghi 2 e gli altri quattro lunghi 2,1213.

Sovrapponendo la costruzione dell’ottagono di Boysset e quella dell’ottagono regolare le differenze risultano minime.

Foglio 214 *verso*

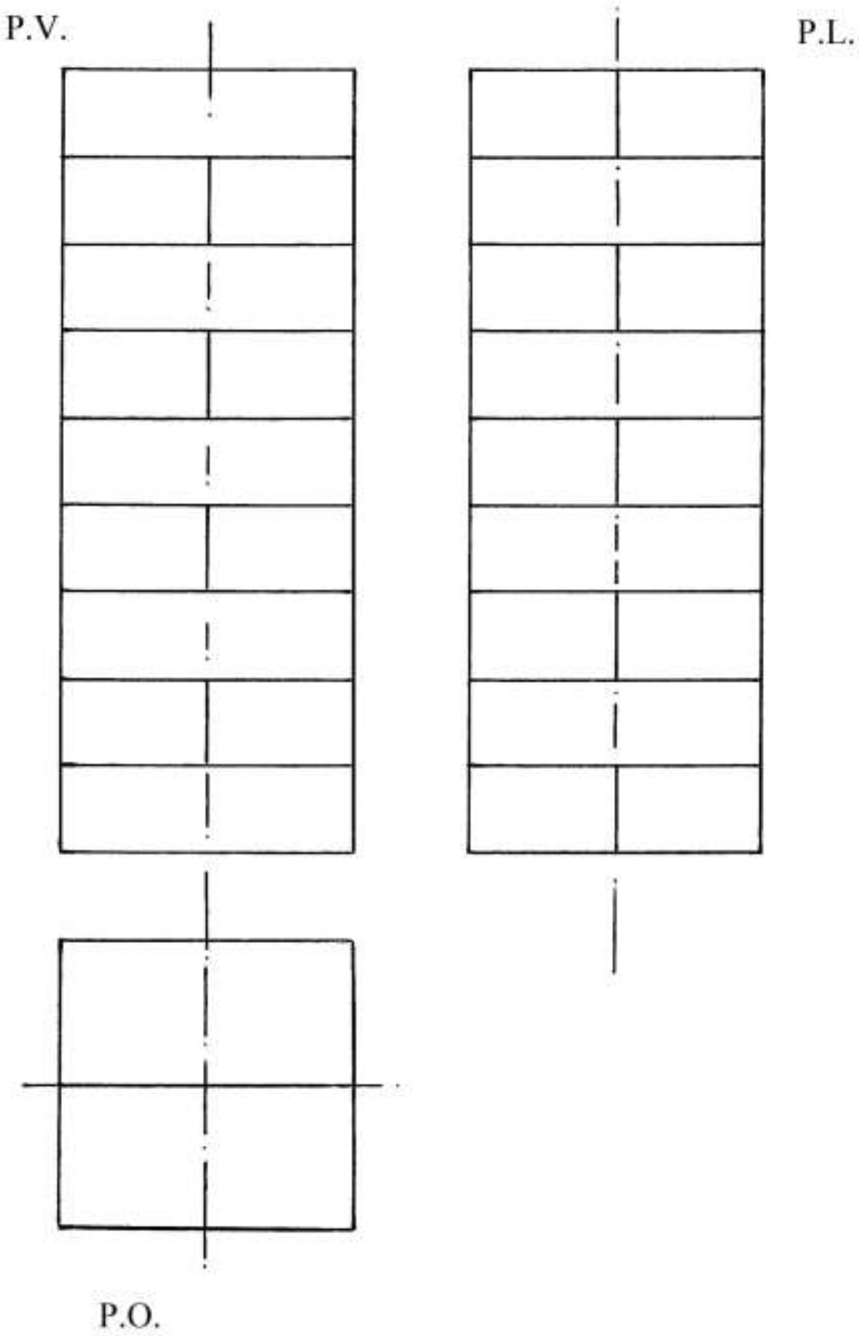
La figura mostra quattro agrimensori intenti a misurare un grande pilastro formato da un prisma a base quadrata:

Esso è rappresentato in modo approssimato in *assonometria isometrica*.

Uno degli agrimensori (lo stesso Bertrand Boysset ?) regge con la mano sinistra una squadra e con la destra tiene un compasso.

Il corpo del pilastro pare essere formato da elementi rettangolari con la base a forma di mezzo quadrato.

Gli strati sono ruotati l’uno rispetto al sottostante di 90°, come spiegano le proiezioni ortogonali che seguono:



La struttura è simile a quella dell'*opus quadratum* dei Romani.

Il pilastro disegnato contiene *nove* strati visibili il più basso dei quali è parzialmente conficcato nel terreno perché il pilastro pare inclinato verso il lettore.

Foglio 216 *verso*

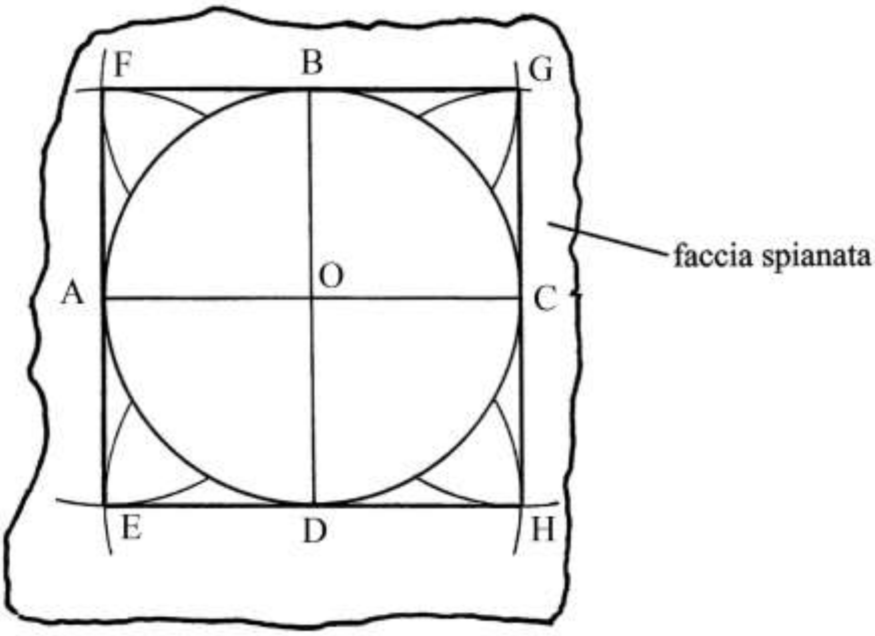
In questo foglio, Boysset descrisse la soluzione di un problema: squadrare un tronco di legno o un blocco di pietra e disegnarvi il quadrato più grande possibile.

[fonte: Motte (6)]

A parte i differenti artigiani coinvolti (falegname o tagliapietre) e i diversi utensili da lavoro da essi impiegati, la soluzione proposta dall'autore era praticamente uguale per entrambi i materiali (legno o pietra).

Il passo iniziale consisteva nello spianare il solido su due facce, presumibilmente opposte e parallele.

Sulla faccia superiore veniva fissato per tentativi un punto centrale, O:



Con un compasso adatto al materiale (di *legno* per il legno e di *ferro* per la pietra) Boysset tracciava una circonferenza.

Sicuramente con riga e squadra, disegnò i due diametri perpendicolari AC e BD.

Facendo centro in O tracciò una circonferenza che fissò i punti A, B, C e D.

Boysset usò il compasso facendo centro nei punti A, B, C e D con, probabilmente, la stessa apertura OA, e disegnò otto archi che si intersecavano nei punti E, F, G e H, vertici del quadrato EFGH, tangente alla circonferenza negli estremi dei due diametri.

Nell'immagine di Boysset, il solido è disegnato in pianta mentre i quattro agrimensori o artigiani sono in piedi e quindi *verticali*.

Infine, sono da notare le notevoli dimensioni del compasso poggiato sul piano.

Bibliografia

1. Bar Hiyya Abraam [*Savasorda*], "Llibre de Geometria" (*Hibbur hameixihà uehatixbòret*), a cura di Miquel Guttmann, traduzione dall'ebraico in catalano a cura di J. Millàs i Vallicrosa, Barcellona, Editorial Alpha, 1931, pp. XXIX-153.
2. Gautier Dalché Patrick – Querrien Armelle, "Mesure du sol et géométrie au Moyen Âge", AHDLMA, vol. 82 (2015), pp. 97-139.
3. Faudot Murielle, "Redécouverte d'un arpenteur arlésien: Bertrand Boysset (vers 1355-vers 1416)", "Dialogues d'histoire ancienne", vol. 21, n° 2, 1995, pp. 360-369.
4. Guerreau Alain, «'Postscriptum': *mensura*, représentation du monde, structures sociales », *Histoire & Mesure*, XVI-3/4, pp. 405-414.
5. Meyer Paul, "Les manuscrits de Bertran Boysset", in *Romania*, 21e année, Parigi, 1892, pp. 557-580 e in *Romania*, 22e année, Parigi, 1893, pp. 87-126.
6. Motte Magdeleine, "La cana e lo destre". Essai de métrologie des pays occitans de la préhistoire au XVIIIe siècle, Éditions de la Maison des sciences de l'homme, Mayenne, 2009, pp. VII+345.
7. Motte Magdeleine, "Manuscrit 327 de l'Inguimbertine dit «Traité d'Arpentage» (Bertran Boysset)", traduzione dal provenzale in francese, Presses Universitaires de la Méditerranée, Montpellier, 2010, pp. 501.
8. Portet Pierre", "Bertrand Boysset, la vie et les oeuvres techniques d'un arpenteur medieval (v.1355 – v.1416), Parigi, Éditions Le Manuscrit, tomo I, 2004, pp. 272 e tomo II, 2004, pp. 323.
9. Querrien Armelle, "Les formes circulaires de l'espace bâti et agricole au Moyen Âge: trace, mesure et partage", "*Archéologie Médiévale*", tomo 38, pp. 123 – 158, Parigi, CNRS, 2008.
10. Querrien Armelle, "Techniques et pratiques de la mesure du sol", in "L'Atelier du Médiéviste" (AM), n. 13, a cura di Patrick Gautier Dalché, Brepols Publisher, Turnhout, 2013, pp. 625-672.

Siti Internet

1. http://lamop.univ-paris1.fr/sites/arpenteur/edition/Index.htm
2. https://www.archeogeographie.org/index.php?rub=arpentage/medieval/bboysset