© Sergio Calzolani, Firenze, 2016
sergio(punto)calzolani(at)outlook(punto)it

Parole chiave: geometria Gromatici, aree di triangoli, cerchio inscritto in un triangolo rettangolo, aree di vari quadrilateri, aree di poligoni regolari

LA GEOMETRIA DI BOEZIO

Severino Boezio (480 – 524) è stato un politico, filosofo e matematico romano.

La sua opera geometrica mostra una chiara influenza dei trattati dei Gromatici latini e in particolare del testo attribuito a Epafrodito e a Vitruvio Rufo.

Dato che le cifre arabe gli erano ignote perché giunte in Europa alcuni secoli più tardi, Boezio impiegò le cifre romane per indicare lunghezze e aree.

Le lunghezze furono scritte vicino ai lati e l'area all'interno.

Le unità di misura usate da Boezio sono il *piede* per le lunghezze e il *piede quadrato* (piede^2) per le superfici.

È ragionevole pensare che Boezio usasse il *piede romano* lungo l'equivalente di 29,57 cm.

- APPROFONDIMENTO -

Alcuni storici della matematica mettono in dubbio l'attribuzione a Boezio della "geometria" che è conosciuta con il suo nome. Alcuni di essi chiamano *PseudoBoezio* l'ipotetico autore del testo. Infatti, potrebbe trattarsi di una semplice rielaborazione del lavoro dei Gromatici Epafrodito e Vitruvio Rufo.

Tutto ciò potrebbe essere confermato dall'identità di alcuni problemi contenuti nei due testi, caratterizzati entrambi dalle stesse lunghezze lineari espresse in piedi romani e dall'identità dei metodi impiegati e delle soluzioni ottenute.

- -

Triangolo equilatero

Un triangolo equilatero ha lati lunghi 30 piedi e area uguale a 390 piedi^2:

Per ricavare l'area, Boezio usò la seguente procedura:

* calcolare il quadrato del lato: $30^2 = 900$;
* sottrarre 500: $900 – 500 = 400$;
* sottrarre 10: $400 – 10 = 390$ piedi^2.

Può Boezio aver applicato indirettamente la formula di Erone per l'area del triangolo equilatero?

$$\text{Area triangolo}_{\text{ERONE}} = \frac{13}{30} \cdot \text{lato}^2$$

La formula di Erone può essere scritta come segue:

$$\frac{13}{30} \cdot \text{lato}^2 = \frac{30-17}{30} \cdot \text{lato}^2 = \left(\frac{30}{30} - \frac{17}{30}\right) \cdot \text{lato}^2$$

$$\text{I } \frac{17}{30} \cdot \text{lato}^2 \text{ valgono:}$$

$$\frac{17}{30} \cdot 30^2 = 17 \cdot 30 = 510 = 500 + 10 \text{ piedi}^2$$

Questi due ultimi numeri (500 e 10) furono sottratti separatamente da Boezio dal quadrato del lato.

La formula di Erone dà il risultato

$$\text{Area}_{\text{ERONE}} = \frac{13}{30} \cdot 30^2 = 390 \text{ piedi}^2$$

che è lo stesso di Boezio.

La formula corretta fornisce il valore seguente:

$$\text{Area triangolo} = \frac{\text{base} \cdot \text{altezza}}{2} = \frac{30 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 30}{2} =$$

$$= 225 \cdot \sqrt{3} \cong 389,71 \text{ piedi}^2$$

che è praticamente uguale ai valori ricavati con la formula di Erone e con la procedura di Boezio.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Un secondo esempio di triangolo equilatero mostrato da Boezio ha lati lunghi 28 piedi:

Per Boezio l'area è CCCCVI = 406 piedi^2.

Il risultato fornito da Boezio per l'area è del tutto errato perché questo triangolo equilatero ha lato (28 piedi) più corto del lato del precedente (30 piedi) e superficie maggiore: 406 contro 390 piedi^2.

È probabile che Boezio abbia applicato la formula di Vitruvio Rufo:

$$\text{Area}_{\text{triangolo}} = \frac{l^2 + l}{2} = \frac{28^2 + 28}{2} = \frac{784 + 28}{2} =$$

$$= \frac{812}{2} = 406 \text{ piedi}^2$$

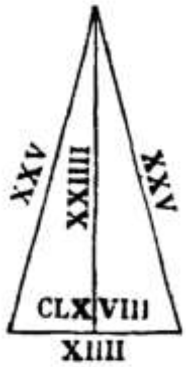
Il risultato è uguale a quello scritto all'interno della figura (CCCVI = 406 piedi^2).

Se Boezio avesse usato la formula approssimata di Erone, il risultato sarebbe stato quasi esatto:

$$\text{Area} = \frac{13}{30} \cdot \text{lato}^2 = \frac{13}{30} \cdot 28^2 \cong 340 \text{ piedi}^2$$

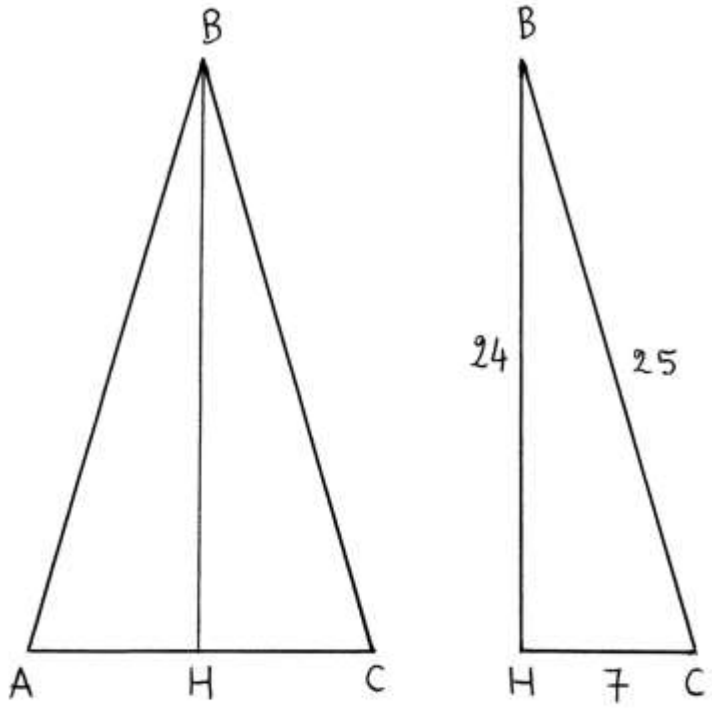
<u>Triangolo isoscele</u>

Un triangolo isoscele ha le dimensioni indicate nella figura che segue:



L'area è correttamente indicata in 168 piedi^2.

Il triangolo ABC è generato dall'unione di due triangoli rettangoli ABH e BHC, uniti lungo il cateto maggiore BH che è l'altezza del triangolo isoscele:



I due triangoli rettangoli hanno lati lunghi secondo la terna pitagorica 7 – 24 – 25.
L'altezza BH è lunga

$$BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{25^2 - 7^2} = \sqrt{576} = 24 \text{ piedi}$$

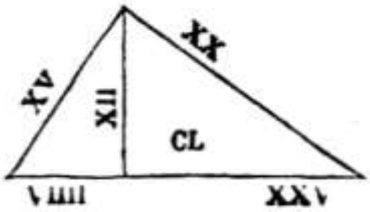
L'area è data dal semiprodotto della base AC per l'altezza BH:

$$\text{Area corretta} = \frac{14 \cdot 24}{2} = 168 \text{ piedi}^2$$

Il risultato è identico a quello ricavato da Boezio.

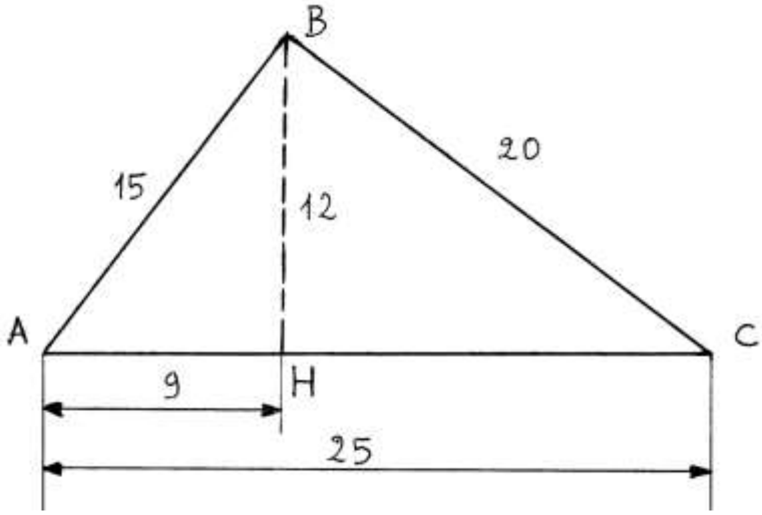
Triangolo scaleno

La figura che segue rappresenta un triangolo scaleno con angolo retto nel vertice in alto:

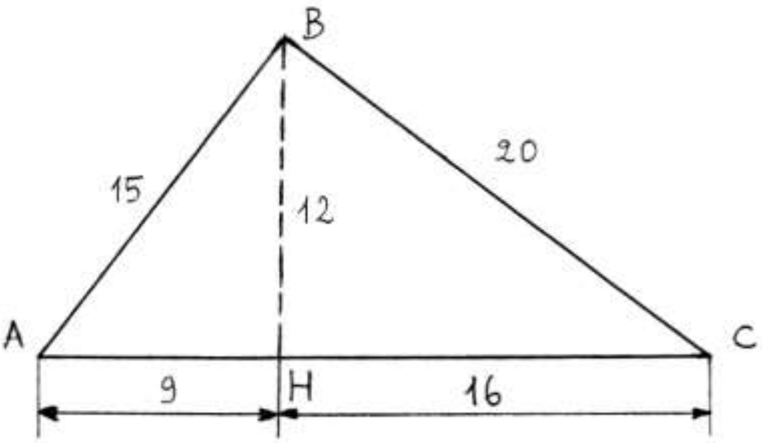


Boezio ricavò correttamente l'altezza BH (12 piedi) e l'area del triangolo, 120 piedi^2.

Il triangolo ABC è rettangolo nel vertice B: i lati sono lunghi in proporzione alla terna pitagorica 3 – 4 – 5 moltiplicata per il fattore 5.



L'altezza BH divide ABC in due triangoli rettangoli: ABH e BHC.

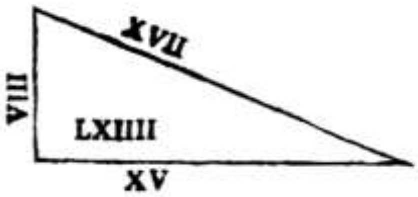


I due triangoli rettangoli hanno lati lunghi rispettivamente 9 – 12 – 15 e 12 – 16 – 20: entrambe le terne sono multiple della terna 3 – 4 – 5 di un fattore 3 la prima e 4 la seconda.

L’esempio è presente nelle opere di Epafrodito e di Vitruvio Rufo.

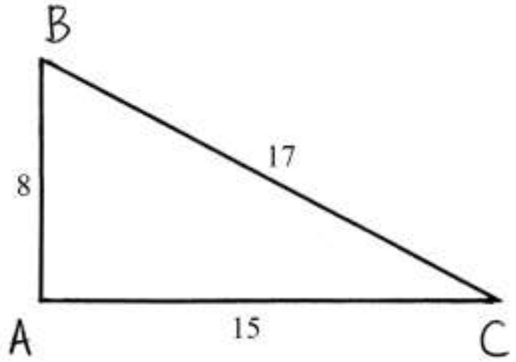
<u>Il triangolo rettangolo 8 – 15 – 17</u>

Il triangolo rettangolo ha lati lunghi secondo una terna pitagorica:



L’area del triangolo rettangolo è indicata da Boezio in 64 piedi^2.

L’area esatta è data dal semiprodotto dei due cateti, AB e AC:

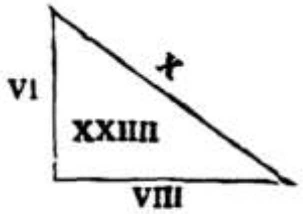


$$\text{Area} = \frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{8 \cdot 15}{2} = 60 \text{ piedi}^2$$

Si è forse trattato di un errore del copista?

<u>Triangolo rettangolo 6 – 8 – 10</u>

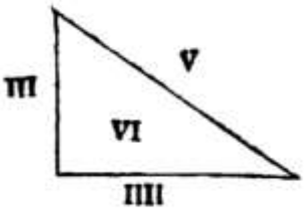
Boezio calcolò correttamente in 24 piedi^2 l’area di questo triangolo rettangolo:



Il triangolo ha lati con lunghezze multiple di un fattore 2 della terna 3 – 4 – 5.

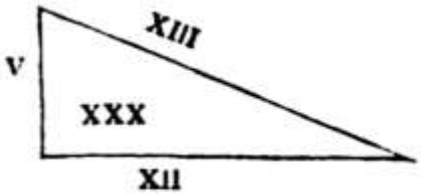
<u>Triangolo rettangolo 3 – 4 – 5</u>

Boezio presentò poi il triangolo 3 – 4 – 5 per il quale calcolò l'esatta area in 12 piedi^2:



<u>Triangolo rettangolo 5 – 12 – 13</u>

Questo triangolo rettangolo ha lati le cui lunghezze formano una terna pitagorica:

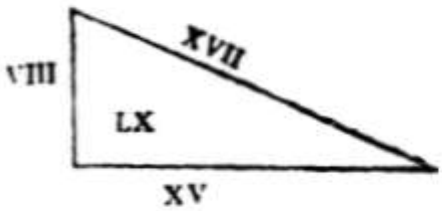


Boezio stabilì la sua corretta area uguale a 30 piedi^2.
Il risultato è dato dal prodotto delle lunghezze dei due cateti diviso per due:

$$\text{Area} = \frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{5 \cdot 12}{2} = 30 \text{ piedi}^2$$

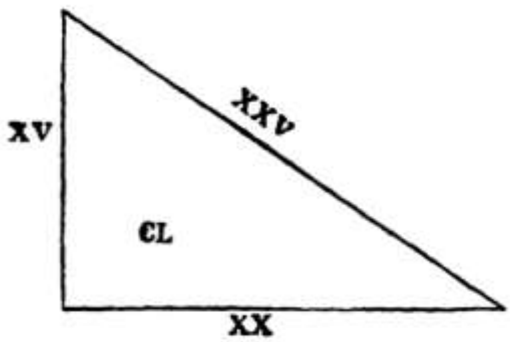
<u>Triangolo rettangolo 8 – 15 – 17</u>

Anche nel caso di questo triangolo (anch'esso formante una terna pitagorica), Boezio calcolò correttamente l'area uguale a 60 piedi^2:



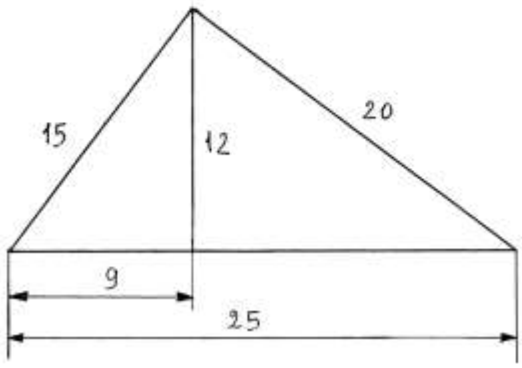
<u>Triangolo 15 – 20 – 25</u>

Questo triangolo deriva da quello 3 – 4 – 5 moltiplicando le lunghezze dei suoi lati per 5:



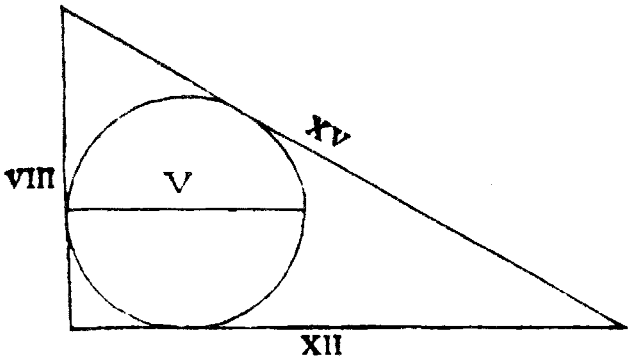
L'area indicata da Boezio, 150 piedi^2, è corretta.

Questo esempio è una variante del triangolo 15 – 20 – 25 contenuta in Epafrodito e Vitruvio Rufo e già descritta in un precedente paragrafo:



Cerchio inscritto in un triangolo rettangolo

Boezio descrisse un triangolo rettangolo nel quale inscrisse un cerchio:



Le dimensioni scritte sui lati del triangolo sono *errate* perché la somma dei quadrati delle lunghezze dei cateti è diversa dal quadrato dell'ipotenusa:

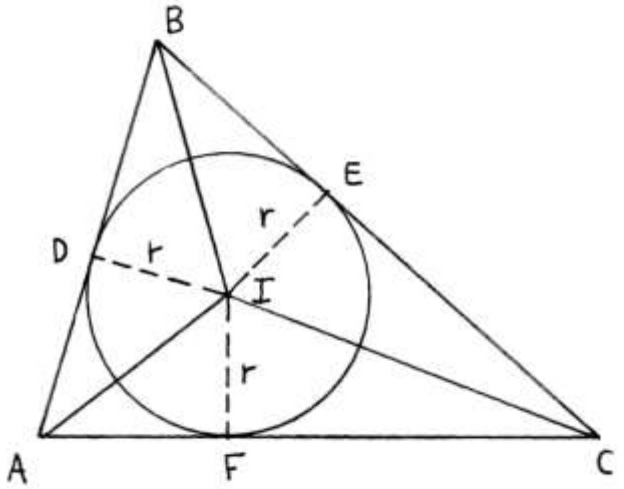
$(VIII)^2 + (XII)^2 = 8^2 + 12^2 = 64 + 144 = 208$.

Il quadrato dell'ipotenusa dà: $(XV)^2 = 15^2 = 225$

La lunghezza dell'ipotenusa reale è: ipotenusa = $\sqrt{208} \approx 14{,}42$ piedi anziché 15 piedi.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Il triangolo ABC della figura che segue è un generico scaleno:



Le *bisettrici* dei tre angoli interni si incontrano nell'incentro I: da questo punto condurre le perpendicolari ai tre lati, che sono i segmenti ID, IE e IF:

Questi sono i raggi, r, del cerchio di centro I inscritto nel triangolo.

ABC è ora diviso in tre triangoliAIB, BIC e AIC.

L'area di ciascuno dei tre triangoli è data dal semiprodotto del relativo lato di base per l'altezza, che è uguale per tutti e tre ed è lunga quanto il raggio r.

La somma delle tre aree fornisce quella dell'intero triangolo:

$$\text{Area}_{ABC} = \text{Area}_{AIB} + \text{Area}_{BIC} + \text{Area}_{AIC} =$$

$$= \frac{AB \cdot DI}{2} + \frac{BC \cdot EI}{2} + \frac{AC \cdot FI}{2} =$$

$$= \frac{AB \cdot r}{2} + \frac{BC \cdot r}{2} + \frac{AC \cdot r}{2} =$$

$$= \frac{(AB + BC + AC)}{2} \cdot r = \frac{\text{perimetro}}{2} \cdot r$$

La lunghezza del raggio r è ricavata con la formula inversa:

$$r = \frac{2 \cdot \text{Area}_{ABC}}{\text{perimetro}}$$

Applicando la formula di Erone per l'area del triangolo alla figura di Boezio mostrata all'inizio del paragrafo, viene calcolata l'area a partire dal *semiperimetro* m:

$$m = \frac{\text{perimetro}}{2} = \frac{8 + 15 + 12}{2} =$$

$$= \frac{35}{2} = 17{,}5 \text{ piedi}$$

$$Area = \sqrt{17{,}5 \cdot (17{,}5-8) \cdot (17{,}5-15) \cdot (17{,}5-12)} =$$

$$= \sqrt{17{,}5 \cdot 9{,}5 \cdot 2{,}5 \cdot 5{,}5} =$$

$$= \sqrt{2285{,}9375} \cong 47{,}81 \text{ piedi}$$

Il raggio r del triangolo di Boezio è dato dalla formula inversa:

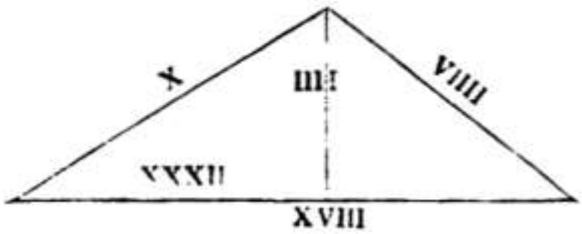
$$r \cong \frac{2 \cdot 47{,}81}{8+15+21} \cong \frac{2 \cdot 47{,}81}{35} \cong$$

$$\cong 2{,}732 \text{ piedi}$$

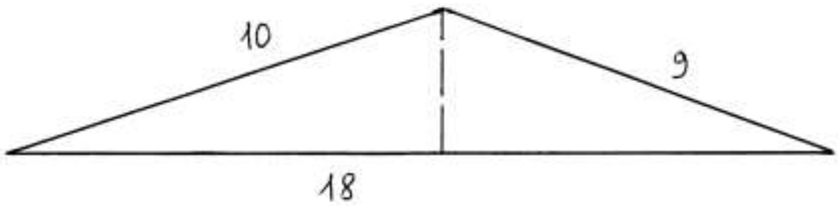
Il diametro è 5,464 piedi, mentre per Boezio è lungo soltanto 5 piedi.

Triangolo scaleno

La figura contenuta nel testo di Boezio è del tutto fuori scala:



La figura che segue la rappresenta con la corretta proporzione:



Stando ai dati forniti da Boezio, il perimetro 2m è:

2m = 10 + 9 + 18 = 37 piedi.

Il semiperimetro m vale: m = 37 : 2 = 18,5 piedi.

Applicando la formula di Erone viene ricavata l'area del triangolo:

$$Area = \sqrt{m \cdot (m - lato1) \cdot (m - lato2) \cdot (m - lato3)} =$$

$$= \sqrt{18{,}5 \cdot (18{,}5-10) \cdot (18{,}5-9) \cdot (18{,}5-18)} =$$

$$= \sqrt{18{,}5 \cdot 8{,}5 \cdot 9{,}5 \cdot 0{,}5} \cong 27{,}33 \text{ piedi}^2$$

Conoscendo l’area è ora possibile ricavare l’altezza relativa alla base lunga 18 piedi:

$$h = \frac{2 \cdot \text{Area}}{18} = \frac{2 \cdot 27{,}33}{18} \cong 3 \text{ piedi}$$

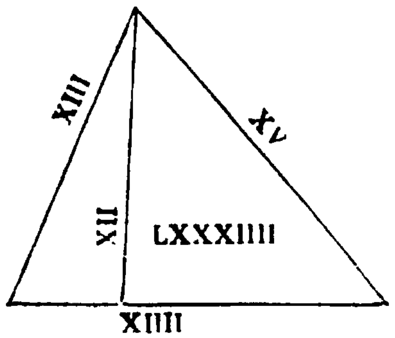
Sul disegno originale l’altezza è indicata con (III | I) ciò che può essere letto come 3 o come 4 piedi.

L’area indicata da Boezio è XXXII = 32 piedi^2 e cioè largamente errata *per eccesso*.

Il triangolo 13 – 14 – 15

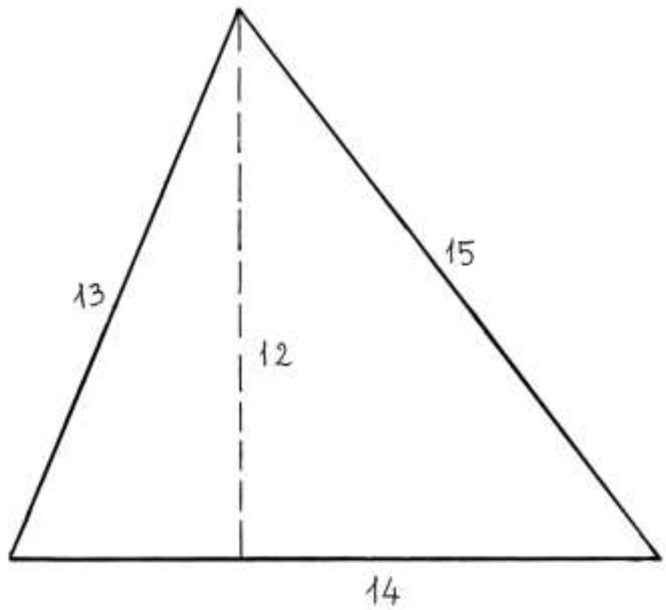
Anche Boezio presentò questo famoso triangolo scaleno.

È noto che il primo geometra a studiare questo triangolo fu Erone di Alessandria. Dopo Erone e Boezio si interessò a questo triangolo anche Piero della Francesca.



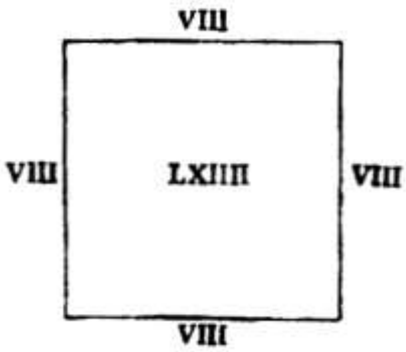
Boezio determinò correttamente l’altezza relativa alla base lunga 14 piedi: 12 piedi.

Anche l’area fu da lui calcolata correttamente in 84 piedi^2:



Quadrato

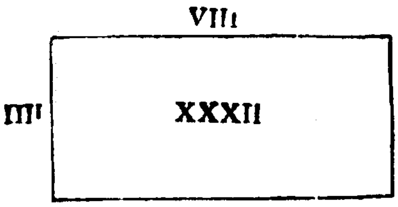
L’area di un quadrato con lato lungo 8 piedi fu correttamente calcolata in 64 piedi^2:

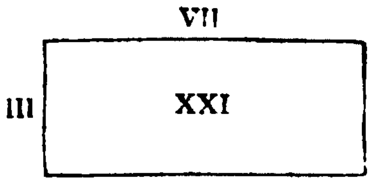


Due rettangoli

Due rettangoli hanno le seguenti dimensioni:

* 8 x 4 piedi;
* 7 x 3 piedi.

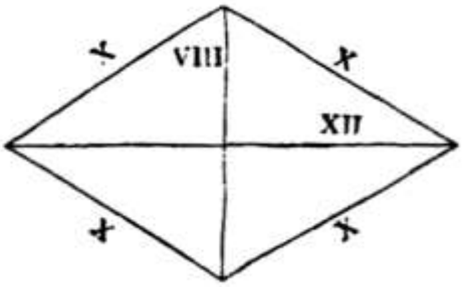




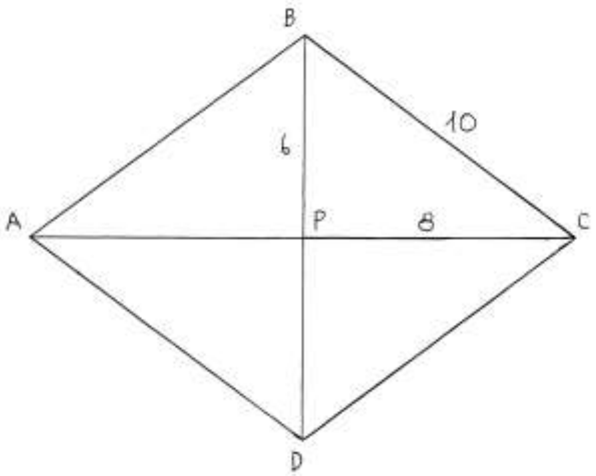
Per entrambi i quadrilateri, Boezio calcolò correttamente le aree, rispettivamente 24 e 21 piedi^2.

Rombo

Boezio descrisse un rombo con lati lunghi 10 piedi:



Le dimensioni sono scritte in modo sbagliato (un altro errore del copista?), come dimostra la figura che segue:

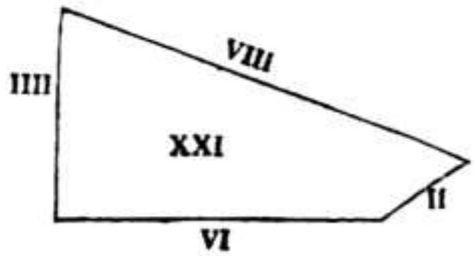


Il rombo è formato da quattro triangoli rettangoli con lati lunghi in proporzione alla terna 6 – 8 – 10 che è multipla del fattore 2 della terna pitagorica 3 – 4 – 5.

Boezio non indicò l'area del rombo.

<u>Quadrilatero</u>

Il quadrilatero presentato da Boezio ha forma irregolare:



Egli ne calcolò l'area in 21 piedi^2.

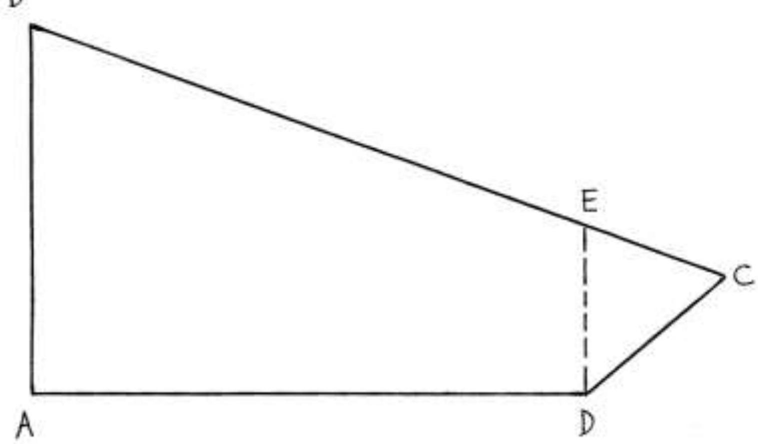
È evidente che Boezio applicò la *formula degli agrimensori*:

area = prodotti delle semisomme dei lati opposti.

In numeri, l'area è data da

$$\text{Area} = \frac{4+2}{2} \cdot \frac{6+8}{2} = 3 \cdot 7 = 21 \text{ piedi}^2$$

La formula fornisce un risultato errato *per eccesso* come è facilmente dimostrabile scomponendo il quadrilatero ABCD nel trapezio ABED e nel triangolo DEC.



Viene dato per scontato che l'angolo BAD sia retto e che le basi AB e DE siano parallele e che ne consegua essere il poligono ABED un trapezio scaleno.

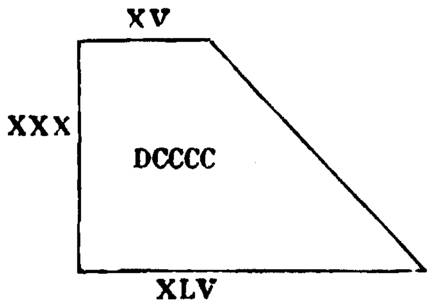
Rispettando le proporzioni con la figura di Boezio e calcolando le due aree e sommandole risulta una superficie reale di 18,855 piedi^2.

L'errore non è proprio trascurabile:

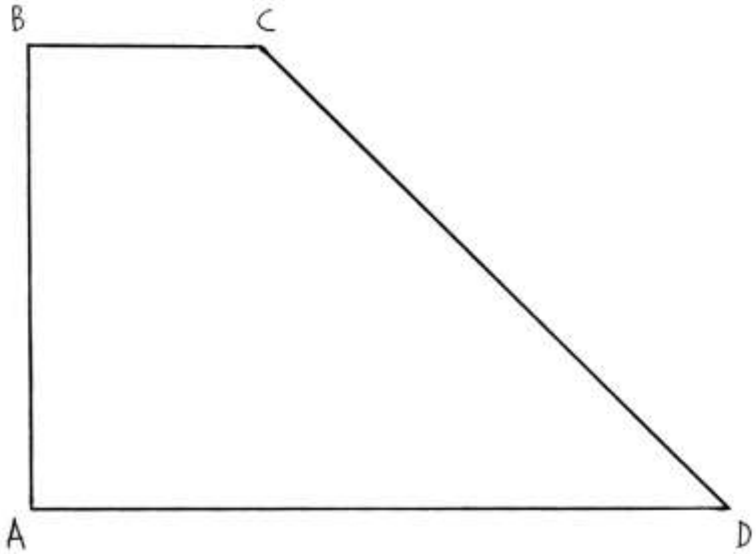
$$\text{errore} = \frac{21 - 18{,}855}{18{,}855} \cong 11{,}38\%$$

<u>Trapezio rettangolo</u>

Un trapezio rettangolo ha le dimensioni scritte nella figura:



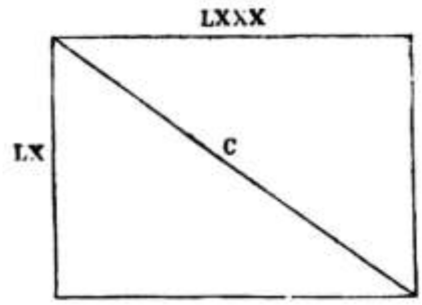
Boezio calcolò correttamente l'area del trapezio:

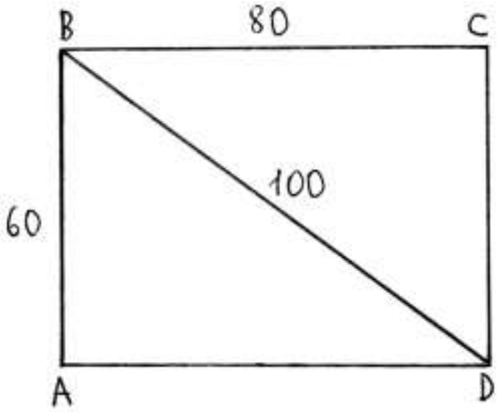


$$\text{Area}_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot AB = \frac{45 + 15}{2} \cdot 30 = \frac{60}{2} \cdot 30 =$$
$$= 900 \text{ piedi}^2$$

<u>Rettangolo</u>

Boezio studiò un rettangolo e ne calcolò esattamente la lunghezza della diagonale:





$BD^2 = AD^2 + AB^2 = 80^2 + 60^2 = 6400 + 3600 = 10\,000$

$BD = \sqrt{10\,000} = 100$ piedi

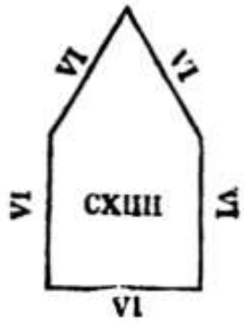
Il rettangolo è formato da due triangoli rettangoli che hanno dimensioni multiple secondo il fattore 20 della terna pitagorica 3 – 4 – 5.

Boezio chiamò *longitudine* il lato più lungo (AD e BC) e *latitudine* il lato più corto (AB e CD).

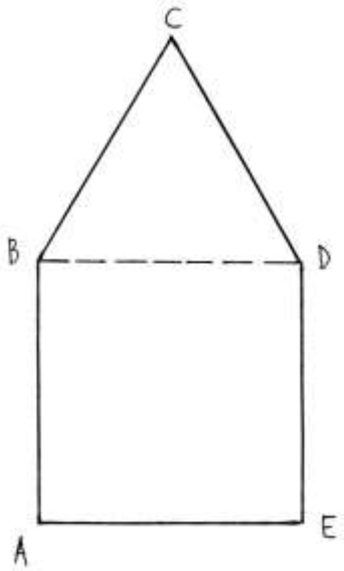
In geometria i due lati opposti più lunghi sono detti *lunghezza* e i due lati opposti più corti sono chiamati *larghezza* o *altezza*.

Pentagono

Boezio mostrò un pentagono con lati lunghi 6 piedi e area 114 piedi^2.



La figura mostra un pentagono equilatero ma non equiangolo: esso è formato da un quadrato (ABDE) e da un triangolo equilatero (BCD).



Gli angoli di questo pentagono non regolare non hanno uguale ampiezza:

- angolo in A: 90°.
- angolo in B: 90 + 60 = 150°;
- angolo in C: 60°;
- angolo in D: 150°;
- angolo in E: 90°.

La somma degli angoli interni è uguale a 540°, uguale a quella di un pentagono regolare.

Il metodo grafico usato da Boezio per rappresentare il pentagono si ritrova nel trattato "*Artis Cuiuslibert Consummatio*", risalente a circa il 1240 e attribuito a Gerardo da Bruxelles. In questo trattato, il metodo è applicato a *sei* poligoni, dal pentagono al decagono.

L'area di un pentagono regolare è oggi calcolata moltiplicando il quadrato del lato per il numero fisso relativo, F ≈ 1,7204:

$$\text{Area pentagono} = F \cdot \text{lato}^2 \cong 1{,}7204 \cdot 6^2 = \cong 61{,}9344 \text{ piedi}^2$$

Applicando la formula approssimata di Erone per calcolare l'area di un pentagono si ha il seguente risultato:

$$A = \frac{12}{7} \cdot \text{lato}^2 = \frac{12}{7} \cdot 6^2 \cong 61{,}714 \text{ piedi}^2$$

Considerando separatamente i due poligoni che formano il pentagono di Boezio, è possibile calcolare le lore aree:

* area del quadrato ABDE: $6^2 = 36$ piedi^2;
* area del triangolo BCD, calcolata con la formula approssimata di Erone:

$$A_{\text{triangolo}} = \frac{13}{30} \cdot 6^2 \cong 15{,}6 \text{ piedi}^2$$

Sommando le due aree si ha: area pentagono = 36 + 15,6 = 51,6 piedi^2.

Pare che Boezio calcolasse l'area del pentagono secondo una procedura:

* moltiplicare la lunghezza del lato per se stesso: 6*6 = 36 ;
* moltiplicare 36 per 3: 36*3 = 108 ;
* sommare a 108 la lunghezza in piedi del lato: 108 * 6 = 114 piedi^2.

Boezio aveva impiegato la formula di Frontino (e di Vitruvio Rufo) per calcolare l'area del pentagono:

$$\text{Area pentagono} = \frac{3l^2 + l}{2} = \frac{3 \cdot 6^2 + 6}{2} = \frac{3 \cdot 36 + 6}{2} =$$
$$= \frac{108 + 6}{2} = \frac{114}{2} = 57 \text{ piedi}^2$$

Evidentemente, Boezio omise di dividere per 2 il risultato parziale.

Esagono

L'esagono proposto da Boezio ha lati lunghi 8 piedi e area uguale a 136 piedi^2:

La procedura usata da Boezio per calcolare l'area è la seguente:

* elevare al quadrato la lunghezza del lato: 8*8 = 64 ;
* moltiplicare per 4 il risultato precedente: 64*4 = 256 ;
* sommare il doppio della lunghezza del lato: 256 + 2*8 = 256 + 16 = 272 ;
* dividere per 2 il precedente valore: 272 : 2 = 136 piedi^2, che il dato mostrato da Boezio nella figura.

La regola applicata è riassunta con la formula che segue:

$$\text{Area esagono} = \frac{4l^2 + 2l}{2} = 2 \cdot \text{lato}^2 + \text{lato}$$

Forse, Boezio ha male interpretato la formula approssimata di Frontino (e di Vitruvio Rufo):

$$\text{Area esagono} = \frac{4l^2 + l}{2} = \frac{4 \cdot 8^2 + 8}{2} =$$
$$= \frac{256 + 8}{2} = \frac{264}{2} = 132 \text{ piedi}^2$$

e, al numeratore, ha moltiplicato per 2 la lunghezza del lato l.

La formula approssimata di Erone fornisce un differente risultato:

$$\text{Area esagono} = \frac{13}{5} \cdot \text{lato}^2 = \frac{13}{5} \cdot 8^2 =$$
$$= \frac{13 \cdot 64}{5} = 166{,}4 \text{ piedi}^2$$

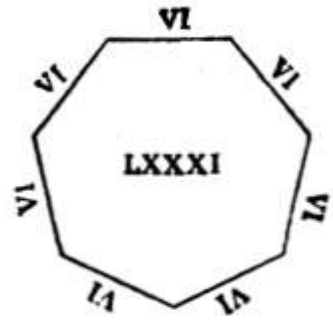
Infine, l'area dell'esagono è calcolata correttamente come multipla di quella di uno dei sei triangoli equilateri che lo compongono e con l'impiego del numero fisso F ≈ 2,59808:

$$\text{Area}_{\text{esagono}} = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2} \cdot \text{lato}^2 \cong F \cdot \text{lato}^2 \cong$$
$$\cong 2{,}59808 \cdot 8^2 \cong 166{,}277 \text{ piedi}^2$$

I risultati forniti dalle due ultime formule sono pressoché uguali mentre l'area calcolata da Boezio è grandemente errata per difetto.

Ettagono

Boezio considerò un ettagono regolari con lati lunghi 6 piedi e ne fissò l'area in 81 piedi^2:



La procedura impiegata da Boezio per determinare l'area è la seguente:

* calcolare il quadrato della lunghezza del lato: 6*6 = 36 ;
* moltiplicare per 5 il risultato: 36*5 = 180 ;
* sottrarre 3 volte la lunghezza del lato: 180 – 3*6 = 162 ;
* dividere per 2: 162 : 2 = 81 piedi^2.

Quindi, Boezio applicò la formula approssimata del gromatico Vitruvio Rufo:

$$\text{Area}_{\text{ettagono}} = \frac{5l^2 - 3l}{2} = \frac{5 \cdot 6^2 - 3 \cdot 6}{2} =$$
$$= \frac{180 - 18}{2} = \frac{162}{2} = 81 \text{ piedi}^2$$

La formula approssimata di Erone fornisce il seguente risultato:

$$\text{Area}_{\text{ettagono}} = \frac{43}{12} \cdot \text{lato}^2 = \frac{43}{12} \cdot 6^2 =$$
$$= \frac{43 \cdot 36}{12} = 129 \text{ piedi}^2$$

La corretta formula per calcolare l'area dell'ettagono impiega il numero fisso F = 3,634:

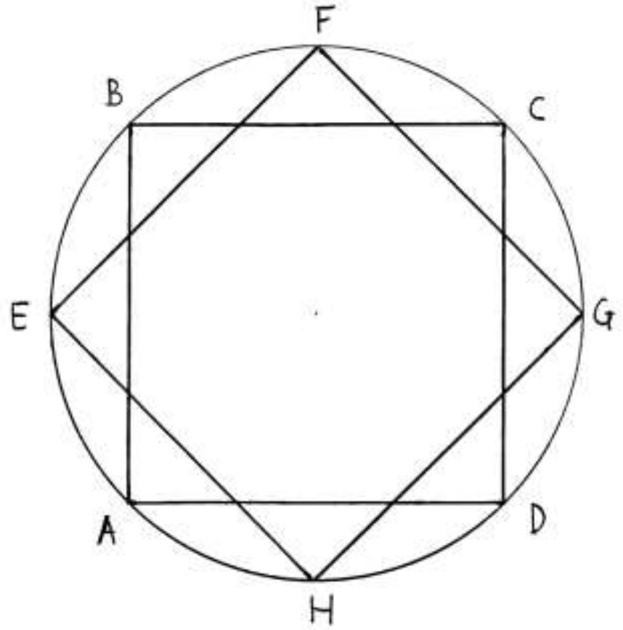
Area ettagono = F * lato^2 = 3,634*6^2 = 3,634*36 = 130,824 piedi^2.

Le formule di Erone e quella con il *numero fisso* forniscono un risultato quasi uguale: al contrario, la procedura impiegata da Boezio fornisce un risultato pesantemente errato per difetto.

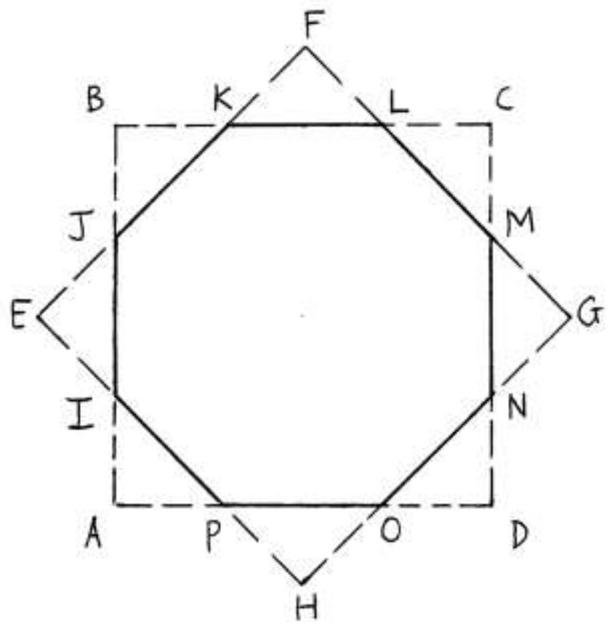
Ottagono

In un cerchio sono inscritti due quadrati ruotati fra loro di 45°:

L’intersezione dei quadrati ABCD e EFGH genera un ottagono:



L’ottagono IJKLMNOP ha lati lunghi 8 piedi:



Boezio fissò l’area in 176 piedi^2: egli ricavò questo risultato applicando la formula approssimata di Vitruvio Rufo:

Area ottagono = $3*l^2 – 2*l = 3*8^2 – 2*8 = 3*64 – 16 = 192 – 16 = 176$ piedi^2.

La formula approssimata di Erone dà il seguente risultato:

$$\text{Area ottagono} = \frac{29}{6} \cdot \text{lato}^2 = \frac{29}{6} \cdot 64 = $$
$$= 309,\overline{33} \text{ piedi}^2$$

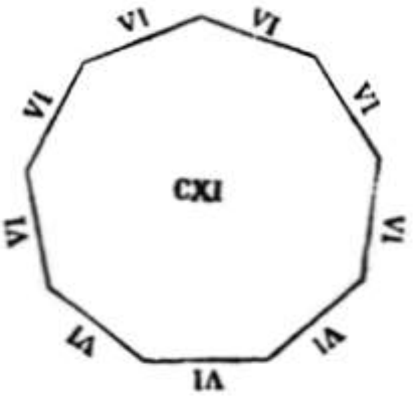
A sua volta, la formula che impiega il numero fisso relativo all’ottagono fornisce un risultato vicino a quello di Erone:

$$\text{Area ottagono} = \text{numero Fisso} \cdot \text{lato}^2 =$$
$$= 4,828 \cdot 64 = 308,992 \text{ piedi}^2$$

Anche in questo caso Boezio offrì un valore dell’area dell’ottagono del tutto errato per difetto.

<u>Ennagono</u>

Un ennagono regolare ha lati lunghi 6 piedi e area uguale a 111 piedi^2.



Applichiamo la formula di Vitruvio Rufo:

$$\text{Area ennagono} = \frac{7l^2 - 5l}{2} = \frac{7 \cdot 6^2 - 5 \cdot 6}{2} =$$
$$= \frac{7 \cdot 36 - 30}{2} = \frac{252 - 30}{2} = 111 \text{ piedi}^2$$

È chiaro che Boezio applicò questa formula, errata.

Usando la formula approssimata di Erone il risultato è:

$$\text{Area ennagono} = \frac{51}{8} \cdot \text{lato}^2 = \frac{51}{8} \cdot 6^2 = 229,5 \text{ piedi}^2$$

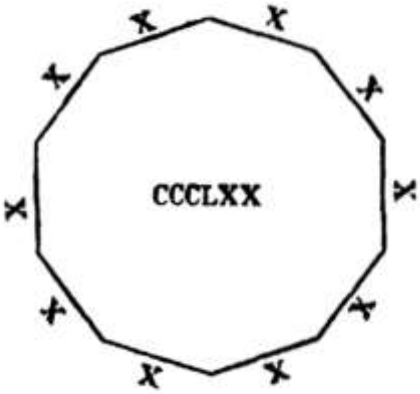
Infine, con la formula corretta, il risultato è:

$$\text{Area ennagono} = F. \cdot \text{lato}^2 \cong$$
$$\cong 6,182 \cdot 6^2 \cong 222,552 \text{ piedi}^2$$

Il valore calcolato da Boezio è la metà dell’area corretta.

Decagono

Un decagono regolare ha lati lunghi 10 piedi: Boezio determinò l'area in 370 piedi^2.



Applicando la formula di Vitruvio Rufo, si ottiene:

Area decagono = $4*l^2 - 3*l = 4*10^2 - 3*10 = 400 - 30 = 370$ piedi^2 , che è il risultato conseguito da Boezio.

La formula approssimata di Erone dà un risultato assai diverso:

$$\text{Area decagono} = \frac{15}{2} \cdot \text{lato}^2 = \frac{15}{2} \cdot 100 = 750 \text{ piedi}^2$$

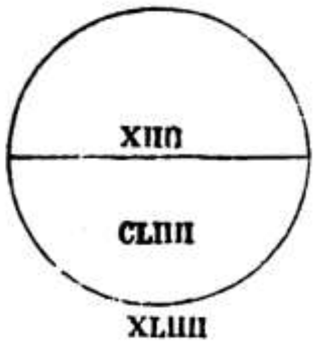
Infine, l'area calcolata con il numero fisso F = 7,694 è:

$$\text{Area decagono} = F \cdot \text{lato}^2 \cong$$
$$\cong 7{,}694 \cdot 10^2 \cong 769{,}4 \text{ piedi}^2$$

Le due ultime formule forniscono un risultato che è almeno il doppio di quello calcolato da Boezio con l'aiuto delle formule dei Gromatici romani: queste ultime offrono risultati grandemente errati.

Cerchio

Un cerchio ha il diametro di 14 piedi:



La circonferenza è indicata correttamente in 44 (XLIIII) piedi e l'area, come al solito, scritto all'interno è 154 piedi^2.

Evidentemente, per il valore di π Boezio usò il valore approssimato di

$$\frac{22}{7}$$

La lunghezza della circonferenza è:

$$circonferenza = \frac{22}{7} \cdot diametro =$$
$$= \frac{22}{7} \cdot 14 = 22 \cdot 2 = 44 \ piedi$$

Infine l'area del cerchio è data da:

$$Area_{cerchio} = \frac{circonferenza}{2} \cdot \frac{diametro}{2} =$$
$$= \frac{44}{2} \cdot \frac{14}{2} = 22 \cdot 7 = 154 \ piedi^2$$

Boezio usò il valore approssimato di π risalente a Archimede.

Bibliografia

1. Friedlein G. (a cura di), "Boetii De Institutione Arithmetica", Lipsia, Teubner, 1867, pp. VIII-492.
2. Guillaumin Jean Yves, *Corpus Agrimensorum Romanorum II et III: Balbus. Présentation systématique de toutes les figures. Posidimus et textes connexes. Extraits d'Epaphrodite et de Vitruvius Rufus; la mesure des jugères. Introduction, traduction et notes,* Napoli, Jovene, 1996, pp.
3. Victor Stephen K., "Practical geometry in the High Middle Ages", Filadelfia, The American Philosophical Society, 1979, pp. xii-638.