

Il materiale contenuto in questo documento può essere riprodotto, in tutto o in parte, a scopi *non commerciali*, purché siano citati l'Autore e la fonte.

Parole chiave: origine del termine disegno, pianta di Gudea di Lagash, affresco della tomba di Rekhmire a Tebe, pianta cattedrale convento Canterbury, scacchiera, geometria proiettiva, geometria descrittiva, piano cartesiano, diedro e triedro, progetto Palazzo Sansedoni, scale in base 1:12, pianta di San Gallo, unità di misura lineari romane, unità di misura lineari toscane, strutture triangolari e quadrate, pergamena di Gherardo Gherardi sulla Cupola di Santa Maria del Fiore, Piero della Francesca e le proiezioni ortogonali, proiezioni ortogonali secondo Albrecht Dürer, ribaltamenti a quartabuono (miter), norma UNI EN ISO 5456-2, Gaspard Monge, primo e terzo diedro, metodo europeo e metodo americano, sviluppo di un solido, due dialetti del disegno tecnico, la glass box, modelli del terzo diedro, secondo e quarto diedro, rappresentazione ortografica speculare, metodo delle frecce, metodo delle proiezioni quotate, regola della mano destra, il contributo di Harold Belofsky

APPUNTI SULLE PROIEZIONI

Nota: in alcuni passaggi di questo articolo sono scritti numeri racchiusi fra *parentesi quadre* [...]: essi rimandano a una specifica voce della Bibliografia, in calce a questo testo.

Premessa

Questo articolo contiene materiali sulle proiezioni ortogonali senza alcuna pretesa di completezza o di organicità. Il suo scopo è portare una serie di argomenti a favore dell'adozione del *metodo del terzo diedro* le cui radici potrebbero farsi risalire al metodo della prospettiva codificato nel corso del Quattrocento da Filippo Brunelleschi, Leon Battista Alberti, Piero della Francesca e Leonardo da Vinci.

L'origine del termine "disegno"

La parola *disegno* è comparsa in Italia nel XIV secolo con il significato di schema di un'opera da realizzare. Nel XV secolo assunse anche il senso di un'immagine realizzata con linee.

I termini francesi *dessein* e poi *dessin* derivano dall'italiano, come pure l'inglese *design*.

La nascita del disegno tecnico fu un evento certamente rivoluzionario. Prima degli ingegneri rinascimentali, il potere delle *Corporazioni medievali di arti e mestieri* nei Comuni italiani si manifestava attraverso i loro *Statuti* che vincolavano al segreto gli artigiani ad essi appartenenti: le conoscenze erano trasmesse in forma orale ed eventuali documenti scritti, quali ad esempio i

quaderni di bottega (libri di disegni o taccuini o libri di bottega), nei quali i maestri artigiani annotavano i loro segreti sotto forma di schizzi, calcoli, costi, eventi personali e affari di famiglia, venivano gelosamente conservati e talvolta distrutti (e invece, per fortuna, alcuni si sono conservati). Lo stesso Brunelleschi rifiutò di pagare la tassa di iscrizione all'Arte dei Maestri di Pietra e Legname di Firenze e, per questo motivo, nel 1434 fu perfino arrestato e prontamente fatto liberare dall'*Opera del Duomo* (l'Ente che gestiva la costruzione della cupola di Santa Maria del Fiore, istituzione esistente ancora oggi).

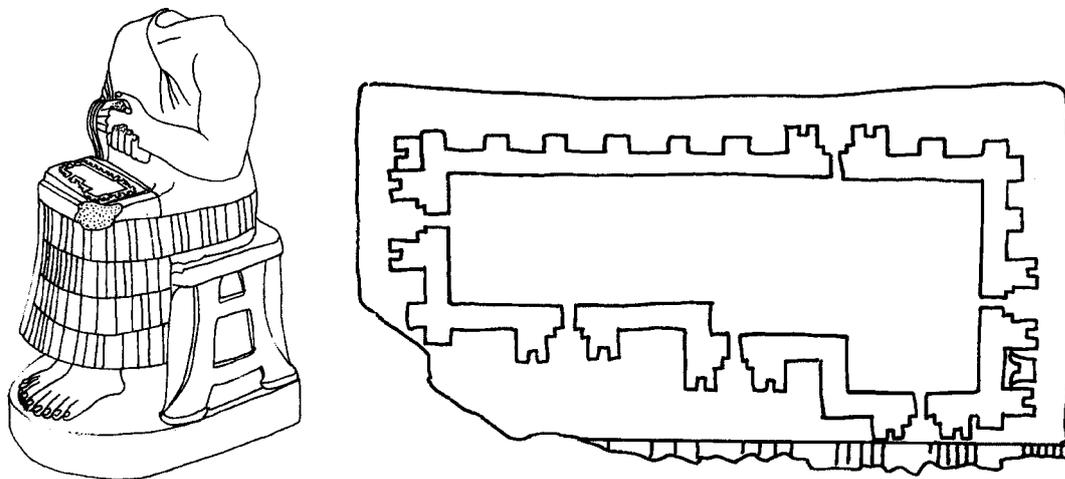
La creazione del disegno tecnico permise la diffusione delle conoscenze tecniche e con il tempo spezzò il potere delle Corporazioni: il sapere tecnico divenne alla portata di chiunque.

Il secondo fattore che contribuì grandemente alla diffusione del disegno tecnico fu l'arrivo in Europa della carta: già dal Trecento, in Italia era prodotta e disponibile carta di buona qualità e a prezzi ragionevoli.

Il terzo evento è dato dalla successiva invenzione della *stampa a caratteri mobili* (XV secolo) che rafforzò la diffusione dei trattati tecnici con disegni.

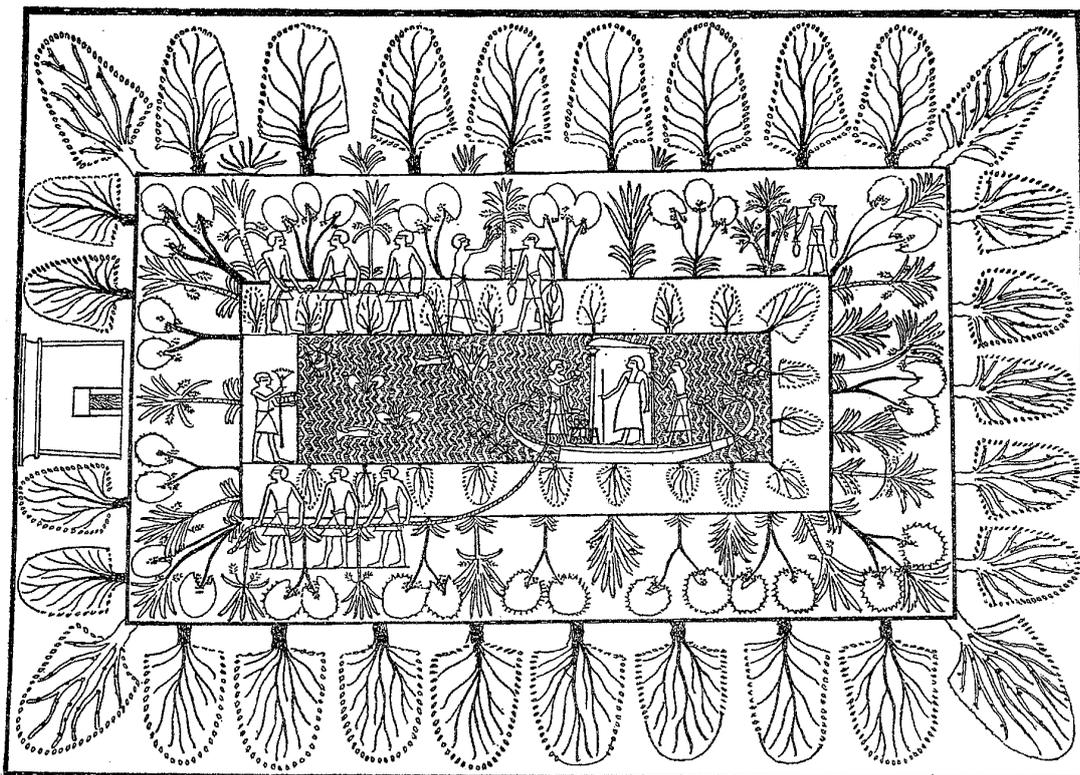
Molti antichi trattati di disegno tecnico furono stampati, altri no e si diffusero attraverso copie manoscritte. Alcuni sono stati pubblicati solo nei tempi moderni.

Dalle epoche più antiche sono giunti scarsi documenti di impiego del disegno tecnico: gli esempi ricavati dai vasi, dai bassorilievi, dagli affreschi e da reperti archeologici forniscono pochi esempi di impiego della prospettiva, delle assonometrie e delle proiezioni ortogonali. Uno dei documenti più antichi fu inciso nella Mesopotamia meridionale sulla statua di basalto di *Gudea*, principe sumero della città di *Lagash*, risalente a circa il 2200-2400 a.C. La statua del principe, seduto, è priva della testa ed è conservata al Louvre di Parigi; essa reca una tavoletta incisa, poggiata sulle ginocchia, con la probabile *pianta* di un tempio e il disegno di uno stilo usato per incidere sull'argilla. Sulla statua è pure incisa la lunghezza di un cubito sumerico, equivalente a 495 mm.



La statua ha dimensioni 93x46x62 cm e la pianta 26x16 cm.

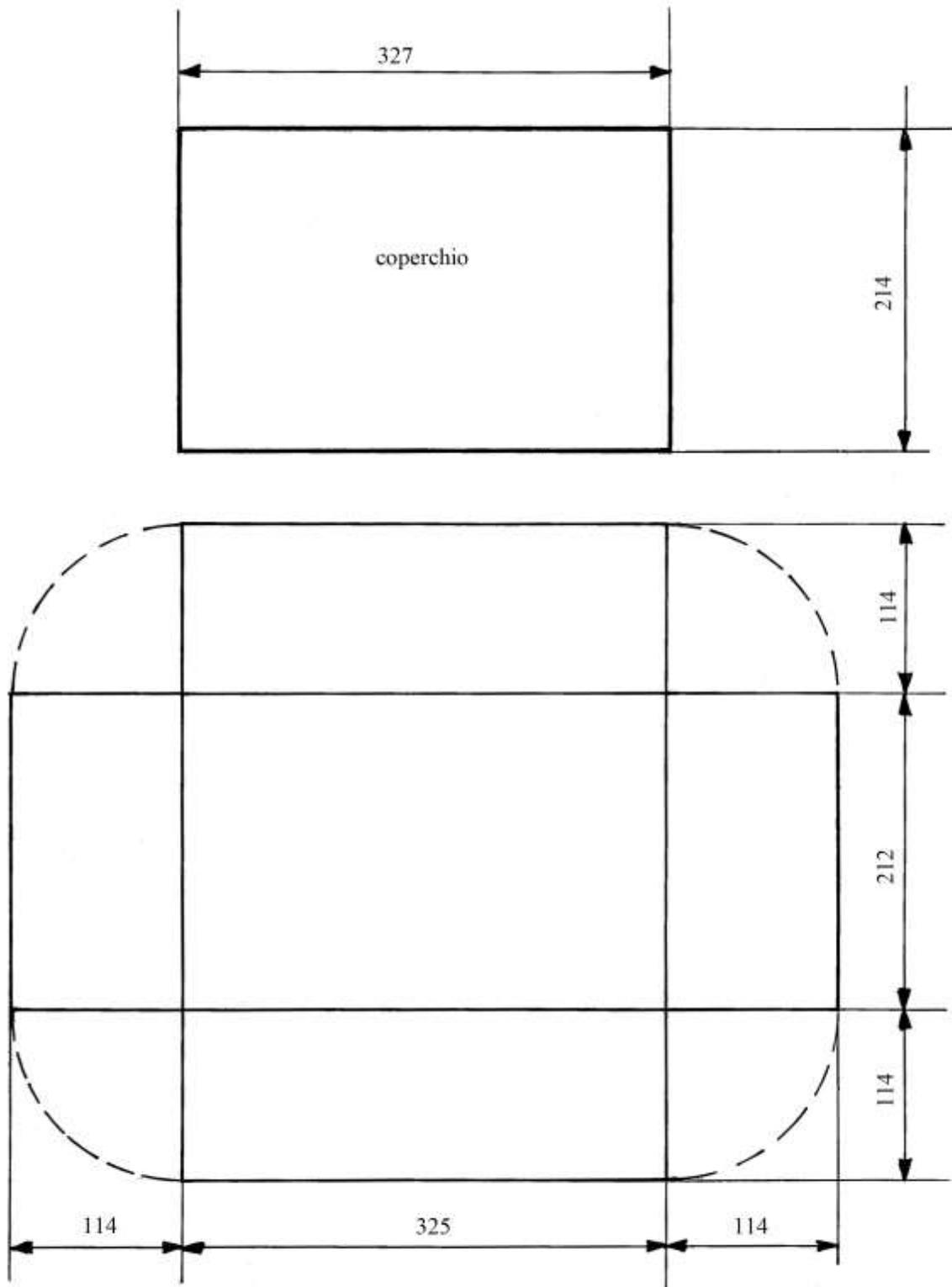
Altri esempi ci vengono dai reperti della civiltà egizia. La figura che segue è ripresa da un affresco nella tomba del visir Rekhmire, a Tebe, risalente a circa il 1450 a.C.:



Il disegno mostra un giardino stilizzato con al centro uno stagno. Questo ultimo è rappresentato in pianta e gli alberi sono tracciati ribaltati di 90° (quasi fossero disegnati verso i piani verticali poi ruotati di 90° verso l'esterno e sviluppati sul piano orizzontale), perpendicolari ai bordi dello specchio d'acqua (per ricordarne la verticalità): gli alberi posti agli angoli dello stagno sono disegnati inclinati di circa 45° . Al centro del disegno, ma in proiezione verticale, è disegnato il *profilo* di una barca che trasporta la statua del visir. Quest'ultima e le altre figure umane sono tutte disegnate di *profilo*. In questo disegno sono state usate in modo empirico regole che precorrono il metodo delle proiezioni ortogonali.

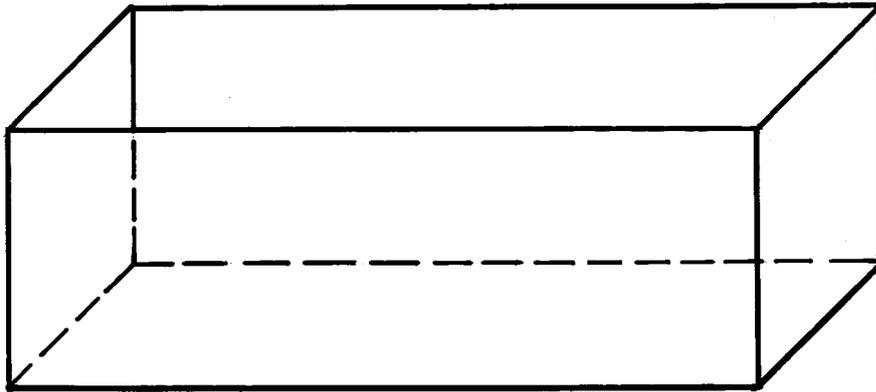
Lo schema è comunque coerente con il significato dell'ambiente rappresentato, perché è conservato il rapporto di *continuità* fra i confini del piano orizzontale e quelli dei quattro piani verticali ribaltati. Si tratta di uno *sviluppo a fiore* simile a quello di una scatola formata da *cinque* pareti di forma rettangolare e formanti un parallelepipedo vuoto e privo della copertura. È come se i piani verticali fossero collegati a quello orizzontale per mezzo di cerniere. Il disegno degli alberi posti ai quattro angoli e rappresentati obliqui può essere visto come un cenno di semplice assonometria intuitiva.

Una comune scatola da scarpe da uomo di taglia 43 è fatta di cartone ed è comunemente formata da quattro pareti verticali e da due orizzontali: la parete superiore (il *coperchio*) la chiude ed è leggermente più grande della base. In alcuni casi questo ultimo è separato dalle altre pareti e in altri è collegato a una delle due pareti verticali. La figura che segue ne mostra in alto il coperchio e sotto lo *sviluppo a fiore* con le dimensioni in mm:



Il coperchio ha dimensioni leggermente maggiori rispetto alla base.

Lo schema che segue è un'assonometria cavaliera della scatola priva del coperchio, con rapporto di fuga $RF = 2/3$ (sul significato di questo parametro vedere un successivo APPROFONDIMENTO):



La *Forma Urbis Romae* è una pianta marmorea della città di Roma, realizzata fra il 203 e il 211: era collocata in una sala del *Tempio della Pace*. Le sue dimensioni erano grandiose: misurava 18 metri in larghezza e circa 13 in altezza ed era formata da 150 lastre rettangolari di marmo. Anche i testi dei trattati di agrimensura dei *Gromatici Romani* contengono disegni in pianta e in assonometria intuitiva.

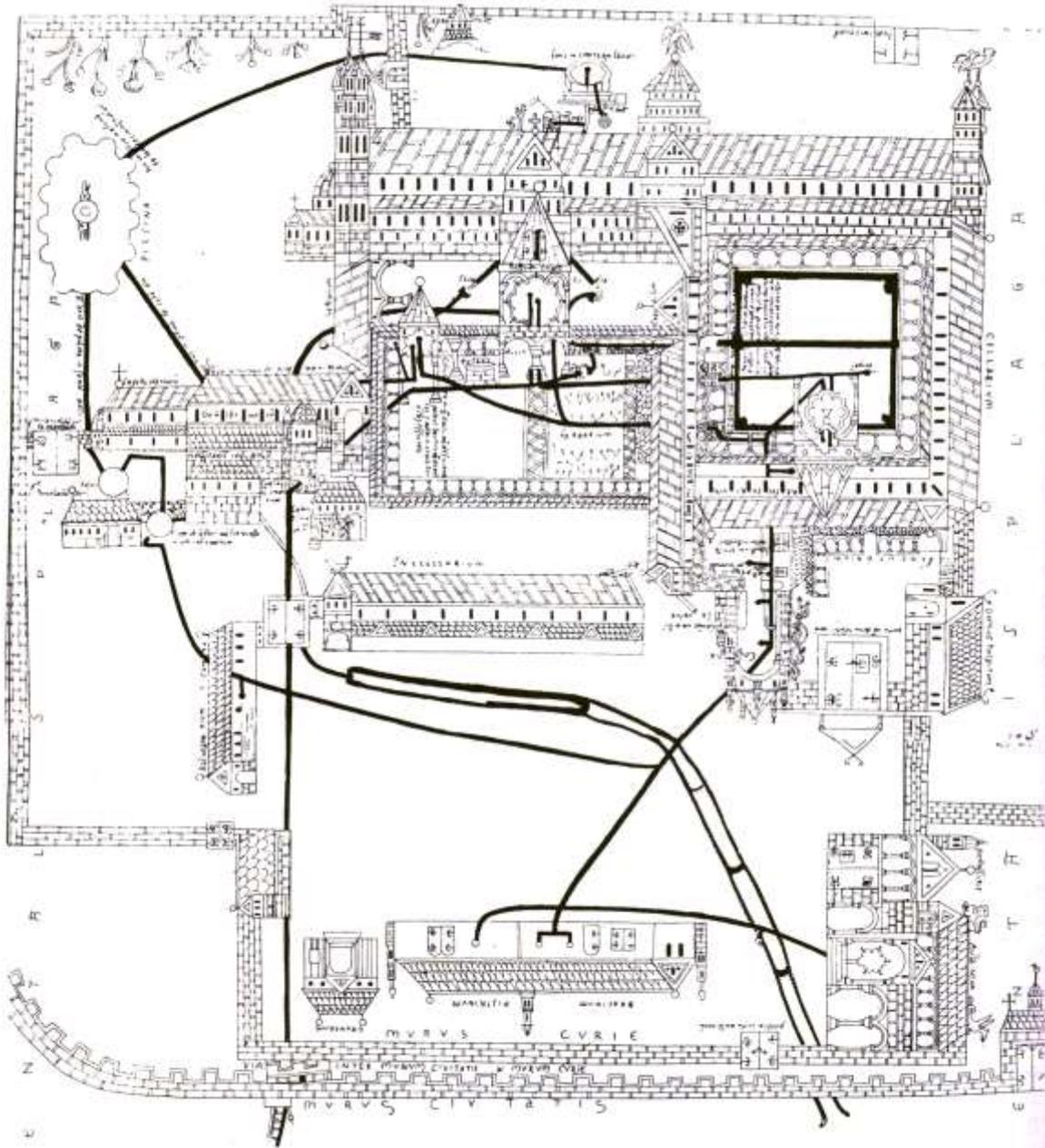
Gli esempi della pianta di Gudea, dell'affresco nella tomba del visir Rekhmire e della *Forma Urbis Romae* sono conferme dell'importanza prevalente della *pianta* nel mondo antico.

Una tecnica simile fu impiegata decine di secoli dopo in Gran Bretagna. La figura che segue è una pianta risalente al XII secolo (una data di poco successiva al 1153) della cattedrale e dell'annesso convento di Canterbury. In essa sono disegnati edifici e reti di fornitura dell'acqua potabile (rappresentate dalle linee in nero) e degli scarichi (disegnate con linee a doppio tratto parallelo). La pianta è orientata al contrario rispetto alle carte moderne: il Nord è *in basso* e il Sud è posto *in alto*.

Gli edifici sono disegnati con tecniche miste, ma alcune viste sono ribaltate di 90° verso le mura esterne, come nell'esempio dell'affresco nella tomba del visir Rekhmire. Gli edifici sembrano essere osservati dal terreno, da una posizione posta al centro. A differenza delle altre costruzioni, l'edificio in alto a destra (che ospitava le celle dei monaci e il refettorio) è visto dal suo centro.

Le costruzioni sono rappresentate con due viste disegnate affiancate: la vista frontale e la vista di profilo.

SUD

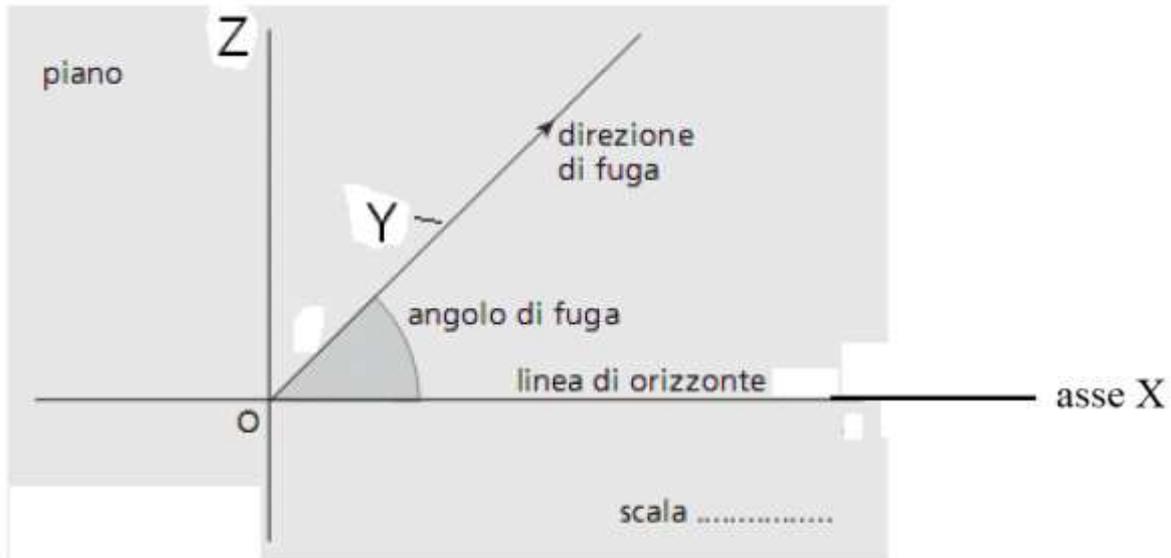


NORD

----- APPROFONDIMENTO -----

Che cosa è il rapporto di fuga

Gli elementi che definiscono una qualsiasi assonometria sono i seguenti:

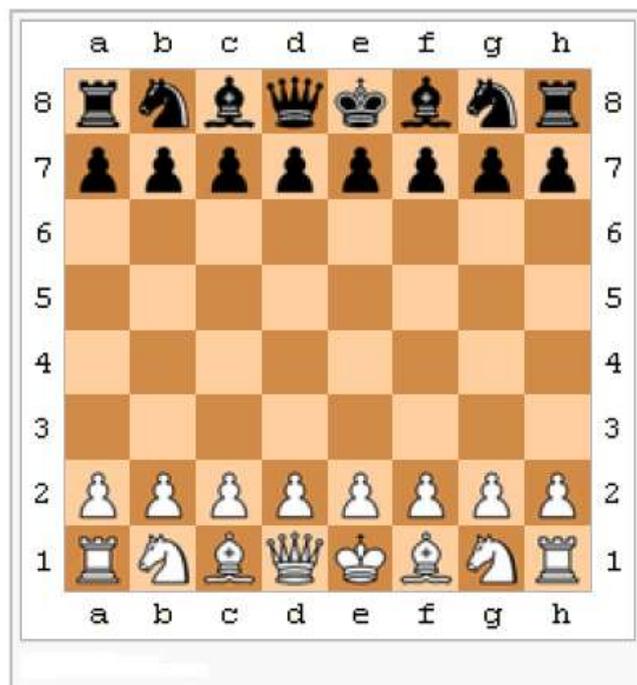


- * un *piano di proiezione* che è rappresentato dal foglio di carta sul quale si disegna (o dallo schermo di un monitor);
- * una *scala di proporzione*: 1:1 1:2 1:5, ecc.;
- * una *direzione di fuga*: è un asse, Y in figura, che forma un dato angolo con la *linea di orizzonte* rappresentata dall'asse X. In questo caso l'angolo di fuga è uguale a 45°;
- * un *rapporto di fuga*, RF, è espresso da un numero inferiore a 1: esso si riferisce al rapporto fra le lunghezze misurate lungo l'asse Y e quelle reali:

rapporto di fuga = RF = lunghezza disegnata/lunghezza reale .

La scacchiera

Una tecnica simile a quella usata per disegnare la pianta della cattedrale e dell'annesso convento di Canterbury è impiegata nella rappresentazione del gioco degli scacchi. La scacchiera è disegnata in pianta e i pezzi disposti su di essa sono delle icone che li mostrano in vista frontale, di fianco o con una assonometria cavaliera con angolo di fuga di 90° e rapporto di fuga molto piccolo (forse uguale a ~ 0,1):



I pezzi sono 16 bianchi e 16 neri. Ogni giocatore ha a disposizione i seguenti pezzi:

Pezzi	Numero pezzi per giocatore	Simbolo in italiano
Pedone	8	
Cavallo	2	C
Alfiere	2	A
Torre	2	T
Donna (o Regina)	1	D
Re	1	R

In Europa, nel Medioevo era largamente diffuso il gioco degli scacchi, di origine asiatica. La scacchiera è formata da 8 colonne contrassegnate con le lettere minuscole da *a* a *h* da sinistra verso destra, e da 8 righe o *traverse*, indicate con numeri da *1* a *8*, dal basso verso l'alto, per formare una griglia quadrata divisa in 64 *case* uguali, alternativamente chiare (le case "bianche") e scure (le case "neri").

Una scacchiera senza i pezzi ricorda la struttura della più importante armatura dei tessuti, la *tela*.

Questo particolare metodo usato per designare le *case* si chiama *notazione algebrica*.

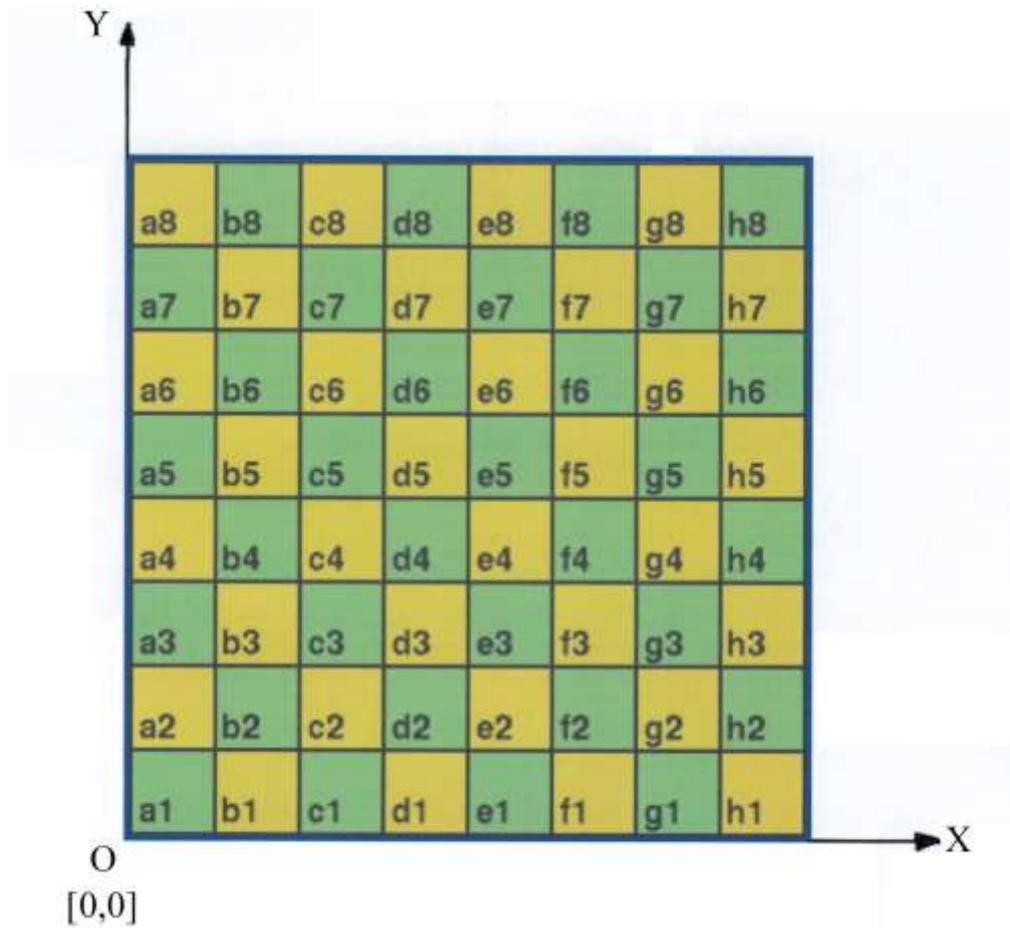
Molte delle attuali regole del gioco degli scacchi sono state codificate in trattati scritti alla fine del Medioevo e nel corso del Rinascimento in Italia e in Spagna.

La figura che segue mostra la notazione di tutte le *case*:

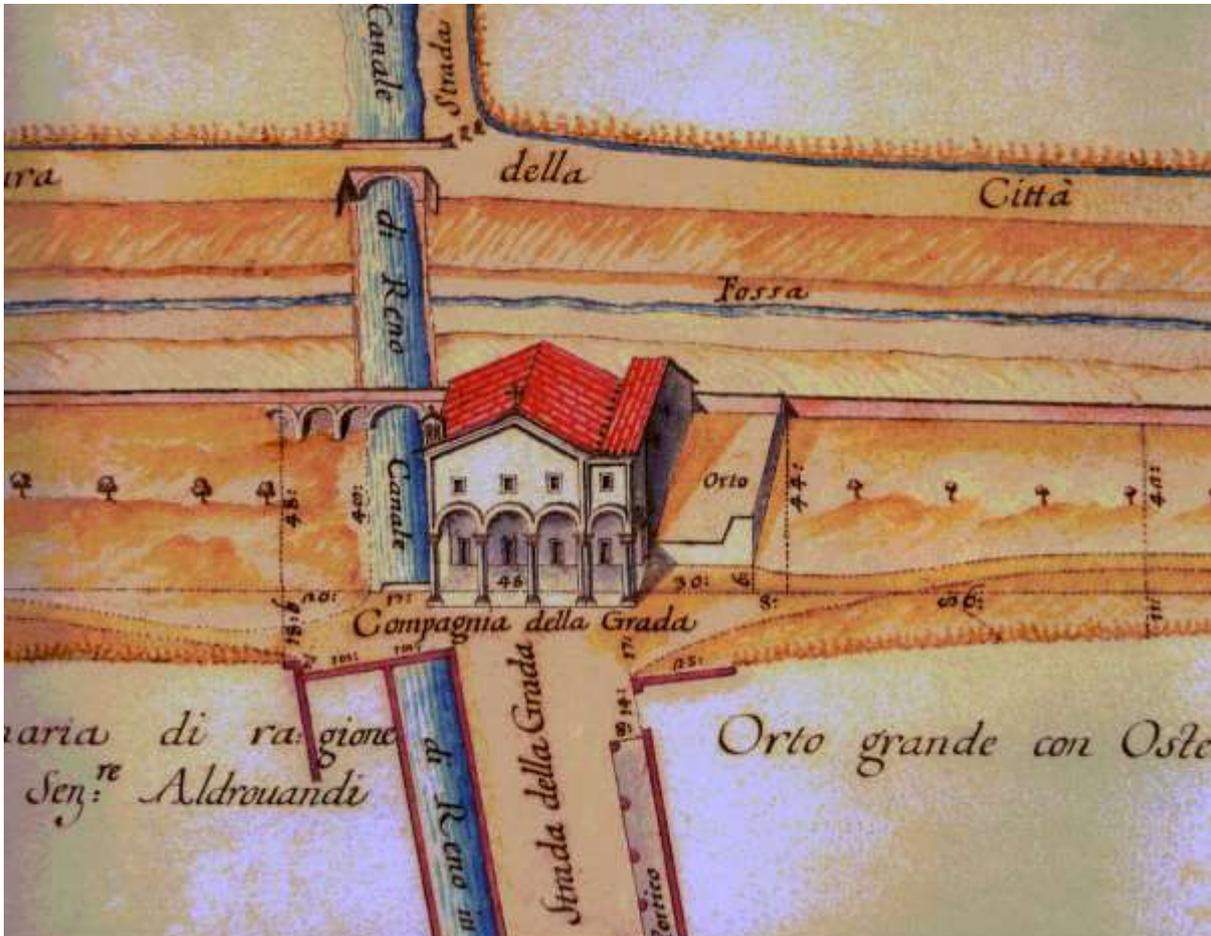
a8	b8	c8	d8	e8	f8	g8	h8
a7	b7	c7	d7	e7	f7	g7	h7
a6	b6	c6	d6	e6	f6	g6	h6
a5	b5	c5	d5	e5	f5	g5	h5
a4	b4	c4	d4	e4	f4	g4	h4
a3	b3	c3	d3	e3	f3	g3	h3
a2	b2	c2	d2	e2	f2	g2	h2
a1	b1	c1	d1	e1	f1	g1	h1

[fonte: Wikipedia].

La scacchiera giace nel I quadrante del *piano cartesiano*:



Tecniche miste sono state usate fino a tempi recenti nell'esecuzione di piante di città e di mappe catastali: la figura che segue è tratta da un Atlante di Antonio Conti, risalente al 1756 (Biblioteca Comunale dell'Archiginnasio, Bologna, Gabinetto Stampe). Essa rappresenta un tratto del canale di Reno al suo ingresso nella città di Bologna e la chiesa della Grada. Il terreno è disegnato in pianta e gli edifici e gli alberi sono tracciati in assonometria cavaliera con angolo di fuga a 70°.



In Italia le carte sono classificate come segue:

- Carte geografiche: a scala 1:1.000.000 o più piccola;
- Carte corografiche: a scala fra 1:100.000 e 1.000.000;
- Carte topografiche: a scala 1:100.000 o maggiore;
- Mappe: scala 1:5.000 o minore.

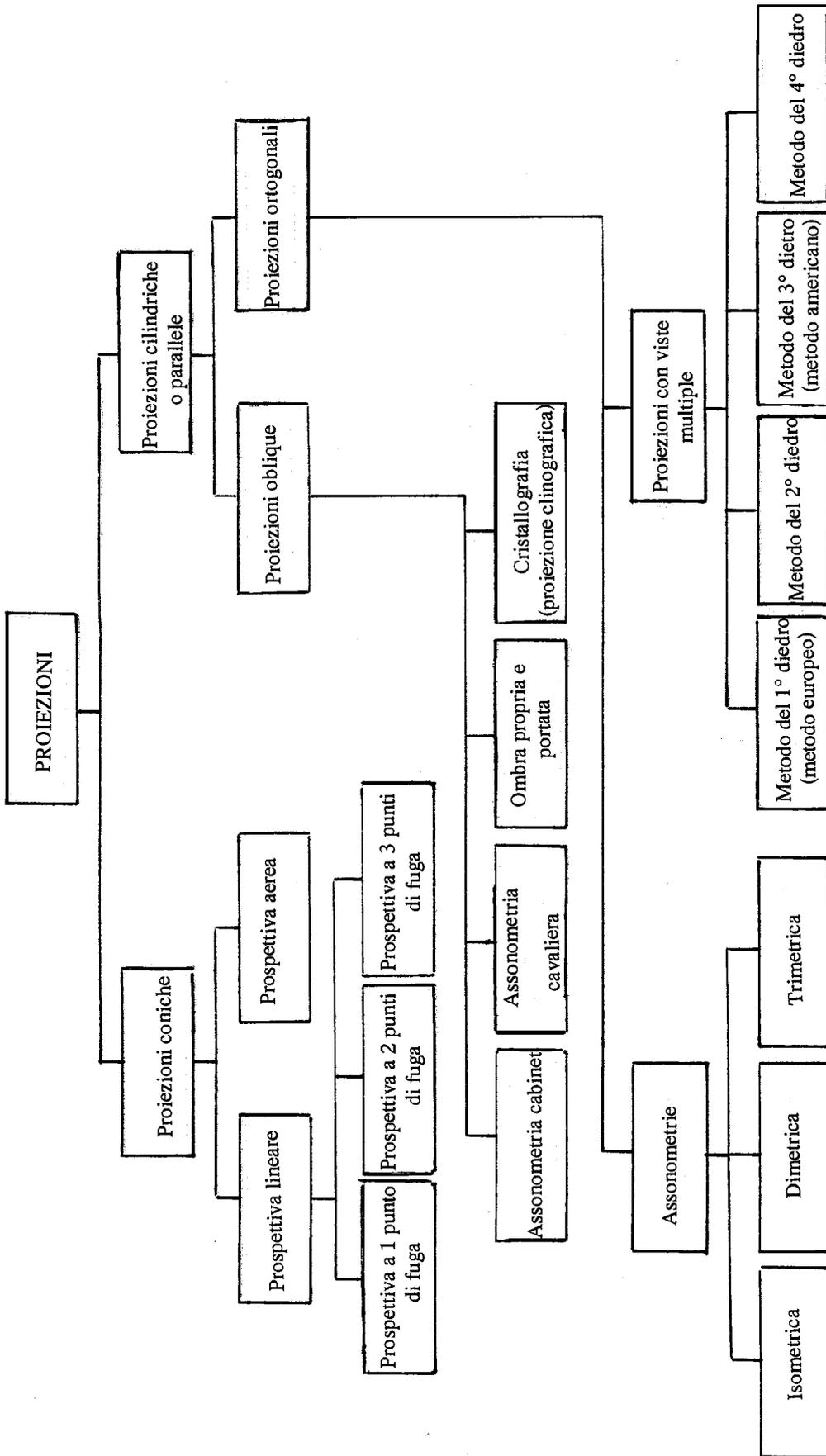
La cartografia ufficiale italiana dell'Istituto Geografico Militare è in scala 1:25.000.

I metodi usati per disegnare su di un piano

Per rappresentare un singolo oggetto tecnico o un ambiente su di un piano (a due dimensioni) possono essere usati diversi metodi. I più usati sono i seguenti tre:

- La prospettiva.
- Le assonometrie.
- Le proiezioni ortogonali.

La figura che segue mostra, sotto forma di mappa concettuale, la tassonomia dei diversi metodi:



NOTA: fra le *proiezioni coniche* presenti nella mappa non è collocata la *prospettiva aerea*. Questo metodo fu utilizzato da Piero della Francesca e poi molto approfondito da Leonardo da Vinci.

Il metodo cerca di rappresentare nella maniera più fedele alla realtà, su di una superficie piana, la terza dimensione per mezzo di una profondità di campo applicata alla densità dell'aria e al colore dell'atmosfera.

Eccone una chiara definizione nel *Vocabolario Treccani*:

[*La prospettiva aerea*] "...è la forma di rappresentazione, di natura soprattutto artistica, che ricerca le variazioni di intensità luminosa e di gradazioni di toni in rapporto alle distanze, allo spessore dello strato d'aria interposto, alla posizione della sorgente luminosa...".

Leonardo scoprì che l'aria non è del tutto trasparente e che con l'aumentare della distanza la visione degli oggetti diviene più sfumata e i colori risultano sempre meno nitidi e tendenti verso l'azzurro.

È chiaro che la *prospettiva aerea* non riveste alcuna importanza per il disegno tecnico.

Non tutti i metodi riassunti nella mappa sono impiegati nel disegno tecnico. Faremo successivamente un breve cenno ai metodi delle proiezioni ortogonali del 2° e del 4° diedro, non usati.

Esistono due settori della Geometria che sono assai importanti per il disegno tecnico:

- La *Geometria proiettiva* studia le figure geometriche proiettate su piani, trascurando distanze e angoli. Le figure non vengono alterate da proiezioni e sezioni. Essa impiega metodi esclusivamente *grafici*.
- La *Geometria descrittiva* utilizza un insieme di costruzioni geometriche elementari sulle quali sono basati dei metodi utili a rappresentare su di un piano (foglio, lavagna, quadro) figure e oggetti a due o a tre dimensioni che esistono o che devono essere costruiti. Tali metodi devono permettere la comprensione degli elementi geometrici dai quali gli stessi oggetti sono formati. I più importanti metodi studiati dalla *Geometria descrittiva* sono le *proiezioni ortogonali*, le *assonometrie*, la *prospettiva* e le *proiezioni quotate* (usate in cartografia con le curve di livello, o *isoipse*, recanti l'altezza rispetto al livello del mare). Essa si occupa pure della *fotogrammetria*, della *teoria delle ombre* e del *chiaroscuro*, dello studio delle *superfici* e delle loro proprietà. Nel disegno tecnico in generale e in quello meccanico in particolare sono molto usate le *assonometrie* e le *proiezioni ortogonali*. La *prospettiva* è più impiegata in ambito artistico e nel campo della *computer grafica*. Viene poco usata nel disegno tecnico meccanico per due ragioni: le difficoltà di esecuzione e il cosiddetto *problema inverso* al quale faremo un cenno in seguito. Per mettere in evidenza la profondità, fino a pochi decenni fa nei manuali di disegno tecnico erano molto usati le ombre e il chiaroscuro: l'introduzione della terza proiezione (verso il piano laterale) e la diffusione della conoscenza delle regole del disegno hanno reso superfluo il loro impiego, facendo pure risparmiare tempo e denaro.

In sintesi, la Geometria descrittiva può essere suddivisa in tre parti principali:

1. Lo studio di punti, linee e piani.
2. Lo studio di curve e superfici.
3. Le *assonometrie* e le *proiezioni*.

Il disegno tecnico è una *scienza applicata* che si avvale della geometria descrittiva soltanto per la rappresentazione delle forme, ma deriva numerosi essenziali apporti da altri ambiti tecnico-scientifici (e in particolare dalla Meccanica applicata) e tecnologici: quotazioni, schematizzazioni,

rappresentazioni simboliche di componenti meccaniche, superfici, materiali, lavorazioni, metodi grafici e altri. Divenne scienza nel corso del Rinascimento quando con l'invenzione della prospettiva alla rappresentazione vera e propria fu associato il concetto di *misura*.

----- SCHEDA STORICA -----

I precursori del metodo delle coordinate cartesiane

Il più conosciuto programma di grafica tecnica, AutoCAD, usa quattro sistemi geometrici di riferimento. Fra di essi i due sistemi usati nel piano a 2 dimensioni sono le coordinate cartesiane e le coordinate polari.

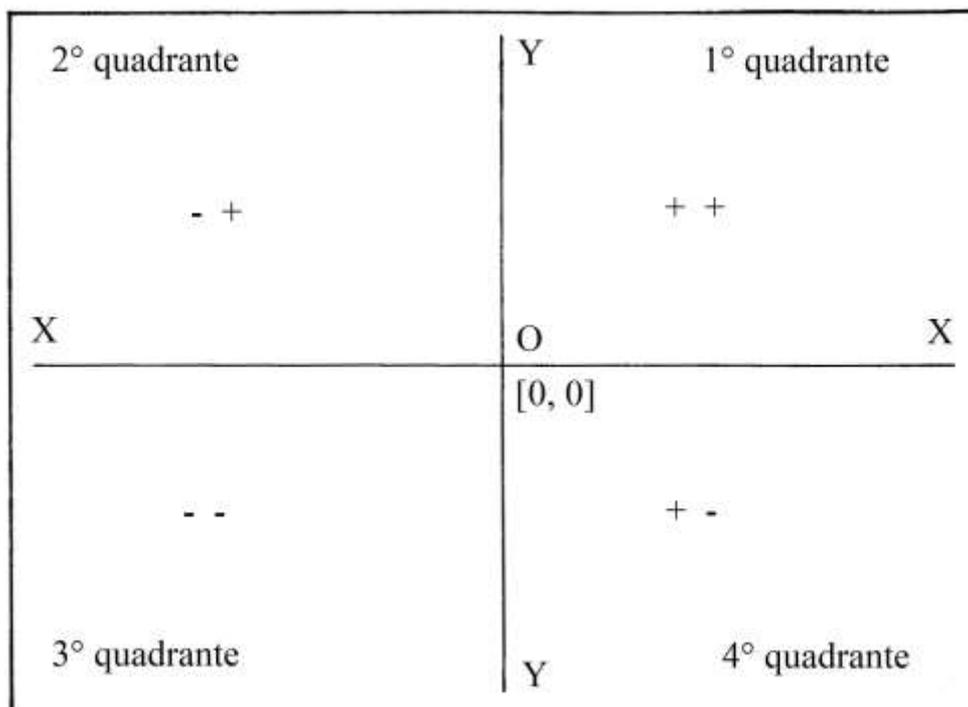
Dopo una breve descrizione del metodo faremo alcuni esempi riguardo a possibili precursori delle coordinate cartesiane.

Il piano cartesiano

Approfondiamo i concetti riguardo al piano cartesiano.

È importante sottolineare il principio secondo il quale il piano cartesiano impiega due assi, x e y, fra loro sempre perpendicolari.

I due assi dividono il piano in quattro *quadranti*:



Il 1° è in alto a destra, il 2° in alto a sinistra, il 3° in basso a sinistra e il 4° in basso a destra. La loro numerazione avviene in senso *antiorario*.

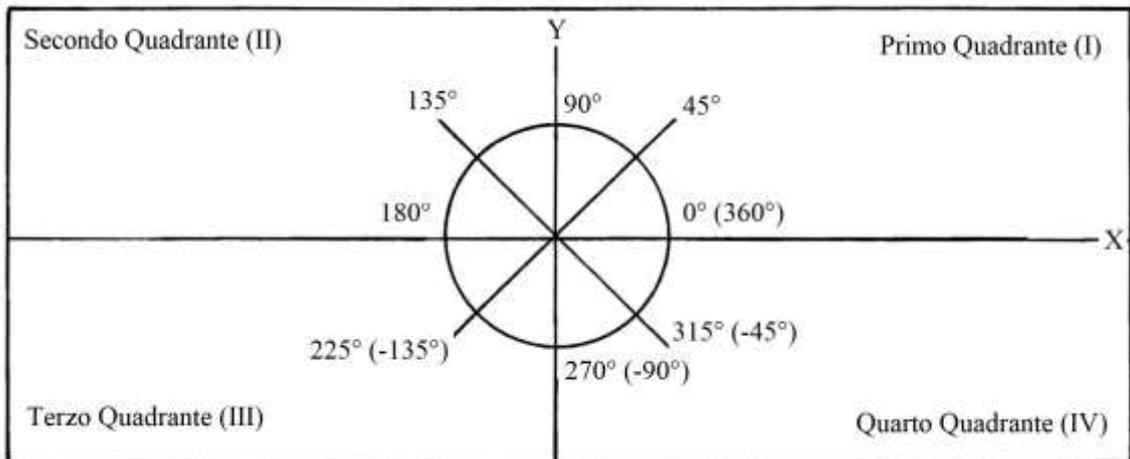
I valori delle coordinate sono:

- tutti positivi nel 1° quadrante,
- tutti negativi nel 3° quadrante,
- positivi i valori delle ordinate e negativi quelli delle ascisse nel 2° quadrante,

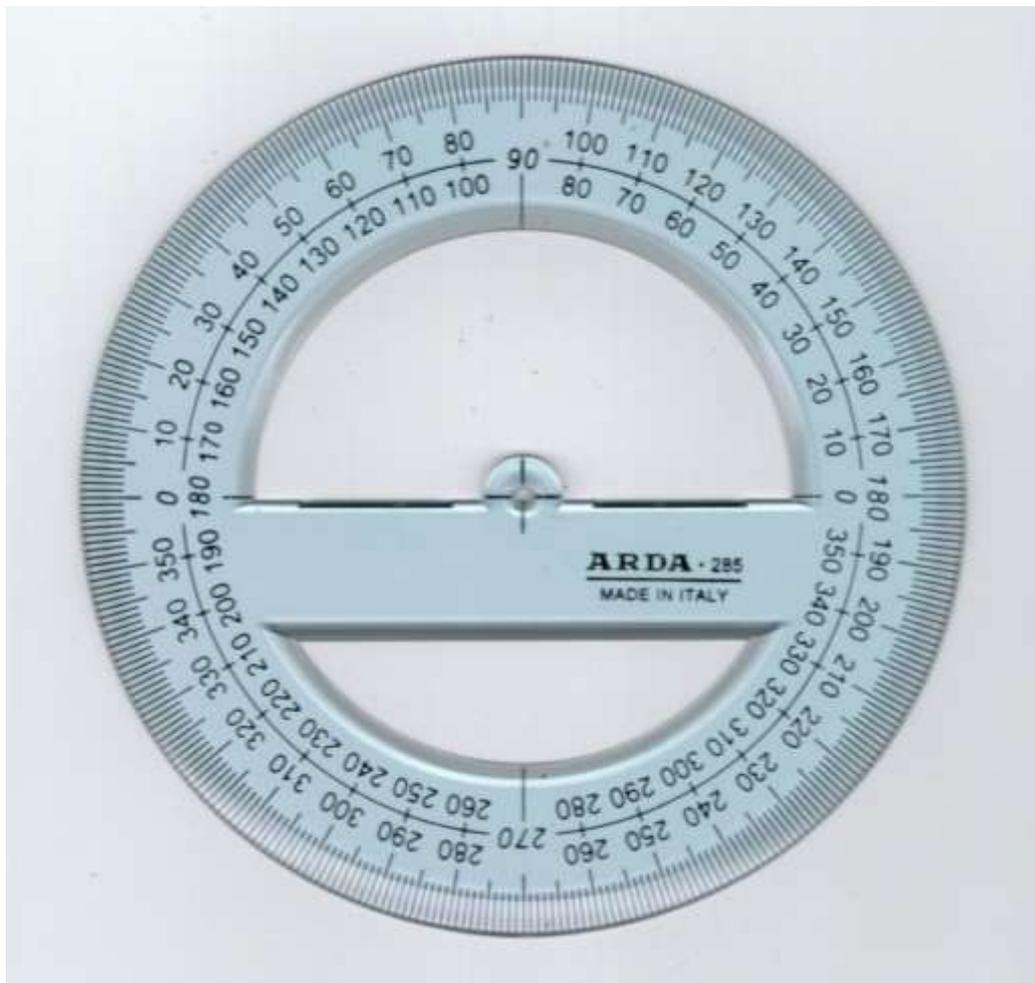
- positivi i valori delle ascisse e negativi quelli delle ordinate nel 4° quadrante.

Anche in Geometria analitica e in Trigonometria sono seguite queste regole.

La figura che segue presenta i principali angoli (multipli di 45°) contenuti in un angolo giro, secondo la più seguita convenzione internazionale sugli angoli, disegnati in un piano cartesiano:



La figura che segue riproduce un comune goniometro di materiale plastico trasparente di produzione italiana:



Esso reca due scale graduate. Quella interna è in senso *antiorario* e ha lo 0 sul semiasse positivo delle ascisse.

La scala esterna è in senso *orario* e ha lo 0 (*zero*) sul semiasse negativo delle ascisse.

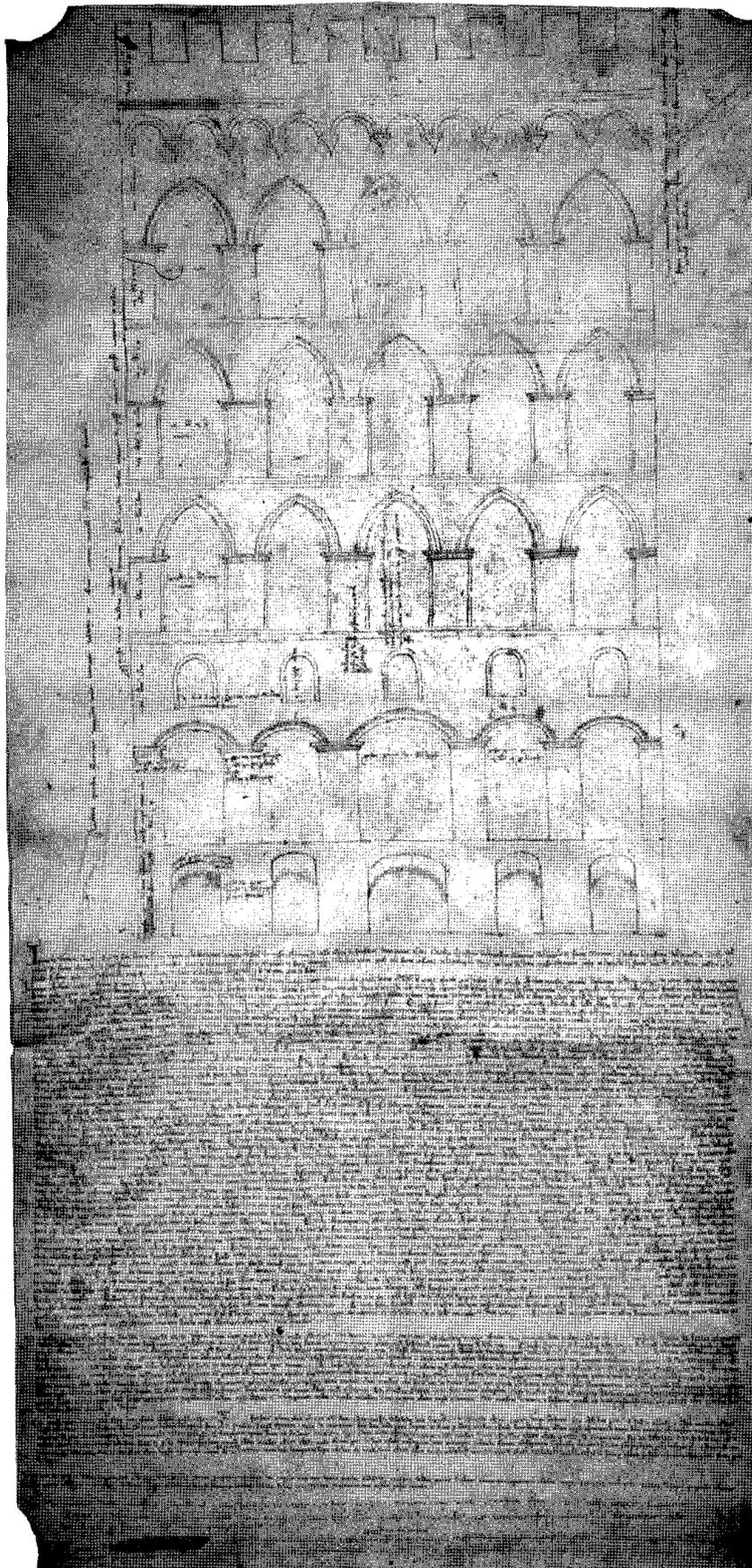
----- ANALISI STORICA -----

Le origini della scala

Il disegno in scala con indicazione delle dimensioni è un'innovazione introdotta nel XIV secoli in alcuni progetti architettonici toscani. Il più significativo è il documento allegato al contratto per la costruzione di Palazzo Sansedoni a Siena, attuale sede della *Fondazione Monte dei Paschi di Siena*, come mostra l'immagine che segue, tratta da http://it.wikipedia.org/wiki/Palazzo_Sansedoni



Il documento riprodotto nella figura che segue contiene, nella parte superiore, il grafico (la vista verticale in proiezioni ortogonali) e nella parte inferiore il contratto stipulato fra il proprietario e committente Gontiero di Goro Sansedoni e i progettisti e costruttori della famiglia di Agostino di Giovanni (che si avvale della collaborazione dei figli Giovanni e Domenico), conosciuto anche come *Agostino da Siena* (Siena, 1285 circa – 1347 circa) e fu scritto in toscano:



----- APPROFONDIMENTO -----

L'inizio dell'anno civile nel Medioevo

Per la precisione, il contratto per Palazzo Sansedoni reca la data del 4 febbraio 1339, secondo l'uso senese: a Siena, a Firenze e in altre città Stato della Toscana medievale il capodanno veniva celebrato il 25 marzo (festività dell'Annunciazione), secondo lo *stile fiorentino o toscano*; nel Granducato di Toscana esso fu abolito a partire dal 1750. Pertanto quella data corrisponde al 4 febbraio 1340 del nostro calendario. Per secoli, il capodanno non è stato celebrato il 1° gennaio, secondo lo *stile moderno*.

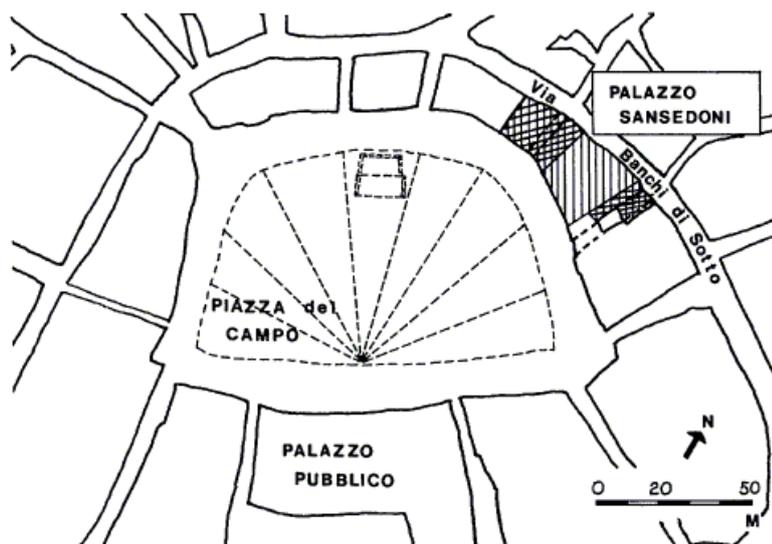
Molti Comuni medievali toscani, e non solo, seguivano due differenti regole:

* Lo stile "A *Nativitate*" che faceva iniziare l'anno dal 25 dicembre: era tipico di Arezzo, Cortona, Massa e Pistoia.

* Lo stile "Ab *Incarnatione*" che fissava il capodanno al 25 marzo: era tipico di Firenze (*stile fiorentino*), di Pisa (*stile pisano*) e di Siena (*stile senese*).

Non in tutta la Toscana era seguita con la stessa modalità questa seconda regola: a Pisa e in altri Comuni era usato lo *stile pisano* secondo il quale l'anno iniziava sempre il 25 marzo, ma con un anticipo rispetto al primo gennaio dell'anno successivo. Una conseguenza rilevante era che lo stesso giorno, ad esempio il 20 gennaio 1350, lo era secondo lo stile pisano ma secondo il calendario fiorentino corrispondeva al 20 gennaio 1349. Fra i due stili correva una differenza di un anno esatto.

Il progetto senese si riferiva alla facciata del Palazzo Sansedoni prospiciente il lato su Banchi di Sotto, perfettamente piana, al contrario della facciata mostrata nella foto che è curvilinea e asseconda l'andamento della Piazza del Campo sulla quale pure si affaccia. Lo schema che segue, tratto dallo studio di Franklin Toker (citato in *bibliografia*) descrive la situazione: con tratteggio semplice è indicata la parte originaria e con tratteggio incrociato sono individuate le aggiunte successive al Medioevo:



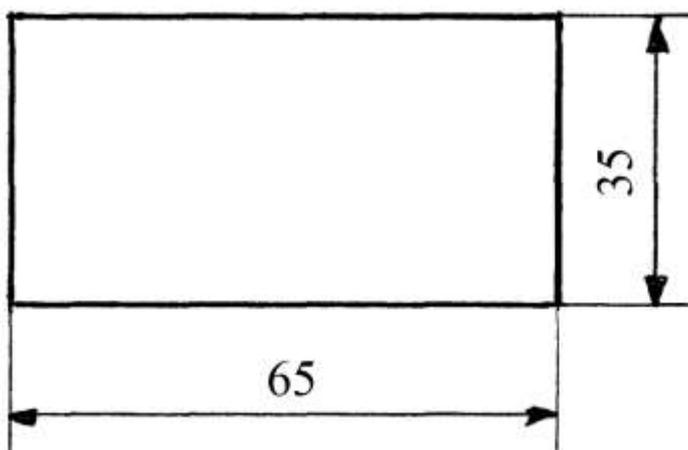
Il contratto fu redatto su due fogli di carta (non di pergamena, stando a quanto sostengono Toker e Valerio Ascani) incollati: il documento è largo 58 cm e lungo 122 cm. Il solo disegno

misura 40,6 ÷ 40,9 x 70,1 cm.

Il progetto riporta la *vista frontale della facciata* con le misure espresse in *braccia senesi*: un braccio senese equivale a 60,1055 cm.

Lo storico dell'arte canadese Franklin Toker ha studiato in maniera approfondita il contratto, il progetto e il tuttora esistente Palazzo Sansedoni. Gli schemi che seguono sono basati sul lavoro di questo studioso: il primo grafico ricostruisce il progetto originale.

Nel documento originale le cifre delle quote sono scritte in *numeri romani* sia nel disegno che nel contratto e talvolta sono scritte per esteso in lettere: il disegnatore le scrisse *in orizzontale* e *in verticale* ruotandole di 90° in senso antiorario quando si trattava di altezze, quasi anticipando le attuali norme, come spiega la figura seguente, conforme alla norma UNI 3973 del febbraio 1989 (“Disegni tecnici – Quotatura – Linee di misura e di riferimento e criteri di indicazione delle quote”):



Secondo la norma le cifre che indicano le quote devono essere scritte secondo una regola ben precisa:

“I valori devono essere letti dalla base e dal lato destro del disegno”.

Infine, nel documento è applicato un principio di *economia* presente nelle attuali norme di unificazione: nessuna lunghezza, tranne l'altezza totale di 56 braccia senesi, presente nel disegno è riprodotta nel testo del contratto. Secondo le norme attuali, è sufficiente scrivere una sola quota per la lunghezza del lato di un quadrato.

----- APPROFONDIMENTO -----

La *canna* usata a Firenze e in altri Comuni della Toscana medievale era di due lunghezze:

- * canna mercantile: era lunga 4 braccia da panno;
- * canna agrimensoria: era lunga 5 braccia da panno ed era chiamata *pertica*.

Il braccio da panno di Firenze era lungo 58,3626 cm e di conseguenza le due canne erano lunghe:

- * la canna mercantile 233,45 cm;
- * la canna agrimensoria o *pertica* 291, 813 cm.

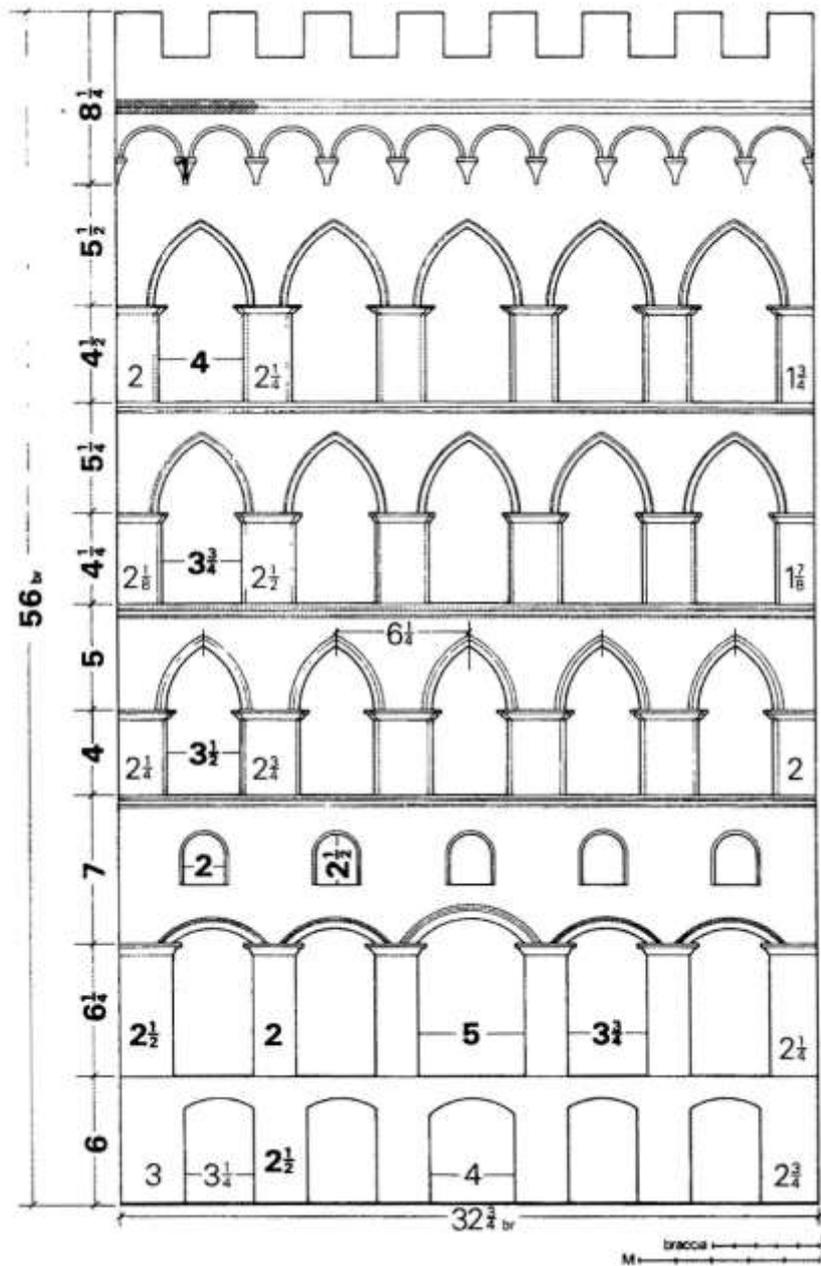
Il braccio da panno usato a Siena era leggermente più lungo di quello fiorentino e cioè 60,1055 cm.

A Siena veniva usata sicuramente la canna agrimensoria lunga 5 braccia o una *pertica*.

Stando allo Zupko (pp. 46 – 47), il braccio da panno usato fra gli altri a Arezzo, Firenze, Pistoia, San Miniato, Lucca, Pisa, Volterra, Siena e Montepulciano era diviso in 2 *palmi*.

%%%%%%%%%

Nello schema che segue le cifre sono state convertite dal Toker nel sistema arabico che usiamo: esse sono scritte sul documento originale. Esse sono tutte espresse in *braccia senesi* (abbreviate con *br*); in basso a destra sono disegnate due scale grafiche, quella superiore in braccia e quella inferiore in metri: è evidente la sostanziale equivalenza fra la lunghezza della pertica di 5 braccia ($5 * 60,1055 \text{ cm} = 300,5275 \text{ cm} = 3,005275 \text{ m}$) e quella di 3 metri.



Il progetto originale è realizzato in scala 1:48.

Il palazzo fu costruito alla fine del XIII secolo e risultò dalla fusione di cinque precedenti edifici.

Nel progetto di Agostino di Giovanni sembrano emergere due distinte proporzioni

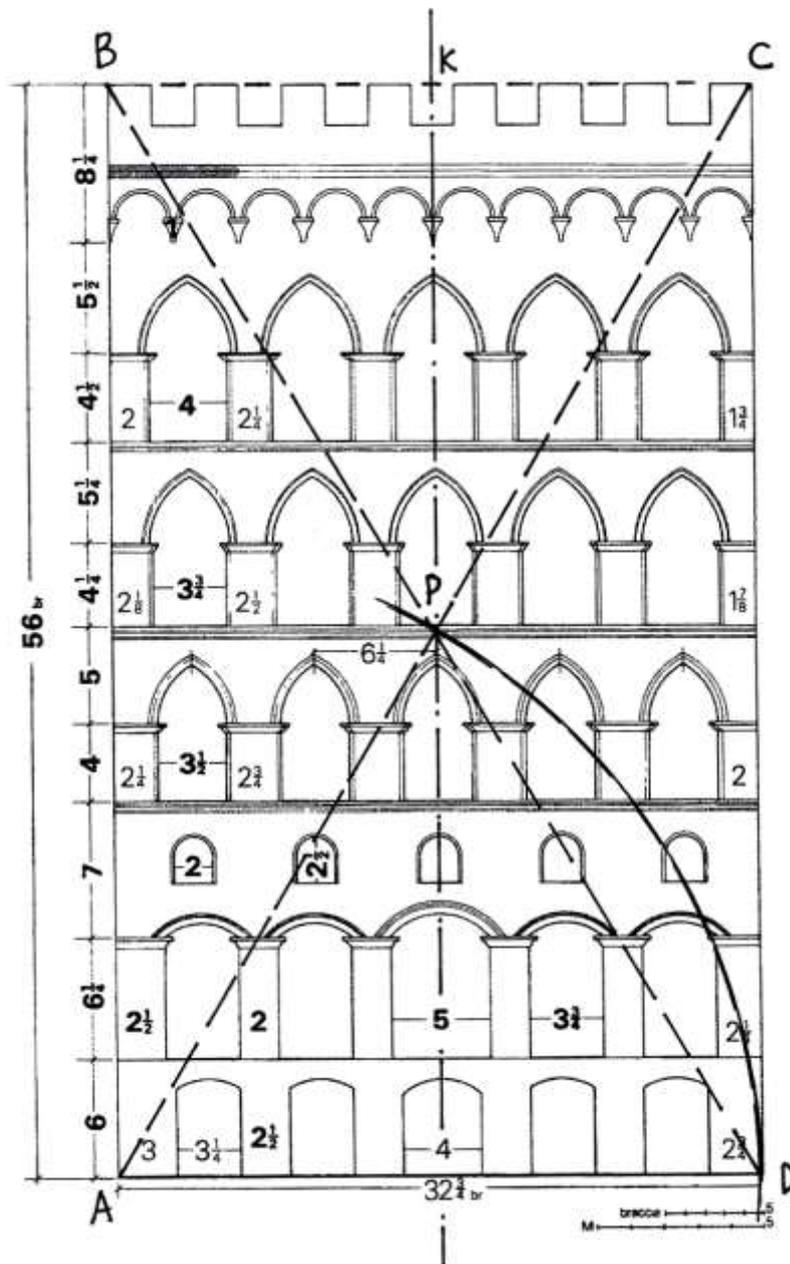
geometriche (peraltro molto impiegate nei progetti di architettura medioevo):

- *Ad triangulum*;
- *Ad quadratum*.

A questo proposito è necessaria una precisazione: le strutture triangolare e quadrata sono presenti nella *vista frontale* della facciata; è assai difficile reperire la presenza del triangolo in una *pianta* di un edificio medievale o rinascimentale. Nel caso della *pianta di San Gallo* (vedere un successivo paragrafo), la struttura quadrata e la sua stretta parente rettangolare sono evidenti nella *pianta*, unica vista disponibile del progetto, privo di qualunque proiezione su un piano verticale.

In un successivo paragrafo sarà approfondito l'argomento.

Nello schema della facciata sono fissati quattro vertici A, B, C e D: essi delimitano un rettangolo, ABCD:



Tracciare le diagonali AC e BD: esse si intersecano nel punto P.

Fare centro nel punto A e con raggio AD disegnare un arco da D: esso passa per il punto P.

I triangoli APD e BPC sono *equilateri* e hanno uguali dimensioni. L'altezza complessiva del

doppio triangolo equilatero, HK, è data da:

$$KH = KP + PH = 2 * PH = 2 * (\sqrt{3})/2 * AD = \sqrt{3} * AD \approx 1,732 * AD .$$

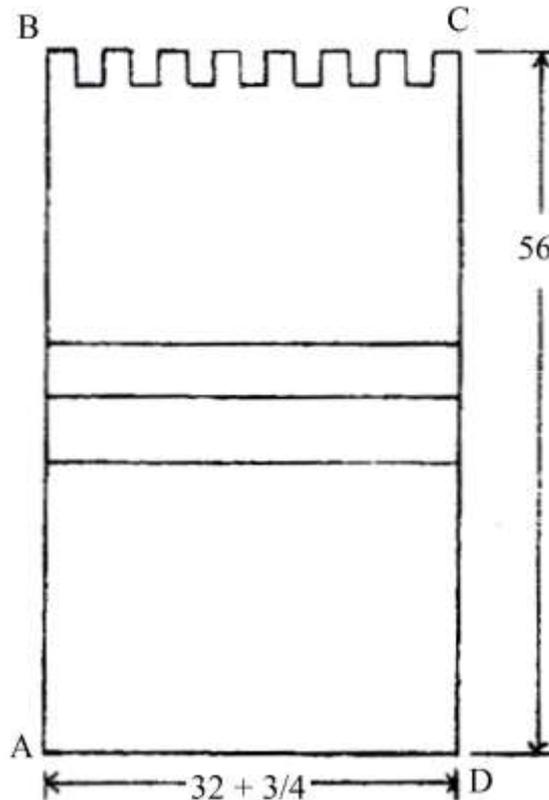
L'altezza di uno dei due triangoli equilateri PH = PK è data da:

$$PH = PK = \sqrt{(PD^2 - HD^2)} = \sqrt{(AD^2 - AD/2)^2} = (\sqrt{3})/2 * AD .$$

Nella struttura *ad triangulum* compaiono le due proporzioni collegate $\sqrt{3}$ e $(\sqrt{3})/2$.

Il rettangolo ABCD ha nel progetto le dimensioni

$$56 \times (32 + \frac{3}{4}) \text{ braccia} = 56 \times 32,75 \text{ braccia:}$$



Il rapporto fra queste due lunghezze è:

$$56 / 32,75 \approx 1,7099 .$$

Questo valore si avvicina molto a quello di

$$\sqrt{3} \approx 1,732 .$$

Nello schema precedente con i due triangoli equilateri, il rapporto fra le lunghezze dell'altezza PH e della base AD è:

$$PH/AD = (\sqrt{3})/2 .$$

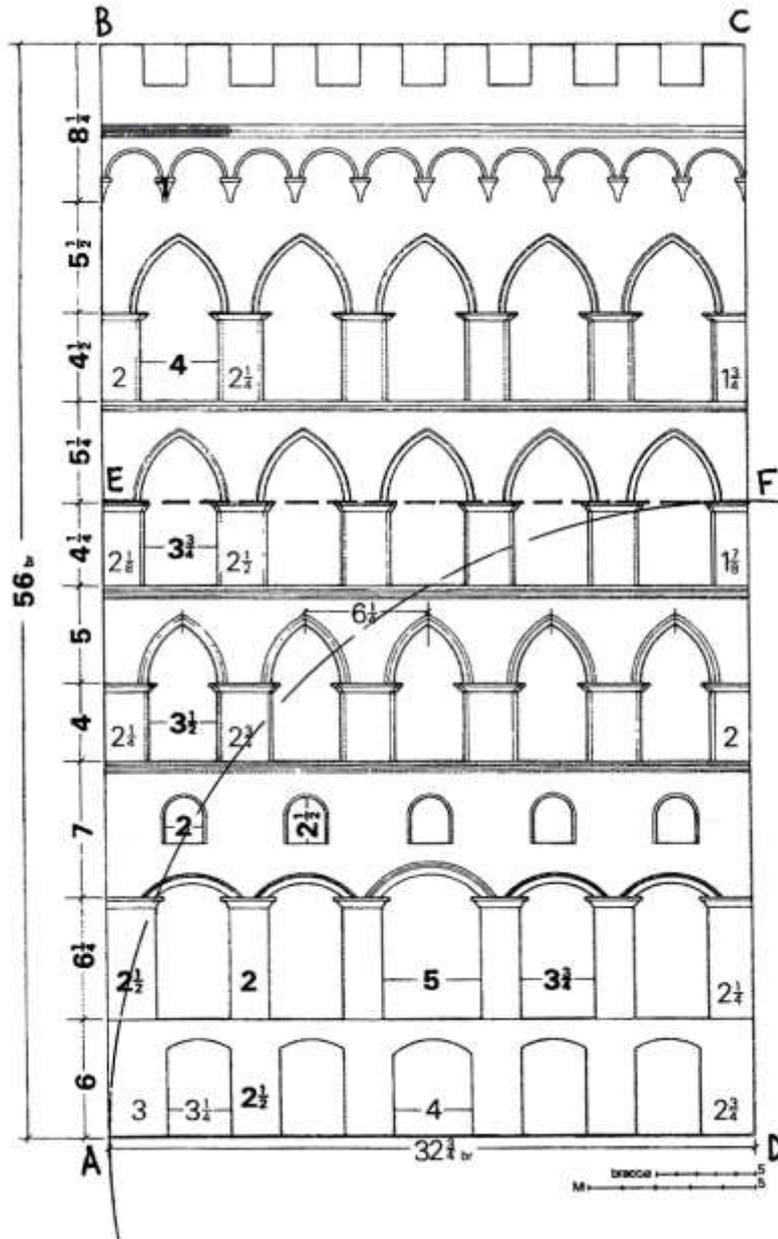
Fra la *doppia altezza* KH e la base AD esiste la proporzione

$$KH/AD = 2 * PH/AD = 2 * (\sqrt{3})/2 = \sqrt{3} .$$

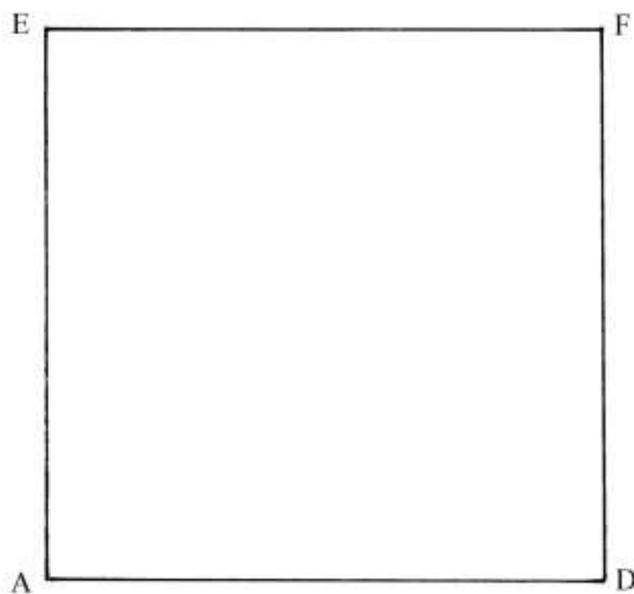
Anche questa proporzione conferma la presenza di una struttura triangolare (equilatera) nel progetto della facciata di Palazzo Sansedoni.

%%%%%%%%%

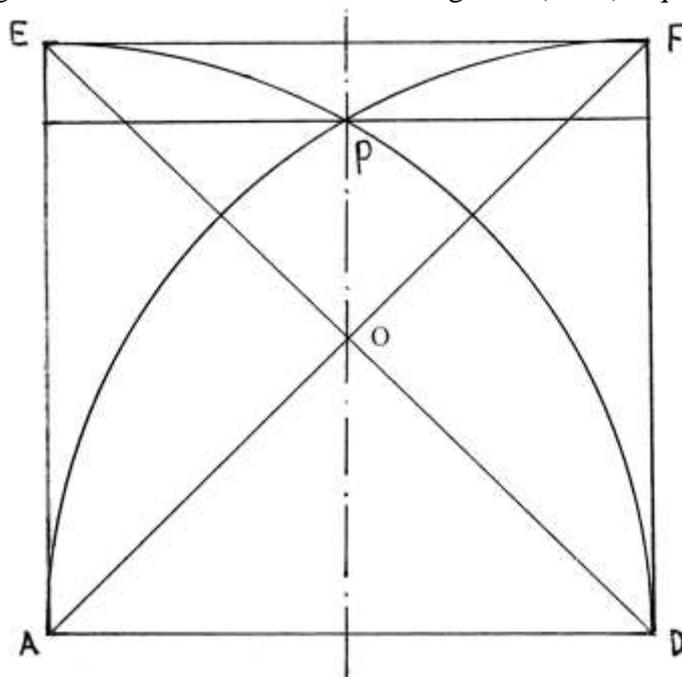
Nello schema è probabilmente presente una seconda struttura basata sul *quadrato*.



Fare centro nel punto D e con raggio DA tracciare un arco fino a fissare il punto F: ADFE è un quadrato:



Il grafico che segue confronta le due strutture: triangolare (APD) e quadrata (AEFD):



Il punto O è l'intersezione delle diagonali del quadrato AEFD.

Nel rettangolo ABCD Toker ha individuato la presenza di una serie di quadrilateri. AEFD è il quadrato di lato AD:

$$\approx 1,7071 * AD.$$

Questa lunghezza è vicina a quella calcolata in precedenza per la doppia altezza:

$$KH \approx 1,732 * AD .e a quella ricavata dalla proporzione fra l'altezza AB (56$$

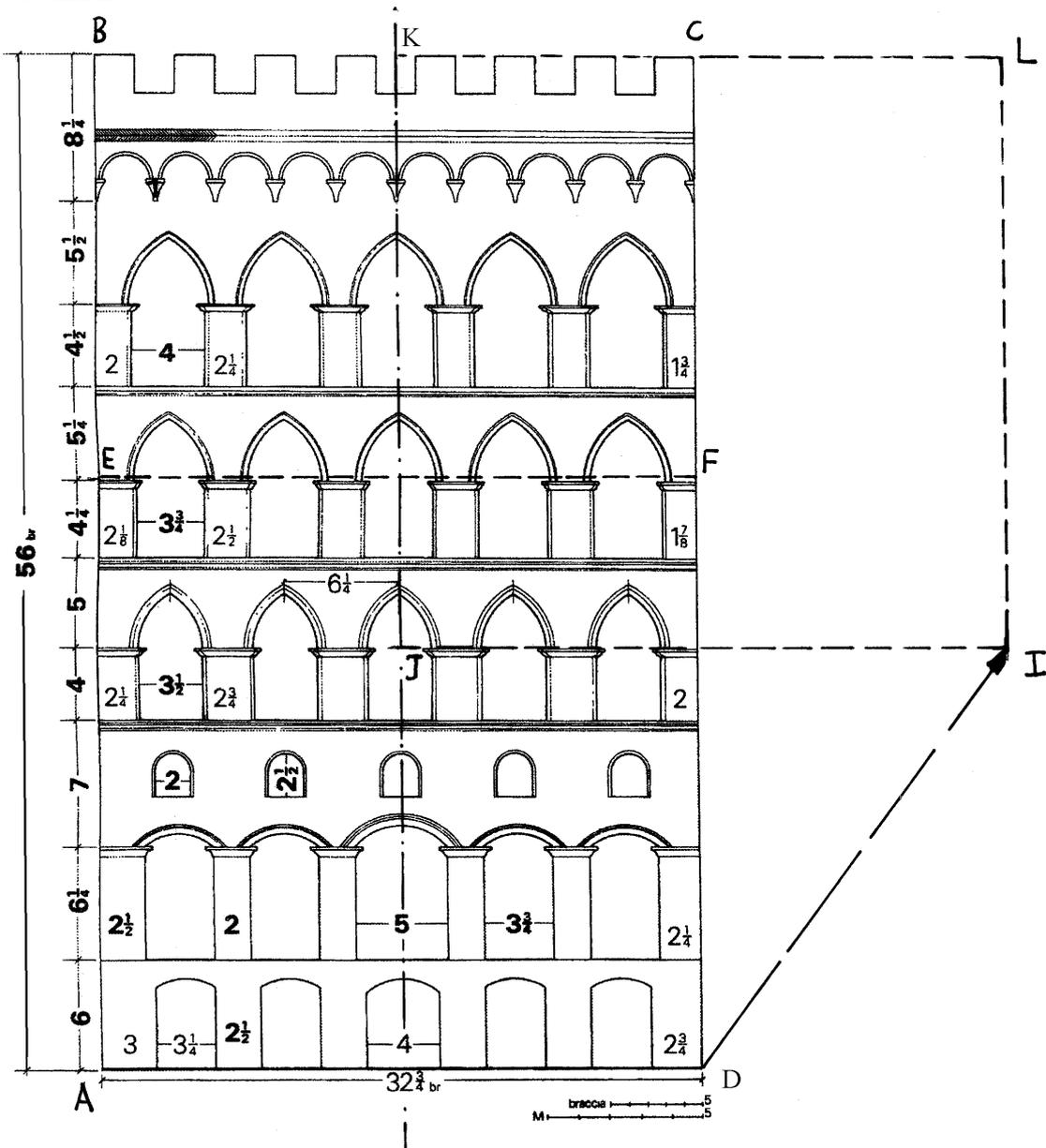
braccia) e la larghezza AD (32,75 braccia):

$$56/32,75 \approx 1,7099 .$$

$$AB \approx 1,7099 * AD$$

%%%%%%%%%

Nel progetto è facile leggere la presenza di altre strutture quadrate con le stesse dimensioni di quelle di Aefd.



Un quadrato ha i vertici nei punti I, J, K e L: il lato JK coincide con l'asse di simmetria verticale della facciata.

I vertici D e I sono collegati con un *vettore*: fra i quadrati Aefd e JKLI sono possibili altri quadrati (di uguali dimensioni) con il vertice inferiore destro collocato con buona approssimazione

sul vettore DI.

Altre tre strutture basate sul quadrato di lato AD sono possibili: una a partire dallo stesso lato AD e rivolta verso sinistra (quindi *simmetrica* rispetto a quella mostrata nella precedente figura) e due costruite a partire dal lato BC verso il basso (rivolte a sinistra e a destra).

Le scale usate

I disegni medievali italiani sono stati realizzati in scala. I rapporti più usati erano in base 12 e suoi multipli: ad esempio 1:48 e 1:144.

Talvolta furono usate scale in base 16 e in altri casi scale su base decimale: 1:40 e 1:50.

La scala più usata sembra essere quella 1:48.

Alcune unità di misura romane avevano multipli e sottomultipli in base 12. Per secoli questa tradizione si conservò nelle unità di misura delle città Stato italiane e nella monetazione. Alla base 12 fu spesso associata la base 20: il *braccio fiorentino* (leggermente più corto di quello senese) corrispondeva a 0,583626 m ed era diviso in 20 *soldi*.

Il *fiorino* d'oro coniato da Firenze a partire dal 1252 era suddiviso in 20 soldi e un soldo valeva 12 denari: un fiorino valeva 240 denari.

----- APPROFONDIMENTO -----

Le scale su base duodecimale

Numerosi progetti medievali di edifici, in pianta o in vista frontale, furono tracciati con scale derivate dalla base 12. La pianta di San Gallo era in scala 1:192 e cioè in scala 1:16*12 e il progetto di Palazzo Sansedoni era in scala 1:48 e cioè 1:4*12.

Così Renzo Chiovelli [23] spiega l'uso della scala con la base proporzionale a 1:12 (pp. 134-136):

“... Anche le analisi circa l'ideazione proporzionale degli elaborati condotte sui disegni progettuali architettonici medioevali conservatisi in Italia confermerebbero un rilevante uso del sistema a base duodecimale assieme a quello decimale, al quale si sarebbe passati tra la fine del XIV ed il XV secolo, ed a quello esadecimale, stimato come uno dei più diffusi durante il medioevo. Ma è soprattutto dalla verifica delle scale metriche impiegate in questi elaborati progettuali che si riscontra un largo impiego di riduzioni effettuate mediante multipli di dodici ovvero nel modo più pratico per un sistema di misure lineari basato su divisioni in dodicesimi. Grazie agli studi recentemente compiuti da Valerio Ascani [5] sui disegni pervenutici dal Trecento italiano si può constatare come le scale di riduzione metrica di tali progetti architettonici siano sempre state elaborate impiegando multipli di dieci o, molto più frequentemente, di dodici. Se, infatti, per i grandi disegni su pergamene riguardanti due distinte soluzioni progettuali per la facciata del duomo d'Orvieto, reputate le più antiche rappresentazioni edilizie in scala conservate in Italia per via dell'attribuzione temporale entro il primo quarto del XIV secolo, sono stati individuati rapporti scalari a base decimale, ovvero di 1:50 e di 1:40, la grande maggioranza degli altri elaborati tardomedioevali sembrerebbero stabilire le loro riduzioni scalari su multipli di dodici.

“La cosiddetta "pergamena senese", ovvero il disegno architettonico di ampie dimensioni di un prospetto di torre campanaria ritenuto un progetto per il campanile del nuovo duomo di Siena, che potrebbe essere stato concepito da Lando di Pietro tra il 1339 ed il 1340, risulterebbe disegnato in braccia toscane "a terra", equivalenti a 55,1202 cm, secondo una riduzione in scala 1:48, ossia 4 per 12 volte più piccolo dell'opera da realizzare. Sempre in braccia toscane "a terra" appare disegnata una pianta di progetto per il duomo nuovo di Siena, contenente anche indicazioni

metriche, dal cui confronto con le misure reali della vecchia cattedrale esistente si dedurrebbe una scala metrica del progetto di 1:144(12x12). Mentre un'altra proposta di pianta per l'inglobamento della precedente cattedrale senese nella nuova chiesa da costruirsi, probabilmente redatta sempre nel secondo quarto del XIV secolo ma successivamente all'anzidetta pianta, forse in concomitanza con la nomina a capo del cantiere di Giovanni d'Agostino al posto di Lando di Pietro, scomparso nel 1340, riporta sulla stessa pergamena una scala metrica in braccia senesi da 60,1055 cm, secondo una riduzione in scala 1:156 (13x12). Ancora in scala 1:48 (4x12) di braccia senesi risulta essere disegnato uno schema progettuale per la facciata di palazzo Sansedoni prospiciente Banchi di Sotto a Siena, accluso nel 1340 ad un contratto di allogazione per la costruzione ad Agostino di Giovanni, al figlio Giovanni d'Agostino ed ai loro aiutanti. Sempre concepito in braccia senesi ma ad una scala più grande, 1:24 (2x12), è stato valutato il progetto per il prospetto principale della cappella di piazza nel Campo di Siena, in cui la critica ha trovato attinenze con l'arte dell'Orcagna datandolo agli anni 1360-1370. Altri progetti d'area toscana confermerebbero l'uso privilegiato di riduzioni in scala su base duodecimale. Una scala metrica di otto braccia con riportata l'indicazione, sempre nella stessa scala, dell'unità di misura definita «el braccio», riconducibile, in base ad un'approssimazione tranquillamente tollerabile per l'epoca medioevale, a braccia toscane "a terra" ridotte in scala 1:24 (2x12), accompagna il progetto pergameneo per il prospetto della cappella Baroncelli in Santa Croce a Firenze, attribuito alla scuola di Tino di Camaino e databile al quarto decennio del XIV secolo, Più problematica appare invece l'esatta definizione della riduzione in scala di un progetto planimetrico per il convento di S. Francesco ad Arezzo, collocabile attorno al nono decennio del Trecento, il cui rapporto con la chiesa reale è stato calcolato possa essere di 1:294-1:300 circa, ovvero divisibile in 24,5 o 25 volte 12. Il largo impiego di scale metriche basate su multipli di dodici, chiaramente riferibile ad una resa più immediata nei rapporti matematici con le analoghe suddivisioni duodecimali delle misure lineari, non deve, comunque, essere ritenuto una prerogativa della regione toscana e delle aree limitrofe, dove il disegno progettuale architettonico medioevale sembrerebbe aver avuto precoci sviluppi rispetto al resto della penisola italiana. Infatti, anche dalla copia sommaria eseguita da Antonio di Vincenzo d'un disegno in pianta e sezione riferibile a più esatti elaborati progettuali per il duomo di Milano risulterebbero rapporti scalari di 1:384 (32x12) e di 1:96 (8x12). Così come gli stessi rapporti scalari in dodicesimi, seppure largamente privilegiati, non dovettero rappresentare una scelta esclusiva per i progettisti tardomedioevali italiani, essendoci pervenuti anche disegni architettonici basati su scala decimale, quali i già ricordati prospetti del duomo orvietano, un progetto per la facciata del battistero di S. Giovanni a Siena redatto in scala 1:50 nel quarto decennio del XIV secolo, forse sempre durante la direzione del cantiere della cattedrale da parte di Lando di Pietro nel 1339-40 e, probabilmente, anche un disegno progettuale per un pulpito da realizzare nel duomo d'Orvieto, ma attribuito anch'esso ad artisti senesi attivi alla fine della prima metà del XIV secolo, in cui sembrerebbe ravvisabile una scala di 1:10...”.

Riguardo ai progetti della facciata del duomo di Orvieto, Valerio Ascani (a p. 68 del suo testo [5]) così spiega la presenza del fattore 12:

“...È inoltre da notare come le misure degli elementi architettonici della facciata attuata siano direttamente riportabili a multipli per computo duodecimale del braccio "a terra". Oltre la larghezza totale di 72 braccia (6 volte 12), è dato infatti riscontrare stabilite su tale base le dimensioni dei campi scolpiti dei pilastri intermedi, delimitati da cornici e misuranti m 6,6 x 3,3, cioè 12 x 6 braccia, l'ingombro totale del portale maggiore (12 x 24 braccia, portale peraltro inseribile - all'interno di significative cornici - anche in un quadrato di 18 braccia di lato) e dei portali laterali (4 x 8 braccia), il raggio delle lunette dei portali a partire dal centro di curvatura (12 braccia la maggiore, 6 le minori, tutte rialzate di 3 braccia esatte dalle cornici superiori dei

rispettivi portali), le quadrifore dei portali minori (12 x 4 braccia), e tutte le colonnine dei portali (altezza m 6,6 pari a 12 braccia). Indubbiamente, tale corrispondenza non può essere ritenuta, nella fattispecie, dettata da fattori simbolico-numeric, esoterici o teologici né tantomeno da un semplice caso. È assai probabile, al contrario, che sia dovuta semplicemente a fattori di pratica edile, come la taratura degli strumenti sul cantiere. Erano infatti comuni, per misurazioni in altezza o sul terreno, pertiche di 4 o 6 braccia, con le quali è ragionevole supporre sia stata realizzata, agevolmente e in modo unitario, la parte inferiore della facciata del duomo orvietano, all'interno degli anni di direzione del cantiere da parte di Lorenzo Maitani, e dei maestri immediatamente successivi, fino alla metà del Trecento, come del resto ipotizzato dalla critica...”.

Gran parte di queste misure erano espresse in *braccia toscane da terra*, corrispondenti al *braccio da terra di Firenze*, argomento che approfondiamo fra poco.

L'origine del fattore 12 è può essere fatta risalire al sistema metrologico romano.

Le unità di misura romane lineari e di superficie

In numerosi manoscritti dei trattati dei Gromatici sono presenti dei paragrafi, più o meno simili, dedicati alla descrizione del sistema delle unità di misura romane.

Per questa ragione, i paragrafi dedicati alle unità di misura contenute nel trattato di Vitruvio Rufocui potrebbero non essere opera di questo Gromatico, ma ricavati da manuali circolanti a disposizione di tutti.

La principale unità di misura lineare era il *piede romano*, lungo 29,57 cm (o 295,7 mm), secondo il campione presente nel tempio di Giunone Moneta a Roma. Non sempre è stata rispettata questa misura standard.

Una curiosità: la dimensione maggiore del foglio di formato A4 è 29,7 cm (297 mm). La misura è *quasi* uguale a quella della lunghezza del piede romano.

Le lunghezze maggiori del piede erano rilevate con misurazioni effettuate con l'impiego della *pertica*, un'asta che poteva assumere due diverse lunghezze:

- 10 piedi (= 295,7 cm) e la pertica era detta *decempeda*,
- 12 piedi (= 354,84 cm).

Il gruppo delle prime unità di misura lineari (*dito*, *uncia*, *palm*, *pie* e *cubito*) è di derivazione *anatomica* perché esse sono ricavate dalle lunghezze convenzionali di parti del corpo umano, di per sé di natura *statica*. Queste unità erano impiegate per misurare manufatti immobili.

La tabella presenta i *sottomultipli* del piede, sulla base della relazione 1 piede = 29,57 cm:

nome	rapporto con il piede	lunghezza in cm
dito (digitus)	1/16	1,848
uncia (uncia)	1/12	2,464
palm (palmus)	1/4	7,39
sestante (sextans o dodrans)	3/4	22,1775

Nella tabella che segue sono riportate le unità di misura lineari *multiple* del piede:

nome	rapporto con il piede	lunghezza in cm (o in metri, dove indicato)
<i>palmipes</i> (piede + palmo)	1 1/4	36,96
cubito	1 1/2	44,355
passo semplice (gradus) o grado	2 1/2	73,925
passo doppio (passus)	5	147,85
pertica (decempeda)	10	295,70
pertica 12 piedi	12	354,84
actus (atto)	120	35,484 metri
lato maggiore iugero	240	70,968 metri
stadio (stadium) = 125 passi doppi	625	184,81 metri
centuria	2 400	709,68 metri
miglio (miliaris)	5 000 (= 1 000 passi doppi)	1478,5 metri
lega (leuga)	7 500	2217,75 metri
lato saltus	12 000	3548,4 metri
lato ager	60 000 (= 12 miglia)	17 742 metri

Le unità di misura lineari usate a Firenze

Nel Medioevo, a Firenze erano usate due unità di misura della lunghezza:

- * il braccio *da panno* (“braccio di Calimala”, dal nome della strada fiorentina che ospitava molte botteghe di artigiani tessili): esso era lungo l’equivalente di 58,3626 cm;
- * al suo fianco, per alcune attività edilizie era usato il *braccio da terra*.

Le due unità di misura lineare erano legate da un rapporto fisso:

$$1 \text{ braccio da terra} = (17/18) * \text{braccio da panno} \approx \\ \approx 58,3626 * (17/18) \approx 55,1202 \text{ cm} .$$

Come in precedenza anticipato, fino a metà del Trecento numerose grandi opere edilizie furono progettate con misure espresse in *braccia da terra toscane*. Con il passare del tempo, quel braccio fu sostituito da quello da panno. Forse questa innovazione fu imposta dalla crescente importanza delle Corporazioni legate alla lavorazione e al commercio dei materiali tessili.

Le distanze geografiche continuarono a essere misurate con il *braccio da terra*.

Come il *fiorino*, il *braccio da panno* fiorentino era diviso in 20 *soldi* e ciascun soldo era ripartito in 12 *denari*: furono usati gli stessi termini e uguali rapporti, sempre secondo la doppia base 20 e 12.

La tabella che segue elenca i multipli (il miglio) e molti sottomultipli del braccio da panno:

LUNGHEZZE

<i>RAGGUAGLIO DEL BRACCIO FIORENTINO A PANNO E DELLE SUE FRAZIONI PIU' CITATE DAGLI ACCADEMICI</i>			
Miglio	braccia 2833 1/3		m1653,607
braccio	20 soldi		cm 58,3626
soldo	12 denari	6 piccioli	cm 2,9181
quattrino	4 denari		cm 0,9727
denaro	12 punti		cm 0,2432
punto			cm 0,0203
un braccio e 1/4			cm 72,9532
2/3 di braccio			cm 38,9084
16 soldi			cm 46,69008
3/10 di braccio	18 quattrini		cm 17,50778
3/4 di braccio	15 soldi		cm 43,7718
8 quattrini	1/15 di braccio		cm 7,7816

La tabella è tratta dal sito del Museo Galileo (<http://www.museogalileo.it/>).

Una curiosità: il passo romano era lungo 29,57 cm e il braccio da panno di Firenze era 58,3626 cm. Il rapporto, r , fra le lunghezze del secondo e del primo vale:

$$r = 58,3626/29,57 \approx 1,9737 \text{ arrotondabile a } 2.$$

LE VARIE STRUTTURE POLIGONALI

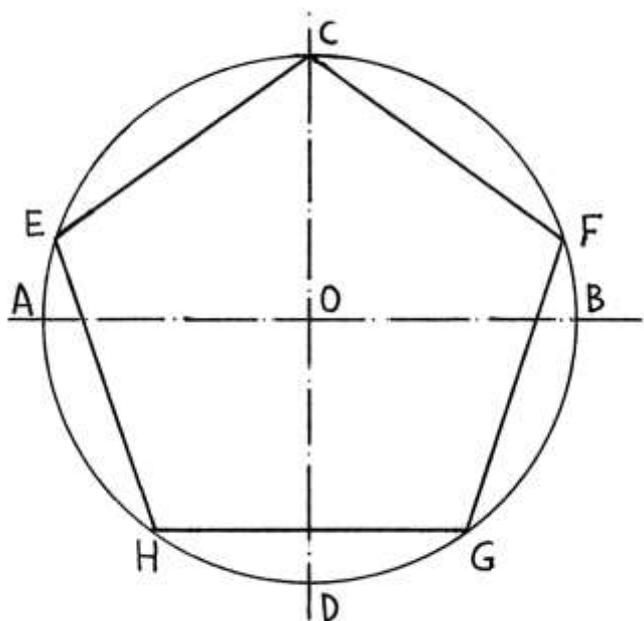
Come abbiamo già spiegato, nella vista frontale del progetto di Palazzo Sansedoni furono applicate due strutture poligonali:

- *Ad triangulum;*
- *Ad quadratum.*

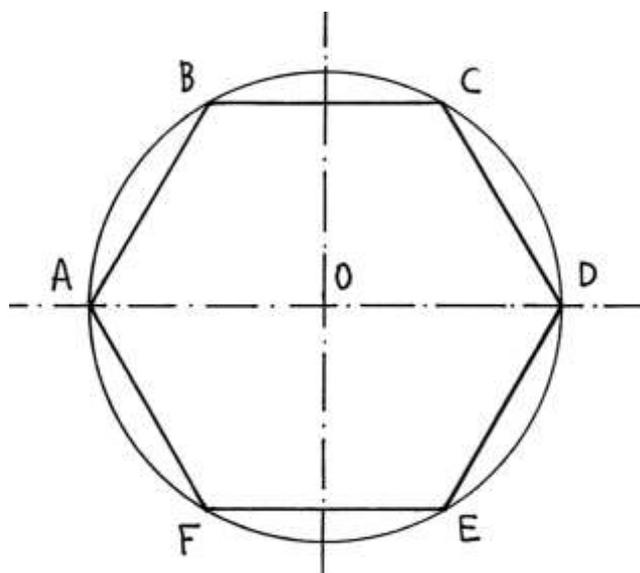
Nel paragrafo che segue è presentata la *pianta di San Gallo*: in essa sono presenti strutture quadrate e rettangoli.

Alcuni edifici avevano *pianche* a forma di altri poligoni regolari.

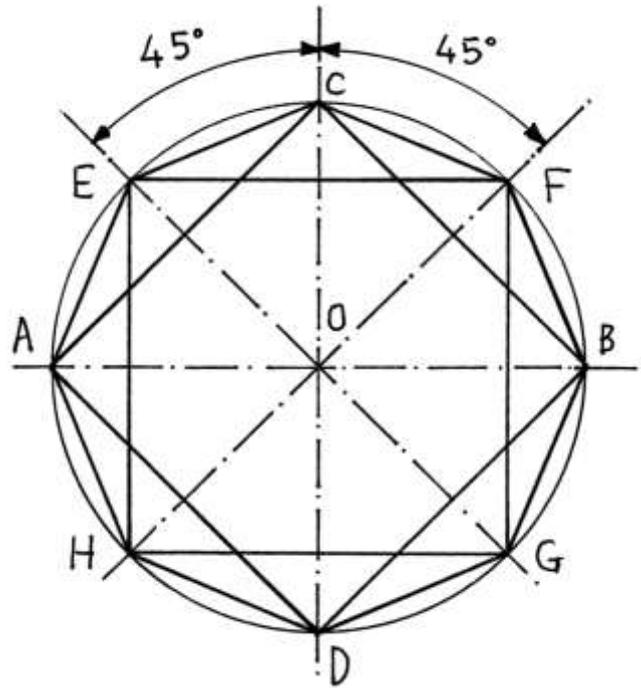
- * Il *pentagono regolare*:



- * L'*esagono*:

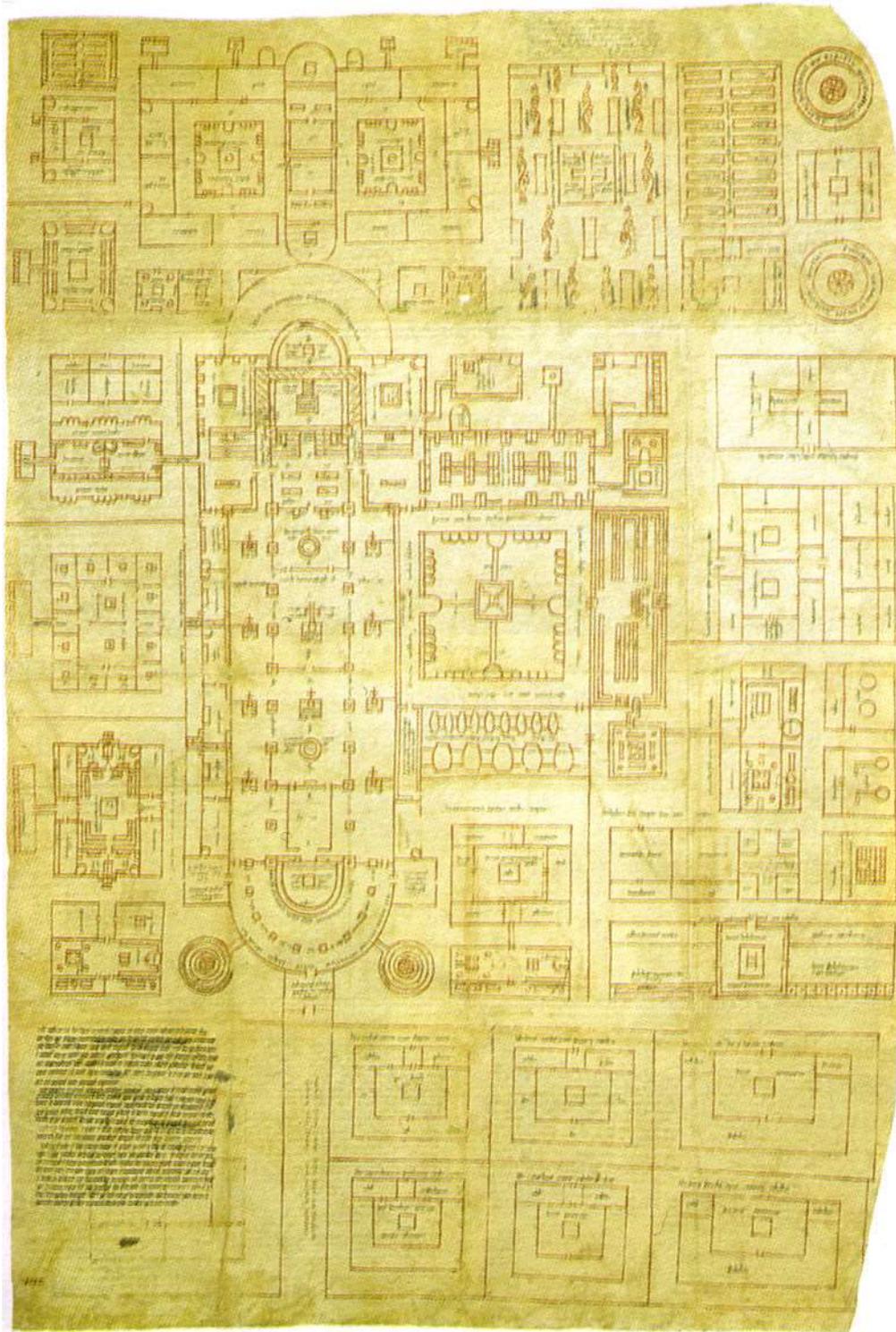


- * due quadrati inscritti nello stesso cerchio con le diagonali ruotate di 45° generano un *ottagono regolare* inscritto:



La pianta di San Gallo

La *pianta di San Gallo* è la mappa di un'abbazia che risale all'inizio del IX secolo. Essa contiene il disegno di una complessa abbazia benedettina comprendente chiese, abitazioni, cucine, laboratori, infermeria, birreria e stalle:



Il progetto non fu mai realizzato.

Il disegno è conosciuto come pianta di San Gallo perché essa è conservata nella biblioteca dell'Abbazia di San Gallo in Svizzera.

Il documento fu disegnato nello *scriptorium* della vicina Abbazia di Reichenau sul lago di Costanza.

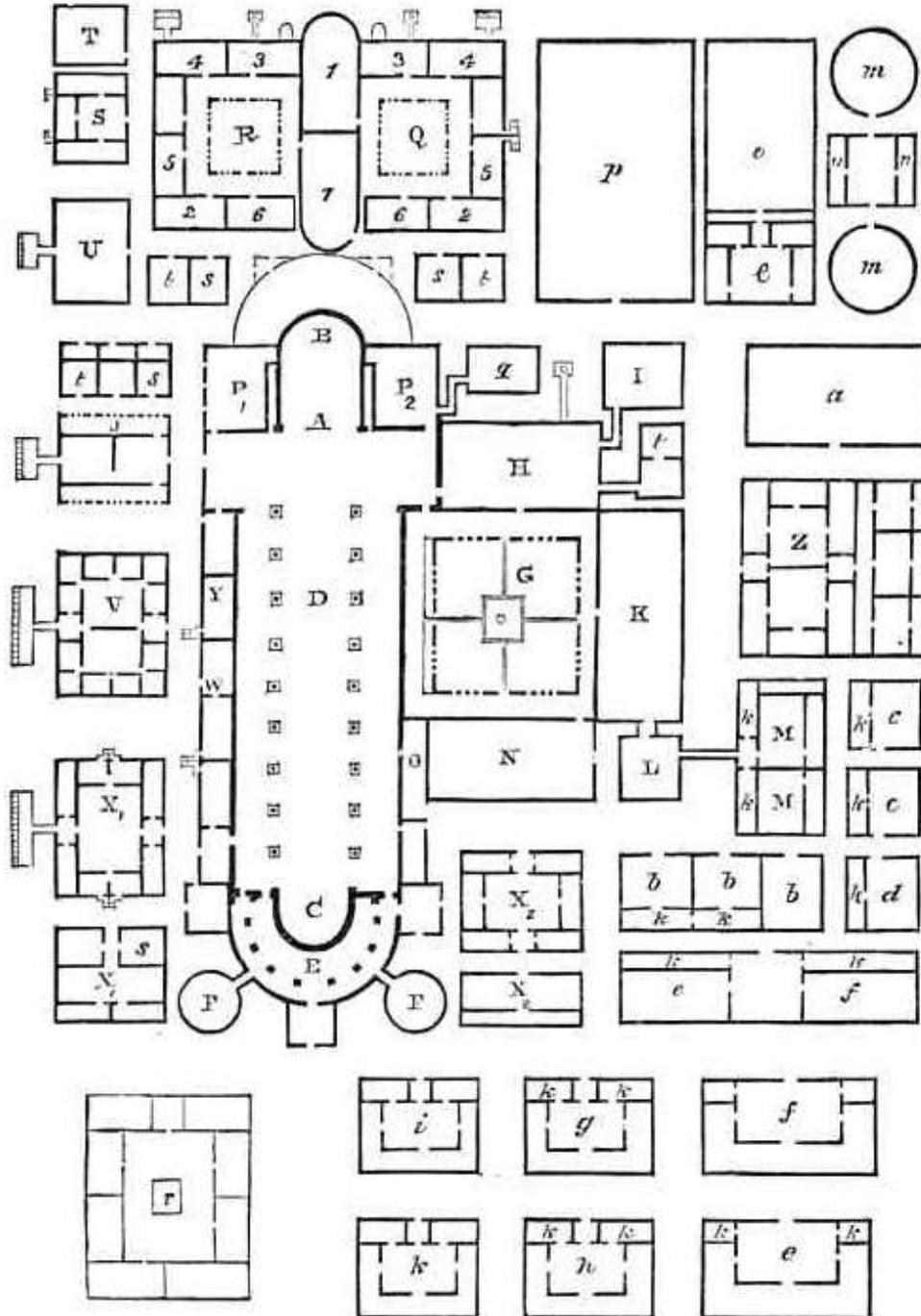
La pianta fu disegnata su cinque fogli di pergamena uniti per formare un rettangolo di dimensioni 113x78 cm.

Furono usati due tipi di inchiostro: un inchiostro rosso per le linee degli edifici e uno

marrone per i testi.

La pianta fu disegnata in scala 1:192 e cioè in scala 1:12*16.

La figura che segue, da Wikipedia, mostra la stessa pianta semplificata:



Sono rese evidenti le strutture quadrate o rettangolari che caratterizzano il progetto.

LE PROIEZIONI ORTOGONALI

Il metodo delle proiezioni ortogonali ha degli antenati assai illustri.

Grazie alle traduzioni fatte dell'opera di Vitruvio e alla sua pubblicazione con il corredo di disegni, è possibile descrivere nei seguenti termini il metodo di rappresentazione usato dall'architetto romano e consistente in tre disegni:

1. L'*iconografia*, è la vista che oggi chiamiamo *pianta* (o proiezione sul piano orizzontale). È la più importante. Con questo termine Vitruvio potrebbe aver definito anche il disegno del tracciato sul terreno.
2. L'*ortografia*, l'*alzato* (o proiezione sul piano verticale).
3. La *scenografia*: è una rappresentazione prospettica di un oggetto, formata dal disegno della facciata e delle pareti laterali viste di scorcio, con le linee convergenti al centro del disegno.

Un bellissimo esempio di rappresentazione scenografica è la famosa tavola di Urbino, "La Città ideale", un tempo attribuita a Piero della Francesca o alla sua scuola e datata a circa il 1475. Grazie ai risultati ottenuti con recenti avanzate ricerche (condotte con *radiografie* e *riflettografie*) delle quali è stata data notizia nel 2006, è stata individuata la presenza di un sottostante disegno che è stato attribuito alla mano di Leon Battista Alberti. L'ipotesi ha qualche fondamento perché nella tavola sovrastante sono rappresentati due edifici, entrambi a Firenze: a destra la facciata della Chiesa di Santa Maria Novella e a sinistra il palazzo Rucellai, tutti e due progettati dall'Alberti:



In sostanza, Vitruvio usò insieme le proiezioni ortogonali verso due piani perpendicolari e una primitiva forma di prospettiva.

Si deve a *Piero della Francesca* (secondo recenti ricerche, nato nel 1412 e morto il 12 ottobre 1492, lo stesso giorno in cui Cristoforo Colombo scoprì l'America) un perfezionamento del metodo della doppia proiezione di un oggetto verso i due piani che oggi chiamiamo orizzontale, P.O. (l'*iconografia* di Vitruvio) e verticale P.V. (l'*ortografia* di Vitruvio) per disegnarne la prospettiva: nel suo trattato *De prospectiva pingendi*, Piero inserì numerose tavole corredate da ampie spiegazioni.

In alcuni disegni, Piero della Francesca aggiunse pure una proiezione rispetto ad un terzo piano e le *sezioni*: se il terzo piano era disegnato perpendicolarmente agli altri due (come fosse un piano laterale del metodo delle proiezioni ortogonali), veniva usato per disegnarvi la prospettiva.

Piero introdusse anche le linee di collegamento fra i punti corrispondenti delle diverse *viste*, le *linee di proiezione*.

Avendo così strettamente collegate fra loro le viste, Piero della Francesca introdusse un'altra fondamentale innovazione: su un qualsiasi disegno tracciò viste e sezioni usando la stessa scala di proporzione, come facciamo nei nostri attuali disegni tecnici. A nessun tecnico verrebbe oggi in mente di disegnare in scala 1:1 la vista sul P.O. e in scala 1:2 la vista sul P.V. Eppure, fino al lavoro di Piero della Francesca, l'uniformità della scala di rappresentazione di un pezzo meccanico o di un altro oggetto non era certa.

----- SCHEDA STORICA -----

Prima di Piero della Francesca

Il notaio pratese Giovanni di Gherardo Gherardi (circa 1367-1445/1446), conosciuto anche come Acquetini, preparò nel 1425 una relazione molto critica nei confronti di Filippo Brunelleschi, riguardo alle tecniche di costruzione e all'andamento dei lavori della cupola di Santa Maria del Fiore. Il tempo ha poi dato ragione a Brunelleschi perché la cupola fu regolarmente costruita secondo il suo progetto ed è in piedi e intatta dal 1436.

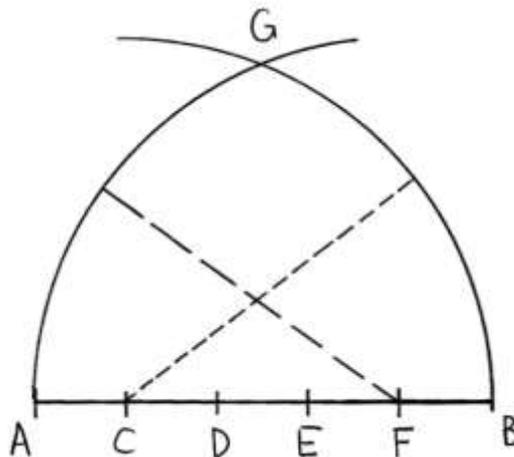
Il documento di Gherardi è tracciato su pergamena ed è tuttora conservato presso l'Archivio di Stato di Firenze. Ha forma rettangolare con i margini molto danneggiati nella parte superiore; le sue dimensioni massime sono 64,4 x 48,7 centimetri. Contiene *cinque* testi esplicativi e *tre* disegni:

- In alto a destra, una vista in pianta del tamburo, colorata in rosso.
- Sempre in alto, ma al centro, una sezione frontale della cupola, tracciata capovolta per via di un uso singolare del supporto: la figura è disegnata usando due colori, marrone alla base e ricoperta con nero-indaco lasciando in marrone i tre occhi del tamburo.
- Infine, nella parte centrale e inferiore della pergamena è disegnato uno schema con metodi di tracciatura di archi con differenti profili per la cupola, realizzato con riga e compasso.

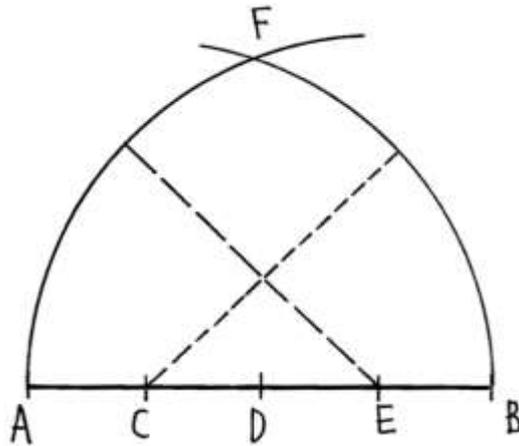
Una dettagliata analisi del documento di Gherardi è contenuta alle pp. 179-189 del volume di Massimo Scolari citato in bibliografia [54].

I tre disegni sono disposti senza un ordine, un collegamento apparente. Se fossero realizzati oggi, la vista in pianta sarebbe disegnata sul P.O. e la sezione frontale sul P.V, *con lo stesso rapporto di scala*, ciò che non è avvenuto nell'originale.

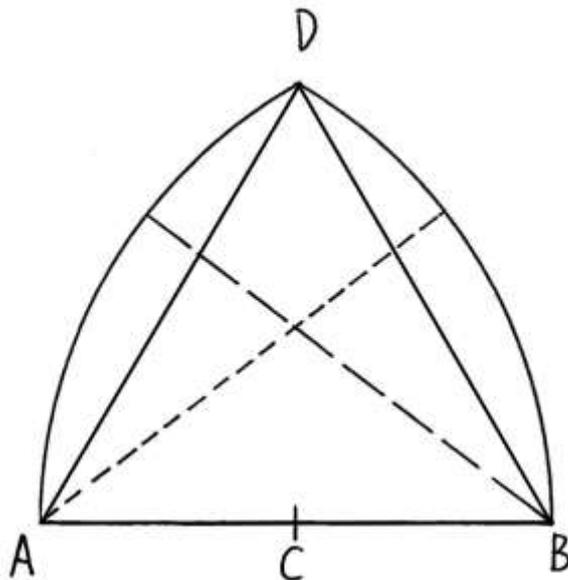
Il profilo della Cupola interna è a *sesto di quinto acuto*:



Quello della Cupola esterna è a *sesto di quarto acuto*:



È utile chiarire la costruzione geometrica di questa famiglia di archi. L'*arco a sesto acuto* è definito da due archi di circonferenza di raggio AB ottenuti facendo centro negli estremi A e B. Essi si intersecano nel punto D:

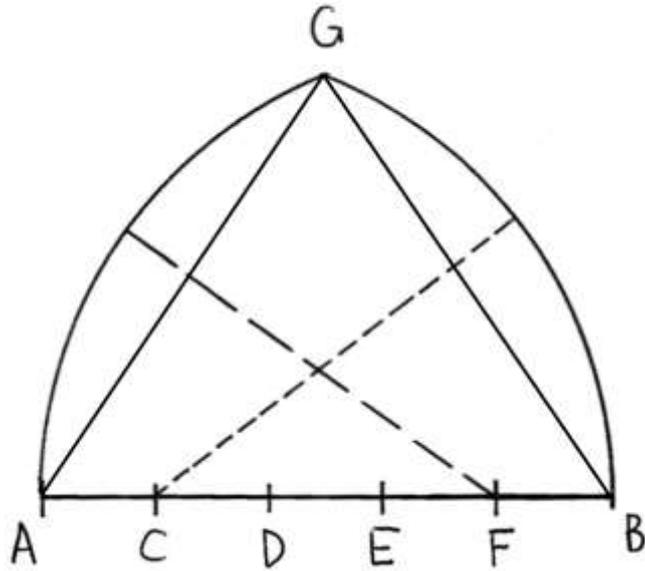


ADB è un *triangolo equilatero*.

L'*arco a sesto di quinto acuto* ha la base AB divisa in *cinque* parti uguali.

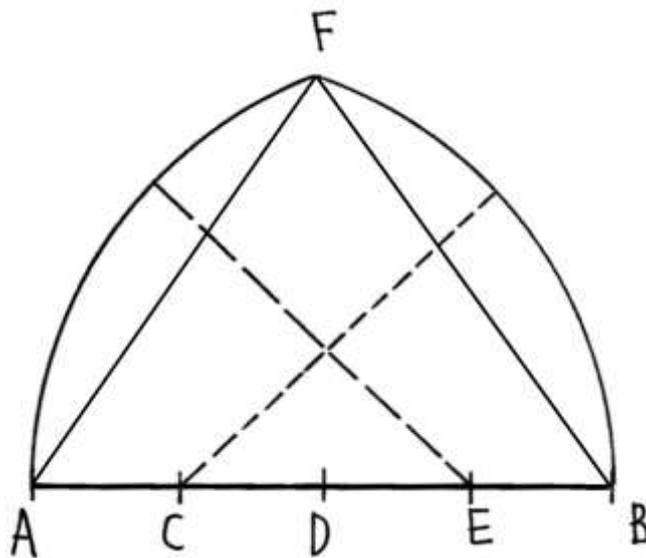
Con raggio uguale a $\frac{4}{5}$ di AB ($AF = CB = \frac{4}{5}$ di AB) fare centro in C e in F e disegnare due archi (da A e da B) che si intersecano in G.

AGB è un *triangolo isoscele*.



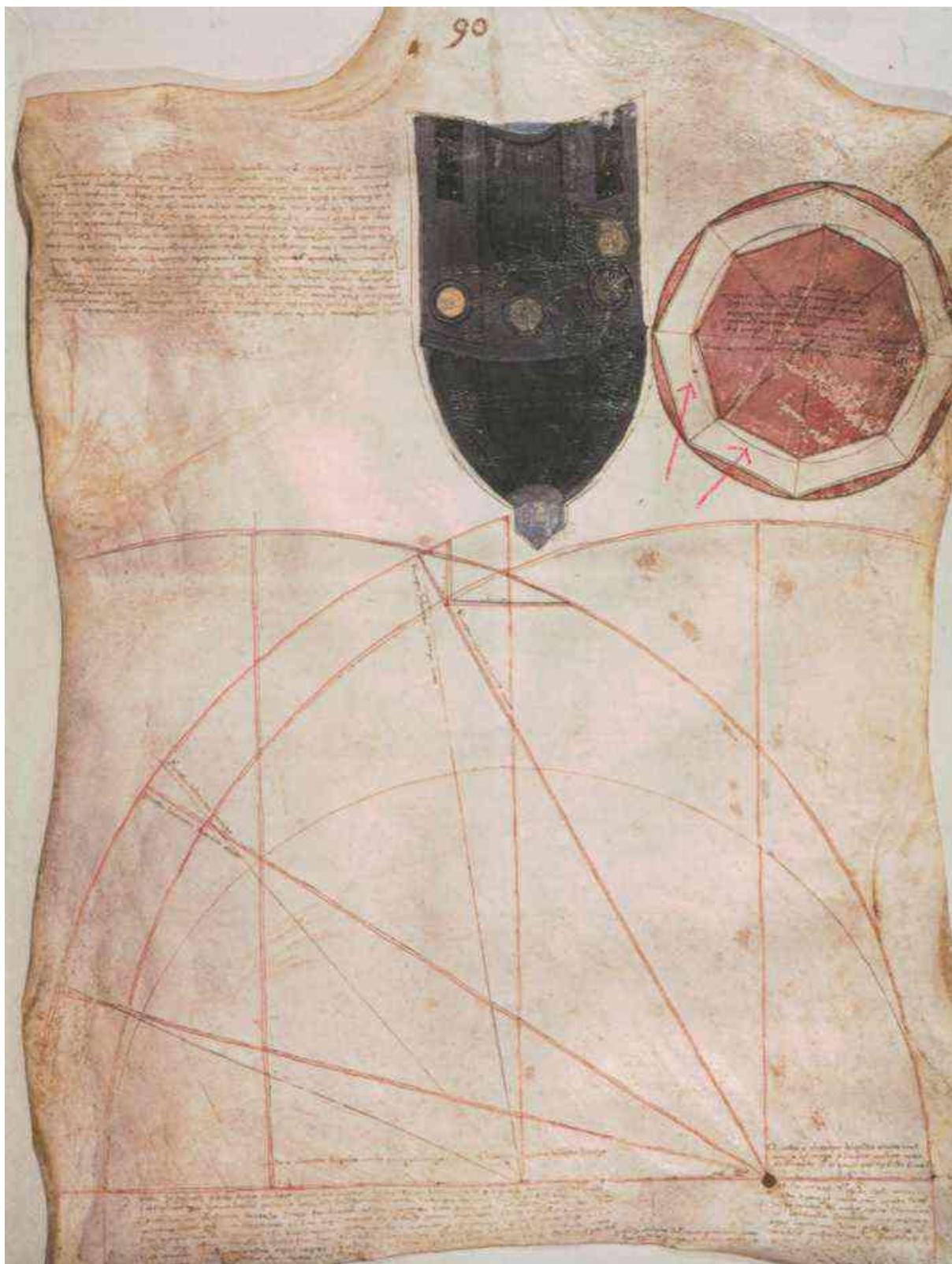
Infine, l'*arco a quarto acuto* è ottenuto dividendo in *quattro* parti uguali la base AB. Con raggio $AE = CB = \frac{3}{4}$ di AB fare centro nei punti C e E e tracciare due archi che si incrociano nel punto F.

Anche AFB è un *triangolo isoscele*.

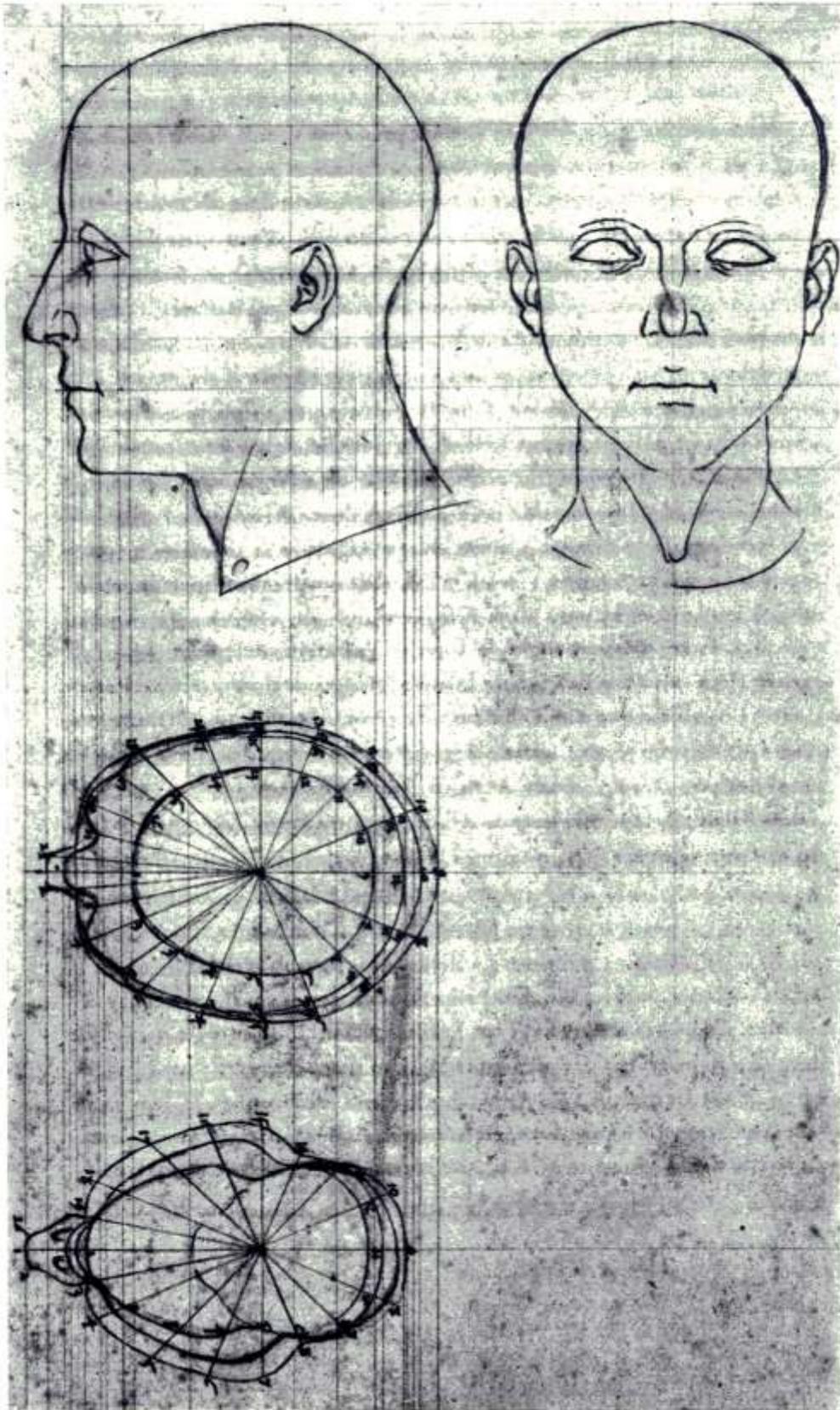


Dobbiamo essere grati a Piero della Francesca per le innovazioni che recò nel disegno tecnico: tracciò le linee di collegamento fra le diverse viste e impiegò in un disegno la stessa scala per tutte le stesse viste.

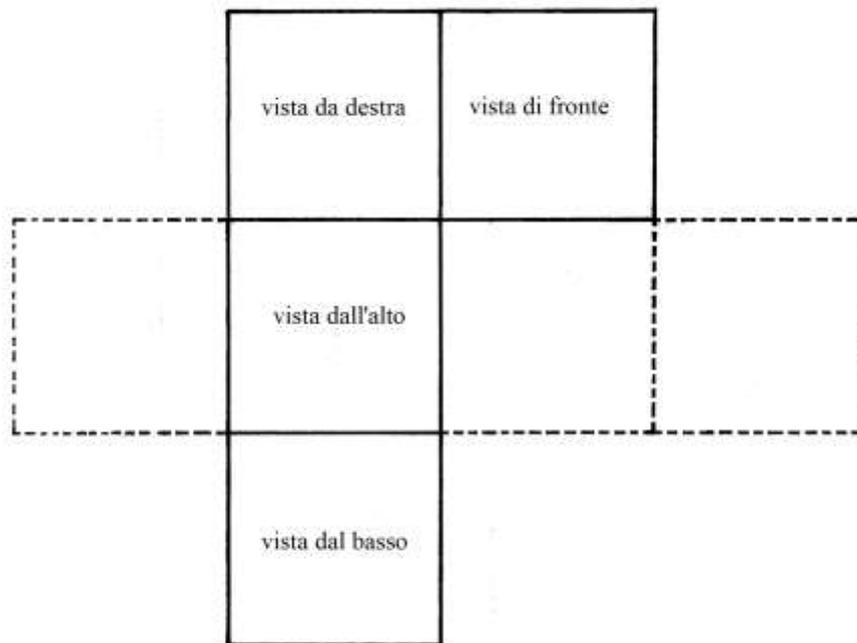
Il documento di Gherardi è interessante perché fornisce informazioni sulle tecniche grafiche usate nel Rinascimento (ed anche nel Medioevo) e dimostra la conoscenza e l'uso del metodo delle proiezioni ortogonali.



La figura che segue è tavola XXXVI del "*De prospectiva pingendi*" di Piero della Francesca (risalente al periodo 1475-1480). Essa mostra le proiezioni ortogonali di una testa umana: di profilo, di fronte, dall'alto e dal basso, con sottili linee di proiezione che collegano le posizioni dei punti. I disegni sono tutti realizzati con la stessa scala di proporzione:

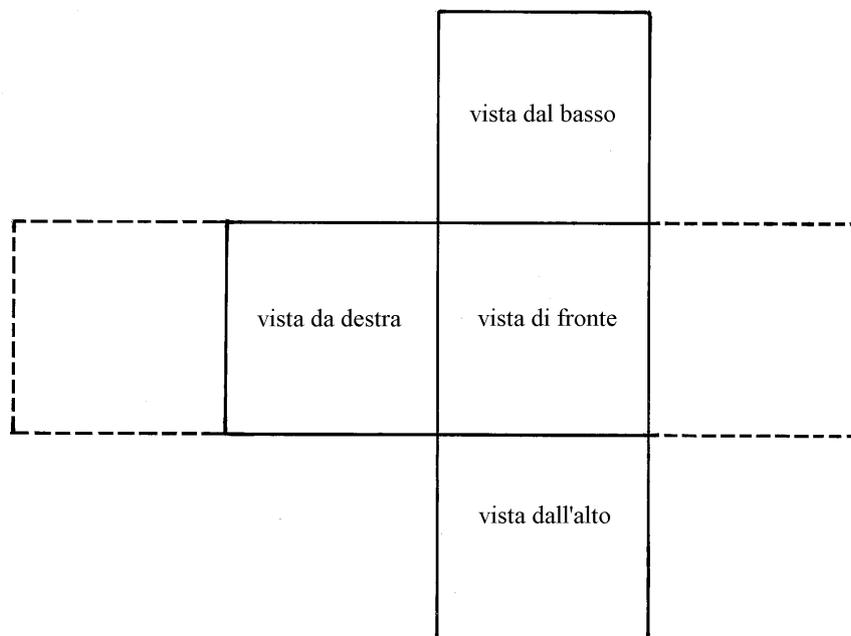


Le quattro viste sono sintetizzate nel grafico che segue:

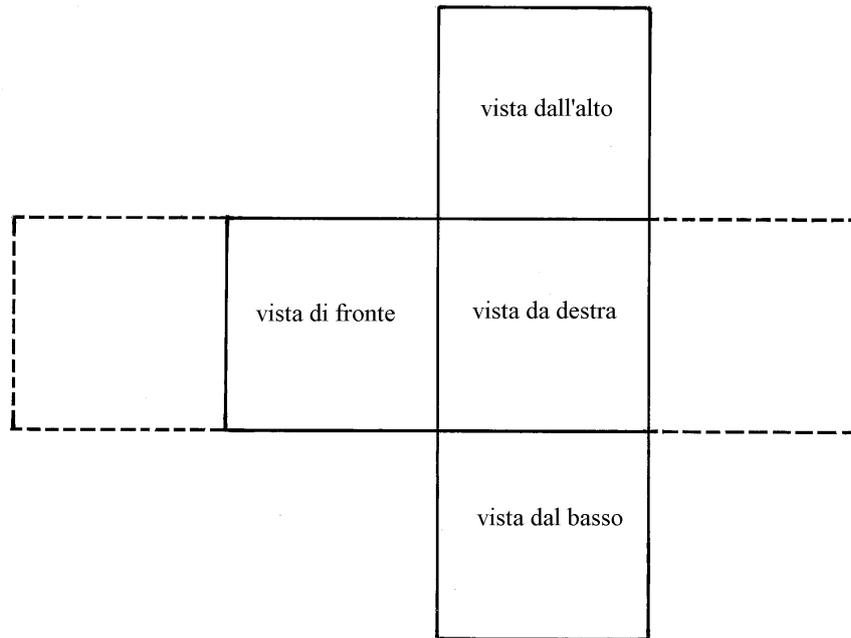


Piero ha tracciato molte *linee di proiezione* con tratti più sottili: esse sono sia orizzontali che verticali. Il loro scopo è quello di ottenere un allineamento delle quattro viste e dei punti caratteristici. Nelle due viste dall'alto e dal basso Piero ha contrassegnato i punti significativi.

Il metodo usato non è né *europeo* né *americano*. Con il *metodo europeo* la disposizione delle quattro viste sarebbe quello mostrato nel grafico che segue:



Infine, con il *metodo americano* le quattro viste avrebbero la disposizione mostrata nella figura che segue:



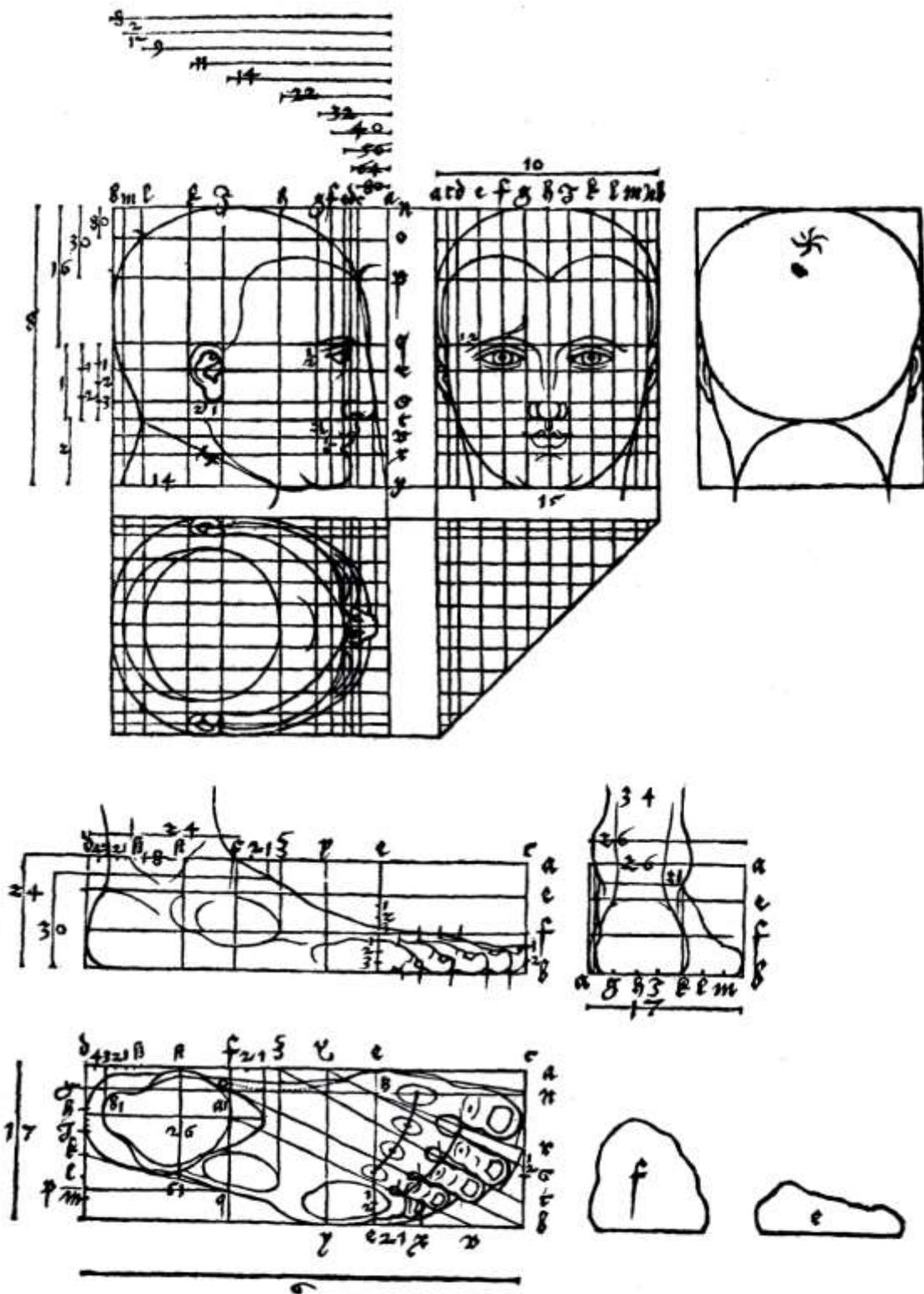
Almeno in parte, il metodo misto di Piero sembra anticipare quello americano. Egli avrà utilizzato degli specchi o delle vere e proprie scatole di proiezione?

La tecnica elaborata da Piero per disegnare la testa umana si ritrova oggi nei metodi usati in medicina dalla *Tomografia assiale computerizzata* (TAC) e dalla *Risonanza magnetica* (RM): essi studiano *a strati* la testa e il cervello umani.

I tre trattati che Piero scrisse circolarono in copie manoscritte (Leonardo da Vinci possedette copia di almeno uno di essi) e il suo conterraneo fra Luca Pacioli (circa 1445-1517) ne pubblicò a stampa ben due in opere che contenevano anche suoi testi, senza indicare espressamente che l'autore non era lui: il grande ingegnere, architetto, pittore e biografo rinascimentale Giorgio Vasari (1511 – 1574) fu il primo ad accusare Pacioli di plagio ai danni di Piero.

Torniamo alle origini delle proiezioni. Lo stesso impiego di tre viste, con o talvolta senza *linee di proiezione* che le collegano, fu usato anche da un altro esponente, artista e geometra, del Rinascimento: il tedesco (ma di padre *ungherese*) Albrecht Dürer (Norimberga 1471 – 1528), contemporaneo dei grandi artisti, ingegneri e matematici italiani, dai quali apprese molte conoscenze nel corso di viaggi effettuati in Italia (in particolare a Venezia e a Bologna). È probabile che egli sia venuto a conoscenza del lavoro di Piero della Francesca da contatti avuti nelle due città italiane con Luca Pacioli.

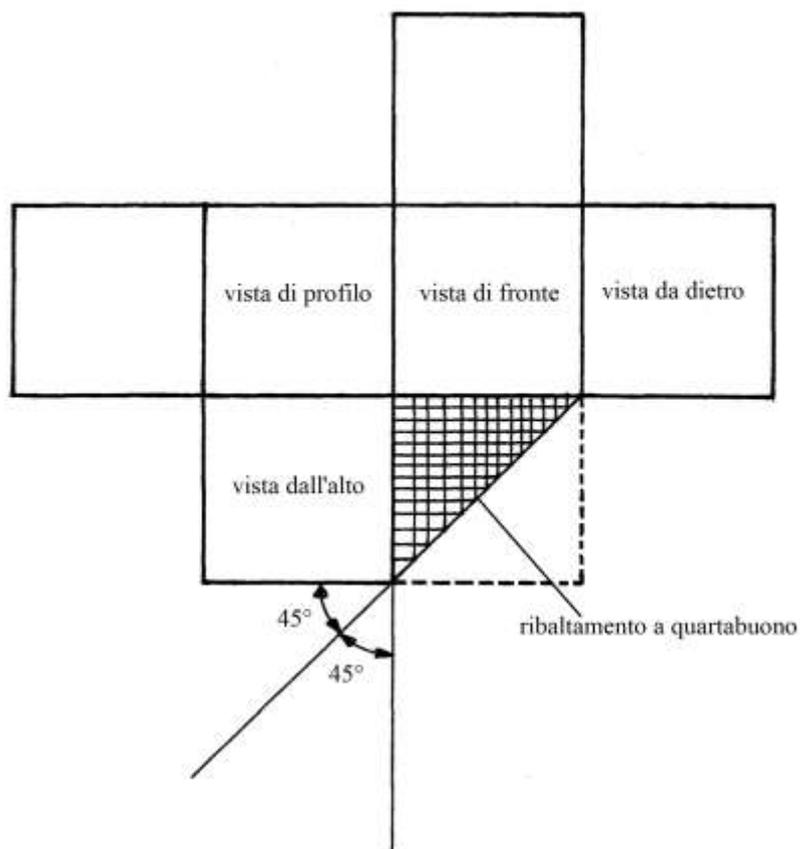
La tavola che segue contiene due esempi di proiezioni ortogonali disegnati da Dürer.



Nella parte superiore è rappresentata una testa umana e nella parte inferiore un piede, sempre umano, disegnato con più viste.

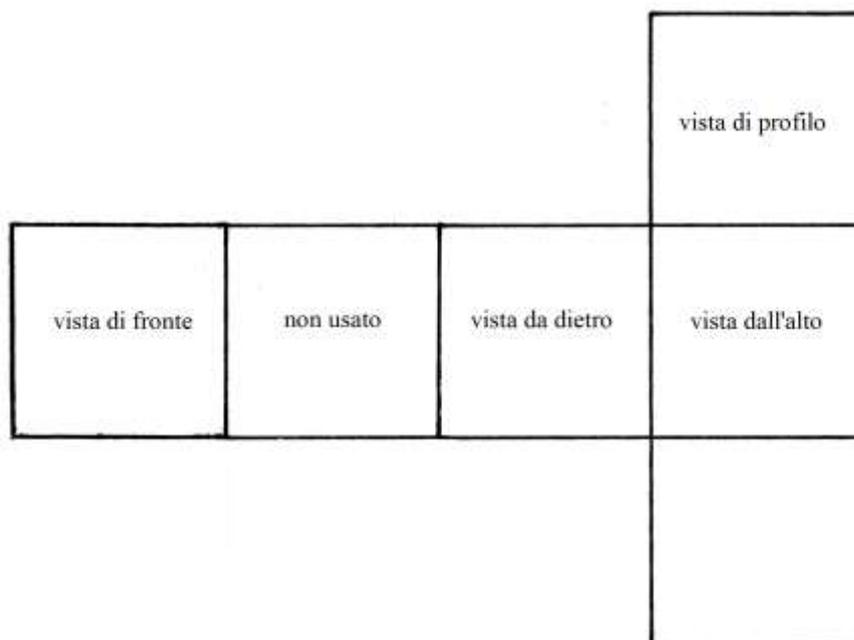
Le proiezioni della testa richiamano l'analogo e cronologicamente precedente disegno di Piero della Francesca, già incontrato nelle precedenti pagine.

Lo schema che segue riassume le reciproche proiezioni delle quattro viste della testa secondo Dürer all'interno dello sviluppo di un cubo di proiezione:

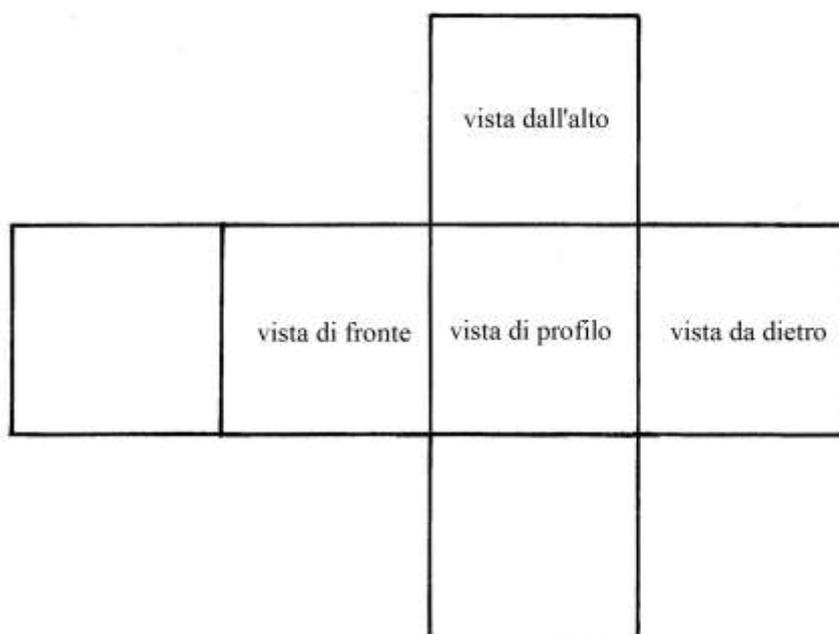


Il ribaltamento dal piano che contiene la *vista dall'alto* a quello con la *vista di fronte* è realizzato con linee inclinate a 45° e cioè a *quartabuono* (*miter* nei testi americani).

Con il *metodo europeo* le proiezioni della testa secondo Dürer avrebbero la disposizione dello schema che segue:

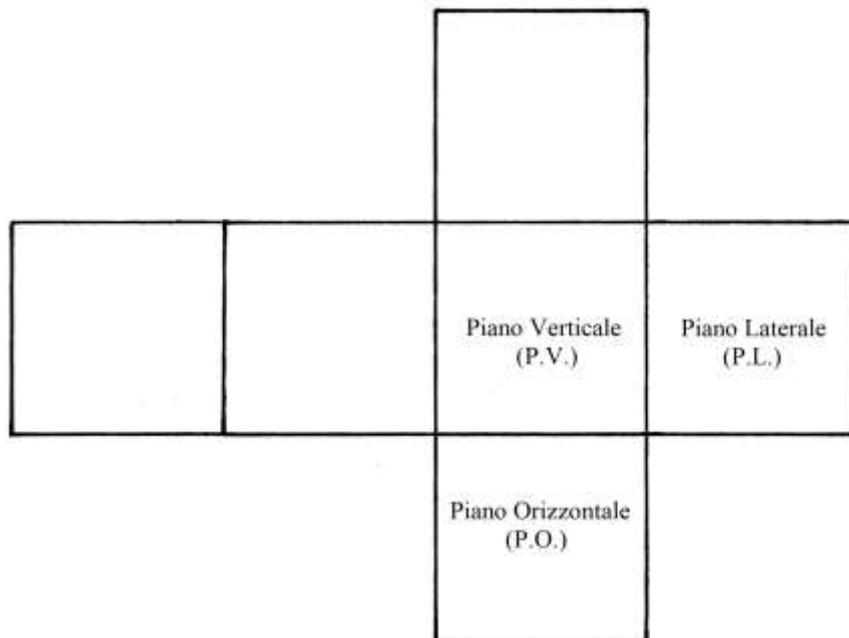
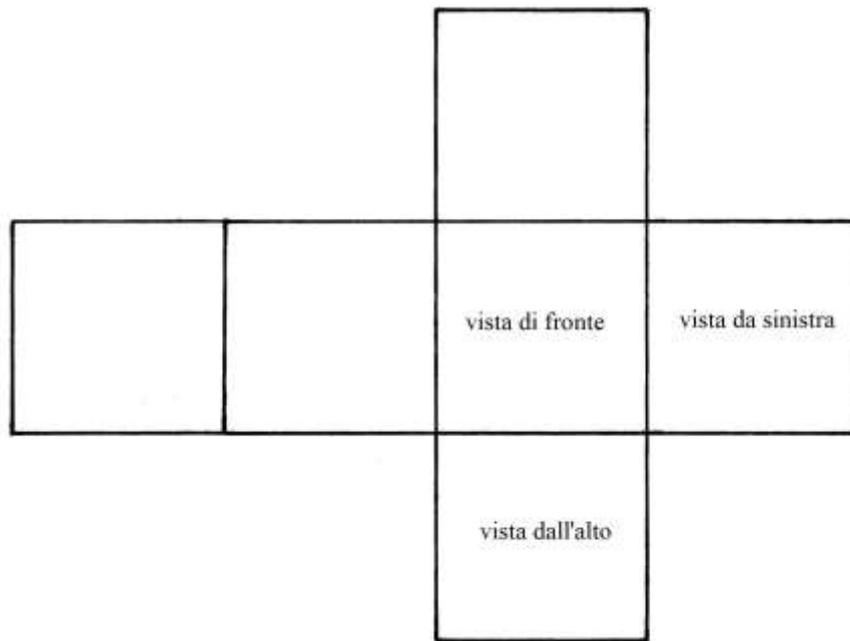


Infine, utilizzando il *metodo americano* la posizione delle proiezioni sarebbe quella mostrata nel seguente grafico:



Almeno in parte, il metodo impiegato da Dürer per il disegno della testa si avvicina a quello americano.

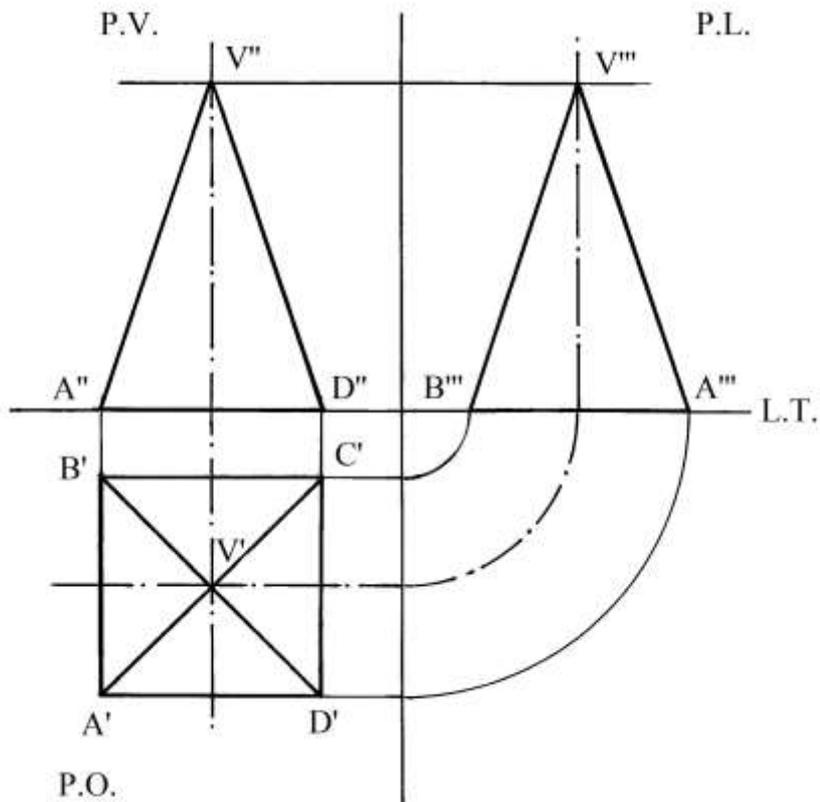
Invece, il *piede umano* è rappresentato con tre proiezioni disegnate secondo il metodo europeo come spiegano i due schemi che seguono:



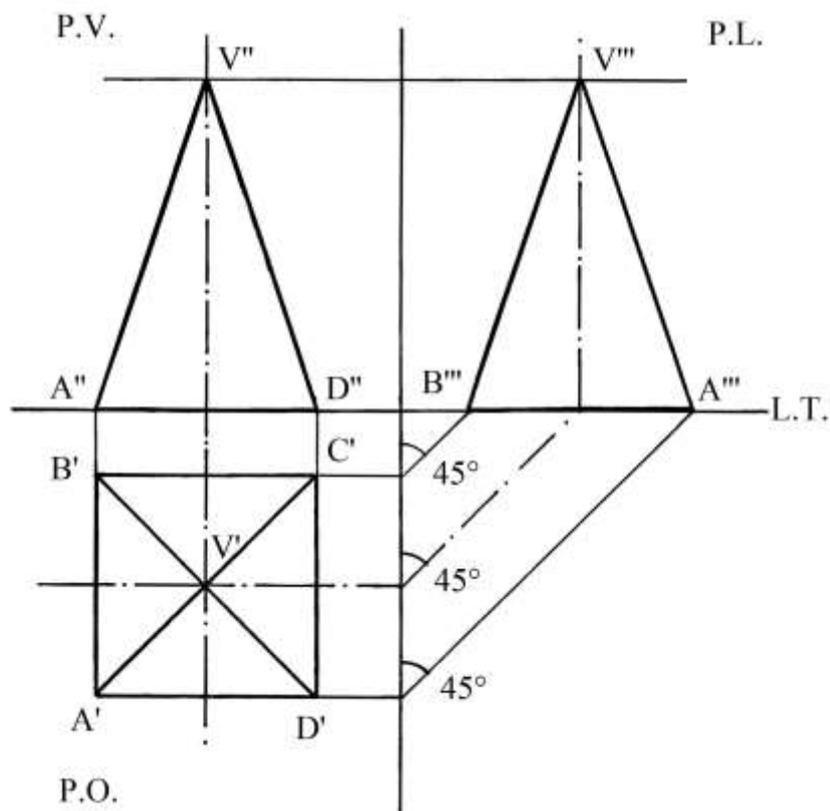
Piero rappresentò la testa umana con una tecnica che anticipa il metodo del primo diedro (o metodo europeo). Dürer rappresentò lo stesso oggetto, ma con una diversa disposizione delle viste.

Dürer tracciò, come Piero, delle sottili linee di proiezione per allineare le viste e i loro punti più significativi.

Oggi, le linee di proiezione si tracciano da un piano all'altro soltanto all'inizio dell'apprendimento delle regole del disegno o quando serve una precisione assoluta nell'allineamento delle diverse viste, come è il caso delle proiezioni di una piramide retta a base quadrata; nell'esempio che segue le linee di proiezione sono riportate dal P.O. al P.L. con una serie di archi di circonferenza di ampiezza uguale a un quarto:

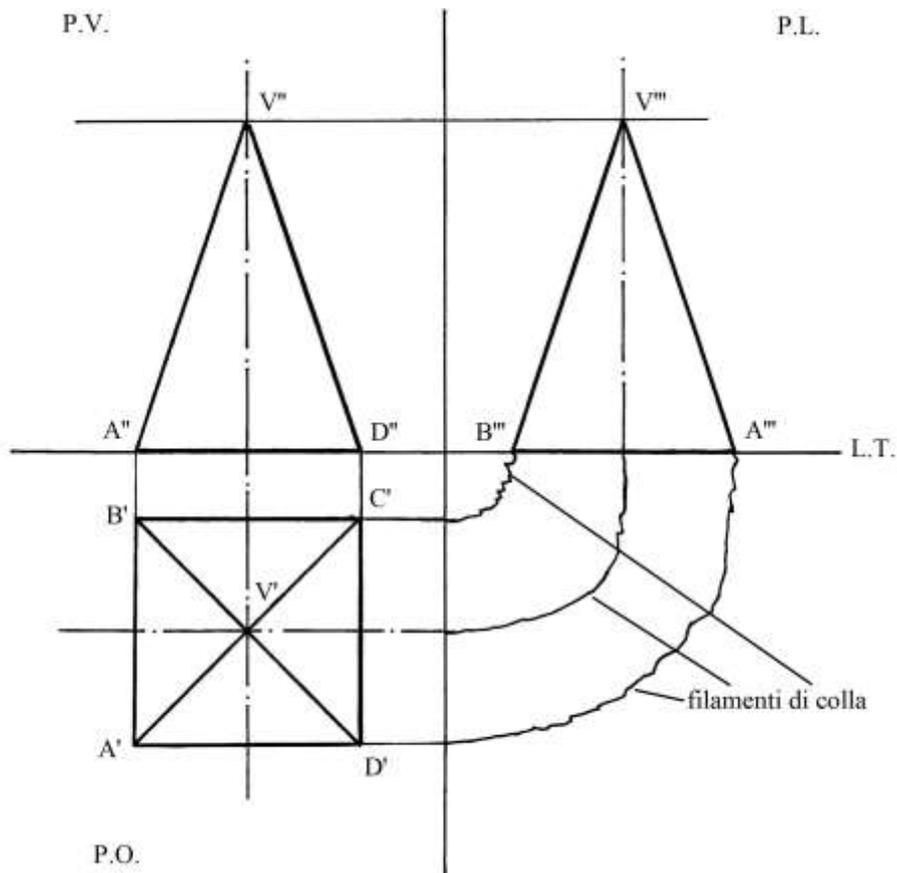


Nell'esempio che segue, le linee di proiezione fra il P.O e il P.L. sono trasferite con segmenti *a quartabuono* e cioè inclinati di 45° :



Se i tre piani di proiezione fra loro perpendicolari che formano un diedro (in questo esempio si tratta del *primo*) fossero uniti solo con della colla, il loro sviluppo sul piano a due dimensioni con

la separazione fra P.O. e P.L. farebbe comparire dei *filamenti di colla*, come spiega la figura:

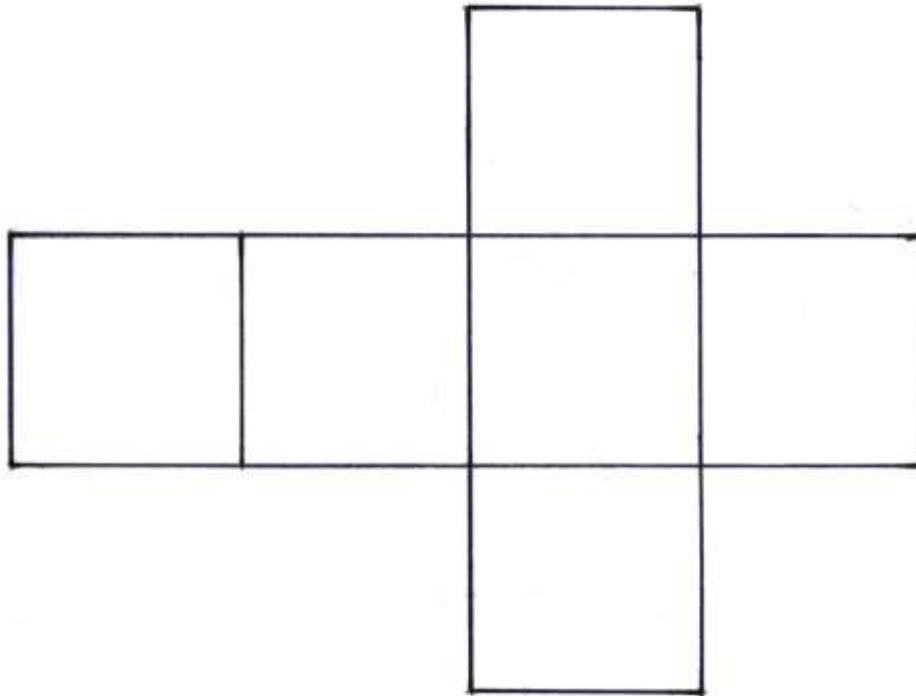


Le proiezioni ortogonali secondo Piero della Francesca e Albrecht Dürer

Piero della Francesca è un precursore del metodo delle proiezioni ortogonali.

Le proiezioni ortogonali usate rappresentano le viste di un oggetto riferendole ai piani di un *parallelepipedo* retto oppure di un *cubo*: entrambi questi solidi possiedono *sei* facce fra loro perpendicolari e due a due parallele.

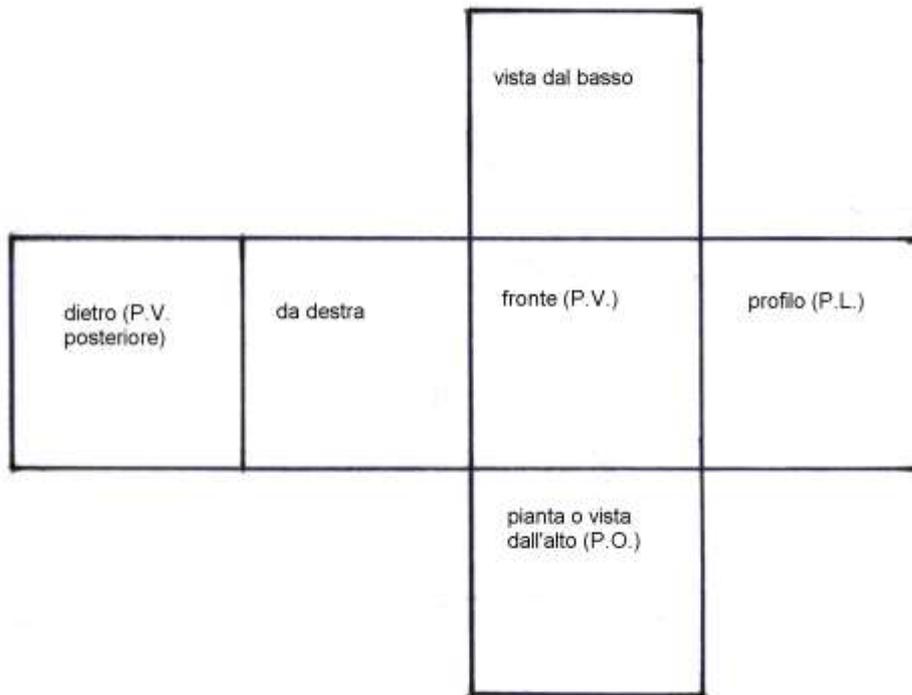
Consideriamo il caso del cubo; uno dei suoi possibili sviluppi su di un piano è mostrato nella figura che segue:



I metodi usati sono quello europeo e quello americano, argomento sul quale torneremo in seguito quando presenteremo le norme UNI ISO.

Il metodo europeo usa le sei facce nel modo presentato nella figura che segue:

metodo "europeo"

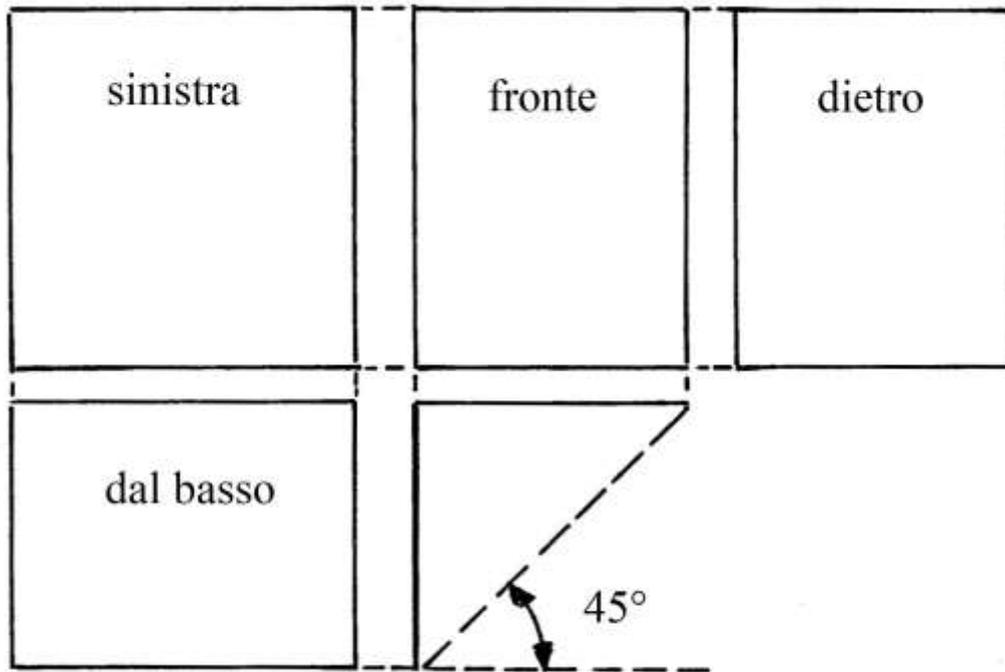


Il metodo americano usa una diversa disposizione delle viste:

metodo "americano"

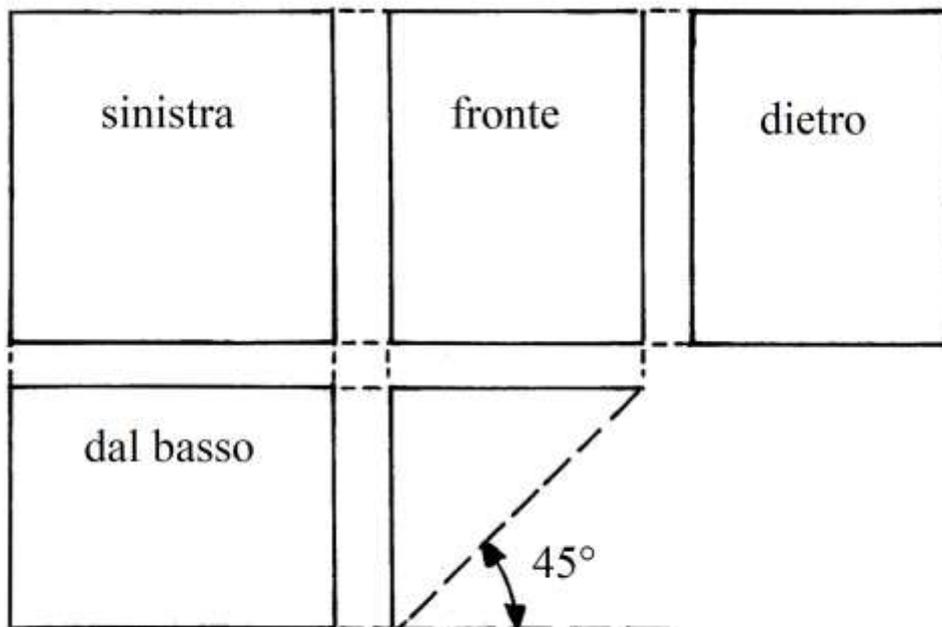


Come visto in precedenza, Piero della Francesca rappresentò una testa umana con la disposizione delle quattro viste nel modo che è descritto nella figura che segue:



Questa disposizione è abbastanza vicina allo schema del metodo *europeo*. La vista della testa dal basso avrebbe dovuto essere collocata al di sopra della *vista da destra*.

Il disegno della testa fatto da Dürer (rivedere la precedente figura a pagina 43) segue lo schema seguente:



Lo schema lo avvicina al *metodo americano*.

Le linee di proiezione sono inclinate di 45° , a *quartabuono* (*miter*, nei testi americani): il termine deriva dal nome di una squadra usata in falegnameria, nell'industria della pietra e del laterizio per praticare tagli inclinati a 45° . Il termine è pure usato nella carpenteria navale.

Stando a Yves Deforge (*“Le graphisme technique”*) ancora nel 1650 era pratica comune disegnare, *indifferente*, la vista di profilo a destra o a sinistra della vista in elevazione.

Il grande pittore Raffaello Sanzio (1483-1520) elaborò verso il 1517 un sistema di disegno architettonico in proiezioni ortogonali (pianta, alzato e sezione), simile a quello usato da Vitruvio. Il progetto si proponeva di effettuare il rilievo degli edifici antichi di Roma, ma non fu realizzato per la prematura morte di Raffaello.

Ludovico Cardi (detto il Cigoli, 1559-1613) scrisse nel 1610 un trattato sulla prospettiva, rimasto inedito fino al 1992, ma utilizzato da Pietro Accolti per la stesura del suo libro *“Lo inganno degl'occhi”* pubblicato a Firenze nel 1675. Nel testo del Cigoli sono contenuti numerosi disegni in proiezioni ortogonali, come nella figura che segue (dal sito dell'Istituto e Museo di Storia della Scienza di Firenze, oggi *Museo Galileo*), che rappresenta le proiezioni orizzontale e verticale di un cubo poggiato sul P.O. e con le facce oblique rispetto al P.V.:

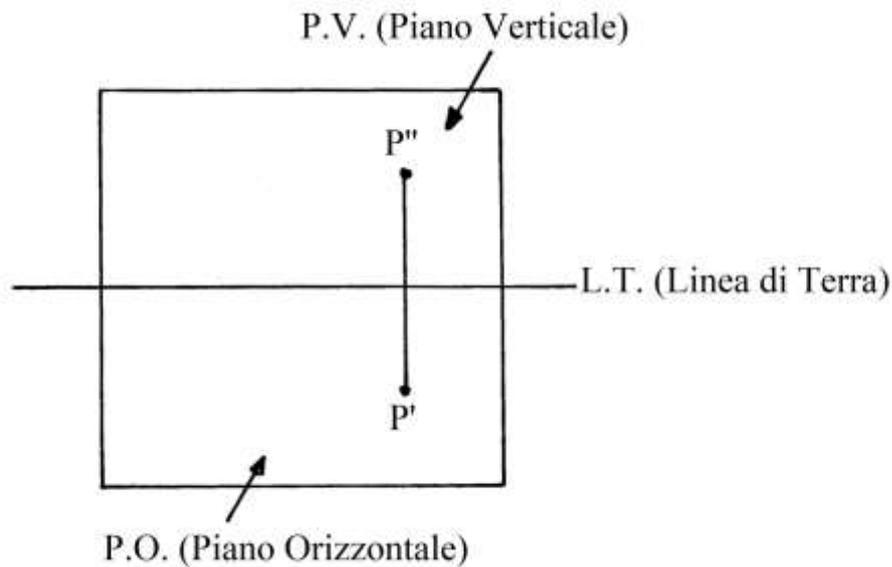


Altri studiosi italiani, francesi, tedeschi, olandesi, svizzeri e inglesi misero a punto nuovi settori della geometria.

In particolare Gaspard Monge (1746-1818) creò l'espressione *geometria descrittiva*, quale ramo della geometria destinato a occuparsi in modo scientifico della rappresentazione di un oggetto su di un piano a due dimensioni (problema, come visto, già risolto empiricamente da Vitruvio e in termini più matematici da Piero della Francesca). Monge risolse due problemi: il problema diretto della rappresentazione di un oggetto esistente e il problema inverso del rendere possibile la costruzione di un oggetto a partire dal disegno. Il lavoro di Monge fu in seguito completato dal suo connazionale Jean Victor Poncelet (1788-1867).

Un oggetto geometrico, ad esempio un *punto P* (figura seguente), viene proiettato perpendicolarmente su *due e soltanto due piani* fra loro ortogonali: il piano orizzontale (il

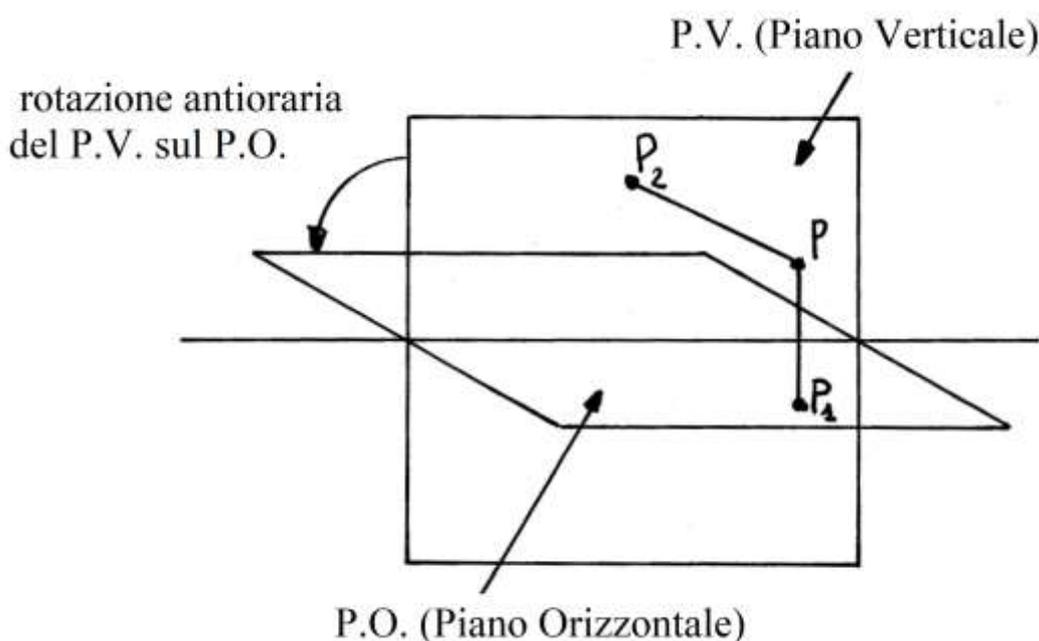
pavimento dell'aula) e un piano verticale (una parete dell'aula).



Seguendo le indicazioni dei testi di *Geometria descrittiva*, le due proiezioni del punto sono P' (che si legge P primo) sul P.O. e P'' (P secondo) sul P.V. L'apice singolo ' si dovrebbe riservare all'indicazione della proiezione sul piano più importante, che è sicuramente quello orizzontale: nell'uso quotidiano consultiamo piante di città o di quartieri o carte stradali e le compravendite immobiliari avvengono sulla base di piantine degli edifici. A questo riguardo, la norma UNI EN ISO 5456-2-2001 al paragrafo 4.2 si discosta dalla precedente affermazione:

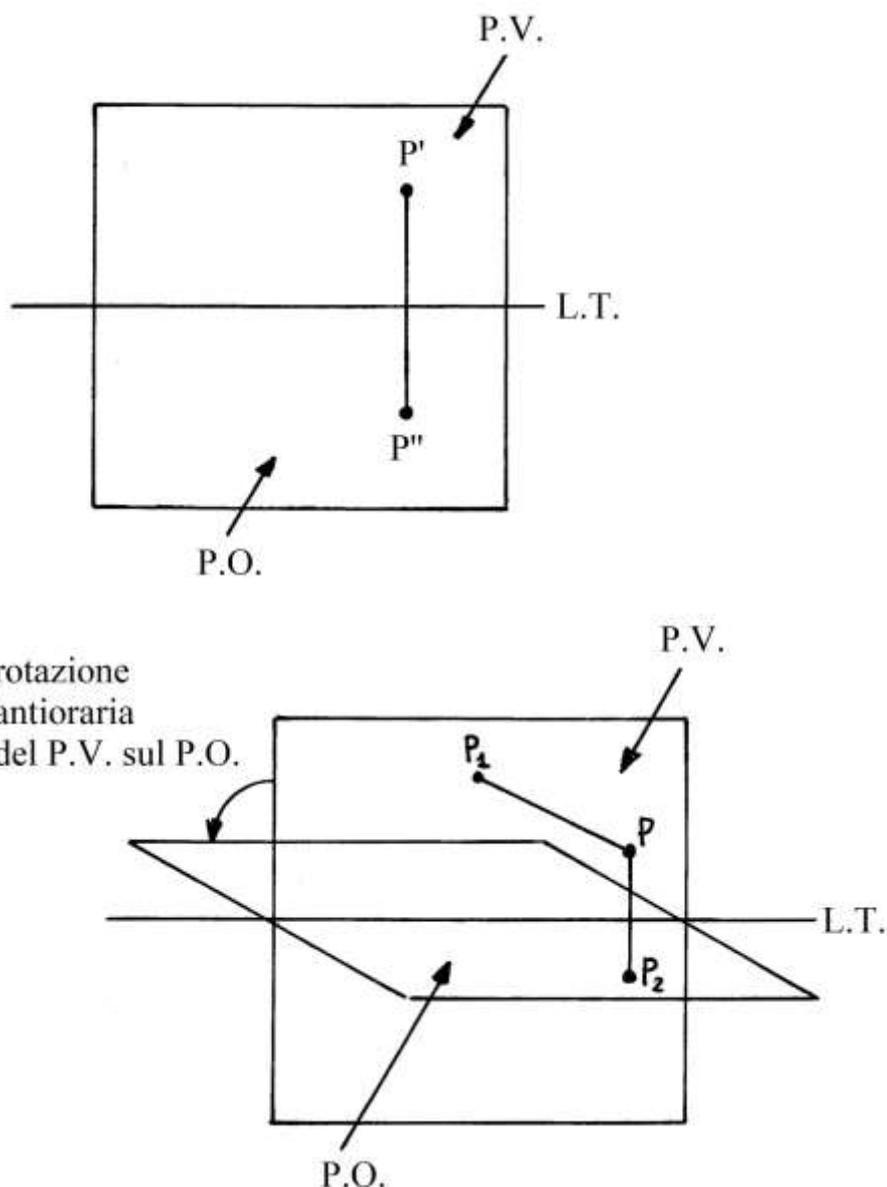
“...La vista maggiormente rappresentativa dell'oggetto [*in proiezioni ortografiche*] è di regola scelta come la vista principale (vista frontale) ...”.

I punti si possono indicare anche con P_1 sul P.O. e con P_2 sul P.V., come descritto nella figura:



Nota: Nei testi di disegno tecnico, l'apice ' (o il corrispondente pedice 1) sono generalmente riservati alle proiezioni sul piano verticale e l'apice " (o il pedice 2) compaiono nelle proiezioni sul piano orizzontale: molti libri di testo seguono questa prassi, anche se essa non è conforme alle regole della Geometria descrittiva. In molti testi di Geometria, il piano principale è quello orizzontale e, in ordine di importanza, il secondo piano è quello verticale.

Rispettando la prassi seguita dagli Autori dei più diffusi testi di disegno tecnico, i punti saranno indicati come nelle due figure:



La prassi può essere in parte giustificata dall'affermazione contenuta nelle norme UNI. La più recente (UNI EN ISO 5456-2 del febbraio 2001) al paragrafo 4.2 indica quanto segue:

“La vista maggiormente rappresentativa dell’oggetto è di regola scelta come la vista principale (vista frontale) ... Questa è la vista [...], secondo la direzione di osservazione ... che in generale mostra l’oggetto nella posizione di funzionamento, di fabbricazione o di montaggio”.

Forse questa norma e la prassi corrente derivano da abitudini consolidate nell'ambito del disegno edile?

Per la precisione, nella tabella che segue sono riportate le regole comunemente seguite in Geometria descrittiva:

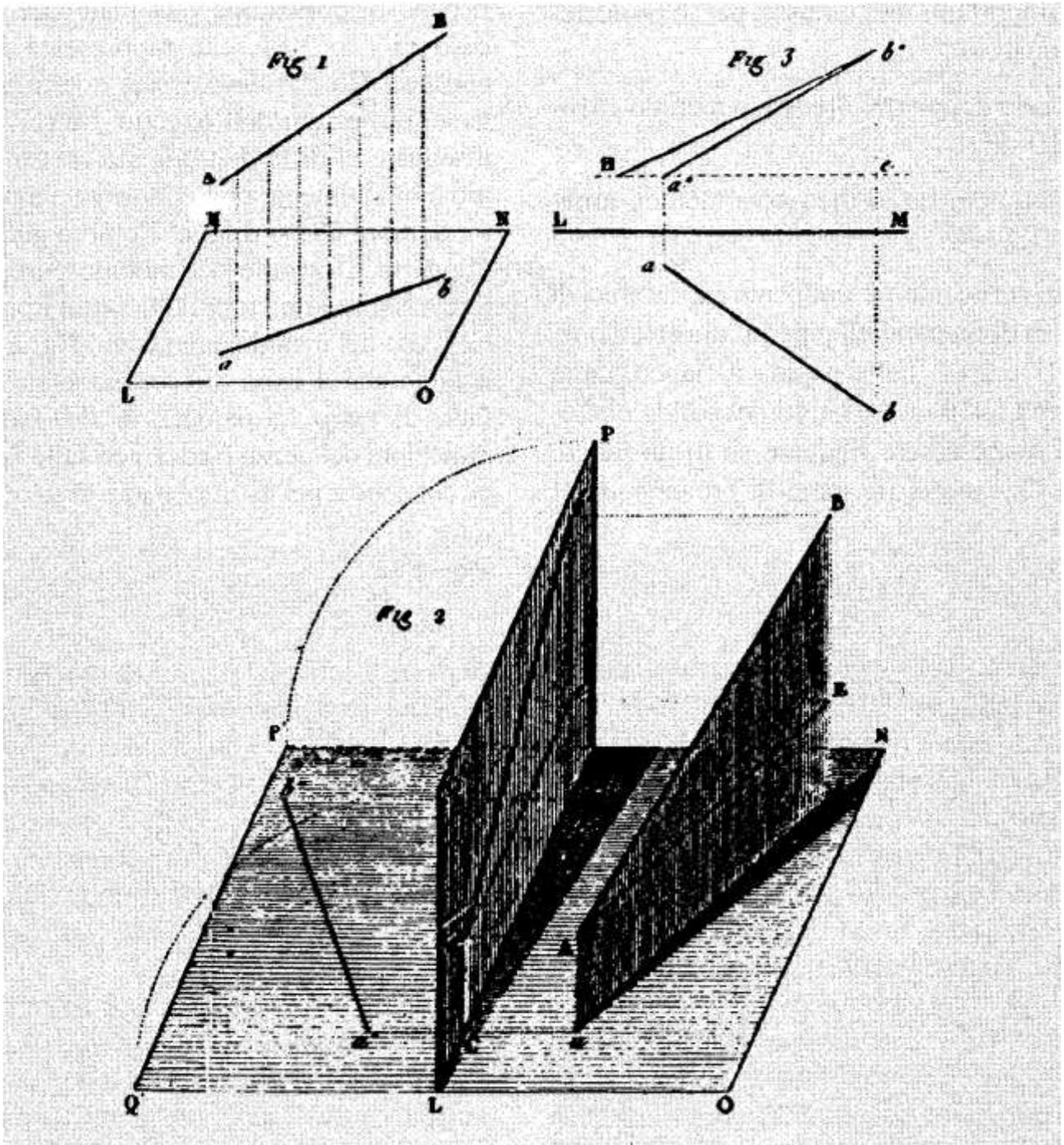
Oggetto geometrico	Notazione	Esempi
Punto	Lettere maiuscole alfabeto latino	A, B, ... P
Direzione	Lettere minuscole alfabeto latino	a, b, ... p
Piano	Lettere maiuscole alfabeto greco	Δ, Λ
Piani di proiezione	Lettere minuscole alfabeto greco, con indici al piede (pedice)	π_1 per il piano orizzontale π_2 per il piano frontale (verticale) π_3 per il piano laterale π_4 per un piano addizionale
Punti di proiezione di un punto generico P	Lettere maiuscole alfabeto latino, con indici all'apice	P' proiezione sul piano orizzontale P'' proiezione sul piano frontale P''' proiezione sul piano laterale P'''' proiezione sul piano π_4

Per poter disegnare comodamente su di un foglio le proiezioni del punto, occorre ruotare il P.V. di 90° in senso antiorario fino a farlo coincidere con il P.O. La linea di separazione fra i due piani si chiama *linea di terra* (L.T.).

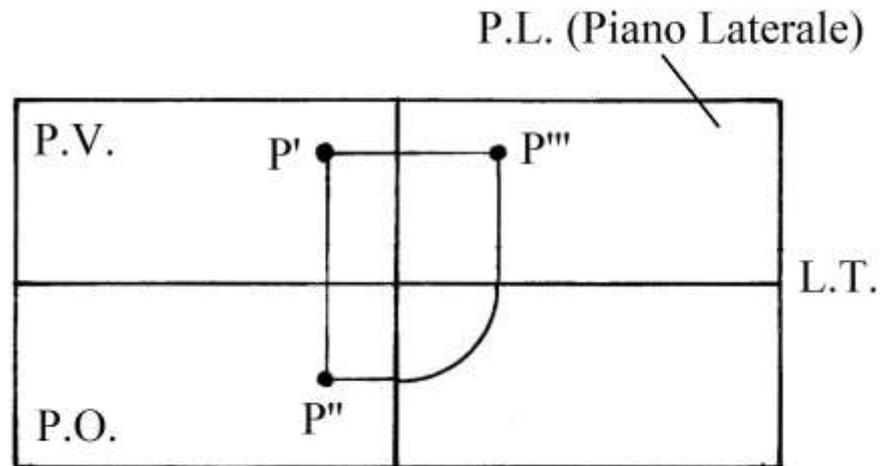
Monge fissò la regola per la quale servivano *due sole viste* (quella rispetto al P.V. o *piano frontale* e quella verso il P.O. o *ribaltamento*) per rappresentare un oggetto esistente o per disegnare un oggetto da costruire: egli ritenne che fosse sufficiente disegnare anche le *ombre* per rendere più comprensibile un disegno.

Queste due sole rappresentazioni piane, realizzate usando la stessa scala di proporzione, mantengono le lunghezze originarie ma *non consentono l'acquisizione dei volumi*.

La crescente complessità degli oggetti tecnici superò la stessa rigorosa applicazione del metodo originario: due sole viste non erano più sufficienti a descrivere gli oggetti e la tracciatura delle ombreggiature, più adatta a disegni di natura prevalentemente artistica, costituiva un compito noioso e richiedeva troppo tempo (figura tratta dalla tavola 13, a pagina 32 del I volume della "*Géométrie descriptive*" di Monge).



Nel corso del XIX secolo venne introdotta in forma esplicita – almeno sul piano teorico - la terza vista, quella sul piano laterale, P.L. (figura che segue), vista già presente prima nell'opera di Piero della Francesca e poi in quella di Albrecht Dürer, introduzione che evitò la noia di disegnare le ombre.



Fu il tedesco Stiller a proporre nel 1889 questa innovazione rispetto alla doppia proiezione (con ombre) di Monge. Il matematico italiano Giuseppe Tramontini (1768-1852) aveva peraltro pubblicato nel 1811 uno studio contenente la prima trattazione sistematica del cambiamento dei piani di proiezione, impiegando un terzo piano di profilo, senza esigere che esso fosse ortogonale rispetto agli altri due.

Una severa critica all'opera di Monge

In un intervento del 23 maggio 2000 all'Istituto Universitario di Architettura di Venezia, Riccardo Migliari si è espresso in termini abbastanza critici sul lavoro di Monge. Eccone alcuni passi significativi (da "La rappresentazione e il controllo dello spazio: dalla rivoluzione francese alla rivoluzione informatica. Morte e trasfigurazione della Geometria Descrittiva"):

"... L'evento al quale alludo è la nascita della Geometria Descrittiva. Mi si consenta qui una pausa di riflessione. Non voglio tediare nessuno con una questione che è stata già troppo dibattuta in pubblico e sulle pagine delle riviste specializzate. Ma è necessario un cenno, almeno.

Nel 1795, dunque, un matematico francese che risponde al nome di Gaspard Monge tiene, alla scuola politecnica, alcune lezioni di una disciplina che egli definisce *géométrie descriptive*. Questa disciplina è una teoria che giustifica le note costruzioni del disegno d'architettura, applicando ad esse metodi e ragionamenti di carattere geometrico. Monge è, in vero, un patito dei neologismi (ci proverà anche con *l'analyse géométrique*, ma con meno successo), tuttavia non ha mai detto di aver inventato la geometria descrittiva. A ben vedere una cosa è inventare un nome di fantasia per una scienza in una fase del suo sviluppo e ben altra cosa è inventare una nuova scienza (evento, questo, che non si è mai verificato nella storia del pensiero). Tuttavia, per ragioni che non è qui il caso di indagare, a qualcuno piacque riconoscere nella geometria descrittiva di Monge, una disciplina totalmente nuova e perfettamente compiuta, gridando al miracolo del genio creatore!

Qual è dunque il problema? Forse quello di un giudizio apologetico della Storia nei confronti dello scienziato francese? Poco male e buon per lui, ammesso che possa goderne. Il problema è un altro e ben più grave: il problema è che, per sostenere il ruolo creatore di Monge, si sono buttati alle ortiche secoli di un

pensiero scientifico nobilissimo. Basta fare un esempio, quello della prospettiva. Nella geometria descrittiva la prospettiva viene relegata in un ruolo gregario, semplice applicazione del metodo mongiano. In altre parole, basta avere una ‘prima’ e una ‘seconda’ proiezione per ricavarne una prospettiva. Ma questo, lo sapeva già fare Piero della Francesca. E gli studi di Desargues e quelli di Taylor, e quelli di tanti altri matematici e artisti che avevano reso la prospettiva un vero metodo di rappresentazione? Semplicemente dimenticati. Insomma, le duecento pagine del trattato di Monge sono state sostituite a una intera biblioteca e la *Géométrie Descriptive* ha preso, nell’insegnamento, il posto dell’antica e nobile scienza della rappresentazione.

Gli effetti di questo spaventoso equivoco si sono ripercossi soprattutto nelle scuole di architettura e di ingegneria. L’insegnamento della scienza della rappresentazione è stato, per lo più, limitato alla geometria descrittiva mongiana e affidato a matematici. Questi ultimi hanno ben presto dichiarato l’esaurimento del potenziale euristico della geometria descrittiva e hanno del tutto abbandonato la ricerca. Venuta a mancare la linfa degli studi la nostra scienza si è inaridita, trasformandosi nella mummia di una disciplina morta. Per rendersene conto basta confrontare due disegni, il primo tratto da una delle numerose edizioni di Monge e l’ultimo da un qualsiasi libro di testo recente e ancora in uso. Tra i due disegni corrono duecento anni, ma nulla è cambiato. Non solo, entrambi rappresentano una pianta e un prospetto, per dirla con il linguaggio nostro, di architetti. Ma in entrambi, questi disegni, così familiari, non sono riconoscibili. Il cosiddetto metodo di Monge, infatti, è tanto lontano dalle esigenze del progetto da non aver mai trovato alcuna pratica applicazione.

La scienza della rappresentazione, per alludere a quella storica, cui ho fatto cenno, aveva sempre avuto un contatto diretto e fecondo con la materia e con l’arte. Era la scienza che permetteva di trasformare le idee nelle cose e di simulare lo spazio e le figure umane. Con la riduzione al metodo del Monge e alle sue applicazioni, si è perduto completamente l’aspetto artistico della disciplina, sia nel senso illuminista che in quello romantico.

Si è dunque insegnata per due secoli una disciplina inutile? Inutile no, perché anche la Geometria Descrittiva di Monge ha un valore formativo (anche il gioco degli scacchi lo ha) e costringe a uno sforzo di immaginazione molto intenso (una buona palestra per la testa di un architetto). Ma certo è che molto, moltissimo, si è perso del potenziale formativo della scienza della rappresentazione e che, comunque sia, è tempo di cambiare... “

È spesso accaduto nella Storia che il merito di un’innovazione sia stato attribuito a una sola persona, che si è limitata a rielaborare e a riunire in un’unica opera sistematica i risultati di secoli di esperienze empiriche realizzate nel corso di secoli da artigiani, progettisti, matematici, scienziati. È l’ossessione di chi ha bisogno di creare personaggi mitici, quasi degli eroi, come Monge per la geometria descrittiva e l’inglese Farish per l’assonometria isometrica, quando in realtà in campo tecnico si ha sempre una graduale evoluzione spinta dalla soluzione dei problemi che si pongono giorno dopo giorno e caratterizzata dall’apporto secolare di tanti ingegnosi e umili artigiani.

----- S C H E D A S T O R I C A -----

Il personaggio Monge

Forse, noi Italiani faremmo bene a non idolatrare il Monge. Leggiamo il seguente passo, tratto da pagina 250 del classico testo di Martin Kemp, “La scienza dell’arte”, traduzione italiana, Firenze, Giunti Editore, 1994 e 2005:

“...Lo zelo riformista con il quale Monge affrontava l'applicazione della matematica ai problemi pratici, ebbe l'opportunità di fiorire grazie alla rivoluzione francese. Egli divenne ministro della Marina, fece parte del Comitato per le Arti, *fu responsabile dei suggerimenti per il saccheggio napoleonico dei tesori storici dall'Italia e dall'Egitto*, e si impegnò con durevoli effetti nella riforma dell'insegnamento della matematica in Francia, particolarmente come scienza applicata a settori tecnici come l'ingegneria e il disegno meccanico. Nell'ultima decade del Settecento fu attivo come professore e amministratore presso l'École Normale e l'appena fondata École Polytechnique.

La più influente pubblicazione delle sue idee non fu curata direttamente da lui. La *Géométrie descriptive...* del 1799, raccoglie i testi delle sue lezioni del 1795 all'École Normale, e fu redatta per la pubblicazione dal suo collega Jean Hachette mentre egli era assente per i suoi viaggi ufficiali. Le sue tecniche proiettive mostravano un interesse per alcuni problemi tradizionali, come il disegno prospettico di una forma dalla pianta e dal prospetto [...] e le ombre proiettate dai corpi in presenza di sorgenti luminose vicine o infinitamente lontane ... “.

Fra i suoi furti sono compresi i manoscritti di Leonardo da Vinci tuttora indebitamente trattenuti a Parigi.

Ecco un estratto dalla voce Wikipedia su Leonardo da Vinci:
(http://it.wikipedia.org/wiki/Leonardo_da_Vinci#I_manoscritti):

I manoscritti

“...Nella caratteristica **scrittura speculare**, svolta da destra a sinistra, tale da poter esser letta facilmente solo ponendo i fogli davanti a uno specchio, i manoscritti di Leonardo, dati in eredità a Francesco Melzi, pervennero dopo la morte di questi allo scultore **Pompeo Leoni** che, per commerciarli più facilmente, li suddivise in diversi gruppi, mutandone l'aspetto originario. Raccolti in gran parte nel XVII secolo dal conte milanese Galeazzo Arconati, furono donati alla **Biblioteca Ambrosiana** di **Milano** dalla quale furono trasferiti nel **1796** a **Parigi** da dove a Milano tornò, dopo la caduta di **Napoleone**, il solo **Codice Atlantico**, mentre gli altri, per un errore dell'incaricato austriaco, rimasero all'**Institut de France**. Altri codici erano già da tempo finiti in **Inghilterra**...”.

Per la loro rilevanza scientifica e storica, alcuni manoscritti di Leonardo sono chiamati “*codici*”. Il più importante, il “Codice Atlantico”, custodito nella Biblioteca Ambrosiana di Milano, deve il suo nome al formato di 65*44 cm, conosciuto come “atlantico”, perché all'epoca usato per la stampa di carte geografiche.

A Parigi sono tuttora detenuti 12 codici di Leonardo da Vinci (risalenti al periodo 1492-1516), comunemente indicati con le lettere dalla A alla M, asportati dai francesi da Milano e mai restituiti all'Italia.

I codici in oggetto contengono studi sulle seguenti materie:

- * geometria,
- * ottica,
- * meccanica,
- * idraulica,
- * arte militare,
- * volo degli uccelli,
- * varie (tra le quali alcuni studi sul Cenacolo).

Ne “Il Sole – 24 Ore” del 1° aprile 2006, Stefano Salis così racconta l'acquisto di un piccolo codice di Leonardo da Vinci da parte del cofondatore della Microsoft, Bill Gates:

“...Quando l'uomo più ricco del mondo, il creatore di Microsoft Bill Gates, decise di comprare uno dei pochi codici leonardeschi reperibili sul mercato non badò a spese. Il codice Hammer (36 fogli di 29x22 centimetri, databili 105-1510), trattato da Christie's, passò nelle sue

mani per oltre 30 [per la precisione 30,802] milioni di dollari: la più alta somma mai pagata per un manoscritto. Era il 1994...”.

Il manoscritto fu pagato da Bill Gates 855 611 dollari dell’epoca, a foglio.

Quanto valgono sul mercato i codici detenuti presso l’Institut de France a Parigi?

Un altro indizio può essere fornito da una notizia più recente. L’11 luglio 2001, a un’asta tenuta presso la casa d’aste Christie’s, un piccolo disegno di Leonardo da Vinci è stato venduto per 5 milioni di \$. Il disegno ha dimensioni circa 22,9 x 25,4 cm (fonte: “*Bottega*”, *Official Journal of the Drawing Society of Canada*”, n. 009, pag. 1, documento reperibile in Internet come *Bottega009.pdf*).

La seguente tabella riassume le caratteristiche dei diversi manoscritti (fonte: Enrica Crispino, “Leonardo”. La Biblioteca dell’Arte, Firenze, Giunti Editore, 2005):

Denominazione manoscritti	Dimensioni in cm	Numero fogli
A	22x15	63 (in origine 114)
B	23x16 circa	84 (in origine 100)
C	31,5x22	32
D	22,5x16	10
E	14,5x10	80 (in origine 96)
F	14,5x10	96
G	14,5x10	93
H	10,5x8	142
I ¹	10x7,5	48
I ²	10x7,5	91
K ¹	9,6x6,5	48
K ²	9,6x6,5	32
K ³	9,6x6,5	48
L	10x7	94 (in origine 96)
M	10x7 circa	96

Può essere un bel gioco calcolarne il valore sulla base del prezzo pagato da Bill Gates.

Leonardo da Vinci e la sua opera fanno parte dell’identità nazionale italiana e non di una presunta identità francese o europea (che non esiste): sono un nostro patrimonio.

I metodi del primo e del terzo diedro

Nei libri di disegno tecnico sono descritti i due più importanti metodi usati per le proiezioni ortogonali.

- Il metodo del primo diedro, o metodo europeo o ISO-E.
- Il metodo del terzo diedro, o metodo americano o ISO-A.

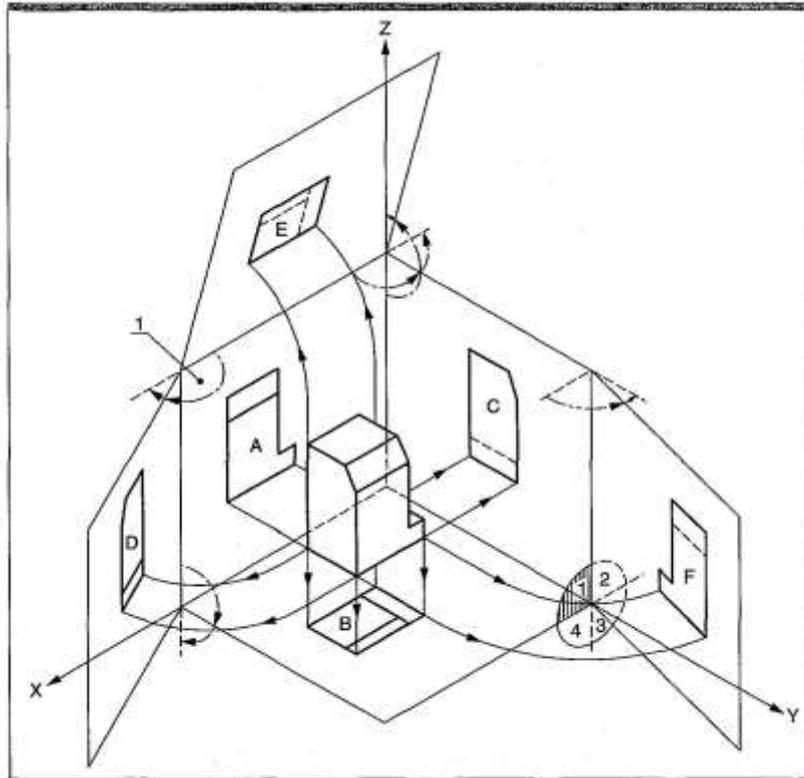
Un pezzo meccanico è collocato all’interno di un cubo (o di un parallelepipedo) di proiezione,

come spiegano le due figure che seguono, riprodotte dalla citata norma UNI EN ISO 5456-2:2001. È utile riportare i termini usati dalla norma al riguardo:

“Il metodo di proiezione del primo diedro è una rappresentazione ortografica in cui l’oggetto da rappresentare [...] è situato tra l’osservatore ed i piani coordinati sui quali l’oggetto è proiettato perpendicolarmente ... “

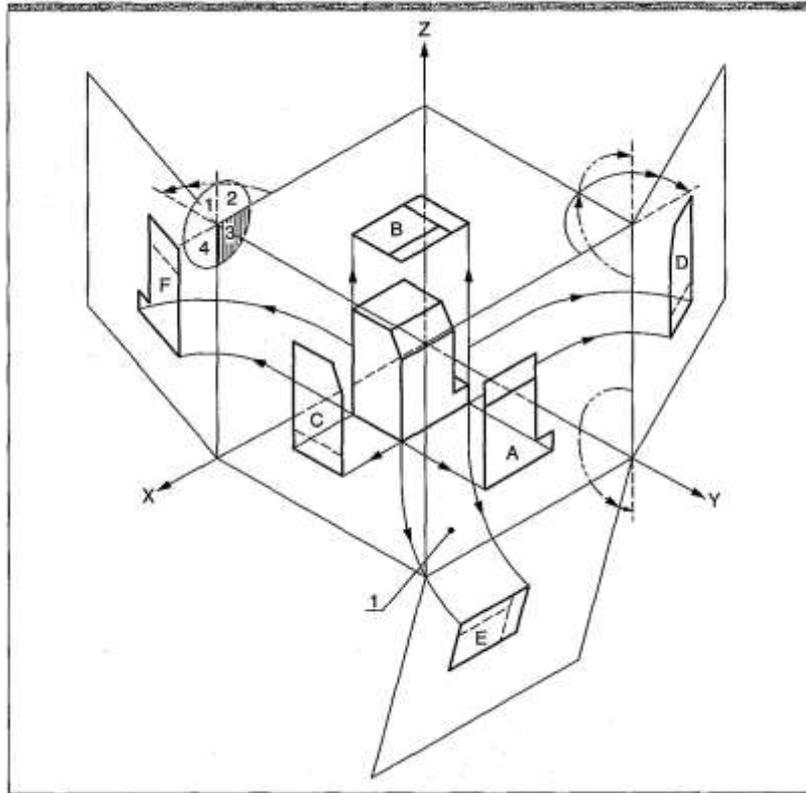
Le pareti del solido contenitore possono essere ribaltate su di un piano. La disposizione dei tre piani di proiezione nel lavoro di Piero della Francesca è un’anticipazione del metodo europeo.

Il cubo di proiezione è di materiale *opaco* nel caso della figura che segue (dalla norma UNI EN ISO 5456-2:2001) che rappresenta il metodo europeo:



Il cubo deve essere aperto per vedere le sei proiezioni dell’oggetto. Le sei viste sono disegnate al di là dell’oggetto stesso: il principio è inizialmente poco intuitivo e molto astratto. Sembra che si disegni l’ombra generata dall’oggetto. L’origine del metodo europeo viene fatta risalire ai metodi della pittura piana.

Nel caso del metodo americano (sempre dalla norma UNI EN ISO 5456-2:2001)



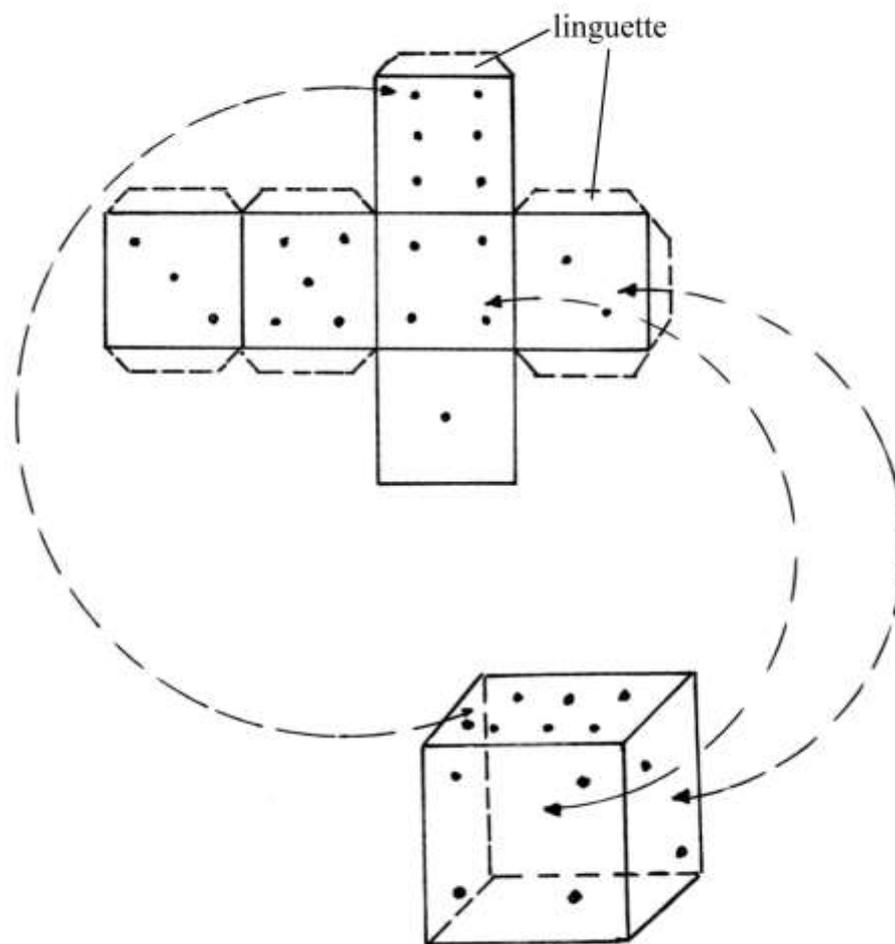
si immagina che il cubo di proiezione sia un solido fatto di materiale *trasparente*: si disegnano le sei proiezioni del pezzo meccanico sulle facce esterne del cubo e poi esse sono aperte su di un piano.

La tesi è, implicitamente, sostenuta dai termini usati dalla stessa norma riguardo al metodo:

“Il metodo di proiezione del terzo diedro è una rappresentazione ortografica in cui l’oggetto da rappresentare [...], come visto dall’osservatore, appare dietro i piani coordinati sui quali è proiettato perpendicolarmente [...]. Su ciascun piano di proiezione, l’oggetto è rappresentato come se fosse visto perpendicolarmente da distanza infinita con piani di proiezione trasparenti_...”

Queste particolari proprietà rendono il metodo americano di più facile comprensione, perché è molto più intuitivo di quello europeo.

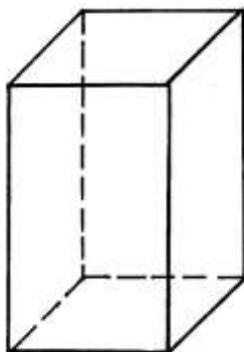
Il metodo americano è implicitamente usato anche nello sviluppo dei solidi su di un piano: la figura che segue contiene lo sviluppo di un cubo (un dado da gioco) e una sua assonometria cavaliera. Fra i due disegni si instaura una corrispondenza fra le facce: il cubo è disegnato sviluppato sulle pareti *esterne* di un contenitore di materiale non trasparente. È evidente l’applicazione del metodo americano:



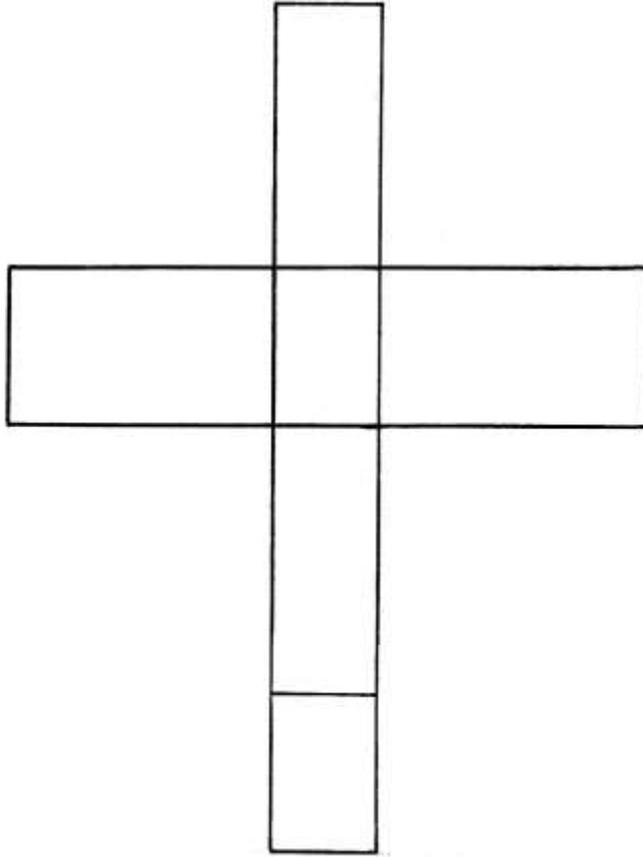
Lo sviluppo di un solido (ad esempio, il parallelepipedo della figura che segue) può essere ottenuto con due differenti tecniche che vedete esemplificate nella stessa figura e cioè:

- • lo *sviluppo a fiore*, ottenuto nello stesso modo in cui in natura si apre la corolla di un fiore;
- • lo *sviluppo per rotolamento*, prodotto dal ribaltamento e dalla traslazione del solido che si apre.

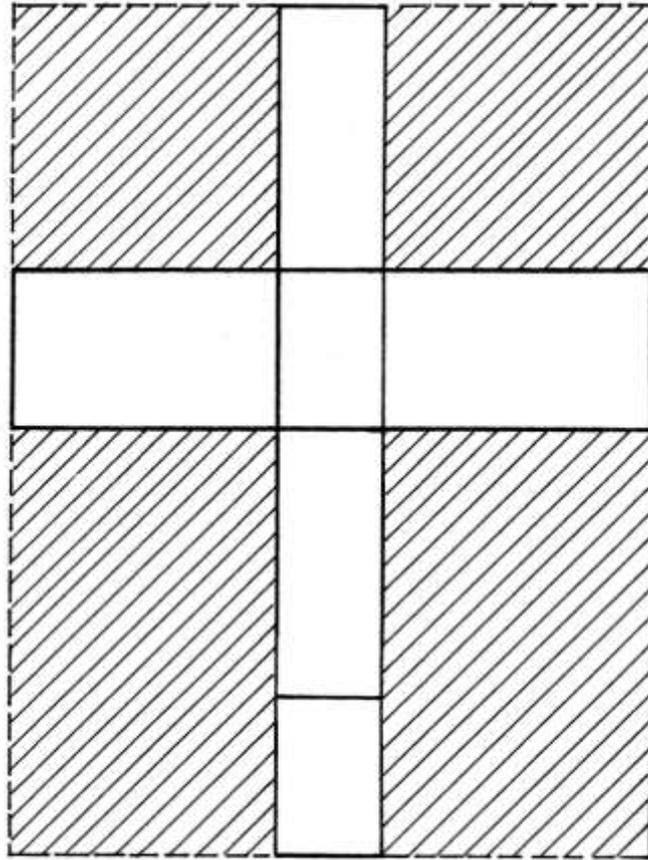
Un parallelepipedo come quello dell'esempio che segue deve essere sviluppato su di un piano:



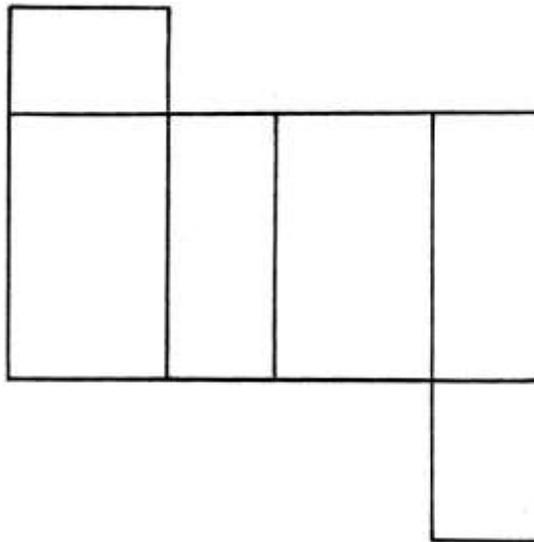
Eccone lo *sviluppo a fiore*:



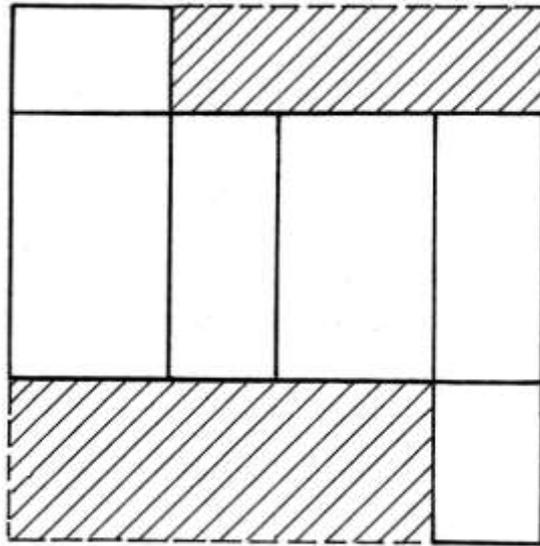
Questo metodo comporta un notevole spreco di materiale, come è mostrato dalle parti tratteggiate della figura:



Lo sviluppo per rotolamento del parallelepipedo è:



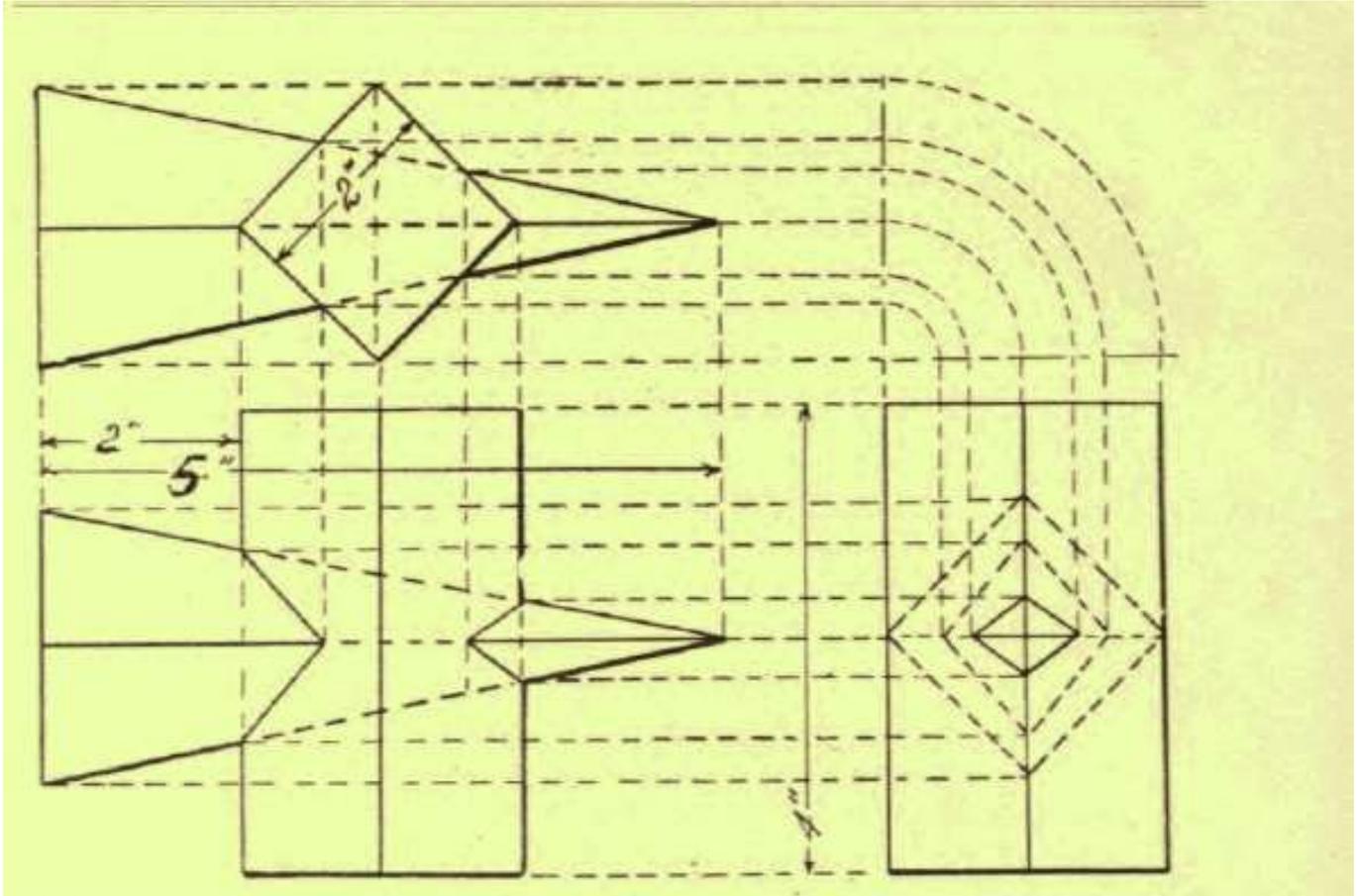
Chiaramente questo secondo metodo comporta un minore spreco di materiale:



Entrambi i metodi si rifanno al metodo americano di proiezione.

Nella pratica tecnica, lo sviluppo e il taglio del materiale seguono una semplice regola economica: ridurre al minimo lo spreco di materiale. Nel caso della precedente figura, il metodo preferito, perché più economico, è lo sviluppo per rotolamento.

La tavola seguente, tratta da un manuale americano pubblicato nel 1908 (*"Perspective sketching from working drawings"*, di Frank E. Mathewson), fornisce un esempio di impiego del metodo del terzo diedro: sono disegnate le linee di proiezione, tratteggiate, e le quote espresse in pollici (") sono state scritte addirittura all'interno del disegno:



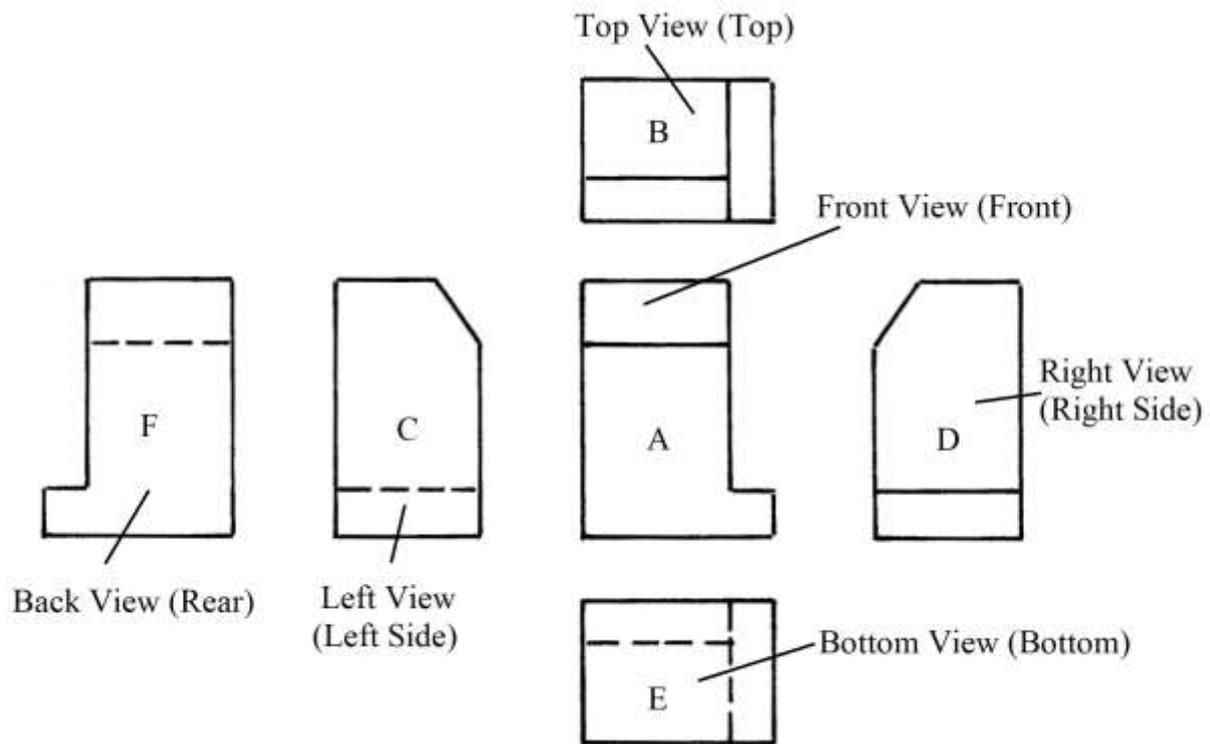
Il metodo americano si avvicina a quello della prospettiva.

----- APPROFONDIMENTO -----

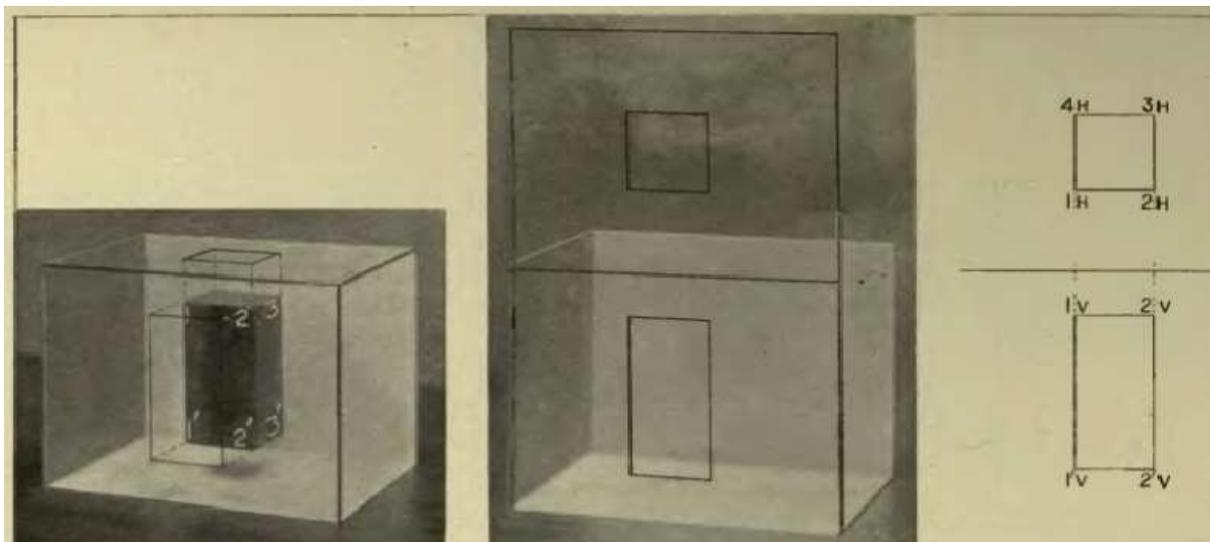
Nel linguaggio folcloristico americano il metodo del primo diedro è conosciuto con l'espressione *"un attore su un palcoscenico"*, mentre quello del terzo diedro è chiamato *"uno squalo in un serbatoio"*.

Le norme UNI e il metodo americano

La figura che segue è ricavata dalla norma UNI; su di essa sono indicati i termini americani delle sei viste del metodo del terzo diedro:



La figura che segue (da J.C. Tracy, “*Introductory course in mechanical drawing*”, New York e Londra, Harper & Brothers Publisher, 1898) descrive la struttura e il funzionamento del parallelepipedo di proiezione di vetro e il suo impiego con il metodo del terzo diedro:



Il metodo americano si avvicina a quello della prospettiva.

Infatti in un disegno in prospettiva, *generalmente*, il piano prospettico sul quale si disegna è interposto fra il punto di vista e l'oggetto da rappresentare.

Nelle Scuole di numerosi Stati sono usati modelli articolati – e quindi apribili – di cubi di proiezione di materiale opaco (metodo europeo o ISO-E) o trasparente (metodo americano o ISO-A).

La globalizzazione dell'economia mondiale amplia i rapporti economici e sociali con gli Stati di altri continenti e, fra l'altro, suggerisce l'acquisizione di una completa conoscenza di entrambi i metodi di rappresentazione ortografica, europeo e americano.

Nota: talvolta, in testi americani, i due metodi sono descritti come segue:

* *primo diedro*: il solido di proiezione che contiene l'oggetto o il pezzo, viene aperto e lo sviluppo è fatto mettendo in evidenza le pareti interne;

* *terzo diedro*: la stessa operazione viene compiuta sulle pareti esterne.

I due dialetti del disegno tecnico

Il metodo del primo diedro e quello del terzo diedro costituiscono due differenti *dialetti* del linguaggio del disegno tecnico. Sull'argomento rimandiamo all'APPENDICE n. 1 nella quale è approfondito il pensiero dell'ingegnere americano Harold Belofsky.

In Europa, nel corso dell'Ottocento, i matematici (e fra di essi in particolare i *geometri*) discussero in sede accademica dell'applicazione della geometria descrittiva ai metodi del disegno tecnico. Ne derivò l'adozione del metodo del primo diedro con l'uso iniziale di due soli piani di proiezione, quello orizzontale e quello verticale.

Nello stesso periodo, negli Stati Uniti gli artisti e i tecnici affrontarono in maniera differente il problema della rappresentazione grafica: dato che un'unica immagine disegnata in prospettiva non forniva la possibilità di ricavare le dimensioni, essi, da bravi pratici, applicarono e ampliarono il principio della prospettiva usando la tecnica del *quadro interposto* fra l'osservatore e l'oggetto da rappresentare. L'oggetto fu quindi visto rispetto a diversi quadri di materiale trasparente fra loro perpendicolari: era nata la *glass box*.

I due dialetti sono stati usati nella pratica dei disegnatori e dei tecnici per decenni: solo nel 1927 in Gran Bretagna fu emanata una norma che fissava l'obbligo dell'uso del metodo del primo diedro; la norma era la 308 e fu pubblicata dal BSI (*British Standards Institution*). Attualmente in Gran Bretagna sono usati entrambi i metodi, purché essi non siano mischiati nello stesso disegno.

Negli Stati Uniti il metodo del terzo diedro entrò a far parte delle norme ANSI (*American National Standards Institute*) solo nel 1935.

È evidente che la coesistenza dei due *dialetti* ha delle serie conseguenze: sia dal punto di vista concettuale che da quello economico (con un ovvio aumento dei costi).

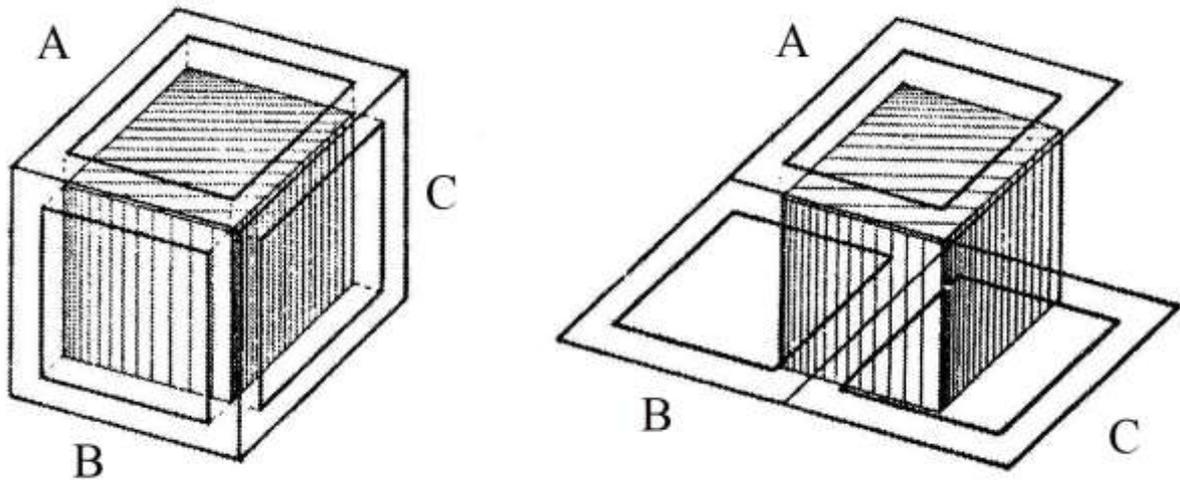
La "glass box"

Una *glass box* (in americano una "scatola di vetro") è un solido regolare, un parallelepipedo o un cubo, con le sei pareti fatte di vetro trasparente. Collegando per mezzo di cerniere le sei pareti trasparenti, queste potevano essere sviluppate su di un piano, aprendole verso l'esterno.

Un oggetto viene collocato all'interno e le viste sono disegnate sulla superficie *esterna* delle sei pareti.

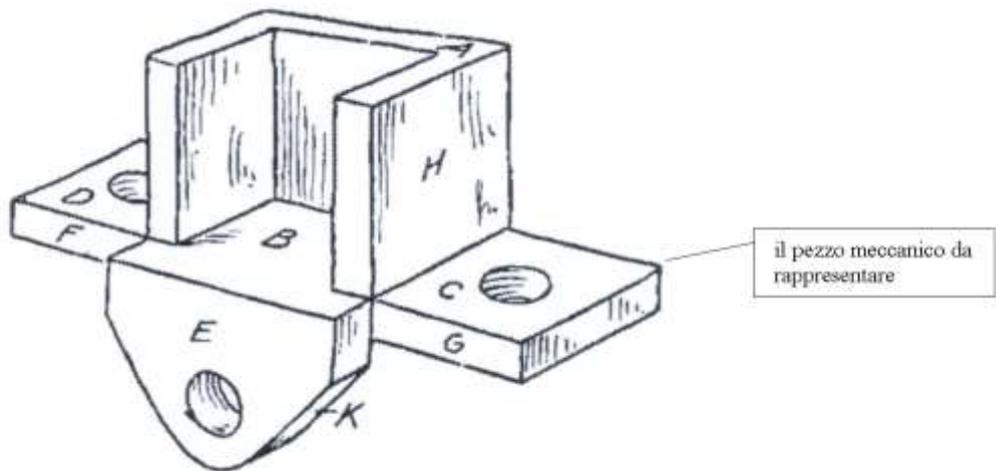
La prima formulazione di questo principio apparve in un piccolo manuale scolastico pubblicato nel 1888 dall'ingegnere americano *William Henry Thorne*: "*Junior course: mechanical drawing*" (41 pagine, 8 tavole, cm 14x18).

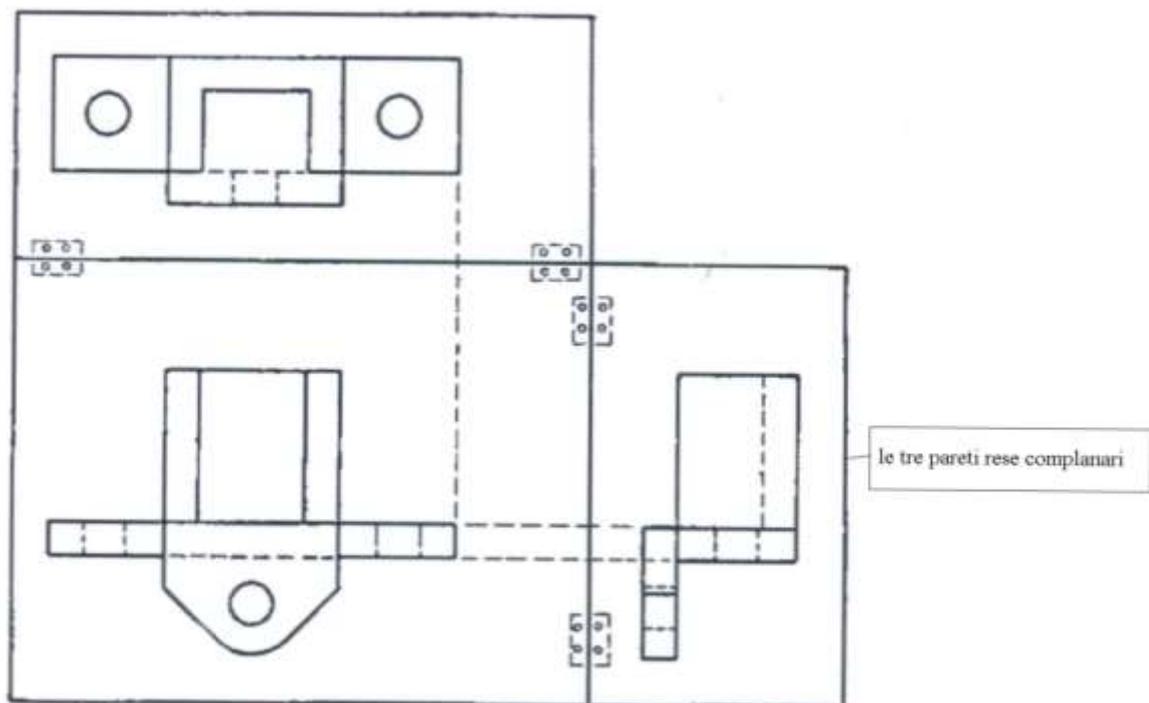
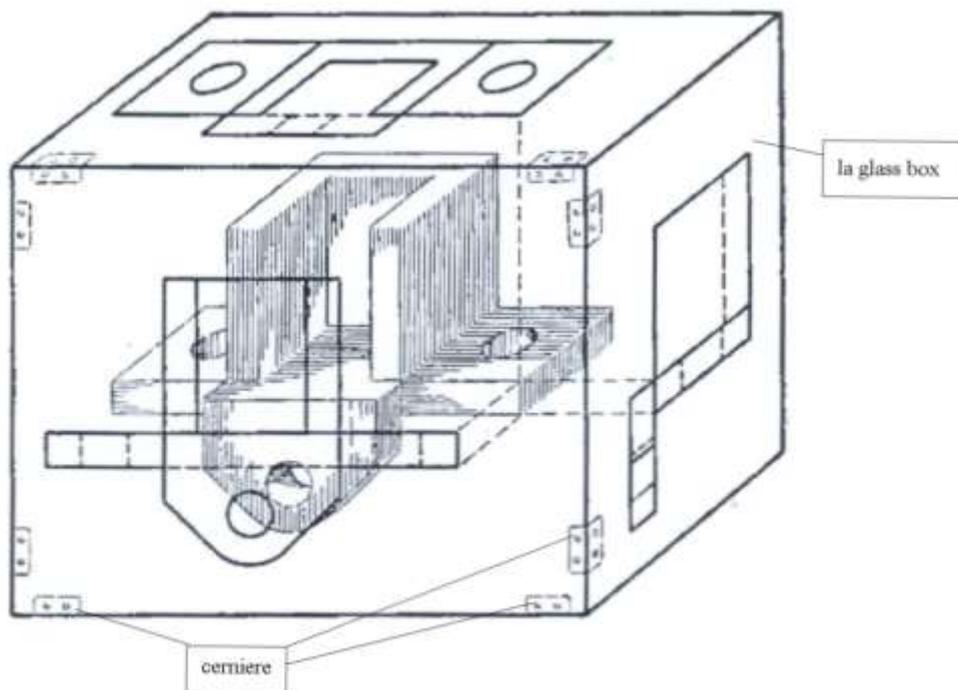
La figura che segue mostra, a sinistra, il solido che è delimitato da tre pareti trasparenti, A, B e C. A destra le tre pareti sono rese complanari alla A:



Successivamente, l'ingegnere americano Thomas Ewing French (1871-1944) sviluppò l'idea della *glass box* con sei facce collegate da cardini e stendibili su di un unico piano.

La figura che segue è tratta dall'edizione 1918 di "A manual of engineering drawing for students and draftsmen" del French:





I manuali del French ebbero notevole successo e alcuni furono aggiornati e ripubblicati fino al 2009.

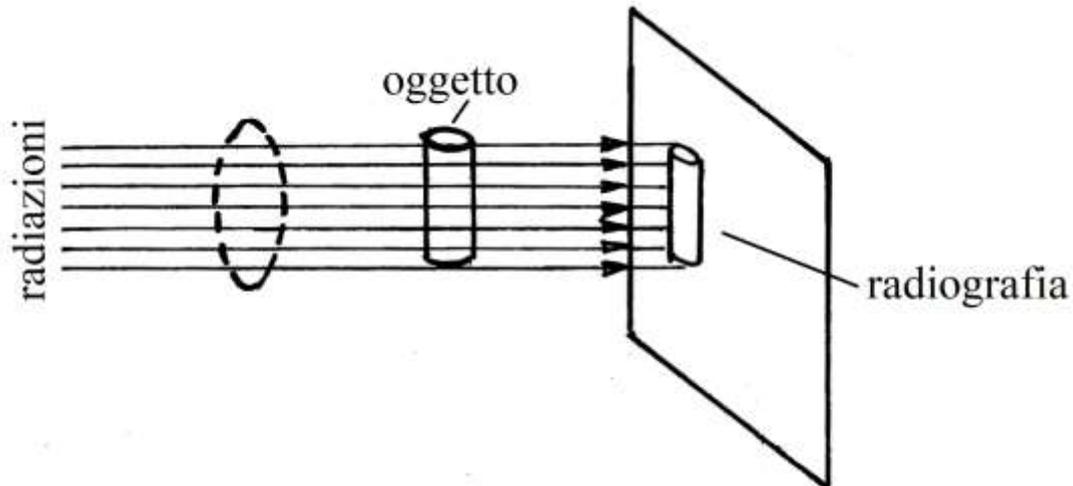
Nacque così negli Stati Uniti la regola delle proiezioni ortogonali secondo il metodo del *terzo diedro*, poi entrata nell'uso corrente in alcuni Stati in stretti rapporti economici con gli USA.

La regola è stata successivamente recepita fra i metodi previsti dalle norme dell'ISO.

Alcuni modelli del metodo del primo diedro

Per spiegare meglio il principio ispiratore di questo metodo possiamo ricorrere ad alcune analogie:

- I contorni dell'oggetto da rappresentare sono proiettati su di una parete da una *torcia* che proietta l'immagine su di un piano collocato al di là dello stesso oggetto.
- L'oggetto è, per così dire, sottoposto a una *radiografia*:



- Un *orologio a cucù* è un oggetto ben conosciuto: a intervalli regolari, un uccellino esce dall'apparecchio ed emette un suono per indicare le ore; poi rientra nella sua sede e vi resta fino alla successiva uscita programmata.

Il cucù è anche il nome di un gioco fatto con i bambini piccoli.

Il metodo europeo delle proiezioni ortogonali sembra un'applicazione del gioco del cucù: si osserva il contorno di un oggetto, lo si fa “sparire” e si disegna sul piano ciò che si era visto in precedenza. L'oggetto è *interposto* fra l'occhio dell'osservatore e il piano sul quale si disegna.

Alcuni modelli del metodo del terzo diedro

Per rinforzare la padronanza di questo metodo possono essere usati alcuni manufatti:

- Un *acquario* ha la forma di un parallelepipedo e possiede almeno 5 pareti di vetro o di cristallo, trasparenti. La sesta parete è occupata dal fondo che non è trasparente.

Un pesce che vive nell'acquario può essere osservato da ben *cinque* differenti punti di vista. L'acquario può essere assimilato alla scatola formata da sei pareti trasparenti, fra loro perpendicolari, al cui interno è collocato un oggetto da osservare da sei punti di vista esterni e disegnare sulla superficie esterna dei sei pareti: è un modello della scatola di vetro usata nel metodo di proiezioni ortogonali *americano*.

Il principio dell'acquario risale alla *prospettiva*: la parete trasparente è interposta fra il punto di vista e il contenuto. Ciascun piano del parallelepipedo trasparente equivale a un piano prospettico.

- Molti dispositivi elettronici hanno un *visore* o uno schermo attraverso i quali si può interagire con l'apparecchio e impartire comandi semplicemente toccando un'icona sullo schermo.

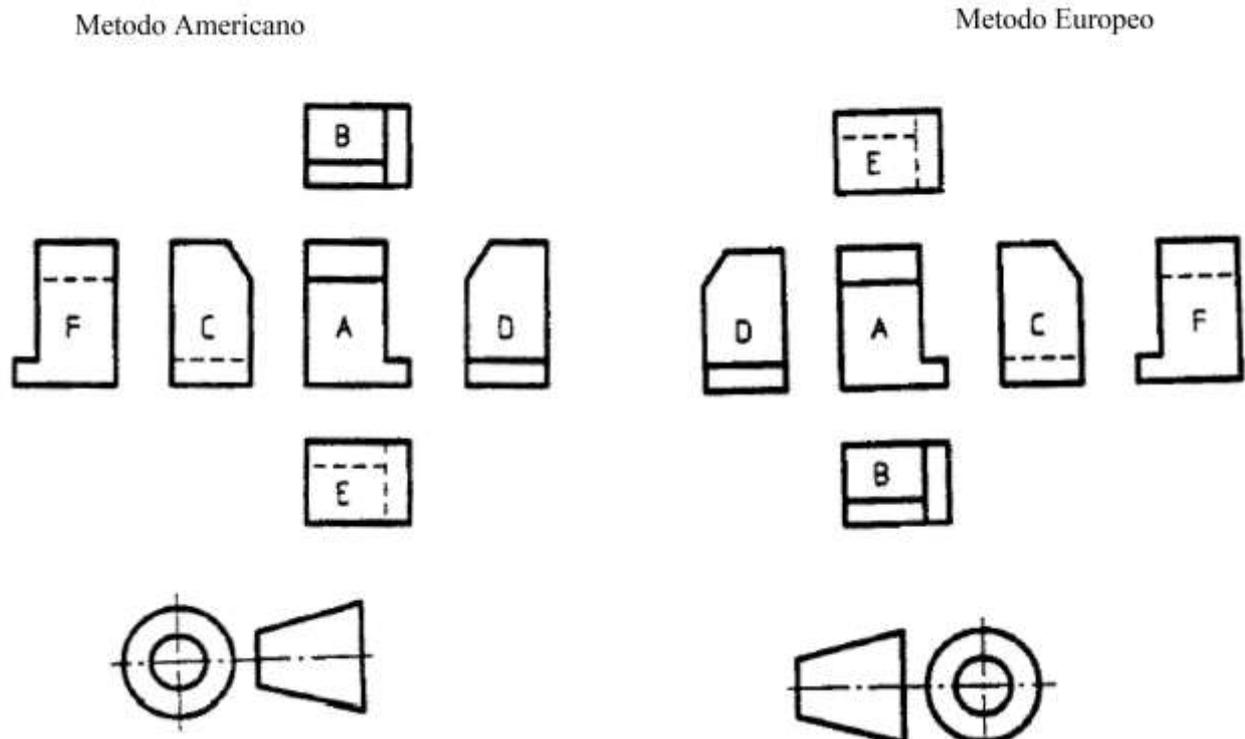
L'immagine si forma sul retro dello schermo, come accade su di un qualunque monitor di computer o televisore.

Lo schermo è assimilabile al *piano prospettico* usato in prospettiva e a uno dei sei piani trasparenti usati nel metodo di proiezioni ortogonali americano.

- L'immagine che si forma in una *macchine fotografica* è posta fra l'occhio dell'osservatore e l'oggetto o l'ambiente osservati.

Il confronto fra i due metodi

Mettendo a confronto le sei proiezioni che si ottengono con i due metodi



si nota che le viste sono *identiche*, ma risultano soltanto *cambiate di posizione*.

----- ANALISI STORICA -----

La rappresentazione degli spigoli nascosti

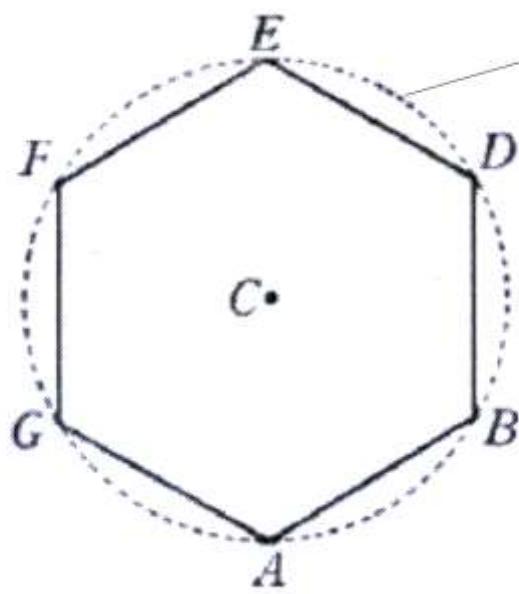
Nei precedenti disegni sono state usate linee tratteggiate:

- Per disegnare le linee di proiezione da un piano all'altro.
- Per rappresentare spigoli del pezzo meccanico, nascosti alla vista.

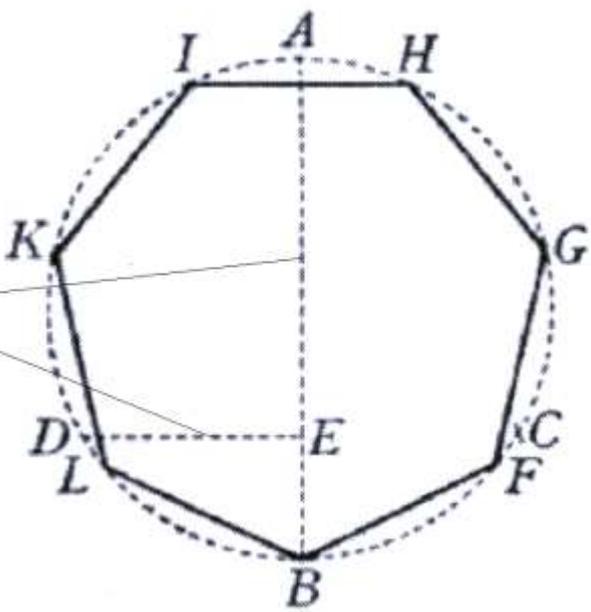
La consuetudine e le norme UNI (ad esempio la norma UNI EN ISO 128-20, aprile 2002, "Principi generali di rappresentazione. Convenzioni di base delle linee"), stabiliscono che gli spigoli nascosti siano disegnati con linee *tratteggiate*.

Fra i precursori di questa regola è Galileo Galilei (1564-1642), scienziato e ingegnere della tradizione del Rinascimento: si interessò fra l'altro di fortificazioni, meccanica, resistenza dei materiali, compassi, ottica, pompe, idraulica.

Nel già citato "Trattato di fortificazione", Galilei spiega alcune costruzioni geometriche di figure piane. Le figure che seguono mostrano le costruzioni dell'esagono e dell'ottagono; Galilei chiama *occulti* i segmenti e le circonferenze *tratteggiate*:



circonferenza "occulta"
(Galileo la chiama
"cerchio occulto")



segmenti occulti
(Galileo li chiama
"linee occulte")

Con l'espressione *linea occulta* (o *morte*) nel Rinascimento erano indicate le sottili linee tracciate sulla carta con una punta metallica (ad esempio, la punta d'argento): le linee venivano poi ripassate con inchiostro.

----- APPROFONDIMENTO -----

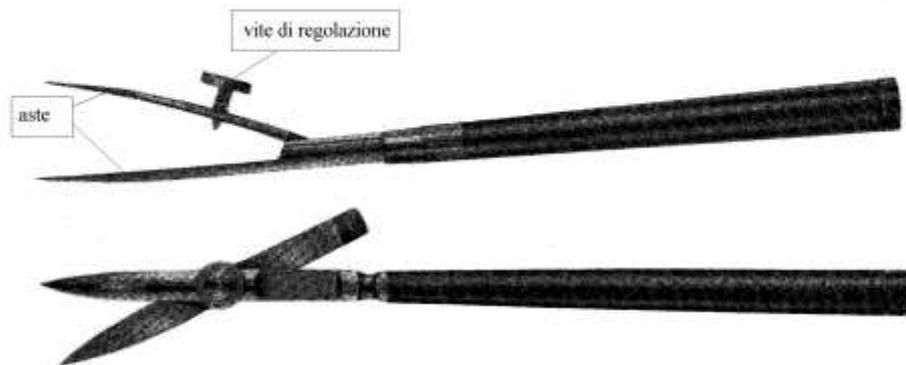
L'importanza delle linee tratteggiate

L'introduzione di questo tipo di linee nei disegni tecnici ha comportato un grande vantaggio: ha ridotto il numero delle *viste* necessarie per rappresentare con precisione un pezzo meccanico.

Il tiralinee

Alla fine del XIX secolo si diffuse nei disegni tecnici l'uso di linee variamente tratteggiate, per distinguere gli spigoli nascosti, gli assi di simmetria, le tracce dei piani di sezione.

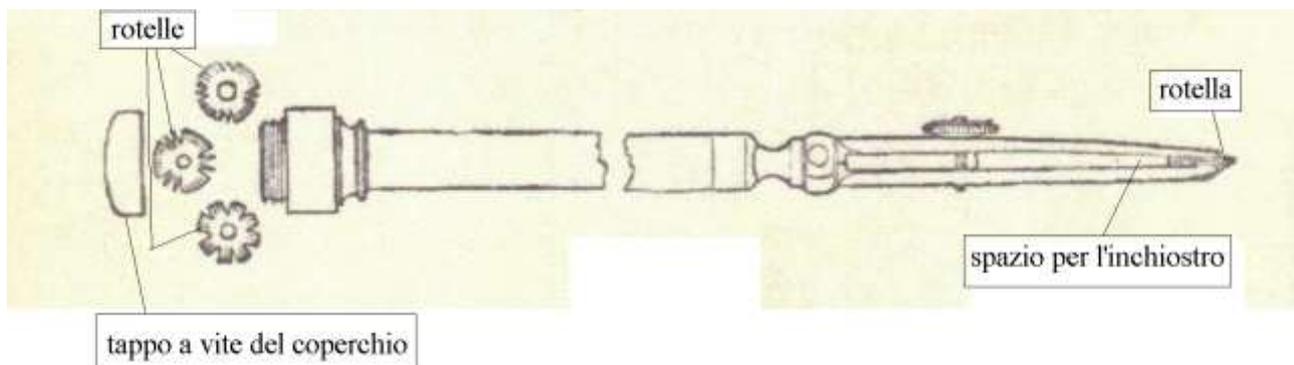
Il disegno a inchiostro era eseguito con il *tiralinee* (o *penna svedese*), uno strumento recante due aste metalliche con la punta arrotondata e la cui distanza era regolata da una vite:



L'inchiostro era inserito fra le due lame; lo strumento non era un campione di affidabilità e di efficienza: le macchie sul foglio erano comuni e l'inchiostro finiva velocemente. Infine, la distanza fra le lame veniva regolata *a occhio* e occorreva una certa esperienza per stimarla. Questi difetti spinsero a soppiantare il tiralinee con le penne a inchiostro a serbatoio.

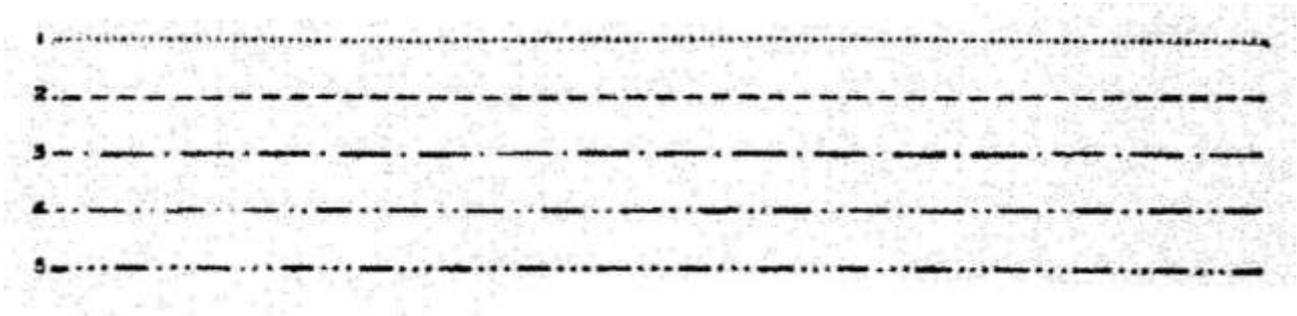
Nelle vecchie scatole dei compassi erano contenuti tiralinee ordinari e tiralinee da innestare nel compasso o nel balaustrino.

Per dare omogeneità ai tratti grafici delle linee tratteggiate e per velocizzarne l'esecuzione, alla fine del XIX secolo furono prodotti dei modelli speciali di tiralinee. La figura che segue mostra lo schema di uno di quei modelli:

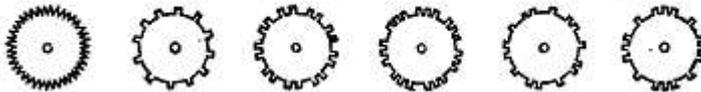


Nel coperchio erano contenuti alcuni piccoli cilindri metallici sagomati lungo la circonferenza quasi fossero delle piccole ruote dentate.

La figura che segue presenta *cinque* differenti tipi di linee ottenute da un tiralinee a rotelle:

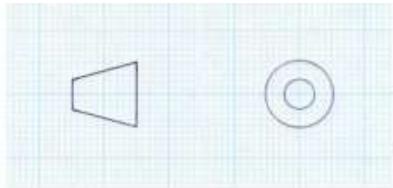


La figura che segue è tratta da un catalogo americano di strumenti matematici (e per disegno geometrico e meccanico) del 1883 e mostra sei *diversi* tipi di rotelle:

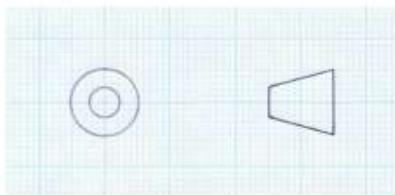
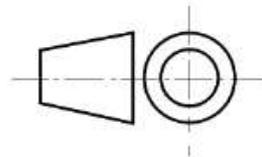


I simboli dei due metodi di proiezione ISO

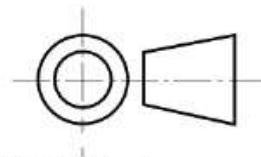
Le norme internazionali, e quindi anche la UNI EN ISO 5456-2:2001, impongono la presenza sui disegni di un simbolo unificato in grado di indicare il metodo di proiezione usato:



metodo del 1° diedro



metodo del 3° diedro



L'appendice A alla citata norma stabilisce le dimensioni dei simboli grafici:

APPENDICE A PROPORZIONI E DIMENSIONI DEI SEGNI GRAFICI
(normativa)

A.1 Requisiti generali

Allo scopo di armonizzare le dimensioni dei segni grafici indicati nella presente parte della ISO 5456 con quelli di altre iscrizioni sul disegno (dimensioni, tolleranze, ecc.), devono essere applicate le regole fornite nella ISO 3461-2.

A.2 Proporzioni

I segni grafici devono essere disegnati in accordo con le figure A.1, A.2 e A.3. Per ragioni pratiche gli assi possono essere omessi.

figura A.1

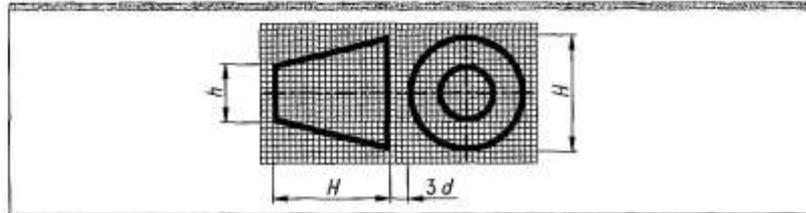


figura A.2

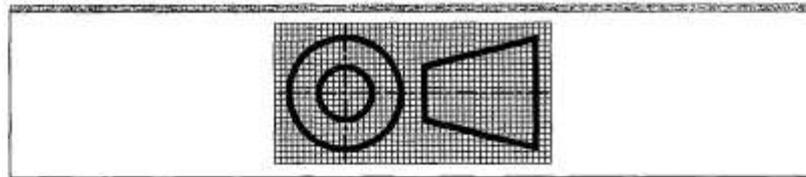
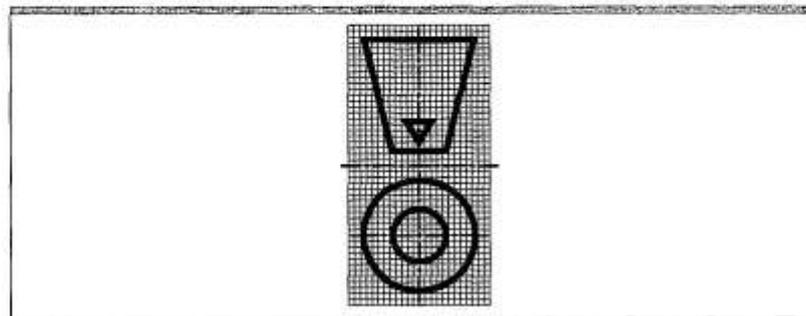
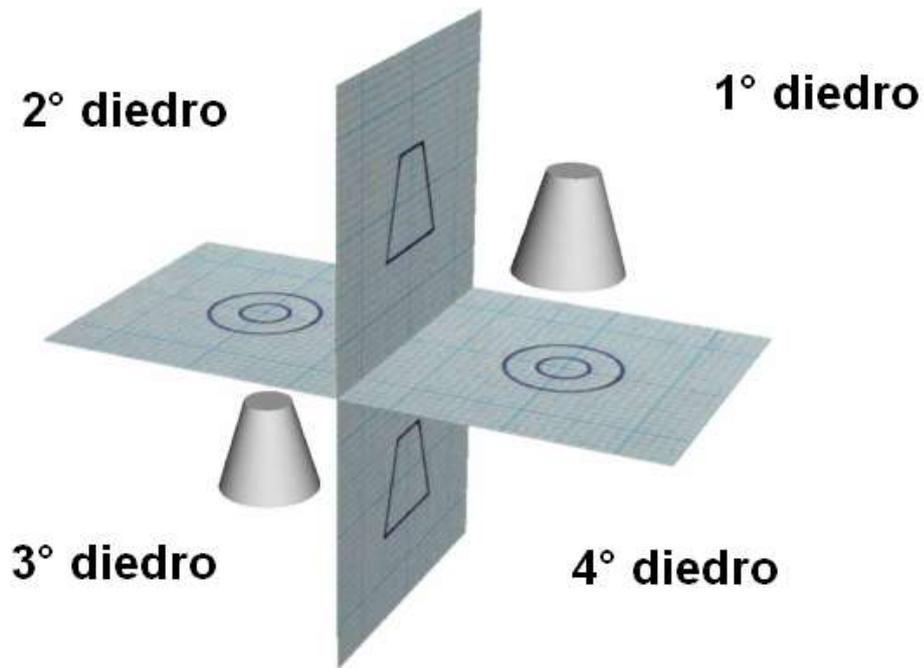


figura A.3



La figura che segue spiega in modo sintetico l'origine dei due simboli (entrambi derivanti dalle proiezioni ortogonali di un tronco di cono retto):

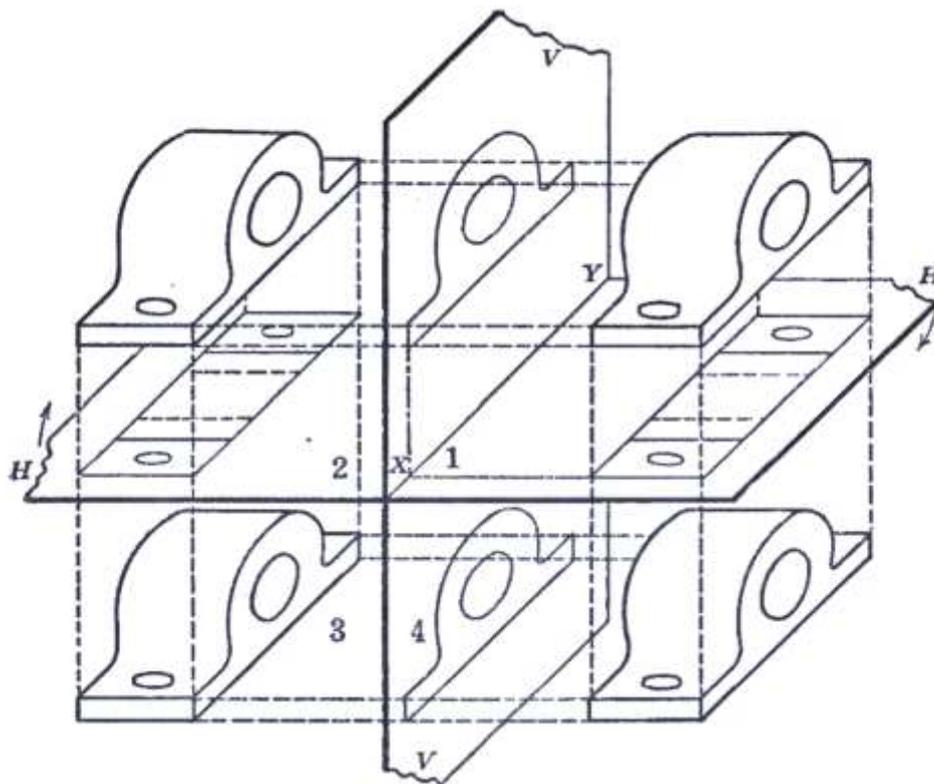


NOTA:

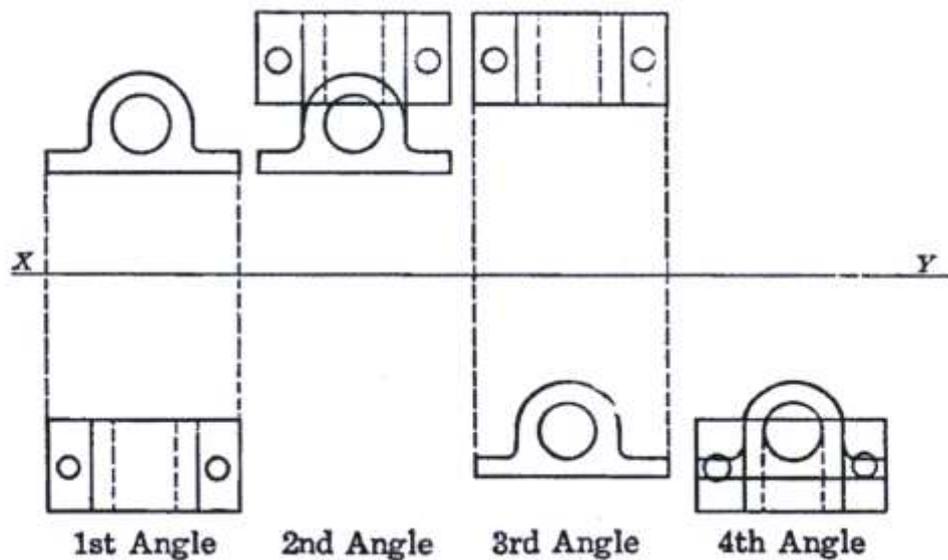
Il 2° e il 4° diedro sono geometricamente validi, ma il loro impiego nelle proiezioni ortogonali porterebbe ad alcune conseguenze: alcune viste risulterebbero corrette e altre ruotate di 180°. Ne nascerebbero evidenti problemi di confusione. Nel disegno geometrico e in quello tecnico, questi due diedri non sono usati.

Le figure che seguono, A e B, sono tratte da un testo americano del 1912 (Alphonse A. Adler, *“The theory of engineering drawing”*, New York).

La figura A mostra una flangia disposta nei quattro diedri: XY indica la linea di terra.



La figura B presenta due viste della flangia (dall'alto e di fronte) per ciascuno dei quattro diedri (*angle in americano*):



Ribaltando le due viste sullo stesso piano del foglio da disegno, è evidente la sovrapposizione che si ottiene con i metodi del 2° e del 4° diedro: occorrerebbe spostare la posizione della flangia all'interno dei due diedri. Le complicazioni non servono a nulla.

Il manuale americano è, come scritto sopra, del 1912, ma i principi in esso contenuti conservano piena validità ancora dopo un secolo.

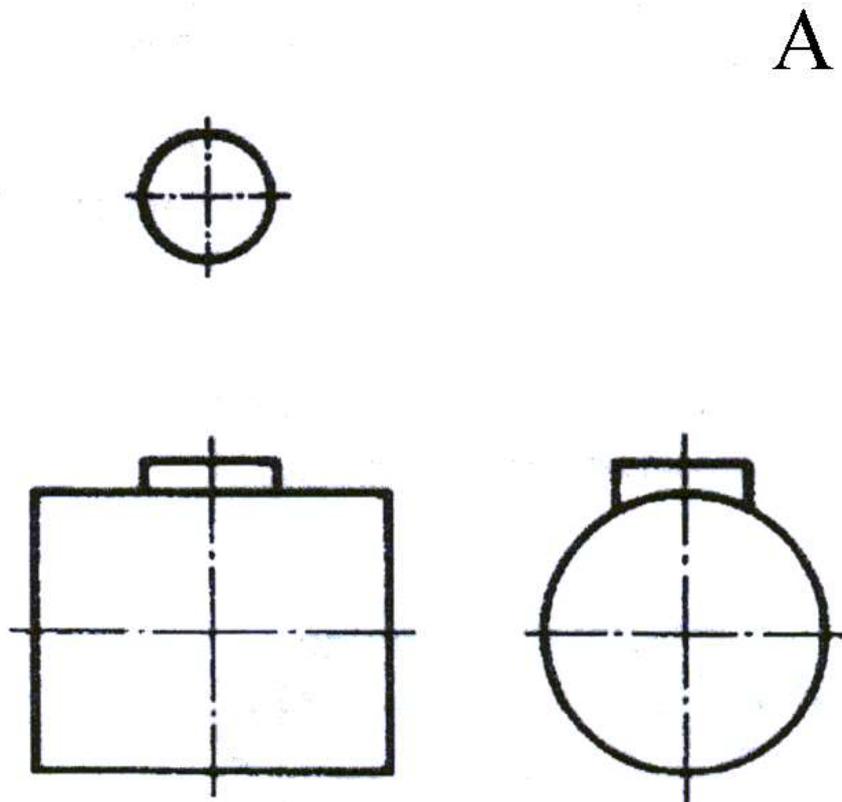
Il metodo americano è usato pure in Italia

È pacifico notare come in Italia la maggior parte dei disegni tecnici siano rappresentazioni basate sul metodo europeo; pure pressoché tutti i testi scolastici seguono questo metodo e forniscono soltanto dei cenni e pochi esempi riguardo al metodo americano.

Le norme UNI, implicitamente, suggeriscono soluzioni a problemi di rappresentazione facendo ricorso al metodo del terzo diedro.

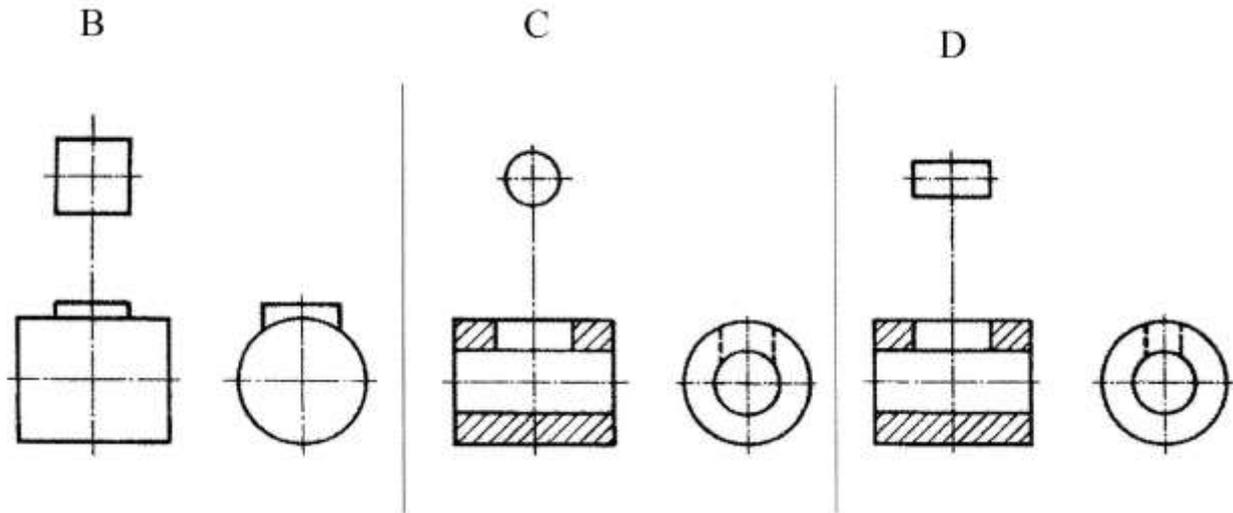
La norma UNI 3977 del luglio 1986 contiene alcune indicazioni ed esempi in materia di “Convenzioni particolari di rappresentazione”. Riferendosi alla rappresentazione semplificata delle intersezioni fra solidi, la norma presenta alcuni esempi:

- In figura A sono presentate due viste (sul P.V. e sul P.L.) di due cilindri compenetrati. Per non dover disegnare anche la vista sul P.O., la norma suggerisce la tracciatura del piccolo cerchietto (visto dall'alto) che descrive la forma della base del cilindro più piccolo. Il cerchietto non è però disegnato al di sotto della vista frontale (come vorrebbe il metodo del primo diedro), ma al di sopra (conformemente al metodo del terzo diedro).



Le figure B, C e D seguono la stessa disposizione e indicano, rispettivamente,

- L'intersezione di un cilindro e di un prisma (fig. B).
- L'intersezione di due cilindri (fig. C).
- L'intersezione di un cilindro e di un parallelepipedo (fig. D).



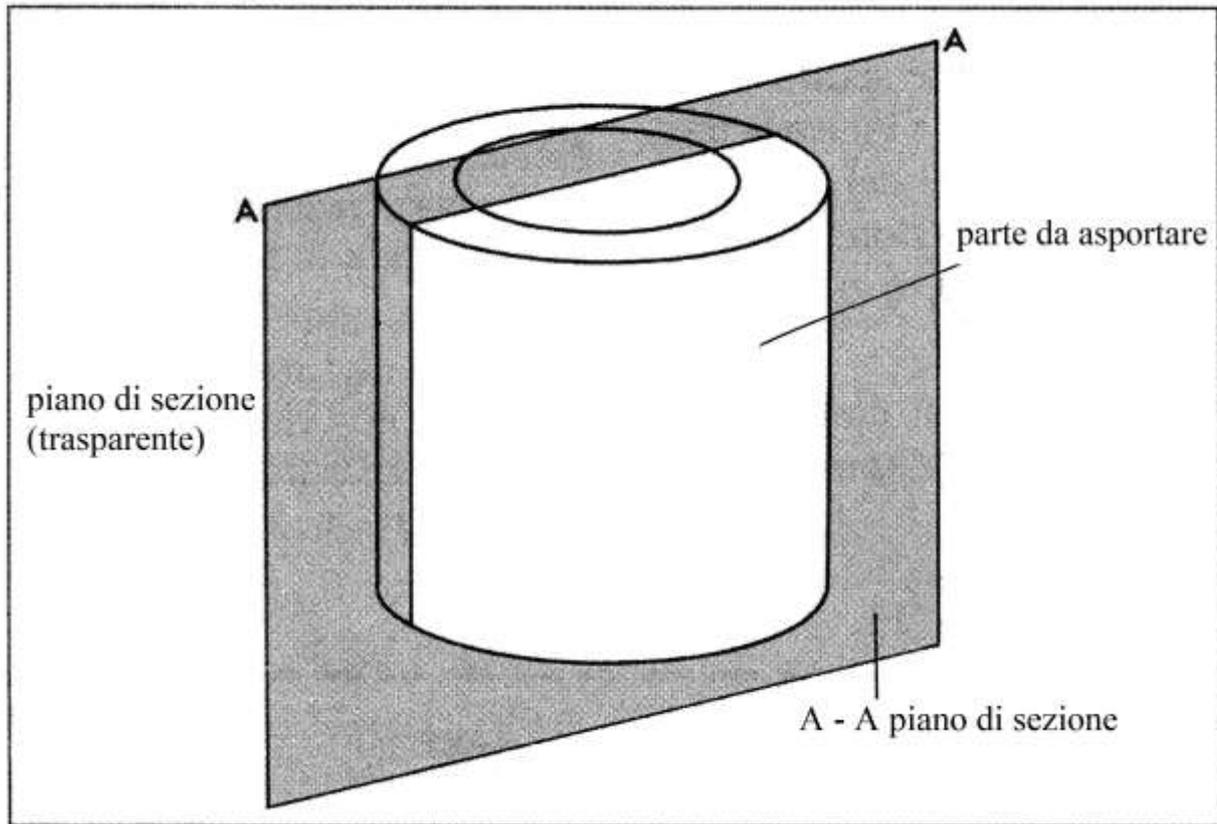
Le sezioni e il metodo americano

La norma UNI 3971 del luglio 1986 disciplina la rappresentazione delle parti sezionate di pezzi meccanici disegnati in *proiezioni ortogonali*.

Se un oggetto è internamente cavo, per fare apparire nel disegno le cavità si deve ricorrere a una tecnica che *immagina* di tagliare l'oggetto. *Sezionare* significa proprio *tagliare*.

Un tubo è un cilindro cavo internamente: se esso è fatto di un materiale non trasparente, non è possibile vedere da fuori la cavità interna. Per vedere come è fatto internamente un tubo è necessario tagliarlo nel senso della lunghezza.

I disegnatori non hanno sempre necessità di sezionare *realmente* i pezzi meccanici che devono rappresentare. Essi *immaginano* di farlo con un piano e disegnano una parte del pezzo. La figura che segue mostra un piano di spessore trascurabile che divide un cilindro cavo secondo la lunghezza:



La parte anteriore del pezzo viene asportata e sul piano di sezione, *immaginato trasparente*, si disegna la figura che si vede: il piano è *interposto* fra la parte del pezzo sezionato che rimane e l'occhio dell'osservatore.

È evidente che la rappresentazione di pezzi sezionati costituisce un'applicazione del *metodo americano*.

Il disegnatore *immagina* di asportare la parte anteriore e disegna il cilindro cavo in proiezioni ortogonali:

Solo nel P.V. viene disegnata la sezione del cilindro e vi è espressamente scritto: *sezione A-A*, dove *A-A* indica la traccia o proiezione del piano trasparente di sezione, perpendicolare al P.O. e parallelo al P.V.

Nella figura si immagina di proiettare sul P.V. la metà del cilindro cavo.

La figura che segue è ricavata dalla norma UNI 3971 e conferma quanto affermato in precedenza:

La presente applicazione concorda con i risultati dei lavori svolti dal Comitato Tecnico 15^o "Disegni" della Organizzazione Internazionale di Normalizzazione ISO (Raccomandazione ISO/R 128).

1. Sezioni

1.1. Sezione è la rappresentazione di una delle parti in cui viene diviso l'oggetto da un taglio ideale eseguito secondo uno o più piani.

In casi particolari può rappresentare solo la figura situata nel piano secante (vedere punto 1.10.).

1.2. Le sezioni possono essere fatte:

- secondo un solo piano (vedere figure 1, 2 e 3);
- secondo due o più piani consecutivi (vedere figure 4, 5 e 6);
- secondo superficie cilindriche di direttrice assegnata, qualora la forma del pezzo lo richieda.

1.3. Nel disporre le sezioni rispetto all'oggetto si seguono gli stessi criteri indicati per le proiezioni ortogonali (vedere UNI 3970, 2ª Ed.).

1.4. I piani di sezione devono essere individuati mediante la loro traccia sul disegno eseguita con linea mista fine e grossa (tipo F UNI 3968, 2ª Ed.), contraddistinta ai due estremi con lettere maiuscole uguali e con frecce orientate nel senso di proiezione (vedere figure da 1 a 4).

Qualora la sezione sia ottenuta secondo due o più piani consecutivi anche le intersezioni delle tracce devono essere rappresentate con tratto ingrossato (vedere figure 4, 5 e 6).

Se necessario, per maggiore chiarezza, si possono contrassegnare i vari punti della traccia con lettere maiuscole (vedere fig. 6), eventualmente diverse e progressive.

1.5. La rappresentazione deve essere contrassegnata con la scritta «Sez.» con riportate le lettere maiuscole degli estremi della traccia separate da un trattino (vedere figure da 1 a 5).

1.6. Le zone sezionate devono essere tratteggiate mediante linee continue fini (tipo B UNI 3968, 2ª Ed.) parallele, appartenenti al gruppo di linee scelte per l'esecuzione del disegno e formanti di regola con l'asse principale del pezzo o con le linee di contorno un angolo di 45° (in casi eccezionali compreso tra 30° e 60°), come ad esempio indicato nelle figure da 4 a 6.

I tratteggi di parti contigue appartenenti a pezzi diversi devono avere differente inclinazione od intervallo. I tratteggi delle parti dello stesso pezzo devono avere la

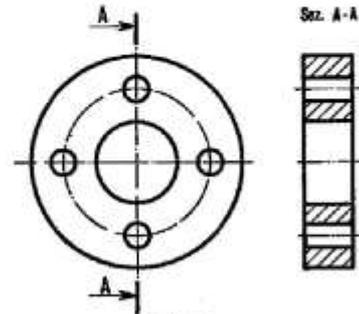


Fig. 1

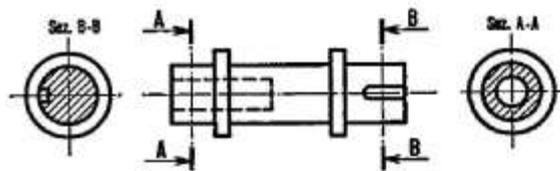


Fig. 2

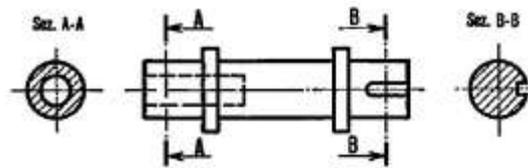


Fig. 3

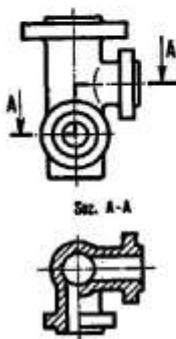


Fig. 4

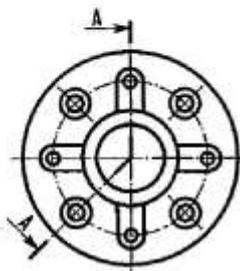


Fig. 5

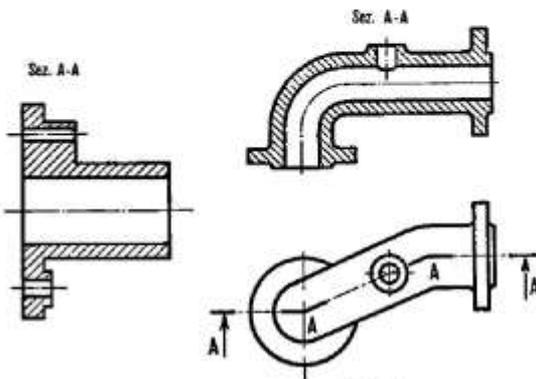


Fig. 6

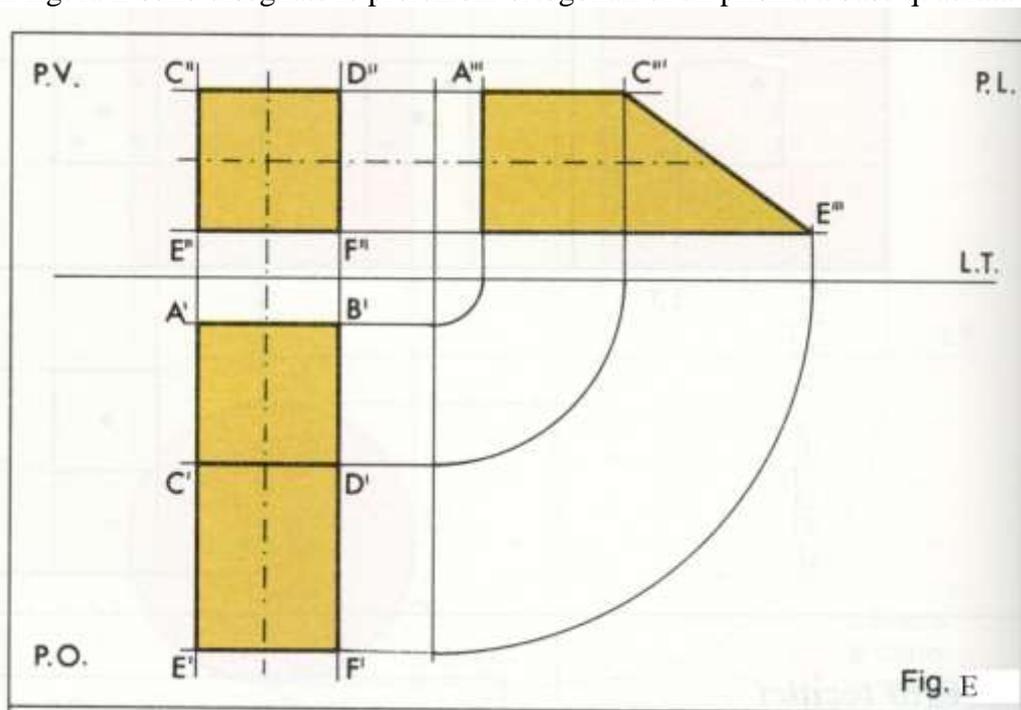
(segue)

I ribaltamenti e il metodo americano

I solidi geometrici che formano i pezzi meccanici non sono sempre dei solidi perfetti con le facce perpendicolari o parallele ai piani di proiezione. I solidi perfetti che per primi sono affrontati nelle lezioni di disegno geometrico hanno, generalmente, l'asse di simmetria perpendicolare a un piano e le basi del solido retto perpendicolari all'asse: cubo, prismi, parallelepipedo, cilindro.

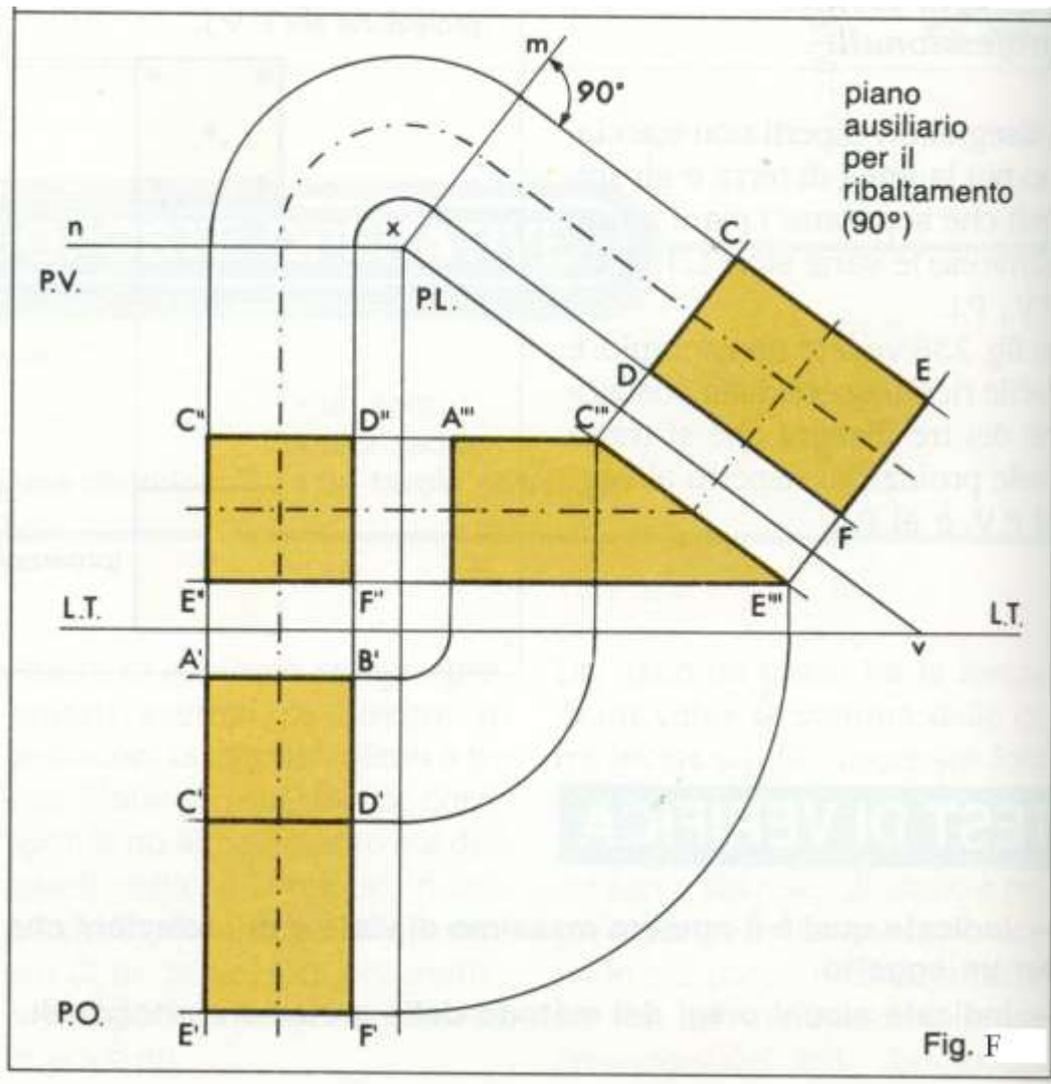
Nella realtà tecnica i pezzi meccanici sono assai più complessi e possono presentare facce oblique ottenute sezionando un solido con un piano inclinato rispetto all'asse principale. Per mostrare le vere dimensioni di una superficie ricavata da una sezione si ricorre al metodo del ribaltamento, con l'impiego di uno o più piani ausiliari, *aggiuntivi* rispetto ai sei piani di proiezione.

In figura E sono disegnate le proiezioni ortogonali di un prisma a base quadrata:



Dal disegno non appaiono l'esatta forma e le reali dimensioni del rettangolo CDFE. Con un piano ausiliario parallelo al P.L. e perpendicolare al piano nel quale giace il rettangolo (fig. F) si ricavano le informazioni richieste: in questa vista il rettangolo risulta disegnato secondo le regole del metodo americano.

L'impiego dei piani ausiliari si basa sul presupposto che nello spazio esiste un piano che contiene il poligono che si deve disegnare: nell'esempio di figura F, il piano è rappresentato dalla traccia XV:



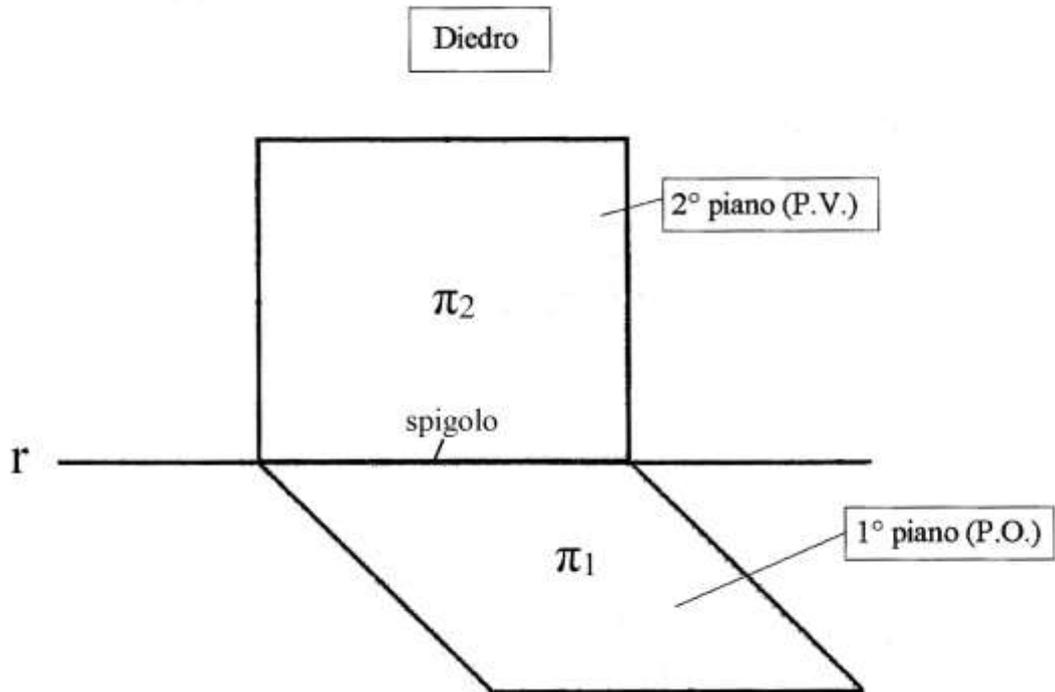
----- APPROFONDIMENTO -----

Diedro e triedro

Le norme fanno riferimento al termine geometrico di *diedro*: nella letteratura anglosassone sono usati *angle* (angolo) e *quadrant* (quadrante).

Un *angolo diedro* o semplicemente *diedro* è una porzione di spazio a tre dimensioni delimitata da due semipiani che hanno in comune un segmento di retta, *r*, chiamato *spigolo*:

La figura che segue descrive un generico diedro:



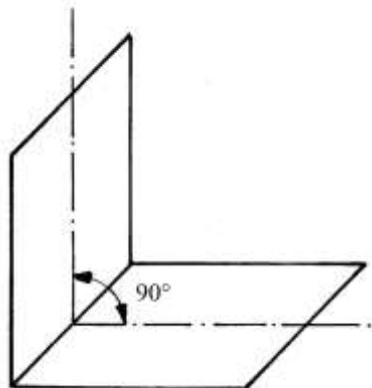
I due piani π_1 e π_2 formano un angolo qualsiasi e sono separati dallo *spigolo* comune che giace sulla retta r .

Nelle proiezioni ortogonali la retta r è chiamata *linea di terra* (in sigla L.T.) essa rappresenta il profilo del piano (orizzontale o P.O.) sul quale poggia l'oggetto rappresentato: il piano di appoggio può essere parallelo al P.O.

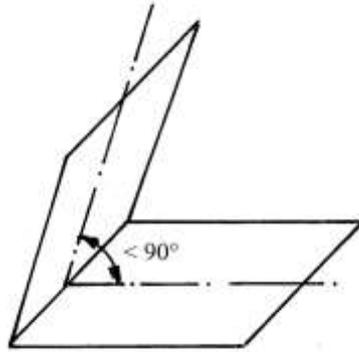
Il metodo delle proiezioni ortogonali impiega almeno due piani fra loro *perpendicolari*: uno è orizzontale e l'altro è verticale.

I due piani che formano un diedro possono formare angoli di differente ampiezza:

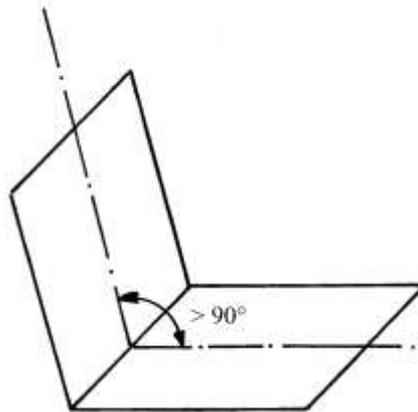
* *Diedro retto*, con i due piani perpendicolari (ed è il caso del P.O. e del P.V. usati nelle proiezioni ortogonali):



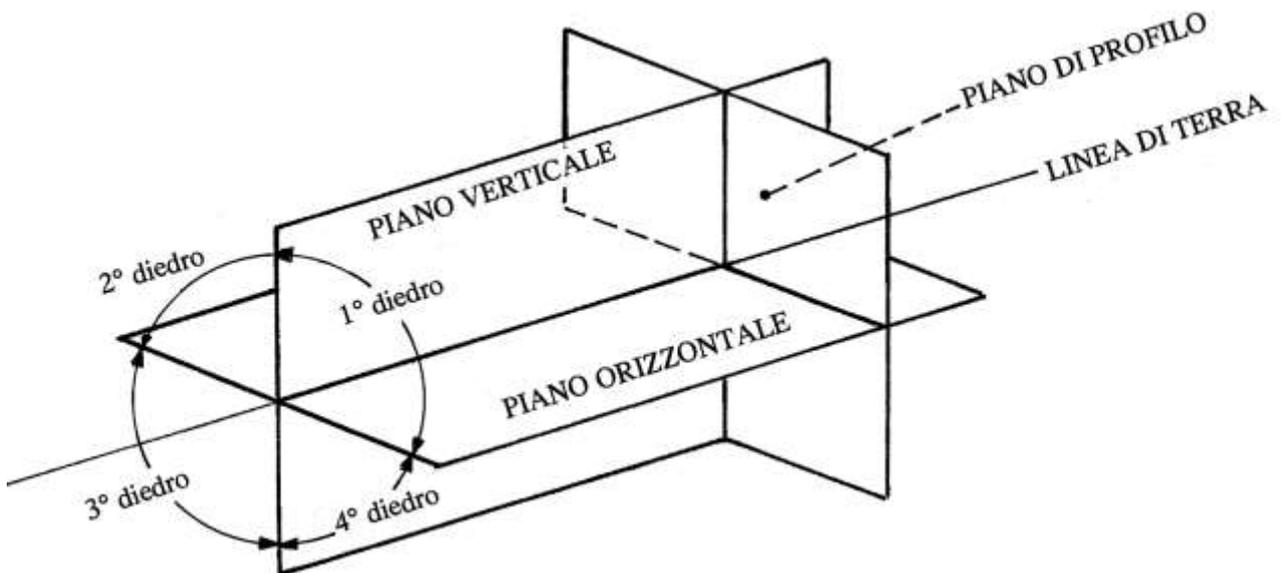
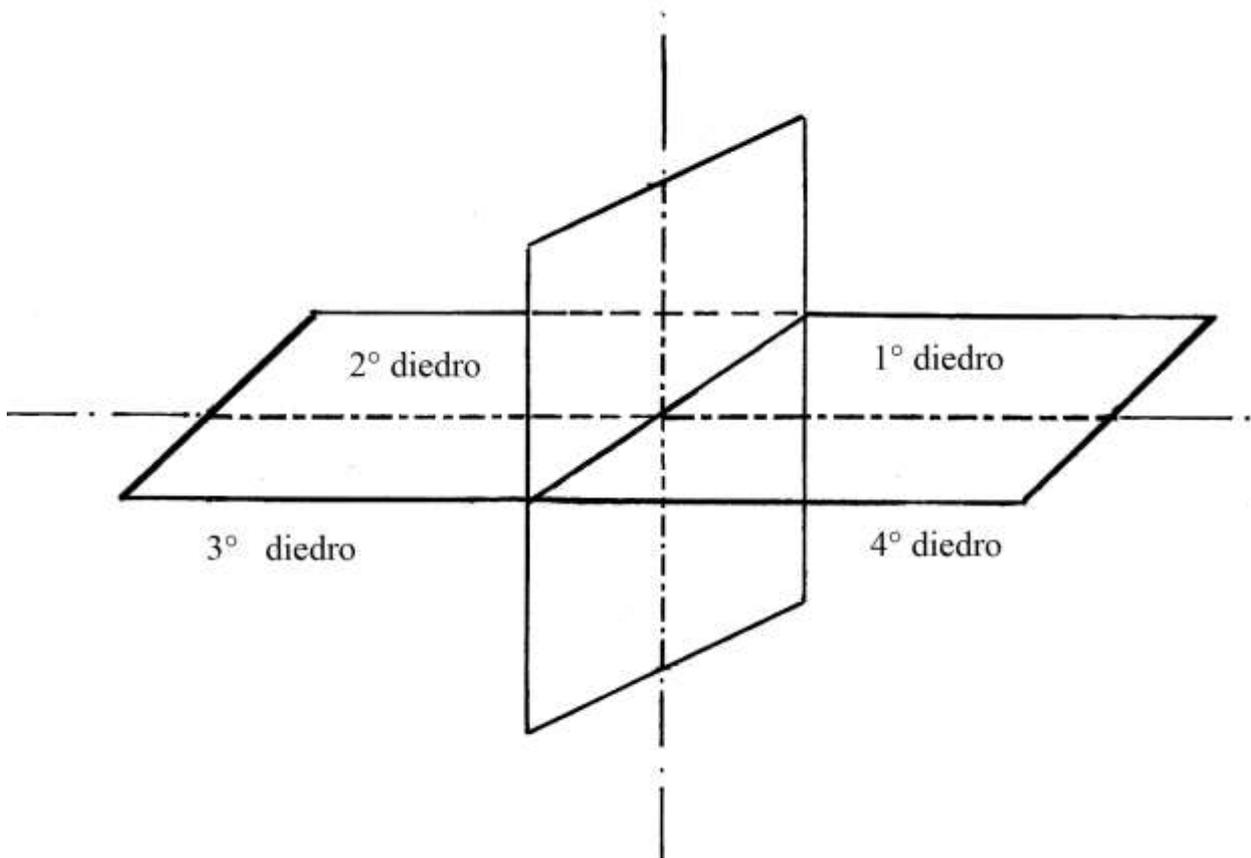
* *Diedro acuto*, con i due piani separati da un angolo ampio meno di 90° :



* *Diedro ottuso*: i due piani formano un angolo di ampiezza maggiore di 90° :

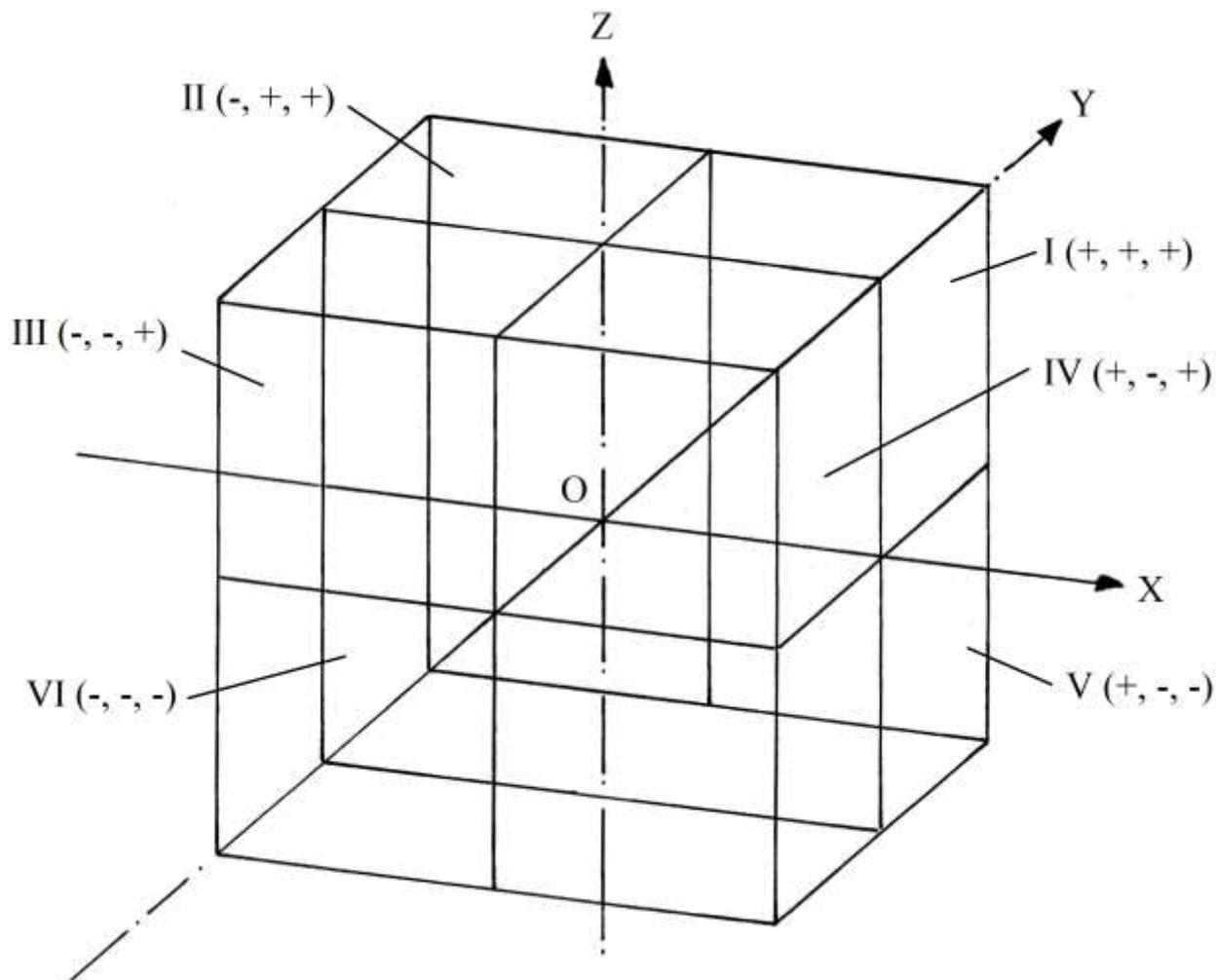


Due piani fra loro perpendicolari si incrociano formando *quattro* diedri retti che sono numerati in senso antiorario:



La figura precedente presenta una semplificazione della struttura dello spazio euclideo a 3 dimensioni: dobbiamo considerare anche i diedri collocati oltre il *piano di profilo* che sono altri quattro.

Lo spazio euclideo a 3 dimensioni è quindi suddiviso in 8 *ottanti*: un ottante è una delle regioni formanti ciascuna un triedro, nelle quali lo spazio è diviso dai tre assi cartesiani X, Y e Z:



I segni + e - contenuti nella figura indicano i valori, positivi o negativi delle tre coordinate (X, Y, Z) misurate a partire dal punto O di coordinate (0, 0, 0), origine dei tre assi:

Gli ottanti sono indicati con i numeri romani da I a VIII.

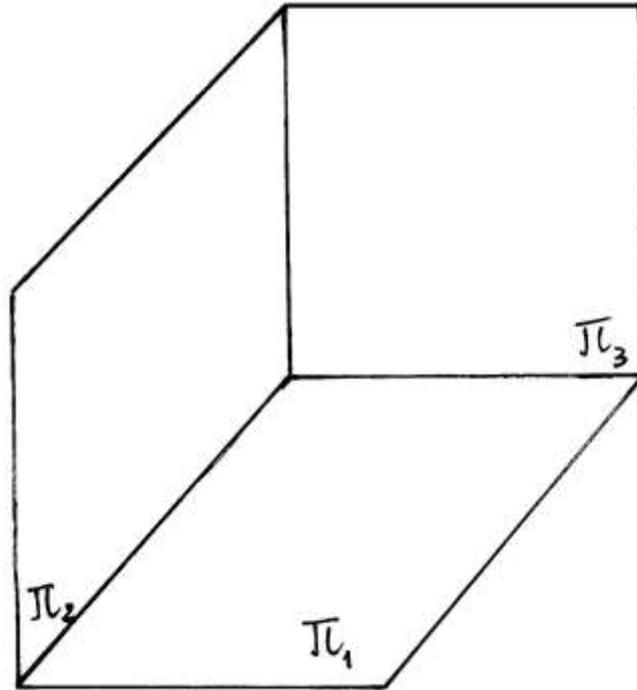
Le proiezioni ortogonali e le assonometrie sono disegnate usando uno dei quattro ottanti anteriori, quelli indicati con i simboli da I a IV e, in particolare, il I e il III.

Il termine *ottante* ha altri usi. In *geometria piana*, un ottante è l'ottava parte di un angolo giro e cioè è un angolo ampio 45° .

In *geometria sferica*, un ottante è la parte di spazio delimitata da tre angoli piani retti, aventi un lato in comune a due a due, come visto nelle precedenti figure: è pure chiamato *angoloide triedro trirettangolo*.

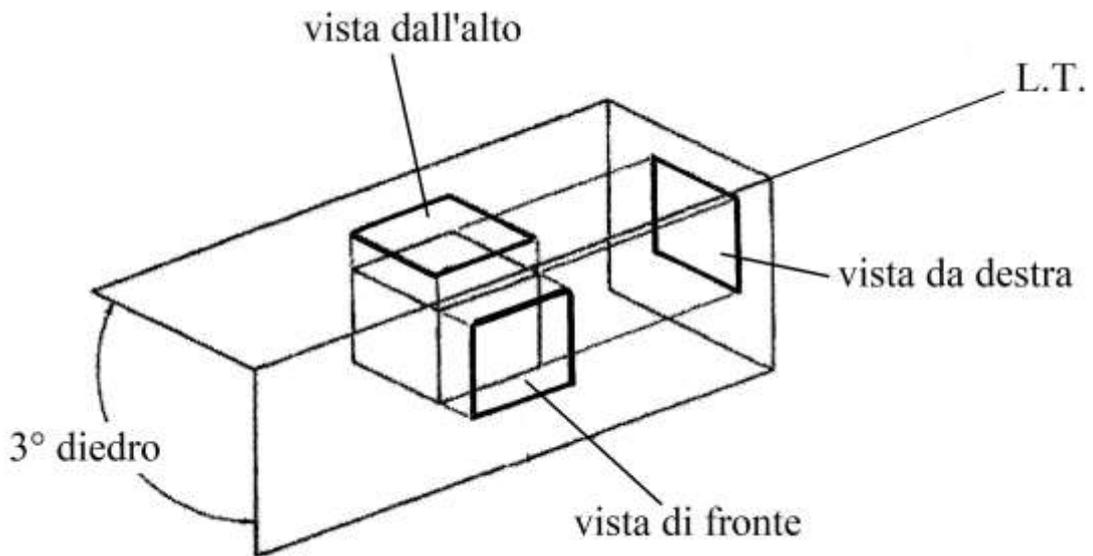
Nella nautica e in astronomia, in passato era usato uno strumento simile al *sestante*: l'*ottante* che aveva un'ampiezza del campo visivo di 45° , mentre il *sestante* l'aveva di 60° .

Un *triedro* è una parte dello spazio delimitata da tre semipiani aventi in comune un punto. La figura che segue mostra la vista assonometrica di tre piani fra loro a due a due perpendicolari:



Il piano π_1 è il piano orizzontale, π_2 è il piano verticale e π_3 il piano laterale.

La figura che segue descrive le posizioni di tre facce di un cubo visto secondo il metodo americano:



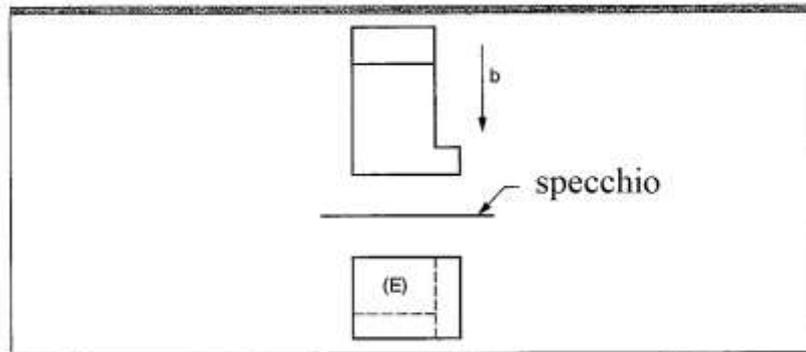
La rappresentazione ortografica speculare

La norma 5456-2 ha introdotto un quarto metodo nel campo delle rappresentazioni ortografiche. Si tratta del metodo chiamato *rappresentazione ortografica speculare* o simmetrica.

La prima norma italiana è del luglio 1999 e ha recepito la norma ISO 5456-2 del 1996.

La *rappresentazione grafica speculare* è un metodo ortografico per il quale l'oggetto da rappresentare è una riproduzione dell'immagine in uno specchio, con la superficie riflettente rivolta verso lo stesso oggetto: lo specchio è disposto parallelamente ai piani orizzontali dell'oggetto.

Nella figura la lettera *b* indica la direzione della vista dall'alto e (*E*) è la vista dall'alto "a specchio".



Il metodo è caratterizzato dall'uso di un solo piano di proiezione, orizzontale, e quindi se ne ricava una sola proiezione, speculare. La già citata norma UNI ne suggerisce l'uso nei disegni di costruzione.

La sua proposizione sembra dovuta anche a necessità emerse in alcuni ambiti tecnologici particolari, come quello della radiologia medica. Infatti, nella *Introduzione* alla norma UNI EN ISO 5456-1:2001 (norma che tratta dei "metodi di proiezione") si trova il seguente paragrafo conclusivo:

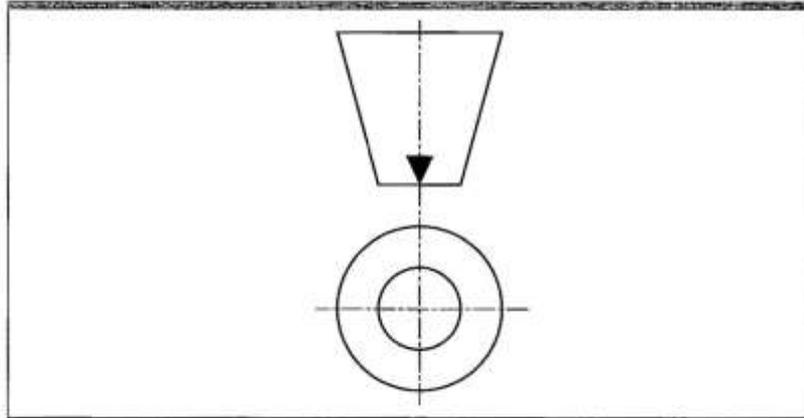
"...Le regole e le convenzioni fornite nella ISO 5456 dovrebbero essere utilizzate conformemente alla ISO 128, per tutti i tipi di disegni tecnici e in tutti i campi delle attività tecniche come:

- *disegni meccanici e di costruzioni;*
- *manuali e guide di istruzioni;*
- *viste ai raggi x;*
- *viste esplose..."*

In realtà esistono esempi simili a questa nuova tecnica:

- I componenti che gli appassionati di elettronica e di radiotecnica saldano sui circuiti stampati. Il disegno (o la fotografia) dell'impianto visto dall'alto non forniscono informazioni sullo stato della superficie inferiore, dalla quale fuoriescono gli spezzoni dei conduttori da saldare e tagliare: un disegno o una fotografia speculare contengono le informazioni occorrenti;
- La copia di una pagina esce rovesciata da una macchina fotocopiatrice. Chi deve fotocopiare un lungo documento su entrambe le facciate di un foglio ("fronte retro") sa che deve fare attenzione a riporre ribaltato sul piatto della macchina il foglio già copiato su una facciata.

Il segno grafico usato per determinare questo metodo è:

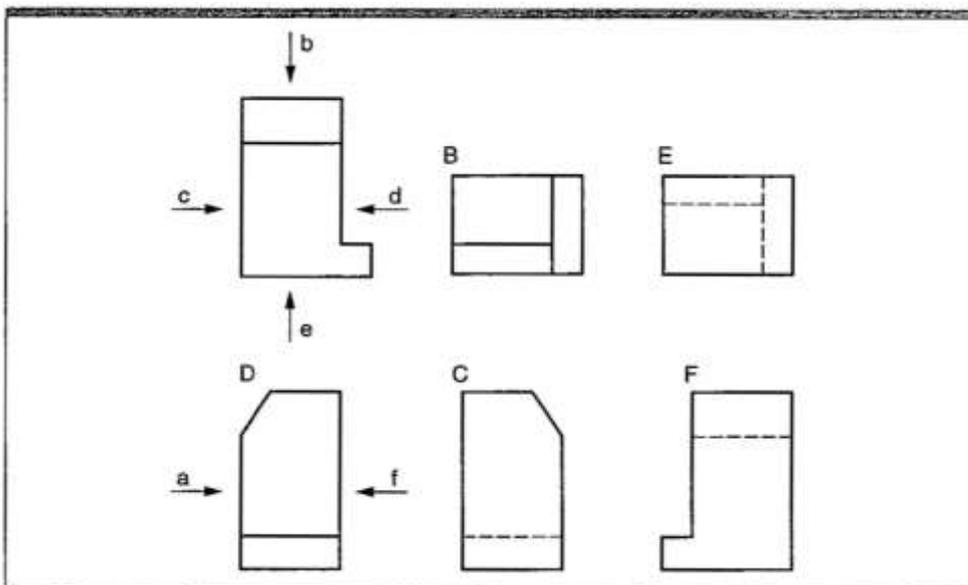


Il metodo delle frecce

Il metodo è usato nei casi nei quali il disegnatore ha necessità di impaginare diversamente dal metodo delle proiezioni ortogonali le varie viste di un pezzo.

La sua utilità si manifesta quando devono essere rappresentati pezzi meccanici che, ad esempio, possiedono una dimensione predominante rispetto alle altre due.

Sul disegno devono essere disegnate delle frecce che aiutano a ricomporre mentalmente l'oggetto a partire dalle singole viste, come suggerito nella figura che segue, tratta dalla norma UNI EN ISO 5456-2:2001:



Il risultato che si ottiene è meno immediato rispetto alla lettura di un disegno realizzato in proiezioni ortogonali con il metodo del 1° o del 3° diedro.

Il metodo delle frecce è, in parte, usato nel disegno di oggetti sezionati, come mostrano le due seguenti figure ricavate dalla norma UNI 3971 del luglio 1986:

La presente utilizzazione concorda con i risultati dei lavori svolti dal Comitato Tecnico 16 "Disegni" della Organizzazione Internazionale di Normalizzazione ISO (Raccomandazione ISO/R 198).

1. Sezioni

1.1. Sezione è la rappresentazione di una delle parti in cui viene diviso l'oggetto da un taglio ideale eseguito secondo uno o più piani.

In casi particolari può rappresentare solo la figura situata nel piano secante (vedere punto 1.10.).

1.2. Le sezioni possono essere fatte:

- secondo un solo piano (vedere figure 1, 2 e 3);
- secondo due o più piani consecutivi (vedere figure 4, 5 e 6);
- secondo superficie cilindriche di direttrice assegnata, qualora la forma del pezzo lo richieda.

1.3. Nel disporre le sezioni rispetto all'oggetto si seguono gli stessi criteri indicati per le proiezioni ortogonali (vedere UNI 3970, 2ª Ed.).

1.4. I piani di sezione devono essere individuati mediante la loro traccia sul disegno eseguita con linea mista fine e grossa (tipo F UNI 3968, 2ª Ed.), contraddistinta ai due estremi con lettere maiuscole uguali e con frecce orientate nel senso di proiezione (vedere figure da 1 a 4).

Qualora la sezione sia ottenuta secondo due o più piani consecutivi anche le intersezioni delle tracce devono essere rappresentate con tratto ingrossato (vedere figure 4, 5 e 6).

Se necessario, per maggiore chiarezza, si possono contrassegnare i vari punti della traccia con lettere maiuscole (vedere fig. 6), eventualmente diverse e progressive.

1.5. La rappresentazione deve essere contrassegnata con la scritta «Sez.» con riportate le lettere maiuscole degli estremi della traccia separate da un trattino (vedere figure da 1 a 6).

1.6. Le zone sezionate devono essere tratteggiate mediante linee continue fini (tipo B UNI 3968, 2ª Ed.) parallele, appartenenti al gruppo di linee scelte per l'esecuzione del disegno e formanti di regola con l'asse principale del pezzo o con le linee di contorno un angolo di 45° (in casi eccezionali compreso tra 30° e 60°), come ad esempio indicato nelle figure da 4 a 6.

I tratteggi di parti contigue appartenenti a pezzi diversi devono avere differente inclinazione od intervallo. I tratteggi delle parti dello stesso pezzo devono avere la

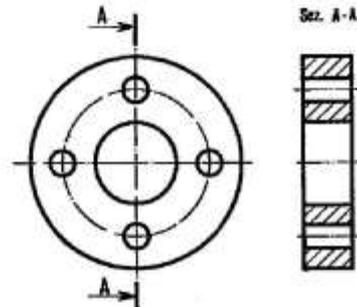


Fig. 1

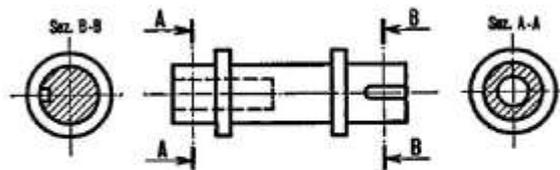


Fig. 2

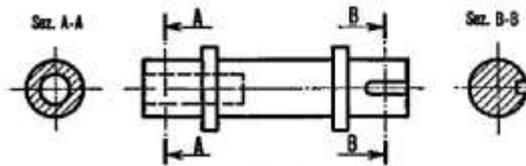


Fig. 3

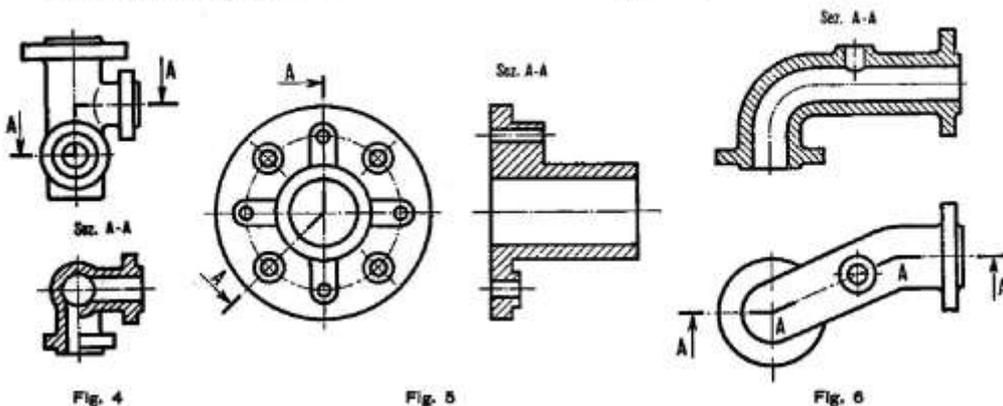


Fig. 4

Fig. 5

Fig. 6

(segue)

----- SCHEDA TECNICA -----

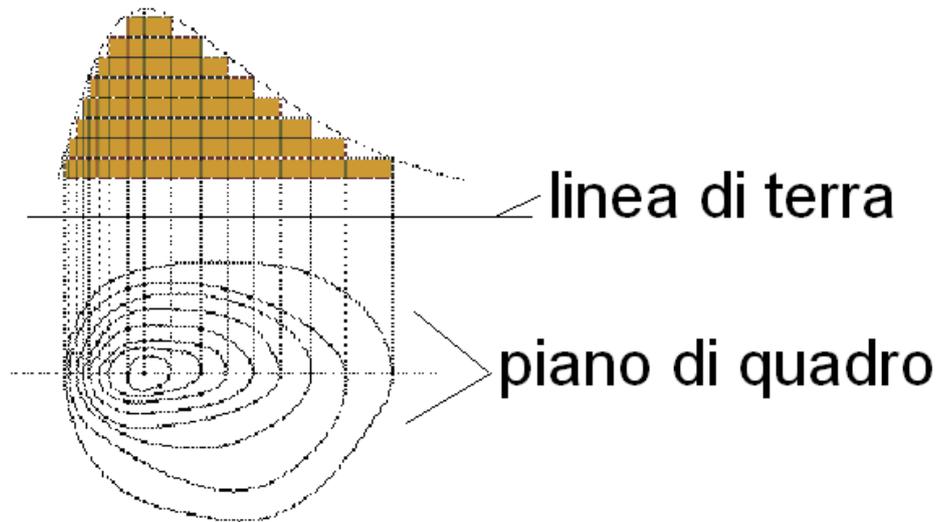
Il metodo delle proiezioni quotate

Le *proiezioni quotate* sono strettamente connesse alle proiezioni ortogonali e sono impiegate essenzialmente in topografia e in cartografia: hanno una limitata importanza nel campo del disegno meccanico.

La norma UNI n. 3975 del 28 febbraio 1989 indica, fra le altre, alcune regole riguardo all'apposizione di quote numeriche su planimetrie.

Nel corso del XVIII secolo furono preparate carte topografiche contenenti le *curve di livello*, linee che congiungevano punti aventi la stessa quota rispetto al livello del mare. Le odierne carte geografiche contenute negli atlanti fanno largo uso delle curve di livello.

Il metodo usa una serie di piani paralleli e orizzontali che sezionano un'entità, come spiega la seguente figura ricavata dal sito di Wikipedia:



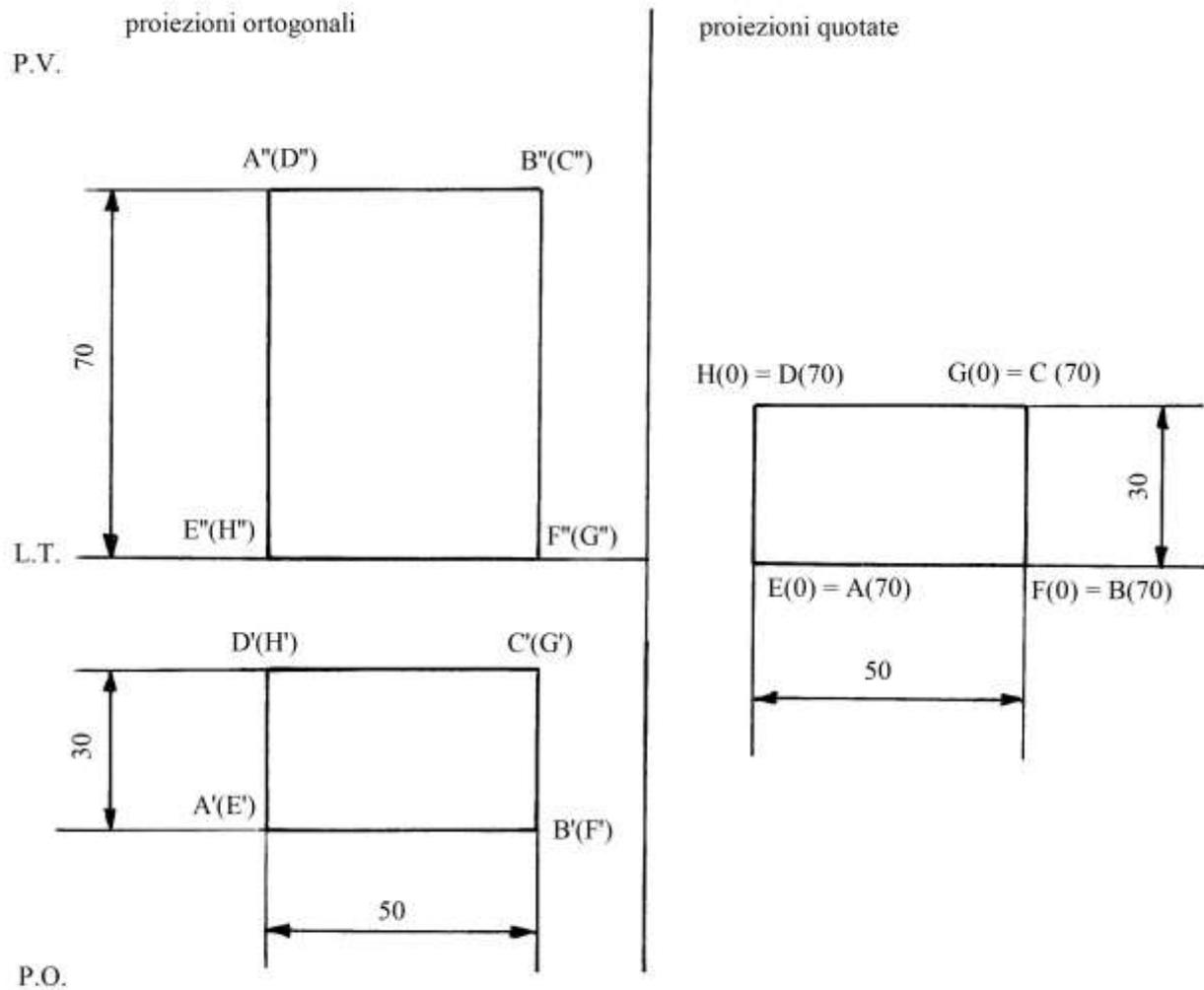
Le sezioni prodotte dai piani sono proiettate su un piano di riferimento, ad essi parallelo, chiamato *piano di quadro*. Esso corrisponde al P.O. delle proiezioni ortogonali.

La posizione di un punto è rappresentata in forma mista (invece che esclusivamente geometrica): la sua proiezione sul piano e l'indicazione metrica della sua distanza dal punto stesso.

Per spiegare meglio le limitazioni che il metodo presenta se applicato al disegno tecnico, nella seguente figura mettiamo a confronto le proiezioni ortogonali e la proiezione quotata di un parallelepipedo poggiato sul P.O con la faccia di dimensioni 50x30 e altezza 70.

Le lettere corrispondono in entrambi i tipi di proiezione. Nella proiezione quotata dobbiamo scrivere – fra parentesi tonde – la dimensione verticale in una forma poco leggibile: il punto E, a quota 0, è sottostante al punto A a quota 70 e cioè

$$E(0) \equiv A(70)$$



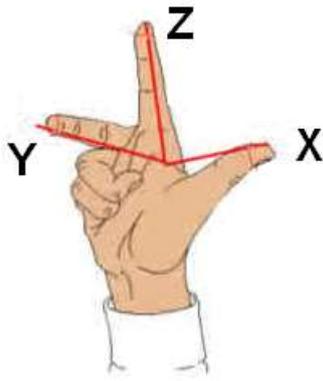
Il piano di proiezione π usato nel metodo delle proiezioni quotate divide lo spazio in due semispazi. Un punto che si trova nel semispazio superiore, *positivo*, ha coordinata metrica positiva, $C(70)$; se il punto si trova nel semispazio sottostante al piano π , semispazio *negativo*, ha coordinata metrica negativa $C(-70)$.

Come si nota da questi esempi, il metodo è poco pratico nel campo del disegno tecnico. Torniamo di corsa a impiegare nel disegno meccanico le proiezioni ortogonali, se necessario accompagnate da un'assonometria del solido o del pezzo meccanico.

La regola o convenzione della mano destra

Nelle precedenti figure 2.81 e 2.82 sono indicati tre assi, X, Y e Z.

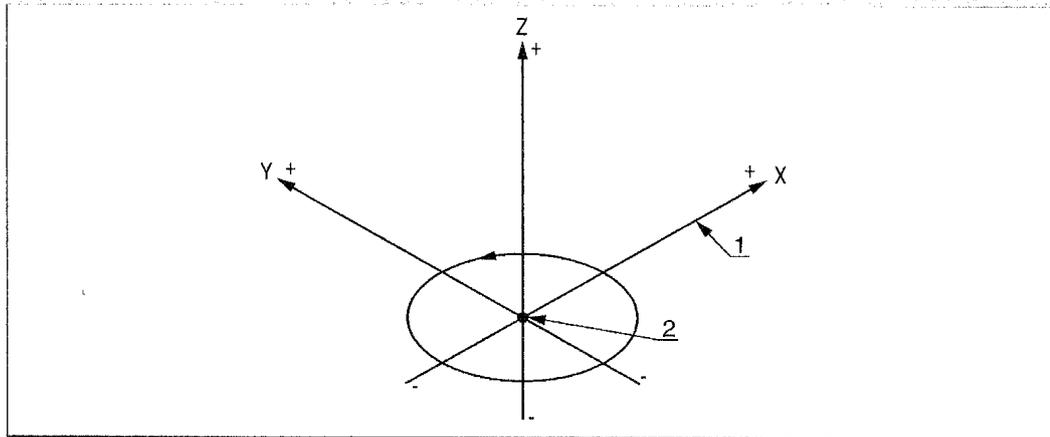
La già citata norma UNI EN ISO 5456-1 stabilisce che l'orientamento geometrico nello spazio è dato da assi e piani coordinati che seguono la regola della mano destra:



La figura che segue è ricavata dalla norma UNI EN ISO appena citata:

Legenda

- 1 Asse delle coordinate X
- 2 Origine



Come indicato in figura, il senso di rotazione positivo è *antiorario*.

APPENDICE n. 1

Il contributo di Harold Belofsky

Harold Belofsky è un ingegnere e professore di tecnologia meccanica presso l'Università di Akron, in Ohio (negli USA).

È autore di numerosi testi e articoli sulla tecnologia delle materie plastiche.

Questo paragrafo è dedicato a una sintetica descrizione del contenuto del suo importante studio sul disegno tecnico, citato in bibliografia [12]. Sono aggiunte alcune considerazioni dell'autore di questo articolo.

Già dal titolo "*Engineering Drawing – a Universal Language in Two Dialects*", l'Autore evidenzia l'esistenza e l'impiego di due diversi *dialetti* del disegno tecnico: quello basato sull'uso delle proiezioni nel *primo diedro* (*first angle* in inglese e in americano) e quello fondato sul *terzo diedro* (*third angle*).

Il disegno tecnico rende manifesto il pensiero sperimentali di progettisti, tecnici e artigiani che non può essere espresso con sole parole: esso non rappresenta letteratura e neanche scienza, ma soltanto tecnologia fondata sulla meccanica applicata e sulla geometria descrittiva.

Il disegno tecnico impiegato in ingegneria meccanica e civile per progettare macchine e strutture portanti ha necessità di più viste, al contrario del disegno architettonico che talvolta si limita alla sola *vista in pianta*.

Almeno negli Stati Uniti, le domande di rilascio di brevetti devono essere accompagnate da disegni non in *multivista* (cioè con più proiezioni) ma da disegni eseguiti in assonometria, con schemi di montaggio e di smontaggio. Maggiori informazioni sui brevetti americani sono consultabili tramite un apposito servizio di Google all'indirizzo https://books.google.com/advanced_patent_search, sito dal quale sono ricercabili i brevetti, scaricabili in formato PDF.

In generale, il numero minimo di viste richiesto dalle proiezioni ortogonali di un oggetto è *tre* o *quattro*: la vista dall'alto (sul P.O.), quella frontale (sul P.V.) e una o due viste laterali (da destra e da sinistra).

Nel caso di pezzi meccanici complessi sono impiegate viste ausiliarie su piani che formano un angolo non retto rispetto a uno dei piani principali e sono usate anche sezioni supplementari per evidenziare i dettagli nascosti.

Le varie viste sono prese da punti immaginari collocati all'infinito o a volo d'uccello, ma sempre all'infinito.

Dato che il disegno tecnico è stato concepito per scopi speciali da artigiani, tecnici e ingegneri si potrebbe pensare che esso abbia regole uguali in tutto il mondo, ma non è così per le ragioni che Belofsky descrive con grande chiarezza.

Le basi del disegno tecnico fanno capo a un ramo della matematica che è chiamata *geometria descrittiva*: la sua creazione è erroneamente attribuita al francese Gaspard Monge il quale non fece altro che raccogliere le idee emerse dal lavoro degli artisti ingegneri del Rinascimento, in gran parte Italiani o influenzati dalla cultura italiana, quale ad esempio è stato Albrecht Dürer.

Ulteriori apporti al disegno tecnico sono venuti dalla *geometria pratica* che insegna a realizzare le più semplici e basilari costruzioni geometriche: bisettrice di un angolo, costruzione dell'angolo retto, tracciatura di poligoni regolari inscritti e non inscritti, ingrandimenti e riduzioni di figure piane, trasformazioni di poligoni in altri di uguale area, costruzioni approssimate di poligoni regolari e di curve e via di seguito.

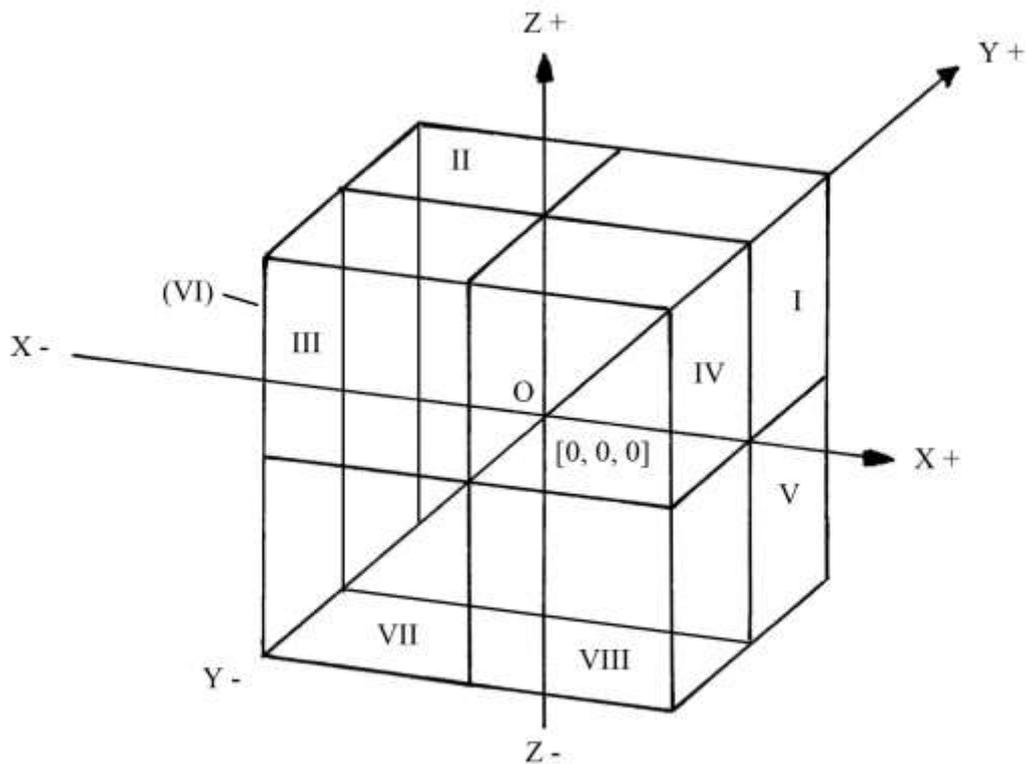
La stretta parentela fra la meccanica applicata e la geometria ha recato ulteriori contributi al disegno tecnico.

Belofsky rileva poi le difficoltà che devono affrontare le multinazionali, piccole o grandi che siano, a dover operare in mercati caratterizzati dall'uso di *uno* dei due dialetti del disegno tecnico.

Il metodo del terzo diedro è accettato in Gran Bretagna e in alcuni degli Stati un tempo soggetti al dominio inglese.

L'origine dell'uso del *primo quadrante* (rivedere figura a p. 13) viene fatta risalire a Cartesio (René Descartes, 1596-1650) che formalizzò la *geometria analitica*: da quel momento i matematici e i fisici usarono solo il primo quadrante per rappresentare i cambiamenti delle grandezze da essi studiate.

Se un disegno tecnico di un pezzo meccanico richiedeva solo una vista, veniva usato solo il *triedro* definito dai tre assi X, Y e Z nella regione nella quale sono tutti positivi, ciò che corrisponde al primo diedro (riproduciamo lo schema di pagina 90):



Il primo triedro nello spazio corrisponde al primo quadrante del piano cartesiano:

L'uso consolidato del primo quadrante e, nello spazio, del primo diedro nello spazio portò Monge a usare questo ultimo per le proiezioni ortogonali.

Da secoli, forse da millenni, gli artigiani della pietra usavano tecniche grafiche che in qualche modo si rifacevano al metodo del terzo diedro: essi tracciavano sulla pietra delle incisioni che definivano il materiale da asportare. Qualcosa di simile hanno sempre fatto i falegnami: anche essi tracciavano le linee da seguire per asportare il materiale in eccedenza. Analoghe considerazioni possono essere avanzate nei confronti di altre categorie di artigiani: fabbri, sarti, pellettieri, orafi. Tutti questi artigiani disegnavano una vista dall'alto o una vista di fianco.

Piero della Francesca, Jacopo Mariano (Il Taccola), Leonardo da Vinci e Albrecht Dürer conoscevano le proiezioni ortogonali e usavano sia il primo che il terzo diedro.

Il trattato di geometria descrittiva di Monge non contiene alcun disegno di macchine o di meccanismi.

A causa dell'influenza francese, il metodo del primo diedro, con *due* sole viste (sul Piano Verticale e sul Piano Orizzontale), si diffuse nelle Università tedesche a partire dal 1830 e poi nell'Europa centrale e orientale (forse con l'eccezione della Gran Bretagna), prima che il metodo

fosse applicato all'ingegneria e quindi rimanendo confinato negli ambiti accademici. Soltanto nel 1851 il testo di Monge fu tradotto in inglese: in Gran Bretagna il metodo di Monge fu ritenuto pura teoria, inutilizzabile nel disegno industriale.

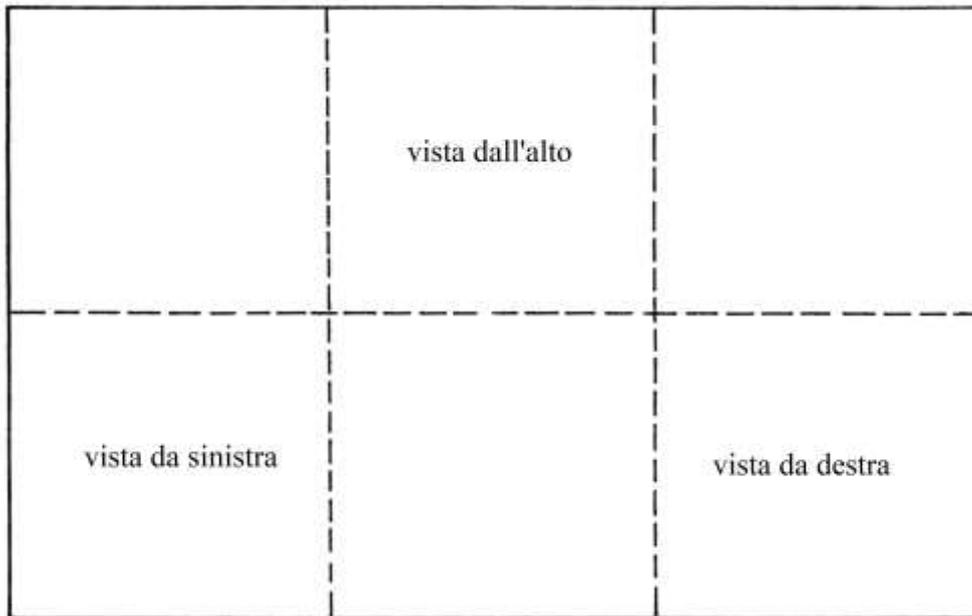
In Gran Bretagna i primi disegni tecnici della fine del Settecento e del primo Ottocento rappresentavano con una o due viste l'assemblaggio di grandi impianti, quali i mulini idraulici per i cereali e i motori a vapore: essi erano realizzati in scala 1:12 e cioè 1 pollice sul disegno stava per 1 piede nella realtà. Valeva la seguente equivalenza: 1 piede = 12 pollici.

I disegnatori del primo Ottocento realizzarono eleganti e colorati disegni di macchine, veri capolavori artistici, in grado di impressionare eventuali finanziatori o per essere utilizzati nella pubblicità

Per realizzare un progetto un inventore dell'Ottocento doveva consegnare all'artigiano (meccanico, fabbro, falegname) un suo modello di legno in scala: l'artigiano avrebbe provveduto a misurare le dimensioni sul modello con l'aiuto di squadre, righe e compassi, per poter disegnare una o più viste dell'oggetto da costruire. Gli artigiani esperti erano in grado di colmare le lacune contenute nelle informazioni fornite loro dagli inventori.

Negli Stati Uniti gli artigiani non avevano studiato la teorica *geometria descrittiva* ma si avvalevano del disegno seguendo una metodologia dettata dall'esperienza, metodo noto con l'espressione *shop method of projection* e cioè "proiezione del negozio". Essi disponevano la vista dall'alto del pezzo costruire nella parte superiore di un foglio di carta, la vista da destra a destra e la vista da sinistra a sinistra. Le disposizioni delle tre viste sul foglio potevano essere quelle mostrate nelle due figure che seguono:





Entrambe queste disposizioni, e in particolare la seconda, sono il germe del metodo del terzo diedro.

Il metodo *shop method of projection* fu poi chiamato *metodo americano*.

Agli artigiani americani non poteva giungere alcun aiuto da parte dei primi trattati di disegno scritti da accademici imbevuti della sola teoria e ben lontani dagli interessi dei pratici. Infatti i primi testi pubblicati per gran parte dell'Ottocento descrivevano le regole teoriche della *geometria descrittiva* e si dilungavano in minuziose descrizioni degli strumenti da disegno e del loro modo di usarli, quasi che i destinatari di quei testi non avessero mai usato e fatta la punta a una matita.

Grosso modo a partire dal 1895, negli Stati Uniti comparvero i primi manuali di disegno che, abbandonando in parte la teoria, passarono a utilizzare il metodo del terzo diedro nelle proiezioni di solidi geometrici, di pezzi meccanici e di edifici.

Nel suo articolo Belofsky non affronta il tema della possibile filiazione del metodo del terzo diedro dalle regole della prospettiva prima e delle assonometrie poi. Tutti e tre i metodi chiedono di disegnare su di un piano interposto fra l'osservatore e l'oggetto da rappresentare.

Gli artigiani che nel corso dell'Ottocento misero a punto lo *shop method of projection* erano in gran parte emigrati o discendenti di emigrati provenienti dall'Europa: essi avranno portato con sé le competenze acquisite nei Paesi di origine e fra di essi la capacità di disegnare in qualche forma intuitiva di prospettiva o di proiezioni ortogonali.

%%%%%%%%%

Il metodo americano si avvicina a quello della prospettiva.

Infatti in un disegno in prospettiva, *generalmente*, il piano prospettico sul quale si disegna è interposto fra il punto di vista e l'oggetto da rappresentare ed è *trasparente*.

La tecnica del disegno a ricalco di una figura complessa con l'aiuto di un vetro da finestra è un'applicazione del "vetro" usato da Alberti, Leonardo da Vinci e Dürer ed è abbastanza collegata al metodo americano: chi da studente non ha così copiato una figura o una cartina usando il vetro di una finestra o un foglio di carta lucida?

Oltre che negli Stati Uniti, il metodo americano è largamente usato in altri Stati extraeuropei (quali il Canada, l'Australia e la Nuova Zelanda) e in particolare in Asia (Taiwan, Filippine, Giappone, Thailandia e Bangladesh).

L'introduzione del metodo negli Stati Uniti è dovuta all'insegnamento inizialmente impartito ai disegnatori e ai tecnici meccanici e delle costruzioni.

Nel corso della prima guerra mondiale (1914 – 1918) i disegnatori e gli ingegneri americani adottarono in massa il metodo del *terzo diedro*.

I disegnatori e gli ingegneri europei usarono sempre il metodo del *primo diedro*.

Nel secondo dopoguerra (dopo il 1945), le norme ISO accolsero fra i metodi di proiezione quello del terzo diedro e la decisione si riverberò sulle norme degli enti nazionali quali l'UNI: la seconda edizione della norma UNI 3970 dell'ottobre 1961 segnalava la raccomandazione ISO/R 128 tendente a inserire pure il sistema di proiezione americano:

La presente utilizzazione concorda con i risultati dei lavori svolti dal Comitato Tecnico 10 "Standardi" della Organizzazione Internazionale di Normalizzazione ISO (Raccomandazione ISO/R 128 1).

1. Denominazione delle viste

La denominazione della vista nella proiezione ortogonale è la seguente (vedere figura 1):

- Vista secondo A = vista anteriore (vista principale);
- Vista secondo B = vista dall'alto;
- Vista secondo C = vista da sinistra;
- Vista secondo D = vista da destra;
- Vista secondo E = vista dal basso;
- Vista secondo F = vista posteriore.

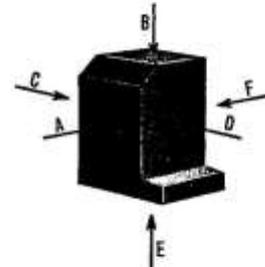


Fig. 1 - Oggetto da rappresentare

2. Disposizione delle viste

2.1. Le varie viste si dispongono come indicato nella figura 2. È opportuno che la vista anteriore rappresenti l'oggetto nella posizione normale di utilizzazione. Nel caso di oggetti per i quali non esiste una determinata posizione di utilizzazione è da preferirsi la rappresentazione secondo la posizione di esecuzione. Comunque la vista principale deve essere quella che rappresenta l'oggetto nel modo più espressivo e che permette la disposizione più vantaggiosa delle altre viste.

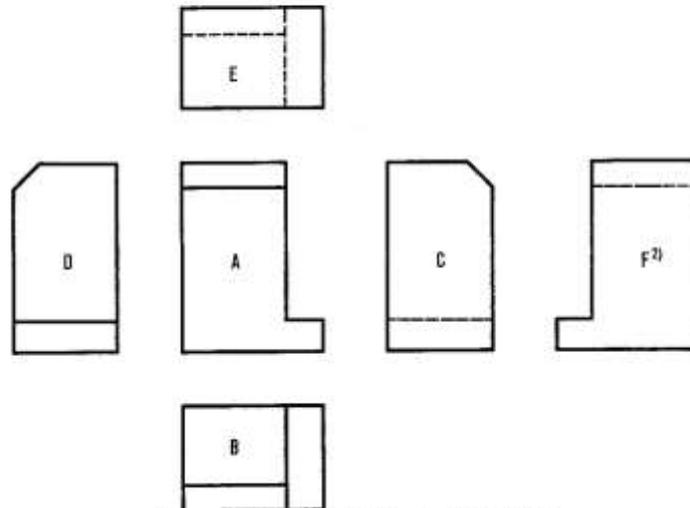


Fig. 2 - Oggetto rappresentato in proiezione ortogonale

2.2. Il simbolo distintivo indicante la disposizione delle viste conforme a quella della figura 2, sistema E (europeo)¹⁾, è quello della figura 3.

Tale simbolo deve essere chiaramente riportato nel riquadro delle iscrizioni a fianco della scala particolarmente per disegni destinati a scambi internazionali.

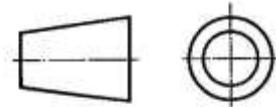
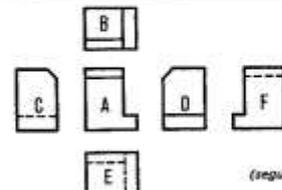
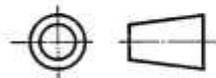


Fig. 3

1) Nella Raccomandazione ISO/R 628 è compreso anche un sistema A, usato in America ed in altri Paesi, che nei disegni è indicato con il simbolo della figura 4 (non riportata) inserito nel riquadro delle iscrizioni. Secondo questo sistema le proiezioni sono disposte come indicato nella figura 4 (non).

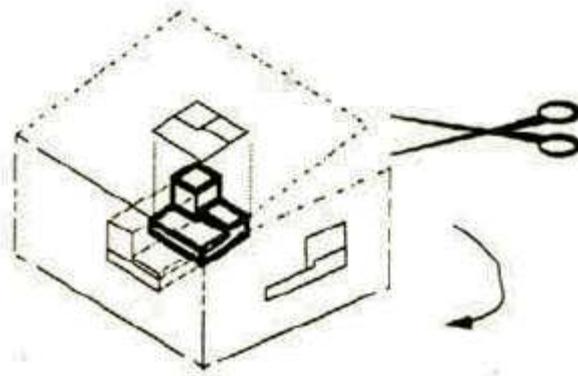


(segue)

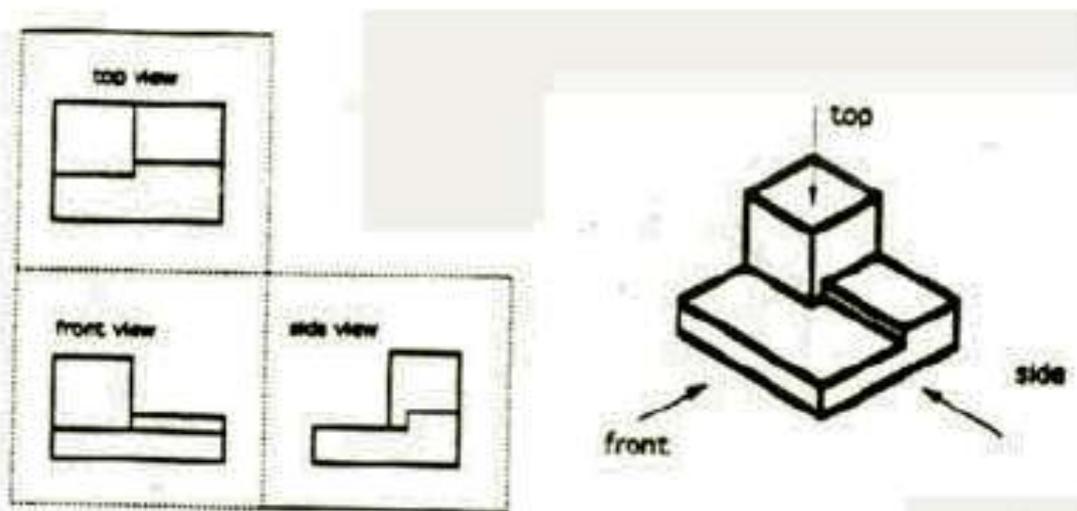
2) La vista F può essere disposta indifferentemente a destra della C ovvero a sinistra della D.

Fa testo sempre l'ultima edizione della norma

Le necessità militari favorirono una grande diffusione del metodo del terzo diedro nel corso della Prima guerra mondiale (1914-1918) ed esso fu accettato negli Stati Uniti come standard nel 1935, usando la metafora del pezzo meccanico collocato all'interno di un parallelepipedo di vetro. Questo viene aperto come spiegato nello schema seguente (tratto da un documento di 16 pagine, *drawings.pdf*, dal titolo "Engineering Drawings" reperito in Internet, e datato 7-7-2003):



Il risultato del ribaltamento di due pareti del parallelepipedo è mostrato nella seguente figura (tratta dal documento citato in precedenza):



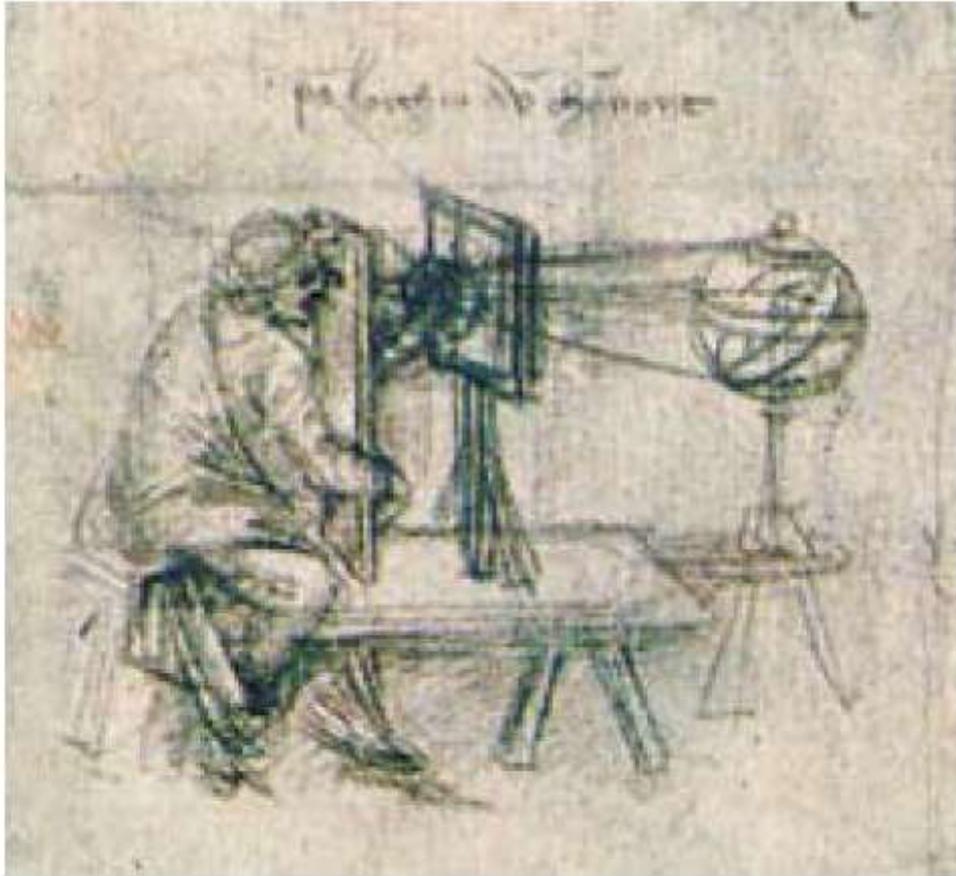
Questo stato di fatto ha sempre creato difficoltà nei rapporti tecnici ed economici fra gli Stati Uniti e il Canada da una parte e gli Stati europei dall'altra: in particolare, durante la seconda guerra mondiale (1939 – 1945) gli stretti legami culturali, militari e industriali fra gli Stati Uniti e la Gran Bretagna imposero alle industrie di questa ultima di impiegare il metodo del terzo diedro.

Alcuni programmi CAD permettono la scelta fra i due metodi di rappresentazione.

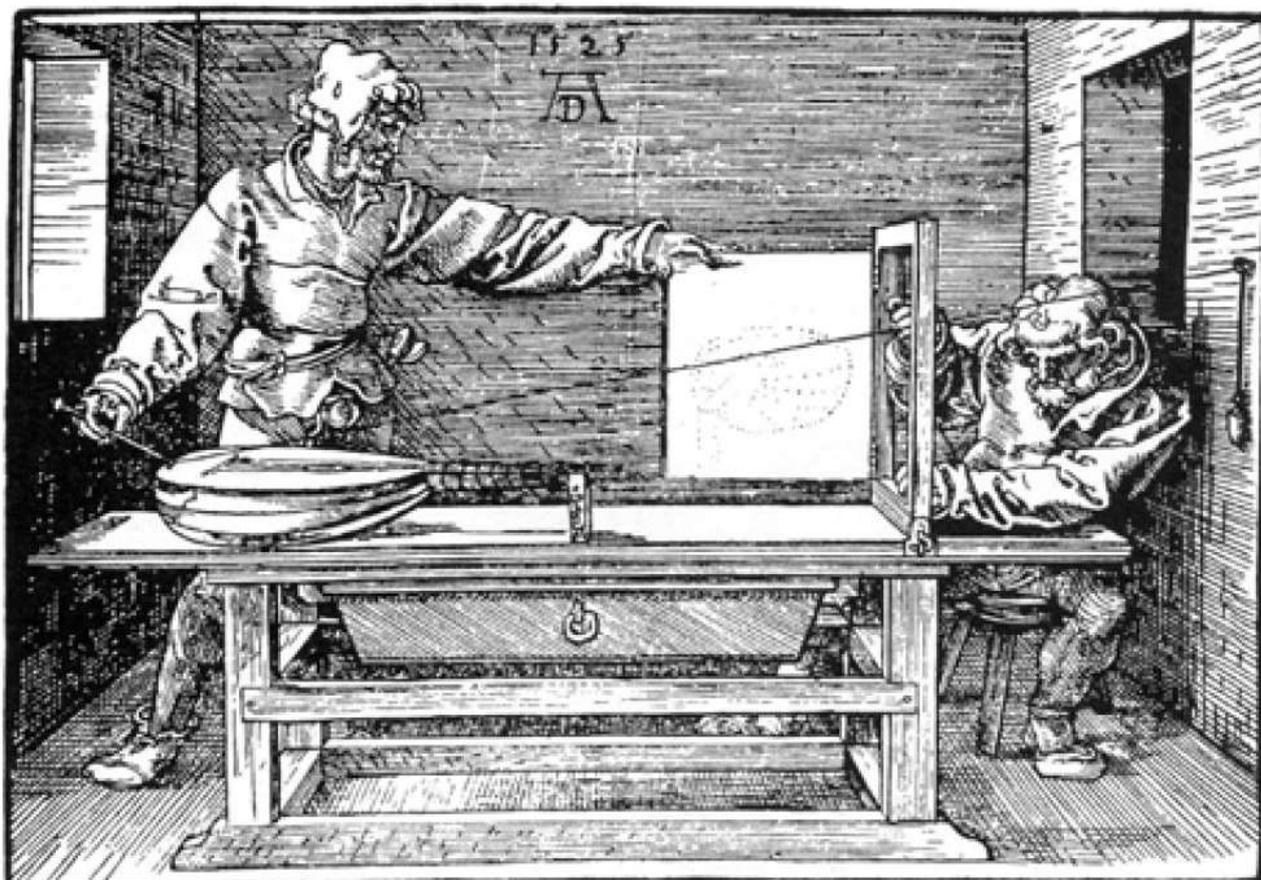
Dalla prospettiva al metodo del terzo diedro

Leon Battista Alberti suggerì l'uso di un *velo* fatto di un'armatura di sottili fili da interporre verticalmente fra l'oggetto o l'ambiente da ritrarre e il disegnatore.

Leonardo da Vinci descrisse una macchina prospettica con da un *vetro* verticale interposto fra l'occhio dell'osservatore e la *cosa* da rappresentare:



Albrecht Dürer seguì lo stesso metodo di Alberti e di Leonardo nella rappresentazione in prospettiva di un *liuto*:



In un'assonometria si immagina di disegnare su di un piano *trasparente* posizionato fra l'osservatore e l'oggetto e colpito da raggi paralleli provenienti da punti all'infinito che raggiungono il piano perpendicolarmente (assonometria isometrica, dimetrica o trimetrica) o obliquamente (assonometria cabinet, cavaliera, ombre o clinografica).

Il metodo del terzo diedro utilizza sei piani che formano le pareti di materiale *trasparente* di un cubo o di un parallelepipedo: ciascuna delle sei pareti è interposta fra l'osservatore e l'oggetto da rappresentare che è contenuto all'interno del solido.

È evidente come il metodo delle proiezioni del terzo triedro sia la naturale evoluzione dei metodi della prospettiva e delle assonometrie: allora, perché non preferirlo al metodo del primo triedro?

Bibliografia – testi tecnici e storici

1. “Enciclopedia delle matematiche elementari e complementi”, Milano, Hoepli, ristampa 1964, volume II, parte 2^a, voci “Geometria proiettiva” e “Geometria descrittiva ed applicazioni”.
2. “Enciclopedia delle matematiche elementari e complementi”, Milano, Hoepli, ristampa 1967, volume III, parte 1^a, voce “Cristallografia e fisica cristallografica”.
3. AA.VV. “Leonardo da Vinci”. Il disegno artistico e il disegno tecnico nel Rinascimento italiano, edizione bilingue italiana e bulgara, Firenze, Edizioni Polistampa, 2006, pp. 141.
4. “Piero della Francesca”. Il disegno tra arte e scienza, a cura di Filippo Camerota, Francesco Paolo Di Teodoro e Luigi Grasselli, Milano, Skira, 2015, pp. 430.
5. Ascani Valerio, “Il Trecento disegnato”: Le basi progettuali dell’architettura gotica in Italia, Roma, Viella, 1997, pp. 178 con tavv. f.t.
6. Asimov Isaac, “Il libro di fisica”, trad. it., Milano, Mondadori, 1986, pp. VIII-575 (7.ma edizione negli “Oscar bestsellers”, Mondadori, 1996).
7. “Le macchine di Leonardo”, a cura di Mario Taddei e Edoardo Zanon, testi di Domenico Laurenza, Firenze-Prato, Giunti, 2005, pp. 240
8. “Nel segno di Masaccio”. L’invenzione della prospettiva, a cura di Filippo Camerota, Giunti, Firenze e Istituto e Museo di Storia della Scienza, Firenze, 2001, pp. XL-311.
9. Baldassini Luigi, “Vademecum per disegnatori e tecnici”, 19^a edizione, Milano, Hoepli, 2002, pp. XX-1080.
10. Bartolini Bussi Maria G. – Maschietto Michela, “Macchine matematiche: dalla storia alla scuola”, Milano, Springer, 2006, pp. XVIII-160, con CD allegato.
11. Baynes Ken – Pugh Francis, “The Art of the Engineer”, New York, The Overlook Press, 1981, pp. 240.
12. Belofsky Harold, “Engineering Drawing – a Universal Language in Two Dialects”, “Technology and Culture”, Vol. 32, No. 1 (Jan., 1991), pp. 23-46.
13. Benevenuto Edoardo, “La scienza delle costruzioni e il suo sviluppo storico”, nuova edizione, Roma, Edizioni di Storia e Letteratura, 2006, pp. xviii-XIV-914.
14. Bertoline Gary R. – Wiebe Eric N. – Miller Craig L., “Fondamenti di comunicazione grafica”, trad. it., Milano, McGraw-Hill, 2004, pp. XII-651 [testo di origine americana, molto interessante per capire la struttura dell’insegnamento del disegno tecnico negli Stati Uniti].
15. Bonfigli C. – Braggio C. R., “Geometria descrittiva e prospettiva”, 5.a edizione aggiornata, Milano, Hoepli, 1987-2003, pp. XIV- 229.
16. Booker Peter Jeffrey, “A History of Engineering Drawing”, Londra, Northgate Publishing Co., 2^a ed., 1979, pp. xvi+239.
17. Boraso Stefano, “Il linguaggio grafico nel disegno industriale”, Roma, Armando editore, 2004, pp. 187.
18. Borgherini Malvina, “Disegno e progetto nel cantiere medievale”. Esempi toscani del XIV secolo, Venezia, Marsilio, 2001, pp. 190.
19. Caligaris Luigi et alii, “Manuale di Meccanica”, Milano, Hoepli, 2006, pp. (VIII) – 2033 + 38.
20. Calzolani Sergio, “Disegno Tecnico e Meccanico. Materiali per l’Insegnante”, Brescia, Editrice La Scuola, 2007, pp. 156.
21. Camerota Filippo, “La prospettiva del Rinascimento. Arte, architettura, scienza, Milano, Mondadori Electa, 2006, pp. 367.
22. Cándito Cristina, “Le proiezioni assonometriche”. Dalla prospettiva isometrica all’individuazione dei fondamenti del disegno assonometrico, Alinea Editrice, Firenze, 2003, pp. 83.

23. Capra Fritjof, "La scienza universale. Arte e natura nel genio di Leonardo", trad. it., Milano, Rizzoli, 2007, pp. 412.
24. Catastini Laura e Ghione Franco, "Le geometrie della visione", Milano, Springer, 2004, pp. XII-161, con CD allegato.
25. Chiovelli Renzo, "Tecniche costruttive murarie medievali. La Tuscia", Roma, "L'Erma" di Bretschneider, 2007, pp. 496.
26. Crispino Enrica, "Leonardo", "La Biblioteca dell'Arte", Firenze-Milano, Giunti, 2005, pp. 126.
27. Cundy H. M. e Rollett A. P., "I modelli matematici", trad. it., Milano, Feltrinelli, 1974, pp. 292.
28. Deforge Yves, "Le graphisme technique". Son histoire et son enseignement, Champ Vallon, Seyssel (Francia), 1981, pp. 256.
29. Deforge Yves, "Technologie et génétique de l'object industriel", Maloine, Parigi (Francia), 1985, pp. 196.
30. De Rosa Agostino, "La Geometria nell'Immagine". Storia dei metodi di rappresentazione – Dall'Antichità al Medio Evo, Torino, UTET, 2000, pp. XII-230.
31. Dürer Albrecht, "Underweysung der Messung mit dem Zirchel und Richtscheit" (Istruzioni per la misura con il righello e il compasso), 1525, edizione riveduta 1538.
32. Ferguson Eugene S., "Engineering and the Mind's Eye", Cambridge, Massachusetts (USA), The MIT Press, 1992, pp. xvi-241.
33. Field J.V. [Judith Veronica], "Piero della Francesca. A Mathematician's Art", New Haven and London, Yale University Press, 2005, pp. xii-420.
34. Fiore Paolo F., "Città e macchine del '400 nei disegni di Francesco di Giorgio Martini", Firenze, Olschki, 1978, pp. 168 + 95 tavole f.t.
35. Franci Gaetano e Marra Crescentino, "Insegnare il disegno tecnico". Guida didattica con indicazioni pratiche, Novara, Istituto Geografico De Agostini, 1986, pp. 243 [forse, si tratta dell'unica guida didattica pubblicata da autori italiani].
36. Galluzzi Paolo (a cura di), "Gli ingegneri del Rinascimento da Brunelleschi a Leonardo da Vinci", Firenze, Giunti, 1996, pp. 251.
37. Gherzi Italo, "Matematica dilettevole e curiosa", Milano, Hoepli, 1913 – 1988, 5.a ediz., ristampa 2004, pp. VIII-777.
38. Giordano Andrea, "La Geometria nell'Immagine". Storia dei metodi di rappresentazione – Dal secolo dei Lumi all'epoca attuale, Torino, UTET, 2002, pp. VI-326.
39. Istituto e Museo di Storia della Scienza – Firenze, Finmeccanica S.p.a. – Roma, "Gli ingegneri del Rinascimento da Brunelleschi a Leonardo da Vinci", cd rom, Firenze, Giunti Multimedia, 1996.
40. Kemp Martin, "La scienza dell'arte", trad. it., Firenze-Milano, Giunti, 1994-2005, pp. 423.
41. Leonardo da Vinci, "Il Codice Atlantico", Firenze, Giunti – Milano, Il Sole 24ORE Arte e Cultura – Roma, Gruppo editoriale L'Espresso, 2006, 20 volumi.
42. Lisa M. – Taddei M. – Zanon E., "Il laboratorio di Leonardo da Vinci", Milano, L3, 2006, pp. 159, con un cd-rom.
43. Moon Francis C., "The Machines of Leonardo Da Vinci and Franz Reuleaux", Dordrecht (Olanda), Springer, 2007, xxxiv-417.
44. Pedretti Carlo, "Leonardo". Le macchine, Firenze-Milano, Giunti, 1999, pp. 95.
45. Petroski Henry, "The pencil". A history of design and circumstance, New York (USA), Alfred A. Knopf, 2004, pp. xi-434.
46. Petroski Henry, "Gli errori degli ingegneri". Paradigmi di progettazione, trad. it., Bologna, Edizioni Pendragon, 2005, pp. 222.

47. “Picturing machines 1400-1700”, a cura di Wolfgang Lefèvre, The Mit Press, Cambridge, Massachusetts (USA) – Londra (GB), 2004, pp. VI-347.
48. Piero della Francesca, “De prospectiva pingendi”, Edizione critica a cura di G. Nicco-Fasola, Casa editrice Le Lettere, Firenze, 1984 (ristampa 2005), pp. LXX-219 e XLIX tavole fuori testo.
49. Poli Marco (a cura di), “Le acque a Bologna”. Antologia, Editrice Compositori, Bologna, 2005, pp. 259.
50. Prager Frank – Scaglia Gustina, “Brunelleschi”. Studies of His Technology and Inventions, Dover Publications, Mineola-New York, 2004, pp. XIII-152.
51. Ricci Massimo, “Il segreto della cupola di Santa Maria del Fiore”, *Le Scienze*, XX, n. 227, luglio 1987, pp. 42-56.
52. Rossi R., “Il manuale del disegnatore”, 4ª edizione, Milano, Hoepli, pp. XXII-634.
53. Salvemini Francesca, “La visione e il suo doppio”, Roma-Bari, Laterza, 1990, pp. VIII-182.
54. Scolari Massimo, “Il disegno obliquo”. Una storia dell’antiprospectiva, Marsilio, Venezia, 2005, pp. 348.
55. Sgroso Anna, “La Geometria nell’Immagine”. Storia dei metodi di rappresentazione – Rinascimento e Barocco, Torino, UTET, 2001, pp. VI-382.
56. Singer et alii, “Storia della tecnologia”, trad. it., Boringhieri, Torino, 1961-1984, 7 volumi.
57. Starnazzi Carlo, “Leonardo. Codici & macchine”, presentazione di Carlo Pedretti, s.i.l. [ma Campi Bisenzio (FI)], Cartei & Bianchi Editori, 2005, pp. 175.
58. Stroffolino Daniela, “La città misurata”, Roma, Salerno Editrice, 1999, pp. 277.
59. Strollo Rodolfo M., “La normazione e il disegno”, Roma, Aracne, 1994, pp. 103.
60. Taddei Mario, “I robot di Leonardo – da Vinci’s Robots”, edizione bilingue (italiano-inglese), Milano, Leonardo3, 2007, pp. 445.
61. Toker Franklin, “Gothic Architecture by Remote Control: An Illustrated Building Contract of 1340”, in “*Tre Art Bulletin*”, vol. 67, No. 1. (Mar. 1985), pp. 67-95.
62. “The Treatise on Perspective: Published and Unpublished”, a cura di Lyle Massey, Washington (USA), National Gallery of Art, 2003, pp. 376.
63. Uccelli, Arturo, “Storia della tecnica dal Medio Evo ai nostri giorni”, Milano, Hoepli, 1944, pp. 933 e 1 tav f.t.
64. UNI –Ente Nazionale Italiano di Unificazione, “UNI M1. Norme per il disegno tecnico”, Milano, 1973, pp. 217.
65. UNI – Ente Nazionale Italiano di Unificazione, “Norme per il disegno tecnico”, Milano, 2005, 3 volumi di pp. X-1185, X-669, X-602.
66. Vasari, Giorgio, il Giovane, “Raccolto fatto dal Cav:re Giorgio Vasari: di varii instrumenti per misurare con la vista” (a cura di Filippo Camerota), Firenze, Giunti, pp. 425.
67. Zupko Ronald Edward, “Italian Weights and measures from the Middle Ages to the Nineteenth Century”, Philadelphia, American Philosophical Society, 1981, pp. lxxxiv+339.

Testi americani

1. Appletons’ Cyclopædia of technical drawing”, New York, Appleton and Company, 1892, pp. 852.
2. Hedrick, Earle Raymond, Constructive geometry”, New York, Macmillan Company, 1916, pp. 92.
3. Mac Cord Charles William, “Elements of descriptive geometry”, 2.a ed., New York,

- John Wiley & Sons – London, Chapman & Hall, 1914, pp. 268.
4. Schraidt, Ferdinand Friedrich Hans, “Geometrical drawing”, San Francisco, Whitaker and Ray–Wiggin Co., 1915, pp. 152.
 5. Sundara Row T., “Geometrical Exercises in Paper Folding”, s.i.l. (ma Stati Uniti), The Open Court Publishing Co.”, 1901.
 6. Willson Marcius, “Drawing guide. A manual of instruction in industrial drawing”, New York, 1881, pp. 236.

INDICE

* L'origine del disegno tecnico	p. 1
* Che cosa è il rapporto di fuga	p. 7
* La scacchiera	p. 7
* I metodi usati per disegnare su di un piano	p. 10
* I precursori del metodo delle coordinate cartesiane	p. 13
* Le origini della scala	p. 15
* Il progetto di Palazzo Sansedoni	p. 16
* L'inizio dell'anno civile nel Medioevo	p. 17
* Le scale su base duodecimale	p. 26
* Le unità di misura romane lineari e di superficie	p. 28
* Le unità di misura lineari usate a Firenze	p. 29
* Le varie strutture poligonali	p. 31
* La pianta di San Gallo	p. 32
* Le proiezioni ortogonali	p. 35
* Prima di Piero della Francesca	p. 36
* La pergamena di Gherardi	p. 39
* La testa umana secondo Piero della Francesca	p. 40
* La testa umana secondo Albrecht Dürer	p. 43
* Le proiezioni ortogonali secondo Piero della Francesca e Albrecht Dürer	p. 48
* Una severa critica all'opera di Monge	p. 58
* Il personaggio Monge	p. 59
* I manoscritti di Leonardo da Vinci	p. 60
* Le norme UNI e il metodo americano	p. 68
* I due dialetti del disegno tecnico	p. 70
* La glass box	p. 70
* Alcuni modelli del metodo del primo diedro	p. 73
* Alcuni modelli del metodo del terzo diedro	p. 73
* Il confronto fra i due metodi	p. 73
* La rappresentazione degli spigoli nascosti	p. 74
* L'importanza delle linee tratteggiate	p. 76
* Il tiralinee	p. 76
* I simboli dei due metodi di proiezione ISO	p. 77
* Il metodo americano è usato pure in Italia	p. 81
* Le sezioni e il metodo americano	p. 82
* I ribaltamenti e il metodo americano	p. 85
* Diedro e triedro	p. 86
* La rappresentazione ortografica speculare	p. 91
* Il metodo delle frecce	p. 93
* Il metodo delle proiezioni quotate	p. 95
* La regola o convenzione della mano destra	p. 96
* Il contributo di Harold Belofsky	p. 98
* Dalla prospettiva al metodo del terzo diedro	p. 104
* Bibliografia – testi tecnici e storici	p. 107