

Il materiale contenuto in questo documento può essere riprodotto, in tutto o in parte, a scopi *non commerciali*, purché siano citati l'Autore e la fonte.

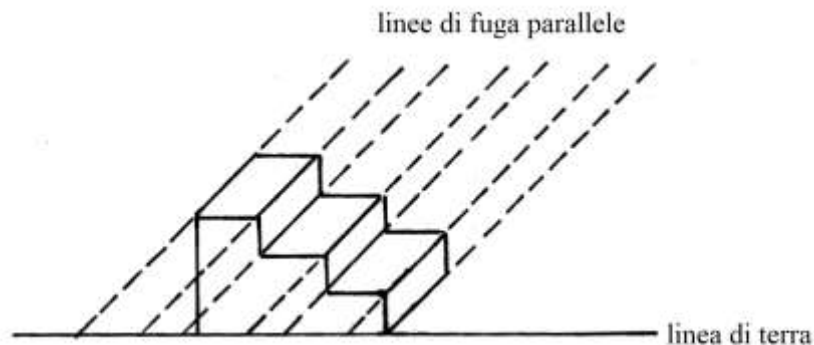
Parole chiave: proiezioni; assonometrie Leonardo da Vinci; Luca Pacioli; Gromatici; Giotto; Giovanni Dondi; Leonardo da Cremona; Roberto Valturio; cavaliere; assonometria cavaliere; assonometrie rinascimentali; Piero della Francesca e l'assonometria isometrica; Oronce Finé; Stefano Buonsignori; assonometria soldatesca; Albrecht Dürer; Cosimo Bartoli; assonometrie Cina e Giappone; assonometrie oblique; assonometrie ortogonali; triangolo delle tracce; William Farish; rombo isometrico; norme UNI ISO sulle assonometrie; metodi pratici per l'assonometria isometrica.

APPUNTI SULLE ASSONOMETRIE

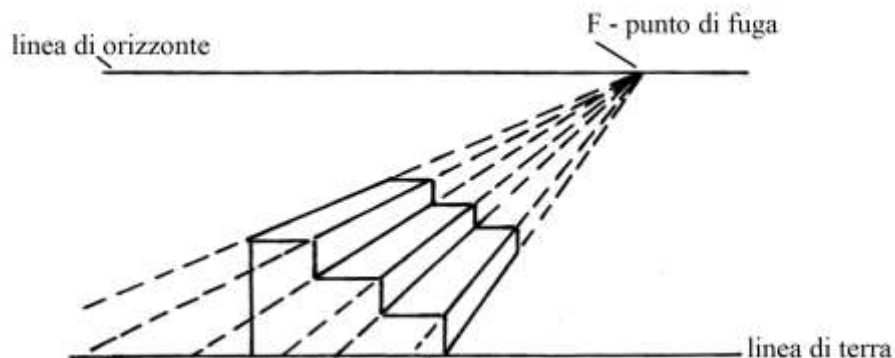
CHE COSA SONO LE ASSONOMETRIE

Assonometria è composta dalle parole greche *axôn*, "asse" e *metron*, "misura": significa misura lungo gli assi.

Il principio fondamentale che caratterizza tutti i metodi assonometrici è il seguente: il punto di fuga, se esiste, si trova posto all'infinito (in geometria si chiama *punto improprio*):



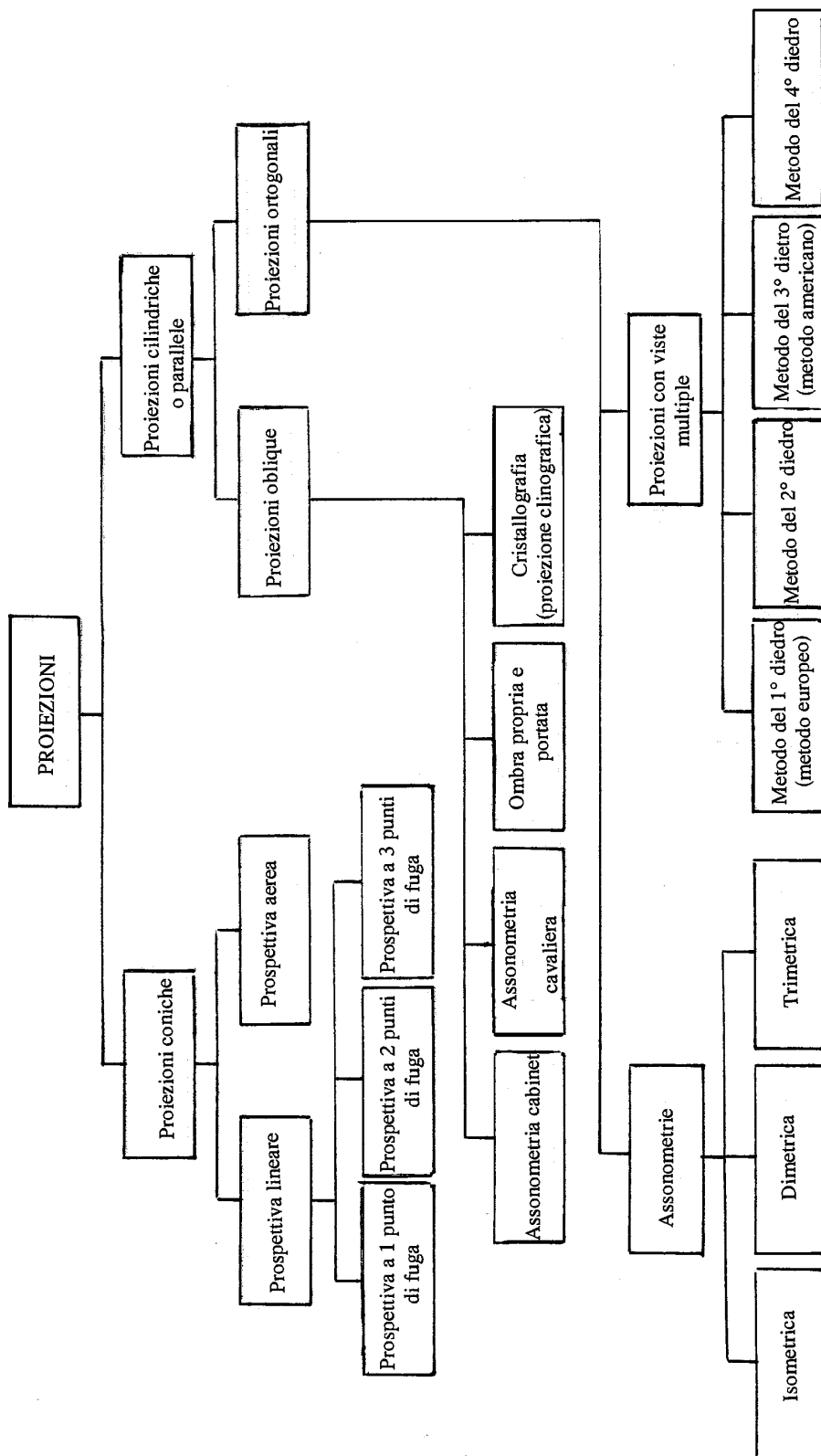
Pertanto, a differenza della prospettiva (vedere la figura che segue), tutte le linee che proiettano i punti dell'oggetto sono fra loro parallele e non convergono più in un punto a distanza finita o ravvicinata.



Da secoli i tecnici europei usavano in modo intuitivo forme di disegno tecnico che potevano avvicinarsi all'assonometria. Risalgono al XII secolo le prime primitive rappresentazioni in forme vicine all'assonometria isometrica.

I primi esempi di impiego di forme di assonometrie *oblique* risalgono al IV secolo a.C. presso i Greci e poi presso i Romani. Questo tipo di assonometrie sembrano essere state le prime ad essere impiegate.

La mappa che segue presenta le relazioni fra i diversi metodi proiettivi:



----- APPROFONDIMENTO -----

Classificazione dei metodi in base alle proiettanti

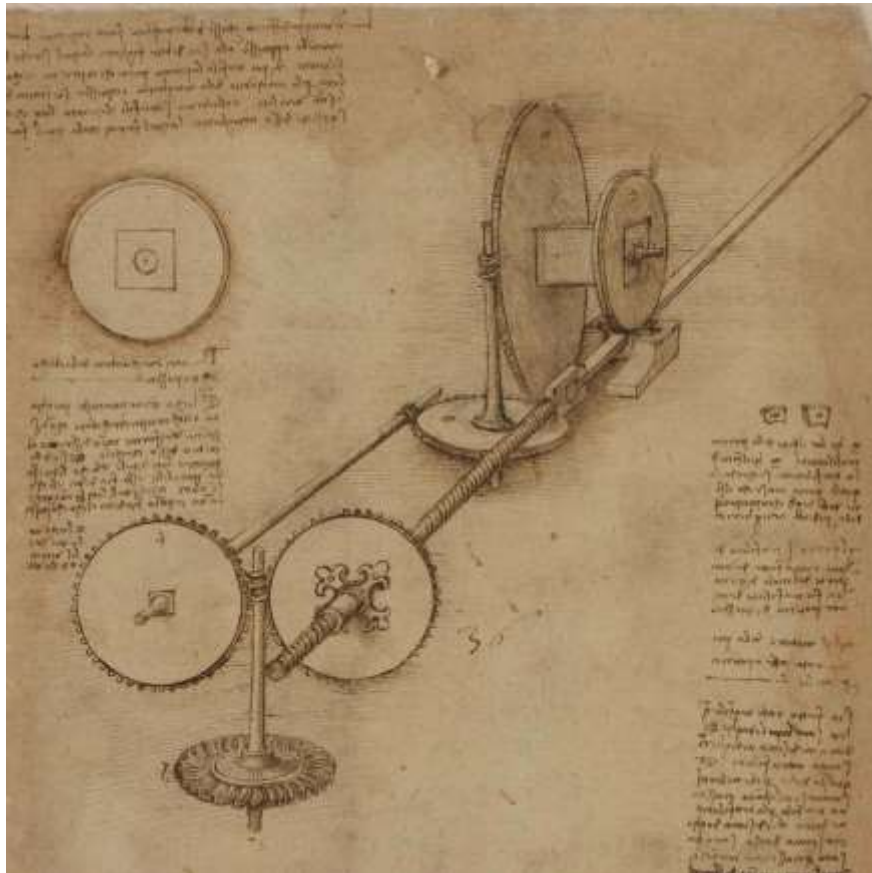
È opportuno riassumere in una tabella le proprietà geometriche delle proiettanti usate nei diversi metodi grafici impiegati nel disegno tecnico:

Classi di proiezioni	Distanza dell'osservatore dal piano di proiezione	Distanza fra le proiettanti
Coniche (prospettiva a 1, 2 o 3 punti di fuga)	Finita	Convergenti verso il centro di proiezione (occhio dell'osservatore)
Cilindriche – oblique (cavaliera)	Infinita	Parallele fra loro e oblique rispetto al piano di proiezione
Cilindriche – ortogonali (assonometrie isometrica – dimetrica – trimetrica)	Infinita	Perpendicolari al piano di proiezione
Cilindriche – viste multiple (proiezioni ortogonali)	Infinita	Perpendicolari al piano di proiezione

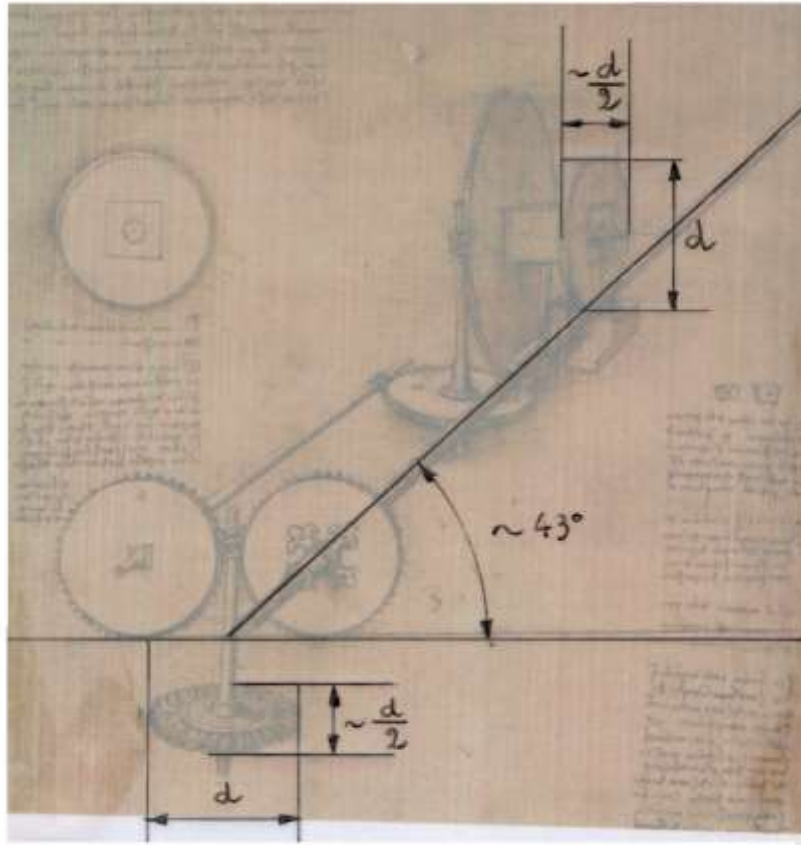
Medioevo e Rinascimento

Giotto (1267-1337) disegnò dall'alto e da destra verso sinistra la superficie di un tavolo da pranzo usando una forma di assonometria cavaliera: si tratta di un particolare della "Morte del cavaliere di Celano", dipinto fra le *Storie di san Francesco*, nella Basilica Superiore di Assisi.

Leonardo da Vinci lasciò lo schizzo di una macchina per trafilare doghe da cannone che pare essere stato in parte disegnato in assonometria cavaliera: il disegno è contenuto nel *Codice Atlantico* (fol. 10 *recto*):



La macchina è disegnata su di un piano verticale parallelo ai due cerchi che rappresentano le ruote dentate accoppiate a una vite senza fine. L'asse obliquo è inclinato di circa 43° rispetto alla linea di orizzonte:



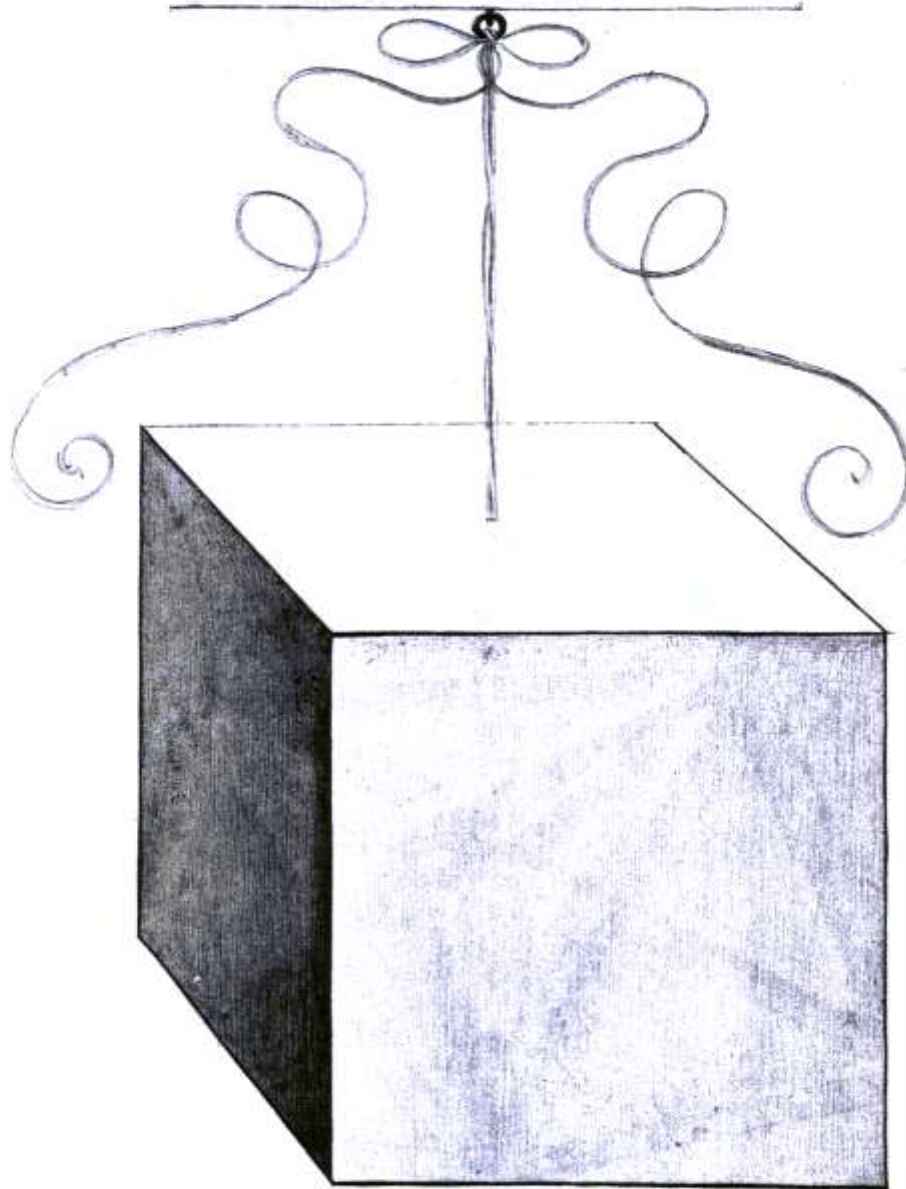
La ruota idraulica in basso è collegata alla vite senza fine ed è disegnata deformata in un'ellisse con gli assi maggiore (d) e minore nel rapporto 2:1.

Anche la ruota dentata in alto a destra è un'ellisse con rapporto fra l'asse maggiore (d) e quello minore in proporzione $\sim 2:1$.

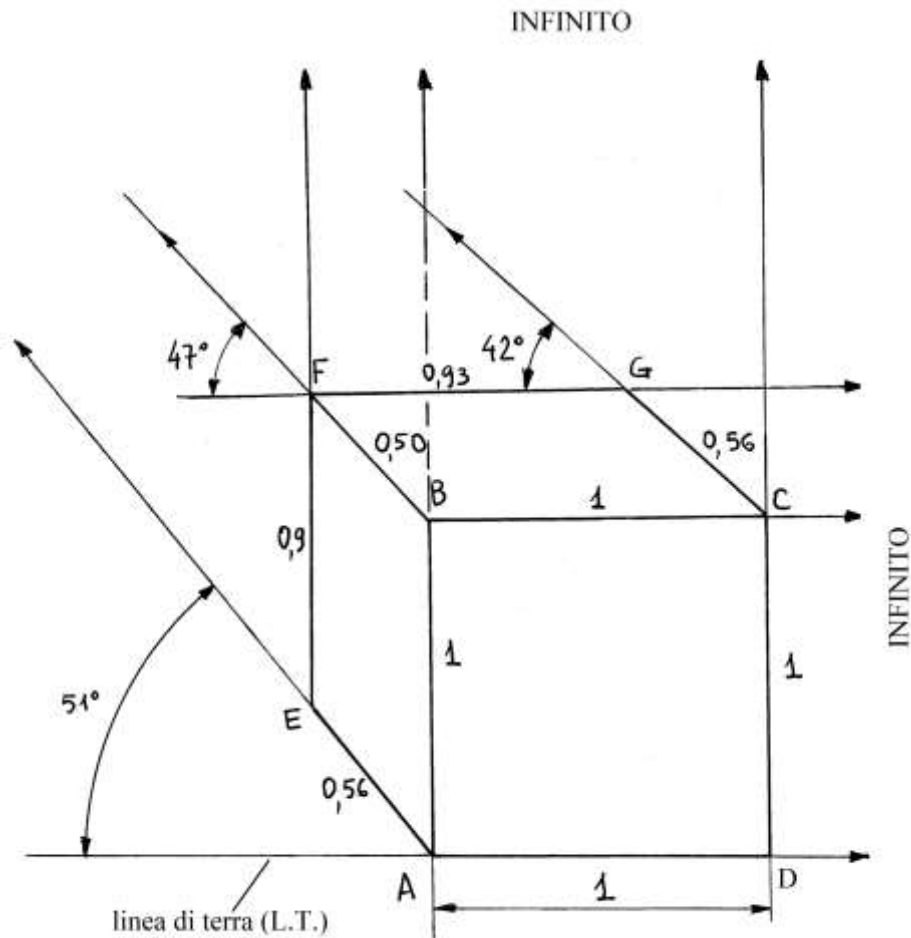
Si può concludere che la macchina sia disegnata in assonometria cavaliera con angolo di fuga di 45° e rapporto di fuga di 0,5.

Alcune tavole disegnate da Leonardo da Vinci per il trattato di Luca Pacioli, “*De divina proportione*”, pubblicato nel 1509, sono disegnate in prospettiva centrale o frontale con il piano di proiezione verticale e parallelo alla faccia verticale anteriore: gli spigoli obliqui tendono verso un punto di fuga a posizionato in alto a sinistra, mentre gli spigoli orizzontali e verticali tendono a due punti di fuga all'*infinito* e sono fra loro paralleli, quasi il metodo fosse una commistione di prospettiva centrale e di assonometria cavaliera. La tavola VII rappresenta un *cubo pieno*:

EXACEDRON PLANVS
SOLIDVS.



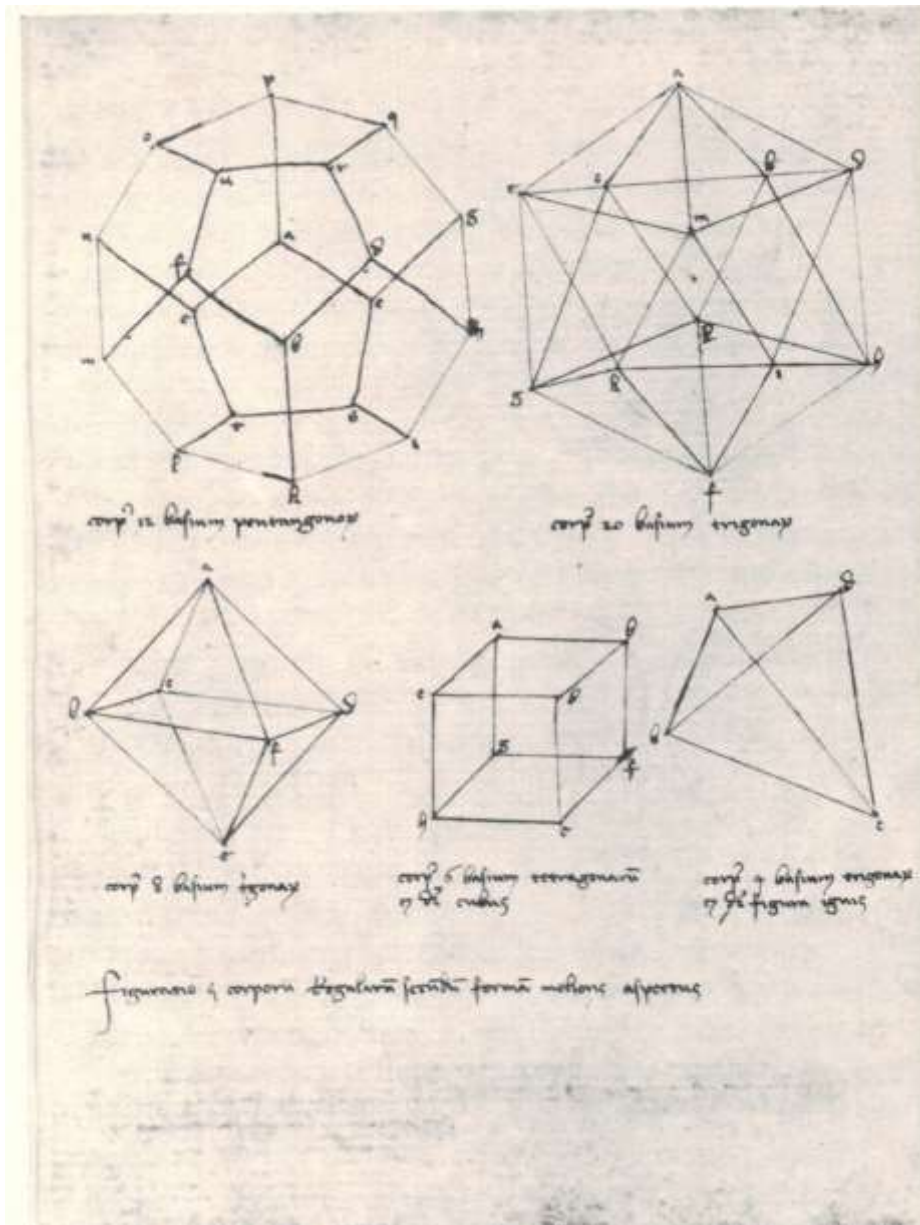
I tre spigoli obliqui sono inclinati rispetto alla *linea di terra* (L.T.) sulla quale giace lo spigolo AD, con angoli compresi fra 42° e 51° .



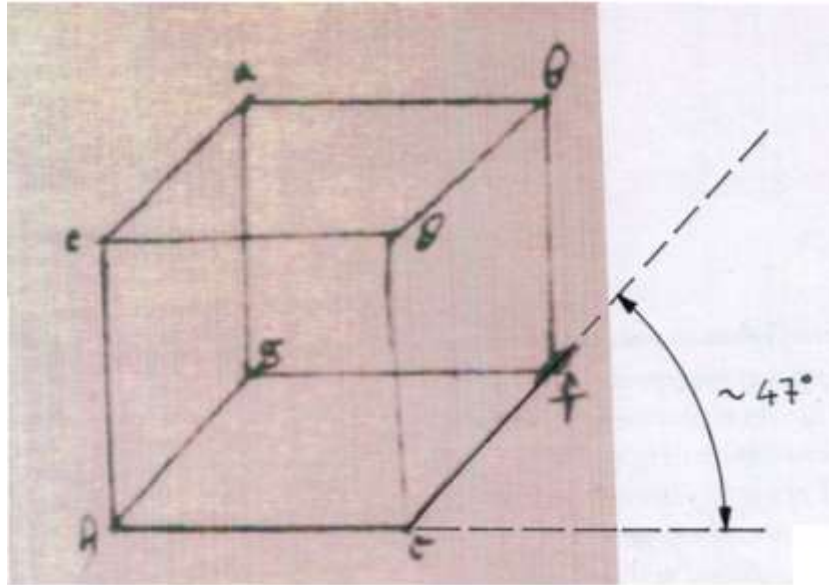
Sul grafico che segue sono riportate le lunghezze dei diversi spigoli visibili, facendo uguale a 1 quella convenzionale dei lati della faccia anteriore ABCD. Gli spigoli obliqui sono scorciati secondo un rapporto di fuga compreso fra 0,50 e 0,56, ciò che può richiamare un qualche legame con l'assonometria cavaliere.

Leonardo da Vinci non commise l'errore fatto da Luca Pacioli in un altro suo trattato (la "Summa...") di disegnare con linee continue gli spigoli non visibili di un solido massiccio.

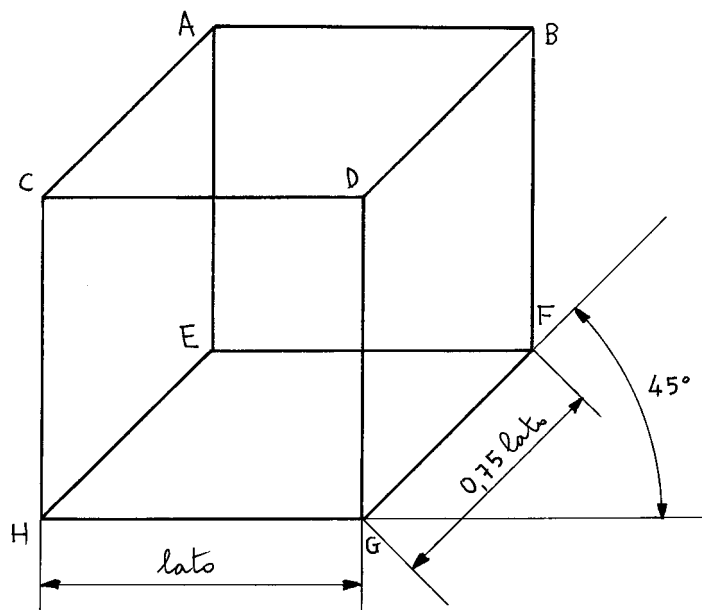
Ma prima di Leonardo, un altro fra i più antichi esempi di impiego dell'assonometria cavaliere, con riduzione della lunghezza degli spigoli obliqui a $\frac{2}{3}$ di quella reale, è presente nella carta 146 verso del codice *Conv. sopp. J. IV. 20* (posseduto dalla Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze), datato al 1406 e già di proprietà di Filippo di Ugolino Peruzzi: il codice contiene la traduzione latina delle tavole astronomiche di Immanuel ben Jacob Bonfils (circa 1300-1377). A metà del manoscritto sono presenti alcuni fogli con rigatura a quadretti, forse inseriti per esercizi di carattere astronomico o geografico. Fra questi fogli quadrettati è inserito il foglio 146. Nella figura (tratta dal testo di Francesca Salvemini, citato in bibliografia):



sono rappresentati a *filo di ferro* (con tutti gli spigoli visibili) il tetraedro, l'esaedro (il cubo), l'ottaedro, il dodecaedro e l'icosaedro. Il cubo, in particolare, ha gli spigoli obliqui inclinati di circa 47° e di lunghezza pari a $3/4$ di quella dei lati orizzontali e verticali:



Lo schema che segue razionalizza il precedente grafico e presenta gli spigoli obliqui inclinati di 45° :



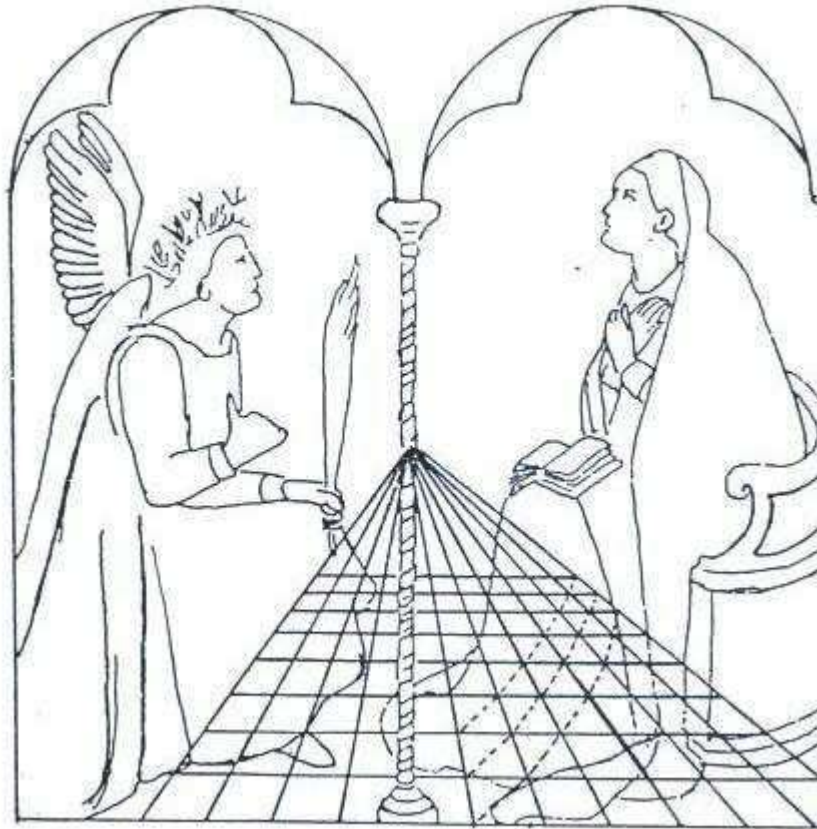
Questo documento costituisce una prova interessante riguardo alla conoscenza dell'assonometria nel campo della geometria e quindi del disegno tecnico.

Torneremo successivamente con altre considerazioni storiche riguardanti l'impiego dell'assonometria cavaliera.

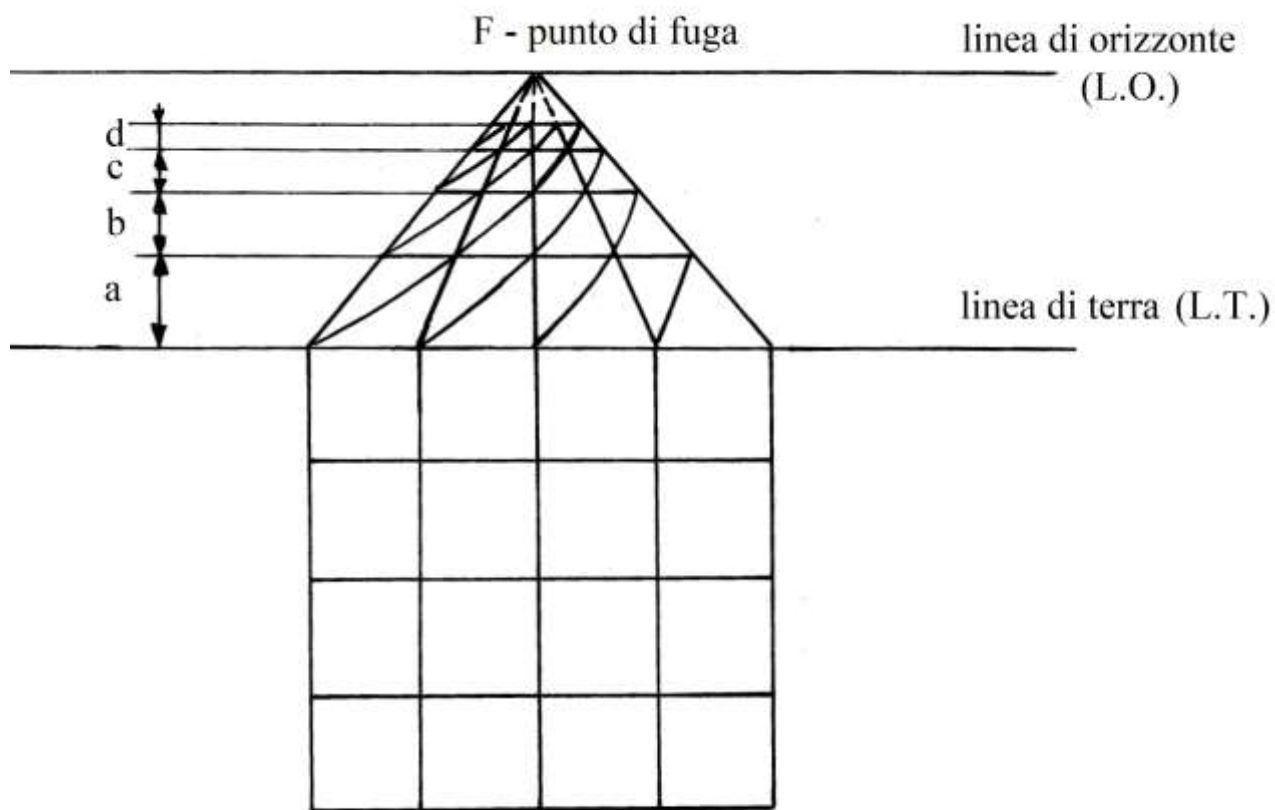
La tecnica della riduzione della lunghezza degli spigoli obliqui potrebbe *anche* derivare dalla pratica dei pittori italiani del Duecento e del Trecento di ridurre le dimensioni delle mattonelle dei pavimenti disegnati in prospettiva. Un esempio è dato dalla celebre *Annunciazione* di Ambrogio Lorenzetti, risalente al 1344:



Le diagonali tracciate sulle mattonelle del pavimento non formano dei segmenti di retta ma linee spezzate che tendono ad assumere la forma di curve, esemplificate con linee tratteggiate nel grafico che segue:



Lo schema che segue descrive *l'errore*: essa presenta la prospettiva di un pavimento formato da 16 mattonelle quadrate di uguali dimensioni. La lunghezza di a veniva scelta a piacere, la b era pari a $2/3$ di a , la c uguale a $2/3$ di b e, infine, la d era pari a $2/3$ di c .



$$\begin{aligned}
 b &= \frac{2}{3} a \\
 c &= \frac{2}{3} b = \frac{4}{9} a \\
 d &= \frac{2}{3} c = \frac{8}{27} a
 \end{aligned}$$

L'effetto era surreale perché le diagonali delle mattonelle così deformate si disponevano quasi a spirale. Leon Battista Alberti bocciò severamente questo metodo.

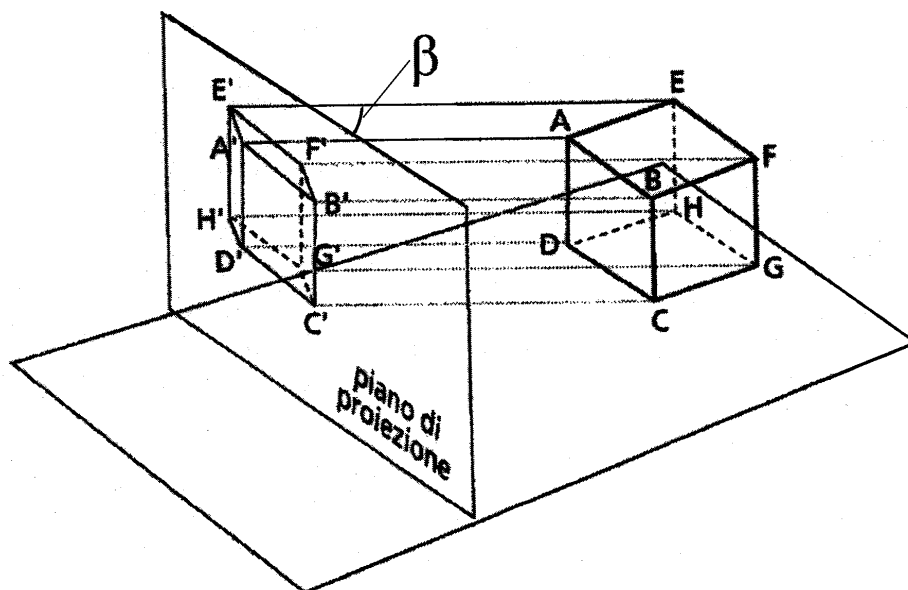
I METODI USATI IN ASSONOMETRIA

Il geometra tedesco Ludwig Julius Weisbach (1806-1871) pubblicò nel 1844 un trattato nel quale introdusse altri metodi assonometrici, oltre a quello isometrico.

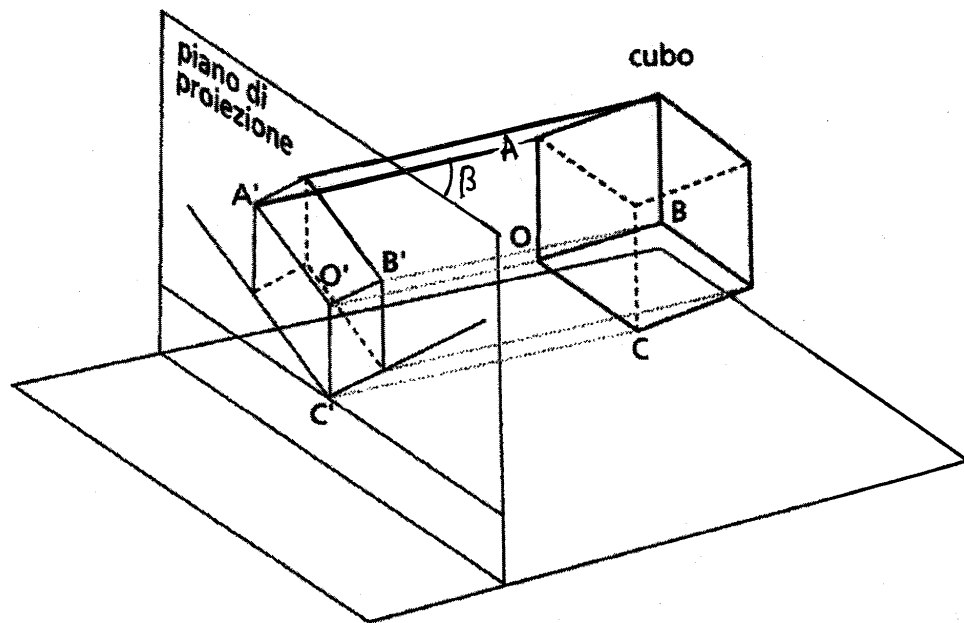
Per semplificare la comprensione immaginiamo la presenza di un piano di proiezione, di materiale trasparente, interposto fra l'osservatore situato all'infinito e l'oggetto da rappresentare. Su quel piano viene disegnata la proiezione dell'oggetto.

Le assonometrie sono classificate in due grandi gruppi:

- *Assonometrie oblique*: i raggi visivi sono fra loro paralleli ma *obliqui* rispetto al piano di proiezione sul quale viene rappresentato l'oggetto con un unico disegno (al contrario di ciò che avviene con le proiezioni ortogonali che, a seconda della complessità dell'oggetto, possono richiedere 3, 4 o più disegni o "viste"); l'angolo β di figura può variare (fra 0 e 90°):



- *Assonometrie ortogonali*: i raggi visivi sono sempre paralleli fra loro, ma colpiscono perpendicolarmente il piano di proiezione e l'angolo β vale 90°.



I diversi metodi sono usati in funzione delle caratteristiche che deve possedere il disegno: spesso le assonometrie oblique forniscono rappresentazioni più realistiche, mentre le assonometrie ortogonali conservano più facilmente le dimensioni.

Il metodo delle proiezioni ortogonali presenta lo svantaggio di rendere evanescenti le proiezioni di segmenti perpendicolari ai piani fondamentali perché le riduce a un punto. Per eliminare questo inconveniente, nelle assonometrie ortogonali il piano di proiezione viene scelto *obliquo* rispetto ai tre piani o agli assi coordinati (esempio: l'assonometria isometrica). Invece, nelle assonometrie oblique, è pratica corrente usare un piano di proiezione parallelo a un piano coordinato (esempio: nell'assonometria cavaliere).

PRECUSORSI DELL'ASSONOMETRIA OBLIQUA

Fra i primi autori di testi geometrici o tecnici ad avere impiegato l'assonometria vanno ricordati:

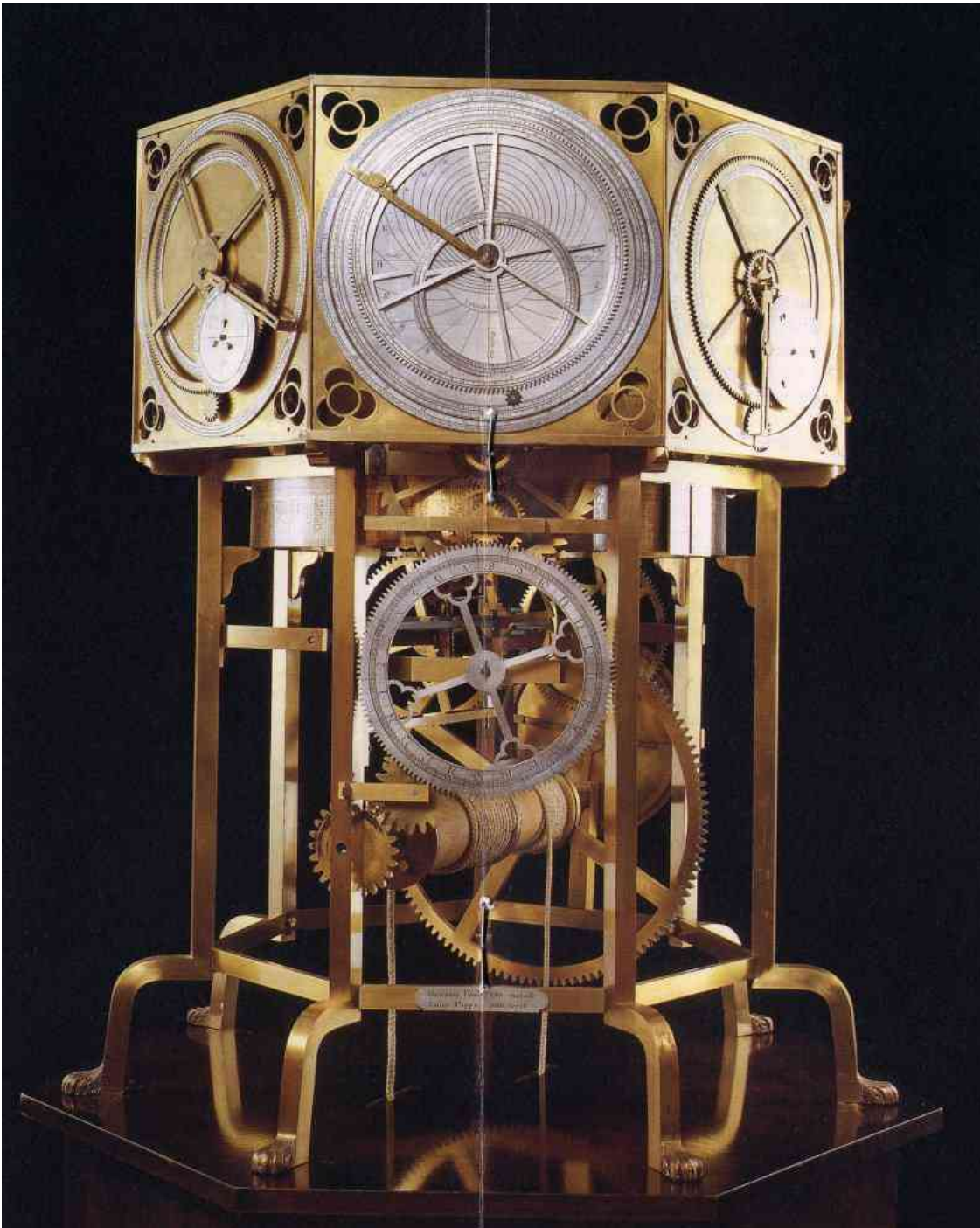
- * I Gromatici romani.
- * Giovanni Dondi.
- * Leonardo da Cremona.
- * Roberto Valturio.

L'ASTRARIO DI GIOVANNI DONDI

Giovanni Dondi dall'Orologio (Chioggia 1330 – Abbiategrasso 1388 o Genova 1389) studiò medicina, astronomia, filosofia e logica a Padova.

Verso il 1365 costruì un vero gioiello meccanico, l'*Astrario* (o Planetario). Esso serviva a calcolare in tempo reale la posizione dei sette astri conosciuti nel Medioevo (Terra, Sole e cinque pianeti, Venere, Marte, Saturno, Mercurio e Giove).

Fu realizzato in metallo ("leghe di rame" e probabilmente acciaio per gli assi delle ruote dentate) con un complesso sistema di ingranaggi, per il Castello Visconteo di Pavia. L'Astrario era alto 85 cm, come mostra la figura sottostante che rappresenta una sua moderna ricostruzione:



Ulteriori e dettagliatissime informazioni sulla struttura e sulla costruzione di copie dell'Astrario sono disponibili sul bel sito https://www.clockmaker.it/48_astrario.htm .

L'originale è andato perduto (perché nessun orologiaio dei decenni successivi fu capace di ripararlo e l'ottone di cui era fatto era molto ricercato per cui l'Astrario fu smontato e il materiale recuperato ma, grazie alle dettagliate spiegazioni contenute nel libro "*Tractatus Astrarii*" scritto in latino dal Dondi, è stato perfettamente ricostruito alla fine del XX secolo: il titolo completo del manoscritto è "*Tractatus Astrarii Johannis De Dondis Paduani Civis Cui Tres Sunt Partes*", è conservato presso la Biblioteca Capitolare di Padova e contiene 54 pagine).

Per indicare le dimensioni dei componenti dell'Astrario l'autore usa diverse unità di misura

prese dalla vita quotidiana. Date le loro ridotte misure, Dondi non poté usare soltanto le due unità allora correnti: il piede e il dito. Ad esempio, le dimensioni di un dente di una ruota erano piccole e avrebbero dovuto essere indicate come frazioni del dito e l'operazione aritmetica di divisione non era alla portata di molti artigiani. Egli usò, ad esempio, lo spessore di diversi coltelli e le dimensioni delle cinque dita della mano.

Il trattato di Dondi è corredato pure di chiari disegni tecnici, ciò che lo rende uno dei primi testi tecnici del Medioevo.

Come è visibile dalla figura precedente, lo strumento è sorretto da una struttura che ha la forma di un prisma a base ettagonale: è però una struttura *wireframe*, cioè contiene soltanto gli spigoli costituiti da aste quadrate di ottone lunghe un piede e larghe un dito. Per aumentare la stabilità dell'astrario, inferiormente le aste erano piegate verso l'esterno e venivano finite con una forma a zampa di cane.

Dondi disegnò la struttura in pianta e nella stessa pagina disegnò pure il profilo di una delle sette aste, usate per collegare i due anelli ettagonali:

Hic inveniuntur septem calamentum operis in quo firmamentum sive ca
cau nro proprio pnterina disponere. Ita septem sunt op
latrum q septemgoni un septem numeru platum ut
singula latu plantae singule uel pnt. **C**um ad un
annuili dispone uel ab uno pmo motor uel motus
alio dependere pmo ordinati ee horrologiu ut col
gam totam diei sive horam q pale in spatio. 22.

facta

horam pnter. Alium sive. Ista nax est fir
pimus motor aquo tota alia uenit q sperat
oia q genit sicut estis uel uel fortit. **P**rimo
q ex uniuerso fabricau septem calupnas sup
quibz i septem angulz calamen uoluit tati li
stentur calamentu q oia que pnt dicitur in eo
fuerint hui calupne gressitudin uniu digni
ti quadrate q longitudinis uniu pedis et medij
Non sea at hui calupnas recta in totum si i
pnt in fenon curuam et spm quare pnt un
pnt fecit illi curuam ad illu uniu rursu can
at pnt dicitur de curuam ut pnt dicitur q
ut balt calamen sicut later et sedet pnt fir
mi dal sup plano pnt. **S**ecunda hui calupnas
i supio pnt quedam additamentu ad ea pnt dicitur
qua et dicitur pnt que additamentu huius lo
gitudinis sicut uniu uel sup quibz additamentu
firmant aliud calamentu q fact. **E**lmanu at
de dal calupnas delatere oppo
uare i dicitur ipas uare
q simili i dicitur additamentu
quatu et latitudo uniu di
gnt uniu sicut q pnt da
ut uel ad qua dicitur
uniu coste qnti alie
li apnt ad modu
dicitur constructu
nax ut fig
dedant

Septem calupnas

Dicitur ad fabricau orbis sive ad fabricau duos septemgoni
et septemgoni corpora que latu sicut paulo breuio
et pedali et sicut spm ad quantitate constructu
quod fecerit i calupnas i angulz ad hui septemgoni. **S**
mau q similes i constructu illis quas fecerit i calupnas
ita ut possent calupnas constructu ad illu constructu ad
altera subintrant sicut q alia corpora sicut dicitur i
uoluit figura. **C**um q calupnas ee hui constructu
dicitur apparet calupnas constructu que pnt dicitur ad
dicitur q ad constructu uniu constructu pnt dicitur
lat que dicitur dicitur q ad constructu alie
bi q diligenti alie alie q dicitur q ad dicitur
solentia ad dicitur q dicitur. **S**icut uel dicitur
ab hui constructu posse ad hui septemgoni posse no q dicitur
si dicitur illa ad dicitur ad dicitur huius pnt dicitur
i dicitur quare apponit multe calupnas ad dicitur
nax constructu quibz cum sicut pnt quibz calupnas eueli
uniu dicitur. **A**tendendū q si uoluit sicut dicitur
uare calupnas ut illis pnt a dicitur dicitur alie dicitur
et totu dicitur dicitur op dicitur dicitur dicitur
uniu calupnas q simile et constructu septemgoni
conspiciuntur illis ut ille uare dicitur q uel dicitur
reunire si q dicitur dicitur alie pnt dicitur q dicitur
eo non sicut. **C**um totu sicut hui dicitur sicut et
dispositio sicut ee sicut dicitur q dicitur quod dicitur in
latere subsequenti et stud uare pnt calamentum

uniu q ordinati ee or
ulo q et alia plura
que in sequentibus
dicitur.

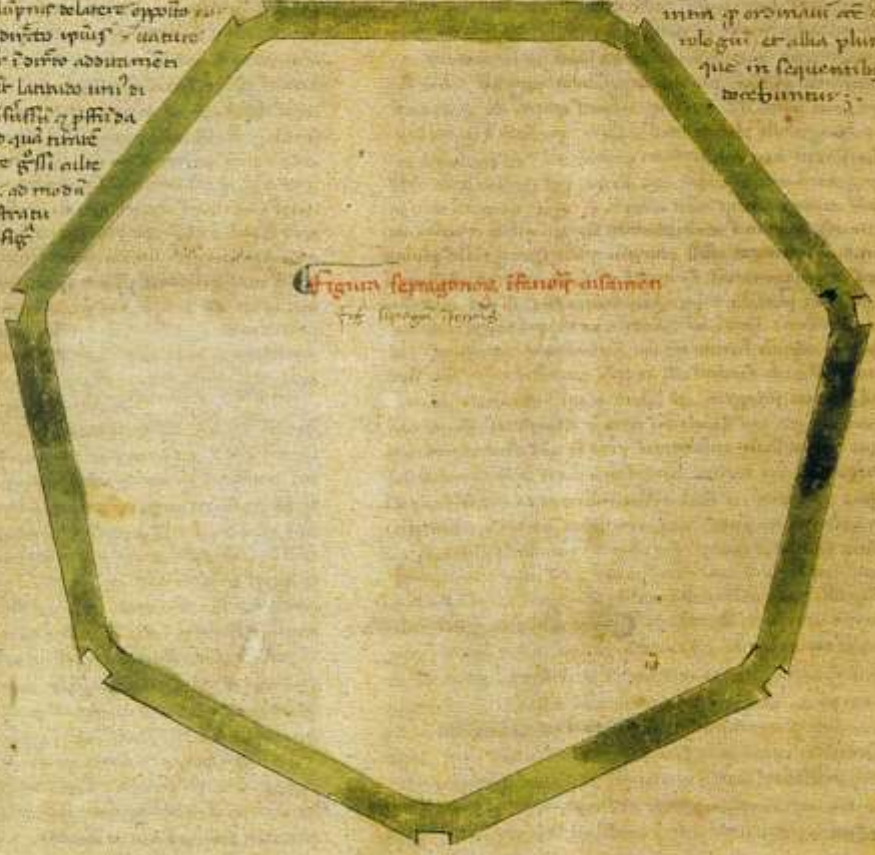
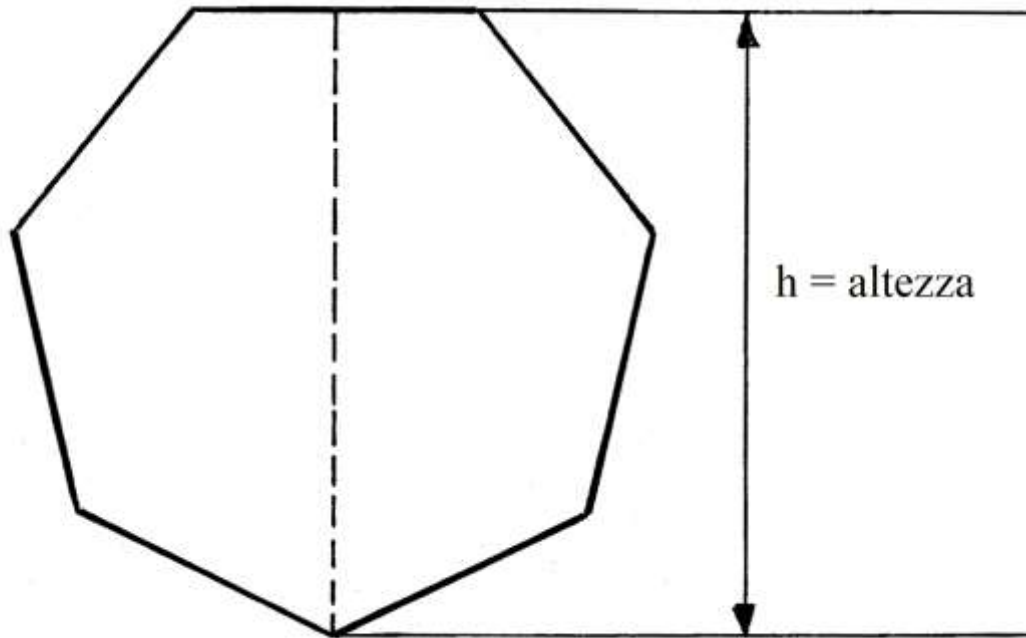


Figura septemgoni sicut calamen
sicut dicitur dicitur

La struttura era ancorata a due anelli a forma di ettagoni regolari orizzontali e formati da aste di ottone, con un vertice rivolto verso il basso. Lo schema che segue è basato sulle dimensioni dell'ettagono interno dei due anelli:



In altra pagina del trattato, Dondi disegnò di fronte la struttura con una vista deformata in un'assonometria:

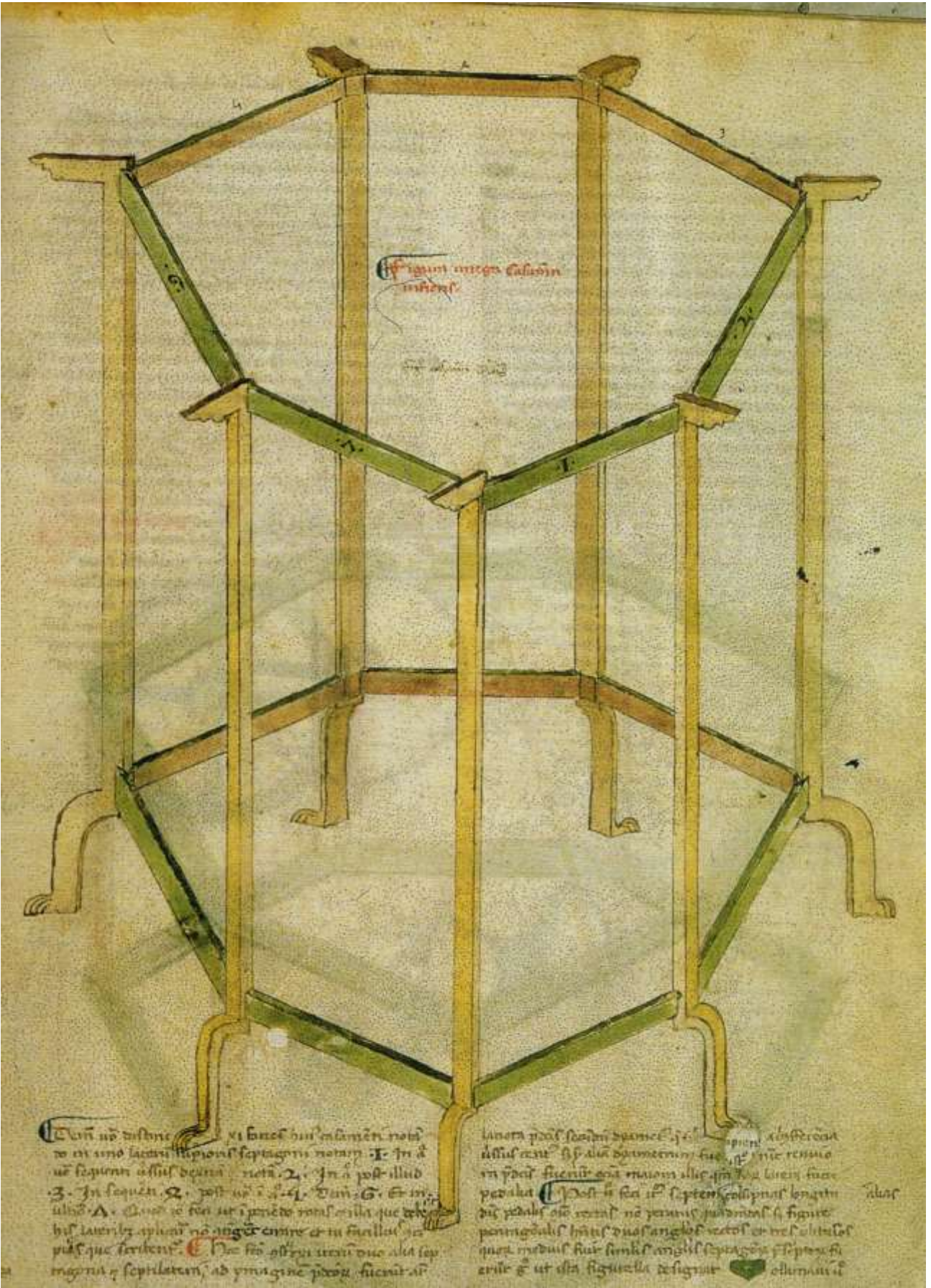
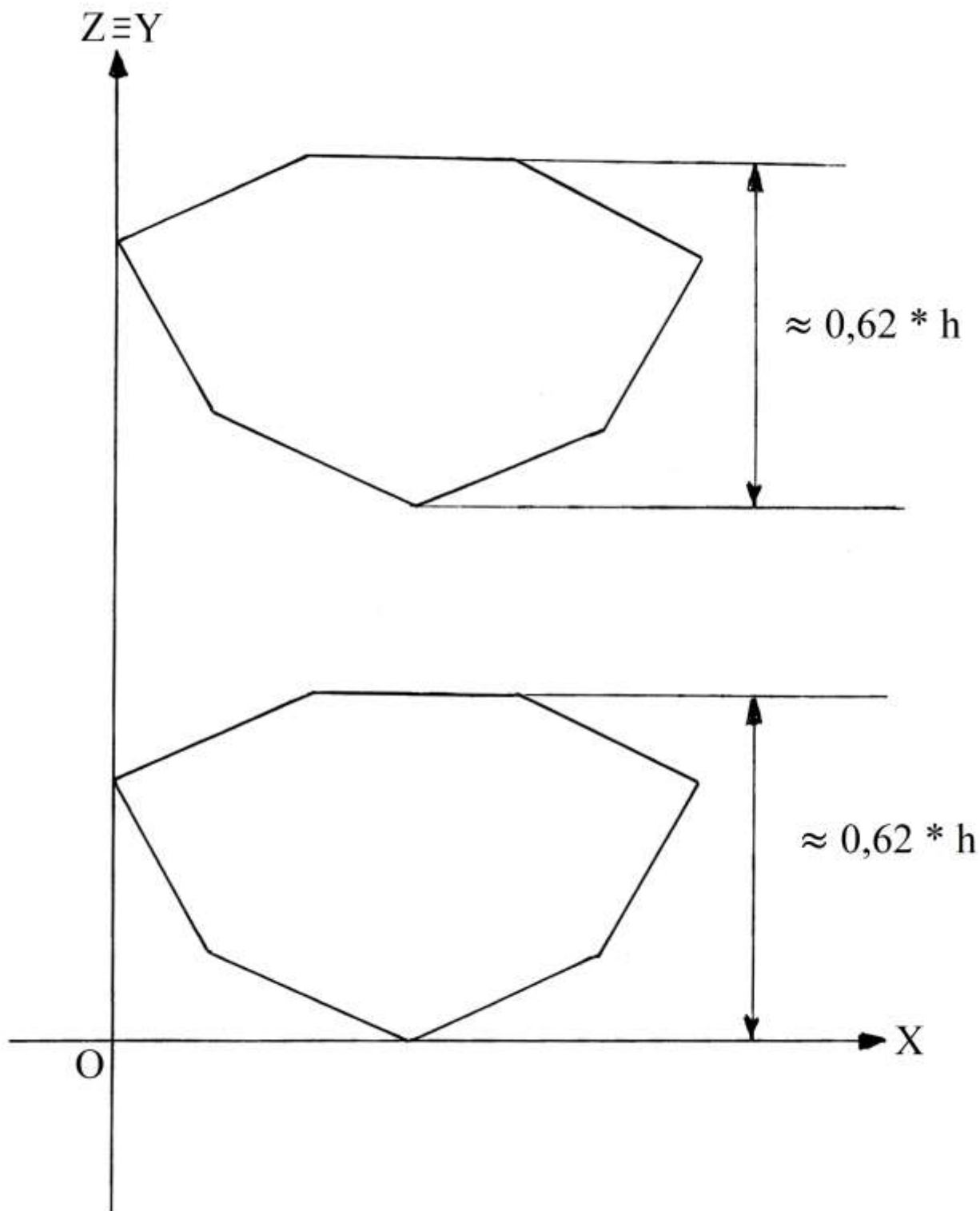


Figura inter columnas inter

Quia uero distinetur
 in uno latere superioris septagoni notum. Et in d
 ue sequenti assil de qua notum. 2. In a post illud
 3. In sequenti. 2. post uero. 4. Dum. 6. Et in
 ultio. A. Quia se tota ut in quibusdam illa que
 his lateribus apparet non ingerit eum et in facillim
 pite que scribitur. Et hoc sicut dicitur duo alia sep
 magis et septilatem, ad ymaginem pedu fuerit ad

lanata post secundum dicitur. Et in sequenti ad dicitur
 assil uero. Et alia dicitur. Et in sequenti. Et in sequenti
 in post fuerit eum in uero illa que in uero fuerit
 pedula. Et hoc si sea et septem colligunt longum
 duos pedales eum uero non peruenit quadratum si fuerit
 perunguunt hanc duos angulos rectos et uel obliquos
 qua medius hinc simili angulis septagone et septem si
 erit et ut ista figura designat. clumant

L'altezza interna dei due anelli ettagonali, superiore e inferiore, è ridotta a circa 2/3 della dimensione reale ($\approx 0,62 * h$):



Dondi disegnò in assonometria cavaliere con angolo di fuga di 90° e un rapporto di fuga RF uguale a $\sim 0,62$.

Gli assi Y e Z coincidono.

I due disegni di Dondi (pianta e “assonometria”) non sono stati tracciati usando la stessa scala di rappresentazione.

Dondi non spiegò in modo esplicito le regole da seguire per il profilo dei denti delle ruote. I disegni indicavano denti di forma triangolare e per alcuni ingranaggi specificò la necessità di arrotondare la punta, dando così ai denti un profilo arrotondato, vicino a quello cicloidale (tuttora impiegato in orologeria).

Fra le novità tecnologiche da lui introdotte con la progettazione e la costruzione dell’Astrario le più rilevanti sono le seguenti:

- Non usò viti ma per i collegamenti fra i diversi componenti impiegò delle caviglie smontabili.
- Utilizzò diverse unità di misura prese dalla vita quotidiana.
- Indicò gli utensili occorrenti per produrre i componenti dell’Astrario.
- Impiegò due catene articolate, ben prima che esse venissero studiate da Leonardo da Vinci.
- Progettò ruote eccentriche, di forma ellittica, con dentatura interna (e questa ultima novità sembra essere il primo uso documentato).

LE ASSONOMETRIE DI LEONARDO DA CREMONA

Leonardo da Cremona è anche conosciuto con il nome erroneo di Leonardo Mainardi o Leonardo Maynardi.

Egli è l'autore di alcune opere matematiche. Un manoscritto contenente suoi scritti era nella biblioteca di Leonardo da Vinci.

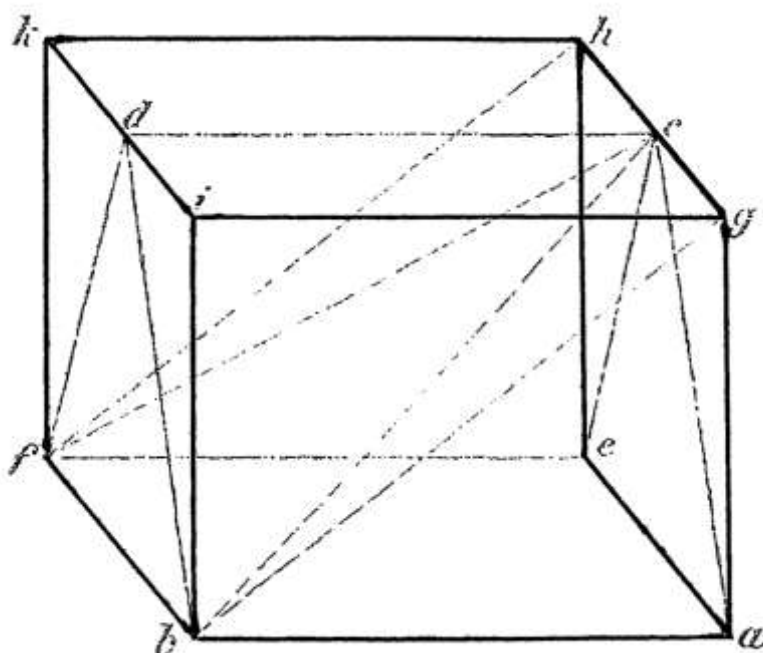
Fu attivo almeno fra il 1404 e il 1438.

Un suo trattato di geometria pratica ("*Artis Metrice Practice Compilatio*") scritto in italiano (in dialetto veneziano) è stato pubblicato soltanto nel 1902, a cura dello storico della matematica Maximilian Curtze.

In quel lavoro erano trattati diversi argomenti di geometria piana e di geometria solida.

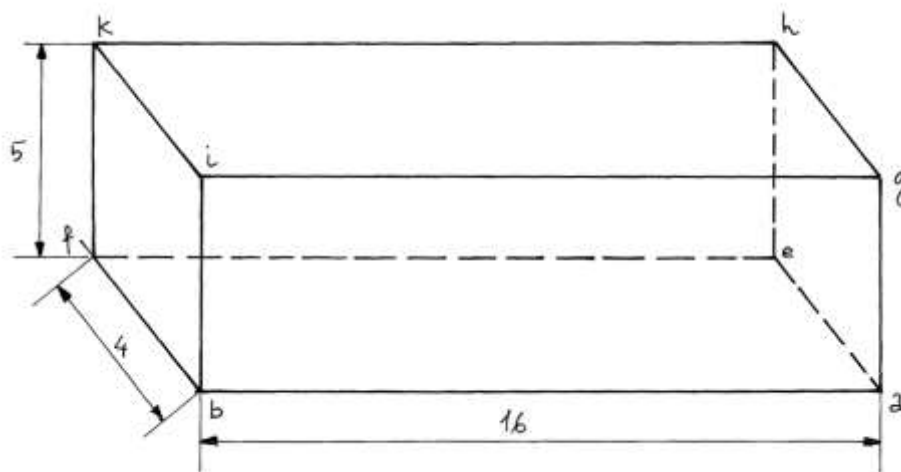
Leonardo da Cremona studiò pure alcuni problemi di geometria solida e disegnò, fra gli altri, un prisma a base rettangolare, un *parallelepipedo*, che egli chiama con il termine *seratile*, parola impiegata in seguito anche da Luca Pacioli e da Niccolò Tartaglia.

Il solido è disegnato a *filo di ferro* per mostrare tutti gli spigoli e le diagonali.

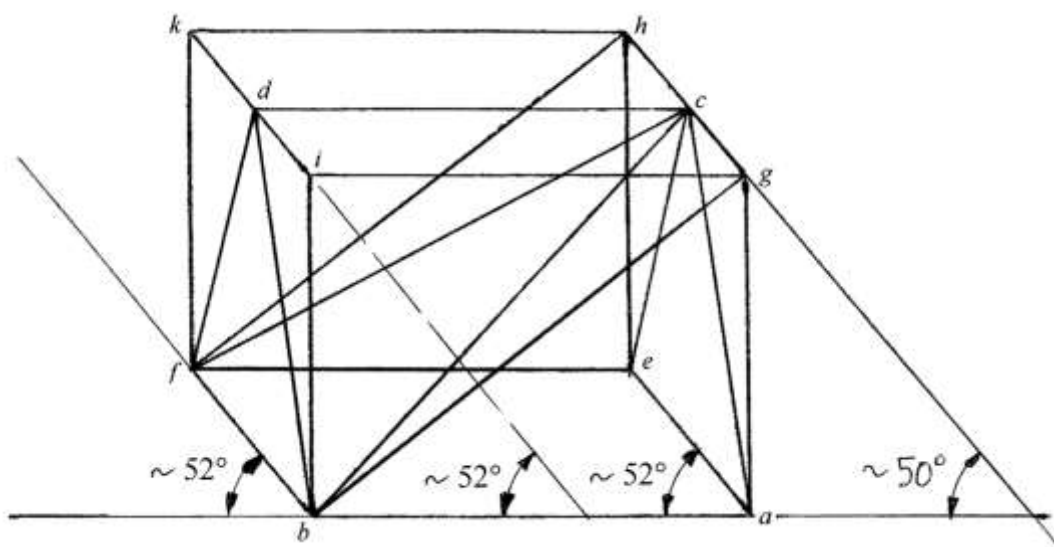


Leonardo usò lettere *minuscole* (a, b, c, ...) per indicare i vertici e lo stesso fece Piero della Francesca nel suo *Trattato d'abaco*.

Secondo il testo, il solido ha lati lunghi 16, 4 e 5:



Gli spigoli obliqui sono fra loro paralleli e inclinati di un *angolo di fuga* di $50 - 52^\circ$:



Il solido è disegnato in *assonometria cavaliere*.

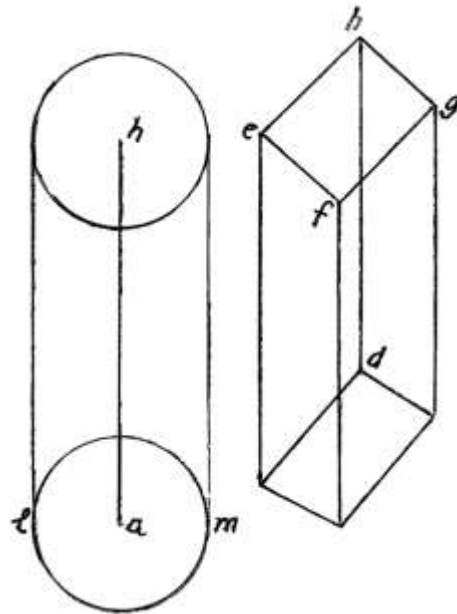
Nel manoscritto il parallelepipedo è disegnato in maniera un po' strana perché le lunghezze degli spigoli non sembrano rispettare una proporzione. La tabella che segue mostra i rapporti:

Spigoli	Lunghezze teoriche	Misure reali proporzionali a
fb	40	10
fk	50	18
ba	160	23

Questo mancato rispetto di semplici regole di proporzionalità è forse dovuto alla limitatezza dello spazio nella pagina destinata ad accogliere il grafico?

Un cilindro e un parallelepipedo

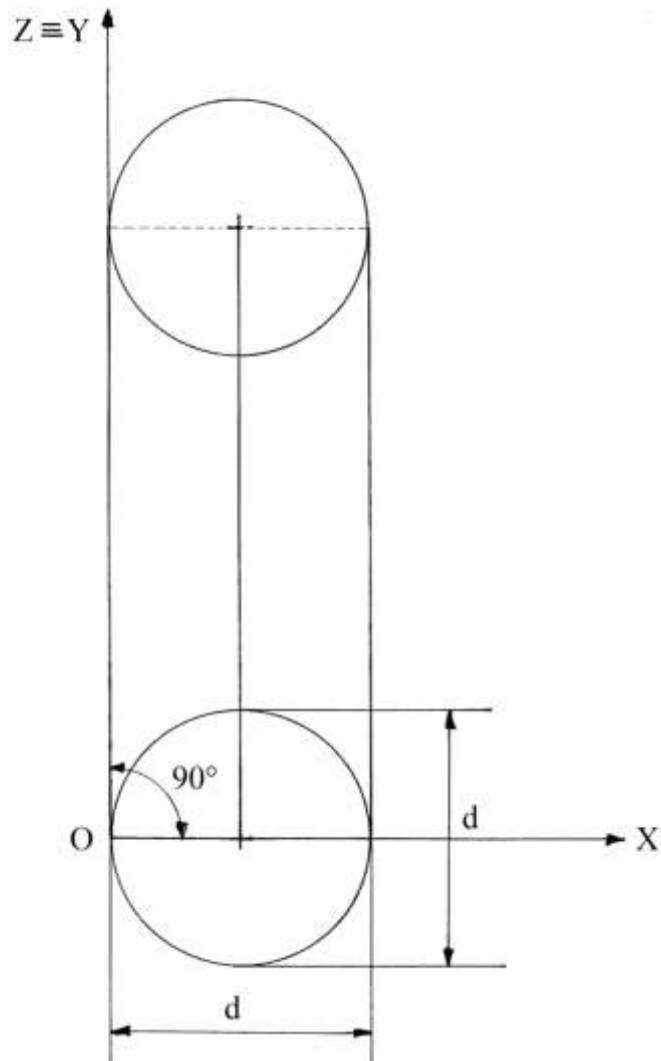
Un cilindro e un parallelepipedo sono disegnati affiancati: il primo è in assonometria cavaliere e il secondo in prospettiva (anche se il metodo si avvicina a quello di un'assonometria militare un po' deformata):



Il cilindro è disegnato con *angolo di fuga* di 90° , con gli assi Y e Z coincidenti e con *rapporto di fuga* (RF) uguale a 1, poiché i due cerchi non sono deformati e le loro dimensioni orizzontali e verticali sono uguali al diametro d :

$$RF = d/d = 1$$

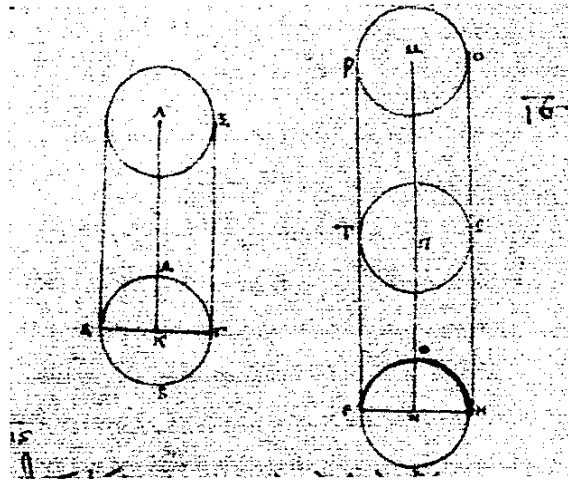
La figura che segue presenta ingrandito il cilindro in assonometria cavaliere:



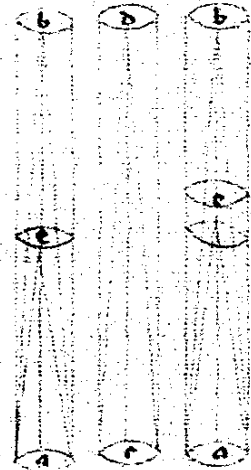
----- APPROFONDIMENTO -----

La particolare tecnica di rappresentazione assonometrica di un cilindro, mostrata nella precedente figura, era stata già impiegata in diversi manoscritti: le immagini sono ricavate dalla pagina 225 del fondamentale studio di Massimo Scolari citato in bibliografia.

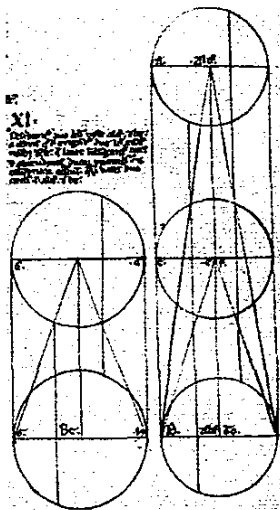
La figura che segue è una rappresentazione del cilindro in una versione di Euclide del XII secolo (Cod. lat. 23511, Monaco di Baviera, foglio 24 *recto*):



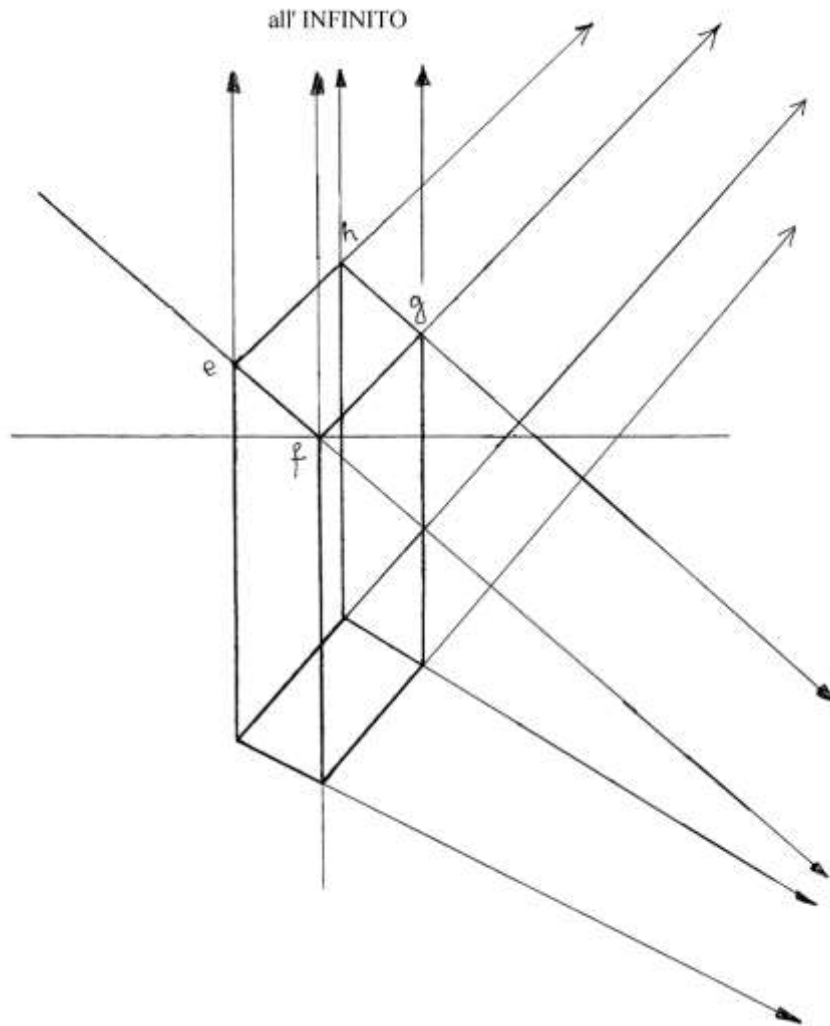
Lo schema che segue è contenuto in un codice con una traduzione degli *Elementi* di Euclide, XII, proposizione 14, a cura di Campano da Novara, codice risalente al XIV secolo e conservato a Londra; le basi dei cilindri sono disegnate con archi di circonferenza, quasi fossero delle ellissi “a punta”:



Infine, il grafico che segue è ricavato da un manoscritto contenente una traduzione latina di Adelardo da Bath, degli *Elementi* di Euclide, risalente al XIII secolo e conservato a Oxford:



Il parallelepipedo di Leonardo da Cremona è disegnato in prospettiva con tre punti di fuga: gli spigoli obliqui delle due facce (superiore e inferiore) tendono a convergere verso due punti di fuga a destra, mentre gli spigoli verticali sono fra loro paralleli e il loro punto di fuga è all'*infinito*:

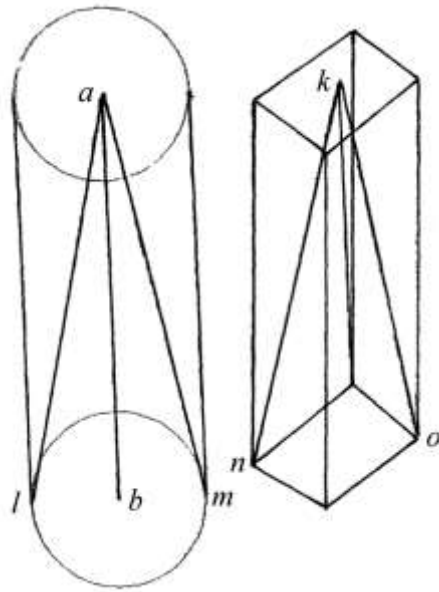


Gli spigoli che convergono verso il punto di fuga in alto a destra formano con la retta orizzontale (parallela alla *linea di terra* non disegnata) angoli compresi nell'intervallo $44 - 50^\circ$: ciò può essere un indizio della presenza di tracce di un'assonometria cavaliera con direzione di fuga inclinata a 45° .

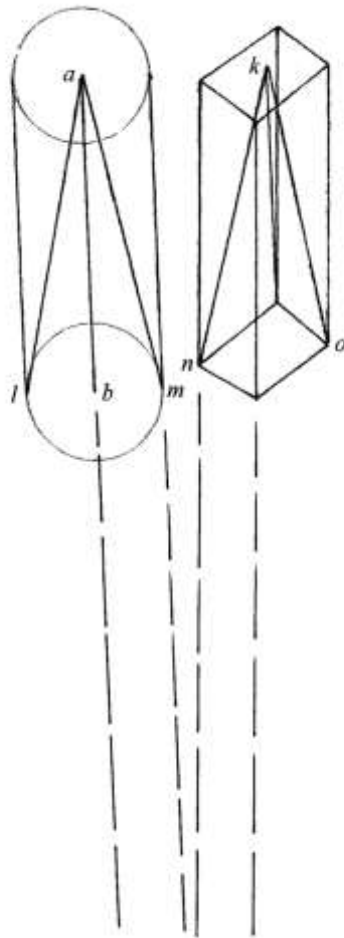
La faccia inferiore del solido è più deformata di quella superiore.

Cono e piramide

Nella figura che segue, sempre tratta dal lavoro di Leonardo Cremonese, sono disegnati affiancati due solidi composti: a sinistra un cono inserito nel cilindro da cui ha origine e a destra un tronco di piramide inscritto in un parallelepipedo.

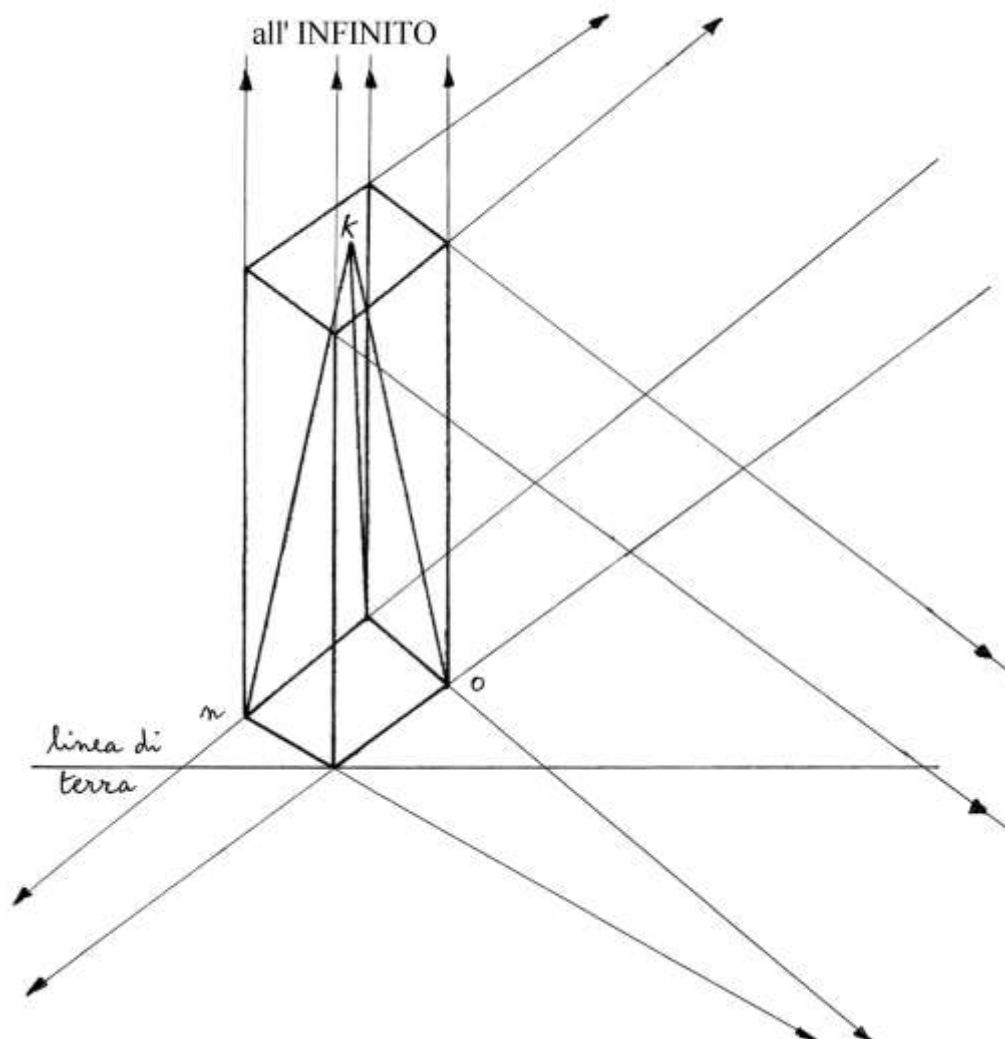


I solidi sono stati disegnati *divergenti* perché i loro spigoli verticali non sono paralleli. I solidi sono rappresentati a “filo di ferro” per mostrare tutti gli spigoli.



Il cilindro e il cono sono disegnati in *assonometria cavaliere* con lo stesso metodo usato per il cilindro descritto nel precedente paragrafo.

Il parallelepipedo e la piramide in esso contenuta sono rappresentati in *prospettiva*: il disegnatore ha impiegato ben *quattro* punti di fuga per gli spigoli delle due basi rettangolari. Gli spigoli verticali sono paralleli e convergono in un *quinto* punto di fuga posto all'*infinito*:



Si ripropone una domanda: questa grossolana prospettiva è stata imposta da mancanza di spazio? Nello spazio euclideo possono esistere solo *tre* punti di fuga.

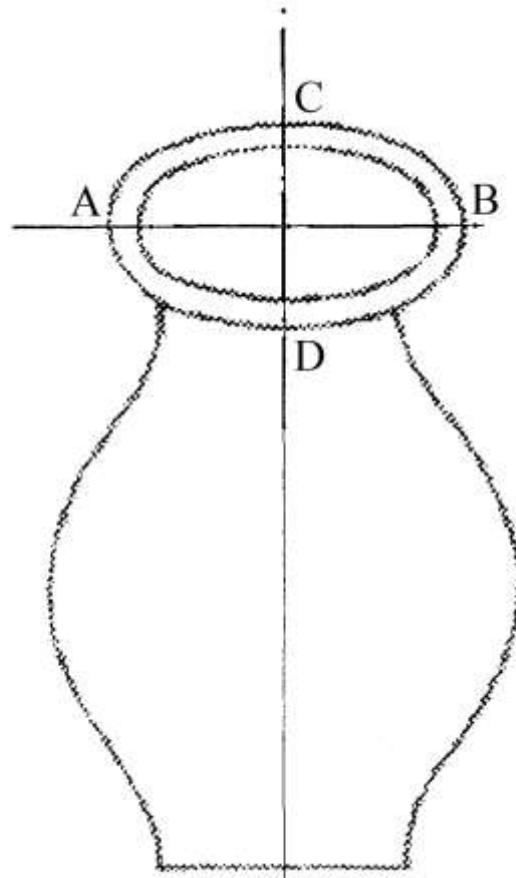
----- STORIA DELLA TECNOLOGIA -----

La tecnica di rappresentazione delle circonferenze deformate in ellissi è peraltro assai antica.

La figura che segue viene da un piccolo trattato risalente al V-VI secolo (*Terminorum Diagrammata*) e facente parte dei testi dei Gromatici. Si tratta di una *giara* usata come cippo confinario:



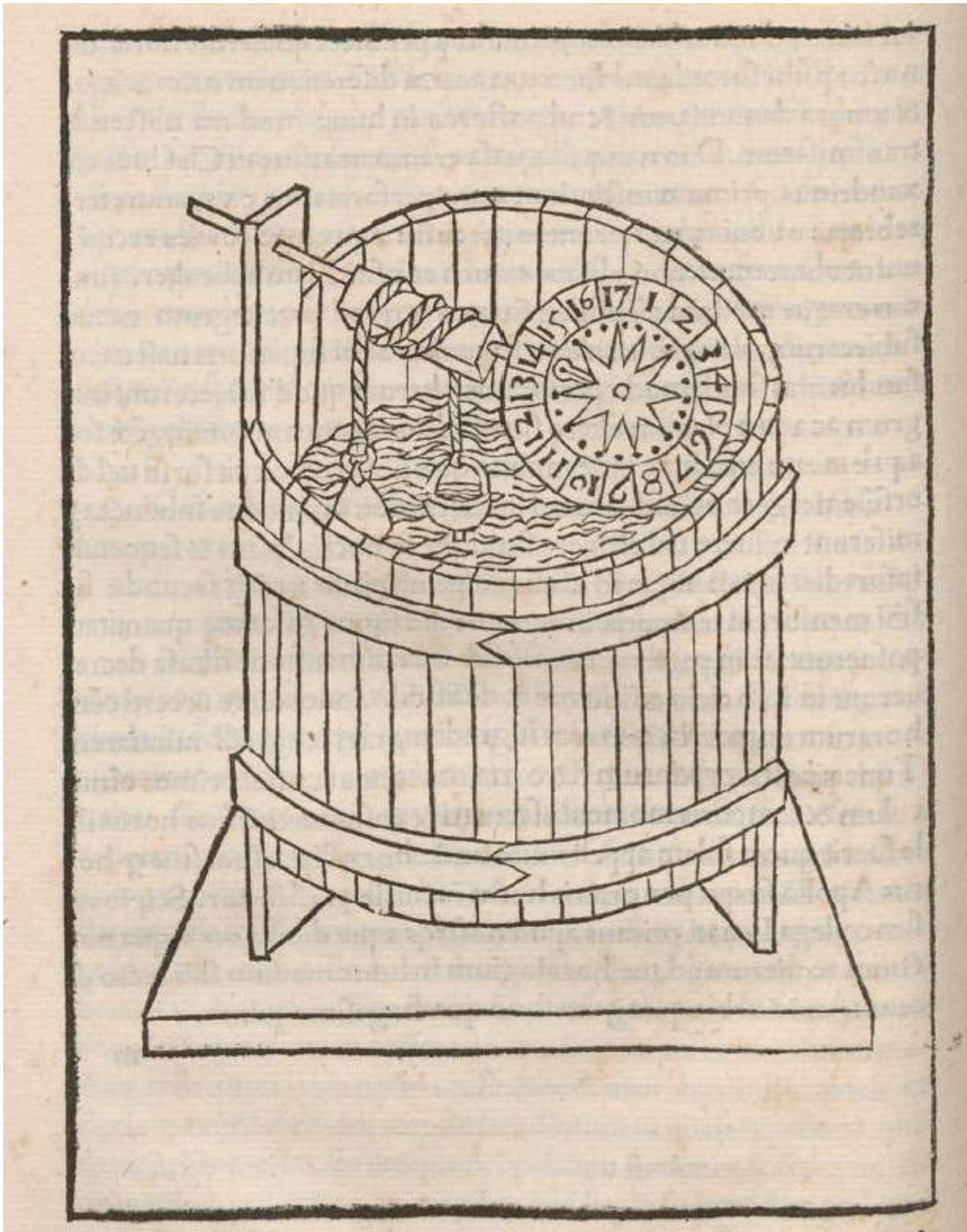
La faccia superiore è disegnata in assonometria cavaliera che deforma le due circonferenze concentriche in due ellissi ugualmente concentriche:



Il rapporto di fuga RF è uguale a:

$$RF = CD/AB \approx 0,58$$

Un altro esempio dell'antichità di questo metodo è dato dalla seguente tavola, contenuta nel libro VII del trattato *De re militari* ("L'arte militare"), di Roberto Valturio (1405-1475), uno dei primi testi tecnici stampati. Esso contiene diversi disegni, opera di Matteo de' Pasti, di macchine da guerra. In particolare, il disegno che segue descrive un rudimentale *orologio ad acqua*: il bordo superiore del recipiente a doghe è disegnato in assonometria cavaliera con angolo di fuga di 90° e rapporto di fuga uguale a 0,5. Nella tavola il disco numerato è disegnato in pianta, senza alcuna deformazione, mentre la base di appoggio è rappresentata in prospettiva:

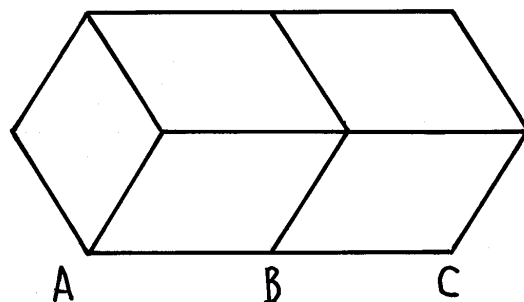


Questo documento conferma l'antichità dell'uso dell'assonometria obliqua (cavaliera) nell'ambito del disegno tecnico.

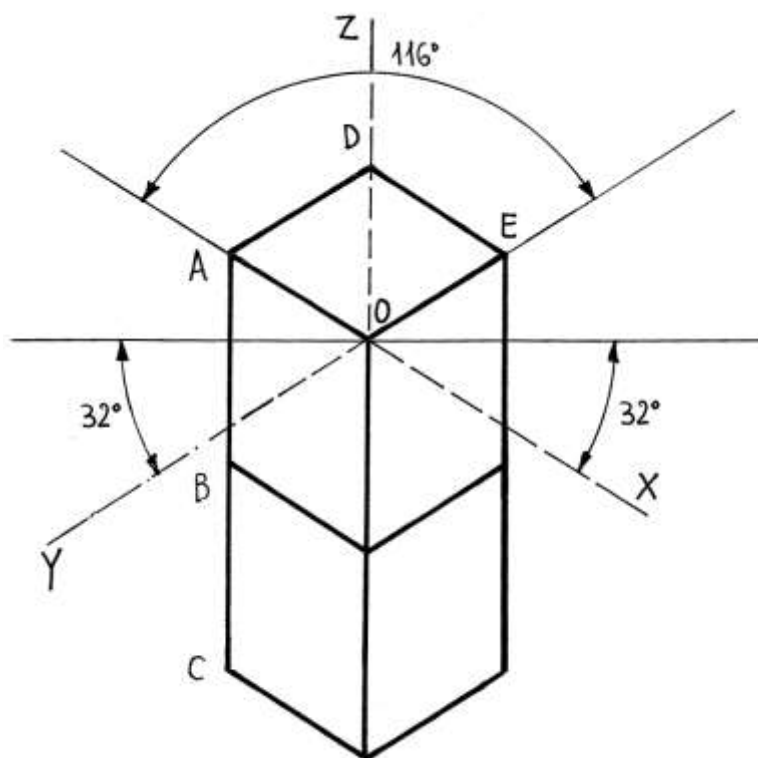
LE ASSONOMETRIE DI DÜRER E BARTOLI

La versione italiana del più importante trattato geometrico di Albrecht Dürer, curata da Cosimo Bartoli, contiene nel *quarto libro* alcune costruzioni relative alla duplicazione e a ulteriori moltiplicazioni di un cubo: vedere le figure da XVI a XVIII alle pagine 522-4 del testo citato in bibliografia.

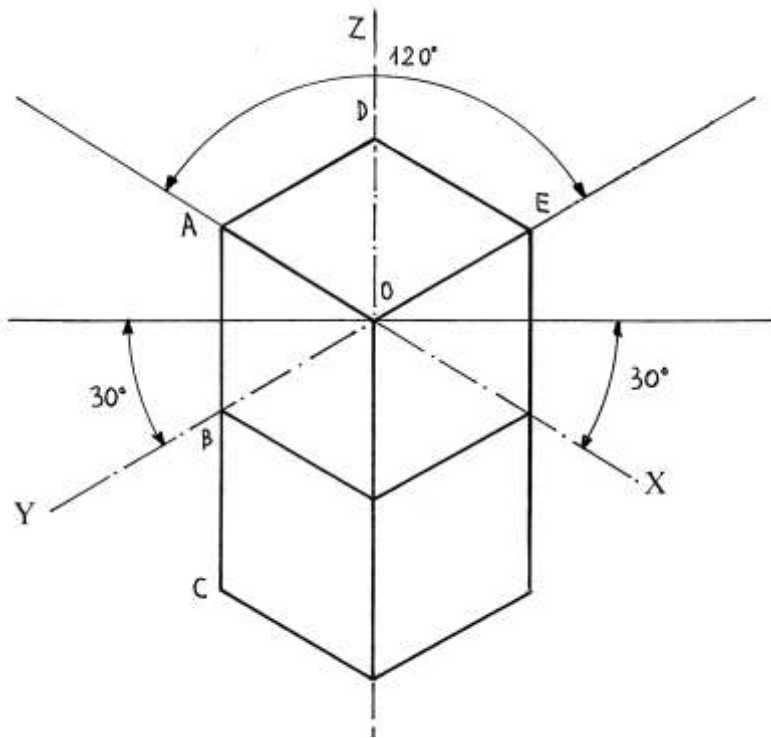
Due cubi di uguali dimensioni, $AB = BC$, sono disegnati uniti a formare un prisma a base quadrata, rappresentato in una assonometria semplificata:



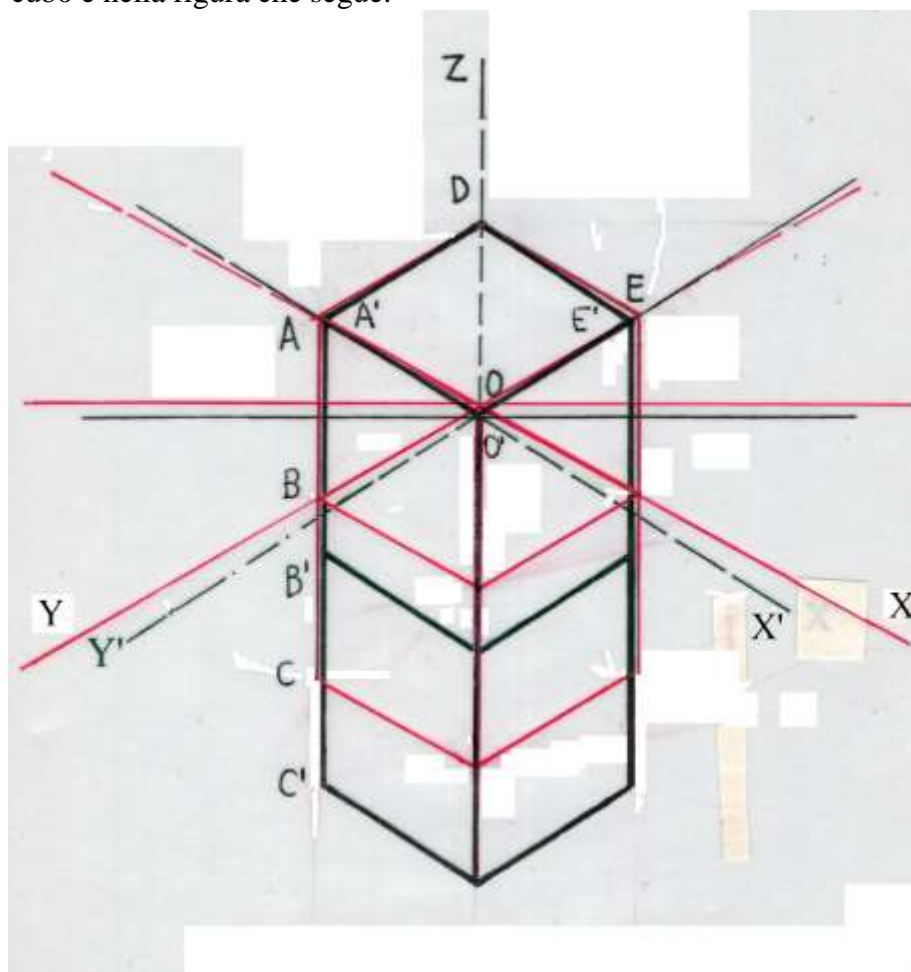
Per comprendere la natura del metodo impiegato da Bartoli, la figura è stata ruotata di 90° in senso orario: in essa gli angoli formati dai prolungamenti degli spigoli formano una terna:



Sembra ragionevole ipotizzare l'impiego di una quasi assonometria isometrica, vista la vicinanza fra gli angoli di 32° e di 116° rispettivamente agli angoli di 30° e di 120° :

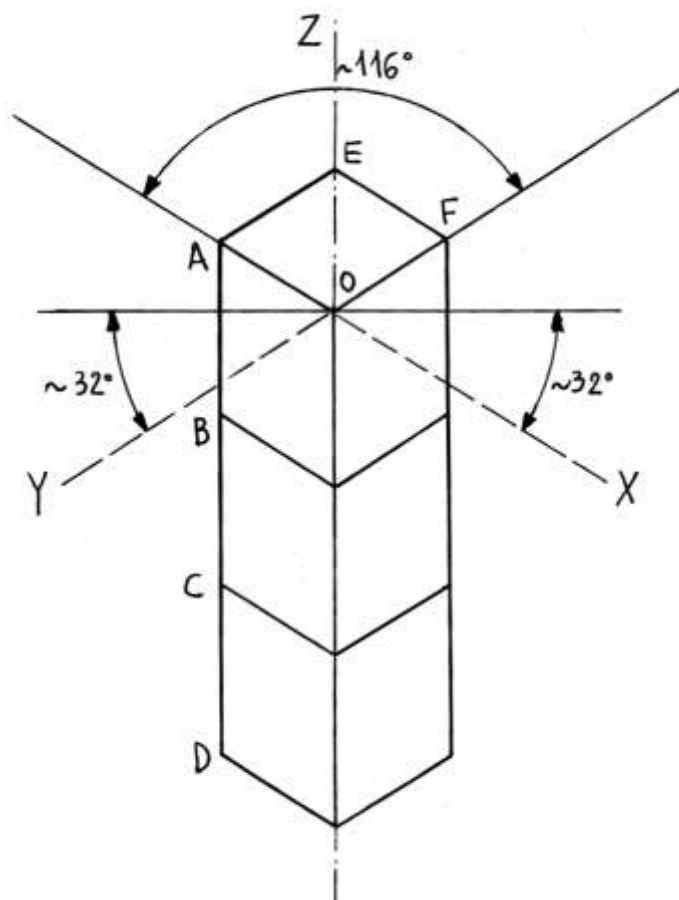
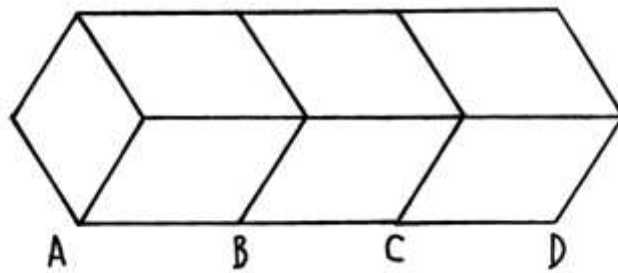


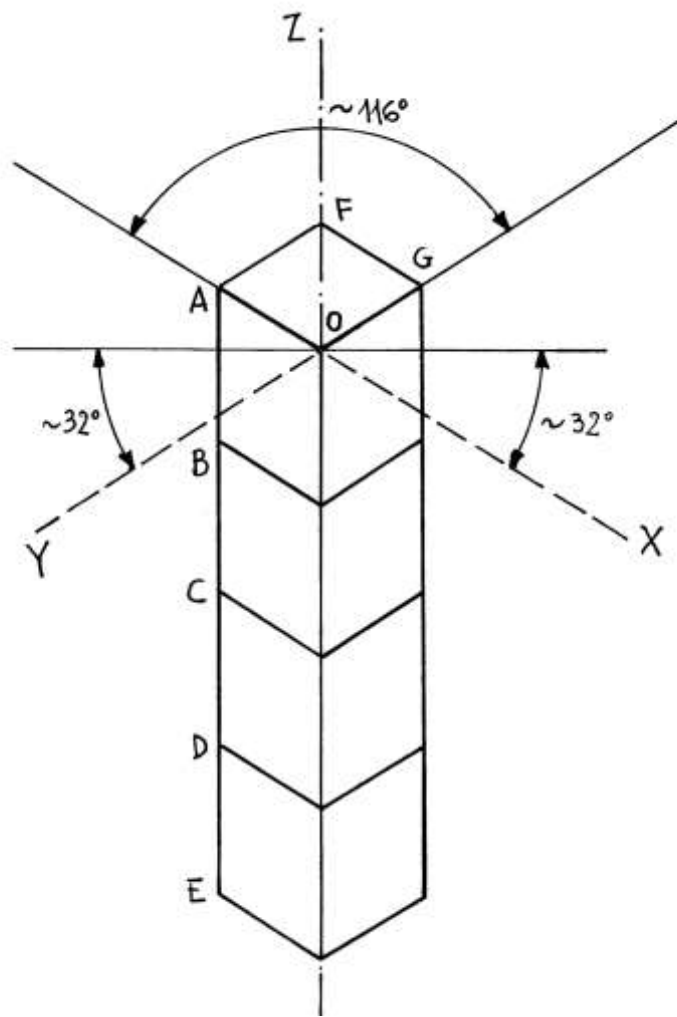
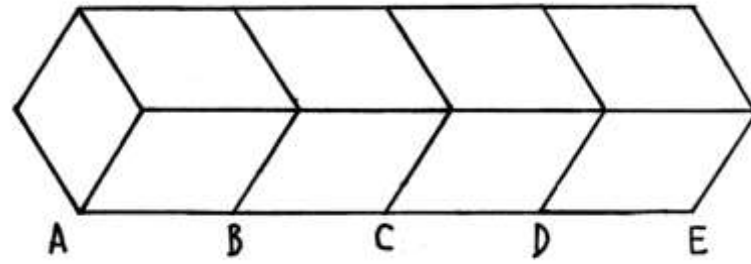
Un confronto fra lo schema di Dürer – Bartoli e la corretta assonometria isometrica del doppio cubo è nella figura che segue:



In colore *rosso* sono disegnati gli spigoli in assonometria isometrica. I vertici contrassegnati con un apice (ˆ) sono quelli del solido secondo Dürer e Bartoli.

Anche la triplicazione e la quadruplicazione del cubo sono caratterizzate da assonometrie approssimate con gli stessi angoli di $\sim 32^\circ$ e $\sim 116^\circ$:





LE ASSONOMETRIE OBLIQUE

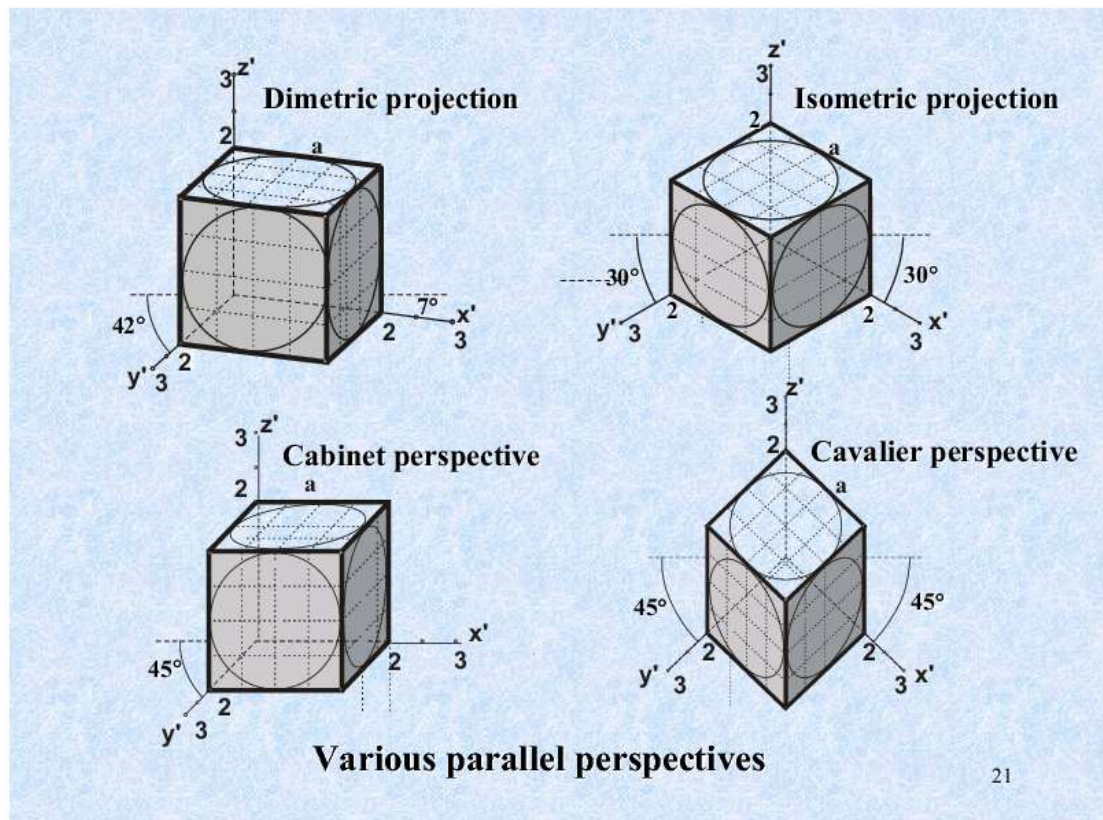
Questo gruppo di assonometrie prevede tre diversi metodi:

- La *cabinet*.
- La *cavaliera*.
- La *planometrica* o *militare*.

La differenza sostanziale fra i diversi metodi è che alcuni scelgono un piano di proiezione verticale (assonometria cavaliera isometrica e assonometria cavaliera) e altri un piano di proiezione orizzontale (le diverse varianti dell'assonometria militare o planometrica).

In Italia sono usate la cavaliera e la planometrica o militare.

In altri Paesi le cose sono un po' diverse, perché viene chiamata *cabinet* la versione che in Italia è la *cavaliera* comune, come mostra la figura seguente (ed è chiamata *cavaliera* la nostra *militare*):



(Fonte: Liqiu Meng, Politecnico di Monaco, Germania, 2002)

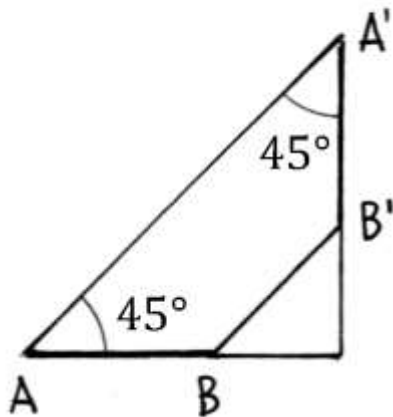
Il termine inglese *cabinet* deriva dall'uso del metodo di rappresentazione che fu impiegato per i disegni di mobili realizzati dalle industrie di arredamento e di forniture per ufficio nei loro cataloghi. *Cabinet* significa armadietto, mobiletto, scrigno, vetrina ... Il metodo fu impiegato negli Stati Uniti a partire dal XIX secolo.

Nella figura, in basso a destra, si vede pure il disegno di un cubo in assonometria militare (o *planometrica* come è definita dalla norma UNI EN ISO 5456-3 del febbraio 2001).

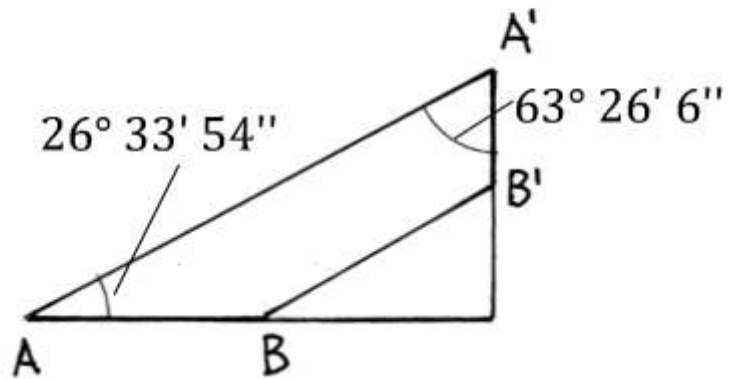
La figura che segue mostra i diversi effetti dell'uso dei due metodi assonometrici (*cavaliera* e *cabinet*).

Nello schema che segue, a sinistra, viene disegnato un triangolo rettangolo isoscele, con angoli acuti di 45° : il segmento AB è lungo quanto la sua proiezione A'B'. Il disegno è in assonometria cavaliera:

assonometria cavaliera



assonometria cabinet



A destra, per l'assonometria cabinet, abbiamo un triangolo rettangolo scaleno con angoli complementari di $63^{\circ} 26' 6''$ e $26^{\circ} 33' 54''$: il segmento AB viene proiettato in A'B' che ha lunghezza pari a $\frac{1}{2}$.

Usando un semplice richiamo di trigonometria è facile verificare che il rapporto di riduzione sia uguale alla tangente dell'angolo β del precedente schema relativo alle *assonometrie oblique*.

Le differenze fra la cavaliera e la cabinet sono riassunte nella seguente tabella:

Tipo di assonometria	Angolo di inclinazione β	Tangente angolo β	Rapporto di fuga (fattore di riduzione delle dimensioni lungo l'asse obliquo)
Cabinet	$63^{\circ} 26' 6''$	2	0,5
Cavaliera	45°	1	0,5 – 1 (talvolta 0,7)

I primi disegni stampati in assonometria cavaliera o *soldatesca* (secondo l'efficace definizione che ne dà Massimo Scolari, richiamando l'espressione "prospettiva soldatesca" usata per la prima volta da Maggi e Castriotto nel loro trattato "Della fortificazione delle città", pubblicato a Venezia nel 1564) non erano molto chiari perché non riducevano le dimensioni degli spigoli paralleli all'asse obliquo. Per rendere la visione più realistica fu introdotta la regola della riduzione a metà della lunghezza di quegli spigoli. Il metodo fu sviluppato dai pittori olandesi: il primo fu Samuel van Hoogstraten, (1627-1678). È ciò che in altri Paesi è chiamato assonometria obliqua cabinet.

Girolamo Maggi (circa 1523 – 1572) è stato un giurista e un ingegnere militare.

Giacomo Fusti, più noto come Castriotto (circa 1501 – 1563), curò la stesura di un trattato sulle fortificazioni che fu revisionato e corretto da Maggi: il testo fu pubblicato a Venezia nel 1583 presso l'editore Borgominiero, con il titolo "*Della fortificazione delle città*".

L'opera è ritenuto il più completo testo di ingegneria militare del Cinquecento.

Nel trattato sono contenuti molti disegni di fortificazioni e di loro parti fra i quali sono i *cavallieri*. Essi sono realizzati in assonometria.

A pagina 43 del *Libro Secondo* del Trattato, Castriotto introduce l'espressione *prospettiva soldatesca* con questa affermazione:

"...Non pensi alcuno in queste mie opere vedere modi o regole di prospettiva: l'una per non essere professione di soldato non le saprei fare: l'altra perché li scorci che vi andrebbero, l'uomo

leverebbe troppo dalle piante; però in esse piante, e profili consisterà il tutto di queste opere e questa si dirà *prospettiva soldatesca*".

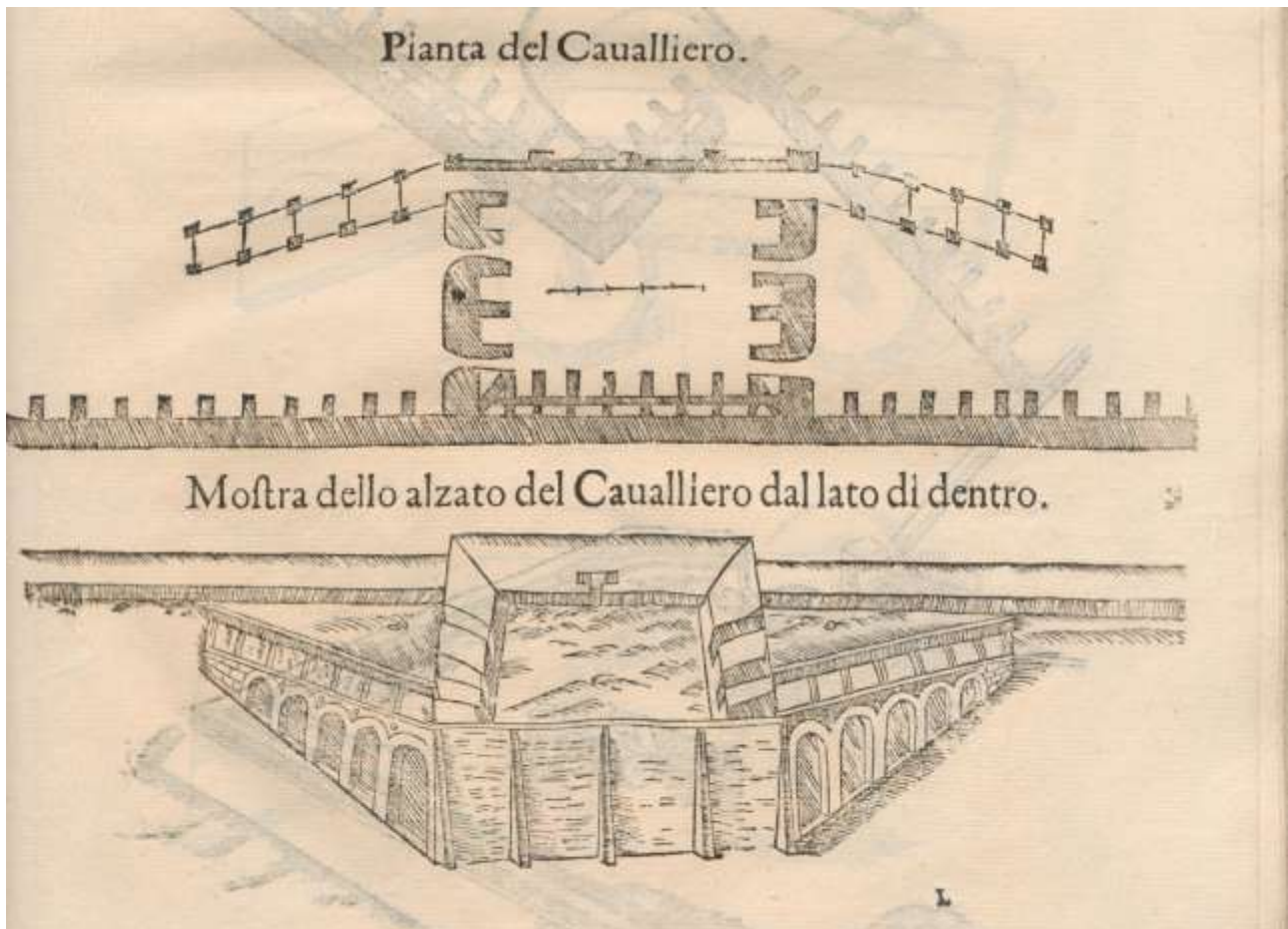
La *prospettiva soldatesca* è citata per la prima volta in questo passo. Essa consiste nel metodo che oggi è detto *assonometria militare*.

Il "cavaliero" e l'assonometria cavaliera

L'assonometria cavaliera deriva il suo nome dal *cavaliero*, termine italiano arcaico, di origine medievale o rinascimentale, che indicava uno spazio sopraelevato all'interno di una fortezza. Secondo un'altra versione, il termine deriverebbe dalla visione di una fortezza da parte di un cavaliere a cavallo, posto su di un'altura sovrastante: anche in questo caso l'origine del nome sarebbe ugualmente italiana.

L'ipotesi è confermata da un'opera di Galileo Galilei (1564-1642), il "*Trattato di fortificazione*", nel quale il grande scienziato definisce i *cavallieri* come luoghi rialzati posti all'interno di una fortificazione. La derivazione dal cognome del matematico Bonaventura Cavalieri (1598? – 1647) non ha quindi alcun fondamento.

Le due figure che seguono sono di Giacomo Castriotto e sono ricavate dalla pagina 41 del *Libro secondo* del suo trattato di fortificazione:



Le prime regole di questo metodo furono fissate nel 1582 dal francese Jacques Androuet du Cerceau, in un suo trattato a stampa ("*Livre d'architecture*"). Ma già nel trattato di Piero della Francesca ("*Libellus de quinque corporibus regularibus*") era impiegata una specie di assonometria

cavaliera con gli spigoli inclinati di 45° e di dimensione ridotta mediamente secondo un rapporto di fuga uguale a 0,2 e quindi di lunghezza assai più corta rispetto alle attuali consuetudini che prevedono un rapporto di fuga uguale a $0,5 \div 0,7$.

Molti Autori italiani del Rinascimento (Luca Pacioli, Leonardo da Vinci, Taccola, Francesco di Giorgio Martini e Antonio da Sangallo il Giovane) disegnarono solidi geometrici e macchine utilizzando varianti dell'assonometria cavaliera con lo scopo di raddrizzare la conicità tipica della prospettiva, allo scopo di conservare il parallelismo degli spigoli e quindi la loro misurabilità.

Uso dell'assonometria obliqua nel Rinascimento

Sempre nel corso del Rinascimento in numerosi trattati furono impiegati schemi in *assonometria obliqua* per le dimostrazioni di problemi di geometria solida (e lo stesso accade ancora oggi in molti libri di testo e nelle stesse tabelle UNI).

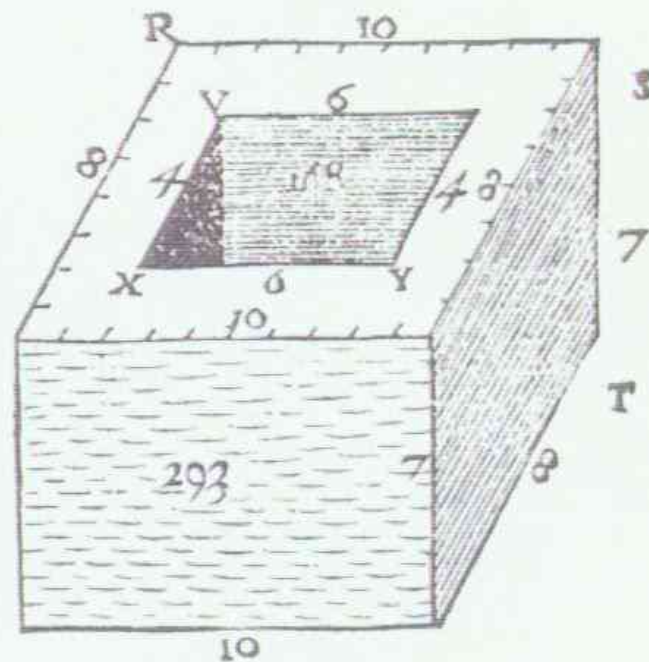
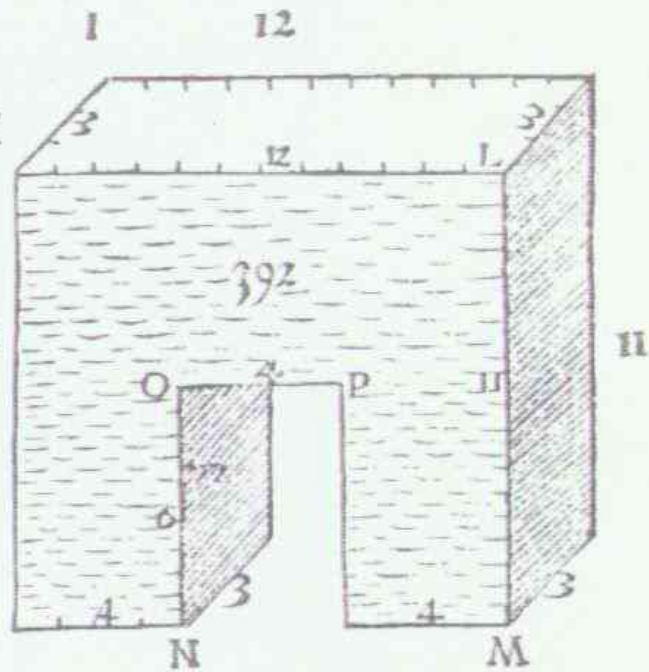
Benché le assonometrie fossero usate da secoli, per lungo tempo non furono scritte opere che ne spiegassero le regole e ciò all'opposto di quello che nel corso del Rinascimento accadde per la prospettiva. La codificazione delle regole di tutte le assonometrie avvenne nel corso del XIX secolo.

La scoperta da parte degli Europei della polvere da sparo, di origine cinese, avvenuta a cavallo fra Medioevo e Rinascimento, portò alla costruzione di una nuova terribile arma da guerra: il *cannone*. Il suo impiego durante gli assedi di città fortificate provocò gravi danni alle mura difensive, agli abitanti e agli edifici. Gli ingegneri militari idearono nuove soluzioni costruttive. I piani delle fortezze e delle città furono disegnati come visti da una posizione elevata: era nato l'uso militare dell'assonometria.

I vantaggi erano grandi: su di un disegno in prospettiva, con le lunghezze scorciate degli spigoli, non era possibile prendere le misure. Un disegno in assonometria conservava abbastanza bene le forme originali e i rapporti geometrici di scala: era molto facile prendere le misure anche da parte di persone poco istruite.

Il francese Oronce Finé (1494-1555) introdusse per primo, in un libro a stampa, la regola di scrivere le misure sugli spigoli delle sue figure ("De geometria pratica", 1544), come è facilmente verificabile nella figura che segue. Soltanto dopo tre secoli fu introdotta la parola "assonometria", proprio con il significato di misure prese e scritte lungo gli assi. Prima di Finé, Leonardo da Vinci aveva scritte le dimensioni nei disegni realizzati (a partire dal 1490) per il progetto del cavallo per il monumento, peraltro mai realizzato, per il duca di Milano, Francesco Sforza: il disegno è conservato nel castello di Windsor e porta il n. 12319. Leonardo usò la lunghezza della testa del cavallo quale unità di misura e da essa derivò multipli e sottomultipli.

pedū atq; eadem quæ pri-
us altitudo. Duc itaq; pri-
mū 10 in 8, fient 80:
hæc in 7, consurgent
560. Multiplica post-
modum 6 in 4, fient 24:
hæc rursus in 7, resul-
tabunt 168. Tolle
168 à 560, relinquen-
tur 392: totidē pedū
est ipsius rectanguli soli-
di excauati Q R S T
crassitudo. Idem respon-
denter facito de cæteris.
Vnde si examinaueris se-
mel, quantū liquoris pes
unus cubicus capiat: omni-
um uasorum rectangulo-
rum poteris non minus le-
uiter metiri capacitatem.

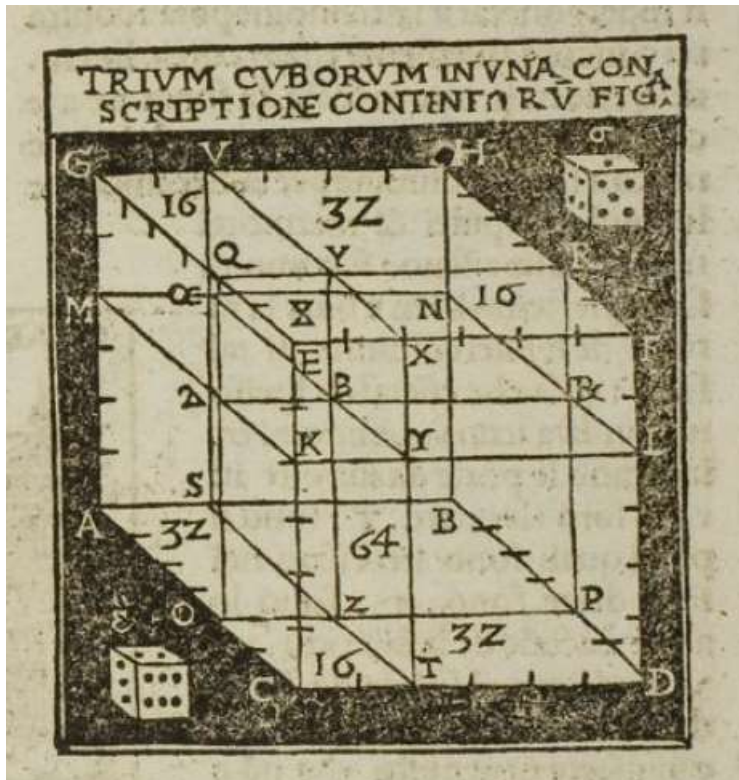


DE GENERALI QVARVM
cumque columnarum dimensione.

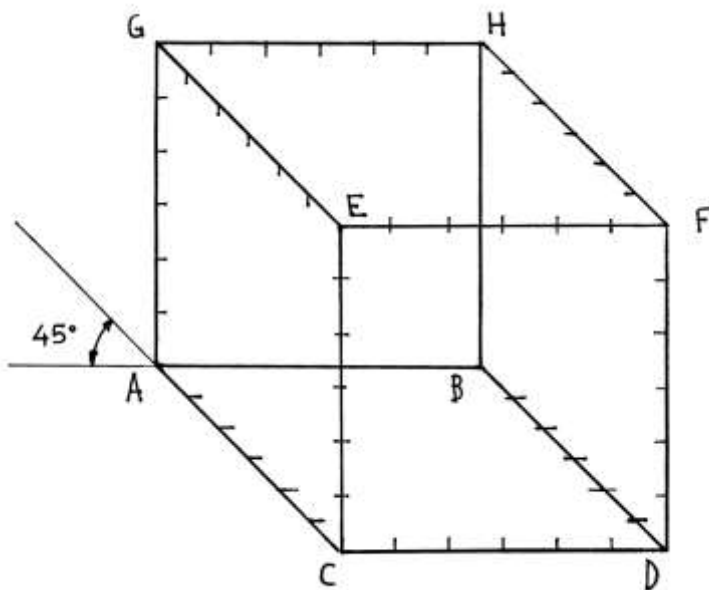
CAPVT XXIX.

Columna

L'uso di scrivere le quote sugli spigoli di un solido, un *cubo*, non è stato introdotto per primo da Finé, ma è dovuto a Cesare Cesariano (1475-1543) nella sua edizione italiana (pubblicata a Como nel 1521) del “*De architectura*” di Vitruvio:



Il disegno del cubo di Cesariano è del tipo a “filo di ferro” e mostra tutti gli spigoli. Questi ultimi sono inclinati di circa 45° rispetto alla linea dell’orizzonte e l’assonometria è cavaliera:



Il rapporto di fuga RF vale:
 $RF = AC/CD \approx 0,8.$

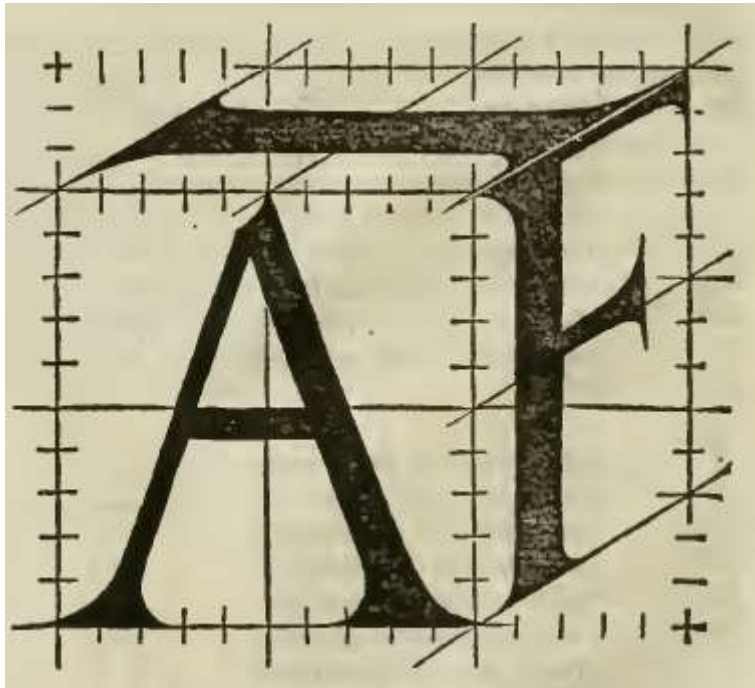
Sugli spigoli sono disegnate le tacche occorrenti per dividere le lunghezze in *sei* parti uguali, forse per l'influenza del sistema di misura duodecimale.

Dal disegno si ricava che il cubo ha spigoli lunghi 4 unità: dovrebbe trattarsi di *cubiti* o *braccia milanesi*: il braccio milanese aveva lunghezza equivalente a 59,4936 cm. Questa unità era divisa in 12 *once*.

Infine, ai due estremi Cesariano disegnò in assonometria due dadi da gioco con le cifre incise: le sei cifre compaiono una sola volta e sono disposte in maniera corretta.

I metodi grafici di Cesariano furono ripresi anche dal tipografo e geometra francese Geoffroy Tory (1480-1533) che, ispirato ai modelli di Vitruvio e di Alberti, disegnò molti caratteri nel suo trattato *Champfleury* pubblicato a Parigi nel 1529.

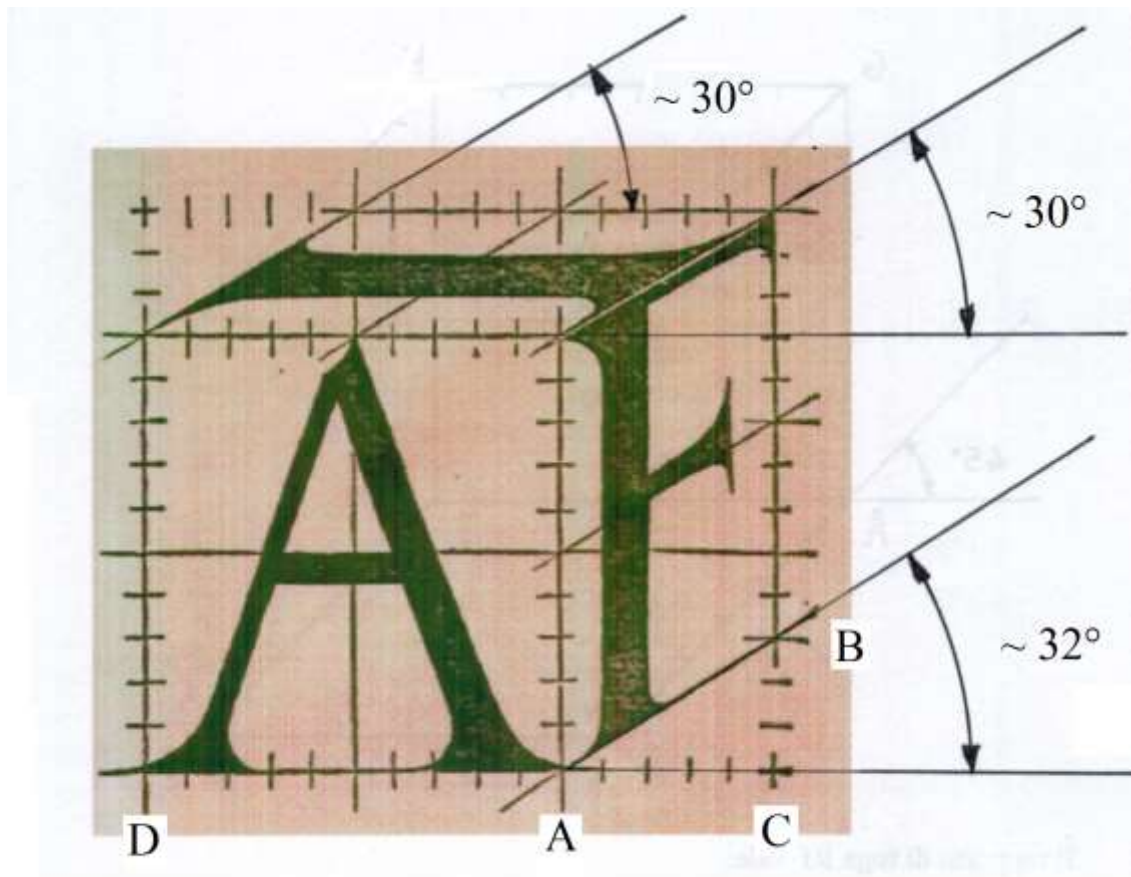
La figura che segue è riprodotta da questo ultimo testo:



Sulle tre facce visibili di un cubo sono disegnate le lettere maiuscole A, F e I.

Gli spigoli orizzontali e verticali del solido sono divisi in *dieci* parti con l'ausilio delle tacche.

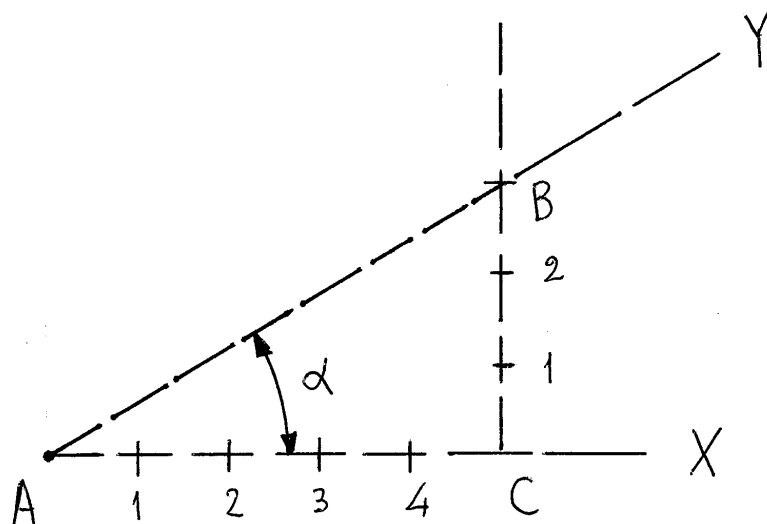
Il cubo è disegnato in assonometria cavaliera con angoli di fuga intorno ai 30°:



Il rapporto di fuga RF vale:

$$RF = AB/DA \approx 0,61.$$

Il triangolo ABC è rettangolo e i suoi cateti sono lunghi: $AC = 5$ e $BC = 3$:



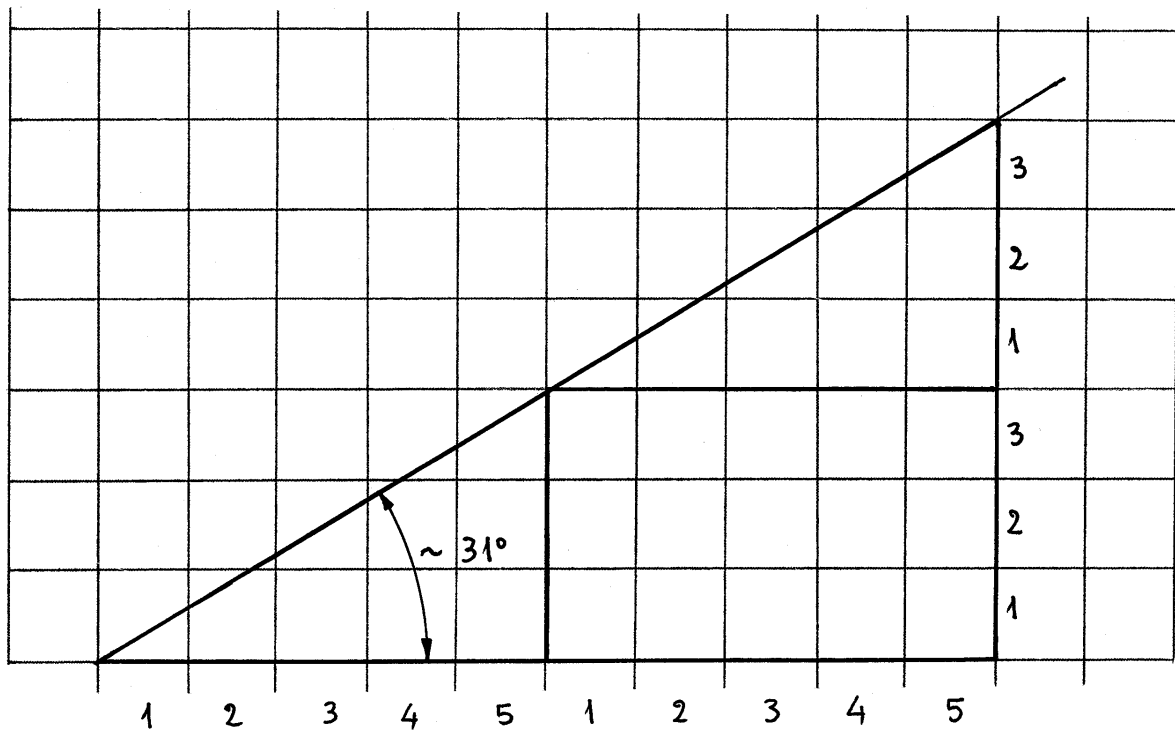
La tangente dell'angolo α è:

$$\text{tg } \alpha = BC/AC = 3/5 = 0,6.$$

A questo valore corrisponde un angolo di $\sim 31^\circ$, assai vicino a quello di 30° che è caratteristico dell'*assonometria isometrica*.

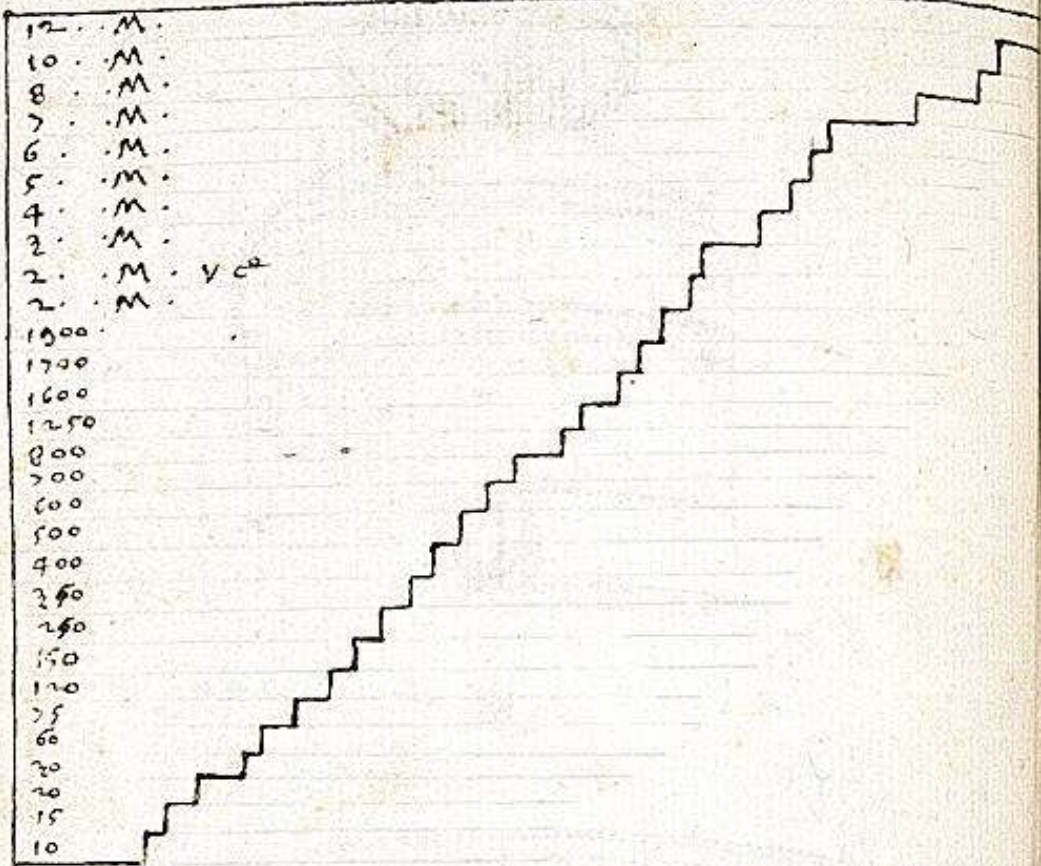
Se vi è necessità di tracciare una veloce *assonometria isometrica* di un oggetto può servire un reticolato quadrato del quale si sfruttano le proprietà del triangolo rettangolo di cateti lunghi 5 e

3 e con l'ipotenusa inclinata di $\sim 31^\circ$:



Si può ragionevolmente ipotizzare che Geoffroy Tory abbia impiegato un angolo di 30° .

Fra i primi ingegneri ad usare un metodo di quotazione va ricordato Bonaccorso Ghiberti (Firenze, 1451-1516): nella p. 34 (carta 51 verso) ed in altra successiva del suo manoscritto *Zibaldone* (Banco Rari 228, BNCF) è contenuto un accenno di quotatura nello schema di una sagoma usata per misurare le campane da fondere (fig. 2.41):



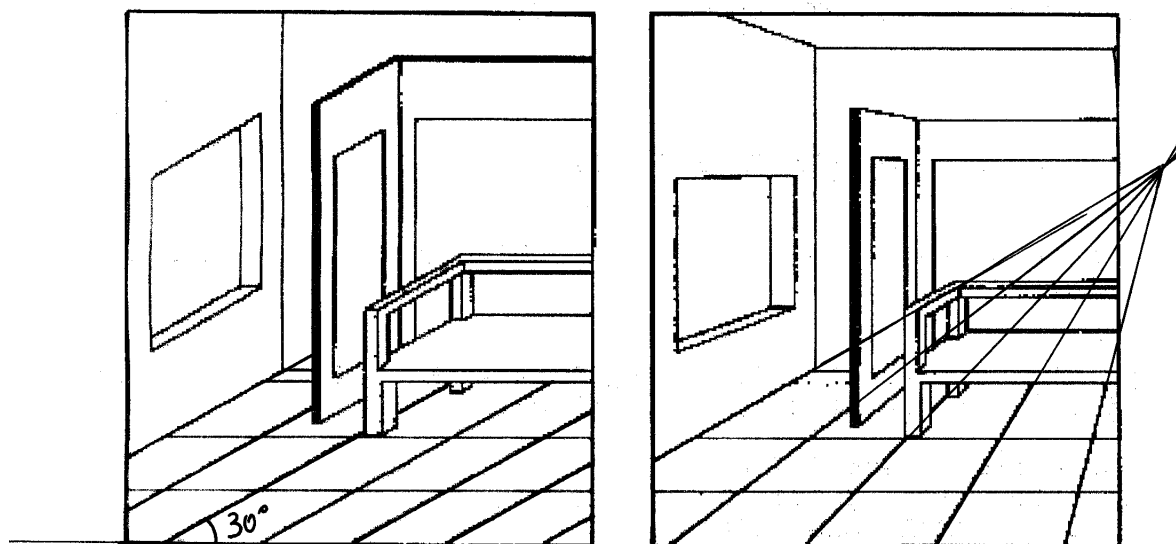
La. 14 parte $\frac{1}{2}$ pu. ~~largo~~ largo era alta. era
 alta. 12. largo 14. $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$.

La. 22. ultima parte della larghezza a effetto. largo 168
 Molte. Inclinazione. dunque ad aggiungendovi poi certe parti
 me. 84.

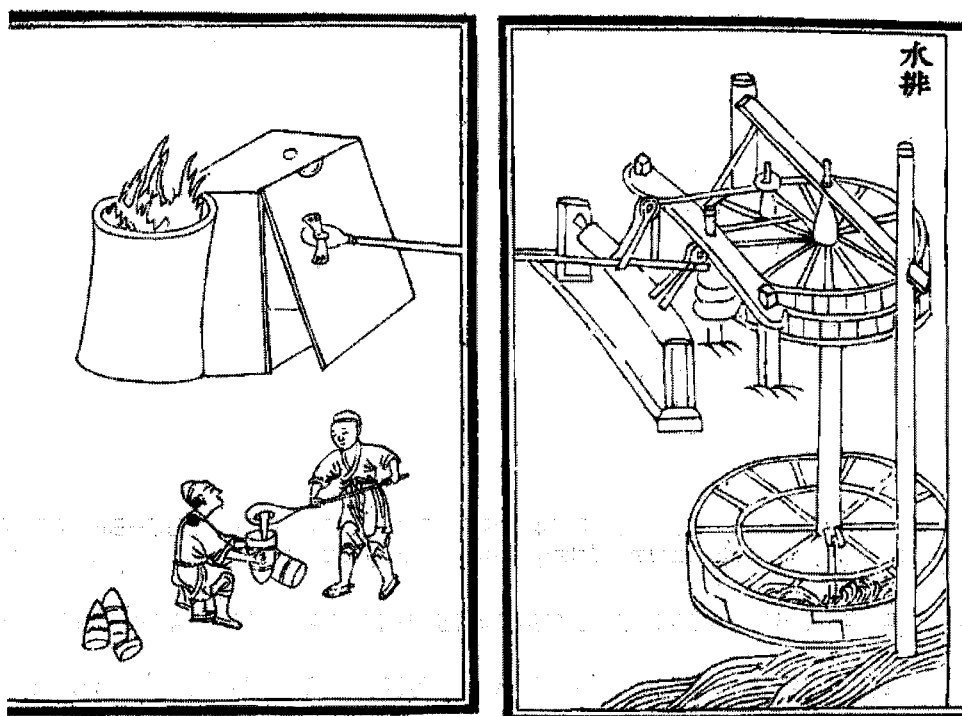
IL CONTRIBUTO DI CINA E GIAPPONE

In Cina era usata da secoli una forma di pittura che disegnava paesaggi (e raramente rappresentazioni di ambienti interni) impiegando una tecnica particolare che univa la prospettiva aerea e l'assonometria cavaliera. Il trattato cinese *Li Ming-chung Ying Tsao Fa Shih* (Regole di costruzioni di Li Ming-chung) risale all'epoca della dinastia Sung e fu pubblicato nel 1097. È un'opera collettiva che si occupa di piante, costruzioni, taglio di pietre, carpenteria, mobili e decorazioni: gli schemi per l'assemblaggio sono in assonometria cavaliera.

La figura che segue mette a confronto la rappresentazione in assonometria cinese (a sinistra) e in prospettiva (a destra) dello stesso ambiente (da Jan Krikke):



La figura seguente,



tratta da un'opera cinese del 1313, rappresenta un mantice impiegato per insufflare aria in una

fonderia, azionato da una ruota idraulica orizzontale: il disegno è tracciato in assonometria con vista dall'alto.

Perfino in tema di proiezioni ortogonali, in Cina era pratica diffusa il loro impiego: durante la dinastia Tang, il filosofo e scrittore Liu Zongyuan (773-819) descrisse il disegno di un palazzo, realizzato con questo metodo.

Anche in Giappone i pittori usavano metodi assonometrici.

In entrambi i Paesi asiatici l'uso di questi metodi era praticamente obbligato a causa dell'impiego di pitture su rotolo.

Questa tecnica assonometrica risalirebbe almeno ai primissimi secoli della nostra èra, se non prima. Le difficoltà linguistiche hanno reso difficili gli scambi culturali con la Cina e con il Giappone: la globalizzazione della quale essi sono fra i principali protagonisti potrà aiutare l'Occidente a riscoprire le antiche culture asiatiche.

I Gesuiti giunsero in Cina nel XVI secolo e vi portarono, fra le altre, le conoscenze geometriche e il metodo della *prospettiva scientifica*, che però fu poco apprezzato dai Cinesi.

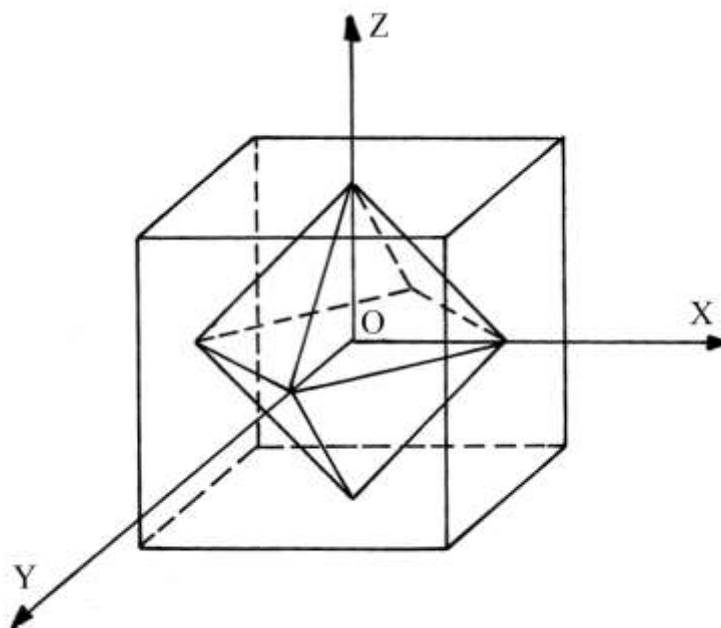
Al ritorno in Europa, i missionari Gesuiti riportarono la conoscenza delle tecniche geometriche cinesi.

L'arrivo in Europa dalla Cina delle tecniche assonometriche dell'Oriente contribuì a rafforzare le conoscenze empiriche già acquisite: l'impiego di queste tecniche grafiche portò all'eliminazione degli angoli nascosti presenti nei disegni in prospettiva e semplificò grandemente i calcoli.

L'ASSONOMETRIA CAVALIERA E LA CRISTALLOGRAFIA nostro

continente *l'assonometria cavaliera* era già usata per necessità militari; ne fu poi estesa l'applicazione ad altri tre campi:

- *Tecnologia*: disegni di macchine e loro componenti.
- *Cristallografia*: per il taglio dei diamanti e per il disegno della struttura dei cristalli. La maggior parte delle figure contenute nei testi che descrivono cristalli, sono disegnate in assonometria cavaliera. La figura che segue presenta l'assonometria cavaliera di un cubo con un *ottaedro* regolare inscritto e i cui vertici cadono sui centri delle sei facce del cubo. In cristallografia sono usati anche altri metodi, più complessi dell'assonometria cavaliera:



- *Balistica*: studio delle traiettorie dei proiettili.

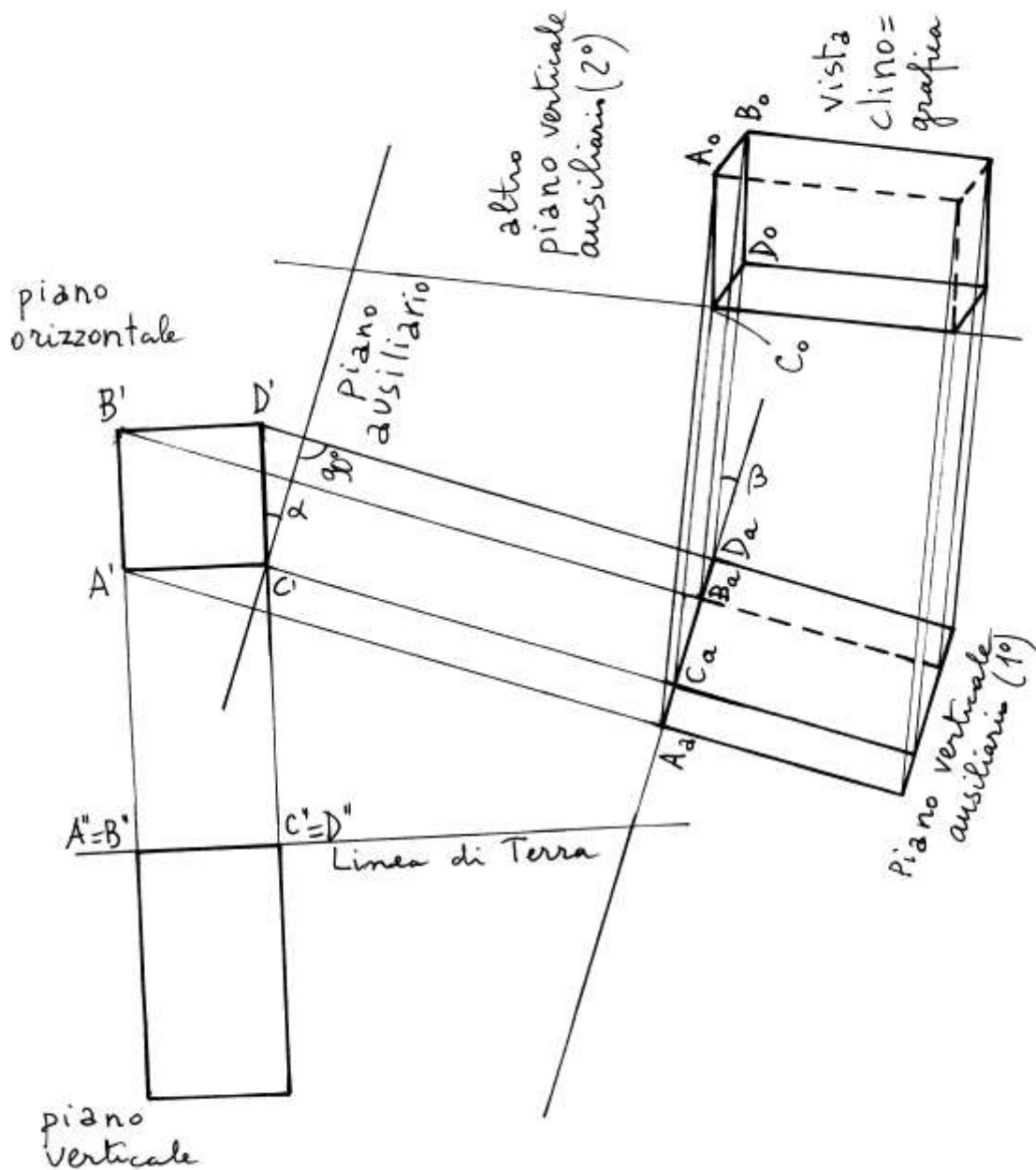
----- APPROFONDIMENTO -----

La proiezione clinografica

In Cristallografia, la precisa rappresentazione dei cristalli è fatta con l'uso di un metodo proiettivo che è la *proiezione clinografica*: essa rientra fra le *assonometrie oblique*.

Il principio è mostrato nella figura che segue: come esempio è stato scelto un prisma retto a base quadrata.

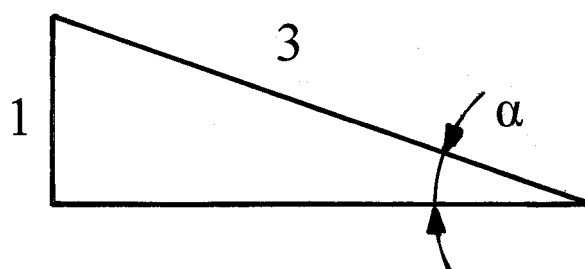
Il solido è disegnato secondo il *metodo americano* o del *terzo diedro*. Le due viste principali sono disegnate a sinistra:



- In pianta (*piano orizzontale* secondo la terminologia usata in Italia);
- Di fronte (*piano verticale*).

I due piani sono separati dalla *linea di Terra* (L.T.).

Per il punto C' disegnare una linea che rappresenta il profilo di un piano ausiliario, inclinato dell'angolo α , determinato con la costruzione presentata nella figura che segue, che rappresenta un triangolo rettangolo con il cateto minore lungo 1 e l'ipotenusa lunga 3:



Usando il rapporto 1:3, operiamo per via geometrica, senza dover ricorrere alla trigonometria. L'angolo α ha *seno* uguale a $1/3$ ed è ampio $\sim 19^\circ 20'$. Il seno di un angolo, α , è dato dal rapporto fra le lunghezze del cateto opposto e dell'ipotenusa: $\text{sen } \alpha = 1/3$.

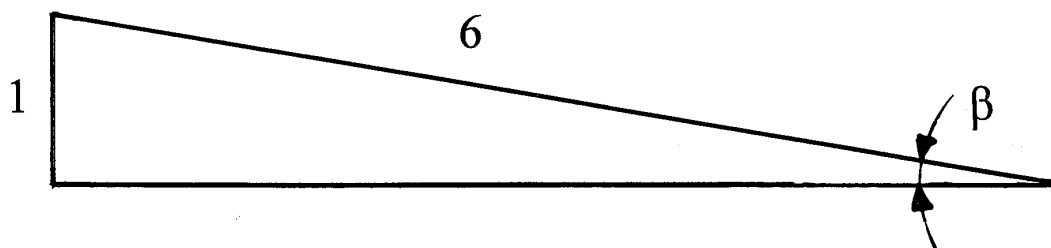
Torniamo al disegno in proiezione clinografica. A distanza a piacere, tracciare una linea parallela a quella inclinata passante per C' : esso è il profilo di un piano verticale ausiliario (1°).

A partire dai punti A' , B' , C' e D' disegnare le linee di proiezione perpendicolari al profilo del piano passante per C' .

Sono così determinati i punti A_a , B_a , C_a e D_a .

Riportando l'altezza del prisma si ricavano i suoi spigoli in questa nuova posizione.

Occorre ora disegnare un triangolo rettangolo con il cateto minore lungo 1 e l'ipotenusa lunga 6:



L'angolo β ha seno uguale a $1/6$ e misura $\sim 9^\circ 35'$.

A partire dal punto D_a condurre una linea inclinata dell'angolo β rispetto al segmento A_aD_a .

A distanza a piacere da D_a , disegnare una linea perpendicolare a quella appena tracciata: essa costituisce il confine di un secondo piano verticale ausiliario (2°).

Dai vertici A_a , B_a , C_a e D_a e dai loro corrispondenti della base inferiore del prisma, disegnare linee inclinate e parallele a quella tracciata da D_a .

Il punto C_0 è il primo punto ad essere determinato: con apertura di compasso A_aB_a fare centro in C_0 e fissare il punto A_0 .

Con apertura A_aC_a fare centro in C_0 e determinare il punto D_0 .

Con le squadre completare la *proiezione clinografica* del prisma a base quadrata.

Ulteriori e più dettagliate spiegazioni sono contenute nel testo di Richard George Huzarski, citato in bibliografia.

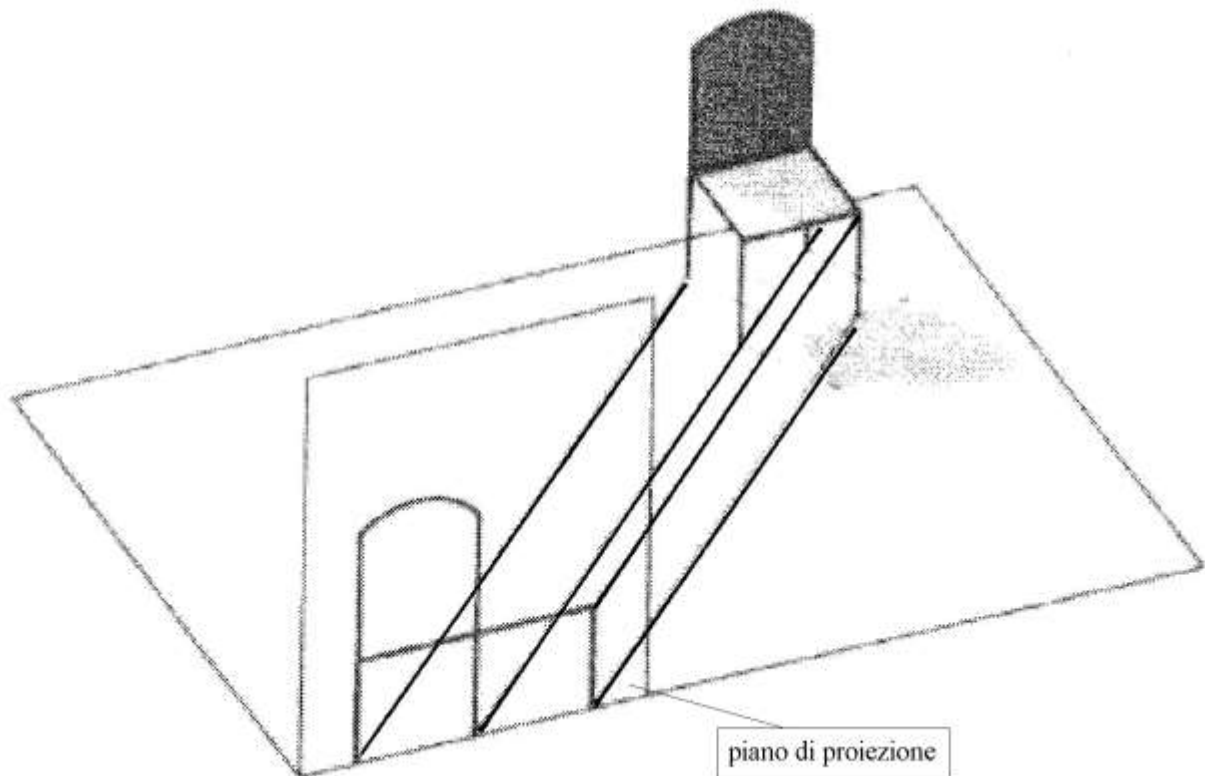
ALTRE VARIANTI DELLE ASSONOMETRIE OBLIQUE

Secondo due studiosi inglesi, Fred Dubery e John Willats, esistono altre due forme di assonometria obliqua, avvicinati alla *cavaliera* e alla *cabinet*.

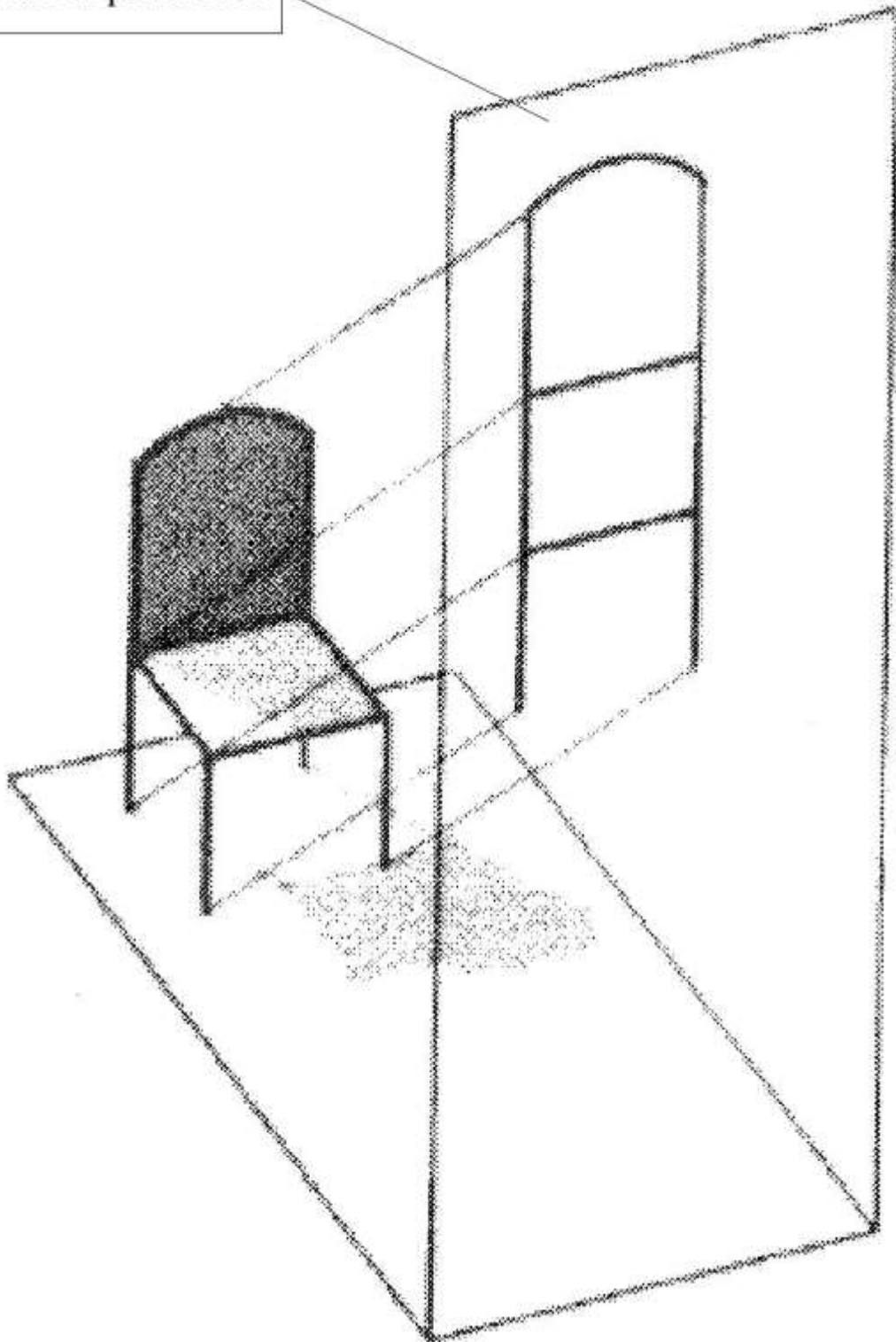
Essi le definiscono con l'espressione *fold-out oblique*, che può essere tradotta con l'espressione italiana "seguendo gli spigoli della piegatura".

I due metodi non sono ancora accettati dagli Enti di standardizzazione.

Nelle due figure che seguono sono disegnate le viste semplificate di una sedia stilizzata:



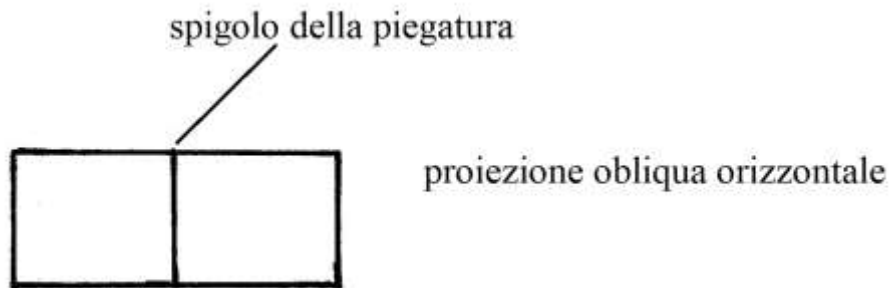
piano di proiezione



La prima figura è una *proiezione obliqua orizzontale*: una faccia dell'oggetto è parallela al piano di proiezione e le linee di proiezione sono fra loro parallele ma inclinate di 45° verso il piano di proiezione solo in direzione orizzontale.

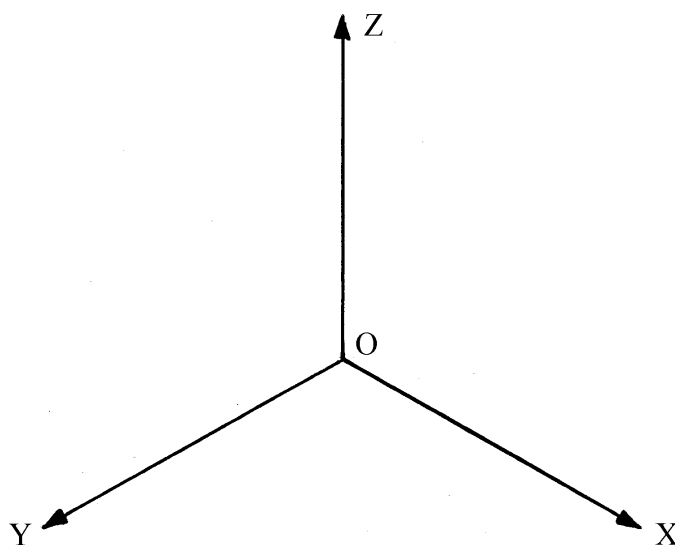
La seconda figura è una *proiezione obliqua verticale*: una faccia dell'oggetto è sempre parallela al piano di proiezione e le linee di proiezione sono fra loro parallele, ma inclinate di 45° verso il piano solo in direzione verticale.

I simboli usati per rappresentare i due metodi sono descritti nella figura che segue:

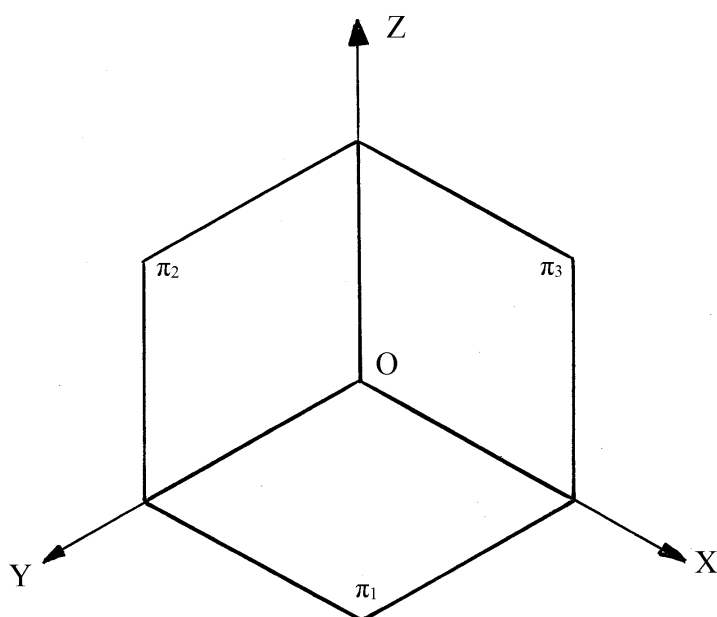


LE ASSONOMETRIE ORTOGONALI

I raggi visivi che colpiscono il piano o quadro di proiezione sono ad esso perpendicolari. Sono usati tre assi di riferimento che formano una terna: X, Y e Z.



I tre assi delimitano tre piani π_1 , π_2 e π_3 che sono fra loro perpendicolari e formanti un triedro:



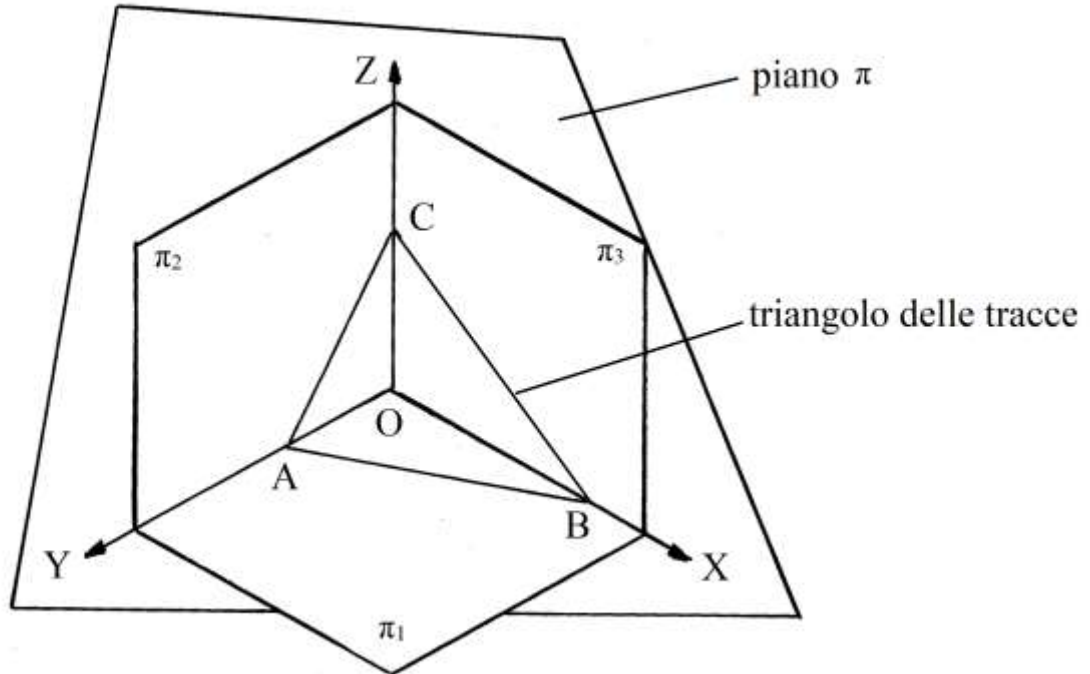
π_1 è il piano orizzontale delimitato dagli assi X e Y, π_2 è il piano verticale che è compreso fra Z e Y e π_3 il piano laterale definito dagli assi Z e X.

π_1 corrisponde al piano orizzontale (P.O.) delle proiezioni ortogonali, π_2 al piano verticale (P.V.) e π_3 al piano laterale (P.L.) del metodo europeo delle proiezioni ortogonali.

L'asse X coincide con la *linea di terra*. Il piano π_1 corrisponde al *geometrico* della prospettiva.

Nelle assonometrie ortogonali, per convenzione, uno dei tre assi è sempre disposto verticalmente: in questi esempi è l'asse Z.

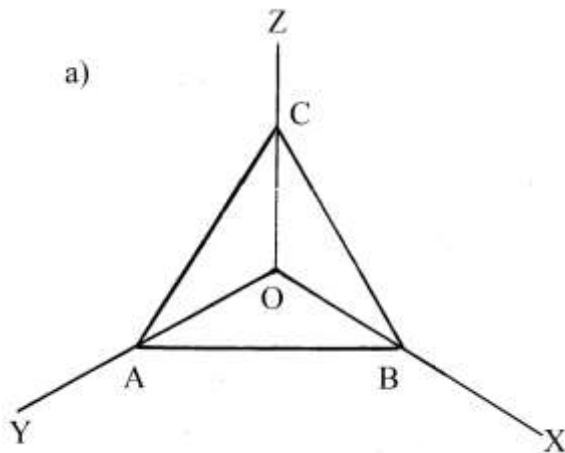
Un generico piano di proiezione o *quadro* π è disposto in maniera qualsiasi rispetto alla terna X, Y e Z:



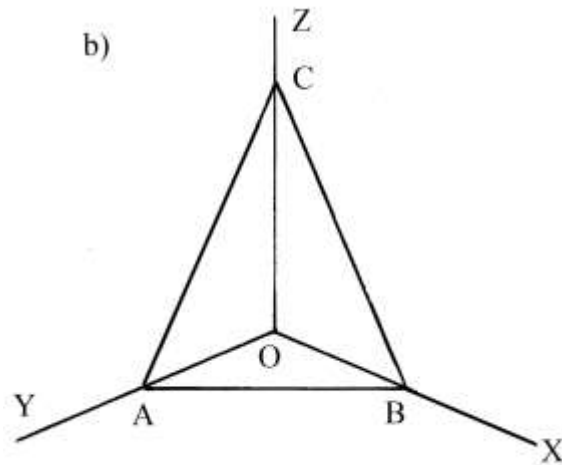
Ciascuno dei tre assi X, Y e Z determina sul piano π una *traccia*: nella precedente figura le tre tracce sono i segmenti AB, BC e CA. Esse creano un triangolo che è chiamato *triangolo delle tracce*: esso è sempre *acutangolo*. Il suo *ortocentro* (punto di incrocio delle tre altezze) coincide con la proiezione ortogonale sul piano π del punto O, origine della terna di assi X, Y e Z.

Il triangolo delle tracce può assumere varie forme:

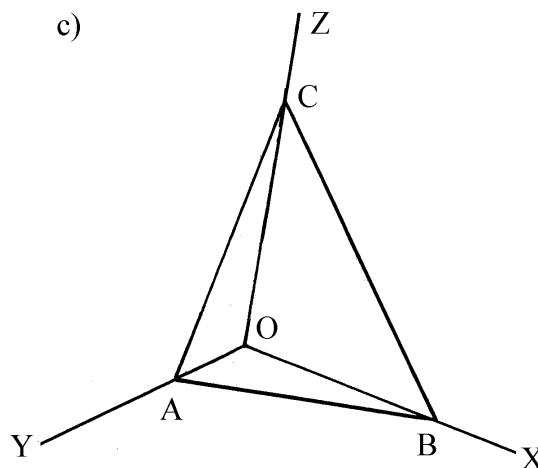
- a) *Equilatero*: è il caso dell'assonometria isometrica. Gli angoli in A, in B e in C hanno uguale ampiezza:



b) *Isoscele*: è il caso di un'assonometria dimetrica (gli angoli in A e in B nella figura che segue hanno la stessa ampiezza).



c) *Scaleno*: è il caso di una generica assonometria trimetrica.



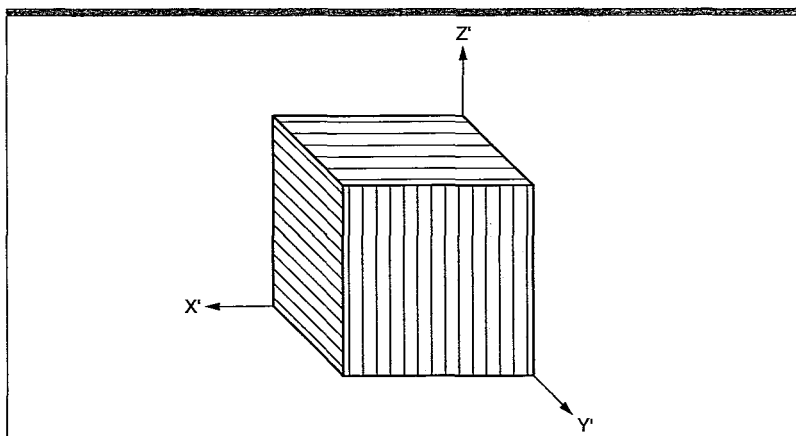
Il triangolo delle tracce rappresenta la proiezione sul *piano o quadro di proiezione* di una piramide retta che ha base triangolare e vertice corrispondente all'ortocentro O. Il triangolo di base può essere equilatero (isometrica), isoscele (dimetrica) o scaleno (assonometria trimetrica).

L'altezza della piramide è perpendicolare al quadro di proiezione ed è ridotta al punto O.

La costruzione del triangolo delle tracce

Un interessante fascicolo di Daniele Colistra (Università Mediterranea di Reggio Calabria), citato in bibliografia, fornisce delle chiare e dettagliate istruzioni per la tracciatura di un'assonometria ortogonale. Alcune fra le indicazioni che seguono sono rielaborate dal suo scritto.

Fra quelle ortogonali, l'assonometria trimetrica è la più complessa a costruirsi. Forse anche per questo motivo, il metodo non è previsto dalla norma UNI EN ISO 5456-3 del febbraio 2001, come mostra la figura che segue:



4.6

Quotatura

Gli oggetti rappresentati in proiezione assonometrica non sono, in generale, quotati. Nel caso venissero quotati devono essere adottate le stesse regole valide per le proiezioni ortogonali (ISO 129 ed ISO 3098-1) (vedere figure 6 e 12).

5

ASSONOMETRIE RACCOMANDATE

Le assonometrie raccomandate per i disegni tecnici sono:

- l'assonometria isometrica (vedere 5.1);
- l'assonometria dimetrica (vedere 5.2);
- l'assonometria obliqua (vedere 5.3).

Gli assi coordinati X, Y, Z devono essere indicati con lettere maiuscole. Se vengono indicati altri particolari, per esempio le dimensioni, sono da indicare su un prospetto o sul disegno, devono essere utilizzate le lettere minuscole x, y, z per una migliore differenziazione (per esempi, vedere ISO 6412-2).

5.1

Assonometria isometrica

L'assonometria isometrica è una assonometria ortogonale in cui il piano di proiezione forma tre angoli uguali con i tre assi coordinati X, Y e Z¹⁾.

Tre segmenti di lunghezza unitaria u_x , u_y ed u_z sui tre assi coordinati X, Y e Z, sono rispettivamente proiettati ortogonalmente sul piano di proiezione in tre segmenti uguali u_x' , u_y' ed u_z' sugli assi proiettati X', Y' e Z', le cui lunghezze sono:

$$u_x' = u_y' = u_z' = (2/3)^{1/2} = 0,816$$

1) Ciò fornisce una rappresentazione identica a quella ottenuta dalla proiezione ortogonale della vista principale di un esaedro con tutte le sue facce ugualmente inclinate rispetto al piano di proiezione.

Già la norma UNI 4819 dell'ottobre 1961 anticipava questa posizione, come spiega la figura che segue:

1. Generalità

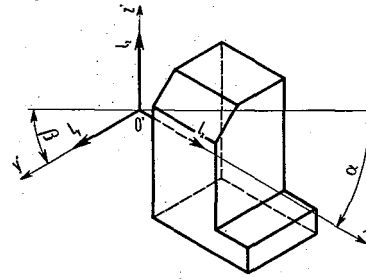
Le assonometrie che in casi particolari possono essere impiegate nei disegni tecnici sono l'assonometria isometrica, l'assonometria dimetrica e l'assonometria cavaliera.

2. Assonometria isometrica

Tre segmenti uguali ad 1, presi sui tre assi cartesiani Ox, Oy, Oz , si proiettano in tre segmenti uguali di lunghezza 0,816. Normalmente viene adottato il rapporto pratico:

$$l_x : l_y : l_z = 1 : 1 : 1$$

Per ottenere queste condizioni è sufficiente disporre le proiezioni dei tre assi come in figura 1: quella $O'z'$ verticale, quella $O'x'$ ruotata in senso orario di 30° rispetto all'orizzontale e quella $O'y'$ ruotata in senso antiorario di 30° rispetto all'orizzontale. L'assonometria isometrica così ottenuta rappresenta l'oggetto ingrandito di 1,22 volte.



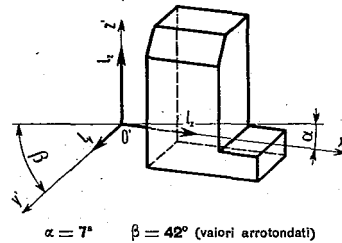
$\alpha = \beta = 30^\circ$
Fig. 1

3. Assonometria dimetrica

Tre segmenti uguali ad 1, presi sui tre assi cartesiani Ox, Oy, Oz , proiettano nel quadro assonometrico tre segmenti rispettivamente di lunghezza 0,942, $\frac{0,942}{2}$, 0,942. Normalmente viene adottato il rapporto pratico:

$$l_x : l_y : l_z = 1 : 1/2 : 1$$

Per ottenere queste condizioni è sufficiente disporre le proiezioni dei tre assi come in figura 2¹⁾: quella $O'z'$ verticale, quella $O'x'$ ruotata in senso orario di 7° rispetto all'orizzontale e quella $O'y'$ ruotata in senso antiorario di 42° rispetto all'orizzontale²⁾. L'assonometria dimetrica così ottenuta rappresenta l'oggetto ingrandito di 1,06 volte.



$\alpha = 7^\circ \quad \beta = 42^\circ$ (valori arrotondati)
Fig. 2

4. Assonometria cavaliera (obliqua)

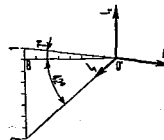
Il sistema dell'assonometria cavaliera (obliqua) consiste nel proiettare da distanza infinita sul piano del disegno l'oggetto da rappresentare secondo una direzione inclinata rispetto a detto piano. L'oggetto da proiettare deve essere disposto nello spazio in modo che la terna di assi cartesiani ortogonali Ox, Oy, Oz , ai quali l'oggetto è riferito nello spazio, risulti con il piano Xz

(segue)

1) Le proiezioni dei tre assi possono anche essere disposte come indicato nella figura a fianco



2) Per la costruzione degli angoli di 7° e 42° può essere impiegata la costruzione grafica sottolincata, nella quale i segmenti di lunghezza 1 e 7, rispetto al segmento comune di lunghezza 8, stanno nei rapporti $1 : 8$ e $7 : 8$.



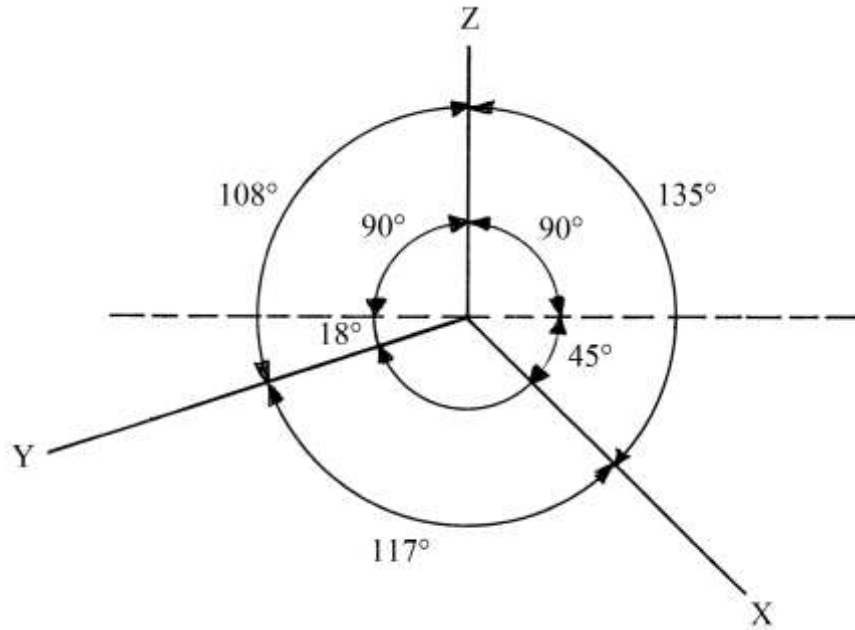
Al contrario, la norma UNI 3969 dell'ottobre 1984, contemplava anche l'assonometria trimetrica:

3. Quadro sinottico

Metodo di proiezione		Disposizione e presentazione delle viste	Rinvio a norma	
Denominazione generica	Denominazione specifica			
Proiezioni ortogonali	Metodo del primo diedro (metodo E)		UNI 3970	
	Metodo del terzo diedro (metodo A)			
	Metodo delle frecce			
Proiezioni assonometriche	Ortagonale	isometrica		UNI 4819
		dimetrica		
		trimetrica		
	Obliqua	cavallera*		
		cavallera isometrica		
		cavallera planometrica*		

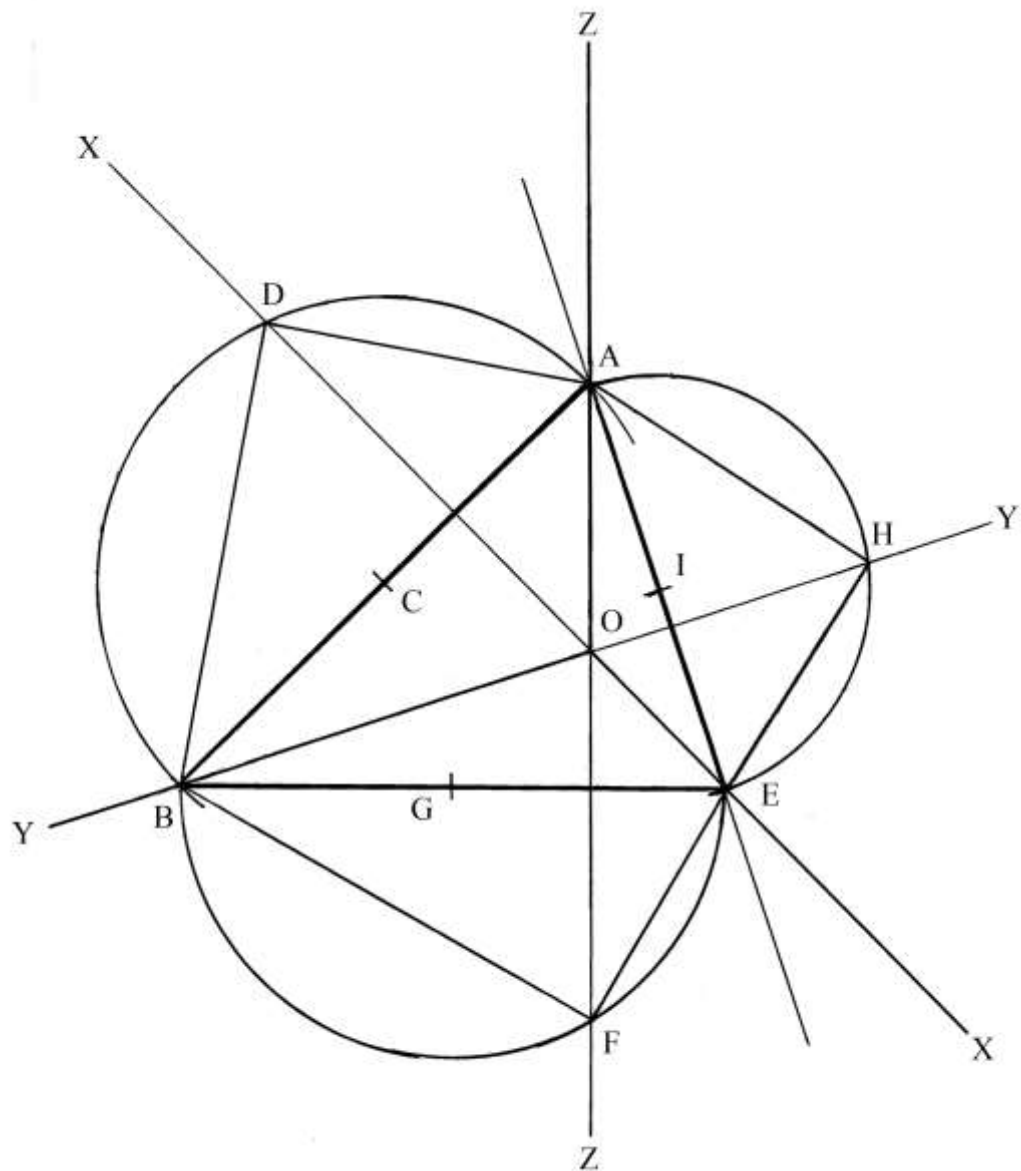
(segue)

Torniamo all'assonometria trimetrica con gli angoli mostrati nell'esempio che segue:



- Per disegnare un'assonometria ortogonale occorre effettuare alcune operazioni preliminari:
- i. Tracciare le proiezioni ortogonali del solido interessato.
 - ii. Fissare gli angoli fra i tre assi.
 - iii. Calcolare i coefficienti di riduzione da applicare sui tre assi.
 - iv. Eseguire l'assonometria impiegando i coefficienti di riduzione determinati con la precedente operazione.

La costruzione di un *triangolo delle tracce* è contenuta nello schema seguente:



Prolungare i tre assi X, Y e Z oltre la loro origine comune O. Questo punto è l'ortocentro del triangolo delle tracce.

Su di un asse, ad esempio quello Z, fissare un punto a piacere: è A.

Da questo punto condurre la perpendicolare all'asse X fino a intersecare quello Y in un punto, B. Determinare il punto medio di AB: è C.

Fare centro in C e con raggio $CA = CB$ disegnare una semicirconferenza che taglia l'asse X in un punto, D. BDA è un triangolo rettangolo inscritto nel semicerchio.

Consideriamo il triangolo ABO: nella figura esso appare *ottusangolo* nel vertice O, ma nella realtà ciò non è vero perché il triangolo è *rettangolo*.

BDA è l'immagine in *vera forma* di ABO: l'angolo AOB appare rettangolo nel vertice D: BDA è il ribaltamento di ABO intorno all'ipotenusa AB.

Lo stesso accade alle altre due coppie di triangoli che incontreremo fra poco: BFE-BOE e AHE-AOE.

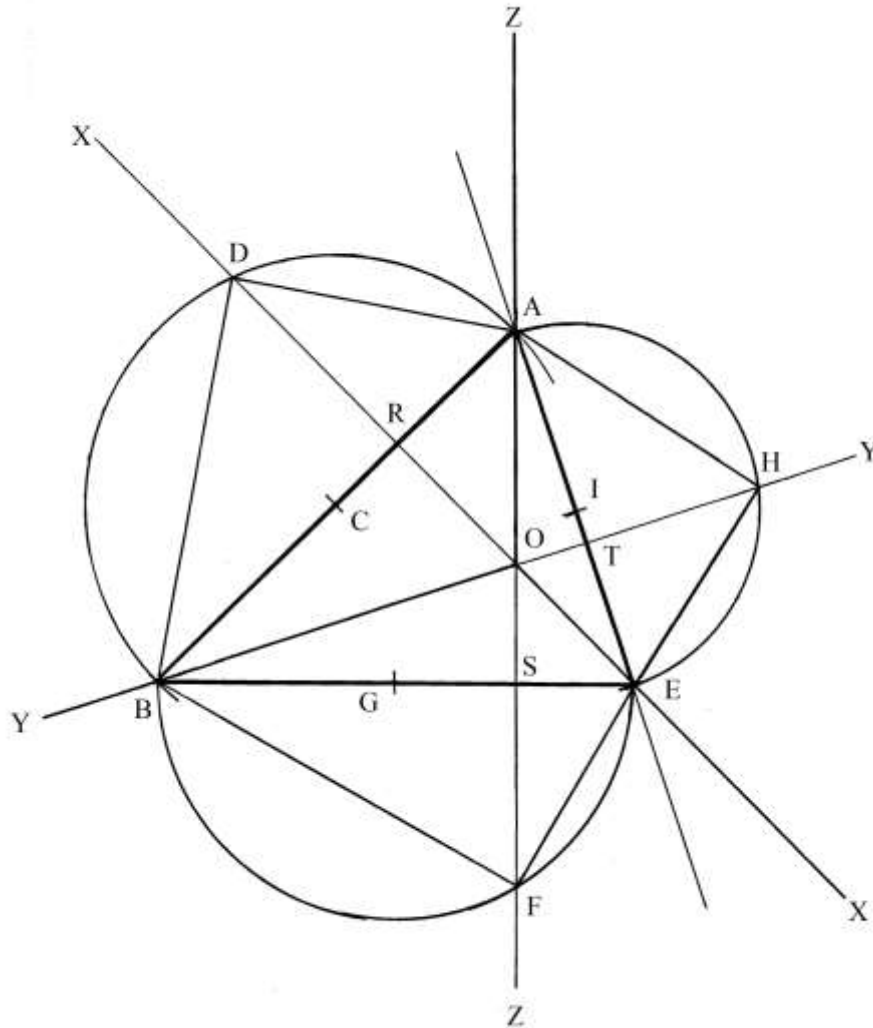
Dal punto B tracciare una linea perpendicolare all'asse Z fino a incontrare quello X in un punto, E.

Stabilire il punto medio di BE: è G. Fare centro in G e con raggio $GB = GE$ disegnare la semicirconfenza da B a E: essa incontra l'asse Y in H.

Unire A con E: il segmento AE è perpendicolare all'asse Y.

Fissare il punto medio di AE: è I. Fare centro in I e con raggio $IA = IE$ tracciare la semicirconfenza da A a E. Anche AHE è un triangolo rettangolo inscritto.

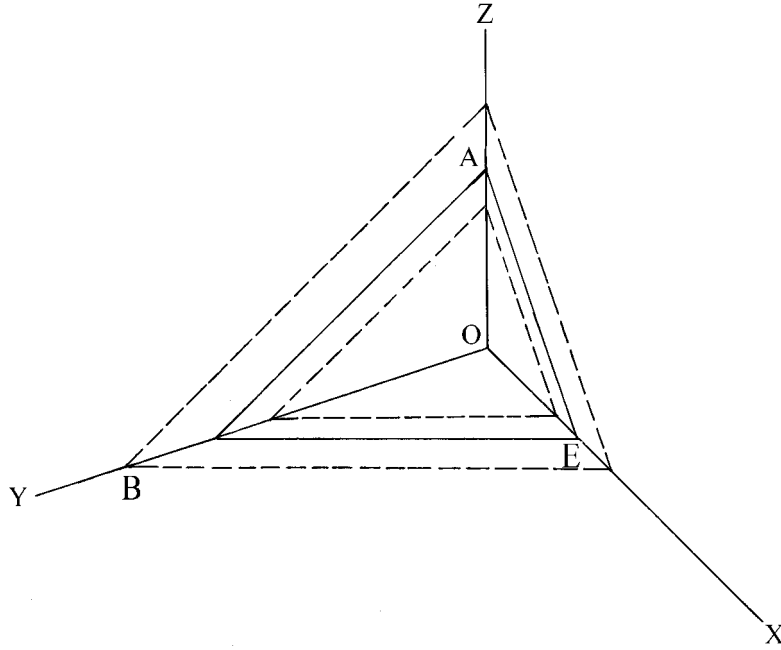
I segmenti DR, FS e HT sono le altezze dei tre triangoli inscritti: essi si intersecano nell'ortocentro O:



I tre segmenti DR, FS e HT giacciono sui prolungamenti degli assi.

AEB è il *triangolo delle tracce* di questa particolare assonometria trimetrica. Le tre altezze giacciono sulla terna di assi.

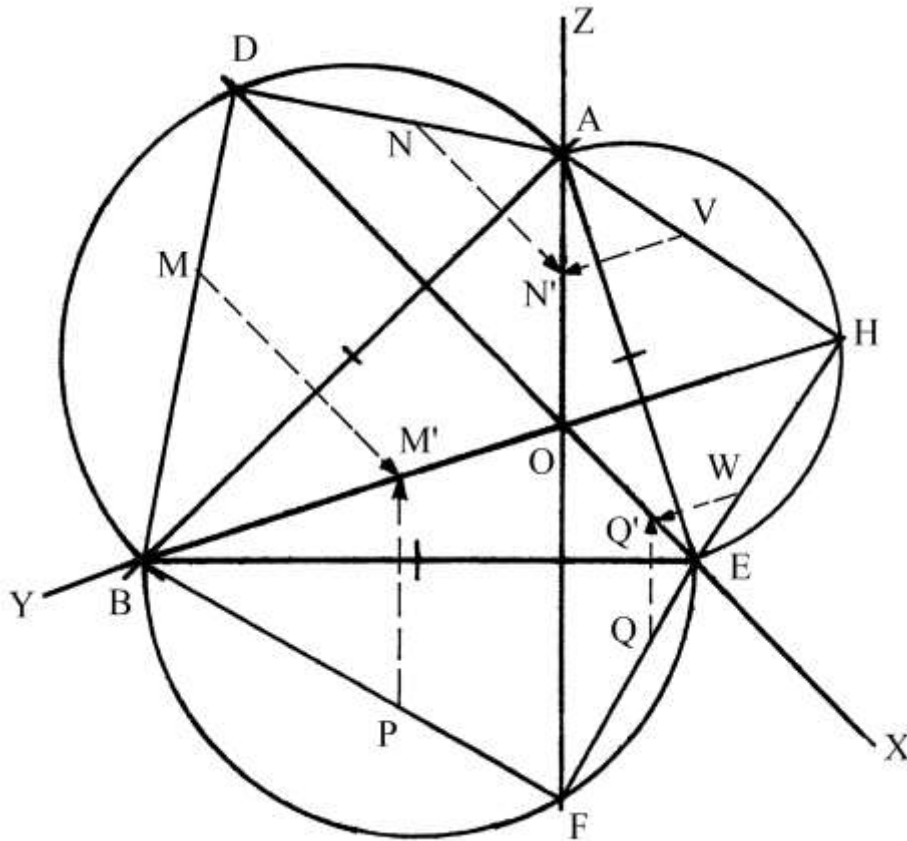
Esistono infiniti triangoli che definiscono le tracce relative a questa disposizione degli assi:



I triangoli sono *simili* a quello BAE e hanno in comune l'ortocentro O: i loro vertici giacciono sulla terna di assi XYZ.

Applicazione del metodo a un caso concreto

Applichiamo la costruzione grafica sopra descritta al caso di un *cubo* da rappresentare in assonometria trimetrica.



È data la lunghezza dello spigolo del cubo, ℓ . Riportare la lunghezza di ℓ a partire dai vertici D, F e H: sono stabilire le coppie di punti M-N, P-Q e V-W.

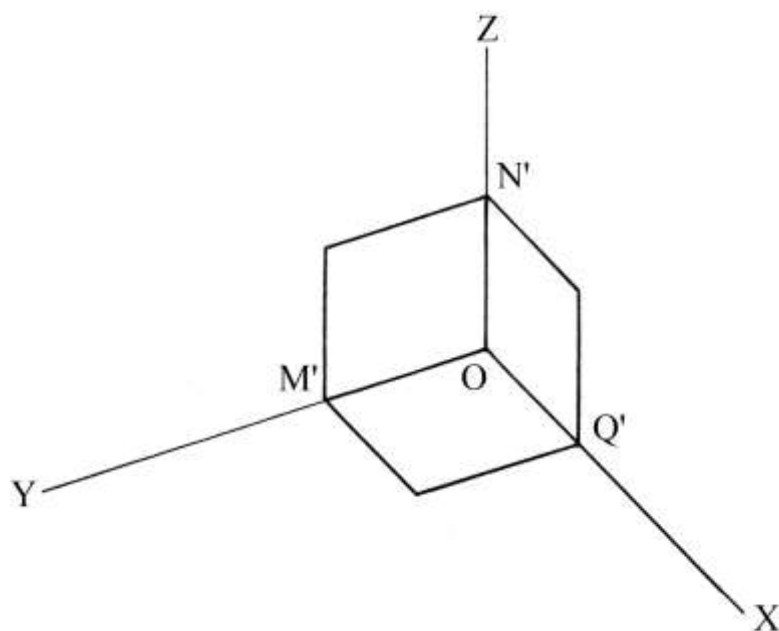
Proiettare perpendicolarmente al lato AB dai punti M e N fino a stabilire i punti M' e N' rispettivamente sull'asse Y e su quello Z.

Quindi, dai punti P e Q condurre le perpendicolari a BE da P e da Q fino a incontrare gli assi Y in M' e l'asse X in Q'.

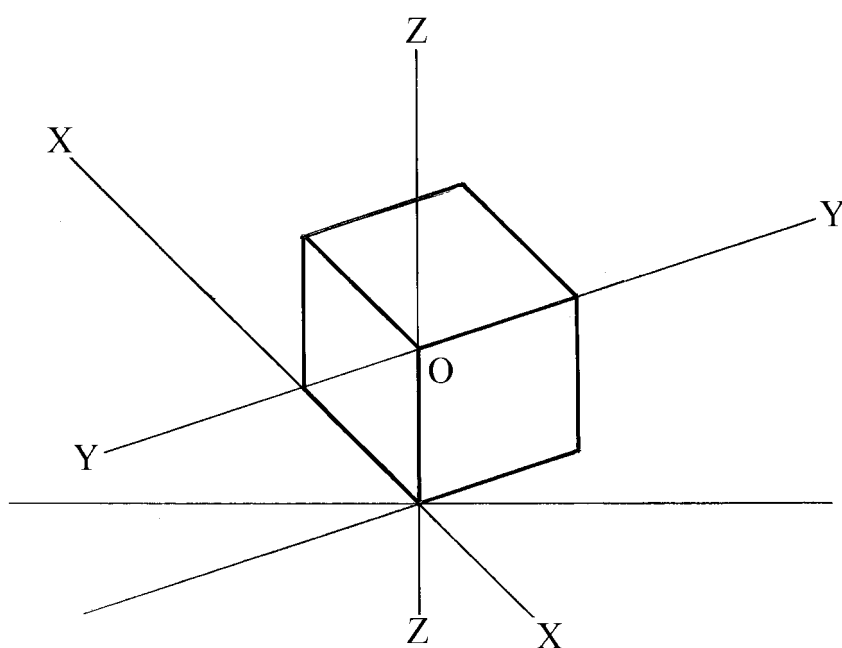
Effettuare la stessa operazione di proiezione da V e da W fino a incrociare rispettivamente i punti N' e Q'.

I segmenti OM', ON' e OQ' sono le lunghezze degli spigoli del cubo riferite ai tre assi.

Il cubo in assonometria trimetrica è presentato nella figura che segue:



Un'altra vista dello stesso cubo è mostrata nella figura che segue:



----- APPROFONDIMENTO -----

Metodo diretto e metodo indiretto

Modificando la posizione relativa dei tre assi dell'assonometria trimetrica cambiano le lunghezze delle proiezioni degli spigoli del cubo su X, Y e Z.

Per disegnare in maniera pratica un'assonometria occorre per prima cosa conoscere gli angoli fra gli assi e poi ribaltare su di essi la lunghezza degli spigoli del solido, come è stato fatto nel caso del cubo e poi calcolare i *rapporti di riduzione*.

Nel nostro esempio si ha:

$$M'O \approx 0,92 * MD \approx 0,92 * \text{spigolo}$$

$$N'O \approx 0,8 * VH \approx 0,8 * \text{spigolo}$$

$$Q'O \approx 0,7 * WH \approx 0,7 * \text{spigolo}.$$

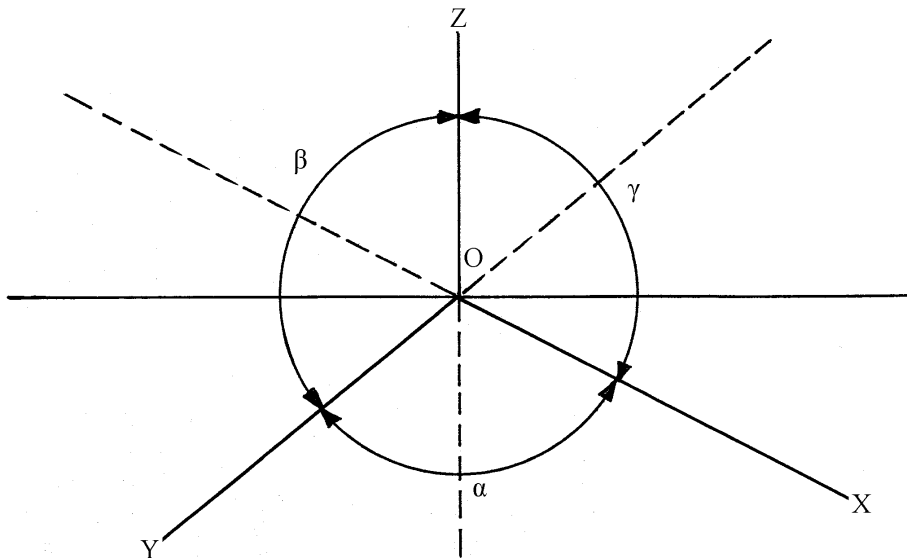
Il metodo fin qui utilizzato è chiamato *metodo grafico* o *metodo diretto*: la determinazione dei rapporti di riduzione viene effettuata misurando e rapportando le lunghezze delle singole proiezioni a quelle degli spigoli originali.

Un secondo metodo è quello *indiretto*: esso non richiede tutta la complessa operazione di ribaltamento sui tre assi, ma soltanto l'applicazione di appositi coefficienti di riduzione, specifici per ciascun orientamento della terna S-Y-Z. Impiegando questo secondo metodo al caso di un solido complesso possono darsi due casi:

- i. Sono noti i coefficienti di riduzione specifici per la particolare terna.
- ii. In caso contrario, occorre costruire un primo schema semplificato per ricavare i coefficienti di riduzione.

Gli angoli formati dagli assi sono:

- * α è compreso X e Y.
- * β è delimitato da Y e Z.
- * γ è definito da Z e X.



La tabella che segue fornisce i coefficienti di riduzione per alcune disposizioni degli assi dell'assonometria trimetrica:

Angoli			Coefficienti riduzione		
α	β	γ	Asse X	Asse Y	Asse Z
117°	108°	135°	0,92	0,7	0,8
154°	98°	108°	0,83	0,61	0,95
130°	120°	110°	0,74	0,84	0,9
140°	106°	114°	0,695	0,811	0,927
138° 14'	114° 46'	107°	7/8	3/4	1
107°	138° 14'	114° 46'	1	7/8	3/4
144° 16'	113° 16'	102° 28'	7/8	2/3	1
113° 16'	144° 16'	102° 28'	1	7/8	2/3
157°	95°	108°	0,492 \approx 1/2	0,886 \approx 9/10	1

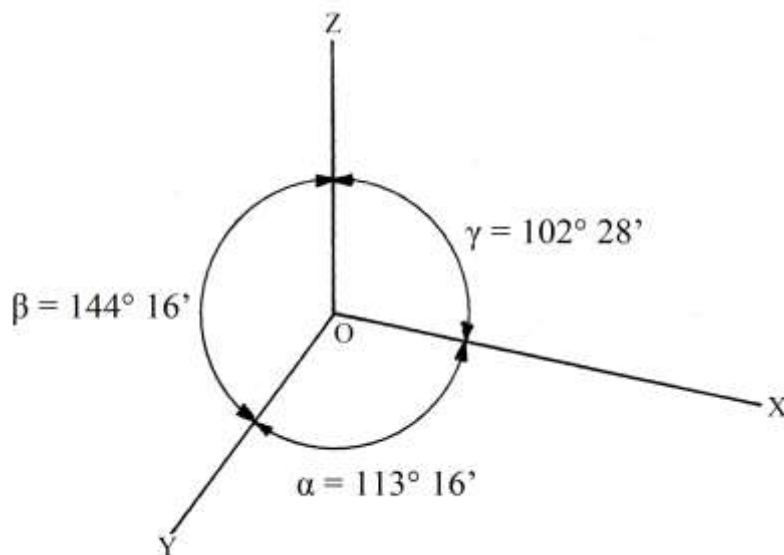
Un metodo grafico semplificato può essere impiegato per determinare la lunghezza delle proiezioni utilizzando i coefficienti di riduzione contenuti nella tabella.

Consideriamo il caso della terna

$$\alpha = 113^\circ 16'$$

$$\beta = 144^\circ 16'$$

$$\gamma = 102^\circ 28'.$$



Applichiamo il metodo al caso di un cubo che ha spigoli lunghi ℓ .

Tracciare una semiretta orizzontale a partire da un punto, O, e riportarvi la lunghezza dello spigolo: $OA = \ell$.

Dal punto A elevare la perpendicolare alla semiretta. Su di essa fissare i punti B e C a distanze uguali a:

$$AB = 2/3 * OA = 2/3 * \ell$$

$$AC = 7/8 * OA = 7/8 * \ell.$$

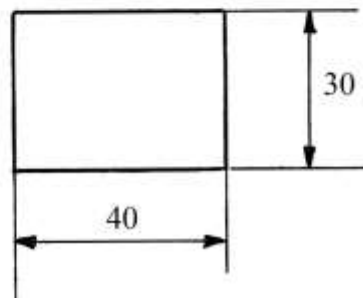
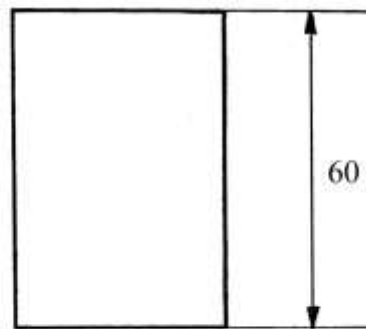
Tracciare le semirette uscenti da O e passanti per i punti B e C.

OA è la lunghezza da riportare sull'asse Z. AB quella (scorciata a $\frac{2}{3}$) da misurare sull'asse X e AC è la lunghezza (ridotta a $\frac{7}{8}$) da utilizzare sull'asse Y.

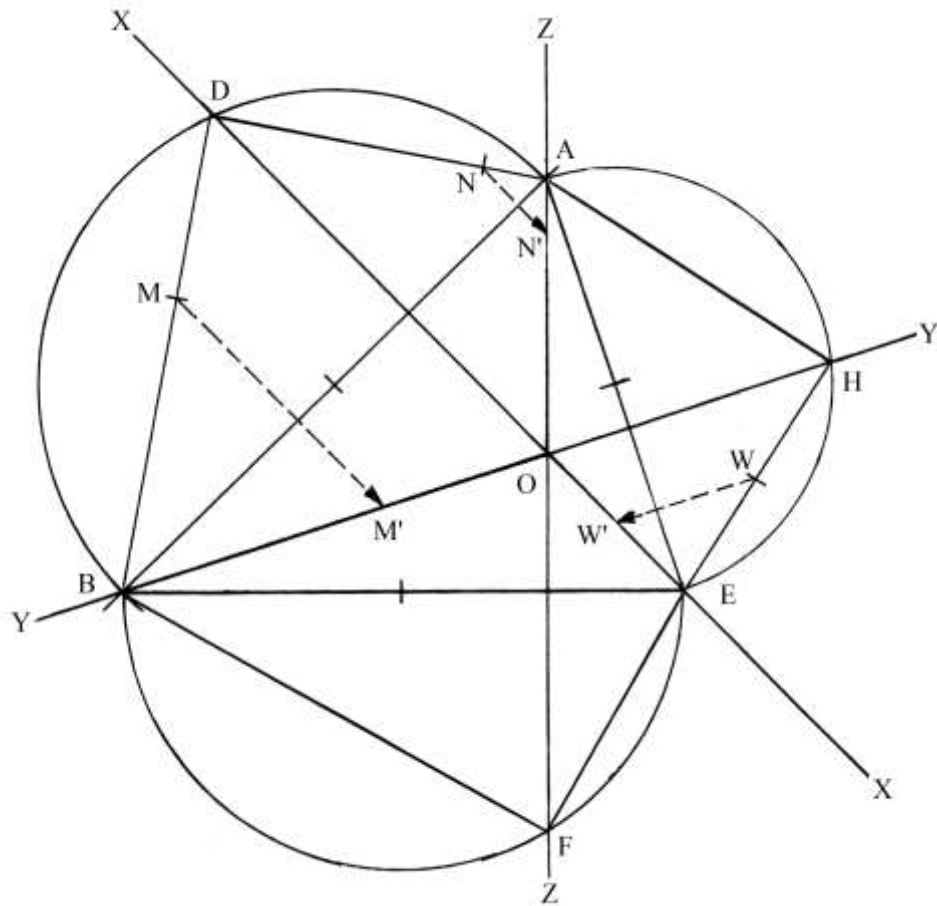
Questo accorgimento grafico può essere impiegato quanto i coefficienti sono espressi da frazioni.

Parallelepipedo in assonometria trimetrica

Un parallelepipedo ha le dimensioni riportate nella figura:



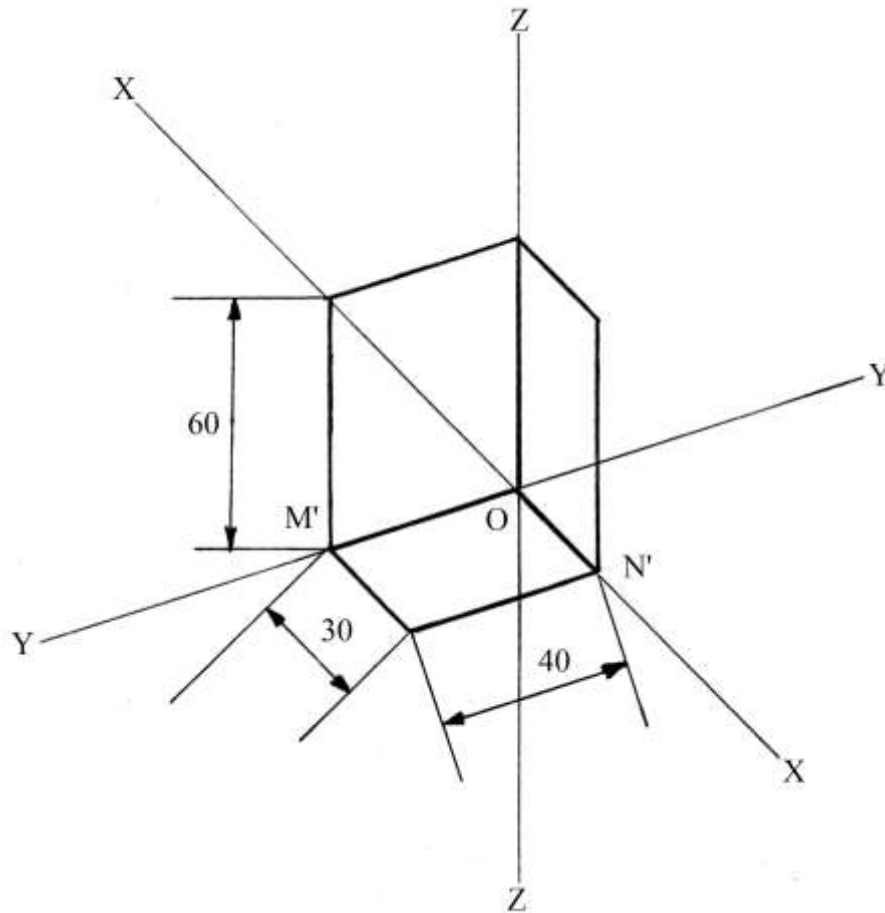
Lo schema che segue mostra la solita terna XYZ con gli angoli 117° - 108° - 135° :



Dal punto D riportare in M la lunghezza della base (40) e in N l'altezza del parallelepipedo (60). Infine, da H fissare in W la larghezza della base del solido (30).

Proiettare i punti M, N e W perpendicolarmente ai lati del triangolo delle tracce e fino a tagliare i tre assi rispettivamente nei punti M', N' e W'.

Il parallelepipedo in assonometria trimetrica è ricostruito nella figura che segue:



Una considerazione finale

Una qualsiasi assonometria ortogonale non può utilizzare un quadro di proiezione parallelo a uno dei tre piani che formano il triedro.

Ne consegue l'impossibilità di utilizzare direttamente una pianta o un prospetto (in proiezioni ortogonali) per tracciare un'assonometria ortogonale.

L'ASSONOMETRIA ISOMETRICA

L'inglese William Farish (1759-1837) pubblicò nel 1822 un piccolo ma importante studio di sole 16 pagine (“*On Isometric Perspective*”) nel quale illustrò regole e vantaggi dell'assonometria isometrica. Egli non chiamò immediatamente il metodo *assonometria*, ma secondo gli usi consolidati del tempo la ritenne una variante della prospettiva. Furono Autori successivi (geometri e ingegneri inglesi in primo luogo, poi tedeschi, italiani, francesi) che nel corso del XIX secolo ampliarono la portata dell'innovazione di Farish e introdussero l'attuale denominazione *assonometria isometrica*, evento questo che si deve in particolare ai tedeschi K.T. e M.H. Meyer che la usarono in un trattato del 1852.

Farish descrisse la sua innovazione come una proiezione ortogonale isometrica di un cubo, con un punto di vista posto all'infinito, sul prolungamento della diagonale maggiore (quella che congiunge due vertici opposti del solido): i disegni di Piero della Francesca, di Leonardo da Vinci, di Cousin e di Finé con costruzioni di assonometrie isometriche di cubi sono precedenti di diversi secoli. Per Farish il *piano di proiezione* era interposto fra l'occhio dell'osservatore e l'oggetto da rappresentare (come nel metodo della prospettiva).

Questo metodo fu riscoperto per soddisfare le esigenze grafiche originate dalla rivoluzione industriale inglese: i disegni eseguiti in prospettiva erano poco comprensibili da parte di artigiani e tecnici incaricati della produzione e del montaggio di macchine, *perché su di essi non potevano prendere misure*. Il metodo servì pure a realizzare a distanza, in altri luoghi o in altri Stati, i macchinari disegnati. Infine, rese più facile la manutenzione degli impianti costruiti.

Il metodo si poneva e si pone a un livello di comprensione più elevato di quello raggiunto dalle proiezioni ortogonali, che richiedono sempre uno sforzo mentale per realizzare la ricomposizione delle diverse viste nell'oggetto tecnico che esse rappresentano. Ancora oggi accade che pezzi meccanici molto complessi siano disegnati su di una stessa tavola in proiezioni ortogonali e in assonometria.

L'assonometria isometrica costituisce una sintesi di assonometria cinese e geometria proiettiva europea: alcuni hanno sostenuto che il lavoro di Farish fosse stato influenzato dalla conoscenza dei metodi assonometrici usati in Cina: almeno a partire dal 1582 i missionari Gesuiti tentarono di introdurre in Cina la conoscenza e la pratica della prospettiva ma con scarsi risultati.

Questo metodo fu il primo ad essere codificato fra le assonometrie.

----- SCHEDA TECNICA -----

Il contributo di William Farish

Il lavoro di Farish è ricordato sia per la codificazione dell'assonometria isometrica che per avere introdotto nel 1792 nell'Università di Cambridge un sistema di valutazione del lavoro degli studenti.

Dal testo di Cristina Cándito, citato in bibliografia, riportiamo da pp. 16 e 18 alcuni brani:

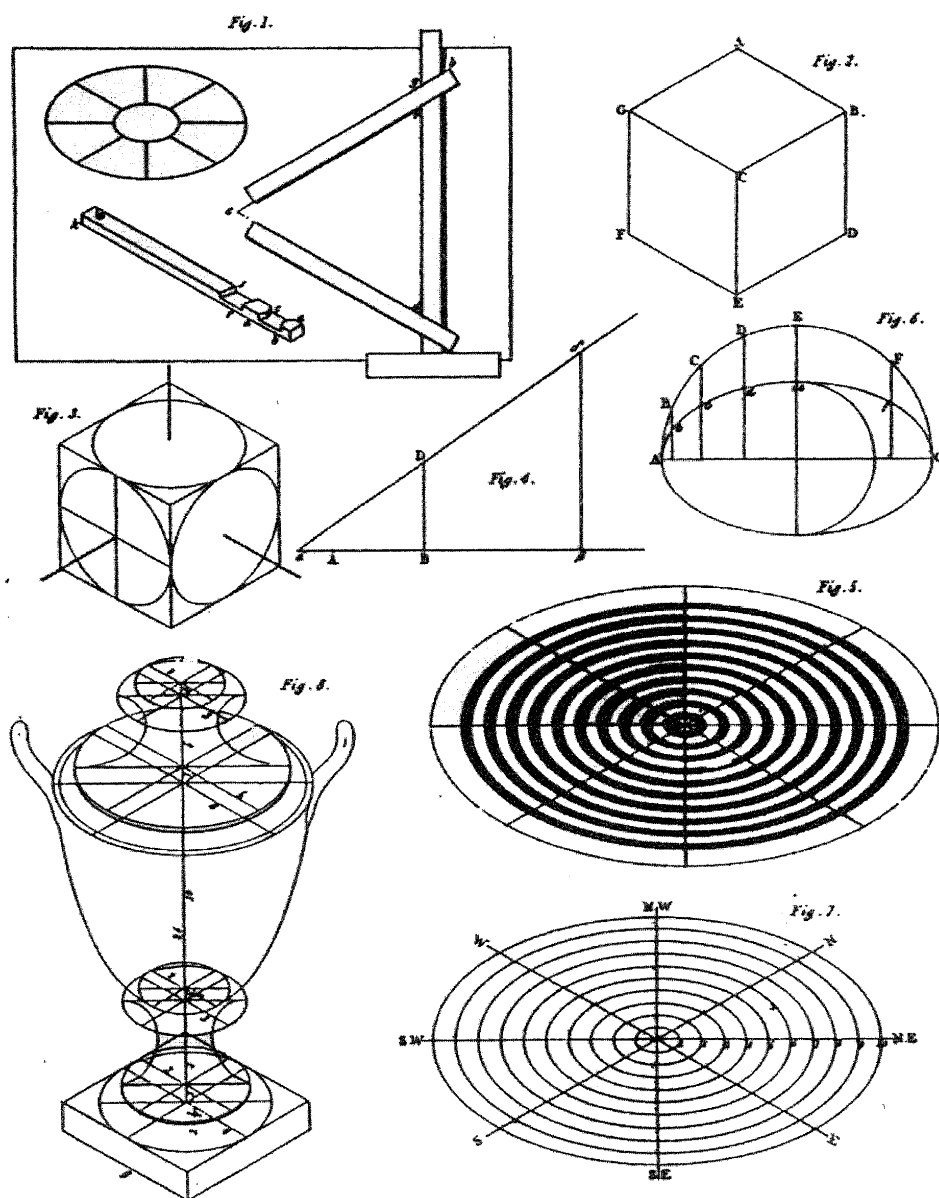
“Il testo [*del Farish*] si apre con una premessa sulle difficoltà legate all'utilizzo di modelli solidi delle macchine, nei corsi di insegnamento sulla manifattura. I lunghi tempi di realizzazione e le dimensioni ingombranti dei modelli solidi inducono Farish a dotarsi delle sole singole parti costituenti le stesse macchine, quali assi, ruote d'ottone e morse, che potevano essere montate e assemblate a piacere. L'esistenza effimera di questi strumenti rende necessaria, pertanto, una rappresentazione grafica che permetta agli assistenti di ricostituirne l'integrità anche in assenza del professore: da questa esigenza scaturiscono considerazioni sui difetti dei metodi di rappresentazione comunemente utilizzati.

“Il disegno eseguito con le tre proiezioni ortogonali, secondo Farish, svela i suoi limiti nella difficile intelligibilità e nell'inadeguatezza nel rappresentare le connessioni delle parti delle

macchine, anche se presenta il vantaggio di mostrare le misure reali delle direzioni parallele ai piani di proiezione. Per riassumere queste caratteristiche, Farish riporta l'esempio della rappresentazione [in proiezioni ortogonali] del cubo, che si configura in tre quadrati, che risultano poco somiglianti al solido reale.

“... Sgomberato il campo dagli altri metodi di disegno, Farish può passare a descrivere la sua proposta per una rappresentazione grafica più chiara e rispondente al vero. Egli classifica il suo metodo come un tipo particolare del metodo della *prospettiva*, che presenta vantaggi nella semplicità di applicazione e nella correttezza dei risultati.

“È a questo punto che Farish aggiunge una lunga nota a piè di pagina, per spiegare dettagliatamente il primo degli strumenti da disegno consigliati per l'esecuzione della sua *prospettiva isometrica* [figura qui sotto]. Gli elementi che lo compongono consistono in un comune tavolo da disegno con il bordo atto a far scorrere una riga a T dotata di un'ulteriore riga, che scorre a sua volta sul braccio lungo e può formare con esso angoli di 60°, grazie ad una particolare forma della scanalatura d'incastro. Un secondo strumento consiste in una sagoma ellittica per disegnare i cerchi [circonferenze] in isometria; Farish specifica che se ne possono disegnare di svariate misure e posizzionarle sul tavolo da disegno, come spiegherà in seguito. La meticolosità impiegata nella descrizione di dispositivi così semplici è giustificata dalla scarsa diffusione dei più elementari strumenti da disegno, come ad esempio le squadre, il cui uso diventa comune in Inghilterra a partire dal 1850 circa ...”.

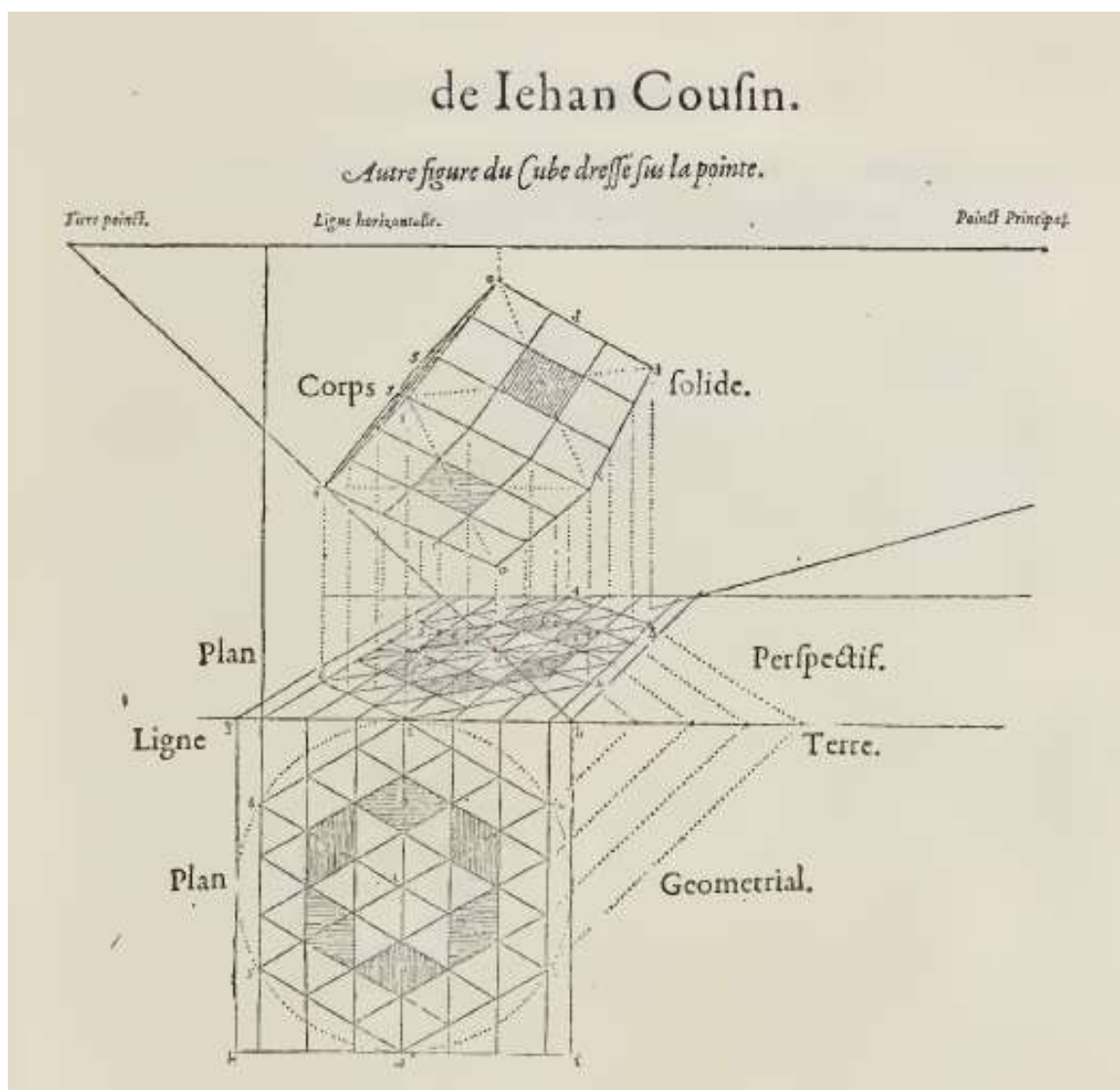


Nella tavola ricavata da Farish, sono mostrati:

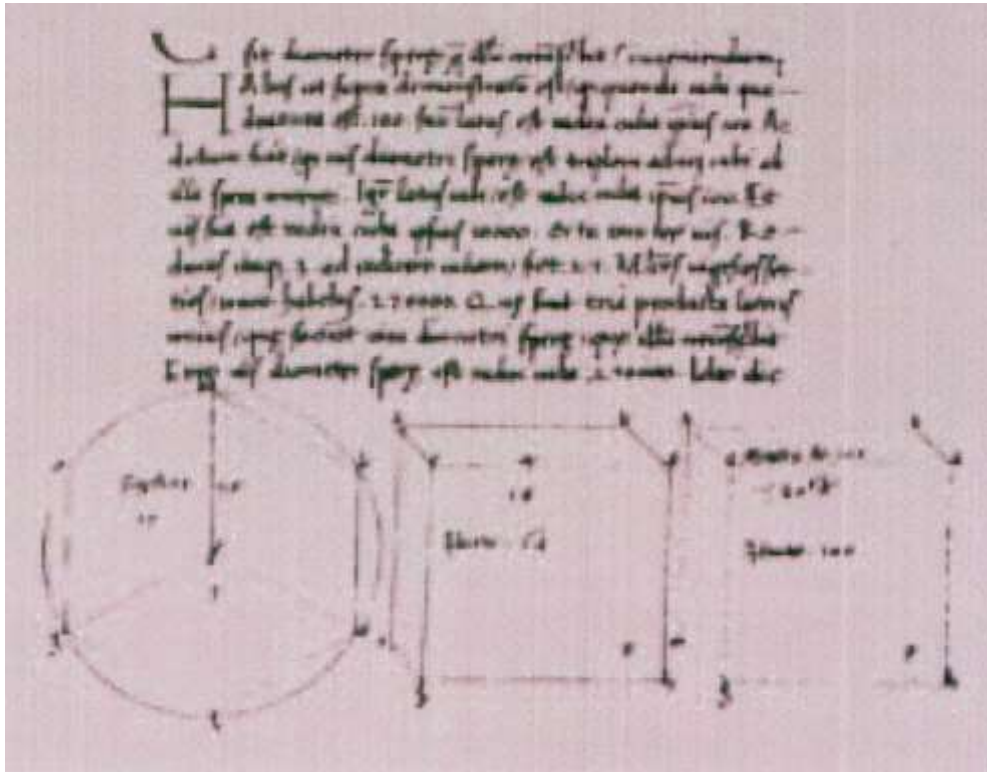
- Fig. 1: strumenti da disegno, con la tavola da disegno e la riga a T.
- Fig. 2: un cubo in assonometria isometrica.
- Fig. 3: ellissi isometriche disegnate sulle tre facce del cubo.
- Fig. 4: costruzione geometrica usata per determinare la lunghezza degli assi delle ellissi isometriche.
- Fig. 5: sagoma per il disegno di ellissi isometriche.
- Fig. 6: costruzione geometrica per dividere un'ellisse isometrica.
- Fig. 7: divisione in parti uguali di segmenti non isometrici.
- Fig. 8: rappresentazione isometrica della struttura di un vaso etrusco.

I trattati a stampa

Il primo trattato a stampa contenente un disegno in assonometria isometrica di un cubo fu pubblicato nel 1560 dal pittore francese *Jehan (Jean) Cousin* (1490? – 1560?) nel suo “*Livre de perspective*”:

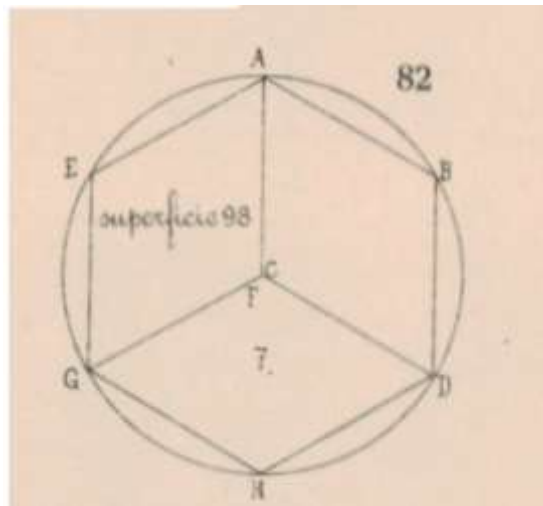


Ma, prima di lui, *Piero della Francesca* aveva disegnato le proiezioni ortogonali di un cubo in un esagono, quasi una assonometria isometrica, e altre due proiezioni parallele. L'uso di questo ultimo metodo prevedeva due o tre viste di un oggetto, *disegnate con la stessa scala*. Il trattato che le contiene, “*Libellus de quinque corporibus regularibus*” risale a circa il 1480 e fu pubblicato integralmente soltanto nel 1916 da Girolamo Mancini, come mostrato nella figura che segue (da Massimo Scolari, citato in bibliografia, p. 208):



È probabile che il disegno di Piero con il cubo in assonometria isometrica servisse a dimostrare l'inscrivibilità di un cubo in una sfera di raggio uguale alla metà della lunghezza della diagonale del cubo stesso:

Dall'edizione curata da Girolamo Mancini è ripreso lo schema che segue:



La sfera ha diametro $D = 7$ e tale è anche la lunghezza di una delle quattro diagonali del cubo. Piero calcola la superficie totale del cubo con una procedura che contiene i seguenti passi:

- * Moltiplicare la lunghezza del diametro della sfera per se stessa: $7 * 7 = 49$.
- * Dividere per 3: $49 : 3 = 16 + 1/3$,
superficie di una faccia del cubo.
- * Moltiplicare per 6: $(16 + 1/3) * 6 = 98$,
superficie totale del cubo.

Piero conclude con un'affermazione: in *valore assoluto* (espressione però da lui non usata ma implicita nella sua esposizione), fra il quadrato della lunghezza del diametro della sfera – e diagonale del cubo – superficie totale del solido esiste una relazione:

$$S_{\text{TOTALE}} = 2 * D^2 = 2 * d^2 = 2 * 7^2 = 98.$$

Verifichiamo la correttezza della procedura di Piero.

La diagonale d di un cubo con spigolo ℓ è data da:

$$d = \sqrt{3} * \ell.$$

La formula inversa è:

$$\ell = d/\sqrt{3} = D/\sqrt{3} = D * (\sqrt{3})/3 = 7 * (\sqrt{3})/3 .$$

La superficie di una faccia del cubo è data da:

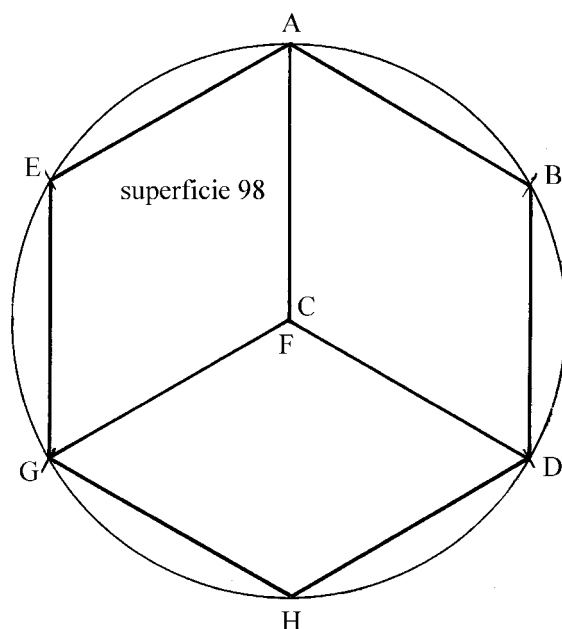
$$S = \ell^2 = [7 * (\sqrt{3})/3]^2 = 49/3 = 16 + 1/3.$$

La superficie totale del cubo è data da:

$$S_{\text{TOTALE}} = 6 * S = 6 * (16 + 1/3) = 98.$$

La procedura di Piero è corretta.

Lo schema che segue riproduce quello di Piero:



Un dettaglio è particolarmente interessante: il cubo è disegnato in assonometria isometrica e il suo profilo esterno è rappresentato dall'esagono ABDHGE inscritto in un cerchio. Il centro comune al cerchio e all'esagono è indicato con due lettere: C e F. I due punti sono gli estremi della diagonale del cubo CF: essa è *perpendicolare* al piano di proiezione ed è correttamente rappresentata da un punto.

La lettera C è scritta sopra ed è il quarto vertice della faccia ABDC, deformata in un rombo. La lettera F invece è scritta sotto: la particolare disposizione delle due lettere dovrebbe significare che C indica l'estremo superiore e visibile della diagonale CF e la lettera F designa il vertice opposto della diagonale, *non visibile*.

Piero della Francesca sembra quindi essere consapevole del metodo assonometrico da lui impiegato: la sua definizione arriverà secoli più tardi con i lavori dell'inglese William Farish che lo chiamerà *prospettiva isometrica*.

Il contributo di Leonardo da Vinci

In un disegno contenuto nella tavola 28 *verso* del codice C di Parigi, risalente agli anni 1490-1491, Leonardo tracciò lo schizzo di un cubo in assonometria isometrica, forse influenzato dalla conoscenza dell'opera di Piero della Francesca:



Nel disegno compaiono in senso verticale tre lettere maiuscole, A B C, rovesciate secondo la particolare forma di scrittura impiegata da Leonardo.

La pianta di Stefano Buonsignori

Un altro importante esempio di impiego dell'assonometria con inclinazioni di 30° e di 60° è fornito da alcuni edifici rappresentati nella mappa disegnata dal monaco olivetano e cartografo Stefano Buonsignori o Bonsignori (?-1589) che nel 1584 realizzò una pianta prospettica di Firenze di dimensioni 125x138 cm - formata da 9 fogli - attualmente conservata in Palazzo Vecchio.



La pianta fu realizzata a partire da un preciso rilievo topografico della città, una vera e propria pianta vista dall'alto (qualcosa di simile alle semplici *mappe* di città contenute nei fascicoli annuali di *TuttoCittà*). Su questa struttura geometrica di base, Bonsignori disegnò un'assonometria degli edifici, delle strade, dei ponti sull'Arno e di altre costruzioni.

Bonsignori rappresentò la città osservandola da un punto posto sulla collina di Bellosguardo, a sud-ovest, posizionata fuori dalle mura cittadine e posta a un'altitudine di 86 metri: nella mappa, in basso al centro, è disegnato un monaco (forse lo stesso Bonsignori) seduto che osserva la città, accompagnato da strumenti (un compasso o una groma). Il punto potrebbe essere lo stesso da cui fu osservata la città per disegnare la "pianta".

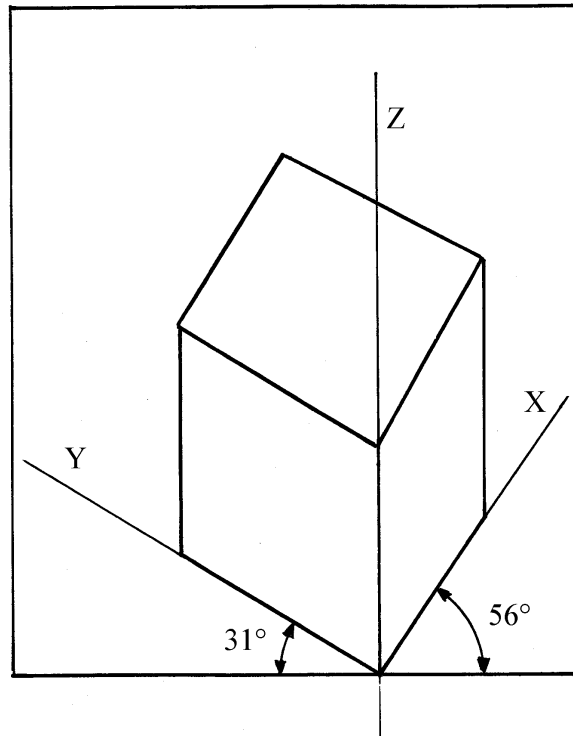
La mappa rientra nella categoria delle viste realizzate "a volo d'uccello". Se il punto di vista è a una quota bassa, il disegno che ne risulta è una prospettiva. Invece, se il punto di vista è molto alto in cielo, il disegno che se ne ricava è un'assonometria: con il piano di proiezione verticale abbiamo un'assonometria cavaliera; se il piano di proiezione è orizzontale si ottiene un'assonometria planometrica o militare.

La pianta fu tracciata a partire dal Duomo di Santa Maria del Fiore, disegnato fuori scala e ingrandito.

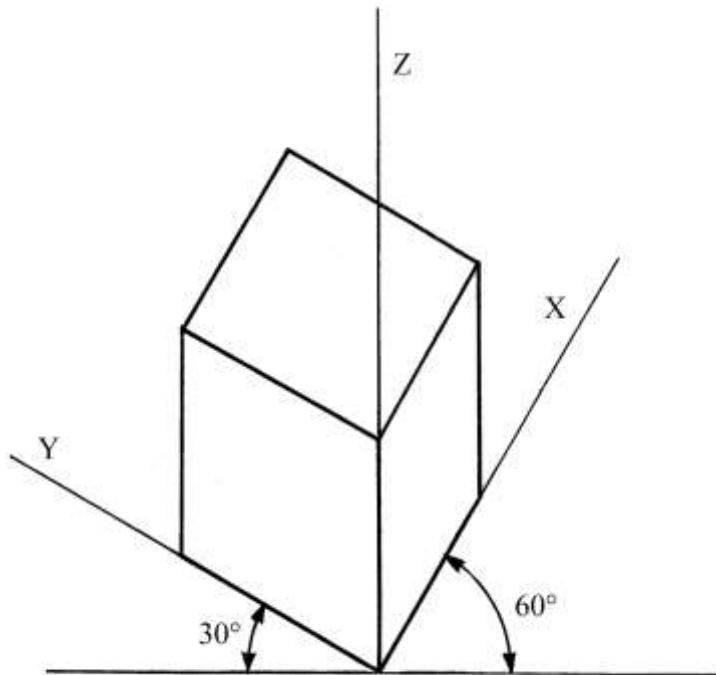
Le altre costruzioni furono aggiunte con adattamenti e introducendo delle deformazioni e delle deformazioni per evidenziarli.

Essa fu costruita con due differenti metodi assonometrici di tipo militare, con due diverse inclinazioni: nella parte bassa della mappa il piano di proiezione è meno inclinato.

Un esempio del metodo usato da Bonsignori è spiegato dalla figura che segue (tratta dall'edificio rappresentante *Orsanmichele* in una forma di *assonometria militare*):



Forse Bonsignori disegnò l'edificio che ha la forma di un parallelepipedo in un'assonometria con angoli di 30° e di 60° :



Grazie all'uso delle assonometrie militari con inclinazioni di 30° e di 60° , gli adattamenti e le deformazioni imputabili sia al complesso disegno sia alla stampa possono fare emergere edifici che sembrano disegnati perfino in assonometria isometrica.

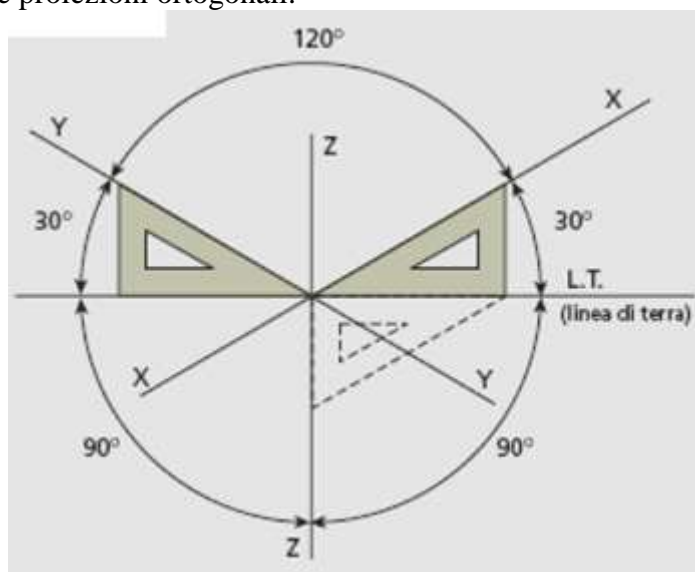
La norma UNI sull'assonometria isometrica

La norma UNI EN ISO 5456-3:2001 così definisce questo metodo:

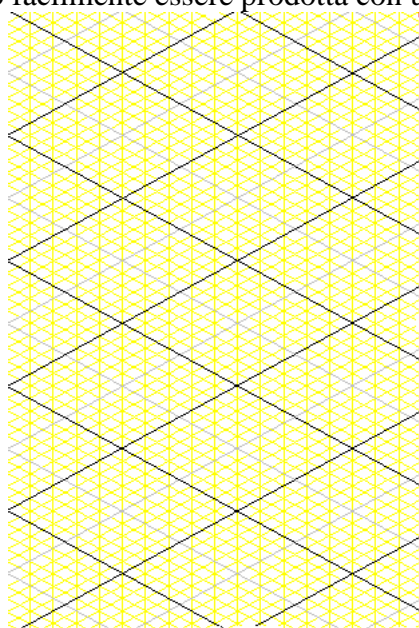
“L'assonometria isometrica è una assonometria ortogonale in cui il piano di proiezione forma tre angoli uguali con i tre assi coordinati X, Y e Z.”. E continua in nota: “ciò fornisce una rappresentazione identica a quella ottenuta dalla proiezione ortogonale della vista principale di un esaedro [un cubo] con tutte le sue facce ugualmente inclinate rispetto al piano di proiezione”.

I tre assi X, Y e Z sono posti nello spazio e le loro proiezioni sul piano formano tre assi coordinati X', Y' e Z', fra loro ruotati di 120°: per semplicità, sui disegni si omettono gli apici e si scrive X, Y, Z invece di X', Y', Z'.

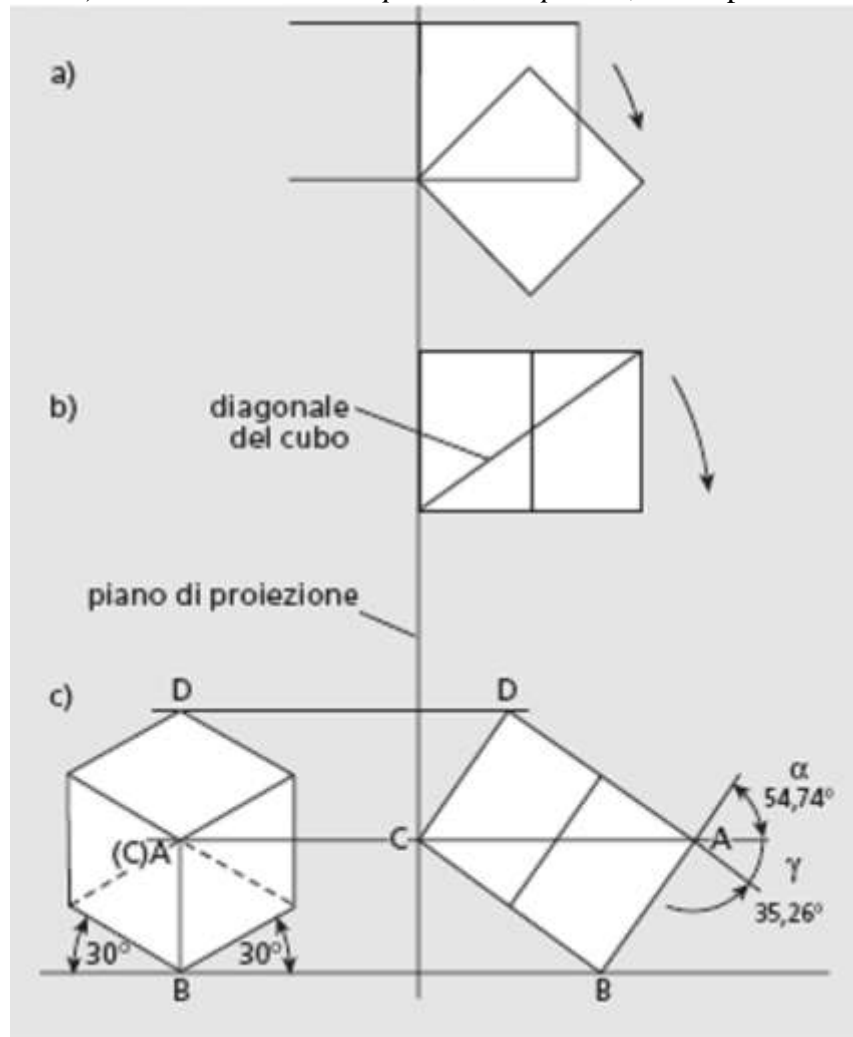
Per poter disegnare una figura piana o un pezzo meccanico in assonometria isometrica è utile disegnare gli assi di riferimento, operazione che può essere fatta manualmente con le squadre a 30° - 60°. Per aiutare nella costruzione è opportuno tracciare una linea orizzontale, corrispondente alla linea di terra delle proiezioni ortogonali.



Può essere usata della carta isometrica che reca stampati tanti piccoli triangoli equilateri, come in figura, carta che può facilmente essere prodotta con uno dei numerosi software disponibili:



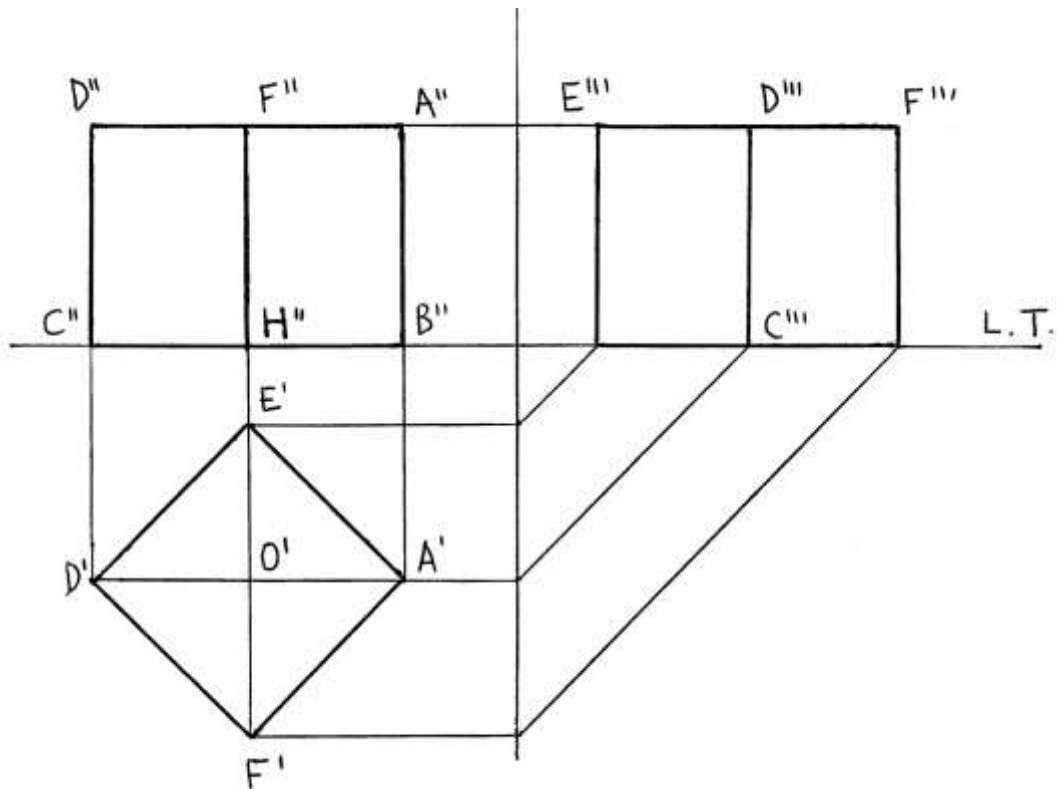
Tre segmenti di identica lunghezza, disposti lungo i tre assi X, Y, Z (o ad essi paralleli), sono proiettati perpendicolarmente sul piano di proiezione in tre segmenti di uguale lunghezza, ridotta a 0,816. La norma UNI dà questo valore senza un'esauriente dimostrazione. Vediamo di aiutarci con una costruzione suggerita da Daniel Schilling (École d'Enseignement Technique, Genève – Ginevra, Svizzera) nella sua *Géométrie Spatiale, Chapitre 2*, avril-aprile 2005:



Un cubo con spigolo lungo 30 mm ha la diagonale di una faccia quadrata lunga $30 \cdot \sqrt{2}$ e, applicando il teorema di Pitagora, si calcola facilmente la lunghezza della diagonale del cubo che vale $30 \cdot \sqrt{3}$.

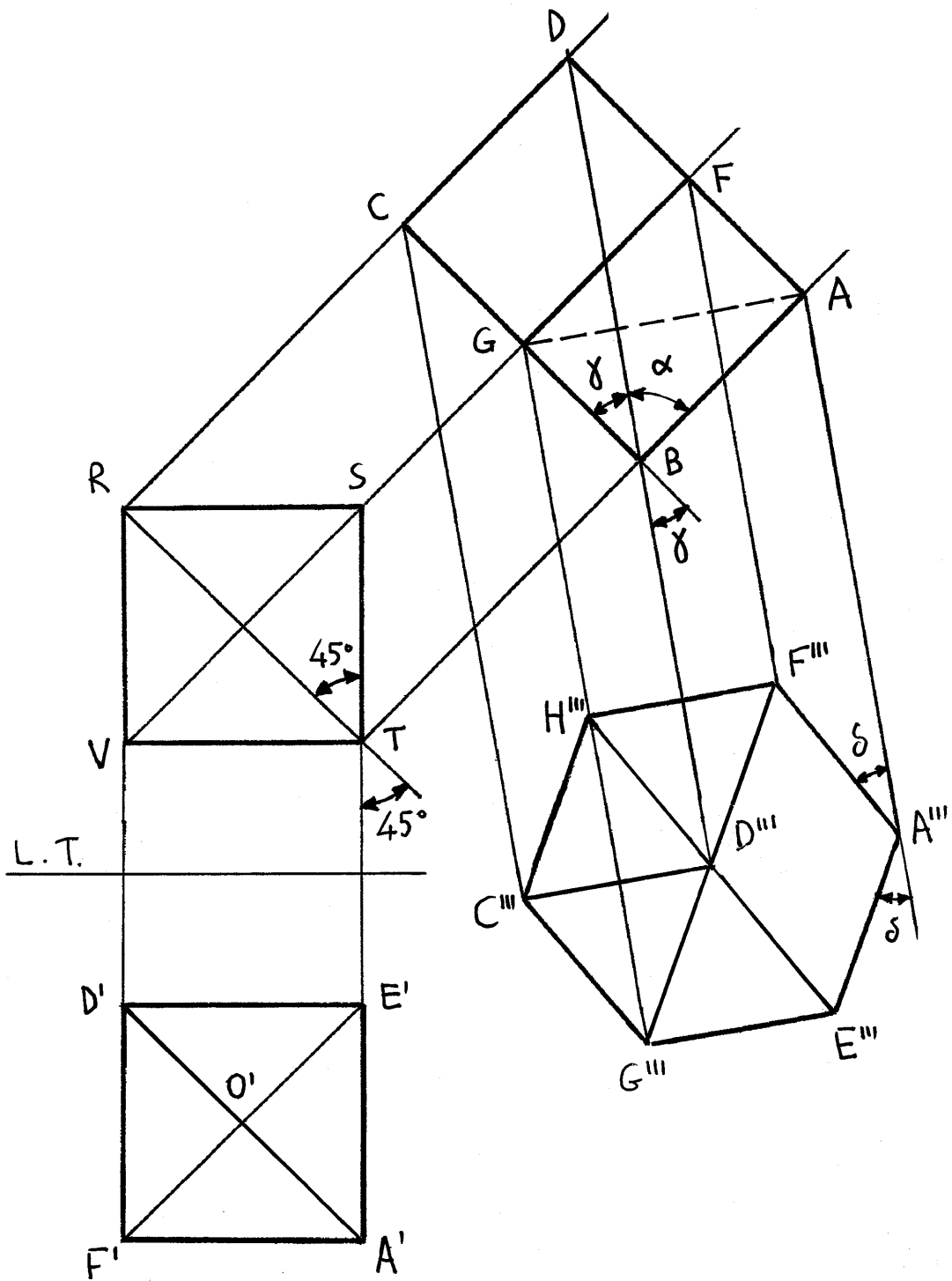
Costruzione dell'assonometria isometrica di un cubo

Un cubo è rappresentato in proiezioni ortogonali secondo il *metodo europeo*:



Le diagonali delle facce superiore e inferiore sono parallele o perpendicolari ai tre piani di proiezione, mentre gli spigoli formano angoli di 45° .

Lo schema che segue mostra la costruzione dell'assonometria isometrica del cubo:



A sinistra, il solido è disegnato sul P.P. e sul P.V. con le facce parallele o perpendicolari ai piani di proiezione.

La vista sul P.V. è un quadrato definito dai vertici R, S, T e V.

Tracciare le diagonali $D'A'$, $F'E'$, RT e VS.

L'angolo RTS e il suo opposto hanno ampiezza uguale a 45° .

Prolungare la diagonale VS verso l'alto. Dai vertici R e T condurre le parallele alla diagonale appena tracciata.

A una distanza scelta a piacere rispetto alle due viste (sul P.V. e sul P.O.), parallelamente alla diagonale RT, tracciare un segmento, CB: esso è perpendicolare al fascio di linee parallele. Sulla linea uscente da R. dal punto C riportare in D la lunghezza dello spigolo del cubo.

Da C e da D disegnare le parallele a RT: sono fissati i punti F, A e G.

Tracciare la diagonale DB e prolungarla verso il basso: l'angolo retto GBA è diviso fra:

* $\alpha = \text{DBA} \approx 54,74^\circ$.

* $\gamma = \text{CBD} \approx 35,26^\circ$.

Collegare i vertici G e A.

Dai punti C, G, F e A condurre le parallele alla linea passante per D e per B.

Sulla linea uscente da G fissare un punto, H''': da questo punto tracciare un segmento parallelo a GA fino a stabilire il punto F'''.

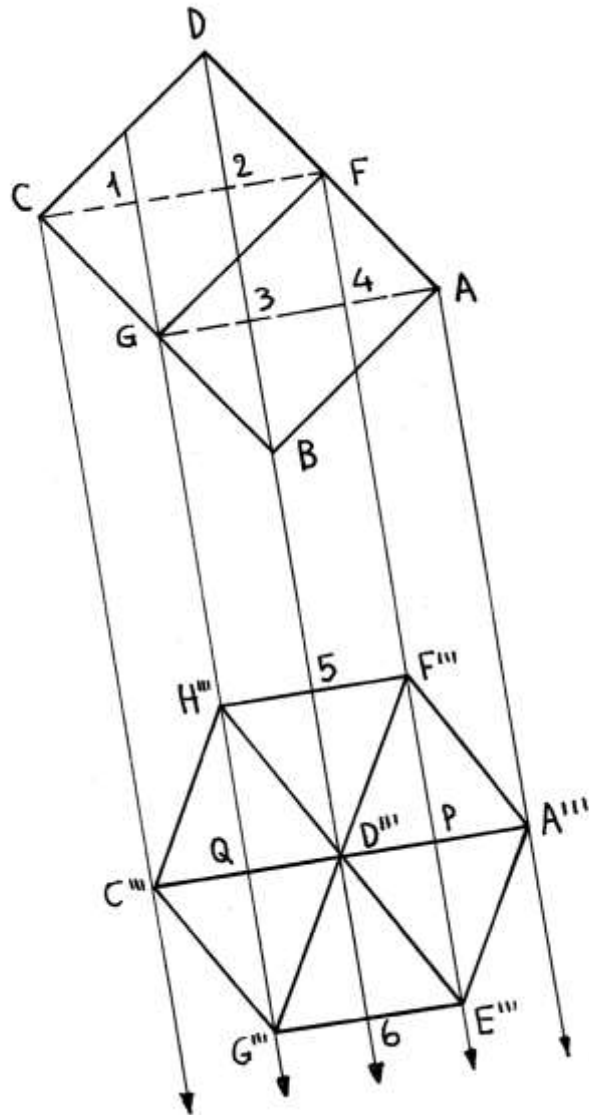
H'''F''' è il primo lato dell'esagono regolare che rappresenta il cubo in assonometria isometrica.

L'angolo $\delta = \text{F'''A'''A}$ è ampio 30° .

Tutti i lati dell'esagono sono lunghi 0,816 volte la lunghezza degli spigoli del cubo.

Approfondiamo la forma dell'esagono H'''F'''A'''E'''G'''C'''.

Tracciare CF, che come GA, è una diagonale di una faccia del cubo:



Le due diagonali CF e GA sono parallele.

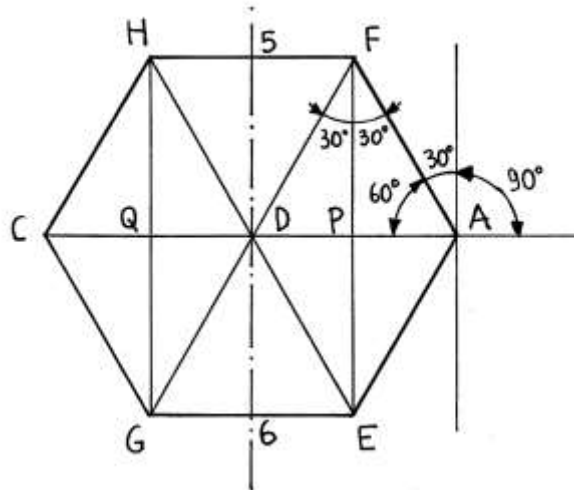
Prolungare verso l'alto la linea passante per G e per H''''.

I segmenti CF e GA sono entrambi divisi in *tre* parti uguali dal fascio di parallele passanti per G, D-B e F: i punti 1, 2, 3 e 4 definiscono le divisioni.

Fissare sull'esagono i punti 5 e 6 e i punti medi P e Q.

5 e 6 sono le proiezioni di 2 e di 3.

L'angolo F''''A''''A = γ è ampio 30°: la sua origine e la sua ampiezza sono mostrate nello schema che segue:



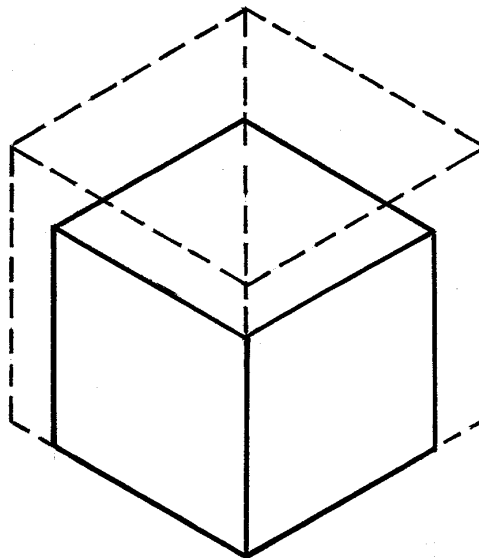
Il secondo esagono può essere sovrapposto al primo: entrambi sono poligoni regolari.

Il segmento GA è parallelo a quello QA''''': il segmento G-3 è lungo quanto QD''''' e la stessa equivalenza si ha per le coppie

(3-4) – (D''''P)

(4-A) – (PA''''').

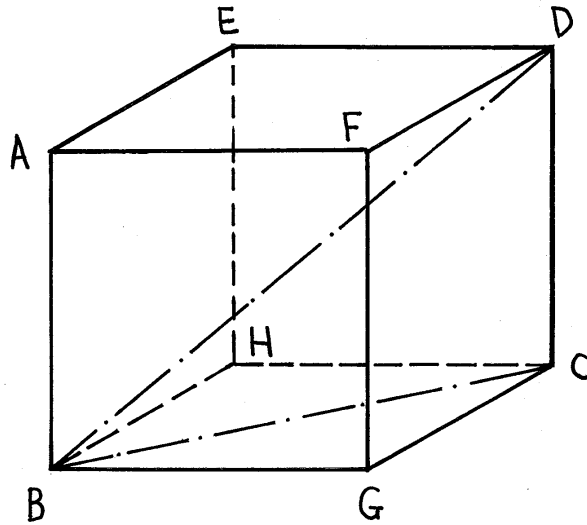
Infine, il grafico che segue mette a confronto il cubo in assonometria isometrica con le dimensioni ridotte con un rapporto di 0,816 (linee intere) e con le dimensioni reali (linee tratteggiate):



----- APPROFONDIMENTO -----

La diagonale di un cubo

Nel grafico, BC è la diagonale della base inferiore del cubo che ha spigoli lunghi ℓ ed è anche l'ipotenusa del triangolo rettangolo isoscele BGC:



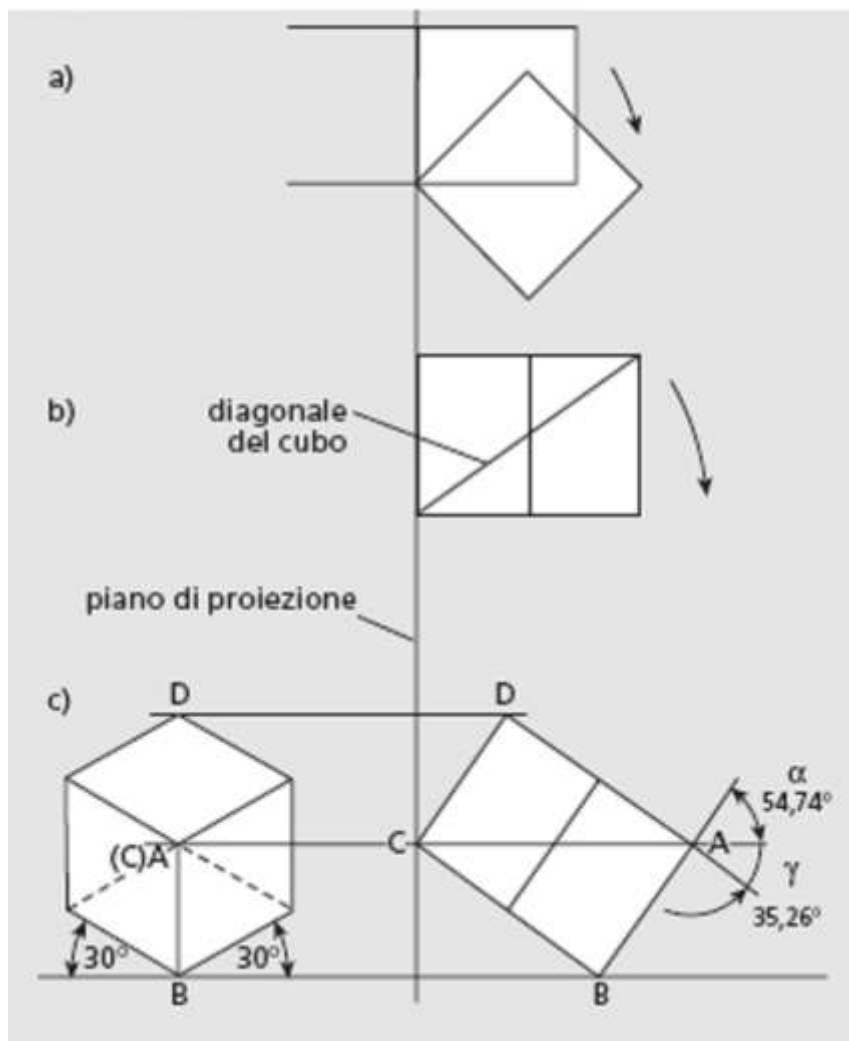
La sua lunghezza è:

$$BC = \sqrt{BG^2 + GC^2} = \sqrt{2} * \ell .$$

BDC è un triangolo rettangolo scaleno e BD ne è l'ipotenusa (oltre ad essere una delle quattro diagonali del cubo: le altre sono GE, AC e FH non rappresentate in figura) ed è lunga:

$$BD = \sqrt{BC^2 + DC^2} = \sqrt{2 * \ell^2 + \ell^2} = \sqrt{3} * \ell .$$

Riproduciamo la figura di pagina 83:



Il cubo viene dapprima ruotato in senso orario di 45° (fig. a), poi viene visto di fronte (fig. b), infine la diagonale del cubo, AC, viene posta in senso orizzontale (fig. c) in modo da disporla, a sinistra, perpendicolarmente al piano di proiezione, così da ridurla ad un punto $A \equiv (C)$.

I tre assi che convergono nel punto $A \equiv (C)$ formano angoli uguali e sono chiamati *assi isometrici*. Ciascuno spigolo del cubo è parallelo a uno degli assi isometrici.

Il segmento AD sul disegno corrisponde alla diagonale di una faccia quadrata: *corrisponde* non significa che sia la vera lunghezza nella realtà del segmento AD, perché nessuno spigolo del cubo è parallelo o perpendicolare al piano di proiezione. Le proiezioni degli spigoli giacciono sul piano di proiezione, con lunghezza ridotta.

Consideriamo il triangolo ACD. Con l'aiuto della trigonometria è possibile ricavare il valore dell'angolo γ di fig. c): $\sin \gamma = DC / AC$ e cioè $\sin \gamma = 30 / 30\sqrt{3} = 0,577$. A questo valore corrisponde un angolo di $35,264^\circ$ o di $35^\circ 16'$. Il valore 0,577 è pure quello dell'*arctan* (*arcotangente*) di 30° , angolo formato dagli spigoli sul piano di proiezione.

L'angolo complementare α vale $(90^\circ - 35^\circ 16') = 54^\circ 74'$.

Il rapporto di riduzione da applicare a tutti i segmenti disegnati sul piano di proiezione è uguale al rapporto fra la lunghezza della diagonale del quadrato e quella del cubo:

$$\text{rapporto di riduzione} = AD / AC = 30\sqrt{2} / 30\sqrt{3} = \sqrt{2} / \sqrt{3} = 0,816.$$

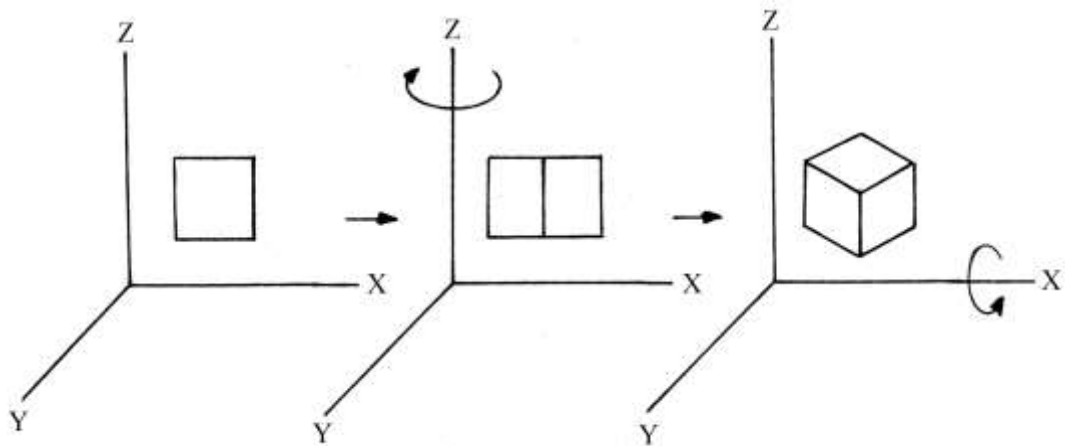
Il valore 0,816 è pure il valore di $\cos 35^\circ 16'$ e di $\sin 54^\circ 74'$.

La norma UNI EN ISO già citata prevede l'uso del fattore di riduzione 0,816.

La figura che segue mostra graficamente i movimenti necessari per giungere alla rappresentazione del cubo in assonometria isometrica:

- A sinistra viene disegnata una faccia del solido parallela al piano di proiezione.

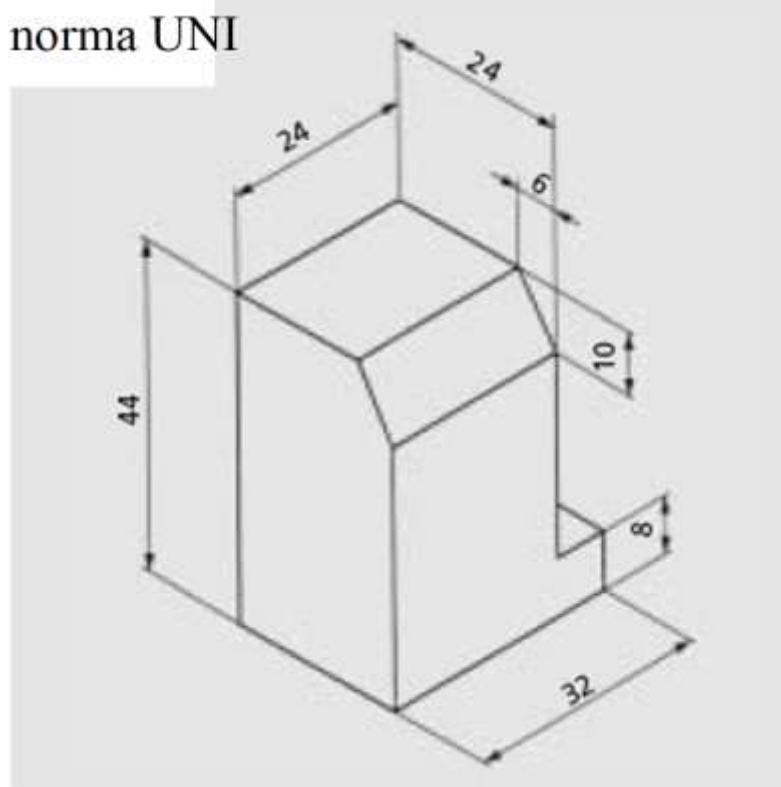
- Al centro, viene effettuata una rotazione intorno all'asse verticale di 45°.
- A destra, viene realizzata una rotazione intorno all'asse orizzontale, in modo che la diagonale del cubo si disponga perpendicolarmente al piano di proiezione.



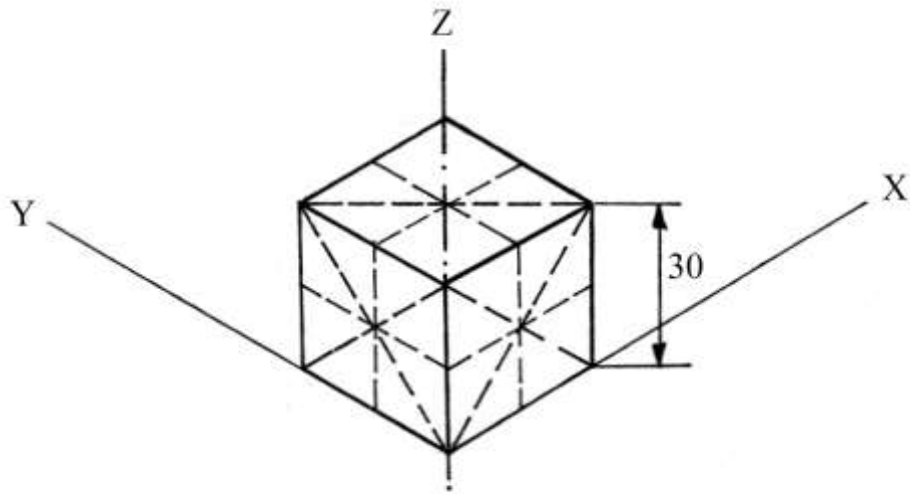
Nella pratica si preferisce disegnare in *assonometria isometrica semplificata* riportando le dimensioni effettive senza applicare il fattore di riduzione. La norma UNI permette anche questa soluzione.

In questo caso le dimensioni risultano maggiorate di un rapporto pari a $1 / 0,816$ oppure a $(\sqrt{3})/(\sqrt{2}) = \sqrt{3/2}$ e cioè $\sim 1,225$.

L'uso della seconda soluzione non crea grossi problemi se i pezzi meccanici sono quotati come nell'esempio della figura, ricavata dalla citata norma UNI:

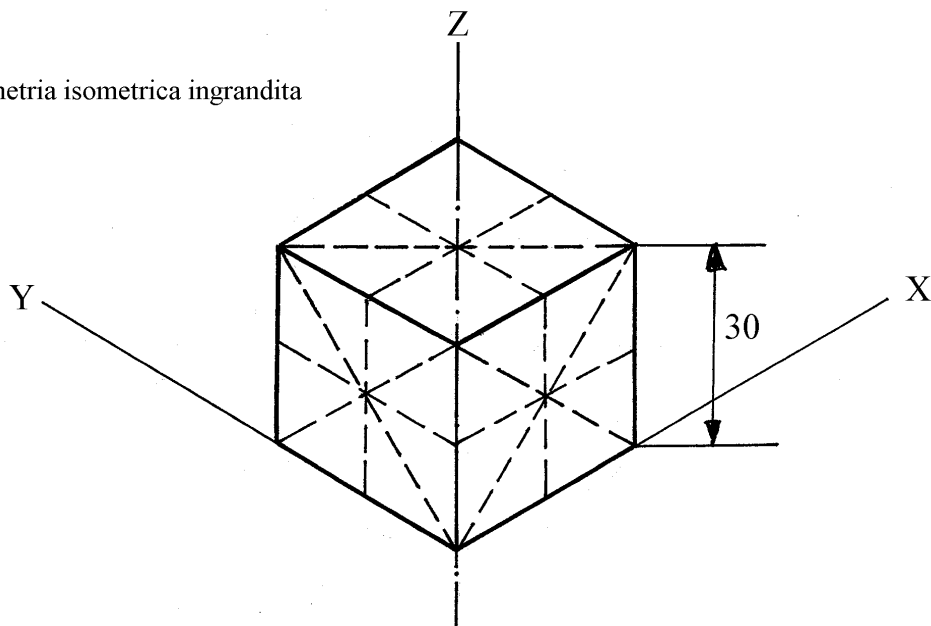


Nella figura che segue sono posti a confronti i disegni del cubo: in alto con la riduzione applicata e in basso con le dimensioni reali (e quindi ingrandite di 1,225 volte).



a) assonometria isometrica con riduzione 0,816

b) assonometria isometrica ingrandita

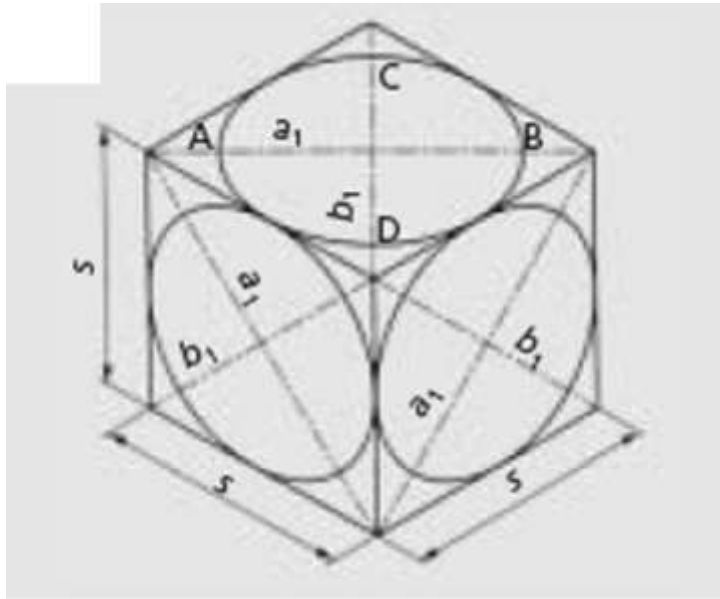


Un disegno realizzato con riduzione 0,816 (fig. a) viene chiamato *proiezione isometrica*. Se invece il disegno viene eseguito con scala intera (fig. b), è detto *disegno isometrico*.

La figura che segue, ricavata dalla norma UNI, disciplina la rappresentazione di circonferenze, inscritte sulle facce del cubo con spigolo lungo s disegnato in assonometria isometrica. Le circonferenze sono deformate in ellissi: gli assi maggiore AB e minore CD sono lunghi rispettivamente $1,22 s$ e $0,71 s$.

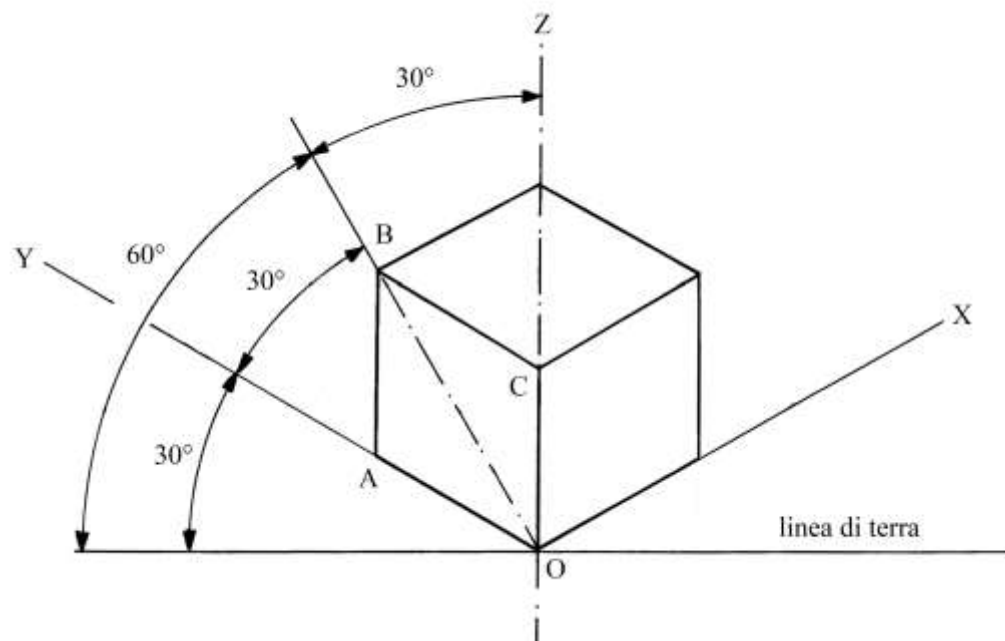
$$AB = a_1 = \sqrt{3/2} s \approx 1,22 s$$

$$CD = b_1 = \sqrt{1/2} s \approx 0,71 s$$



Angoli dell'assonometria isometrica

Lo schema che segue presenta il consueto cubo in assonometria isometrica:



Il vertice O è l'origine dei tre assi X, Y e Z, fra loro ruotati di 120° .

La *linea di terra* è perpendicolare all'asse Z.

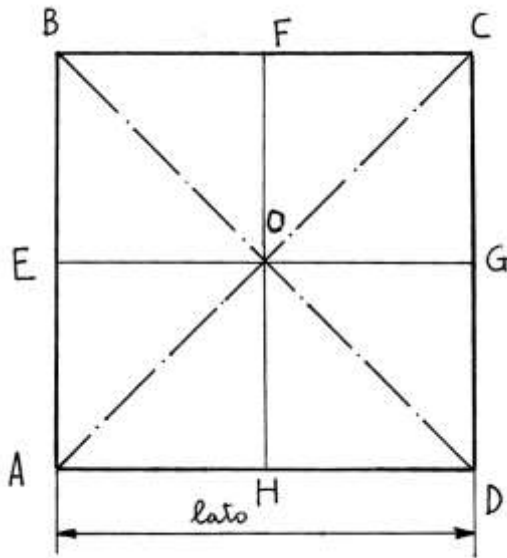
L'asse Y è ruotato in senso orario di 30° rispetto alla linea di terra.

OB è una diagonale del quadrato OABC (deformato in un rombo): nella figura essa forma con l'asse Y un angolo di 30° .

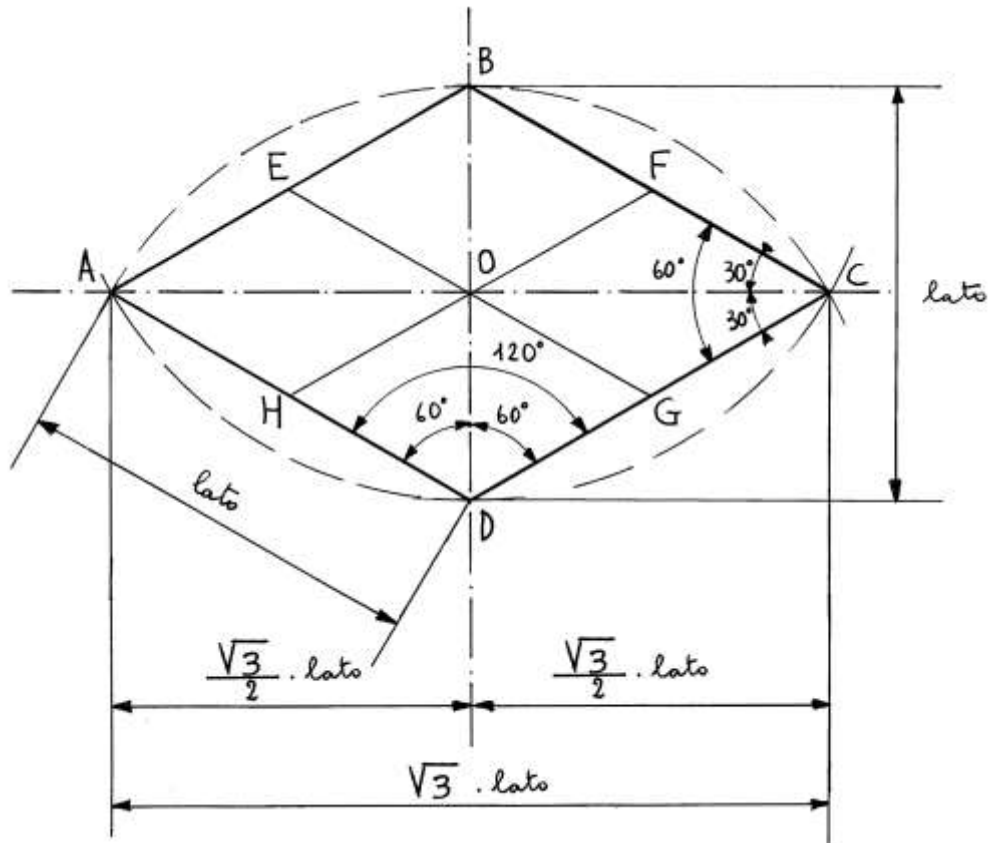
----- APPROFONDIMENTO -----

Rombo isometrico

ABCD è un quadrato: AC e BD sono le sue *diagonali* e EG e FH sono le *mediane*:



Il quadrato viene deformato in un *rombo* che ha la diagonale minore, BD, lunga quanto uno dei lati del rombo (e del quadrato originario):



Il rombo è formato da due triangoli equilateri, ABD e BCD, di uguali dimensioni e uniti lungo il lato comune BD.

L'asse maggiore AC è lungo quanto le due altezze AO e OC:

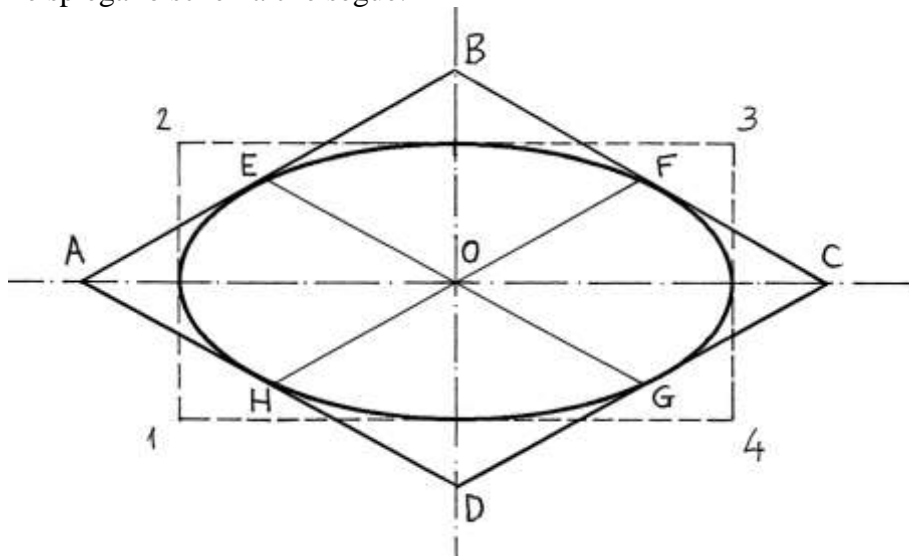
$$AC = AO + OC = 2 * AO = 2 * OC.$$

Le due altezze sono segmenti *adiacenti*. Ciascuna di esse è lunga:

$$AO = (\sqrt{3})/2 * lato.$$

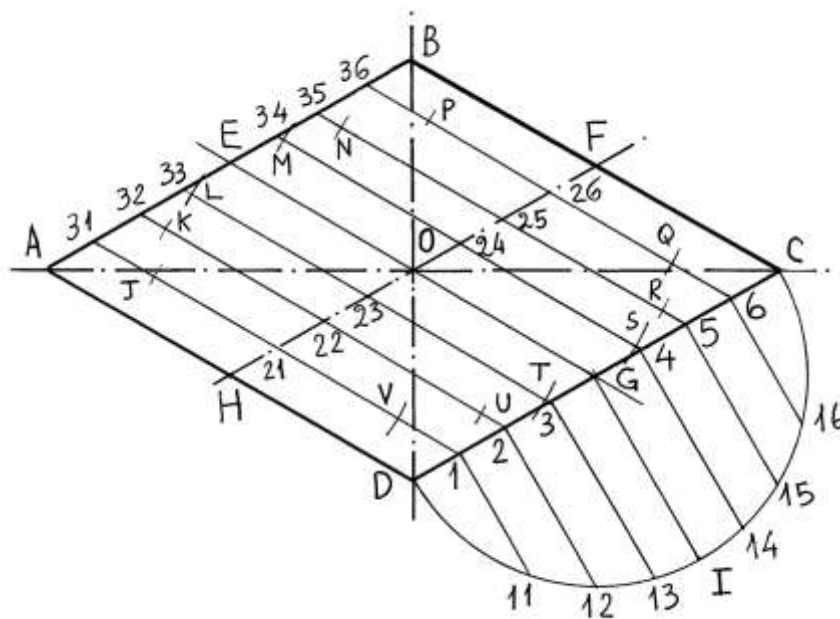
La figura descrive pure gli angoli interni del rombo.

Il rombo isometrico è circoscrittibile a un'ellisse derivante dall'assonometria *isometrica* di un cerchio, come spiega lo schema che segue:



Assonometria isometrica di un cerchio

Un metodo approssimato per disegnare un'ellisse è descritto nella figura che segue:



ABCD è un *rombo isometrico*. EG e HF sono le mediane del poligono.

Dividere un lato del rombo, DC in questo esempio, in parti uguali: nella figura sono *otto*.

Fare centro in G e con raggio $GC = GD$ tracciare una semicirconferenza da C a D.

Dai punti 1, 2, 3, G, 4, 5 e 6 condurre le perpendicolari a DC fino a incontrare la semicirconferenza nei punti 11, 12, 13, I, 14, 15 e 16.

Sempre dai punti 1, 2, 3, G, 4, 5 e 6 disegnare le parallele ai lati AD e BC fino a stabilire i punti {21, 22, 23, 24, 25, 26} e {31, 32, 33, 34, 35, 36}: questi segmenti paralleli a AD e BC sono delle *corde* dell'ellisse da disegnare e da ciò prende nome questo metodo che è noto come *metodo delle corde parallele*.

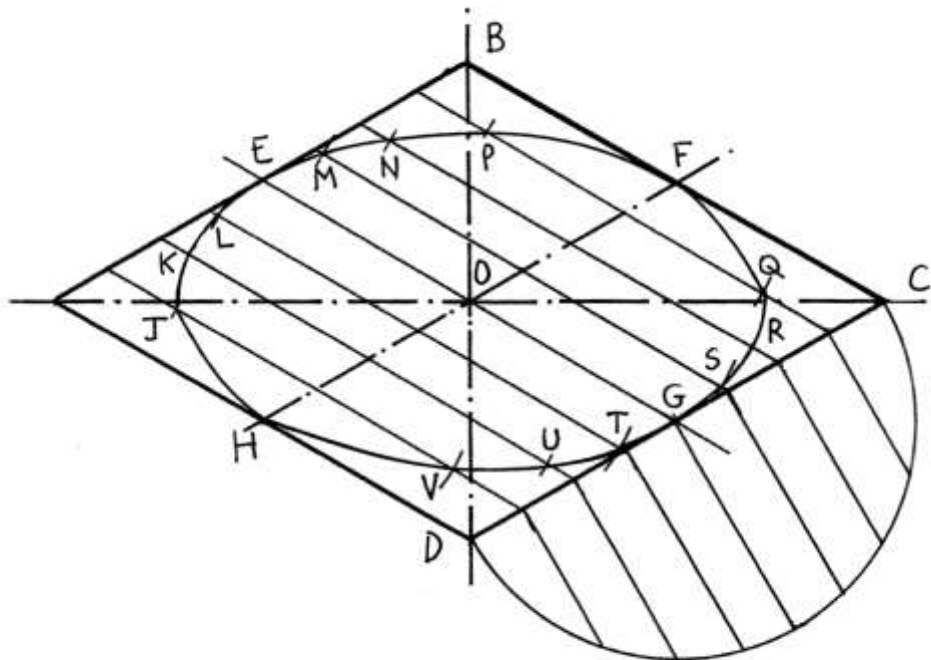
Con il compasso misurare 1-11 (o 6-16) e riportare la lunghezza sui segmenti 1-31 e 6-36 a

partire dai punti 21 e 26 e fissare i punti J-V e P-Q.

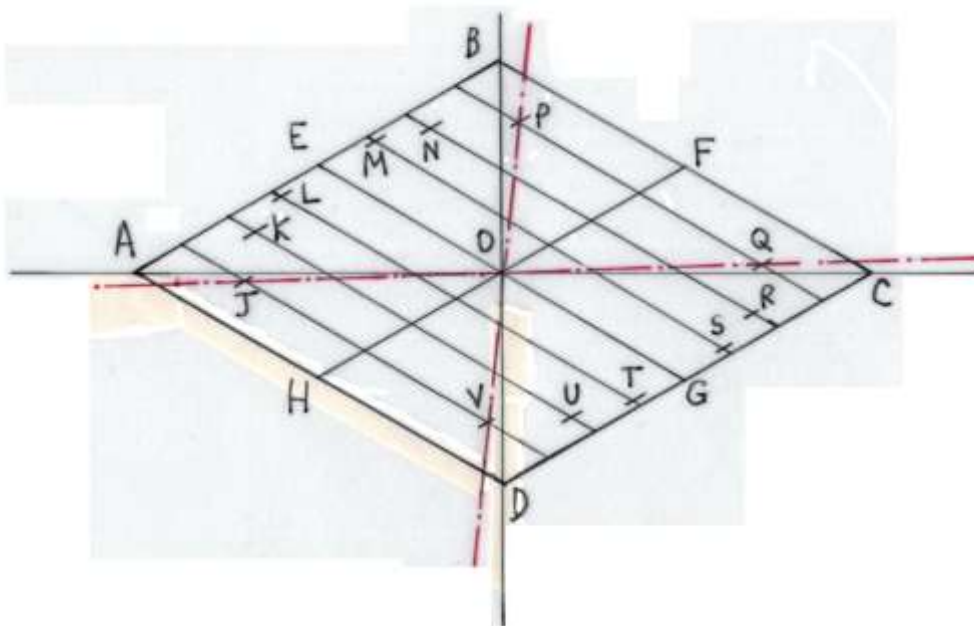
Misurare la lunghezza di 2-12 (o di 5-15) e riportarla in 22 e 26 per determinare i punti K-U e N-R.

Infine misurare la lunghezza di 3-13 (o di 4-14) e con essa fare centro in 23 e 24 per fissare i punti L-T e M-S.

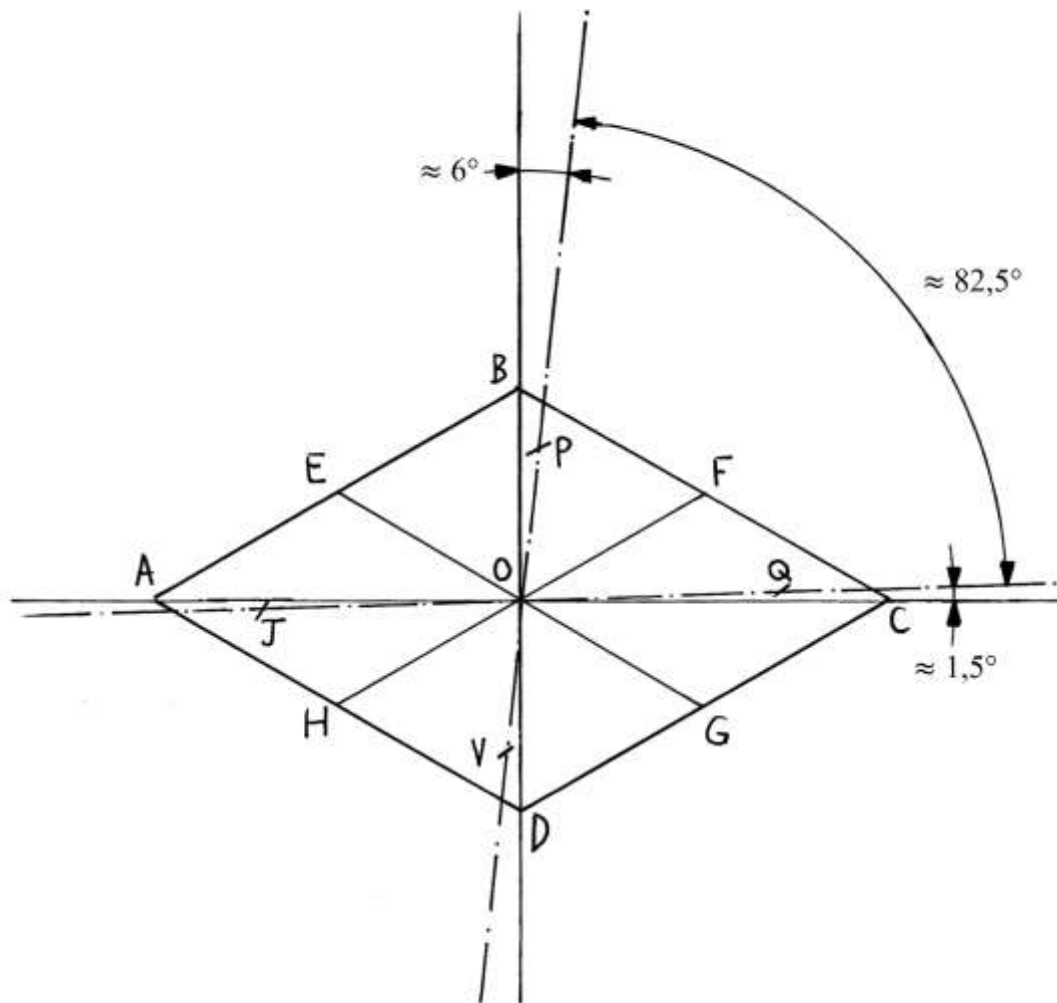
JKLEMNPFQRSGTUVH è l'ellisse cercata da completare con l'aiuto di un curvilinee:



L'ellisse presenta due assi: quello maggiore PV e quello minore JQ che *non* coincidono con le diagonali AC e BD del rombo isometrico:



Lo schema che segue presenta gli scostamenti fra le diagonali del rombo e gli assi dell'ellisse:

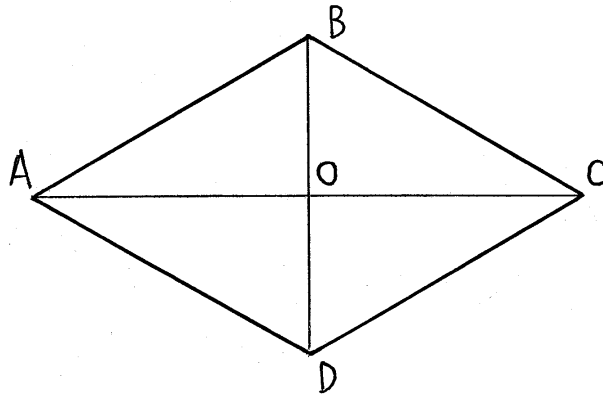


L'asse JQ è ruotato in *sensu antiorario* di $\sim 1,5^\circ$ rispetto alla diagonale AC.
 L'asse PV è ruotato di $\sim 6^\circ$ in *sensu orario* rispetto alla diagonale BD.
 I due assi JQ e PV *non* sono fra loro ortogonali ma formano un angolo di $\sim 82,5^\circ$.
 Questo metodo non fornisce una costruzione esatta dell'ellisse.

Le deformazioni delle figure piane in assonometria isometrica

In assonometria isometrica i quadrati sono deformati in *rombi* che sono formati da due triangoli equilateri uniti,

Il rombo ABCD è costituito da due triangoli equilateri, ABD e BCD, di uguali dimensioni e uniti lungo il lato comune BD:



Le diagonali sono AC e BD: la prima è lunga quanto le due altezze AO e OC che sono due segmenti *adiacenti* perché giacciono sulla stessa retta e hanno in comune il vertice O. La seconda diagonale, BD, è lunga quanto un lato dei triangoli ed è il loro lato comune.

Chiamiamo ℓ la lunghezza dei lati dei triangoli e h le altezze $AO = OC$.

La lunghezza di ℓ è fissata convenzionalmente uguale a 1, quindi l'altezza AO vale:

$$AO = h = (\sqrt{3})/2 * \ell = (\sqrt{3})/2 * 1 = (\sqrt{3})/2.$$

La doppia altezza AC è lunga:

$$AC = 2 * h = (\sqrt{3})/2 * 2 = \sqrt{3}.$$

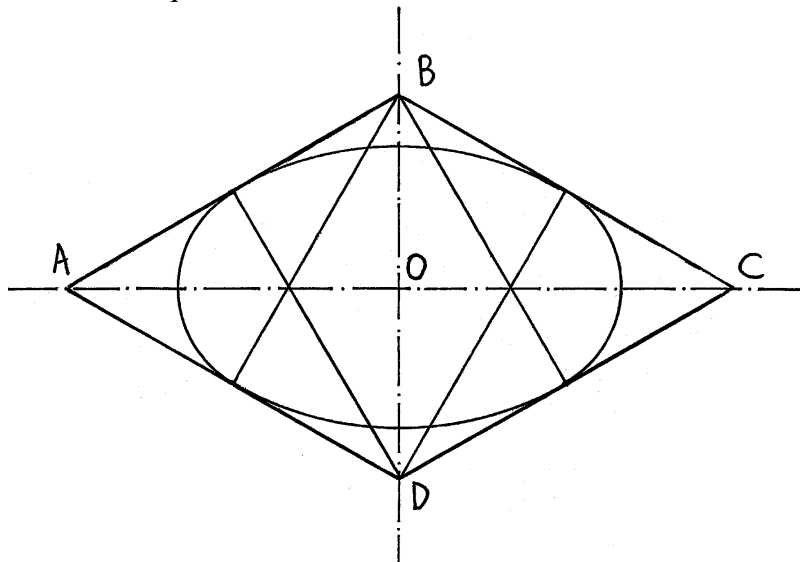
Il rapporto fra le lunghezze delle due diagonali è:

$$AC/BD = \sqrt{3} * \ell / \ell = \sqrt{3}.$$

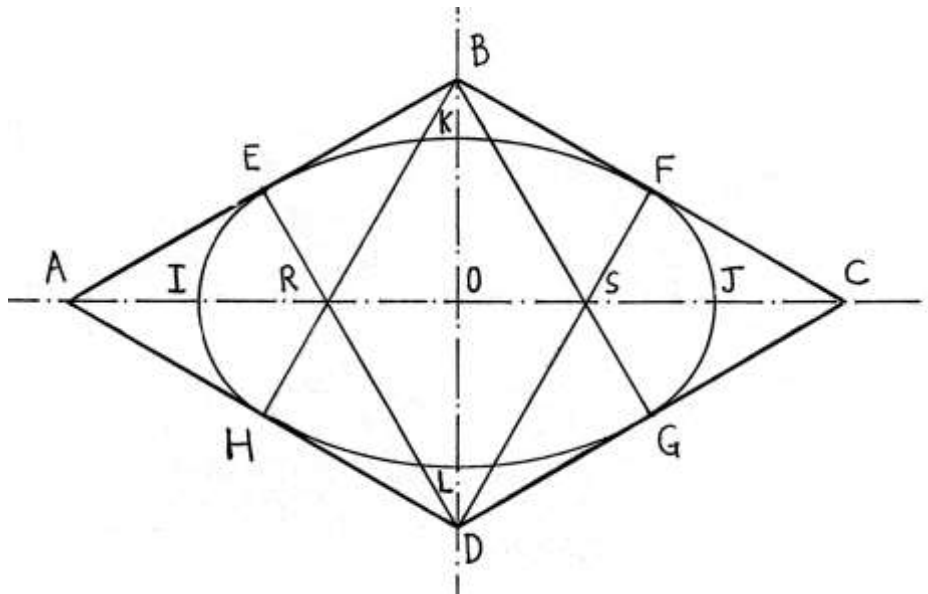
Il rapporto reciproco fra le due lunghezze è:

$$BD/AC = 1/(\sqrt{3}) = (\sqrt{3})/3 \approx 0,577 \rightarrow 0,58.$$

Un cerchio inscritto in un quadrato è deformato in un'ellisse tangente internamente in quattro punti al rombo nel quale è racchiusa:



L'ellisse è una curva complessa che non può essere disegnata con il compasso, ma essa può essere approssimata con un'ovale a 4 o, meglio, a 8 centri. La figura precedente e quella che segue mostrano un'ovale a 4 centri:



Dai vertici B e D tracciare le perpendicolari ai lati del rombo: sono DE, DF, BG e BH. E, F, G e H sono i punti medi dei rispettivi lati.

Le quattro perpendicolari si intersecano nei punti R e S posizionati sulla diagonale maggiore AC e simmetrici rispetto al centro O.

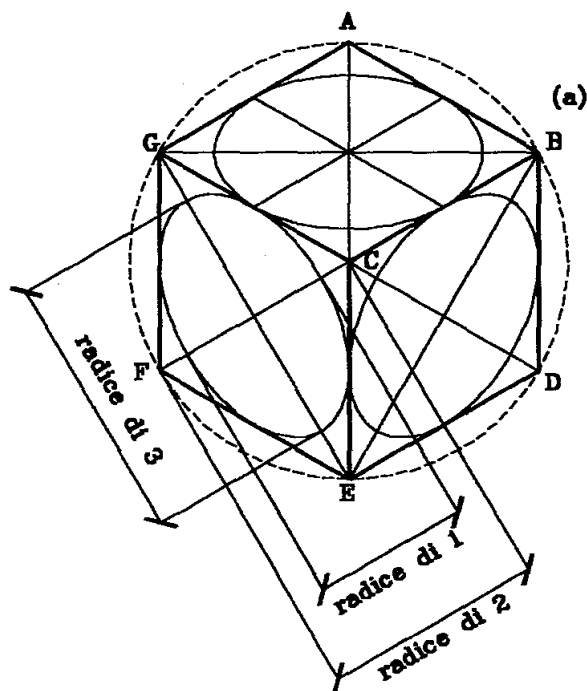
Fare centro nei punti B e D e con raggio $BG = DE$ disegnare gli archi EF e GH.

Con centro in R e in S e raggio $RE = SF$ tracciare gli archi E(I)H e F(J)G.

L'ovale a 4 centri (D, B, R e S) è completa.

L'ovale ha due assi di simmetria: quello maggiore IJ e quello minore KL.

Lo schema che segue (dal testo di Cristina Cándito citato in bibliografia) mostra il cubo inscritto in un esagono con le tre facce contenenti tre ellissi:



Da tutti questi grafici si deducono una serie di rapporti:
 asse maggiore ovale: asse minore ovale = $\sqrt{3} : \sqrt{1}$

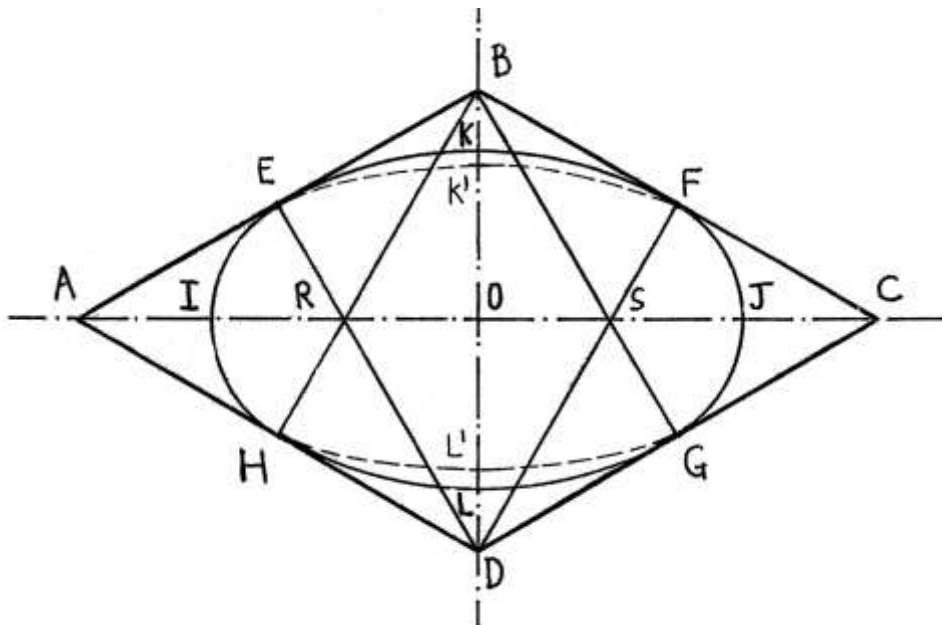
$$IJ : KL = \sqrt{3} : 1$$

asse maggiore ovale : diagonale minore rombo = $\sqrt{3} : \sqrt{2}$

$$IJ : BD = \sqrt{3} : \sqrt{2} .$$

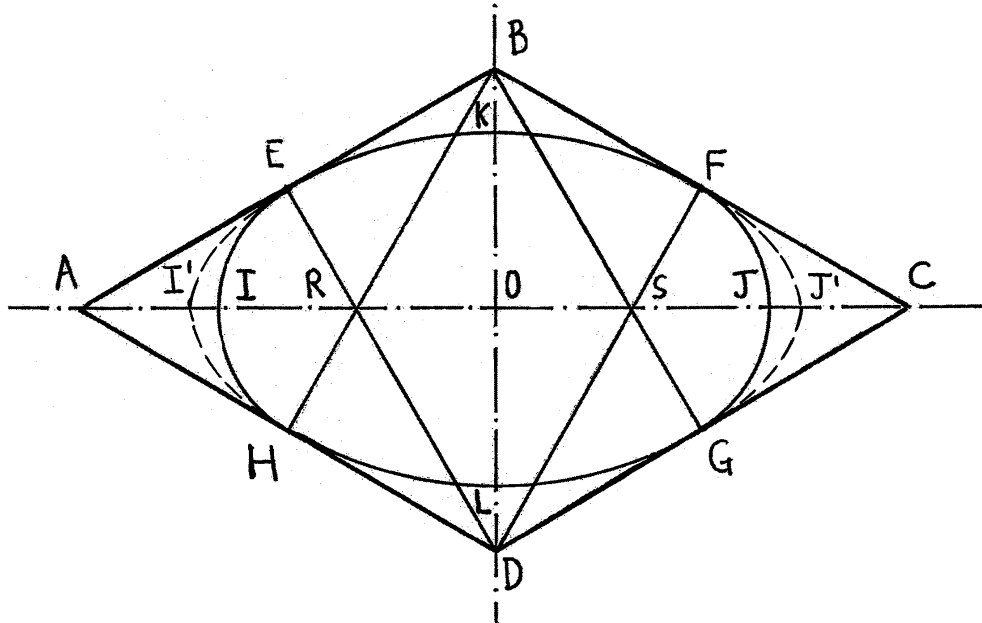
Nel penultimo grafico l'ovale approssima l'ellisse con un piccolo scarto: i rapporti geometrici appena indicati per l'ellisse non sono rispettati dall'ovale con assoluta precisione.

Lo schema che segue rettifica gli archi EKF e HLG dell'ovale negli archi EK'F e HL'G dell'ellisse:



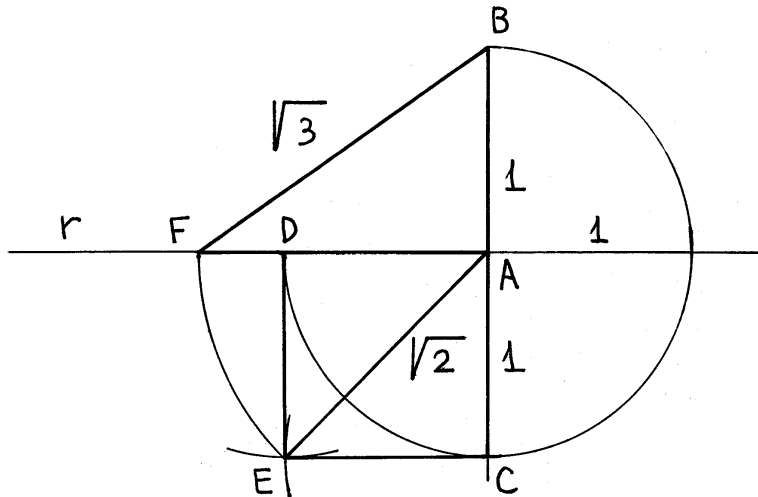
Il rapporto fra gli assi IJ e K'L' è effettivamente uguale a ($\sqrt{3} : 1$).

Una variante è mostrata nella figura che segue:



In questo caso, la lunghezza dell'asse minore KL è invariata. L'asse maggiore, I'J', è lungo $\sqrt{3}$ volte quello minore. Anche questa ovale rappresenta un'accettabile approssimazione dell'ellisse.

La costruzione dei segmenti con lunghezze proporzionali a $1 = \sqrt{1}$, $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ è ricavabile con il metodo descritto nella figura:



Tracciare una retta orizzontale, r , e fissarvi un punto, A . Per questo ultimo far passare una perpendicolare. AB è la lunghezza convenzionale 1.

Fare centro in A e con raggio AB disegnare un arco da B fino a stabilire in successione i punti C e D .

Costruire il quadrato $DACE$, che ha lati lunghi 1, e la diagonale AE che è lunga $\sqrt{2}$.

Fare centro in A e con raggio AE tracciare un arco da E fino a determinare il punto F sulla retta r .

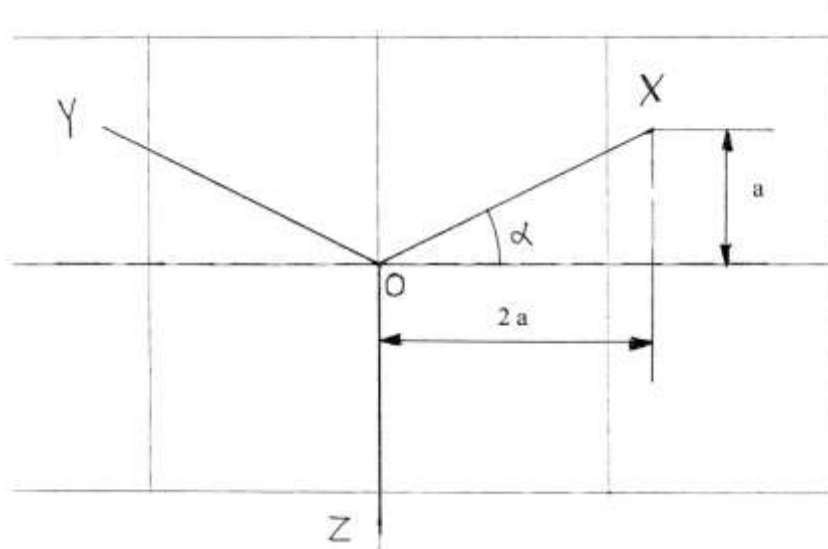
Disegnare il segmento FB : esso è l'ipotenusa del triangolo rettangolo AFB . La sua lunghezza è:

$$FB^2 = FA^2 + BA^2 = (\sqrt{2})^2 + 1^2 = 2 + 1 = 3, \text{ da cui}$$

$$FB = \sqrt{3} .$$

Un'assonometria isometrica semplificata

Una forma semplificata di assonometria *quasi* isometrica impiega un'inclinazione fornita da un angolo che ha tangente 0,5:



La tangente dell'angolo α è:

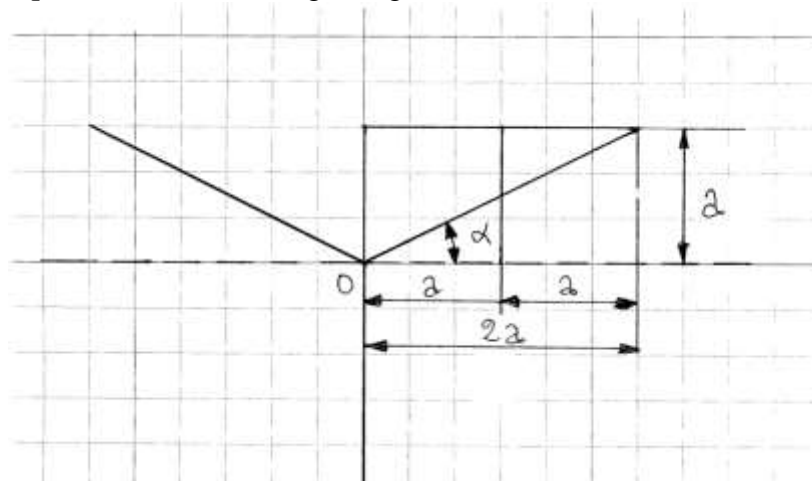
$$\text{tg } \alpha = a/2 \cdot a = 1/2 = 0,5.$$

A questo valore corrisponde un angolo

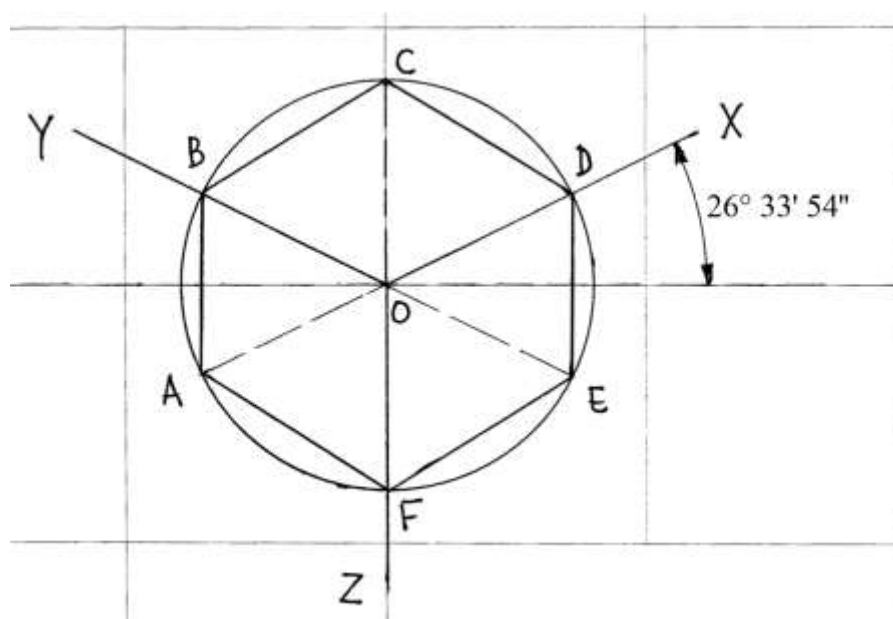
$\alpha \approx 26,56505118^\circ \approx 26^\circ 33' 54''$, che può essere

approssimato a 27° .

Questa particolare inclinazione è facilmente costruibile con della quarta quadrettata: la diagonale di un *doppio quadrato* forma un angolo uguale a α :

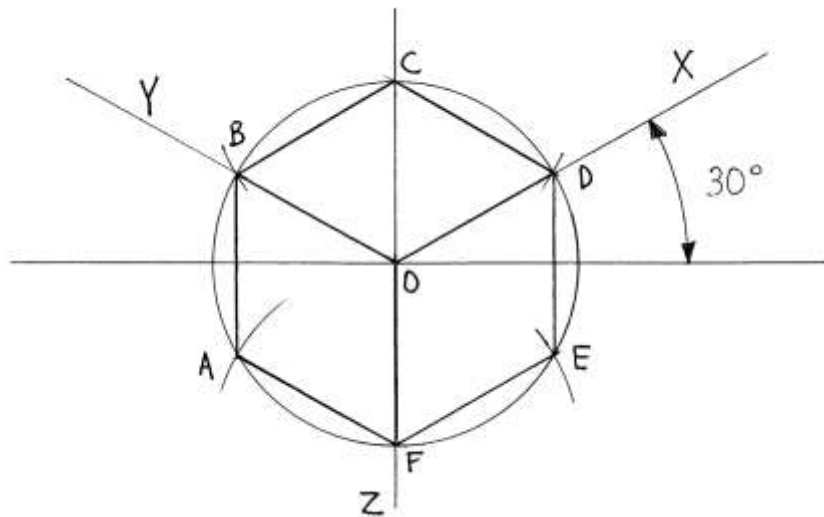


La figura che segue presenta l'assonometria del cubo ABCDEF costruita secondo gli assi dello schema precedente:

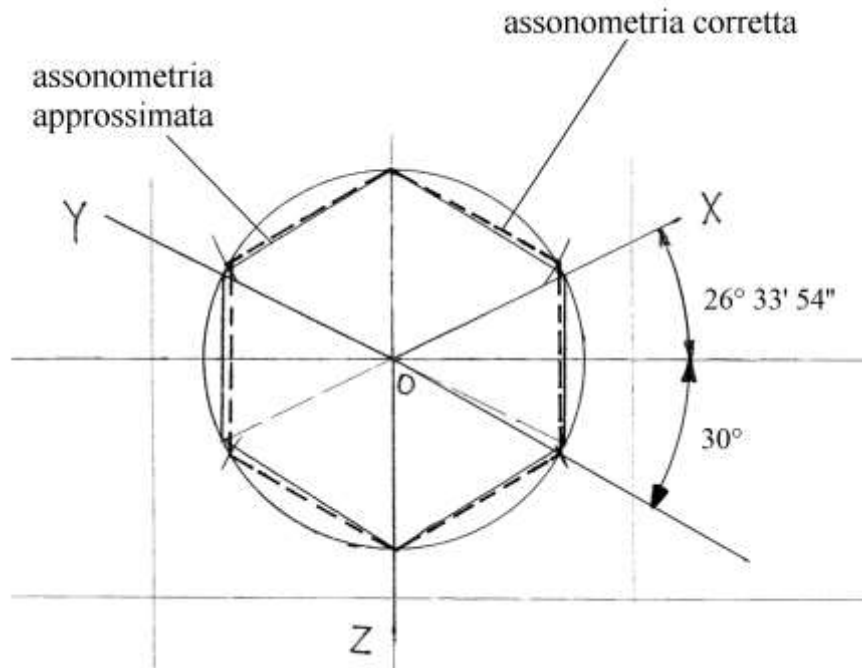


La costruzione è un po' imprecisa perché gli spigoli AB e DE sono leggermente più corti e gli altri quattro (BC, CD, EF e FA) sono più lunghi dei primi due.

La figura che segue mostra una precisa assonometria isometrica dello stesso cubo (si tratta del "cubo nell'esagono"):



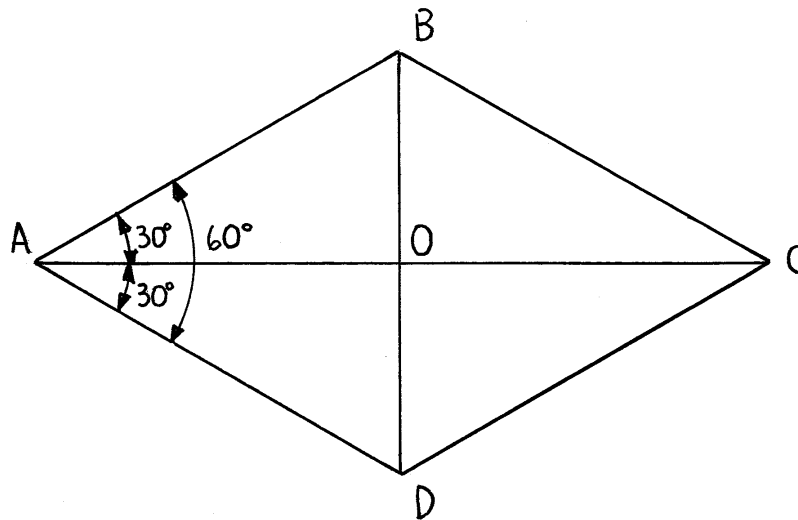
Infine, lo schema seguente mette a confronto per sovrapposizione le due proiezioni assonometriche; con tratto continuo è disegnata quella approssimata e tratteggiata quella corretta.



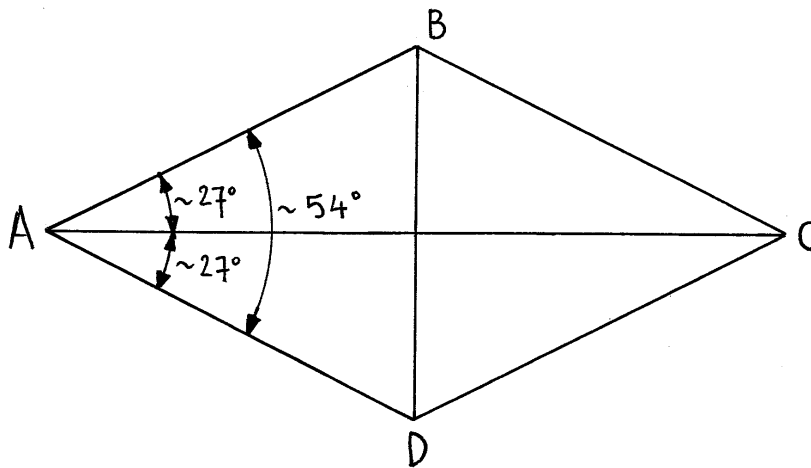
La differenza fra le due assonometrie dello stesso cubo è abbastanza evidente.

Per chiarire ancora di più le conseguenze dell'uso dell'approssimazione a 27° , presentiamo alcuni schemi.

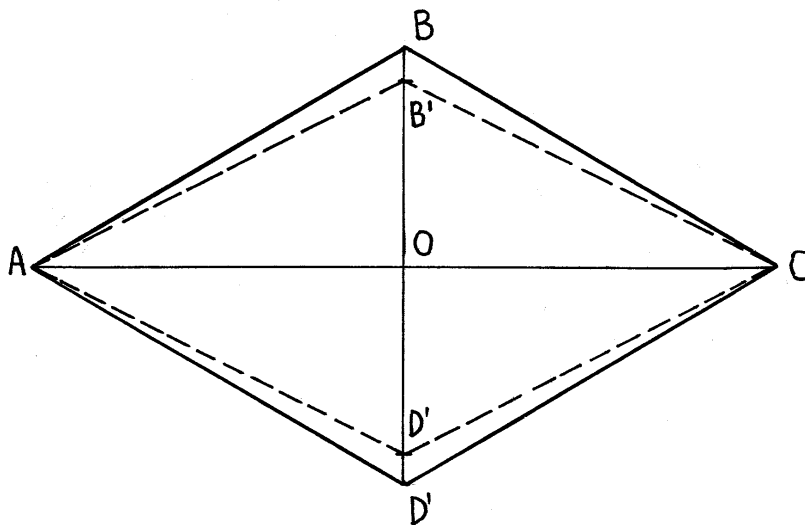
Il quadrato deformato in un rombo isometrico ha gli angoli mostrati in figura:



Il grafico che segue contiene un rombo deformato con angoli di 27° e con la diagonale AC lunga quanto quella del rombo precedente:



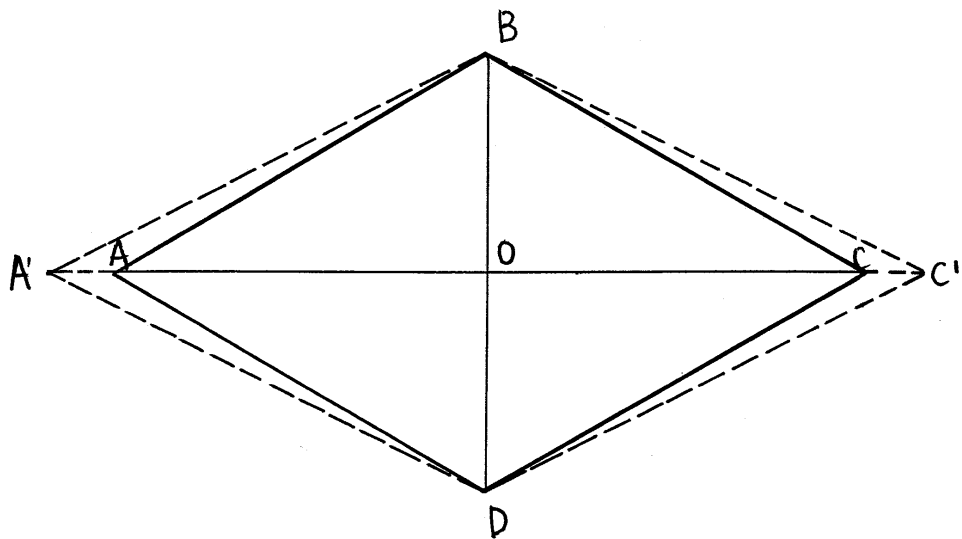
La diagonale minore BD è lunga *metà* di quella AC.
Lo schema che segue confronta i due rombi:



Il rombo ABCD è quello isometrico mentre quello a linee tratteggiate, $AB'CD'$, è quello con angoli di $\approx 27^\circ$ e $\approx 54^\circ$.

Infine, il grafico che segue mostra ancora il rombo isometrico ABCD e il rombo a $27-54^\circ$

con la diagonale maggiore A'C' lunga esattamente il *doppio* di quella minore BD:

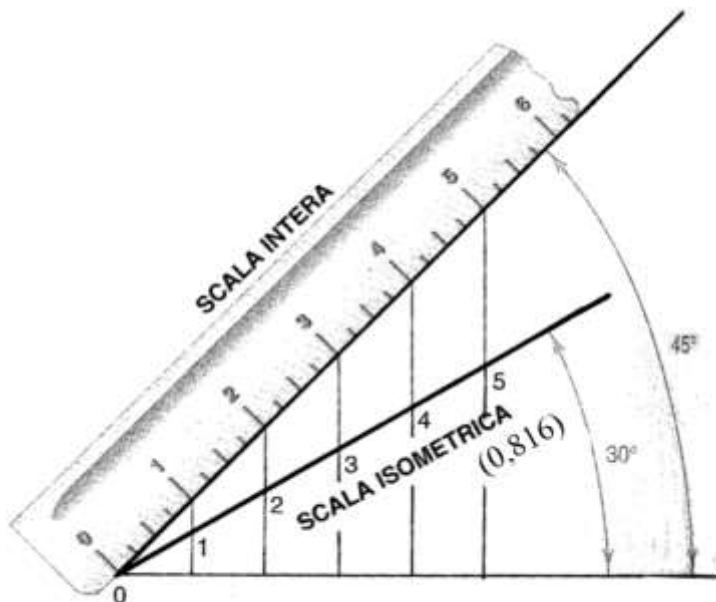


----- APPROFONDIMENTO -----

Metodi pratici per convertire le dimensioni in assonometria isometrica

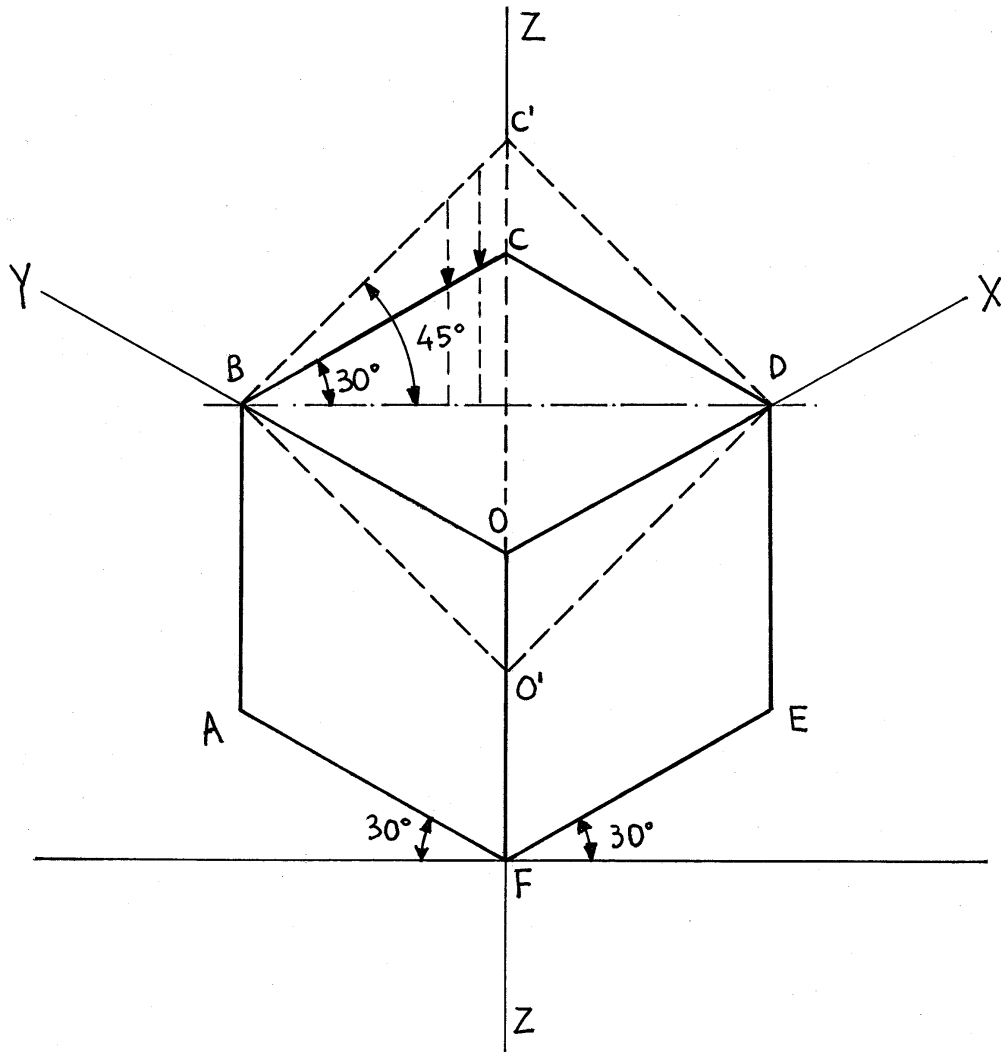
Il disegno isometrico (con dimensioni non ridotte) fornisce un'immagine di un solido o di un pezzo meccanico ingrandita. Nell'esecuzione dei disegni tecnici questo metodo viene preferito alla proiezione isometrica (con riduzione a 0,816) perché più facile da realizzare.

Nei casi nei quali occorre determinare rapidamente le dimensioni ridotte nel rapporto 0,816 è possibile usare la costruzione descritta nella figura che segue:



Sono tracciate due semirette inclinate di 30 e di 45° aventi la stessa origine in O. Sulla semiretta inclinata di 45° si riportano le dimensioni a partire da O. Dai punti corrispondenti si disegnano le perpendicolari all'asse orizzontale: le intersezioni 1, 2, 3, 4, 5 sulla semiretta forniscono le dimensioni ridotte del coefficiente 0,816, che possono essere riportate con il compasso centrato in O.

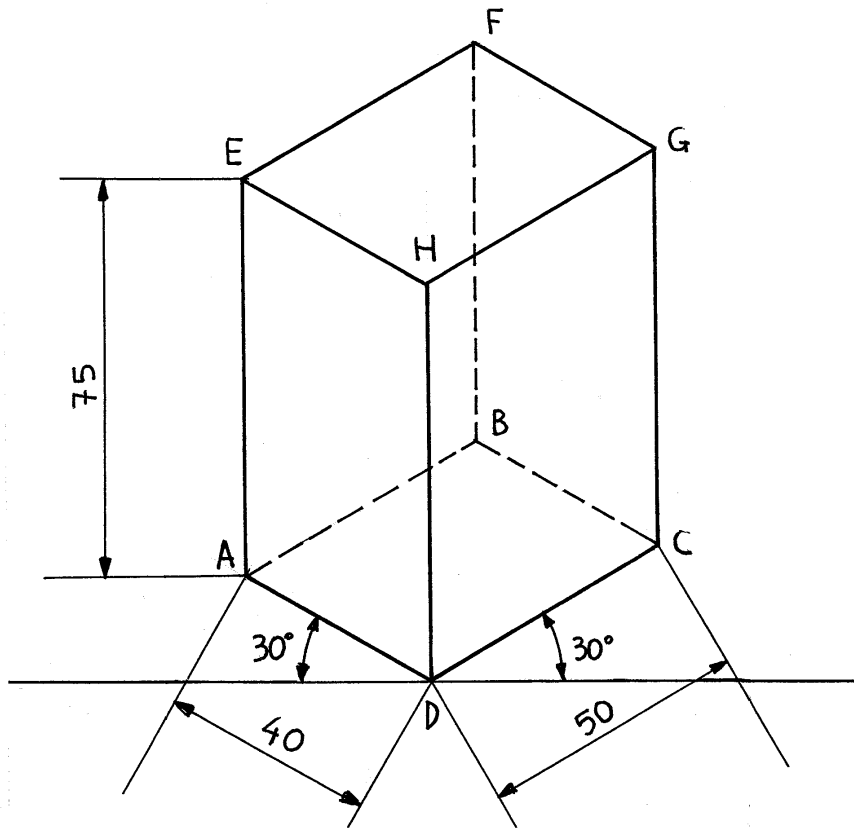
L'origine dello schema precedente è mostrato nel grafico che segue:



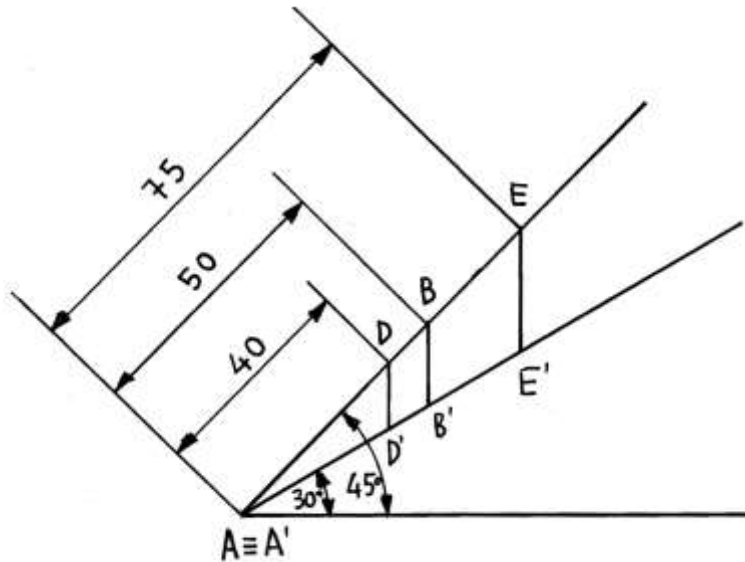
A, B, C, D, E, F e O sono sette vertici del cubo rappresentato in assonometria isometrica. ABCDEF è un esagono regolare. BC'DO' è un quadrato che ha diagonali $BD = C'O'$ lunghe quanto la diagonale maggiore, BD, del rombo BCDO.

I punti relativi alle lunghezze riportate sul segmento BC' sono proiettati perpendicolarmente alla diagonale BD e sullo spigolo BC intercettano i punti corrispondenti alle lunghezze scorciate.

Applichiamo la regola al caso di un solido geometrico. Un parallelepipedo è disegnato in assonometria isometrica con le dimensioni reali non scorciate:



Applichiamo la costruzione suggerita all'inizio di questo paragrafo. Tracciare una semiretta orizzontale uscente dal punto A:



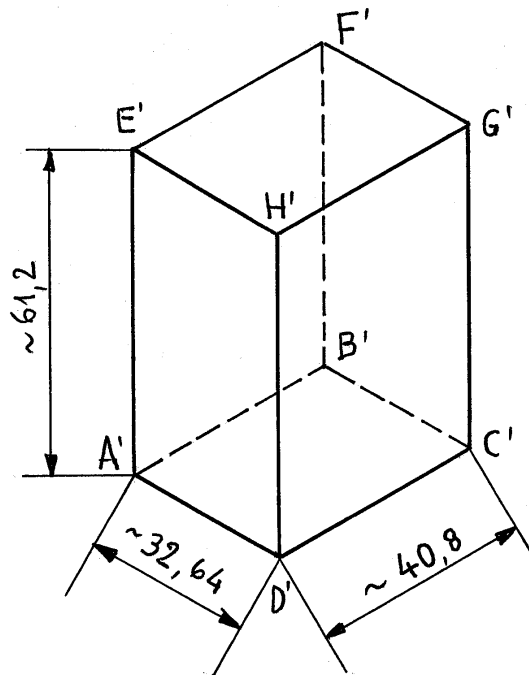
Dal punto A disegnare due semirette inclinate di 30° e di 45° rispetto alla semiretta orizzontale.

A partire da A, sulla semiretta inclinata di 45° riportare le lunghezze dei tre spigoli AD, AB e AE.

Dai punti D, B e E abbassare le perpendicolari alla semiretta orizzontale fino a stabilire sulla semiretta inclinata di 30° i punti D', B' e E'.

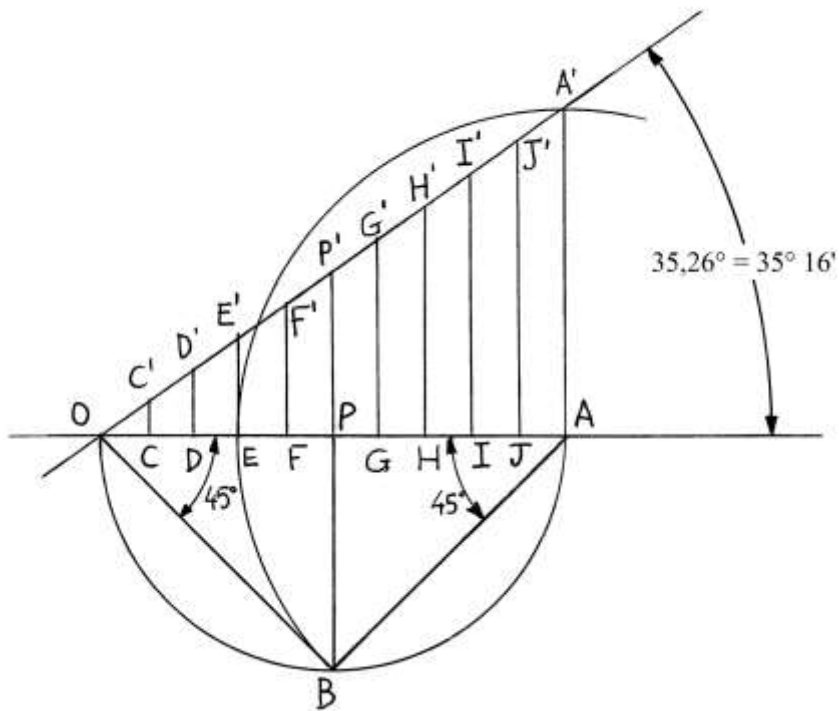
I segmenti A'D', A'B' e A'E' sono lunghi 0,816 volte i segmenti AD, AB e AE.

Con il compasso riportare le lunghezze di A'D', A'B' e A'E' per disegnare il parallelepipedo in assonometri isometrica con le dimensioni ridotte:



%%%%%%%%%

Un metodo grafico indiretto rispetto a quello descritto all'inizio di questo APPROFONDIMENTO è mostrato nella figura che segue:



Tracciare una retta orizzontale e fissarvi un punto, P. Con raggio a piacere fare centro in P e disegnare una semicirconfenza da O a A.

Per il punto P condurre la perpendicolare a OA: essa taglia la semicirconfenza in B.

Tracciare le corde OB e AB: esse formano angoli di 45° con il diametro OA.

Dal punto A innalzare la perpendicolare a OA.

Fare centro in A e con raggio AB disegnare un arco da B fino a intersecare la precedente perpendicolare in un punto, A'. Unire O con A'.

Da P condurre la perpendicolare a OA fino a tagliare l'ipotenusa OA' nel punto P'.

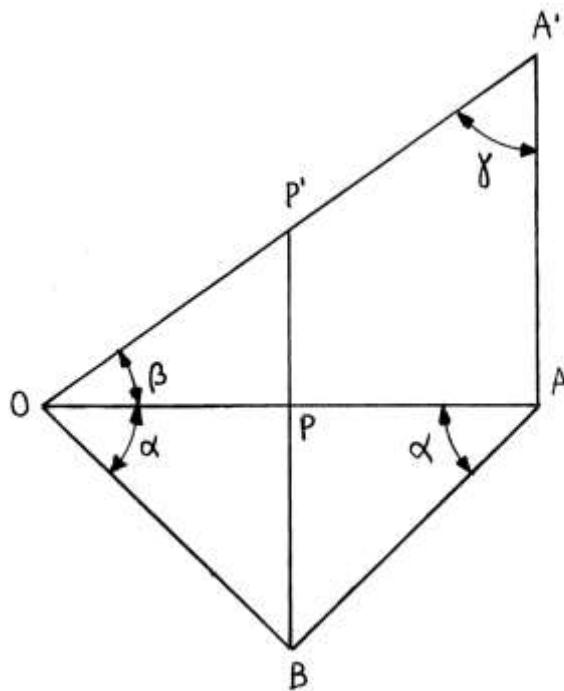
Dividere OA' in un certo numero di parti uguali, *dieci* nell'esempio.

Dai punti fissati su OA' abbassare le perpendicolari a OA: sono così ottenuti i punti C, D, E, F, G, H, I e J.

Un segmento lungo quanto OC' è proiettato, accorciato, in OC; data su OA' una lunghezza da ridurre in termini isometrici su OA se ne ricava per via grafica la lunghezza.

L'angolo A'OA è ampio $35,26^\circ$ nel sistema sessadecimale e il suo equivalente $35^\circ 16'$ nel sistema sessagesimale.

Consideriamo lo schema contenuto nella seguente figura (che è una stilizzazione della precedente):



OAB è un triangolo rettangolo isoscele e i suoi cateti OB e AB sono lunghi *convenzionalmente* 1. Di conseguenza, l'ipotenusa OA è:

$$OA = \sqrt{2} * AB = \sqrt{2} * OB = \sqrt{2} * 1 = \sqrt{2} .$$

Anche OA'A è un triangolo rettangolo, ma scaleno. Per costruzione, il cateto AA' è lungo quanto i cateti AB e OB e cioè 1.

L'angolo β ha tangente data da:

$$\text{tg } \beta = A'A/OA = 1/\sqrt{2} = (\sqrt{2})/2 .$$

L'angolo β è ampio: $\beta \approx 35,26438968^\circ$, arrotondato a $35,26^\circ$.

L'ipotenusa OA' è lunga:

$$OA' = \sqrt{(OA^2 + A'A^2)} = \sqrt{[(\sqrt{2})^2 + 1^2]} = \sqrt{(2 + 1)} = \sqrt{3} .$$

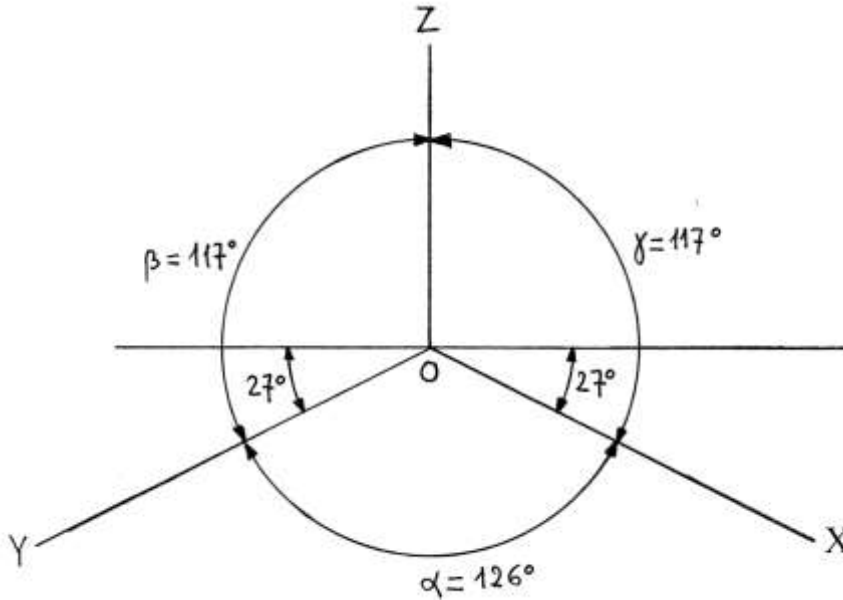
Il rapporto fra lunghezza del cateto OA e quella dell'ipotenusa OA' è:

$OA/OA' = (\sqrt{2})/(\sqrt{3}) = \sqrt{(2/3)} \approx 0,81649658$, che arrotondato a 0,816 è il coefficiente di riduzione usato nell'assonometria isometrica su tutti e tre gli assi.

DALL'ASSONOMETRIA ISOMETRICA A QUELLA DIMETRICA

La configurazione dei tre assi con angoli di 27° sposta l'attribuzione di questa terna alla categoria dell'*assonometria dimetrica*.

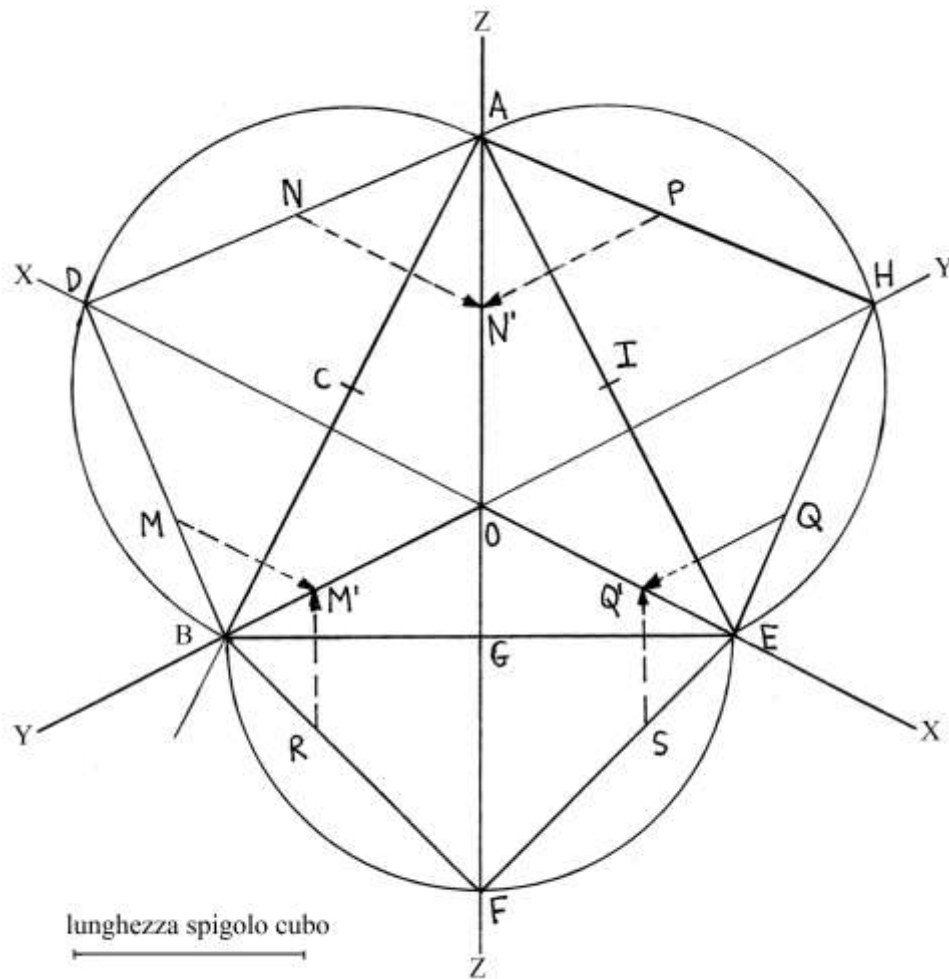
Questo tipo di assonometrie possiede due angoli di uguale ampiezza, come è il caso dello schema che segue, con due angoli uguali di 117° : $117^\circ = (90 + 27)^\circ$.



Per determinare le lunghezze degli spigoli di un cubo costruiti sui tre assi, applichiamo il *metodo diretto* o *metodo grafico* [sull'argomento torneremo in un successivo paragrafo dedicato all'*assonometria trimetrica*].

Prolungare i tre assi oltre il centro O.

Fissare un punto, A, sull'asse Z a distanza a piacere dal centro O:



Dal punto A tracciare la perpendicolare al prolungamento dell'asse X fino a incontrare quello Y nel punto B [per semplificare le cose, in seguito non sarà più fatta alcuna distinzione fra gli assi X, Y e Z e i loro prolungamenti oltre il centro O].

Determinare il punto medio di AB: è C. Fare centro in C e con raggio $CA = CB$ disegnare una semicirconferenza che interseca l'asse X in D.

BDA è un triangolo rettangolo inscritto.

Dal punto B condurre la perpendicolare all'asse Z: essa taglia l'asse X in un punto, E.

Stabilire il punto medio di BE: è G.

Fare centro in G e con raggio $GB = GE$ disegnare una semicirconferenza da B a E: essa incontra l'asse Z in un punto, F.

BEF è un altro triangolo inscritto.

Collegare i punti A e E: AE è perpendicolare all'asse Y.

ABE è il *triangolo delle tracce* di questa assonometria dimetrica.

Fissare il punto medio di AE: è I. Fare centro in I e con raggio $IA = IE$ tracciare la semicirconferenza da A a E: essa taglia l'asse Y nel punto H.

Applichiamo la costruzione al caso di un cubo che ha spigolo di lunghezza data.

Dai punti D, F e H riportare la lunghezza dello spigolo sui cateti dei tre triangoli rettangoli e stabilire le coppie di punti M-N, R-S e P-Q:

$$\text{lunghezza spigolo cubo} = DM = DN = HP = HQ = FR = FS.$$

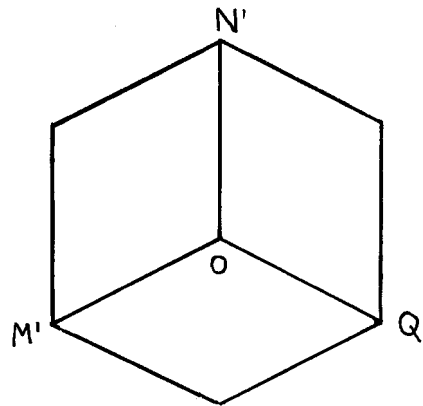
Dai punti M e N condurre le perpendicolari all'ipotenusa AB fino a incontrare l'asse Y in M' e quello Z in N'.

Da P e da Q disegnare le perpendicolari all'ipotenusa AE fino a tagliare l'asse Z in N' e

l'asse X in Q'.

Infine, dai punti R e S innalzare le perpendicolari all'ipotenusa BE fino a intersecare gli assi Y in M' e X in Q'.

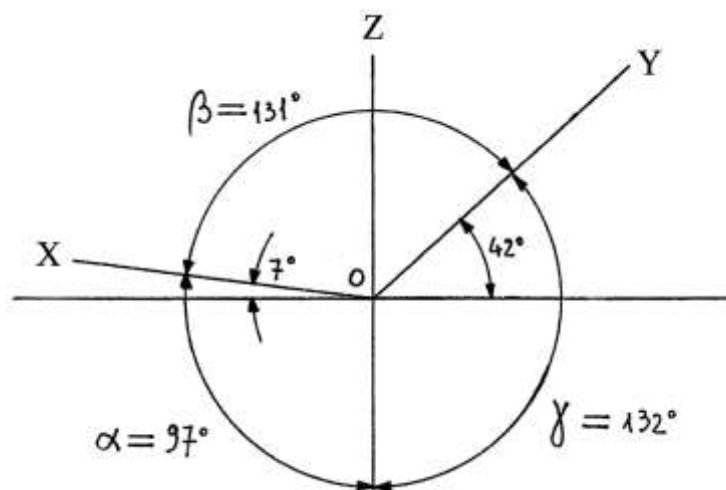
Lo schema che segue presenta l'assonometria dimetrica – o isometrica approssimata – del cubo:



Con una certa approssimazione, le misure delle proiezioni degli spigoli del solido sui tre assi sono determinate con i *coefficienti di riduzione* indicati nella tabella:

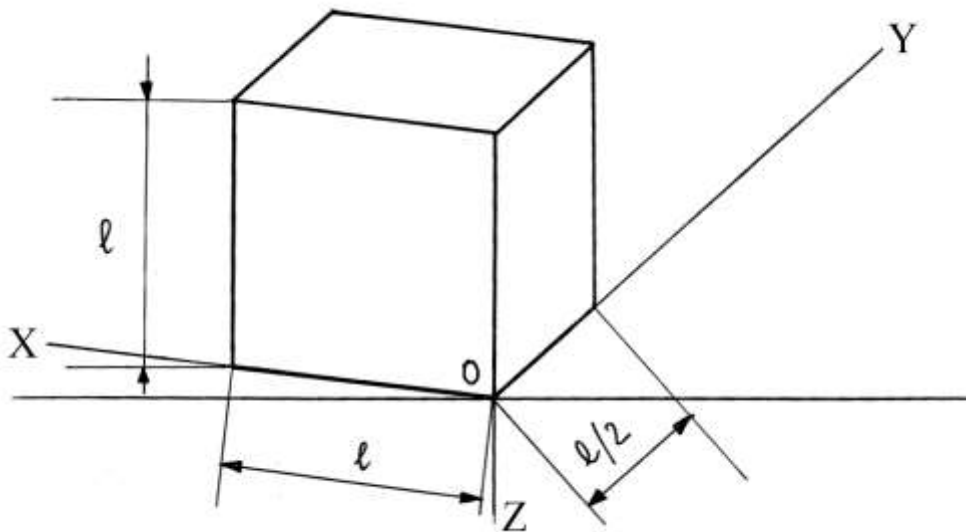
Angoli			Coefficienti di riduzione		
α	β	γ	Asse X	Asse Y	Asse Z
126°	117°	117°	~0,93	~0,93	1

La norma UNI EN ISO 5456-3 del febbraio 2001, citata nel paragrafo che segue, *raccomanda* la seguente disposizione degli assi in assonometria dimetrica:



Le dimensioni lungo gli assi X e Z sono riportate senza alcuna riduzione, mentre sull'asse Y le dimensioni sono ridotte secondo un coefficiente uguale a 0,5, come spiega l'esempio del cubo

che ha spigoli lunghi ℓ :



La tabella che segue contiene alcune disposizioni degli angoli in differenti assonometrie dimetriche:

Angoli			Coefficienti di riduzione		
α	β	γ	Asse X	Asse Y	Asse Z
106° 20'	126° 50'	126° 50'	1	1	3/4
97° 10'	131° 25'	131° 25'	1	1	1/2
152° 44'	103° 38'	138° 38'	1	1	1/3
131° 25'	131° 25'	97° 10'	0,942 \approx 1	0,471 \approx 1/2	0,942 \approx 1

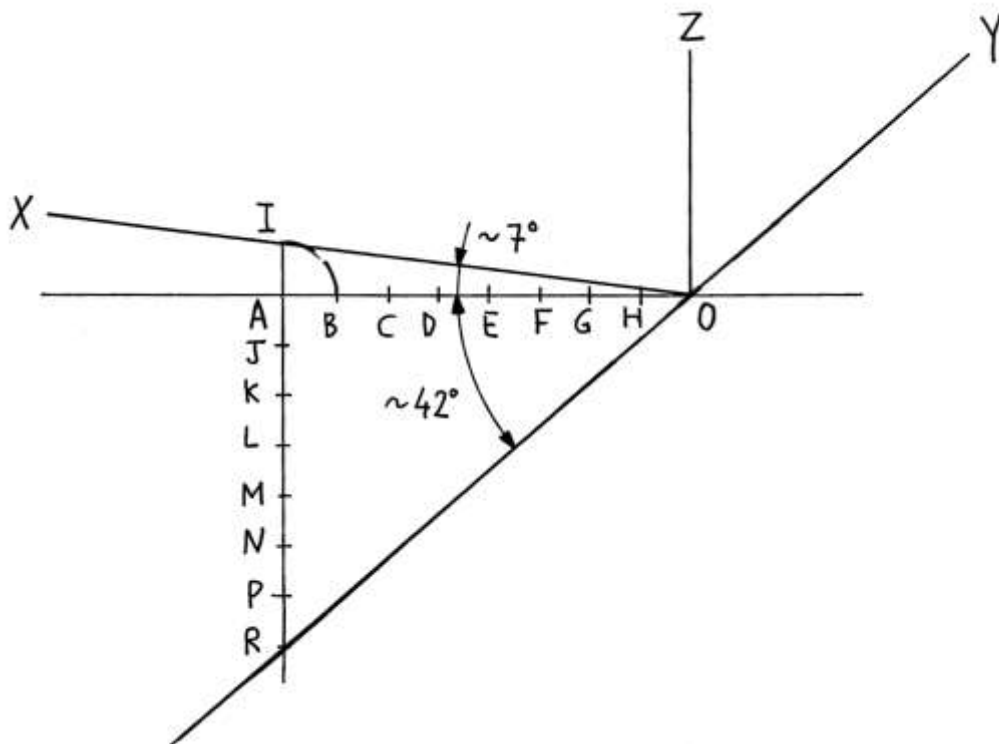
----- APPROFONDIMENTO -----

La già citata norma UNI 4819 dell'ottobre 1961 offre una serie di considerazioni e di suggerimenti riguardo all'assonometria dimetrica:

“...Tre segmenti uguali a 1, posti sui tre assi cartesiani O_x , O_y , O_z , proiettano nel quadro assonometrico tre segmenti rispettivamente di lunghezza 0,942, 0,942/2, 0,942. Normalmente viene adottato il rapporto pratico:

$$l_X : l_Y : l_Z = 1 : 1/2 : 1 \dots”$$

La stessa norma suggerisce un metodo grafico approssimato per costruire con facilità gli angoli 7° e di 42°:



Disegnare una retta orizzontale e fissarvi un segmento, AO di lunghezza a piacere, da dividere in *otto* parti uguali: sono fissati i punti B, C, D, E, F, G e H. Da O innalzare la perpendicolare che è l'asse Z.

Per il punto A tracciare la perpendicolare alla retta. Da A riportare in I la lunghezza di AB e poi, sempre da A, in successione verso il basso la stessa lunghezza AB, fino a stabilire i punti J, K, L, M, N, P e R.

Per il punto O disegnare due rette passanti per I e per R: OI è l'asse X e OR è l'asse Y dell'assonometria dimetrica.

Sono stati costruiti gli angoli di $\sim 7^\circ$ e di $\sim 42^\circ$.

La tangente dell'angolo IOA è:

$$\text{tg IOA} = \text{IA/AO} = 1/8 = 0,125 : \text{ad essa corrisponde un angolo di } \sim 7^\circ 9'.$$

La tangente dell'angolo AOR vale:

$$\text{tg AOR} = \text{AR/AO} = 7/8 = 0,875 : \text{ad essa corrisponde un angolo di } \sim 41^\circ 12'.$$

L'uso di questa particolare disposizione degli assi è uno standard di fatto: numerose righe e squadre contengono riferimenti ai due angoli di 7° e di 42° .

LE NORME UNI

La già citata norma UNI EN ISO 5456-3 del febbraio 2001 raccomanda l'impiego nei disegni tecnici dei seguenti tre metodi:

- Assonometria isometrica.
- Assonometria dimetrica.
- Assonometria obliqua.

Da un punto di vista storico, le tre assonometrie sono apparse nell'ordine: *obliqua* (cavaliera e altre), *isometrica* e *dimetrica*.

Le assonometrie oblique

La norma UNI così definisce le assonometrie oblique:

“Nelle assonometrie oblique il piano di proiezione è parallelo ad uno dei piani coordinati ed alla faccia principale dell'oggetto da rappresentare, la cui proiezione rimane nella stessa scala. Due degli assi coordinati proiettati sono perpendicolari. La direzione del terzo asse coordinato proiettato e la relativa scala sono arbitrari. Vengono utilizzati diversi tipi di assonometrie oblique in ragione della loro facilità di disegno...”

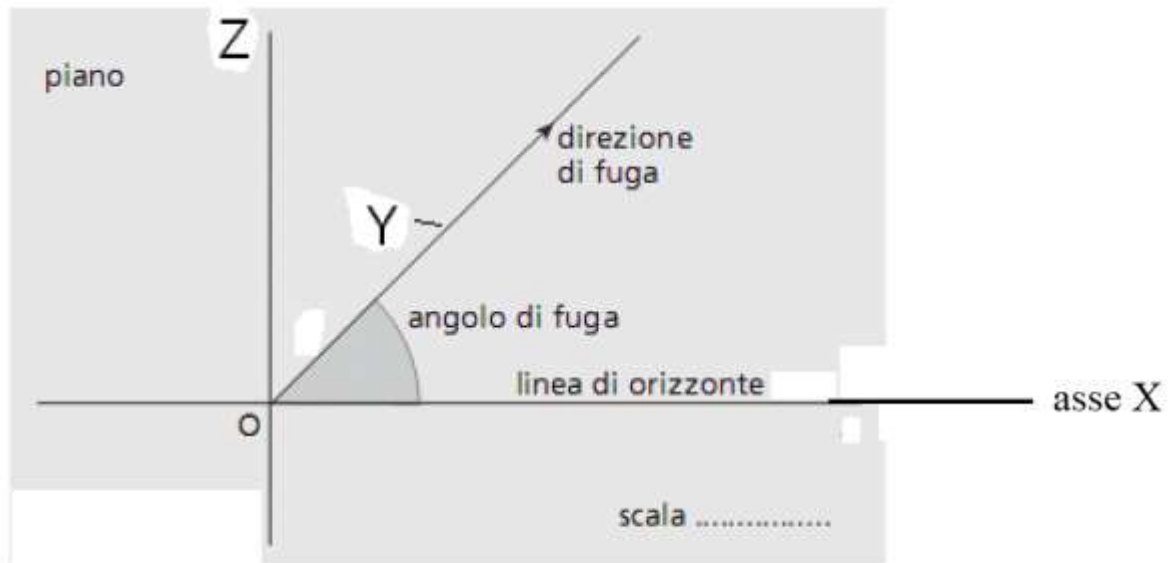
La norma distingue quattro tipi di assonometria obliqua:

1. Assonometria cavaliera speciale.
2. Assonometria cavaliera.
3. Assonometria planometrica normale.
4. Assonometria planometrica ribassata.

È opportuno confrontare la terminologia usata dalla norma UNI con quella utilizzata nei testi di disegno tecnico:

Terminologia norma UNI	Terminologia usata nei testi di disegno tecnico
1 – assonometria cavaliera speciale	assonometria cavaliera isometrica
2 – assonometria cavaliera	assonometria cavaliera (assonometria <i>cabinet</i> in altri Stati)
3 – assonometria planometrica normale	assonometria militare
4 – assonometria planometrica ribassata	assonometria militare ribassata

Gli elementi che definiscono una qualsiasi assonometria sono i seguenti:

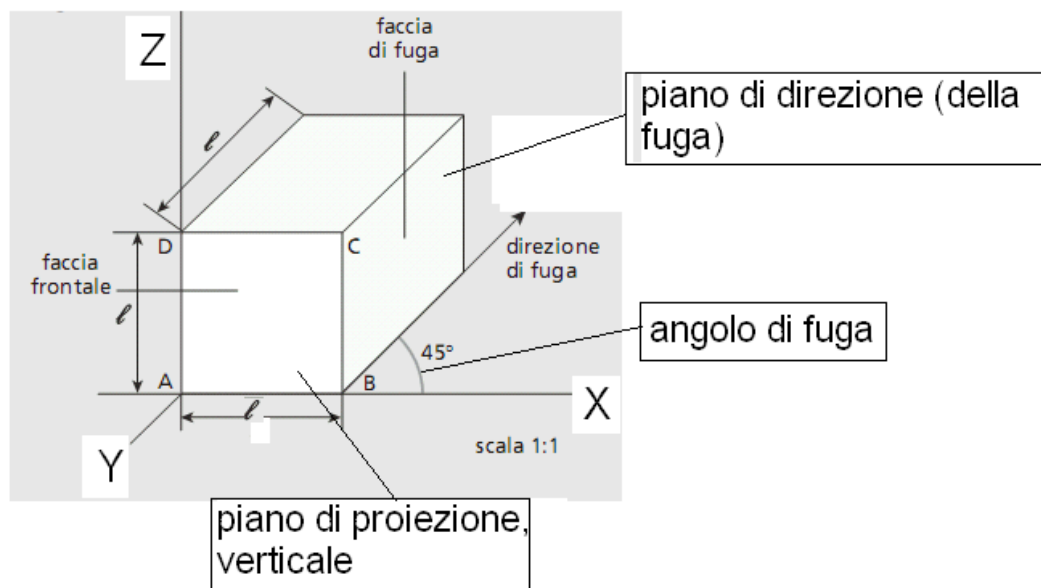


- * un *piano di proiezione* che è rappresentato dal foglio di carta sul quale si disegna (o dallo schermo di un monitor);
- * una *scala di proporzione*: 1:1 1:2 1:5, ecc.;
- * una *direzione di fuga*: è un asse, Y in figura, che forma un dato angolo con la *linea di orizzonte* rappresentata dall'asse X. In questo caso l'angolo di fuga è uguale a 45°;
- * un *rapporto di fuga*, RF, è espresso da un numero inferiore a 1: esso si riferisce al rapporto fra le lunghezze misurate lungo l'asse Y e quelle reali:

rapporto di fuga = RF = lunghezza disegnata/lunghezza reale .

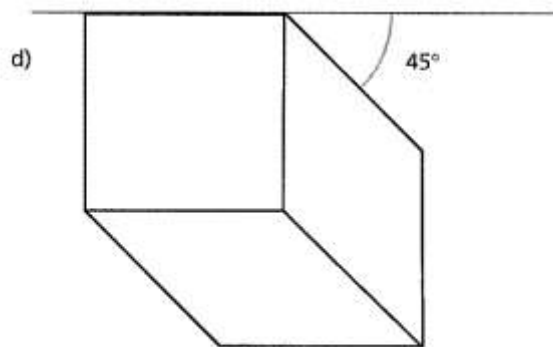
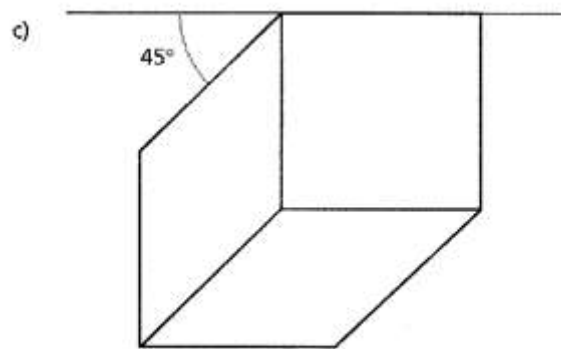
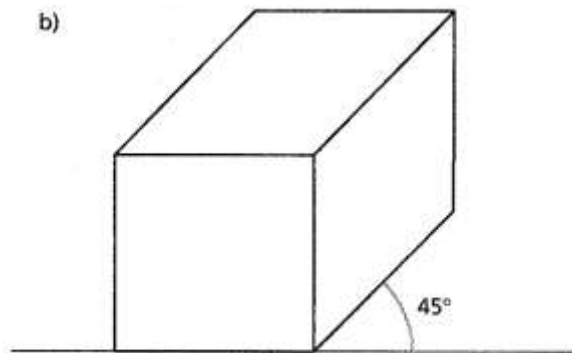
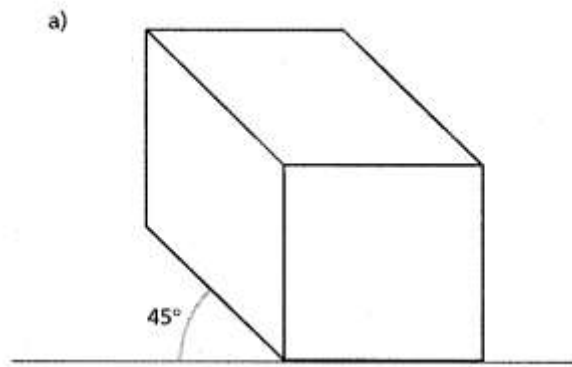
L'assonometria cavaliera isometrica

La figura 2.52 presenta l'assonometria cavaliera *isometrica* di un cubo: è così chiamata perché le dimensioni degli spigoli sono identiche lungo tutti e tre gli assi. Gli elementi che caratterizzano questo tipo sono:



- Il piano di proiezione è, normalmente *verticale*, e la faccia frontale ABCD è poggiata su di esso.
- La scala è 1:1.
- La direzione di fuga forma un angolo di 45° con l'asse X. L'angolo di fuga è, in questo caso, 45°.
- Il rapporto di fuga vale 1, perché tutti gli spigoli – compresi quelli disegnati parallelamente all'asse di fuga – hanno lunghezza uguale a quella reale (fatti salvi i rapporti di scala).

La figura che segue, ricavata dalla norma UNI, mostra le quattro possibili rappresentazioni del cubo in assonometria cavaliere isometrica:



- a) Il cubo è visto dall'alto e da sinistra.
- b) Il cubo è visto dall'alto e da destra.
- c) Il cubo è visto dal basso e da sinistra.
- d) Il cubo è visto dal basso e da destra.

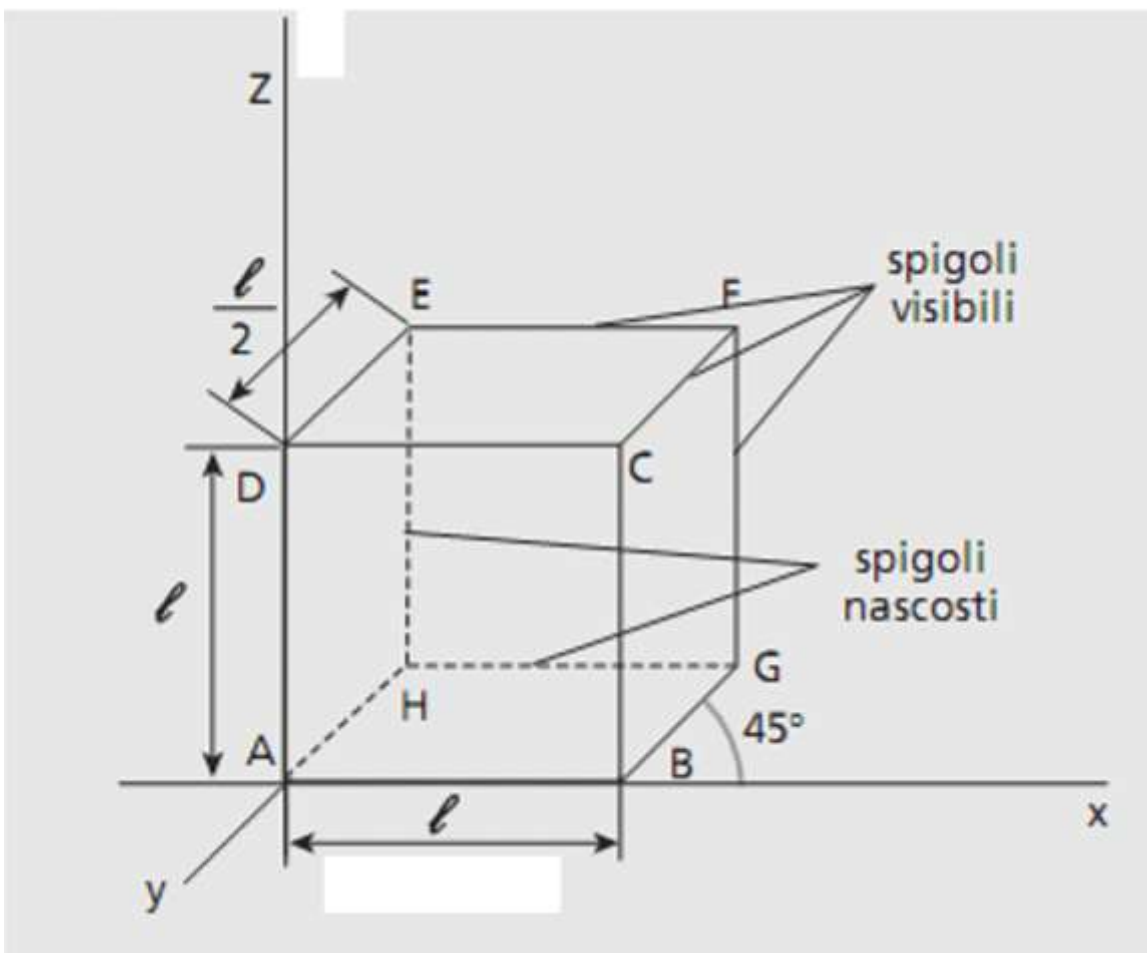
Questo tipo non è molto usato perché falsa la visione dell'oggetto, facendo apparire più lungo in profondità lo spigolo del cubo degli esempi, quasi esso fosse un parallelepipedo.

Il cubo è l'entità geometrica spesso usata quale riferimento per disegnare in assonometria cavaliera figure piane disposte sulle sue facce o sue sezioni o solidi che facciano riferimento ad una sua faccia.

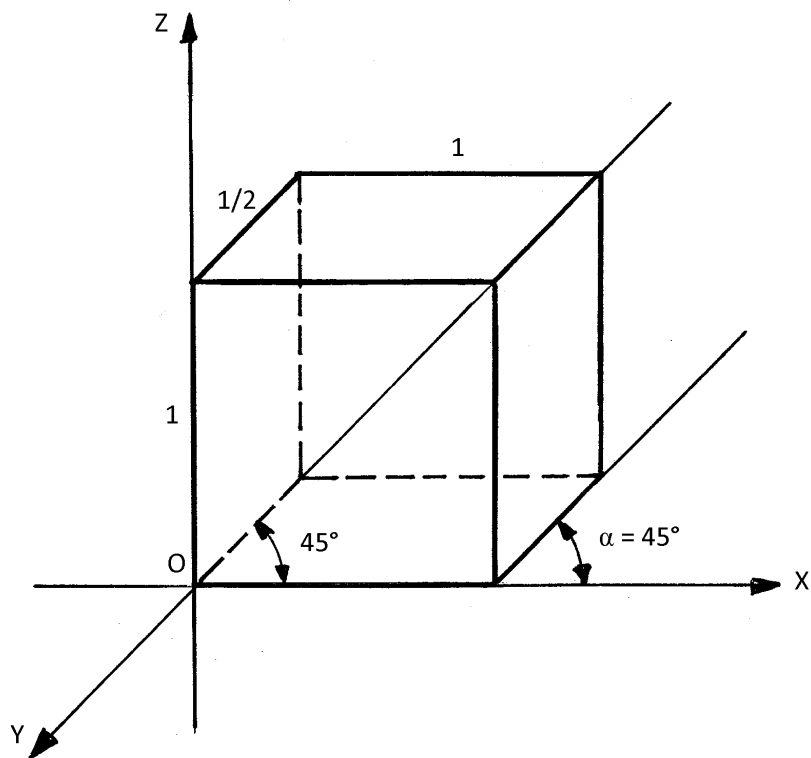
L'assonometria cavaliera

Pure questo tipo di assonometria usa un *piano di proiezione verticale*.

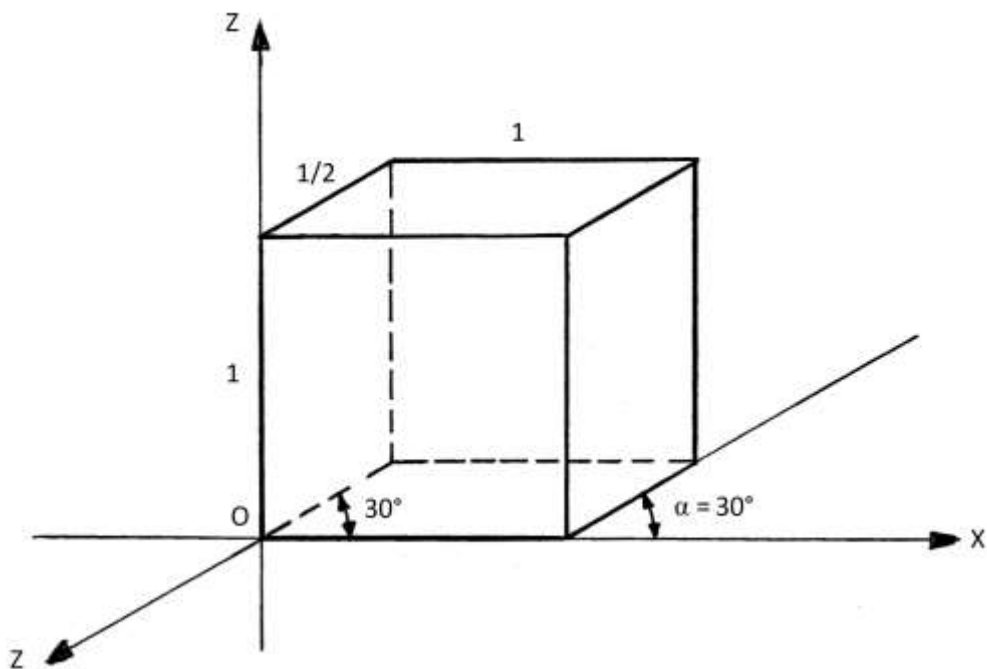
Un cubo con spigolo lungo ℓ viene disegnato usando tre assi, o semirette uscenti dall'origine O. L'asse X è orizzontale, quello Y è verticale e l'asse Z è inclinato dell'angolo α uguale a 45° . Gli spigoli paralleli agli assi X e Y sono disegnati in grandezza naturale, mentre quelli paralleli all'asse Z sono di lunghezza ridotta alla metà e cioè con rapporto di fuga uguale a $1/2$.



Usando un angolo di fuga uguale a 45° , come negli esempi delle due figure che seguono, si verifica un problema che può creare confusione: la diagonale della faccia anteriore (AC) e la proiezione della diagonale del cubo (AF) coincidono con l'asse Z. Talvolta, viene usato un angolo di fuga diverso, ad esempio 30° , oppure 60° .

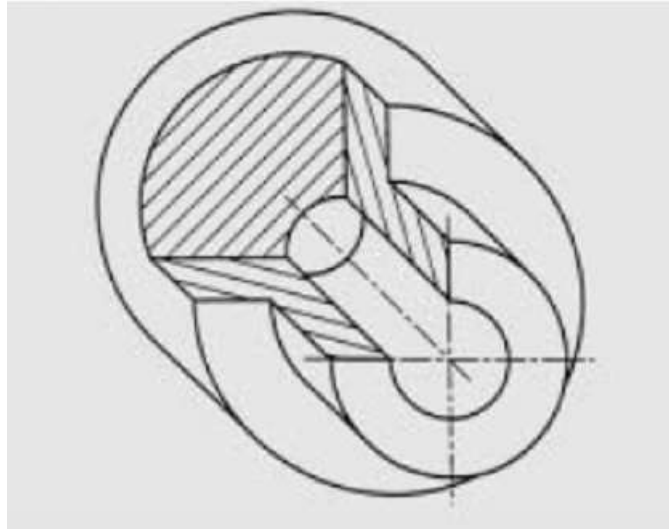


La figura che segue presenta un'altra variante della cavaliera, con l'angolo α ridotto a 30° :



Anche in questo caso l'oggetto può essere disegnato visto da quattro diverse posizioni: dall'alto o dal basso oppure da destra o da sinistra.

Le stesse norme UNI impiegano anche l'assonometria cavaliera, come nell'esempio che segue, ricavato dalla norma UNI EN ISO 5456-3 del 2001:



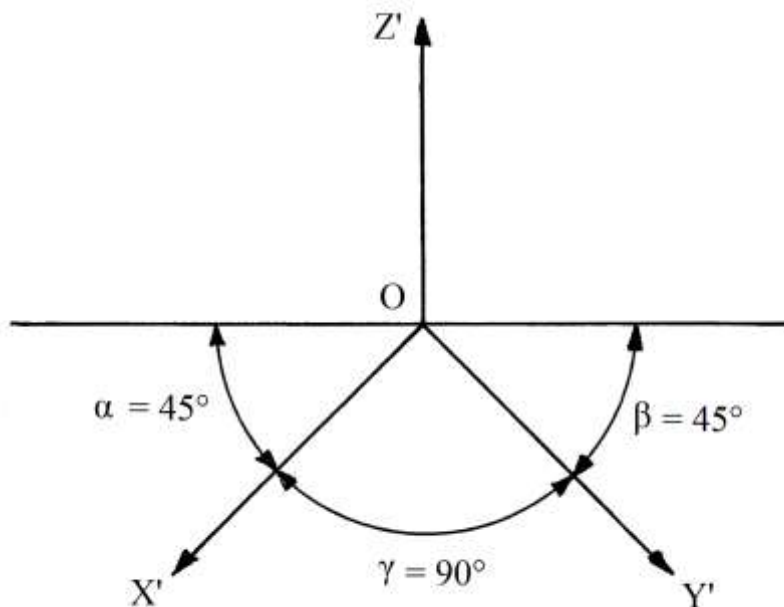
L'assonometria planometrica normale

Come già scritto sopra, questo tipo di assonometria è conosciuta con l'aggettivo *militare*.

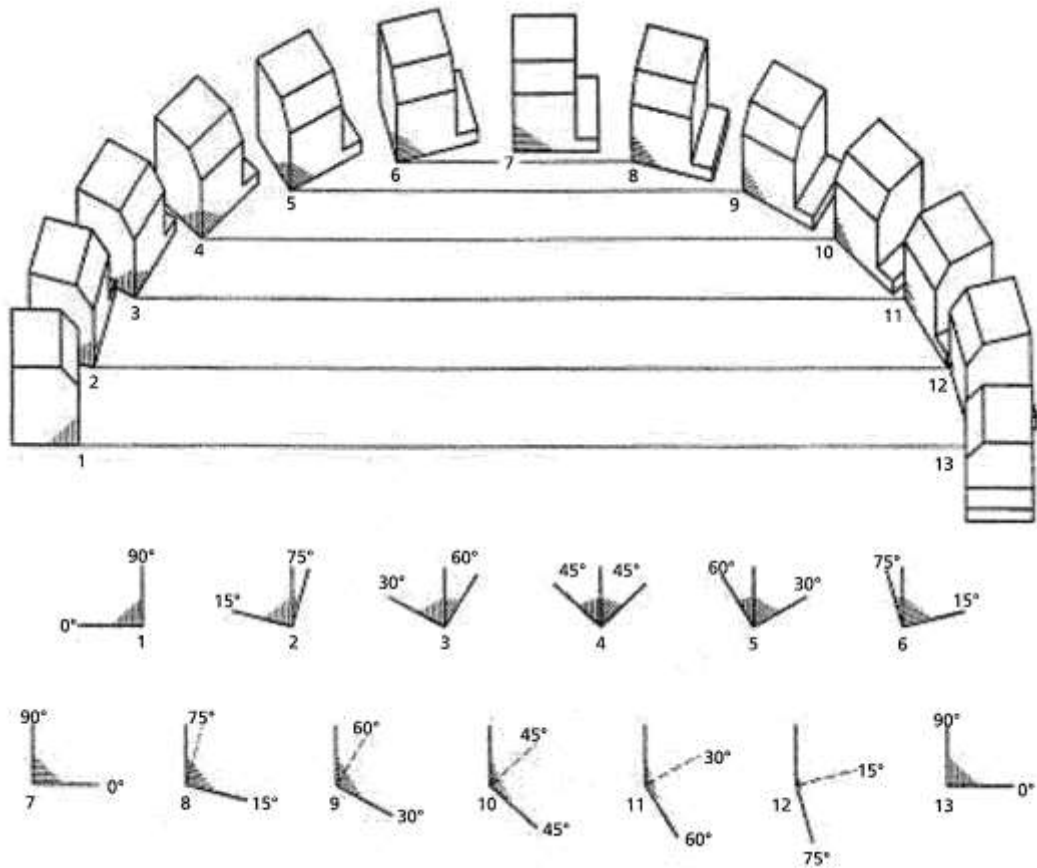
Essa usa un piano di proiezione *parallelo al piano orizzontale*.

La figura descrive gli angoli impiegati in questo tipo di assonometria:

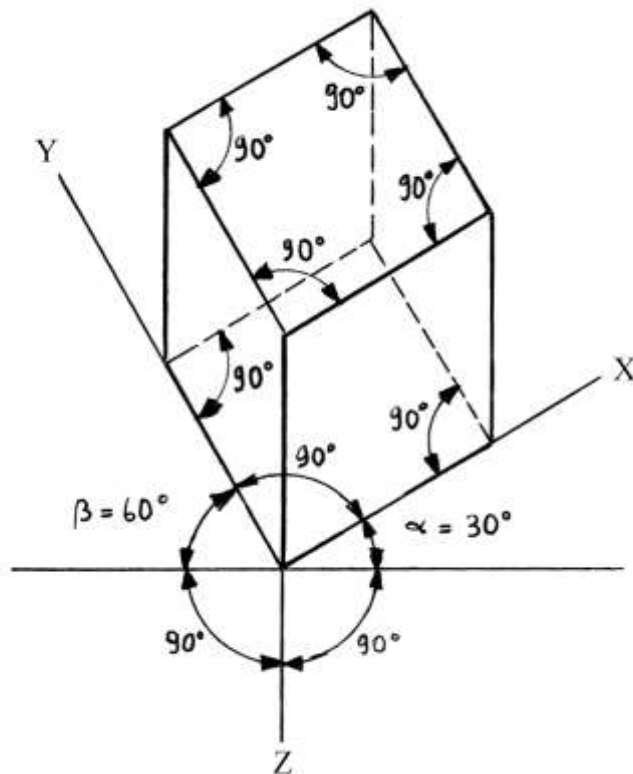
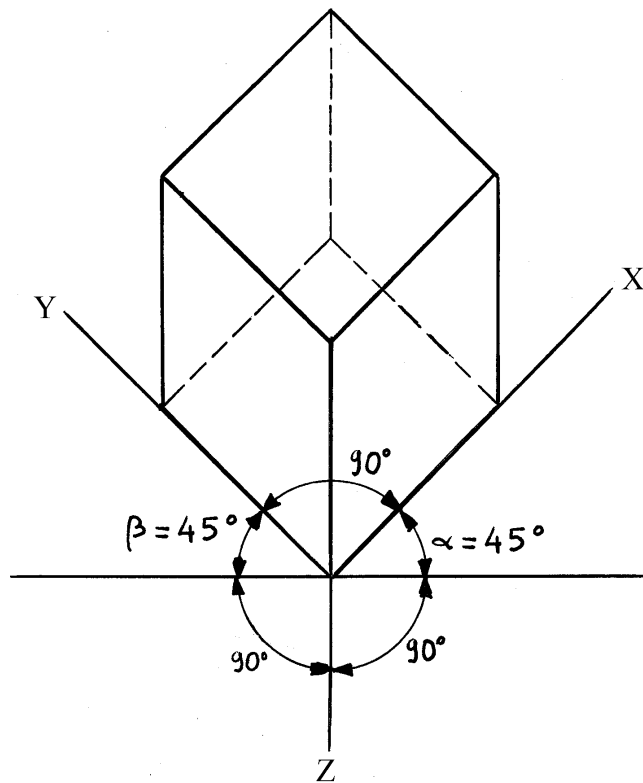
- L'angolo γ è ampio 90° ;
- Gli angoli α e β sono *complementari*:



La norma UNI sconsiglia l'uso di angoli α di 0° , 90° o 180° perché in questi casi non si avrebbe una rappresentazione completa dell'oggetto disegnato. La figura che segue, ricavata dalla norma, conferma visivamente le motivazioni di questo suggerimento:



Nei due grafici che seguono è disegnato il solito cubo, rispettivamente, con inclinazione $\alpha = \beta = 45^\circ$ e con $\alpha = 30^\circ$ e $\beta = 60^\circ$.



Pure questo metodo offre le solite quattro diverse posizioni; l'oggetto può essere disegnato visto dall'alto o dal basso oppure da destra o da sinistra.

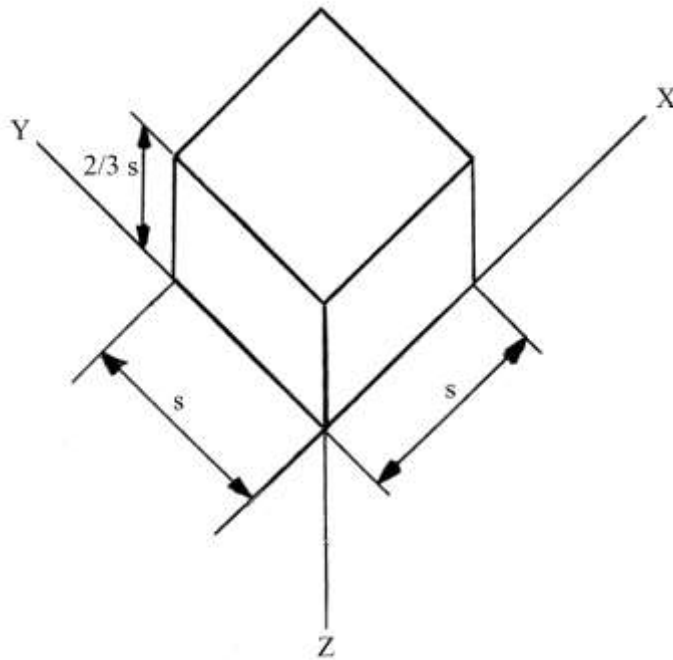
Il metodo ha avuto in passato ed ha attualmente grande applicazione in architettura, perché

presenta un grosso vantaggio: il disegno di un edificio (o di un oggetto) è costruito a partire dalla *pianta*, che non subisce distorsioni rispetto alla proiezione sul piano orizzontale, a parte una rotazione di 30°, 45° o 60° rispetto a un piano verticale. Le facce laterali sono facilmente costruibili a partire dalla pianta.

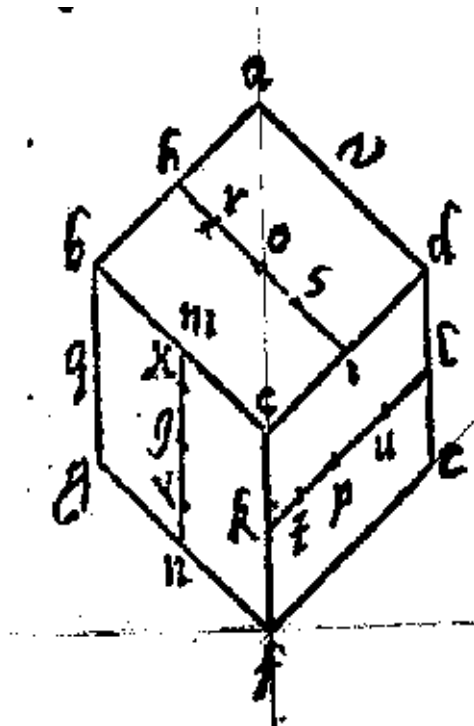
Questo pregio spiega il suo successo nella rappresentazione di fortezze e città, a partire dal Rinascimento.

L'assonometria planometrica ribassata

Per rendere più realistica la rappresentazione di un oggetto, la norma UNI suggerisce di ridurre le dimensioni parallele all'asse Z a 2/3, come nella figura:



Il matematico italiano Niccolò Fontana, detto Tartaglia (Brescia 1499 – Venezia 1577), rappresentò un cubo con questo metodo nel testo della traduzione italiana degli “*Elementi*” di Euclide, pubblicata nel 1543:



Gli spigoli verticali sono lunghi 0,8 volte la lunghezza degli spigoli obliqui.

----- SCHEDA TECNICA -----

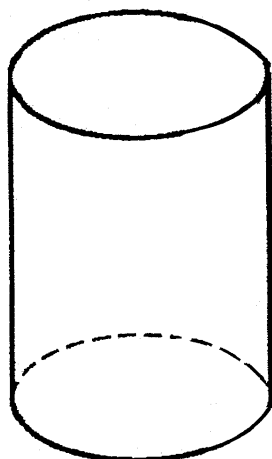
Alcuni esempi di impiego dell'assonometria cavaliera

La precedente figura che contiene le 13 possibili posizioni riproduce un'immagine contenuta nella norma UNI EN ISO 5456-3:2001, relativa a una variante dell'assonometria cavaliera (la planometrica): nel disegno sono presentate tredici diverse combinazioni di assi ruotati rispetto a quello verticale di angoli multipli di 15°. Si è già accennato alla raccomandazione contenuta nella norma citata, riguardo alla scelta delle combinazioni, che invita a non usare angoli di ampiezza 0°, 90° o 180°.

Per analogia, si può estendere questa raccomandazione alla stessa assonometria cavaliera? Le norme non si esprimono, ma – in generale - esse vengono emanate per recepire standard di fatto che con il passare del tempo si creano nel mondo tecnico.

Nei testi a stampa è facile rintracciare immagini di solidi come quelle disegnate nelle figure che seguono: esse non sono sbagliate ma realizzate con metodi diversi da quelli tradizionali.

In figura è disegnato un cilindro retto visto dall'alto:

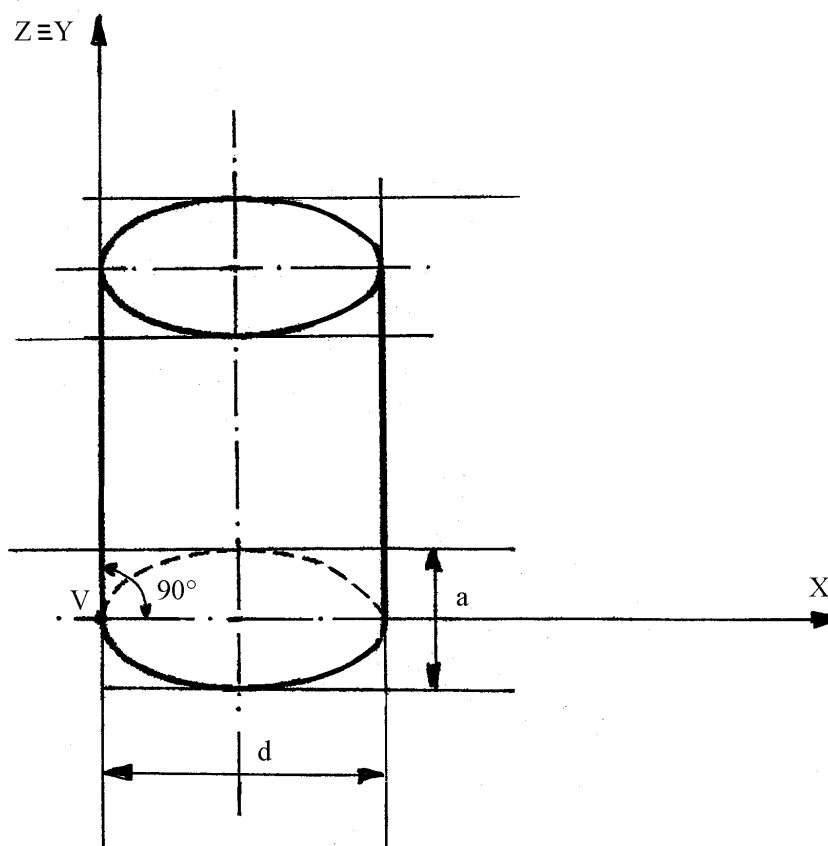


Il cilindro è disegnato in una forma particolare di assonometria cavaliere, con rapporto di fuga uguale a 0,5 lungo la profondità e angolo di fuga di 90° . La figura successiva spiega la sua costruzione: il punto V è il vertice della terna di assi, X è l'asse orizzontale e gli assi Z e Y sono coincidenti sul disegno (è questo il significato della didascalia $Z \equiv Y$) e perpendicolari rispetto all'asse X. Il segmento a è lungo $0,5 d$ e, quindi, il rapporto di fuga vale

$$RF = a/d = 0,5.$$

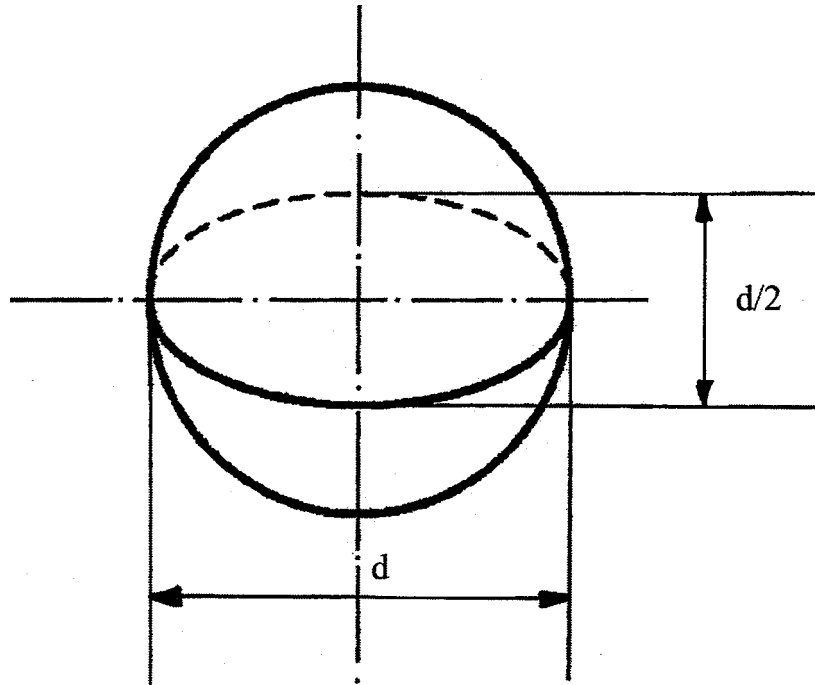
L'asse X è perpendicolare all'asse $Z \equiv Y$.

L'altezza del cilindro è quella reale, non ridotta:



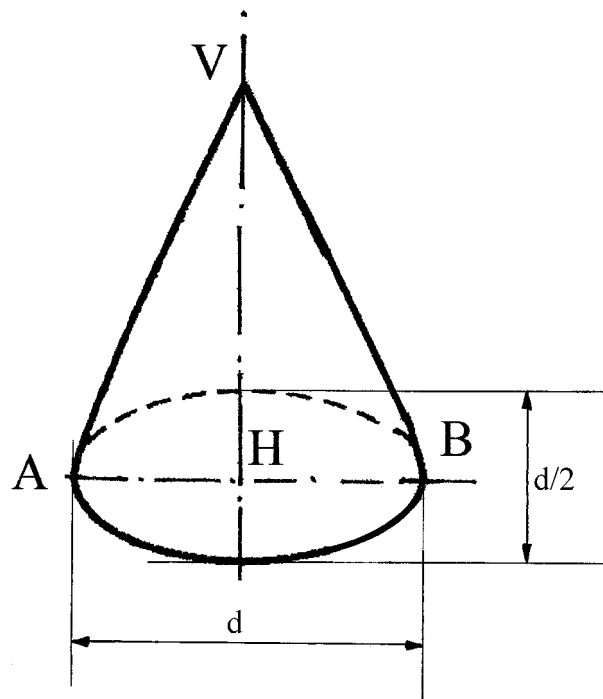
La figura che segue rappresenta una sfera disegnata con due differenti metodi:

- L'ellisse che descrive l'equatore è disegnata in assonometria cavaliera con angolo di fuga di 90° e rapporto di fuga RF uguale a 0,5.
- Il contorno apparente ha la forma di una circonferenza ed è disegnato in proiezioni ortogonali.

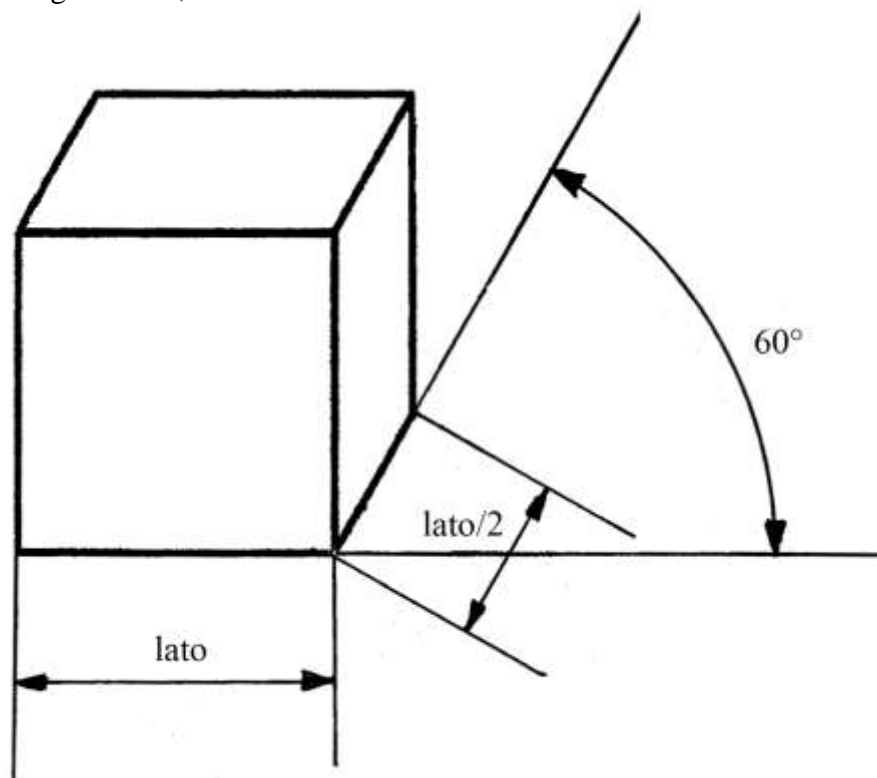


La figura successiva rappresenta un cono retto disegnato con due diversi metodi:

- L'ellisse che descrive il cerchio di base è in assonometria cavaliera con riduzione a 0,5 e angolo di fuga di 90° ;
- I due segmenti che completano il disegno sembrano descrivere il profilo apparente del solido, ma in realtà formano con il triangolo isoscele AVB una sezione verticale del cono ottenuta con un piano passante per il suo asse di rotazione (sul quale sono i punti V e H) e quindi si tratta di una proiezione ortogonale.



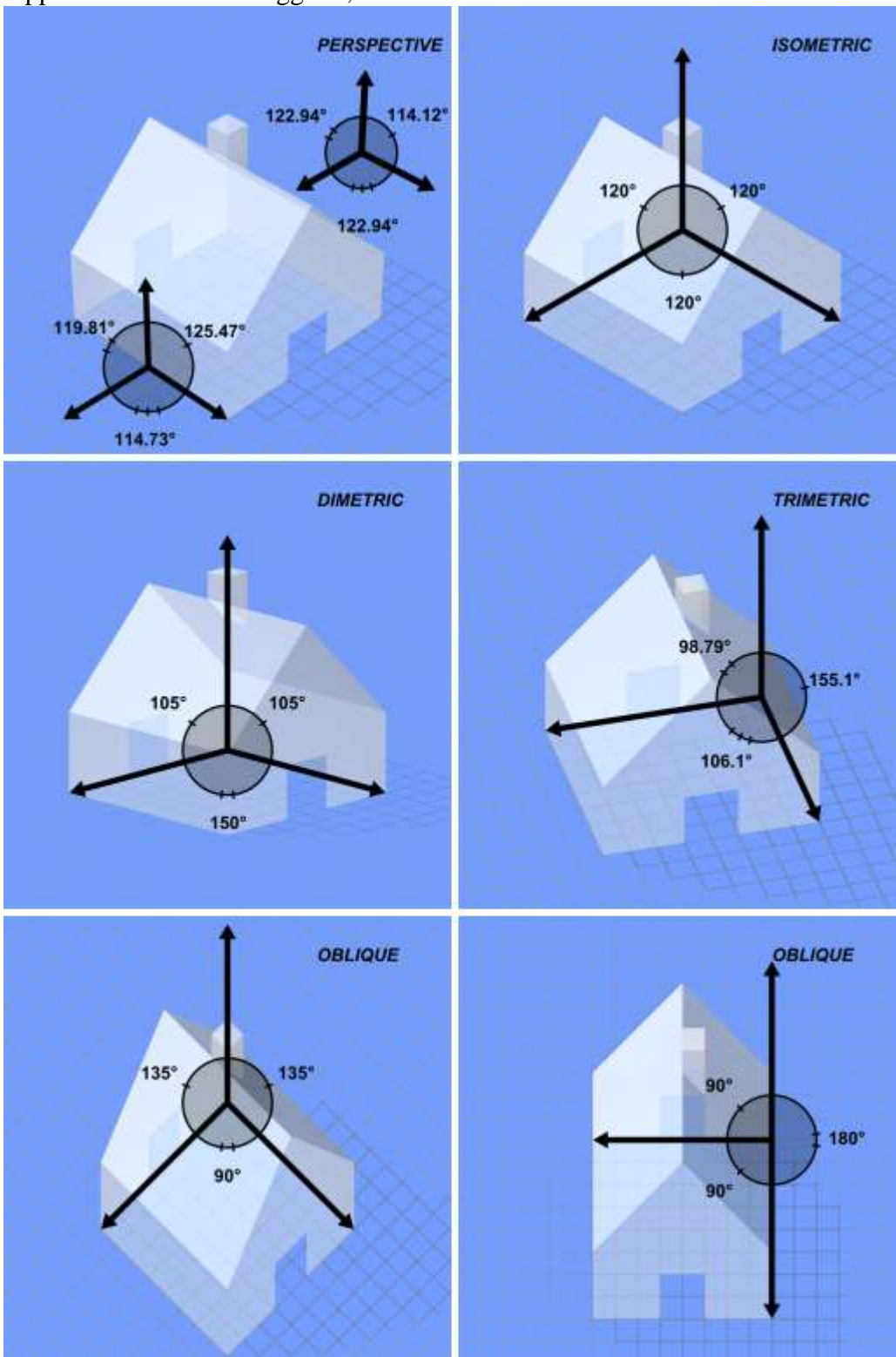
Infine, la figura contiene il disegno di un cubo in assonometria cavaliera con angolo di fuga di 60° e un rapporto di fuga $RF = 0,5$.



----- APPROFONDIMENTO -----

Un confronto fra i metodi assonometrici

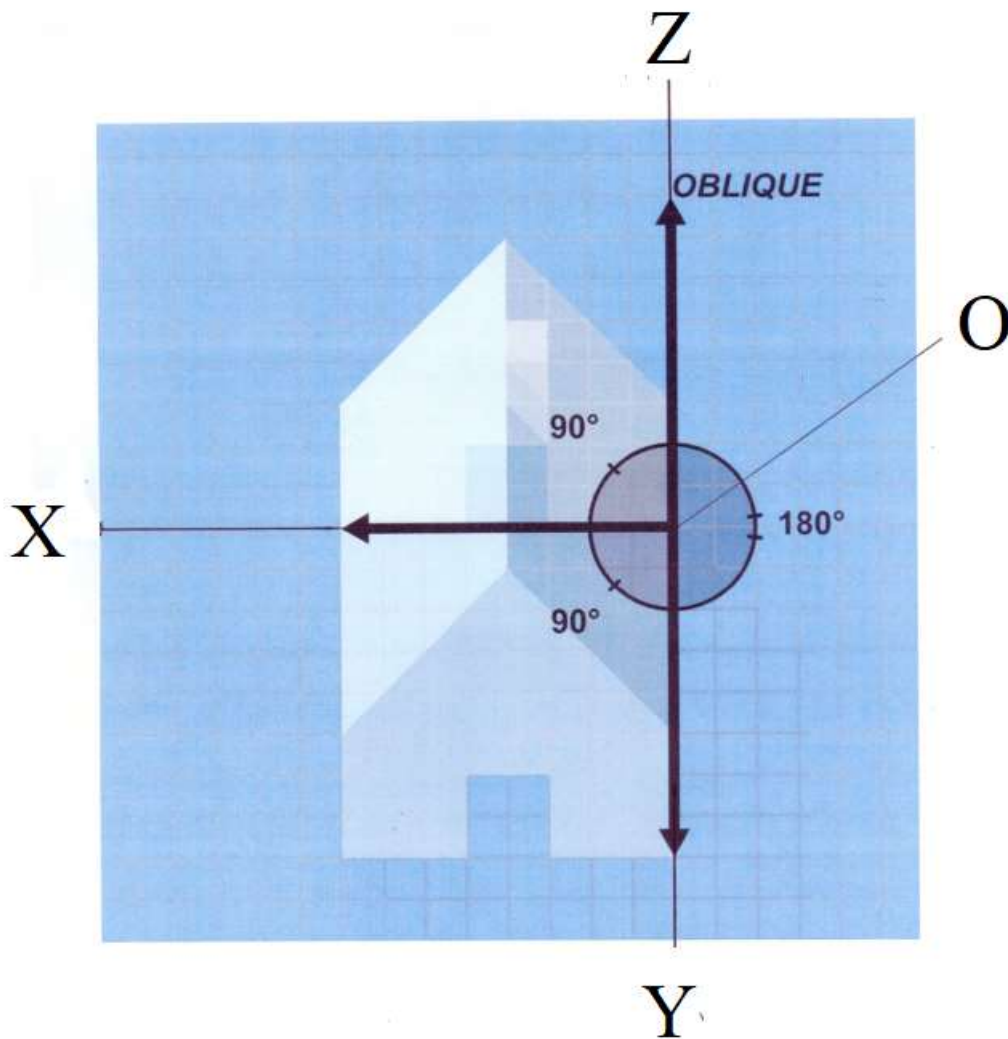
La tavola che segue è tratta da Wikipedia e offre un confronto fra diversi metodi usati per rappresentare lo stesso oggetto, una casa monofamiliare:



Il documento reca il nome Graphical_projection_comparison.png ed è opera di un utente – SharkD – che cura il sito <http://isometricland.com> (in giapponese).

L'ultima assonometria è una cavaliera dell'edificio, visto dall'alto e da Sud verso Nord, con

angolo di fuga di 90° e rapporto di fuga uguale a 1: infatti le dimensioni non sono ridotte su alcun asse, come spiega la figura che segue:

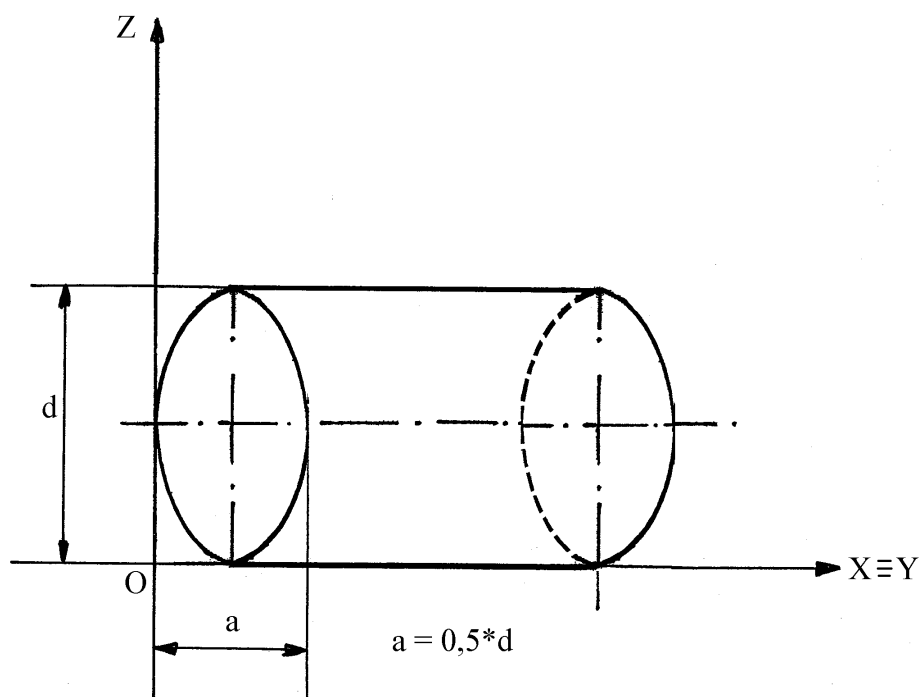


Gli assi Y e Z giacciono sulla stessa retta, perpendicolare in O alla semiretta che costituisce l'asse X.

Assonometria cavaliera con angolo di fuga 0°

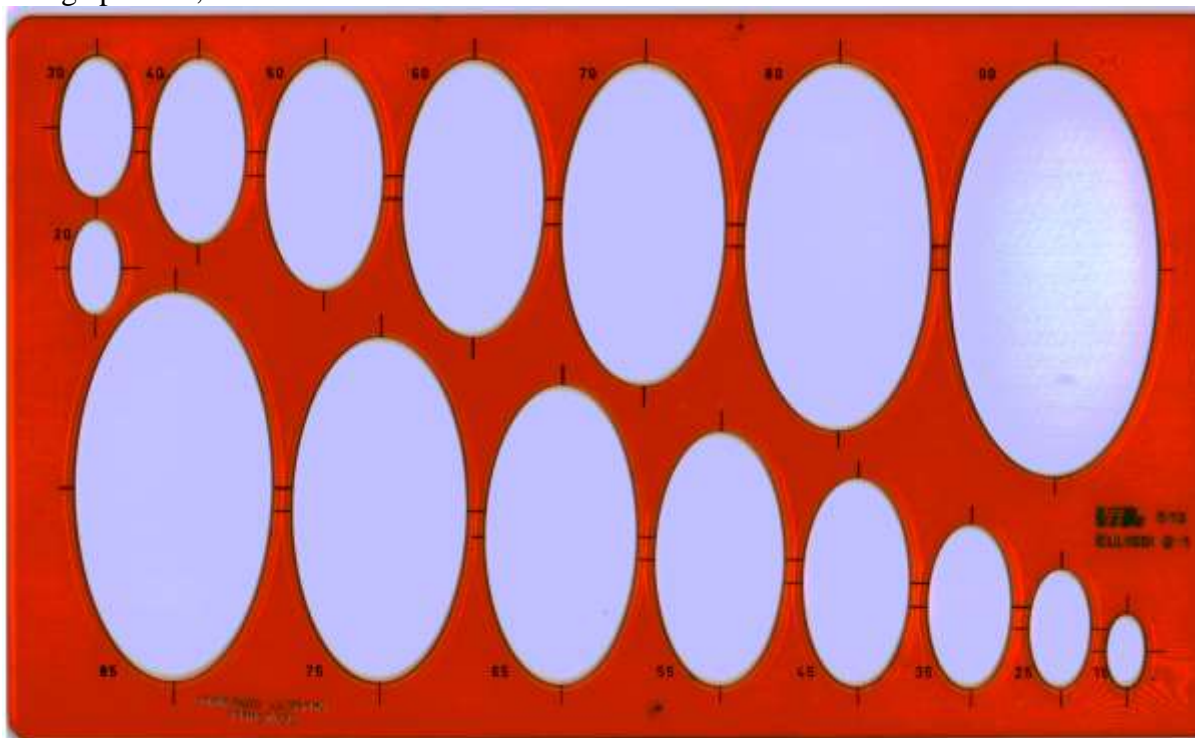
Per ragioni grafiche (ad esempio, mancanza di spazio) o per far capire meglio la natura di un solido geometrico, può essere utile ricorrere all'assonometria cavaliera con angolo di fuga uguale a 0° . La figura che segue presenta un cilindro disegnato con angolo di fuga uguale a 0° e rapporto di fuga uguale a 0,5; gli assi X e Y sono coincidenti e quindi hanno l'origine in comune con l'asse Z, nel punto O.

L'asse minore dell'ellisse, a , è lungo 0,5 l'asse maggiore d , che è il diametro della circonferenza.



In conclusione, per la rappresentazione dei solidi rotondi – o di rivoluzione – è più utile impiegare l'assonometria cavaliera con angolo di fuga uguale a 90° .

In commercio si trovano maschere di materiale plastico che permettono di disegnare ellissi. Questa che è presentata nella figura che segue serve a tracciare ellissi con i due assi nel rapporto 0,5 e cioè disegna circonferenze deformate in assonometria cavaliera con angolo di fuga 90° e rapporto di fuga pari a 0,5:



Bibliografia

1. Bartoli Cosimo, “Del Modo di Misurare le Distantie, le Superficie, i Corpi, le Piante, le Provincie, le Prospettive, e Tutte le Altre Cose Terrene, Che Possono Occorrere a Gli Huomini, Secondo le Vere Regole d’Euclide, e De Gli Altri Più Lodati Scrittori”, Venezia, Francesco Franceschi, 1564, pp. 301.
2. “Cosimo Bartoli (1503 – 1572)”. Atti del Convegno internazionale Mantova-Firenze 2009, a cura di Francesco Paolo Fiore e Daniela Lamberini, Firenze, Olschki, 2011, pp. XVII-422.
3. Battisti Eugenio – Battisti Saccaro Giuseppa, “Le macchine cifrate di Giovanni Fontana”, Milano, Arcadia Edizioni, 1984, pp. 167.
4. Calzolani Sergio, “Disegno Tecnico e Meccanico. Materiali per l’Insegnante”, Brescia Editrice La Scuola, 2007, pp. 156.
5. Cándito Cristina, “Le proiezioni assonometriche”, Firenze, Alinea Editrice, 2003, pp. 83.
6. Carlbom Ingrid – Paciorek Joseph, “Planar Geometric Projections and Viewing Transformations”, in “Computer Survey”, Vol. 10, No. 4 december 1978, pp. 465-502.
7. Colistra Daniele, “Fondamenti e Applicazioni di Geometria Descrittiva. Appunti ed Esercizi”, Reggio Calabria, 2018, pp. 92
(http://www.pau.unirc.it/documentazione/materiale_didattico/1464_2018_454_30389.pdf).
8. Curtze Maximilian, “Urkunden zur Geschichte der Mathematik im Mittelalter und der Renaissance”, Lipsia, Tubner, 1902, vol. II [le pp. da 339 a 434 contengono l’edizione bilingue, italiana e tedesca, del trattato di Leonardo da Cremona].
9. Dondi dall’Orologio Giovanni, “Tractatus Astrarii”, traduzione italiana a cura di Aldo Bullo, Chioggia, Edizioni Nuova Scintilla, s.d. (ma 2003), 2 voll. di pp. 90 + 506.
10. Dürer Albrecht, “Institutiones Geometricæ”. “I geometrici elementi di Alberto Durerò” traduzione di Cosimo Bartoli”, a cura di Giovanni Maria Fara, Torino, Nino Aragno Editore, 2008, pp. XV-546.
11. Favaro Antonio, “Sul matematico cremonese LEONARDO MAINARDI”, “Bibliotheca Mathematica”, Lipsia, 4a, 1903, pp. 334-337.
12. Favaro Antonio, “Intorno al presunto autore della ‘Artis metricae practice compilatio’ edita da Massimiliano Curtze”, in “Atti del Regio Istituto”, 63-2, 1904, pp. 377-395.
13. Favaro Antonio, “Nuove ricerche sul matematico Leonardo Cremonese” in “Bibliotheca Mathematica”, Lipsia, 1904, pp. 326 – 341.
14. Finé Oronce, “La pratique de la geometrie”, Parigi, Gilles Gourbin, 1570, pp. 134.
15. “Opere di Orontio Fineo del Delfinato: Divise in cinque parti; Aritmetica, Geometria, Cosmografia e Oriuoli”, tradotte da Cosimo Bartoli, Venezia, Francesco Franceschi, 1587, pp. 811.
16. Huzarski Richard George, “Descriptive geometry in the Geosciences. A thesis in Geologia, Texas Technological College, June 1952, pp. x-127 (in Internet 31295002581592.pdf).
17. Krikke Jan, “Axonometry: A Matter of Perspective”, IEEE Computer Graphics and Applications, July-August 2000, pp. 7-11.
18. Lowe C.B., “Isometric and trimetric drawing”, London, A Heywood Book, Temple Press Books Ltd., 1963, pp. 43, scaricabile dal sito www.archive.org.
19. Maggi Girolamo – Fusti Giacomo (più noto come Castriotto), “Della fortificazione delle città”, Venezia, 1564 e 1583.
20. Mancini Girolamo, “L’opera ‘De corporibus regularibus’ di Pietro Franceschi detto Della Francesca usurpata da fra Luca Pacioli”, Roma, Memorie della R. Accademia dei Lincei – Classe di Scienze morali, storiche e filologiche – anno CCCXII, serie quinta, volume XIV, fascicolo VII^B, Roma, 1915, pp. da 441 a 580, con 4+VIII tavole fuori testo.
21. Pacioli Luca, “De Divina Proportione”, ristampa anastatica con introduzione di Augusto Marinoni, Milano, Silvana Editoriale, 1982, ristampa 1986.

22. Scolari Massimo, “Il disegno obliquo”: Una storia dell’antiprospectiva, Marsilio, Venezia, 2005, pp. 348.
23. UNI – Ente Nazionale Italiano di Unificazione, “UNI M1. Norme per il disegno tecnico”, Milano, 1973, pp. 217.
24. UNI – Ente Nazionale Italiano di Unificazione, “Norme per il disegno tecnico”, Milano, 2005, 3 volumi di pp. X-1185, X-669 e X-602.

INDICE

*	Che cosa sono le assonometrie	p. 1.
*	Mappa dei metodi proiettivi	p. 3.
*	I metodi usati in assonometria	p. 14.
*	Precursori dell'assonometria obliqua	p. 16.
*	L'Astrario di Giovanni Dondi	p. 16.
*	Le assonometrie di Leonardo da Cremona	p. 24.
*	Le assonometrie di Dürer e Bartoli	p. 34.
*	Le assonometrie oblique	p. 38.
*	Il contributo di Cina e Giappone	p. 48.
*	L'assonometria cavaliere e la cristallografia	p. 50.
*	Altre varianti delle assonometrie oblique	p. 53.
*	Le assonometrie ortogonali	p. 56.
*	L'assonometria isometrica	p. 73.
*	Dall'assonometria isometrica a quella dimetrica	p. 109.
*	Le norme UNI	p. 114.
*	Bibliografia	p. 131.