sergio(punto)calzolani(at)outlook(punto)it

Parole chiave: forma anello esterno anfiteatri romani, ovale e ellisse, figure generatrici profilo anfiteatri, ellisse del giardiniere, ovale e Rinascimento

La forma dell'anello esterno degli anfiteatri romani

Stando a un dettagliato censimento, i Romani costruirono almeno 309 *anfiteatri*, sparsi fra le città delle regioni dell'Impero in Italia, Europa, Africa e Asia.

Alcuni esistono ancora, anche se nel corso dei due millenni trascorsi dalla loro costruzione hanno subito gravi danni a causa delle intemperie e dell'azione degli uomini (che spesso li hanno utilizzati come *cave*).

Il più famoso è il Colosseo di Roma: esso è il più grande fra quelli costruiti dai Romani. Ha una forma, grosso modo, ellittica (ma non è un'ellisse) con un perimetro lungo 527 m e con i due assi, maggiore e minore, che misurano 187,5 m e 156,5 m.

Insieme all'ambito delle tecnologie militari, i Romani eccellevano nelle tecnologie civili: centuriazioni dei terreni, costruzioni di acquedotti, porti, strade, edifici. Tutto ciò dimostra quanto il loro livello scientifico e tecnologico fosse avanzato: come è noto, l'esercito romano era in grado di realizzare in tempi molto ristretti ponti per superare grandi fiumi. Esso disponeva di reparti di specialisti che oggi farebbero parte del *Corpo del Genio militare*.

I rilievi effettuati in epoca moderna su alcuni anfiteatri hanno portato a scoprire che la forma della loro curva esterna si *avvicina* a quella di un'ellisse o di un'ovale a 8 centri.

Fra le ipotesi avanzate riguardo alla progettazione e alla costruzione degli anfiteatri, vi è la seguente:

- Il progetto sarebbe stato preparato sulla base di un'ovale a 4 centri, perché i calcoli e le verifiche progettuali relativi ad essa sono più semplici rispetto a quelli necessari per l'ellisse e per l'ovale a 8 centri.
- La costruzione avrebbe seguito la curvatura di un'ovale a 8 centri.

Le grandi dimensioni del Colosseo e di altri anfiteatri suggeriscono un'idea: la tracciatura delle curve non può essere stata realizzata con l'ausilio di *corde* in trazione fra picchetti di legno conficcati nel terreno (come accade ancora oggi nei cantieri edili), perché essere sarebbero risultate troppo lunghe e non abbastanza rigide. È stata avanzata l'ipotesi che i costruttori romani usassero la *groma* per effettuare gli allineamenti nei cantieri.

Alcune definizioni

Nel linguaggio comune, una figura curva chiusa che possieda almeno due assi di simmetria fra loro perpendicolari è indicata sia con il termine *ellisse* che con *ovale*, benché le due curve siano differenti. In generale si dice che una forma è *ellittica* senza precisare di quale curva si tratti.

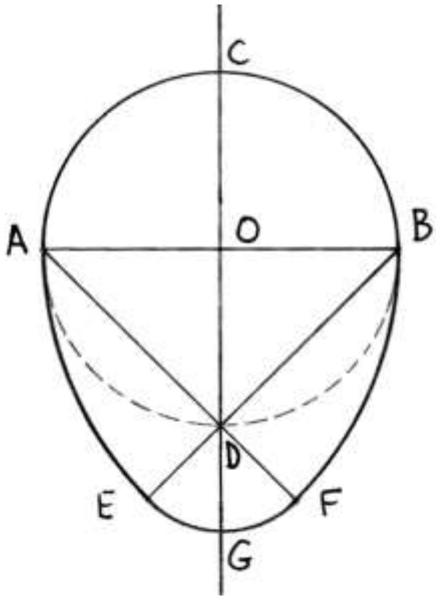
Dal "Vocabolario della lingua italiana" di Devoto e Oli, edizione 2018, riproduciamo le seguenti definizioni:

a) Ellisse, *sostantivo femminile*, "… conica che si ottiene tagliando un cono circolare retto od obliquo con un piano non parallelo ad alcuna generatrice …". Un'ellisse possiede *due* assi di simmetria fra loro perpendicolari. La curva è caratterizzata da una proprietà: la somma delle distanze di un punto dell'ellisse da due punti interni (i *fuochi* posti sull'asse maggiore) è costante ed è uguale alla lunghezza dello stesso asse maggiore. I due fuochi sono fra loro simmetrici rispetto al centro della curva.

b) Ovale, *sostantivo femminile*, "Linea piana chiusa (per es. la circonferenza o l'ellisse) che racchiude una regione piana convessa ed è dotata in ogni punto di retta tangente variabile con continuità…".

L'ovale è una curva *policentrica* perché è ricavata dalla tracciatura di archi di circonferenza fra loro raccordati. Come l'ellisse possiede *due* assi di simmetria, ma non ha i suoi due punti caratteristici, i *fuochi*.

Simile all'ovale è l'*ovolo*, una curva policentrica che possiede *un* solo asse di simmetria, CB:



Esso è formato da una semicirconferenza (ACB) e da una semiovale (AEGFB) raccordate, come spiega la descrizione che segue.

Tracciare due rette fra loro perpendicolari che si intersecano in un punto, O.

Fare centro in O e, con il raggio scelto, disegnare una circonferenza che determina i punti A, B, C e D. La semicirconferenza passante per A, D e B è tratteggiata perché non fa parte dell'ovolo.

Tracciare le corde passanti per le coppie di punti A – D e B – D e prolungarle verso il basso.

Fare centro nei punti A e B e, con raggio AB, disegnare due archi di circonferenza da A e da B fino a incontrare i prolungamenti delle corde nei punti E e F.

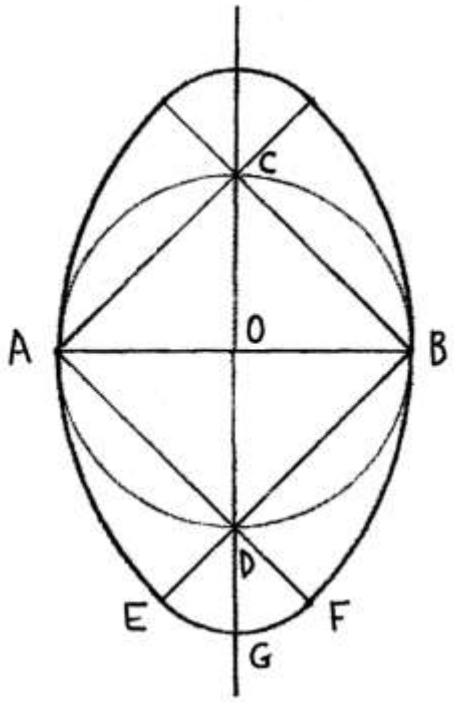
Infine, fare centro nel punto D e, con raggio DE = DF, tracciare un arco da E a F.

L'asse passante per i punti C, O, D e G è l'unico asse di simmetria della curva.

Il segmento AB è soltanto il diametro della circonferenza di centro O.

I centri dell'ovolo sono *quattro*: O, A, B e D.

L'arco ACB è una *semicirconferenza* mentre la curva AEGFB è una semiovale, come spiega la figura che segue:

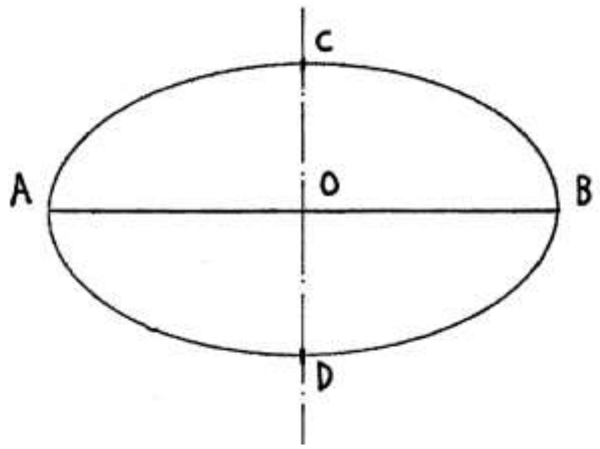


- APPROFONDIMENTO -

Il rapporto d'aspetto

Si chiama *rapporto d'aspetto* il rapporto aritmetico fra la larghezza e l'altezza di un'immagine: la prima dimensione è la maggiore.

Nel caso di un'ellisse o di un'ovale, esso indica il rapporto RA fra la lunghezza dell'asse maggiore e quella dell'asse minore:



RA = asse maggiore/asse minore = AB/CD.

Per l'ellisse e l'ovale RA è sempre maggiore di 1. Nel caso del cerchio, RA vale 1.

È conosciuto anche con l'espressione inglese *aspect ratio*.

Nei settori televisivo, fotografico, cinematografico e informatico (per i monitor dei PC) sono usati vari rapporti d'aspetto.

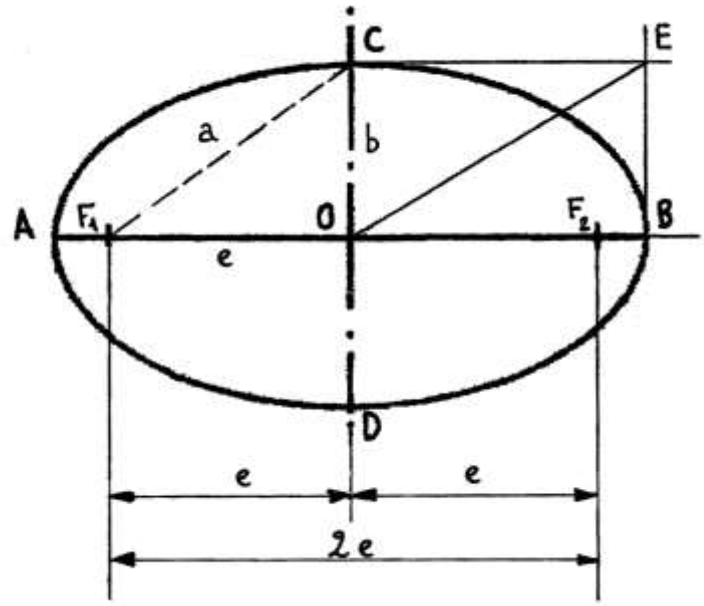
Il rapporto RA è indicato sotto forma di *frazione*: 4:3 16:9. Tavolta viene indicato con un numero decimale arrotondato, quale risultato della divisione: 1,5 2,35 oppure come proporzione riferita all'unità: 2:1 1,33:1 .

Eccentricità di un'ellisse

La distanza fra i fuochi di un'ellisse vale

$F_1F_2 = 2*e$.

Essa è anche indicata con l'espressione *distanza focale*.



Nella figura è disegnato il segmento F_1C: esso è l'ipotenusa del triangolo rettangolo F_1CO.

Conosciamo la lunghezza di F_1C, che è uguale a quella del semiasse maggiore $AO = a$ e del cateto OC che è il semiasse minore $OC = b$.

Il segmento F_1O è lungo:

$F_1O = e = \sqrt{F_1C^2 - OC^2} = \sqrt{a^2 - b^2}$.

La lunghezza F_1F_2 vale il doppio:

$F_1F_2 = 2 * \sqrt{a^2 - b^2}$

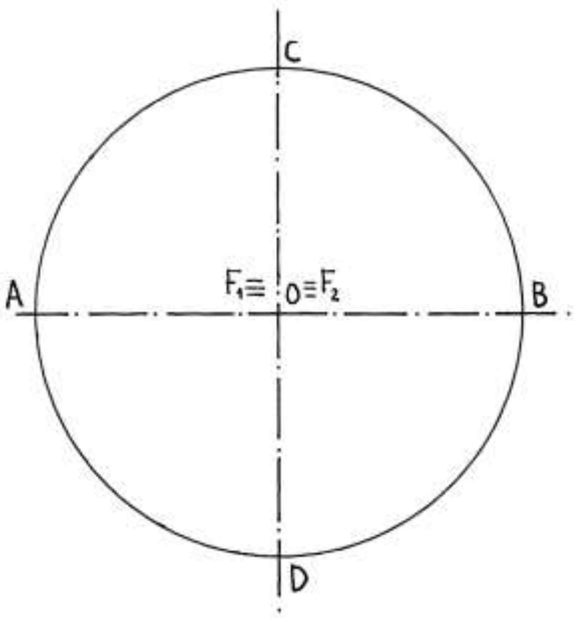
È chiamato *eccentricità dell'ellisse*, E, il rapporto

$E = e/a$. Il suo valore è *sempre* minore di 1.

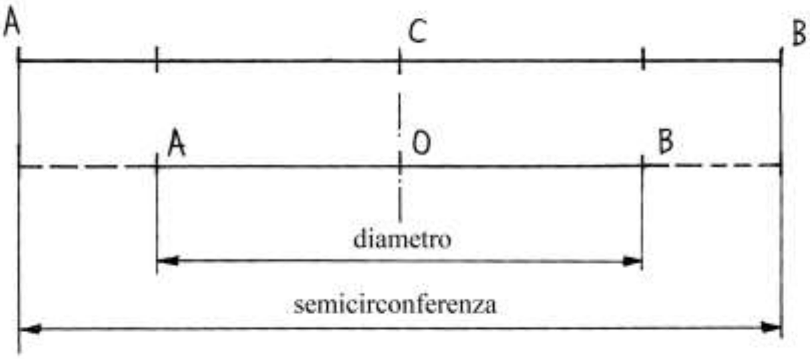
Il suo valore è *sempre* minore di 1.

Se E = 0, la curva degenera in una circonferenza perché la distanza focale si riduce a 0 e cioè i due fuochi coincidono con il centro O della figura:

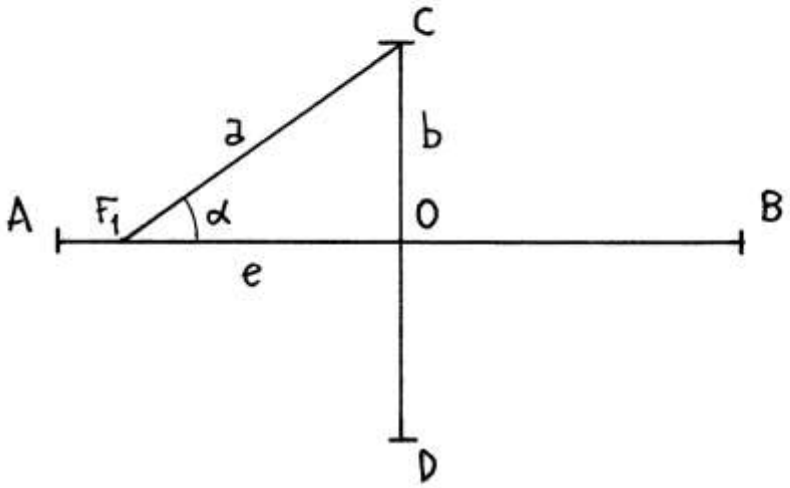
$F_1 \equiv O \equiv F_2$:



Se E = 1, la curva viene schiacciata e diviene un segmento lungo quanto la semicirconferenza ACB oppure quanto il diametro AOB:



Consideriamo ora lo schema che segue:



Il rapporto E = e/a è il *coseno* dell'angolo α: e/a = cos α .

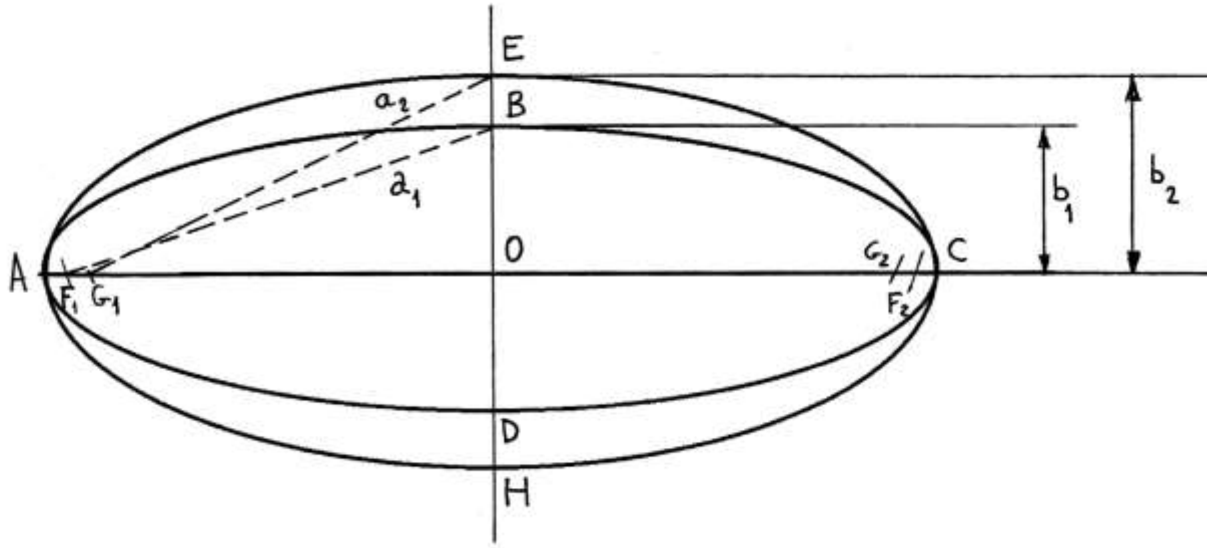
Il triangolo F_1CO è rettangolo: F_1C è l'ipotenusa e F_1O e CO sono i due cateti.

Aumentando l'ampiezza dell'angolo α diminuisce il valore del suo coseno: infatti

cos 0° = 1 e cos 90° = 0.

Lo stesso accade alla lunghezza della proiezione *e* dell'ipotenusa *a* sull'asse maggiore: l'eccentricità E si riduce seguendo il coseno.

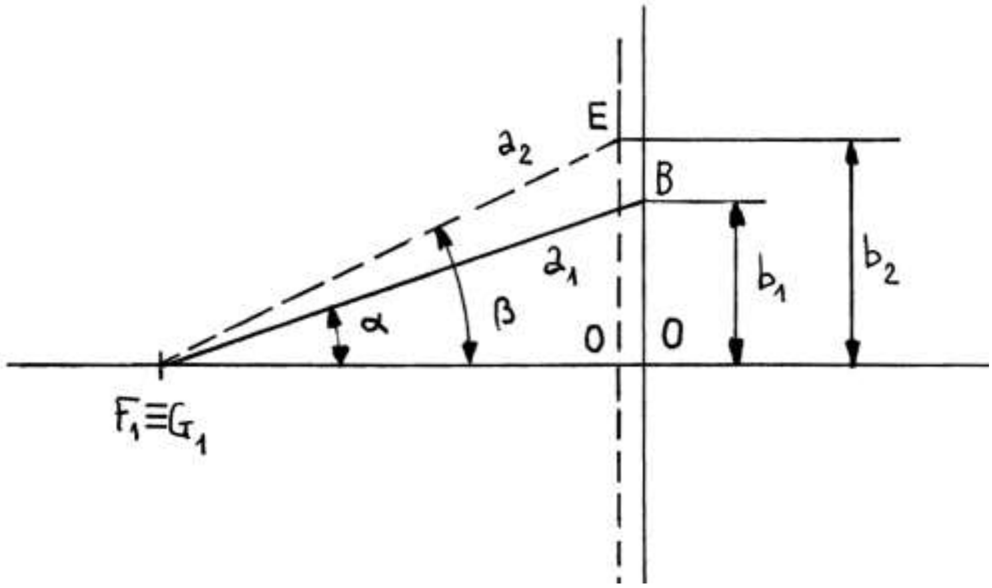
Due o più ellissi possono avere in comune l'asse maggiore, ma non quello minore e i fuochi:



Le due ellissi hanno in comune il centro O e l’asse maggiore AB.

F_1 e F_2 sono i fuochi dell’ellisse interna e G_1 e G_2 quelli dell’ellisse esterna.

Per confrontare le eccentricità delle due curve è sufficiente effettuare la sovrapposizione dei fuochi F_1 e G_1 sull’asse maggiore:



L’angolo α è maggiore di quello β.

L’eccentricità dell’ellisse interna è:

$E_1 = e_1/a_1 = \cos \alpha$.

L’eccentricità dell’ellisse esterna è:

$E_2 = e_2/a_2 = \cos \beta$.

Come visto sopra, dato che $\alpha > \beta$, ne consegue che $\cos \alpha < \cos \beta$ e quindi $E_2 < E_1$.

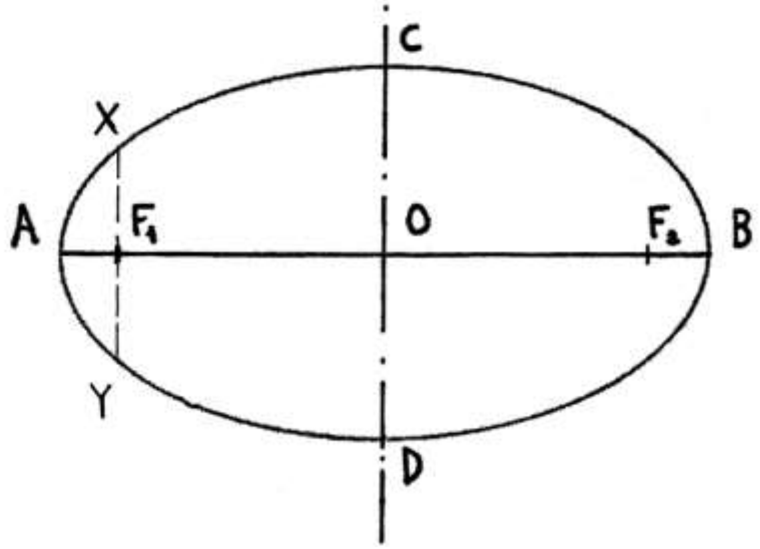
I segmenti a_1 e a_2 hanno uguale lunghezza che è quella del semiasse maggiore:

$a_1 = a_2 = OA$.

L’eccentricità E è proporzionale alla lunghezza della meta della *distanza focale*.

Il semilato retto

Una *corda* passante per un fuoco e perpendicolare all'asse maggiore è detta *semilato retto*:



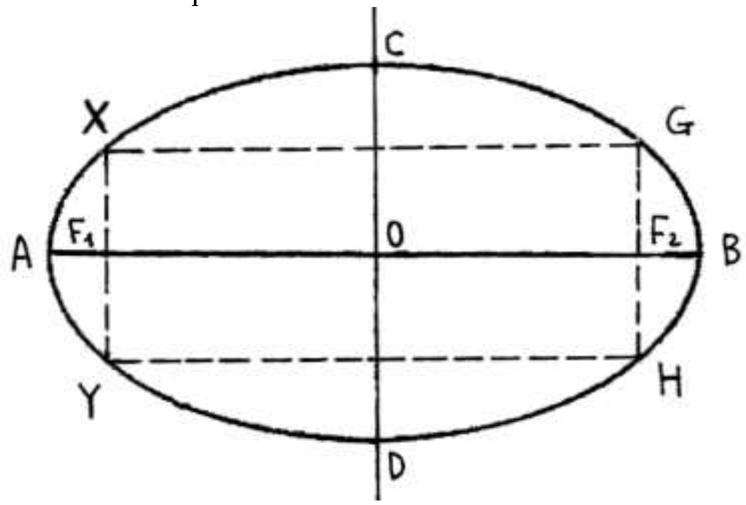
Nella figura XY è un *semilato retto*. La sua lunghezza, ℓ, è data da:

ℓ = XY= 2 * b^2/a, con *b* lunghezza del semiasse minore (OC = OD) e *a* (lunghezza del semiasse maggiore OA = OB).

Dalla precedente formula deriva la seguente:

$XF_1 = F_1Y = b^2/a$.

La corda simmetrica a quella XY è GH:

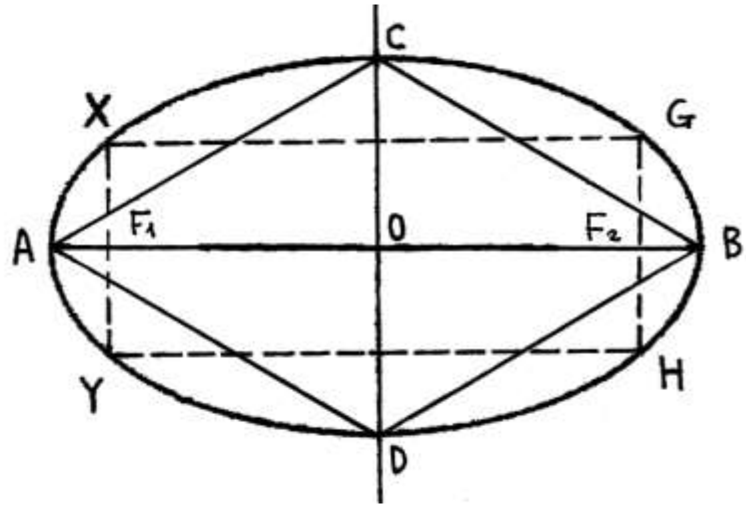


Il rettangolo XGHY è inscritto nell'ellisse ed è quello con la massima superficie possibile.

L'area del rettangolo è:

$\text{Area}_{XGHY} = 2 * b^2/a * F_1F_2 = 2 * b^2/a * [2 * \sqrt{(a^2 - b^2)}] = 4 * b^2/a * \sqrt{(a^2 - b^2)}$.

Infine, il quadrilatero inscritto che possiede la massima superficie è il rombo ACBDD:



La sua area è data da:

Area $_{ACBD}$ = AB * CD/2 = 2*a * 2*b/2 = 2 * a*b .

- -

Ovale e ellisse

La costruzione di un anfiteatro richiedeva il calcolo del suo perimetro (esterno e interno) e la sua divisione in parti uguali.

Inoltre era necessario tracciare un certo numero di perpendicolari alla curva per definire l'andamento dei blocchi di costruzione: queste operazioni erano più facili da eseguire con l'ovale, ottenuta con archi di circonferenza, che con l'ellisse.

Un'ovale può avvicinarsi alla forma dell'ellisse fino a rendere le due curve poco distinguibili, almeno nel caso delle grandi costruzioni.

Tutti gli anfiteatri sono delle ovali: non è mai stato ritrovato un anfiteatro costruito seguendo la figura dell'ellisse.

Un fondamentale studio sugli anfiteatri è contenuto nel contributo di Camillo Trevisan ("Sullo schema geometrico costruttivo degli anfiteatri romani: gli esempi del Colosseo e dell'Arena di Verona"), contenuto alle pp. 117-131 dell'opera collettiva citata al n. 5 della *Bibliografia*.

Le basi geometriche della costruzione del profilo esterno degli anfiteatri

La costruzione del perimetro esterno dell'ovale potrebbe essere stata realizzata dai geometri romani usando tre diversi poligoni semplici:

- Il triangolo equilatero.
- Il pentagono regolare (secondo Maria Teresa Bartoli [6]).
- Il triangolo rettangolo *egizio* e cioè il triangolo 3-4-5.

L’ovale e i trattatisti rinascimentali

Numerosi esponenti del Rinascimento scrissero dei trattati sulla prospettiva, sul disegno geometrico e su argomenti di *geometria pratica*. Alcuni di essi studiarono la costruzione dell’ovale con differenti metodi e con l’ausilio di strumenti, fra i quali è in evidenza il *compasso*.

L’architetto Sebastiano Serlio (1475-1554) offrì quattro diverse costruzioni ne “*Il primo libro d’architettura*” del 1551: l’opera complessiva (“*I sette libri dell’architettura di Sebastiano Serlio bolognese*”) fu pubblicata in maniera disordinata nel periodo 1537-1551. Il *primo libro* non comparve per primo; comunque, esso è riservato alla trattazione di argomenti geometrici.

Baldassare Peruzzi (1481-1536), Serlio e il Vignola (Jacopo Barozzi da Vignola, detto *Il Vignola*, 1507-1573) sono i tre architetti del tardo Rinascimento che introdussero l'ovale nell'architettura religiosa.

Serlio è stato il primo trattatista rinascimentale a studiare la forma di un anfiteatro romano.

Egli non disponeva dei mezzi e delle opportunità oggi disponibili per effettuare un rilievo dettagliato delle forme e delle dimensioni degli anfiteatri e si limitò a disegnarle e a proporre un’ipotesi progettuale.

Serlio descrisse una serie di costruzioni geometriche basate sull’ovale a quattro centri, curva che offriva una doppia simmetria ortogonale (come l’ellisse).

Fra le soluzioni da lui scelte vi è quella del rombo formato da due triangoli equilateri uniti. Il suo scopo era quello di avvicinare la forma dell’ovale a quella da lui ritenuta la più perfetta.

Infine, egli rappresentò tre anfiteatri: quelli di Pola, di Roma e di Venezia.

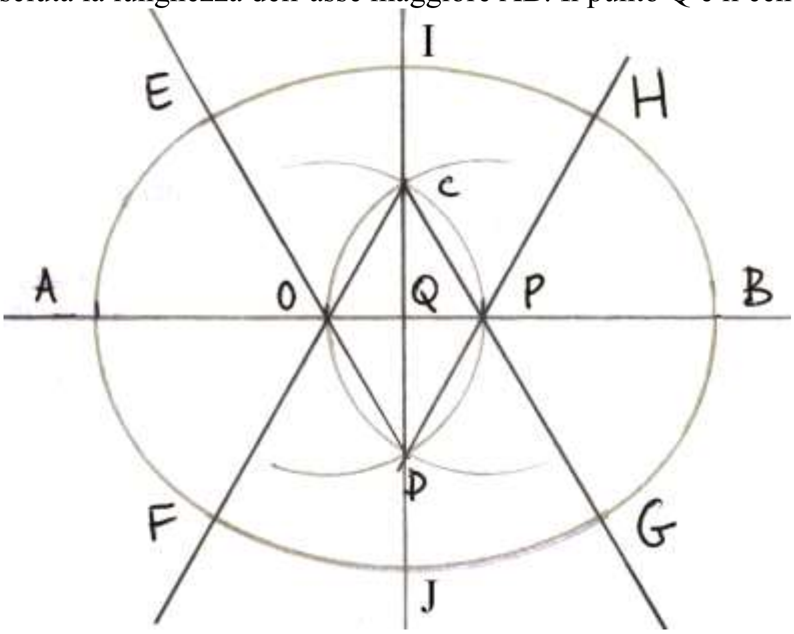
Serlio descrisse solo *quattro* metodi e tutti basati su *quattro* distinti centri di curvatura.

Le sue regole non fissano direttamente le dimensioni degli assi, ma soltanto la posizione dei centri dell’ovale e le dimensioni dei lati del poligono generatore. Da questi dati derivano le lunghezze dei due assi di simmetria.

La I costruzione di Serlio

È un’ovale a 4 centri.

È conosciuta la lunghezza dell’asse maggiore AB. Il punto Q è il centro dell’ovale:



I punti O e P sono simmetrici rispetto a Q. Disegnare i due triangoli equilateri OCP e OPD e prolungare i lati come in figura.

Con centro in O e raggio OA disegnare l'arco EF: con la stessa apertura e centro in P tracciare l'arco GH.

Con centro in D e raggio DE si disegna l'arco EH: con lo stesso raggio, centrando in C viene tracciato l'arco FG.

La curva si chiude con l'arco HG disegnato facendo centro in P e raggio PB = PH e con l'arco EF con la stessa apertura e centro in O.

- APPRONDIMENTO -

<u>Il rapporto d'aspetto della costruzione Serlio I</u>

L'asse maggiore AB è dato ed è lungo *2*a* . È nota pure la lunghezza del lato OP dei due triangoli equilateri uniti per formare il rombo OCPD: OP = lato .

Non c'è relazione fra le lunghezze di AB e di OP tranne il vincolo AB > OP o 2*a > lato .

Come abbiamo visto nel precedente paragrafo, l'ovale è generata dal raccordo di quattro archi tracciati con due raggi differenti: OA e DE.

Il raggio OA è lungo:

$$OA = PB = (AB - OP)/2 = (2*a - lato)/2 = a - lato/2 .$$

Il raggio CF è:

$$CF = CO + OF = OP + OA = lato + (a - lato/2) = a + lato/2 .$$

L'asse minore IJ è lungo

$$IJ = IC + CJ = IC + CF .$$

A sua volta, IC è dato da:

$$IC = ID - CD = ED - CD = CF - CD .$$

Ma CD è la *diagonale maggiore* del rombo OCPD ed è la doppia altezza dei triangoli equilateri OCP e OPD:

$$CD = 2 * CQ = 2 * [OP * (\sqrt{3})/2] = OP * \sqrt{3} = \sqrt{3} * lato .$$

Ne consegue:

$$IC = (a + lato/2) - \sqrt{3} * lato .$$

L'asse minore è:

$$IJ = IC + CF = [(a + lato/2) - \sqrt{3} * lato] + (a + lato/2) = 2*a - lato * (\sqrt{3} - 1) .$$

Il rapporto d'aspetto RA è dato da:

$$RA = AB/IJ = 2*a/[2*a - lato * (\sqrt{3} - 1] .$$

RA non ha un preciso valore: esso varia in relazione alle lunghezze dell'asse maggiore AB e del lato OP.

Nel caso della precedente figura, il rapporto RA vale: $RA \approx 1,23$.

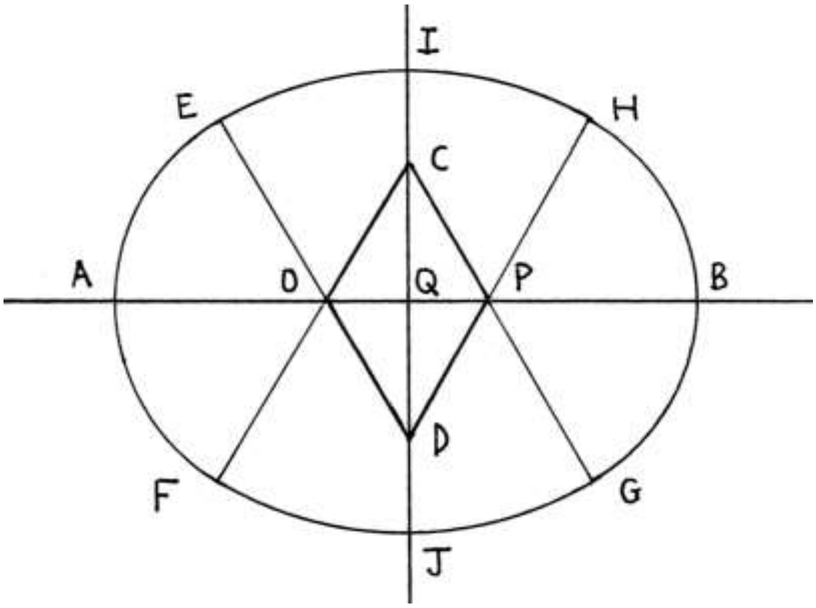
Nota: fra le quattro costruzioni di Serlio emerge una netta distinzione: la I ha un rapporto d'aspetto *variabile* mentre la II, la III e la IV possiedono rapporti d'aspetto *fissi*.

<u>Le formule di Rosin</u>

Il fisico inglese Paul L. Rosin (Università di Cardiff), da solo o in collaborazione con altri ricercatori, ha dedicato numerosi e approfonditi studi all'analisi dell'ovale e al confronto delle proprietà geometriche delle costruzioni proposte almeno dal Rinascimento in poi da numerosi trattatisti, a partire da Serlio, Leonardo da Vinci e da inediti di Baldassare Peruzzi (1481-1536).

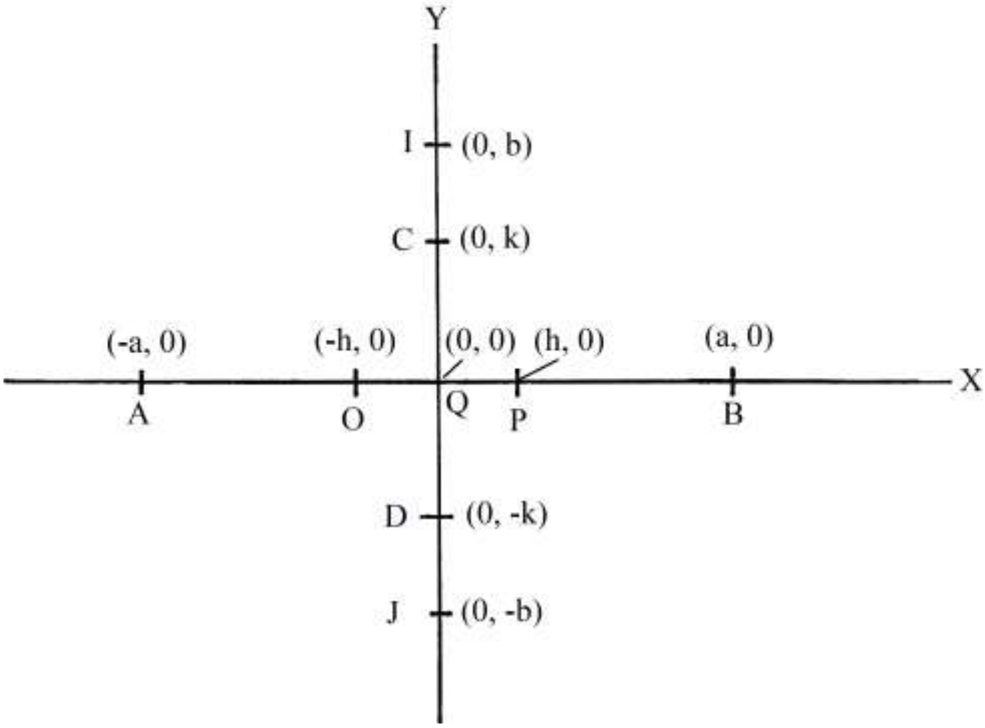
Rosin ha elaborato una serie di formule che connettono alcune lunghezze dei segmenti caratteristici delle diverse costruzioni dell'ovale e non solo di quelle di Serlio [8]. Nel prosieguo di questo articolo sono presentate solo le formule di Rosin relative alle costruzioni di Serlio.

Consideriamo di nuovo la *I costruzione di Serlio*:



Come già visto, la costruzione prende l'avvio dalla conoscenza della lunghezza dell'asse maggiore AB = 2*a e di quella del lato OP del doppio triangolo equilatero.

Le formule di Rosin sono basate su di un riferimento cartesiano come mostra il grafico che segue:



Le costanti indicate nelle formule di Rosin sono le seguenti:

* *h* è QP e cioè la distanza da Q del centro P dell'arco HBG (analoghe considerazioni valgono per il punto O e per l'arco FAE);
* *k* è QC e cioè la distanza di C dal centro dell'ovale Q che è anche l'origine degli asse cartesiani;
* *a* è il semiasse maggiore QB ;
* *b* è il semiasse minore QI ;
* *s* è la lunghezza di PB (che è il raggio degli archi HBG e FAE) .

Ecco la prima formula:

$$h = \frac{k - \frac{a-b}{2}}{\frac{k}{a-b} - 1}.$$

I segmenti *h* e *k* hanno lunghezze espresse dalle due formule che seguono:

$$h = \frac{a-b}{\sqrt{3}-1}; \quad k = \frac{\sqrt{3}(a-b)}{\sqrt{3}-1}.$$

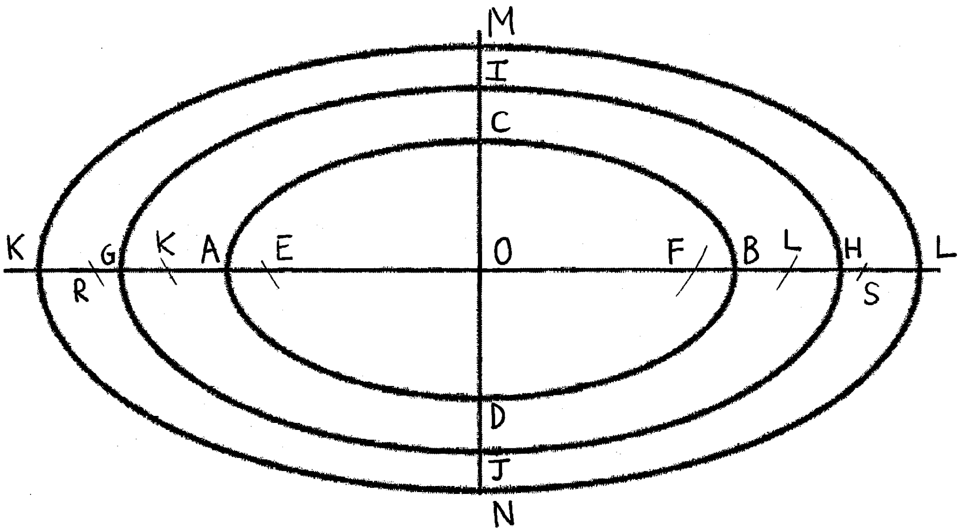
Il rapporto d'aspetto, RA, è determinato da RA = a/b ed è calcolato da Rosin con la formula

$$\frac{a}{b} = \frac{h+s}{h(2-\sqrt{3})+s}.$$

- -

Ellissi concentriche

Le tre ellissi della figura hanno in comune il centro O e i loro assi giacciono sulle stesse rette:



Il rapporto fra le lunghezze degli assi maggiore e minore, o RA (rapporto d'aspetto) è costante ed è uguale a 2 per tutte e tre le curve:

AB/CD = GH/IJ = KL/MN .

Le tre curve non sono equidistanti.

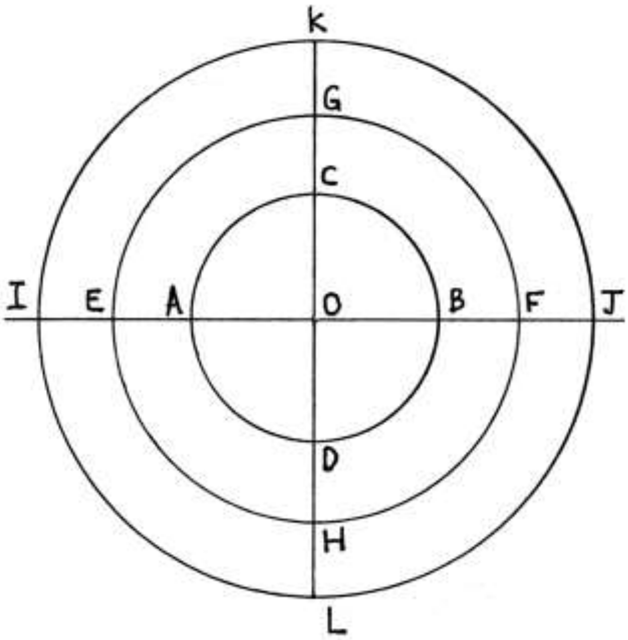
L'ellisse interna ha assi AB e CD e fuochi E e F.

L'ellisse intermedia ha assi GH e IJ e i suoi fuochi sono i punti K e L.

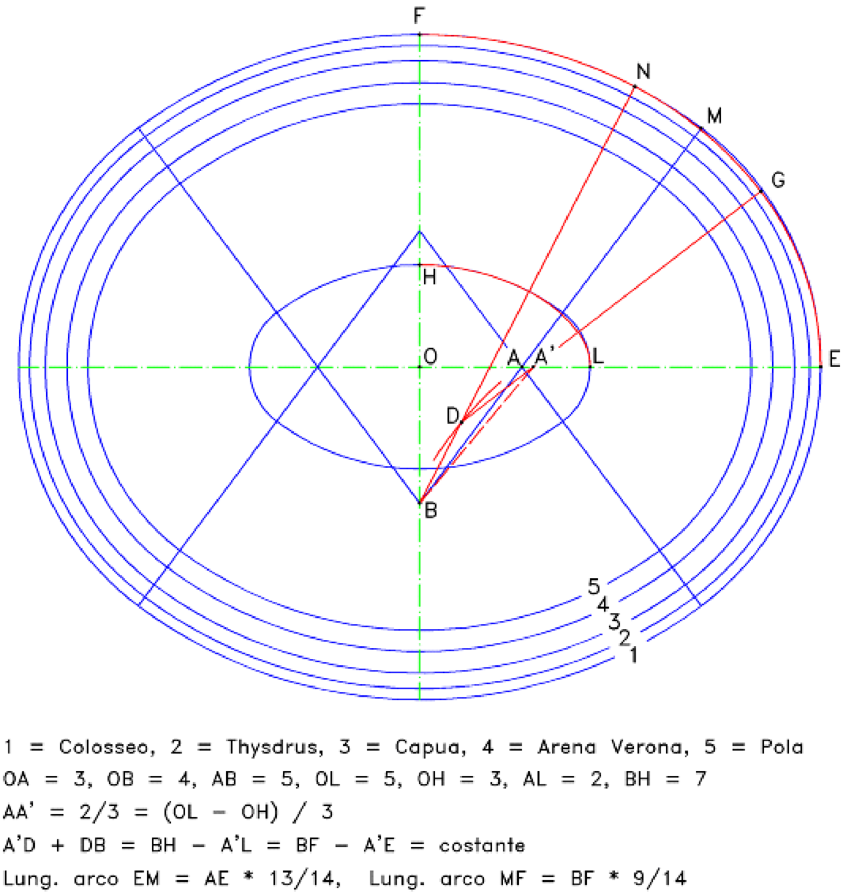
Infine, l'ellisse più esterna ha assi lunghi KL e MN: i suoi fuochi sono R e S.

L'eventuale uso delle ellissi per disegnare il profilo interno e quello esterno di un anfiteatro avrebbe comportato grossi problemi di tracciatura e di costruzione, proprio a causa della presenza di numerosi *fuochi* e delle distanze variabili fra la curva interna e quella esterna.

Le tre ellissi non sono parallele perché le loro reciproche distanze misurate su una qualsiasi semiretta uscente da O non sono costanti, come è il caso di tre cerchi concentrici:



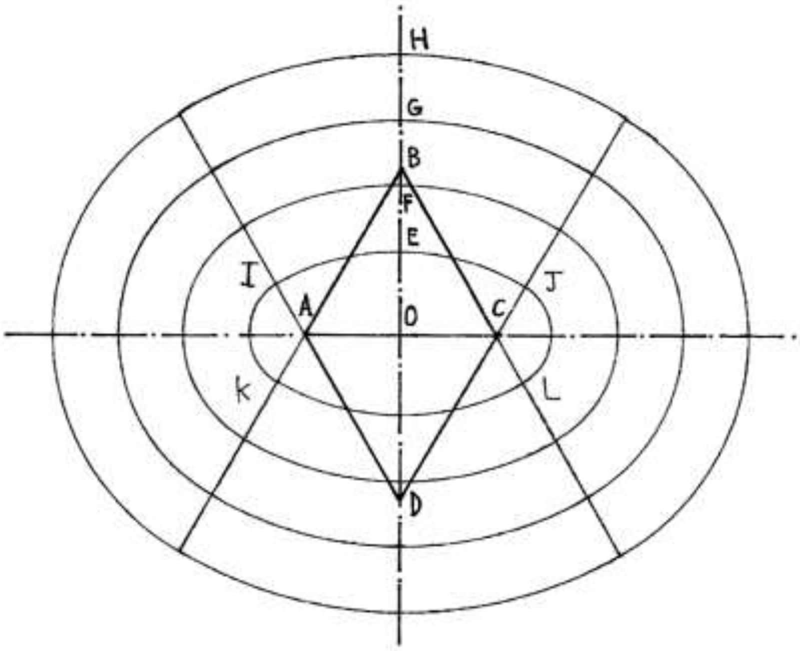
Anche le ovali a 8 centri, concentriche, mostrano distanze costanti misurate su qualsiasi semiretta uscente dal centro O:



La figura qui sopra è tratta dal citato articolo di Trevisan e mette a confronto gli ovali a 8 centri che approssimano il profilo di *cinque* anfiteatri.

Nel grafico che segue è riprodotta una costruzione di ovali a 4 centri dovuto a Serlio (è la sua *prima costruzione*): la figura generatrice è il rombo ABCD che è formato da due triangoli equilateri uniti lungo il lato AC.

Prolungare i lati BA, DA, BC e DC.



I vertici del rombo sono i *quattro* centri delle ovali.

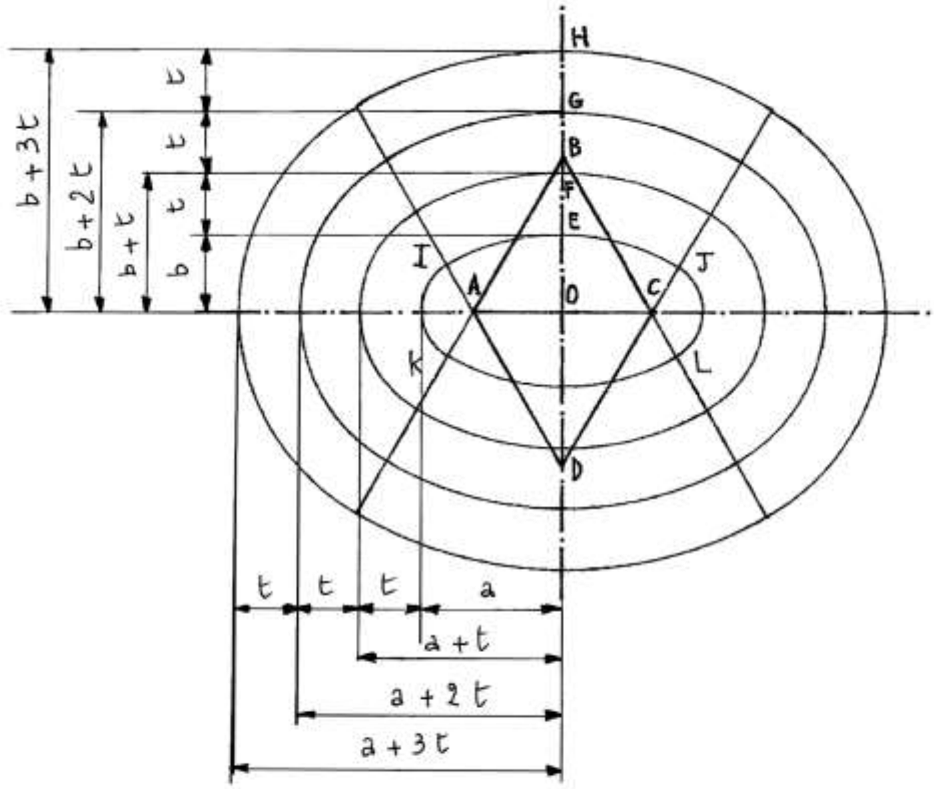
Sull'asse minore fissare quattro punti, E, F, G e H, fra loro equidistanti (per semplicità).

L'ovale interna è costituita da quattro archi di circonferenza raccordati: fare centro in D e in B con raggio DE e tracciare due archi, IJ e KL. Fare poi centro in A e in C con raggio AI e disegnare gli archi IK e JL che raccordano i primi due.

Le altre tre ovali sono costruite con lo stesso metodo.

Le quattro ovali hanno differenti preoporzioni fra le lunghezze degli assi e cioè differenti *rapporti d'aspetto*.

L'ellisse più interna ha assi lunghi 2*a e 2*b:



Le lunghezze dei semiassi delle ovali aumentano in progressione aritmetica di ragione "2*t" e quindi i semiassi si incrementano in progressione aritmetica di ragione "t".

La formula generale del rapporto d'aspetto è:

RA = asse maggiore/asse minore = 2*a/2*b = a/b . I calcoli sono semplificati impiegando le lunghezze dei *semiassi a* e *b*.

I rapporti di aspetto delle quattro ovali sono i seguenti:

$RA_{\text{OVALE E}} = a/b$;

$RA_{\text{OVALE F}} = (a + t)/(b + t)$;

$RA_{\text{OVALE G}} = (a + 2*t)/(b + 2*t)$;

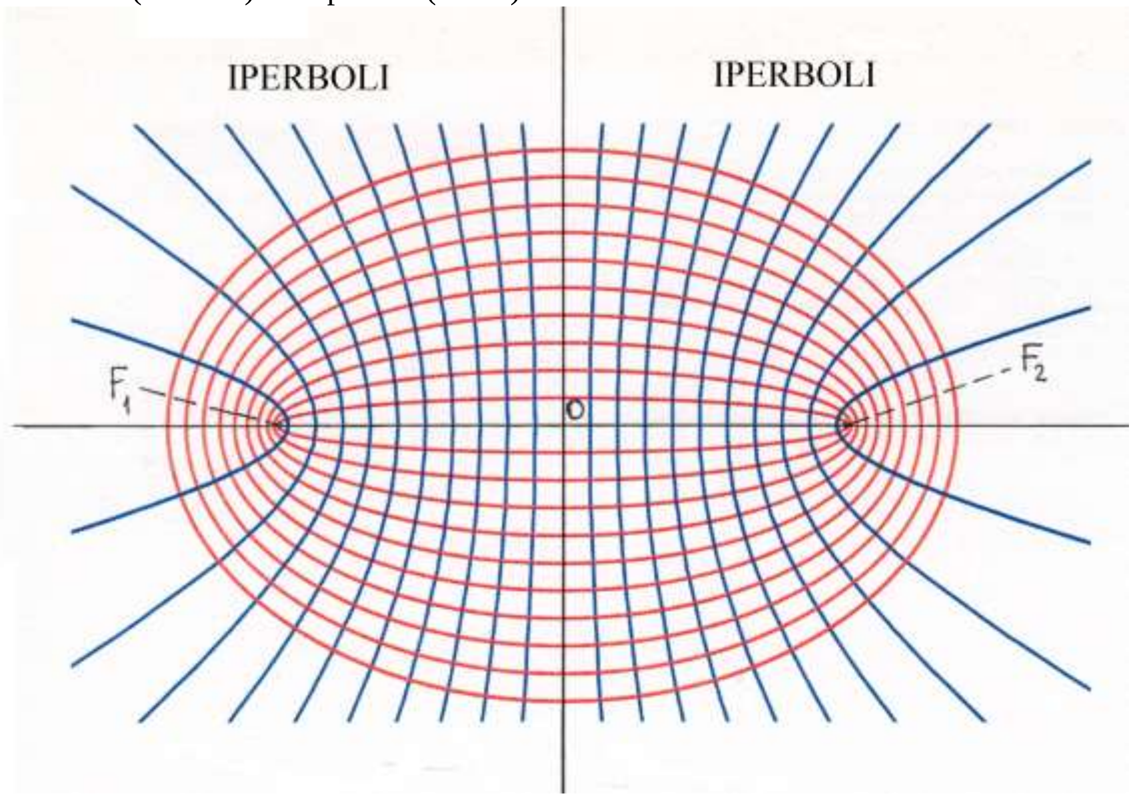
$RA_{\text{OVALE H}} = (a + 3*t)/(b + 3*t)$.

Una semplice verifica dimostra che con il crescere delle dimensioni degli assi si riduce il valore di RA per cui valgono le relazioni:

$$RA_{\text{OVALE E}} > RA_{\text{OVALE F}} > RA_{\text{OVALE G}} > RA_{\text{OVALE H}} .$$

Ellissi confocali

In geometria due curve sono dette *confocali* se possiedono gli stessi due fuochi. Il grafico che segue, rielaborato da http://www.robertoocca.net/sp/fg/elli/elli_iperbol_confocali.htm , mostra una serie di ellissi (in *rosso*) e di iperboli (in *blu*) tutte confocali:

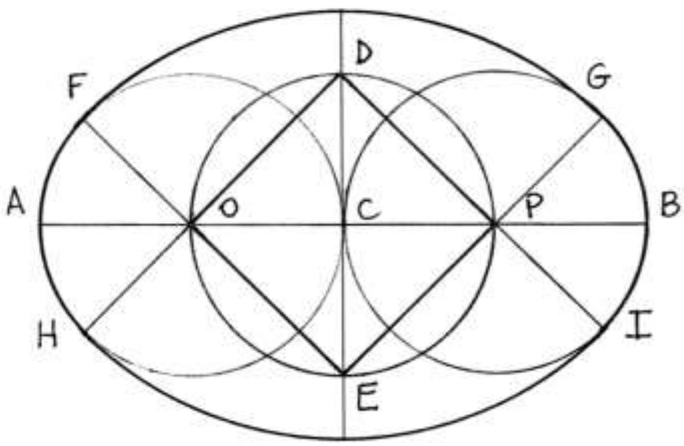


I due fuochi, F_1 e F_2, si trovano sull'asse maggiore e sono posizionati quasi a ridosso dell'ellisse più interna.

È opportuno richiamare l'attenzione su di un fatto: le ellissi confocali non sono parallele e le loro distanze sono maggiori lungo l'asse minore rispetto a quelle che si manifestano lungo l'asse maggiore.

La II costruzione di Serlio

L'asse maggiore AB è diviso in 4 parti uguali. Con raggio CO disegnare le circonferenze con centri in C, O e P:



Tracciare il diametro verticale DE, passante per C.

Dai punti D e E disegnare le linee per i centri O e P, fino a intersecare le circonferenze in F, G, H e I.

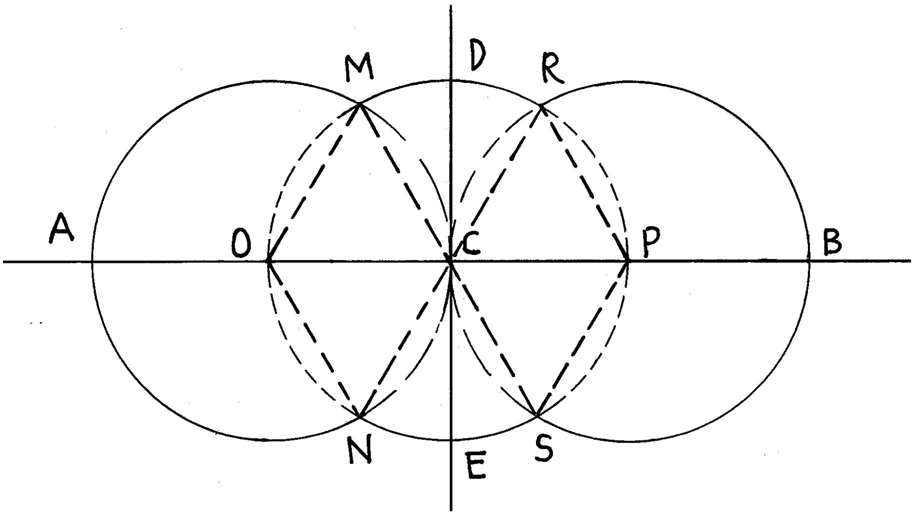
Con centro in E e raggio EF tracciare l'arco FG e con la stessa apertura fare centro in D per ricavare l'arco HI.

Per concludere l'ovale è sufficiente ripassare con il compasso gli archi FAH e GBI.

- APPROFONDIMENTO -

<u>La II costruzione di Serlio e la *vesica pisces*</u>

Il secondo metodo di Serlio muove contiene al suo interno una doppia costruzione della *vesica pisces*: nella figura che segue sono le *lenti* OMCN e CRPS.

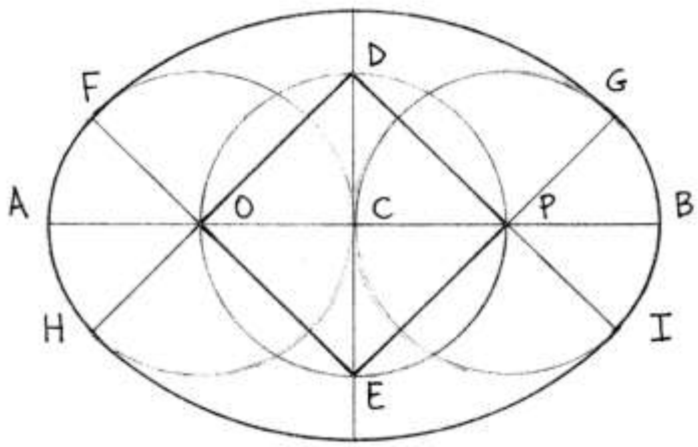


All'interno delle due lenti sono inscritti i rombi OMCN e CRPS formati da due triangoli equilateri uniti.

- -

Questa costruzione di Serlio può essere descritta anche in un altro modo.

Disegnare due rette fra loro perpendicolari che si intersecano nel punto C e formano i due assi di simmetria dell'ovale.



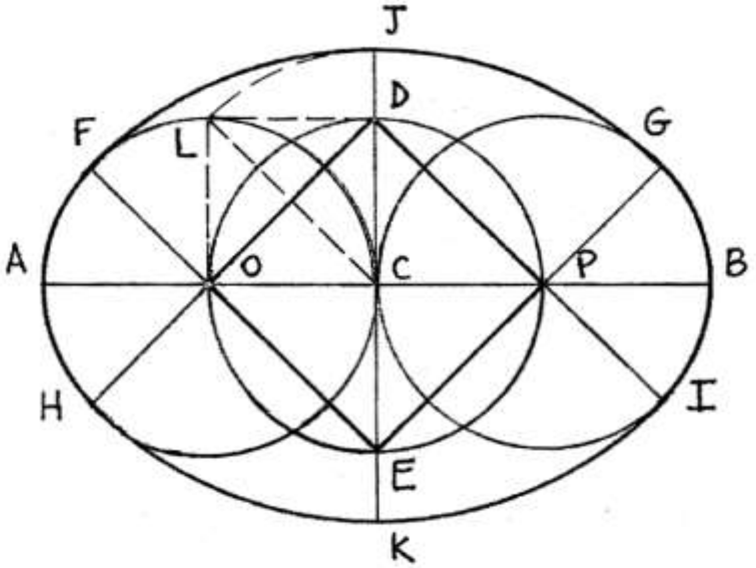
Con l’apertura di compasso scelta, fare centro in C e tracciare una circonferenza che taglia gli assi di simmetria nei punti O, D, P e E (come nella precedente costruzione).

Disegnare il quadrato ODPE e prolungarne i lati come mostrato in figura.

Gli assi di simmetria dell’ovale sono *sovrapposti* alle diagonali del quadrato ODPE e questi quattro vertici sono i centri degli archi di circonferenza che formano l’ovale.

L’asse maggiore AB è lungo

AB = 4 * OC.



Costruire il quadrato CDLO con lati lunghi quanto OC.

Tracciare la diagonale CL. Fare centro in C e con raggio CL disegnare un arco da L fino a incontrare l’asse minore in J.

L’asse minore JK è lungo

$JK = 2 * CJ = 2 * CL = 2 * \sqrt{2} * OC$.

Il rapporto d’aspetto RA vale:

$RA = AB/JK = 4 * OC/(2 * OC * \sqrt{2}) = 2/\sqrt{2} = 2*\sqrt{2}/2 = \sqrt{2}$.

Il segmento *h* vale:

CP = h = OC = r .

Anche *k* ha la stessa lunghezza:

CD = k = OC = r .

- APPROFONDIMENTO -

Le costanti di Rosin

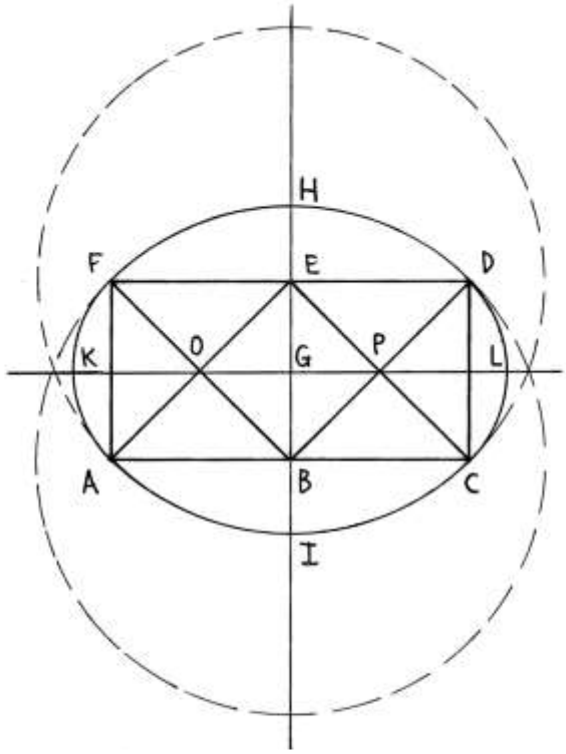
Per la II costruzione di Serlio, le costanti *h* e *k* valgono:

CP = h = CD = k = cb/2 = a/2 .

- -

La III costruzione di Serlio

Questa terza costruzione richiede la tracciatura di due quadrati identici e affiancati, ABEF e BEDC, come in figura:



Tracciare le diagonali dei due quadrati e la retta passante per i due centri O e P: esso è disposto sull’asse maggiore dell’ovale.

Con raggio OA e centro in O e poi in P disegnare rispettivamente gli archi AF e DC.

Facendo centro in B e in E, con raggio BF, tracciare gli archi FD e CA.

Il raggio BF è lungo il doppio del raggio OA.

Come nella precedente costruzione, questa ovale è realizzata usando quattro centri rappresentati dai vertici comuni ai due quadrati (B e E) e dalle intersezioni delle diagonali dei due quadrati (O e P).

Per semplificare i successivi calcoli, chiamiamo z la lunghezza del lato AB.

L’asse maggiore KL è lungo:

$$KL = KO + OP + PL = 2 * KO + OP.$$

OP ha la stessa lunghezza di AB e quindi $OP = z$.

Il segmento KO è il raggio dell’arco AKF ed è lungo quanto OA e OF.

OA è un cateto del triangolo rettangolo isoscele AOB che ha ipotenusa lunga AB = z, per cui

$$OA = AB * (\sqrt{2})/2 = z * (\sqrt{2})/2 .$$

Ne consegue che KL è:

$$KL = 2 * z + (\sqrt{2})/2 * z = z * (\sqrt{2} + 1) .$$

L’asse minore HI è lungo:

$$HI = HE + EI .$$

A sua volta, HE è dato da

$$HE = HB – EB = BF – AB = z * \sqrt{2} – z = z * (\sqrt{2} – 1) .$$

Il segmento EI è lungo:

$$EI = EA = 2 * OA = 2 * z * (\sqrt{2})/2 = z * \sqrt{2} .$$

Risulta che

$$HI = z * (\sqrt{2} – 1) + z * \sqrt{2} = z * (2*\sqrt{2} – 1) .$$

Il rapporto d’aspetto RA è:

$$RA = KL/HI = z * (\sqrt{2} + 1)/[z * (2*\sqrt{2} – 1)] \approx 1.32 .$$

- APPROFONDIMENTO -

Le costanti di Rosin

Il segmento *h* è lungo:

GP = h = OP/2 = z/2 .

Anche *k* ha la stessa lunghezza:

GE = k = BE/2 = z/2 .

È possibile esprimere le lunghezze di *h* e di *k* in funzione di quella dell'asse maggiore KL = 2*a = z * (√2 + 1), dalla quale si ricava:

z = 2*a/(√2 + 1) .

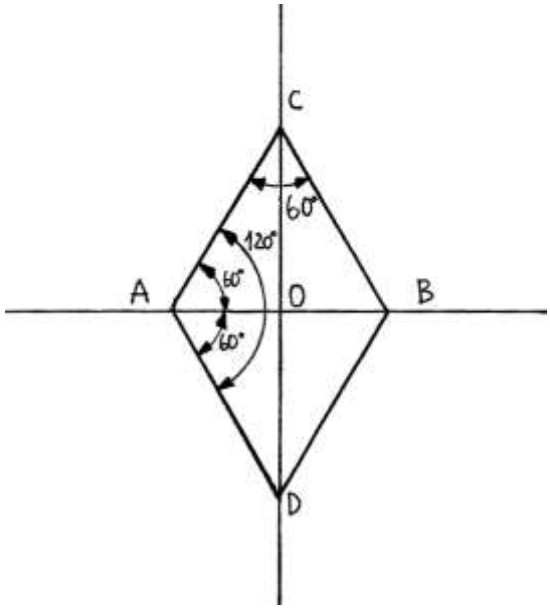
Sostituendo l'ultimo valore di *z* nelle formule di *h* e di *k* si ha:

h = k = z/2 = [2*a/(√2 + 1)]/2 = a/(√2 + 1) .

- -

La costruzione con il triangolo equilatero – La IV costruzione di Serlio

La nota costruzione dell'ovale a *4 centri* mostra chiaramente la sua derivazione dal triangolo equilatero. Il poligono generatore è un *rombo* formato da due triangoli equilateri di uguali dimensioni, uniti per il lato orizzontale AB:

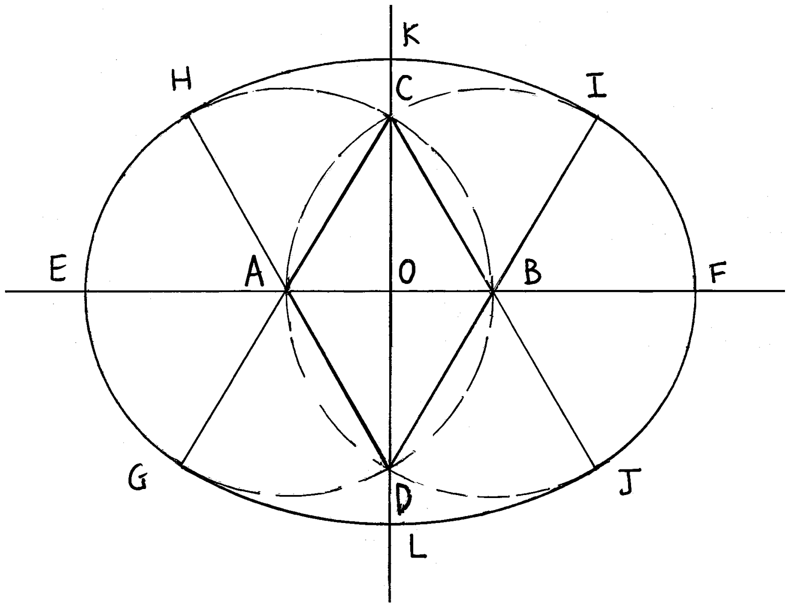


Oltre a essere il lato comune ai due triangoli equilateri, il segmento AB è anche la *diagonale minore* del rombo ACBD.

I vertici A, B, C e D sono i centri dell'ovale da costruire.

È conosciuta come la IV costruzione dell'ovale proposta da Sebastiano Serlio.

Prolungare verso destra e verso sinistra AB e verso l'alto e verso il basso la diagonale maggiore CD.



Fare centro nei punti A e B e con raggio AB disegnare due circonferenze che si intersecano nei punti C e D e tagliano l'asse orizzontale in E e in F.

Prolungare i lati CA, CB, DA e DB fino a tagliare le due circonferenze nei punti G, H, I e J.

Fare centro nei punti C e D con raggio CG = DH e tracciare gli archi GJ e HI. L'ovale è completa.

Il raggio CG è lungo:

$$CG = CA + AG = 2*AC = 2*AB.$$

Gli archi GJ e HI incontrano l'asse verticale nei punti K e L.

Il segmento CD è lungo quanto il *doppio* dell'altezza del triangolo equilatero ACB e cioè:

$$CD = 2 * \text{altezza} = CO + OD = 2 * (AB * \sqrt{(3)}/2) = AB * \sqrt{3}\ .$$

Il segmento CL è lungo il doppio del lato AB. Infine il segmento DL è lungo:

$$DL = CL - CD = 2 * AB - AB * \sqrt{3} = AB * (2 - \sqrt{3})\ .$$

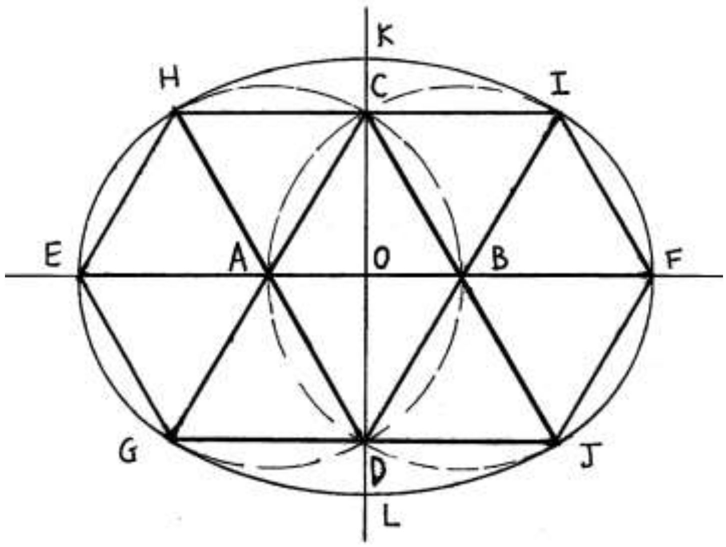
La lunghezza totale dell'asse minore KL è:

$$KL = CL + KC = CL + DL = 2 * AB + AB * (2 - \sqrt{3}) = AB * (2 + 2 - \sqrt{3}) =$$
$$= AB * (4 - \sqrt{3}) \approx 2{,}2679 * AB\ .$$

Il rapporto fra le lunghezze dei due assi (o *rapporto d'aspetto*) è:

$$EF/KL = 3 * AB/(AB * (4 - \sqrt{3})) = 3/(4 - \sqrt{3}) \approx 1{,}32278\ .$$

La struttura sottostante è formata da due distinte tipologie di triangoli equilateri. La prima ha lato lungo AB e la seconda ha lato GJ e cioè il doppio di AB. Il triangolo più grande, GCJ, è formato da quattro triangoli più piccoli: GAD, ACB, ABD e DBJ.



\- APPROFONDIMENTO -

<u>Le costanti di Rosin</u>

Prima di esporre i risultati dell’applicazione delle sue formule a questa costruzione di Serlio, Rosin [8] fissa alcuni dati di fatto:

1. I *quattro* archi di circonferenza che formano la curva dell’ovale hanno uguale lunghezza:
   GEH = HKI = IFJ = JLG.
2. I raggi degli archi di circonferenza hanno lunghezze in proporzione 1:2 :
   AE : DH = 1 : 2 .
3. L’asse maggiore EF è lungo *tre* volte il raggio AE:
   EF : AE = 3 : 1 .

Il segmento OB = h è lungo ½ del lato AB e 1/6 dell’asse maggiore EF e cioè:

h = 1/6 * EF = 1/6 * 2*a = 1/3 * a .

Il segmento OC = k è lungo quanto l’altezza del triangolo equilatero ACB che ha lati uguali a:

AB = 1/3 * EF = 1/3 * 2*a = 2/3 * a .

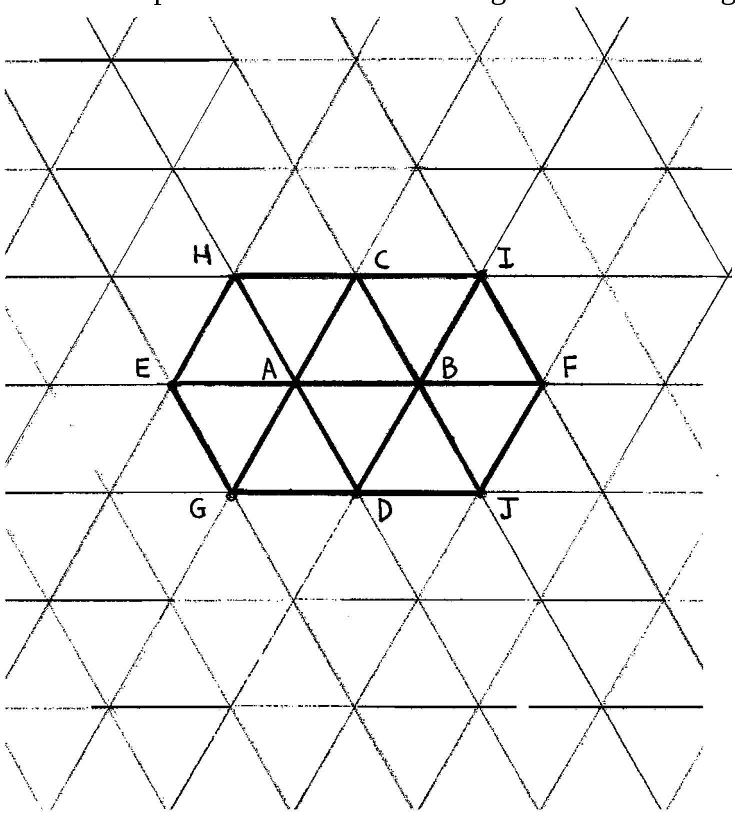
Quindi *k* è:

k = AB * (√3)/2 = 2/3 * a * (√3)/2 = a/√3 .

\- -

%%%%%%%%%%%%%%%%

La IV costruzione di Serlio può essere facilmente disegnata usando una griglia *isometrica*:



- RIEPILOGO -

Il rapporto d'aspetto negli ovali secondo le quattro costruzioni di Serlio

La tabella che segue riassume i valori che assumono i valori del RA per le ovali di Serlio:

Costruzioni di Serlio	RA (rapporto d'aspetto)
I	variabile
II	$\sqrt{2}$
III	$(\sqrt{2} + 1)/(2*\sqrt{2} - 1) \approx 1.32$
IV	$3/(4 - \sqrt{3}) \approx 1{,}32278$

I rapporti d'aspetto della II, della III e della IV costruzione di Serlio sono tutti *numeri irrazionali*.

I rapporti della III e della VI costruzione si avvicinano al valore della frazione 4/3:

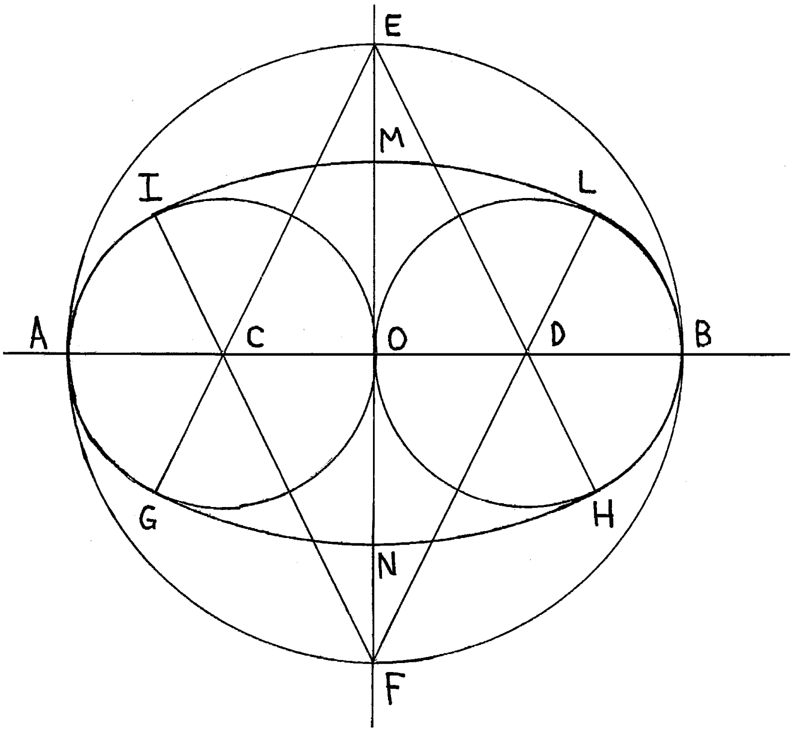
$4/3 = 1{,}(33)$.

- -

Le costruzioni del Vignola

Le due costruzioni che seguono sono dovute al già ricordato Jacopo Barozzi da Vignola, detto *Il Vignola*.

La prima prende l’avvio dalla conoscenza della lunghezza dell’asse maggiore AB, subito diviso in *quattro* parti uguali:



Per il punto O tracciare l’asse minore, verticale.

Con raggio CO = DO fare centro in C e in D e disegnare due circonferenze che sono tangenti in O.

Fare centro in O e con raggio OA = OB tracciare una circonferenza che risulta tangente in A e in B alle due precedenti.

Sulla retta verticale sono fissati i puti E e F. Da questi ultimi condurre linee passanti per i centri C e D fino a intersecare le prime due circonferenze nei punti G, H, I e L.

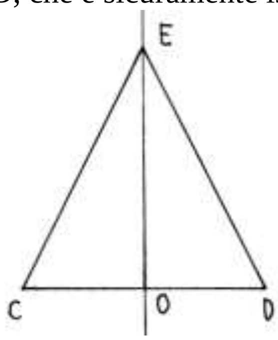
Fare centro in E e in F e con raggio EG disegnare gli archi GH e IL che tagliano la retta verticale nei punti M e N.

La curva AIMLBHNG è l’*ovale aurea*: di seguito spieghiamo il significato di questa espressione.

Per semplificare il calcolo del *rapporto d’aspetto* di questa curva, indichiamo con z la lunghezza di OC. Ne consegue che AB = 4 * OC = 4 * z .

Vale anche la relazione EF = AB = 4 * z .

Consideriamo il triangolo CED, che è sicuramente isoscele:



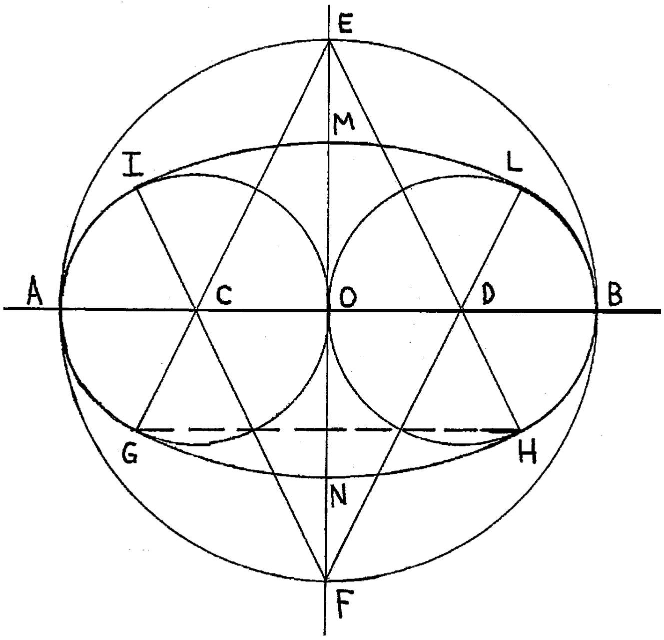
L’altezza EO è lunga 2*z, quanto la base CD. I segmenti CO e OD sono lunghi z.

Il lato CE è l'ipotenusa del triangolo rettangolo CEO ed è lunga:

$CE^2 = CO^2 + EO^2 = z^2 + (2*z)^2 = 5 * z^2$, da cui

$CE = \sqrt{(5 + z^2)} = z * \sqrt{5}$.

Nella figura che segue è evidenziato il triangolo GEH che è isoscele e simile a quello CED:



Il lato EG è lungo:

$EG = EC + CG = EC + CO = z * \sqrt{5} + z = z * (\sqrt{5} + 1)$.

Ma EG è il raggio dei due archi di raccordo GNH e IML.

I segmenti EM e NF hanno uguale lunghezza che è data da:

$EM = NF = EF – EN = EF – EG = 4*z – z * (\sqrt{5} + 1) = z * (3 – \sqrt{5})$.

L'asse minore MN è lungo

$MN = EF – EM – NF = 4*z – 2*[z * (3 – \sqrt{5})] = z * (4 – 6 + 2*\sqrt{5}) = 2*z * (\sqrt{5} – 1)$.

Il rapporto d'aspetto RA è dato da:

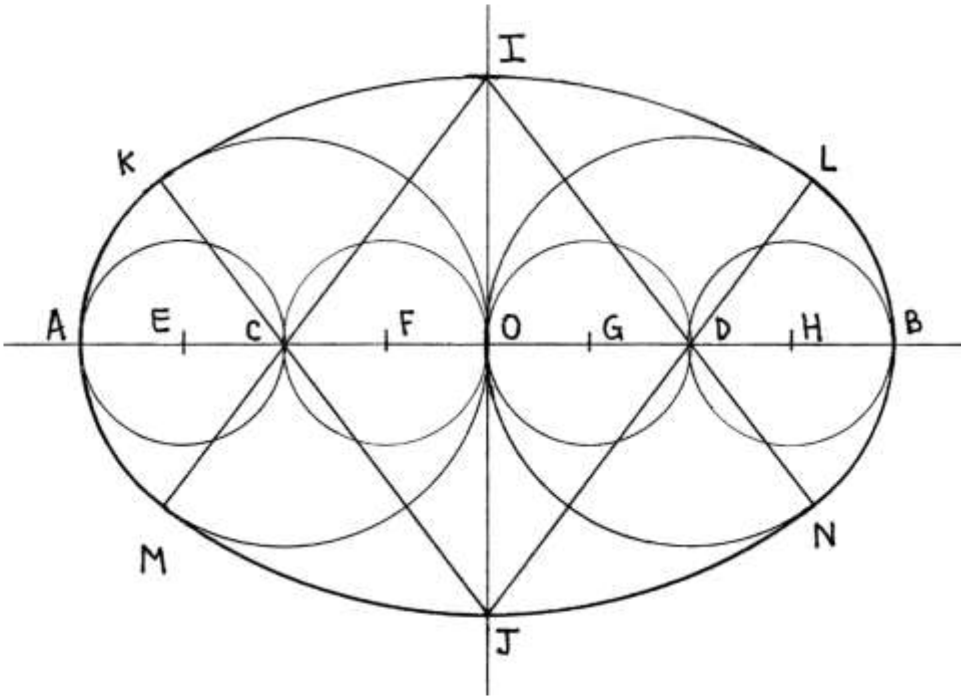
$RA = AB/MN = 4*z/[2*z * (\sqrt{5} – 1)] = 2/(\sqrt{5} – 1) = (\sqrt{5} + 1)/2 \approx 1,618… = \Phi$.

Il rapporto d'aspetto RA è il *numero aureo* Φ: da ciò deriva il nome di *ovale aurea* attribuito a questa curva.

In conclusione, il poligono generatore dell'ovale aurea è il rombo CEDF che ha diagonale maggiore EF lunga il *doppio* di quella minore CD: EF = 2 * CD.

%%%%%%%%%%%%%%%%

La seconda costruzione di un'ovale del Vignola è mostrata nella figura:



Essa utilizza quale poligono generatore un triangolo corrispondente alla terna 3-4-5.
AB è l'asse maggiore che è divo in *quattro* e in *otto* parti uguali:
Per il punto O tracciare una retta perpendicolare a AB.
Per semplificare i successivi calcoli chiamiamo *z* la lunghezza di OC.
Disegnare quattro circonferenze di raggio FO = z/2 facendo centro nei punti E, F, G e H.
Fare centro nei punti C e D e tracciare due circonferenze di raggio CO = DO = z .
Costruire il triangolo rettangolo CIO con lati lunghi nella proporzione

CO : 3 = OI : 4 = CI : 5 .

Con lo stesso metodo disegnare i triangoli rettangoli DIO, CJO e DJO.
Fare centro in I e in J e con raggio IJ tracciare gli archi di raccordo KIL e MJN.
È opportuno notare che i quattro centri dell'ovale – C, D, I e J – sono i vertici del rombo CIDJ e, infine, che i centri I e J giacciono sulla curva stessa.
L'asse maggiore AB è lungo:

AB = 4 * CO = 4 * z .

L'asse minore IJ è lungo:

IJ = IO + OJ = 2 * IO .

A sua volta, IO è il *cateto maggiore* del triangolo rettangolo CIO: conosciamo la lunghezza di CO e il suo rapporto con quella di OI che è:

OI = CO * 4/3 = z * 4/3 .

Pertanto la lunghezza di IJ è:

IJ = 2 * 4/3 * z = 8/3 * z .

Il rapporto d'aspetto vale:

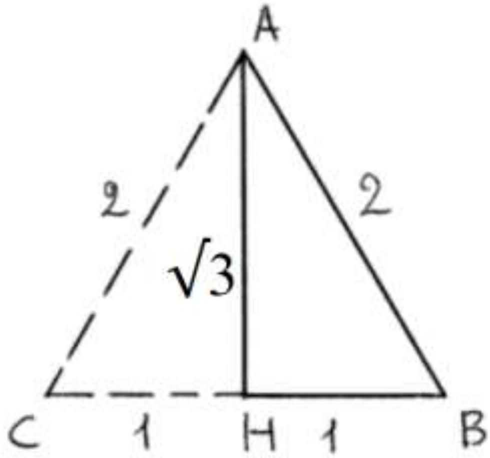
RA = AB/IJ = 4 * z/(8/3 * z) = 12/8 = 3/2 .

- APPROFONDIMENTO -

<u>Altri triangoli rettangoli generatori</u>

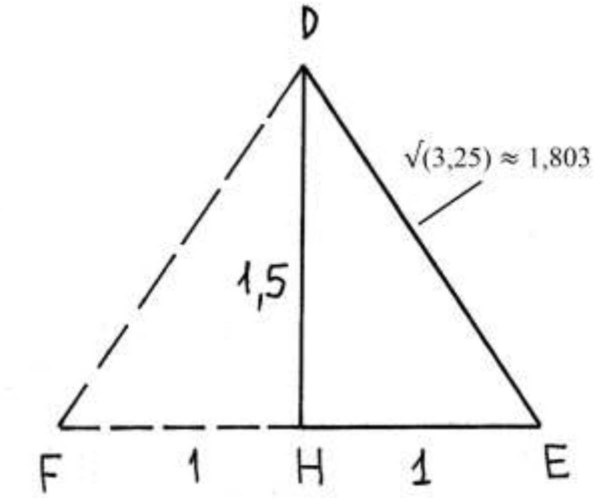
Oltre al triangolo rettangolo 3-4-5, studi recenti (in particolare di Camillo Trevisan) hanno avanzato l'ipotesi che nella progettazione e nella costruzione degli anfiteatri siano stati impiegati altri *triangoli rettangoli generatori*.

Il primo e più semplice è il triangolo semi equilatero:



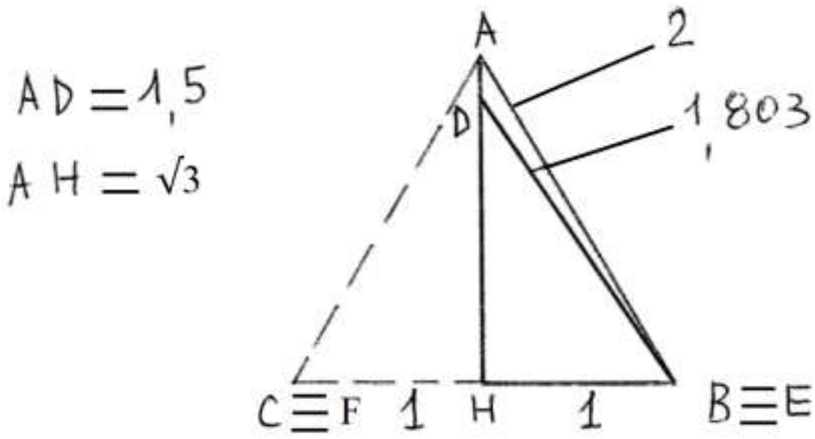
Il triangolo equilatero ABC ha lati convenzionalmente lunghi 2 e l'altezza AH è lunga $\sqrt{3}$. ABH è il triangolo generatore semi equilatero.

Un altro triangolo rettangolo generatore è quello che ha cateti lunghi proporzionalmente a 1(HE) e a 1,5 (DH):



L'ipotenusa di questo secondo triangolo è lunga $\sqrt{(3,25)} \approx 1,803$.

La figura che segue mette a confronto gli ultimi due triangoli (usando la stessa scala di rappresentazione):

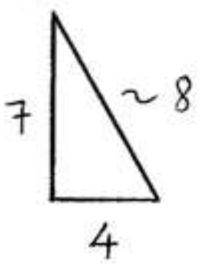


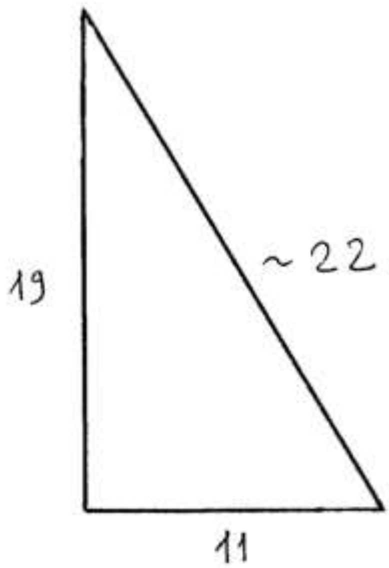
Le due ipotenuse (AB e DE) *non* sono parallele ma convergono nel vertice B ≡ E.

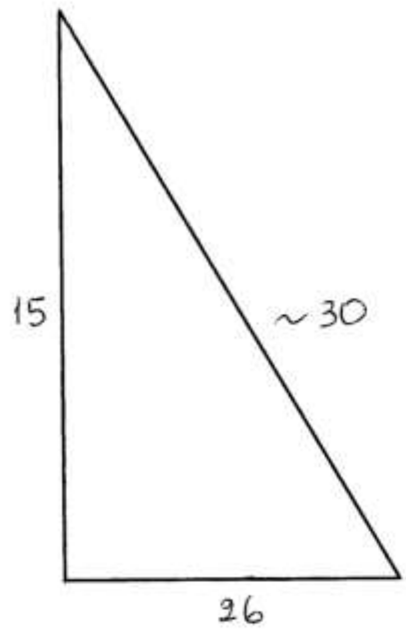
Altri triangoli rettangoli possibili generatori hanno proprietà geometriche assai vicine a quelle del triangolo semi equilatero:

* Il triangolo 4–7– circa 8 (8,0623).
* Il triangolo 11–19–circa 22 (21,9545).
* Il triangolo 15–26–circa 30 (30,0167).

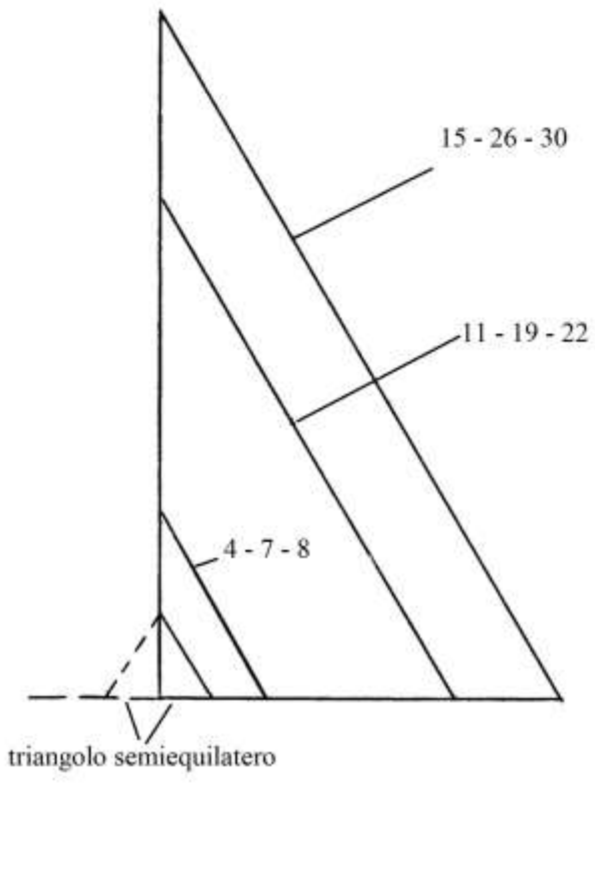
Le figure che seguono descrivono nell'ordine le proprietà di questi tre triangoli:







La figura che segue mette a confronto questi ultimi tre triangoli con il triangolo semi equilatero:



Come è evidente, le ipotenuse dei quattro triangoli rettangoli sono, con un’accettabile approssimazione, quasi *parallele*.

\- -

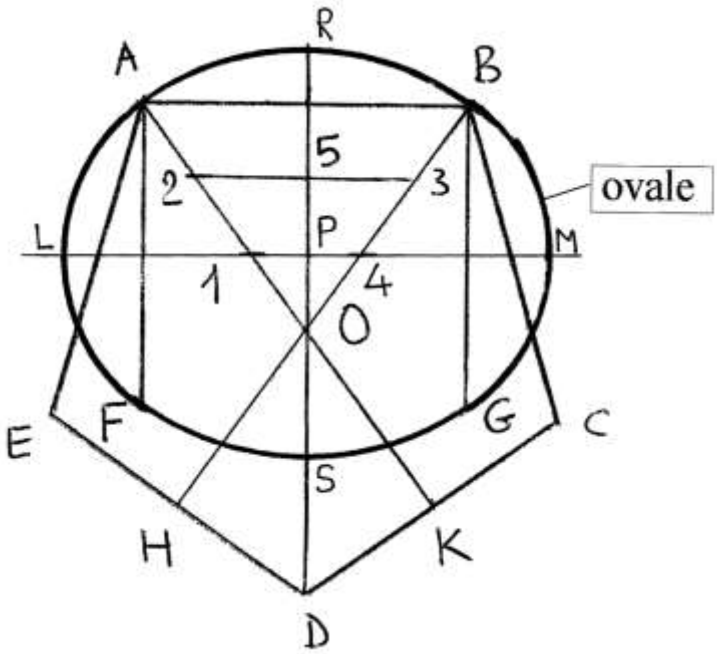
La costruzione con il pentagono regolare

Costruire il pentagono regolare ABCDE e determinare i punti medi dei lati ED e DC: sono, rispettivamente, H e K.

Tracciare i segmenti AK e BH: essi si intersecano in un punto, O, centro della circonferenza *non disegnata* e circoscritta al pentagono.

Per i punti O e D tracciare un segmento.

Dai punti A e B abbassare le perpendicolari al lato AB:



Dividere in *tre* parti uguali i segmenti OA e OB: sono ricavati i punti 1, 2, 3 e 4.

Tracciare il segmento 2-3: esso determina il punto 5.

Fare centro in O e, con raggio OA, disegnare un arco da A a B, primo componente dell'ovale. Con la stessa apertura, fare centro nel punto 5 e tracciare un arco che determina i punti F e G.

Con raggio 1-A, fare centro in 1 e in 4 e disegnare gli archi AF e BG.

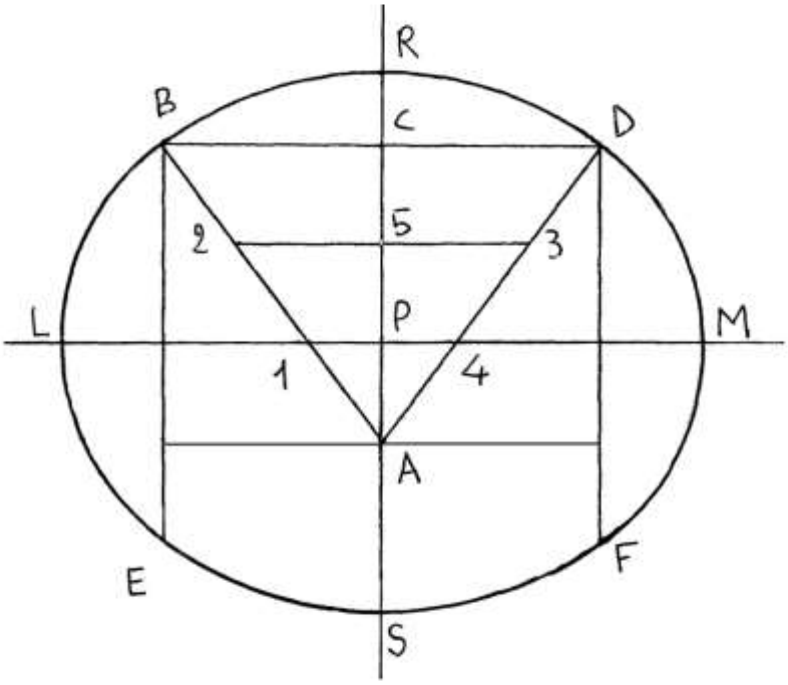
L'ovale *a quattro centri* (O, 5, 1 e 4) è costruita.

I suoi assi sono: LM quello maggiore (passante per i punti 1 e 4) e quello minore RS: essi si incrociano nel centro P.

Questa costruzione è una rielaborazione della soluzione suggerita da Maria Teresa Bartoli ("Il teorema degli anfiteatri: un'ipotesi"), alle pp. 25-32 del volume citato al n. [6] della *Bibliografia*.

La costruzione con il triangolo 3-4-5

Disegnare il triangolo rettangolo ABC: i cateti BC e AC sono lunghi rispettivamente in proporzione a 3 e a 4 e, di conseguenza, l'ipotenusa AB è lunga in proporzione a 5:



Tracciare il triangolo rettangolo ACD, simmetrico rispetto a ACB lungo il cateto AC.
Prolungare verso l'alto e verso il basso il cateto AC.
Dai punti B e D abbassare le perpendicolari al segmento BD.
Dividere in *tre* parti uguali i segmenti AB e AD: sono stabiliti i punti 1, 2, 3 e 4.
Collegare i punti 2 e 3 per fissare il punto 5.
Con centro in A, e raggio AB, tracciare un arco da B a D. Con la stessa apertura, fare centro in 5 e disegnare un arco che determina i punti E e F.
Con apertura uguale a 1-B (e a 4-D), fare centro nei punti 1 e 4 e tracciare gli archi BE e DF.
L'ovale *a 4 centri* (A, 5, 1 e 4) è completata.
LM è l'asse maggiore e RS è quello minore e si incontrano nel centro P.

- APPROFONDIMENTO -

Il rapporto d'aspetto del triangolo 3-4-5

Per la costruzione dell'ovale basato sul triangolo rettangolo 3-4-5 sono stati usati due raggi:
* il raggio AB ;
* il raggio 1-B .

Per semplificare i calcoli usiamo le lunghezze *convenzionali* dei lati del triangolo ACD:
* BC → 3 = a ;
* CA → 4 = b ;
* BA → 5 = c .

L'asse maggiore LM è lungo

LM = 2 * LP .

A sua volta, LP è dato da:

LP = 1-P + L-1 .

Il triangolo A-1-P è simile a quello ABC.
Il segmento 1-P è lungo:

1-P = 1/3 * BC = 1/3 * a .

Il segmento L-1 è:

L-1 = 1-B = 2/3 * c .

In conclusione, LP è:

LP = 1/3 * a + 2/3 * c .

L’asse maggiore è lungo:

LM = 2 * LP = 2 * (1/3 * a + 2/3 * c) .

L’asse minore TS è lungo:

RS = 2 * RP = 2 * (AR – AP) = 2 * (AB – AP) = 2 * c – 1/3 * b) .

Sostituendo a *a*, *b* e *c* i loro valori convenzionali le formule precedente divengono:

LM = 2 * (1/3 * 3 + 2/3 * 5) = 26/3 .

RS = 2 * (5 – 1/3 * 4) = 22/3 .

Il *rapporto d’aspetto* RA è:

RA = LM/RS = (26/3)/(22/3) = 26/22 = 13/11 .

La frazione 13/11 è un *numero razionale*.

Con gli esempi che sono di seguito mostrati riguardo alla costruzione dell’ovale basata sul triangolo pitagorico 5-12-13 potremo confermazione la validità della seguente affermazione: *utilizzando triangoli generatori pitagorici le lunghezze dei raggi e quelle degli assi di simmetria delle ovali sono rappresentate da numeri interi e i loro rapporti d’aspetto sono espressi da numeri razionali*.

Un numero è detto *razionale* se è espresso dal rapporto di due *numeri interi*, come è il caso di 13/11.

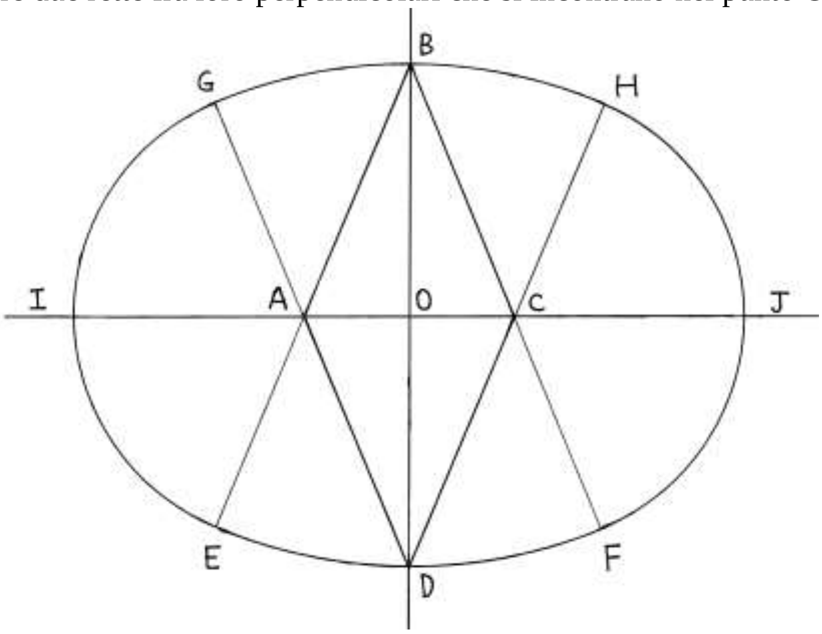
- -

La costruzione dell’ovale con il triangolo 5-12-13

Il triangolo 5-12-13 è *pitagorico*:

$5^2 + 12^2 = 13^2 \quad \rightarrow \quad 25 + 144 = 169$.

Tracciare due rette fra loro perpendicolari che si incontrano nel punto O:



Costruire il triangolo rettangoloABO che ha lati in proporzione alla terna:

* AO → 5 = a ;

* BO → 12 = b ;

* AB → 13 = c .

Disegnare gli altri tre triangoli rettangoli simmetrici rispetto a quello ABO: sono OBC, AOD e OCD.

Prolungare le ipotenuse dei quattro triangoli.

ABCD è un *rombo* e i suoi quattro vertici sono i centri degli archi di circonferenza che formano l'ovale.

Fare centro in B e in D e con raggio BD tracciare due archi che incrociano i prolungamenti delle ipotenuse: sono EDF e GBH.

Con centri in A e in C e raggio AE disegnare gli archi di raccordo EG e FH.

I due ultimi archi tagliano la retta orizzontale nei punti I e J che sono gli estremi dell'asse maggiore IJ.

L'asse minore è lungo:

BD = BO + OD = 2 * BO = 2 * b .

L'asse maggiore IJ è lungo:

IJ = 2 * OI .

A sua volta, OI è dato da:

OI = IA + AO = AG + AO = AG + a .

Il raggio AG è lungo:

AG = DG – DA = DB – DA = 2 * b – c .

Sostituendo questa ultima espressione in quella che fornisce la lunghezza di OI si ottiene:

OI = (2 * b – c) + a .

L'asse maggiore è:

IJ = 2 * OI = 2 * (2 * b – c + a) .

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Per semplificare i calcoli sostituiamo alle lettere *a*, *b* e *c* le relative lunghezze convenzionali dei lati del triangolo generatore ABO; le lunghezze degli assi sono così espresse:

BD = 2 * b = 2 * 12 = 24 ;

IJ = 2 * (2 * b – c + a) = 2 * (2*12 – 13 + 5) 2 * 16 = 32 .

Il rapporto d'aspetto RA vale:

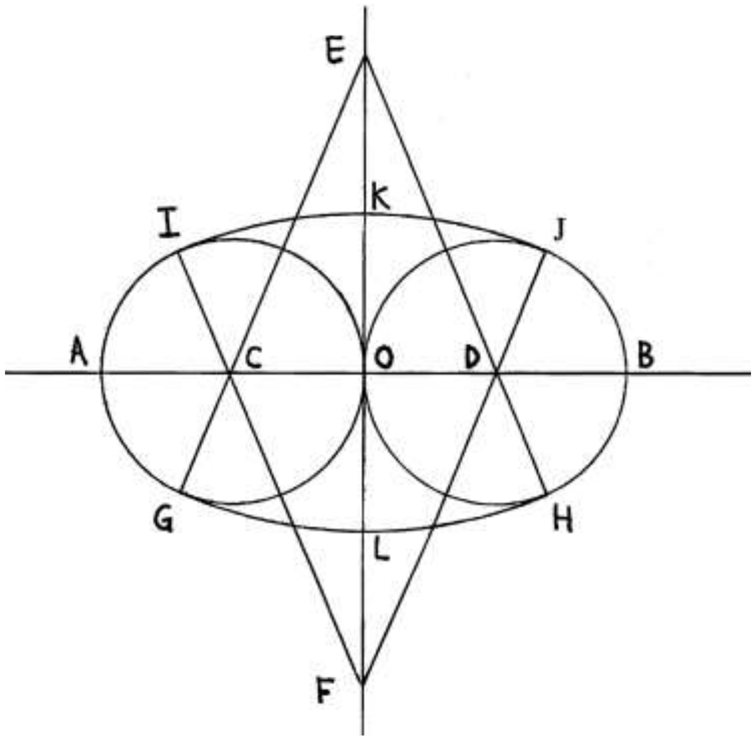
RA = IJ/BD = 32/24 = 4/3 .

Anche in questo caso il rapporto d'aspetto è espresso dal *numero razionale 4/3*.

- APPROFONDIMENTO -

<u>Prima variante dell'ovale 5-12-13</u>

La figura che segue presenta una prima variante della costruzione dell'ovale con il triangolo generatore 5-12-13.



L’asse maggiore AB è lungo *quattro* volte il cateto minore del triangolo generatore.
Disegnare i quattro triangoli rettangoli simmetrici OCE, ODE, OCF e ODF.
Le lunghezze convenzionali dei lati dei quarttro triangoli sono:

* CO = 5 = a ;
* OE = 12 = b ;
* CE = 13 = c .

Questa variante richiede la fissazione della lunghezza dell’asse minore KL: i punti K e L sono quelli *medi* delle altezze OE e OF. Quindi KL è lungo:

KL = KO + OL = EO/2 + OF/2 = b/2 + b/2 = b = 12 .

Anche questa costruzione utilizza *quattro* centri che sono i vertici del rombo CEDF.
Prolungare le ipotenuse dei quattro triangoli rettangoli.
Fare centro nei punti E e F con raggio EL = FK e disegnare due archi di circonferenza che tagliano i prolungamenti delle ipotenuse: sono GLH e IKJ.
Con raggio CA fare centro in C e in D e tracciare gli archi IAG e HBJ.
L’asse maggiore AB è convenzionalmente lungo:

AB = 4 * CO = 4 * 5 = 20 ,

Il rapporto d’aspetto RA vale:

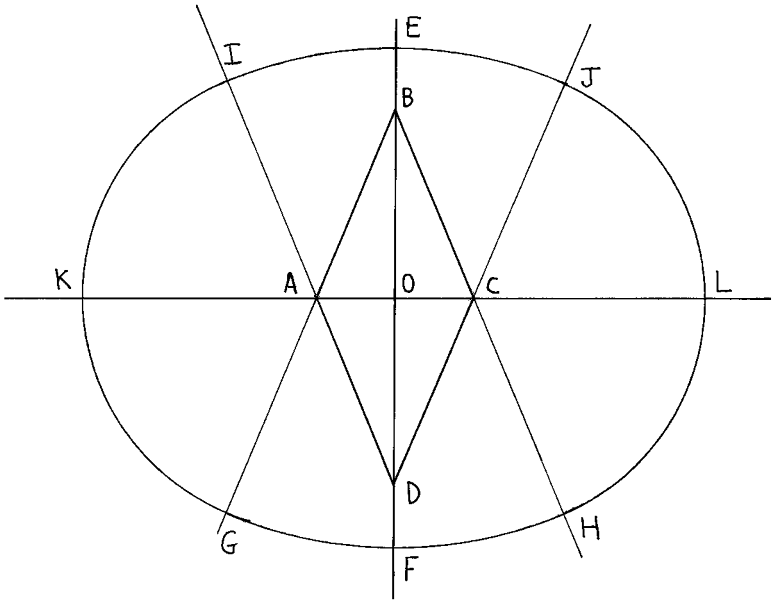
RA = AB/KL = 20/12 = 5/3 .

Anche in questo caso il rapporto d’aspetto è espresso dal numero razionale 5/3 .

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

<u>Seconda variante dell’ovale 5-12-13</u>

Questa seconda variante della costruzione dell’ovale con il triangolo generatore 5-12-13 muove dalla fissazione della lunghezza dell’asse minore.



Tracciare due rette perpendicolari che si tagliano nel punto O.

Costruire i quattro triangoli rettangoli 5-12-13 che formano il rombo ABCD.

I lati dei triangoli hanno lunghezze convenzionali:

* OA = 5 = a ;
* OB = 12 = b ;
* AB = 13 = c .

Fissare la lunghezza dell'asse minore EF stabilendo i due punti E e F all'identica distanza

BE = DF = d , con *d* che è un numero intero.

Prolungare le ipotenuse dei quattro triangoli rettangoli.

Fare centro in B e in D con raggio BF = ED e disegnare gli archi GFH e IEJ.

Con centro in A e in C e raggio AG tracciare gli archi di raccordo GI e HJ: essi incontrano la retta orizzontale nei punti K e L che sono gli estremi dell'asse maggiore.

L'asse minore EF è lungo:

EF = EB + BO + OD + DF = 2 * b + 2 * d = 2 * 12 + d) .

L'asse maggiore KL è:

KL = KA + AO + OC + CL = 2 * KA + 2 * a .

La lunghezza di KA è data da:

KA = AI = DI – DA = DE – DA = (2 * b – d) – c .

Sostituendo si ha:

KL = 2 * [(2 * b + d) – c] + 2 * a = 2 * (2 * 12 + d – 13 + 5) = 2 * (16 + d) .

Il rapporto d'aspetto vale:

RA = KL/EF = 2 * (16 + d)/[(2 + 12 + d)] = (16 + d)/(12 + d) .

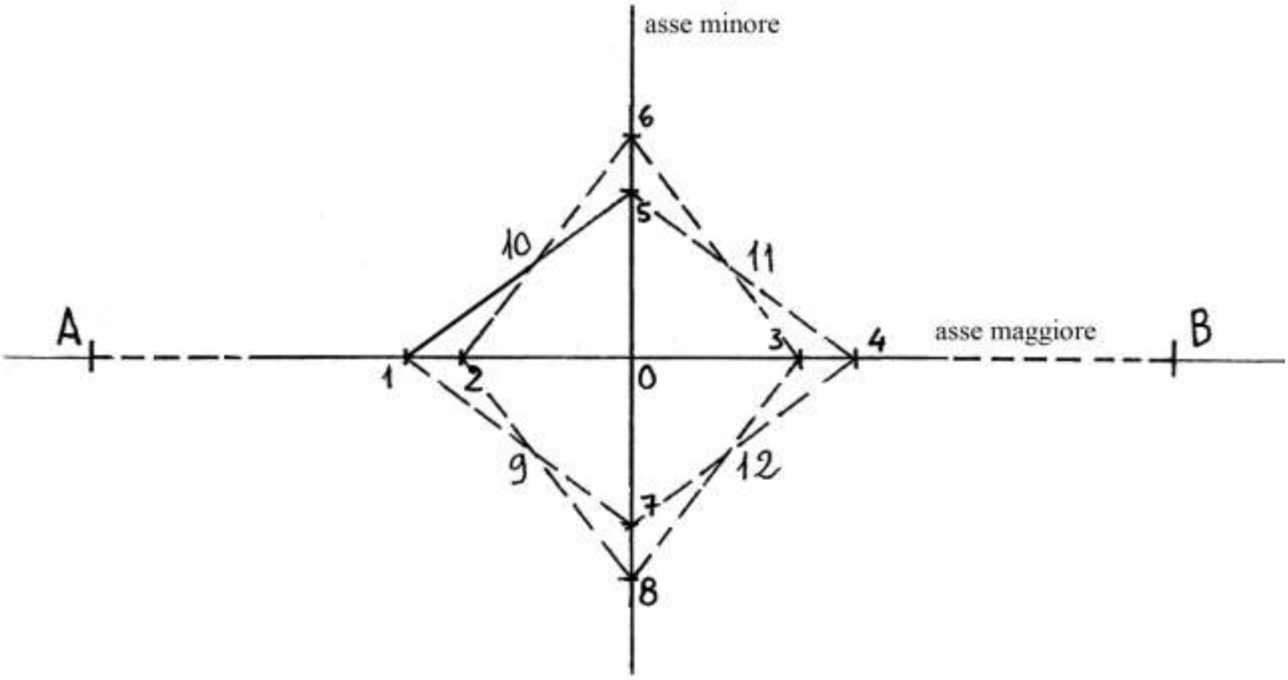
Attribuendo alla variabile *d* valori interi compresi fra 1 e 10, calcoliamo le lunghezze convenzionali degli assi e il rapporto d'aspetto per ovali generate dal triangolo 5-12-13:

d	asse maggiore	asse minore	rapporto d’ aspetto (RA)
1	34	26	17/13
2	36	28	9/7
3	38	30	19/15
4	40	32	5/3
5	42	34	21/17
6	44	36	11/9
7	46	38	23/19
8	48	40	6/5
9	50	42	25/21
10	52	44	13/11

- -

L’ovale a 8 centri con il triangolo 3-4-5

La figura che segue descrive la costruzione iniziale dell’ovale a 8 centri; gli assi, maggiore (AB di lunghezza data) e minore, si intersecano ad angolo retto nel punto O, centro della curva:



Il triangolo 1-5-O è il *triangolo generatore*, è rettangolo ed ha i lati nel rapporto 3:4:5 (e cioè le tre lunghezze formano la più semplice *terna pitagorica*).

Il cateto minore O-5 ha lunghezza 3, il cateto maggiore 1-O è lungo 4 e l'ipotenusa 1-5 è lunga 5, come risulta dall'applicazione del teorema di Pitagora.

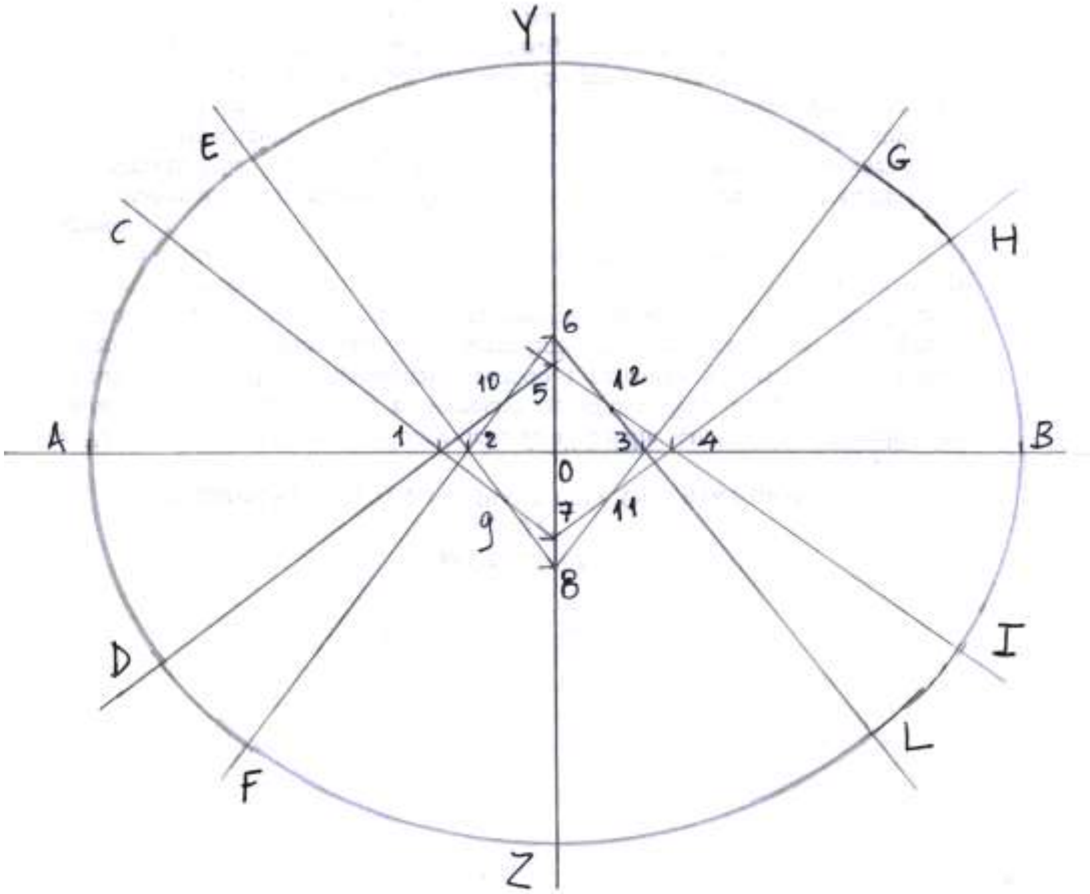
Sugli assi sono fissati i punti 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8 che opportunamente uniti formano ben *otto* triangoli generatori 3-4-5, *sette* dei quali sono tratteggiati nella figura: quattro hanno il cateto maggiore orizzontale e gli altri quattro lo hanno verticale.

Le otto ipotenuse si incrociano nei punti 9, 10, 11 e 12.

La seguente tabella riporta le lunghezze dei segmenti che in figura sono determinati dai punti O, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8:

cateto minore	cateto maggiore	ipotenusa	
[lunghezza proporzionale a 3]	[lunghezza proporzionale a 4]	[lunghezza proporzionale a 5]	
O-2	O-1	1-5	2-6
O-5	O-6	1-7	2-8
O-3	O-4	3-6	4-5
O-7	O-8	3-8	4-7

La figura che segue suggerisce un esempio di costruzione di un’ovale i cui centri sono i punti: 1 – 4 – 9 – 10 – 8 – 6 – 11 e 12. La costruzione riprende il metodo esposto nella precedente figura:



Per realizzare la costruzione è necessario fissare la lunghezza dell'asse maggiore, AB. Gli anfiteatri romani avevano un rapporto fra la lunghezza dell'asse maggiore e quella dell'asse minore assai variabile, fra 1,25 e 1,8, con una tendenza al rapporto 1,6 (o 5/3 ≈ 1,666).

Le operazioni successive sono così descritte. Disegnare le linee passanti per i punti 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8. Esse determinano i punti 9, 10, 11 e 12: come già scritto in precedenza, questi ultimi e i punti 1, 4, 6 e 8 sono i centri degli archi di circonferenza che raccordati formano l'ovale.

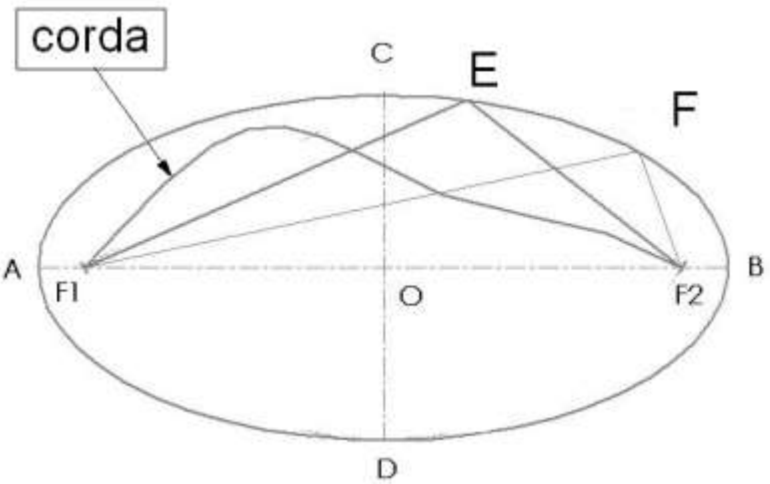
Con centro in 1 e raggio 1-A si traccia l'arco da C a D. Con centro in 9 e raggio 9-C si disegna l'arco da C a E: con la stessa apertura e centro in 10 si esegue l'arco DF.

Con centro in 8 e raggio 8-E si disegna l'arco da E a G.

La costruzione viene completata ripetendo le stesse operazione nella parte destra.

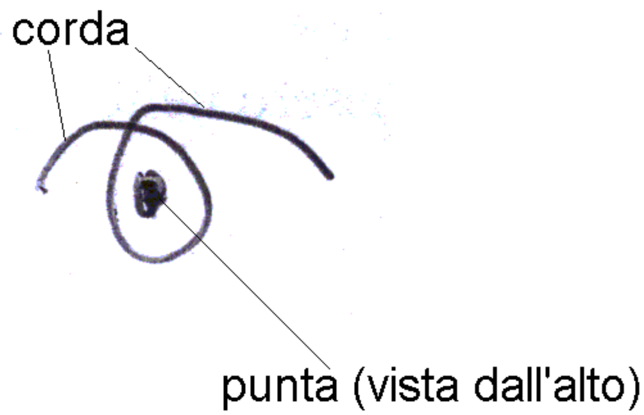
L’ellisse del giardiniere

Non sembra che i Romani conoscessero una tecnica simile a quella impiegata dai giardinieri per realizzare un'ellisse con l'uso di una corda, di due paletti conficcati nel terreno e di una punta per tracciare il solco:



AB e CD sono gli assi. I punti F1 e F2 sono i *fuochi* dell'ellisse: in essi sono conficcati i due paletti; l'ellisse è la curva i cui punti possiedono una proprietà: la somma delle distanze di un punto dai due fuochi è costante e lunga quanto l'asse maggiore AB.

Ai due paletti conficcati nel terreno sono legati gli estremi di una corda di lunghezza uguale a AB. In un punto qualsiasi della corda è avvolta una punta fissa che scorre in un semplice nodo:



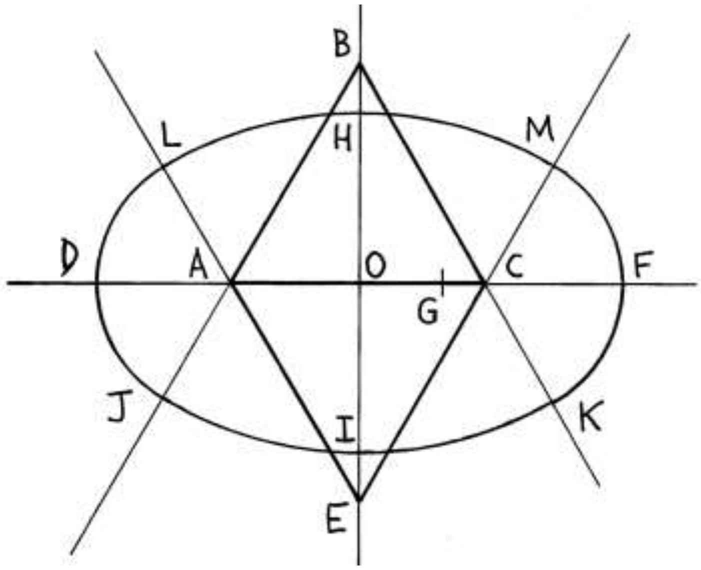
La prima descrizione del *metodo del giardiniere* è contenuta in un piccolo trattato ("*Paradossi di meccanica*"), scritto dal matematico e architetto bizantino Antemio di Tralle (circa 474 – 534), uno dei due progettisti e costruttori della basilica di Santa Sofia a Costantinopoli (il secondo fu Isidoro di Mileto). Di questo testo sono noti solo un frammento contenente quattro problemi fra i quali non è presente la tracciatura dell'ellisse del giardiniere. Il metodo era noto al matematico arabo al-Kindi (801 circa – 873), all'astronomo persiano al-Sigistani (X secolo) e al matematico italiano Guidobaldo del Monte (1545 – 1607).

La tracciatura di archi di circonferenza di grandi dimensioni è una tecnica molto usata per la realizzazione delle curve dei tracciati ferroviari e di quelli stradali: nel primo caso il raggio usato è molto più grande di 100 m (fino a 1000 m). Per aumentare la sicurezza, nei binari ferroviari la rotaia esterna è generalmente rialzata rispetto all'altra.

Le curve stradali sono tracciate con raggi più piccoli di quelli usati per i tracciati ferroviari.

L’ovale di Bianchi

Paolo Federico Bianchi è stato un architetto milanese vissuto nel XVIII secolo. Nel 1767 ha pubblicato, sempre a Milano, un trattato in *due tomi*: “Architettura civile”. Fra le altre costruzioni contenute ve ne è una relativa a un’ovale:



Tracciare una retta orizzontale e su di essa fissare il segmento AC che ha lunghezza uguale alla *metà* di quella dell’asse maggiore.

Costruire i triangoli equilateri simmetrici ABC e ACE. Prolungare le loro ipotenuse come fatto in figura.

Disegnare la retta passante per B e per E che taglia in O l’asse maggiore.

DF è l’asse maggiore: DF = 2*AC = 2*a .

Sul lato AC fissare il punto G a distanze: OG = 2/3 * OC e GC = 1/3 * OC.

Misurare la lunghezza di GF e riportarla da O sull’asse verticale: sono stabiliti i punti H e I.

HI è l’asse minore la cui lunghezza è legata a quella dell’asse maggiore:

OI = GF = GC + CF = 1/6 * AC + ½ * AC = 4/6 * AC = 2/3 * AC = 1/3 * DF .

L’asse minore HI è lungo:

HI = 2 * OI = 2 * (1/3) * DF = 2/3 * DF = 2*b .

L’asse maggiore è lungo DF = 2*a per cui HI = 2/3 * 2*a = 4/3 * a .

Ne risulta: 2*b = 4/3 *a e b = 2/3 * a .

Con raggio EH = BI fare centro in H e in I e tracciare gli archi che intersecano i prolungamenti delle ipotenuse dei triangoli: sono fissati i punti J, K, L e M.

Fare centro nei punti A e C e con raggio AD = CF disegnare gli archi di circonferenza JDL e KFM.

- APPROFONDIMENTO -

Il rapporto d’aspetto vale:

RA = DF/HI = 2*a/(4/3 * a) = 3/2 .

Il valore di *h* è:

OC = h = a/2 .

Quello di *k* è:

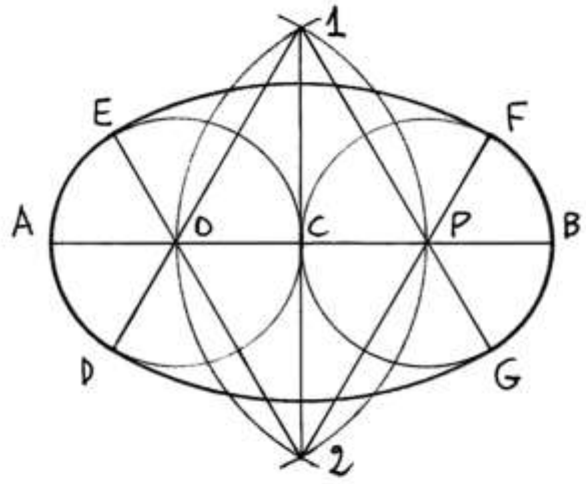
OB = k = GF = 1/3 * 2+a = 2/3 * a .

- -

Ovale di Mott

Una variante del metodo di Vignola è stata proposta dall'inglese Leslie C. Mott nel 1976. Essa è basata sul rombo generatore O-1-P-2 formato dall'unione di due triangoli equilateri di uguali dimensioni uniti lungo il lato comune OP giacente sull'asse maggiore dell'ovale.

I vertici del rombo sono i *quattro* centri dell'ovale.



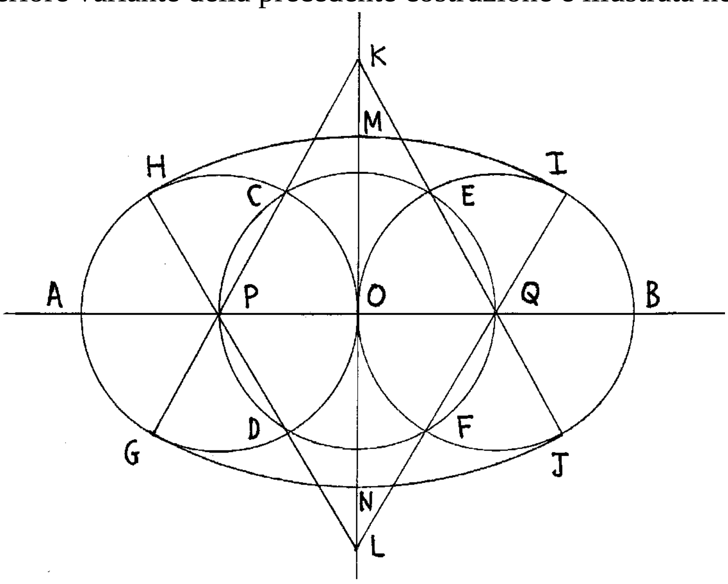
L'asse maggiore AB deve essere diviso in 4 parti uguali e i punti O, C e P sono i suoi divisori.

Con apertura OC, fare centro nei punti O e P e tracciare due circonferenze. Con centro in O e in P e raggio OP, disegnare gli archi che si intersecano nei punti 1 e 2: tracciare l'asse minore 1-C-2, i due *triangoli equilateri* O-1-P e O-2-P e i prolungamenti delle loro ipotenuse, fino a intersecare le due circonferenze nei punti D, E, F e G.

Per completare l'ovale, fare centro nei punti 1 e 2 con raggio 1D e tracciare gli archi EF e DG.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Una ulteriore variante della precedente costruzione è illustrata nella figura che segue:



Anche questo metodo usa quale generatore il rombo formato da due triangoli equilateri.

L'asse orizzontale, AB, è diviso in *quattro* parti uguali.

Con raggio uguale a AP, lungo ¼ di AB, fare centro nei punti P, O e Q e disegnare tre circonferenze: esse si intersecano nei punti C, D, E e F.

Tracciare le linee passanti per le coppie di punti P-C, P-D, E-Q e F-Q.

Questi segmenti tagliano le circonferenze nei punti G, H, I e J e si incontrano in K e L.

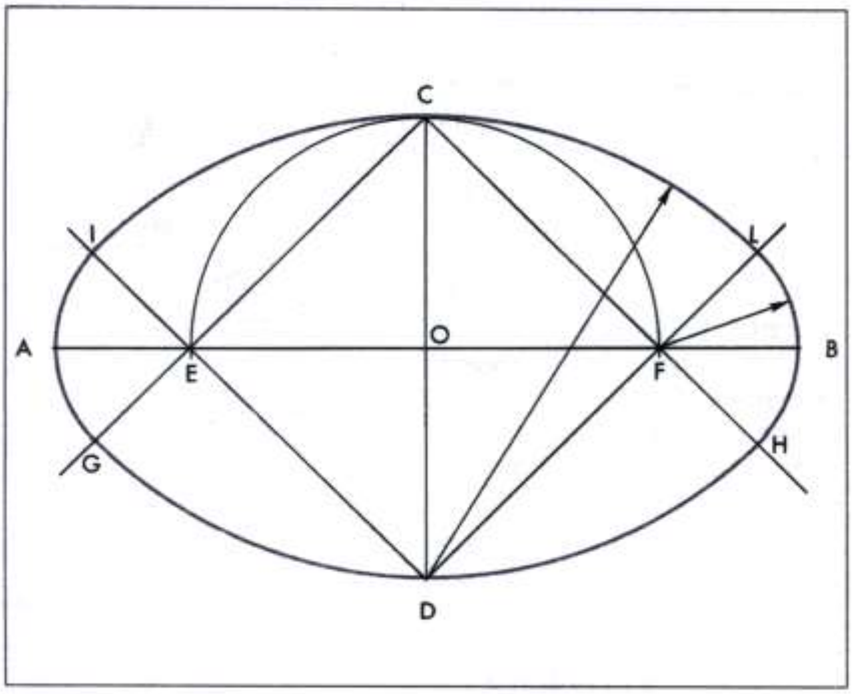
Per K e L passa una retta sulla quale giace l'asse minore dell'ovale.

Fare centro nei punti K e L con raggio KG e disegnare gli archi di raccordo GJ e HI. Essi incontrano la retta verticale in M e N: MN è l'asse minore dell'ovale.

La curva è la linea AHMIBJNG.

<u>Costruzione dell'ovale dato l'asse minore uguale alla diagonale di un quadrato</u>

La diagonale di un quadrato è l'asse minore dell'ovale da costruire:



Disegnare il segmento CD, verticale: è l'asse minore dell'ovale. Per il suo punto medio O tracciare la perpendicolare, orizzontale, sulla quale si trova l'asse maggiore da individuare. Fare centro in O e, con raggio uguale a OD, disegnare un arco di circonferenza che interseca l'asse maggiore nei punti E e F.

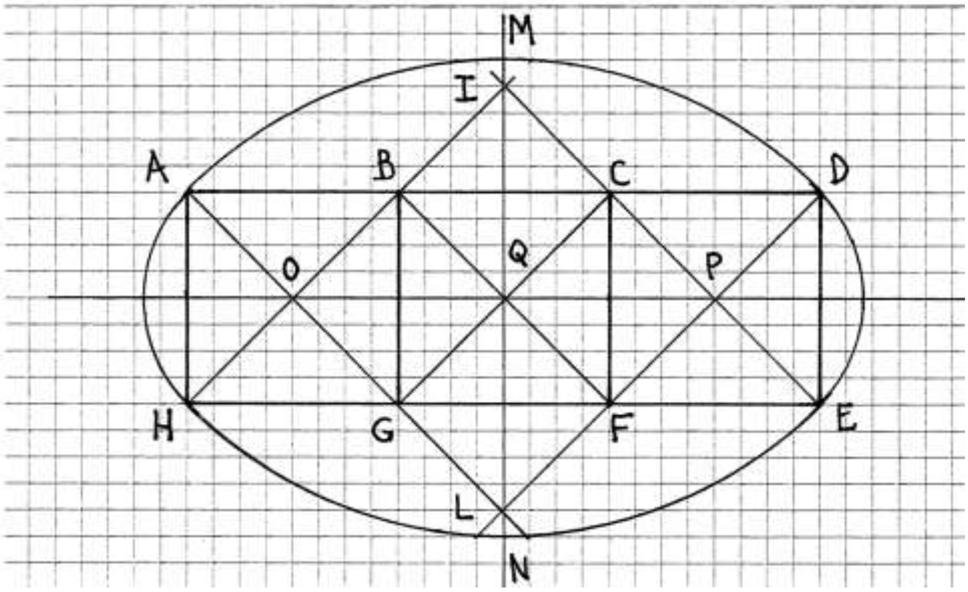
Disegnare i segmenti passanti per C ed E, per C e F, per D ed E e per D e F: l'asse CD è una diagonale del quadrato CFDE.

Con centro in C e poi in D, con apertura di compasso uguale a CD, tracciare due archi fino ad determinare i punti G, H, I e L.

Con apertura uguale a EI, fare centro in E e in F e disegnare due archi che fissano gli estremi A e B dell'asse maggiore e completano la costruzione dell'ovale.

Ovale con tre quadrati

Disegnare tre quadrati di uguali dimensioni e affiancati come in figura:



Tracciare le diagonali dei tre quadrati. I punti O e P sono i centri rispettivamente del quadrato di sinistra e di quello di destra. Q è il centro del quadrato centrale.

I punti I e L sono ottenuti dall'intersezione dei prolungamenti delle diagonali.

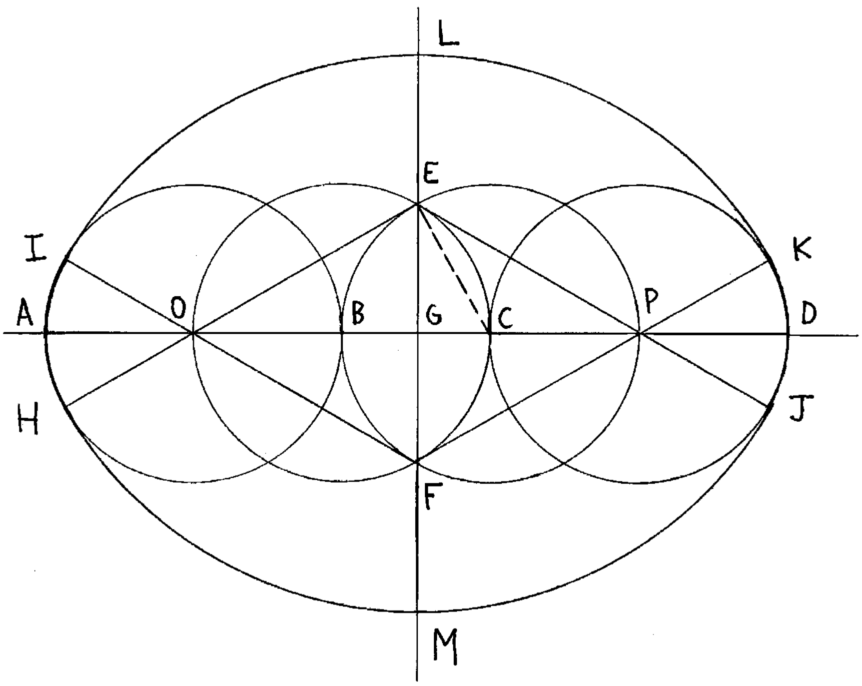
Facendo centro in O e in P, con raggio OA, tracciare gli archi AH e DE.

Con raggio IH fare centro in I e in L e disegnare gli archi AD e HE.

La figura curva che si ottiene è molto più allungata di quella ricavata con la precedente costruzione.

Ovale con 4 cerchi

Tracciare una retta orizzontale e fissarvi il punto, estremo dell’asse maggiore.



È dato il raggio delle quattro circonferenze: r = AO.

Disegnare la prima circonferenza con centro in O. Inn successione tracciare le altre tre circonferenze con centri in B, C e P. AD è l'asse maggiore dell'ovale.

I punti E e F sono originati dall'intersezione delle circonferenze di centri B e C.

Per i punti E e F disegnare una retta verticale che incontra l'asse maggiore nel suo punto medio, G.

Dai punti E e F condurre le rette passanti per i centri O e P: esse incontrano le due circonferenze più esterne nei punti H, I, J e K.

Con raggio EH fare centro in E e in F e tracciare gli archi di raccordo HJ e IK.

I due archi tagliano la retta verticale in L e in M, che sono gli estremi dell'asse minore.

Disegnare la corda EC.

Il raggio EH è lungo:

$$EH = OH + EO = r + EO.$$

A sua volta, EO è il cateto maggiore del triangolo rettangolo OEC inscritto nel semicerchio OECB.

I segmenti BG e GC hanno uguale lunghezza:

$$BG = GC = BC/2 = r/2 .$$

Ne consegue che OEF è un *triangolo equilatero* di cui è nota l'altezza OG = h :

$$h = OG = OC – GC = 2*r – r/2 = 3/2 * r .$$

Il lato di un triangolo equilatero è ricavabile dalla formula:

$$lato = 2/\sqrt{3} * h = 2/\sqrt{3} * 3/2 * r = r * \sqrt{3} .$$

Il raggio EH è:

$$EH = OH + EO = r + lato = r + r * \sqrt{3} = r * (\sqrt{3} + 1) .$$

L'asse maggiore AD è lungo:

$$AD = AO + OB + BC + CP + PD = 5 * r .$$

A sua volta, l'asse minore LM è lungo:

$$LM = LE + EM = LE + EH .$$

Il segmento LE è lungo quanto FM ed è dato da:

$$LE = LF – EF = r * (\sqrt{3} + 1) – r*\sqrt{3} = r .$$

Ne consegue:

$$LM = r + r * (\sqrt{3} + 1) = r * (\sqrt{3} + 2) .$$

Il rapporto d'aspetto RA vale:

$$RA = AD/LM = 5*r/[r * (\sqrt{3} + 2)] = 5/(\sqrt{3} + 2) \approx 1.3397 .$$

L'asse maggiore AD è lungo 5*r = 2*a, da cui r = 2/5 * a (con *a* lunghezza del semiasse maggiore).

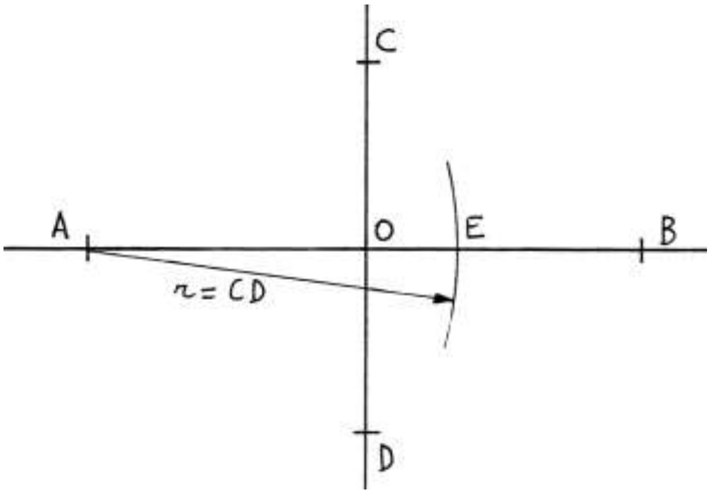
Le costanti *h* e *k* valgono:

$$GP = h = 3/2 * r = 3/2 * 2/5 * a = 3/5 * a \quad e$$
$$GE = k = lato/2 = r * (\sqrt{3})/2 = (2/5 * a) * (\sqrt{3})/2 = a * * (\sqrt{3})/5 .$$

<u>Ovale secondo Slantz</u>

Questa costruzione è dovuta all'americano Frederick W. Slantz (professore presso il Lafayette College in Pennsylvania nel XX secolo).

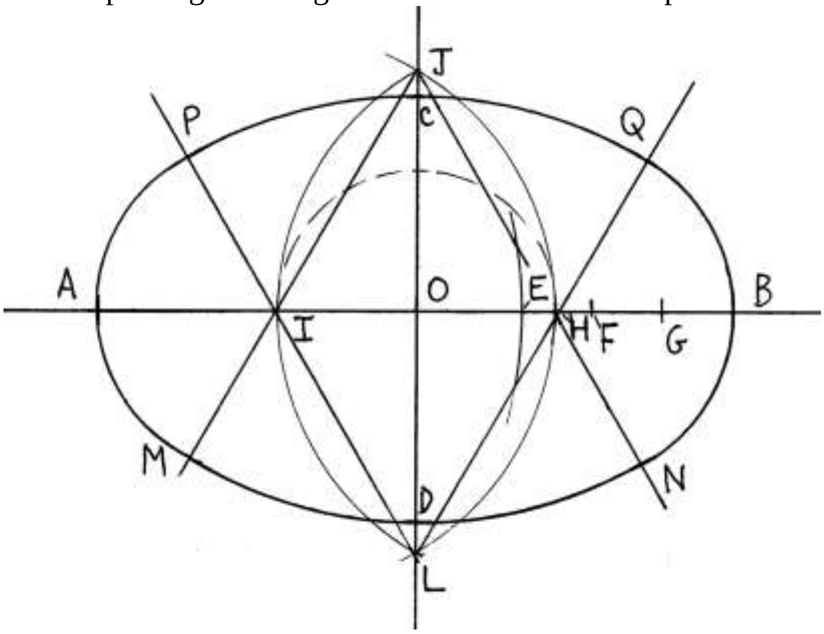
A differenza di altri metodi, questa costruzione muove dalla conoscenza delle lunghezze dei due assi, AB il maggiore e CD il minore:



Fra le lunghezze dei due assi non esiste alcuna relazione, tranne quella che impone l'asse maggiore più lungo di quello minore.

Con raggio CD fare centro in e tracciare un arco che taglia AB in un punto, E.

Dividere in *tre* parti uguali il segmento EB: sono stabiliti i punti F e G.



Con il compasso misurare la lunghezza di EG e con questa fare centro in O e disegnare una semicirconferenza che taglia l'asse maggiore nei punti H e I.

Sul segmento IH costruire i triangoli equilateri IJH e IHL e prolungare le loro ipotenuse.

Fare centro nei punti J e L e con raggio JD = LC tracciare due archi di circonferenza che passano per i punti C e D e tagliano i prolungamenti delle ipotenuse dei triangoli nei punti M, N, P e Q.

Con raggio IA = EB disegnare gli archi MAP e QBN.

Il lato IH è lungo:

$IH = 2 * OH = 2 * EG$.

A sua volta EG è:

$EG = 2/3 * EB = 2/3 * (AB – CD) = 2/3 * (2*a – 2*b) = 4/3 * (a – b)$.

Ne consegue:

$IH = 2 * 4/3 * (a – b) = 8/3 * (a – b)$.

Il valore di *h* è:

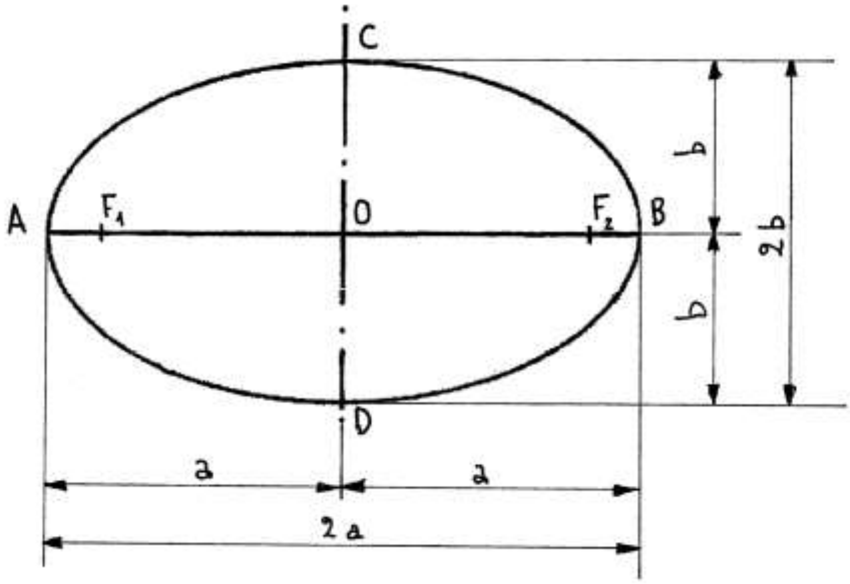
$OH = h = 4/3 * (a – b)$ e quello di *k* è:

$OJ = k = (\sqrt{3})/2 * IH = (\sqrt{3})/2 * 8/3 (a – b) = 4 * (\sqrt{3})/3 * (a – b)$.

PERIMETRI E AREE DI ELLISSI E OVALI

Perimetro di un'ellisse

La figura che segue mostra l'ellisse ACBD:



L'asse maggiore AOB è lungo *2*a* e quello minore è *2*b*.
Il perimetro *p* dell'ellisse è calcolato con la formula *approssimata*

$$[I] \qquad p \approx 2 * \pi * \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \approx \pi * \sqrt{2*(a^2 + b^2)} \ .$$

Questa formula fornisce un risultato approssimato *per eccesso*.

Altre formule *approssimate* per il calcolo del perimetro *p* dell'ellisse sono fornite dal Bartsch a p. 268 del suo manuale:

$$[II] \qquad p \approx \pi * [3/2 * (a + b) - \sqrt{(a*b)}]$$

$$[III] \qquad p \approx \pi/2 * [a + b + \sqrt{2*(a^2 + b^2)}]$$

Le tre formule forniscono risultati abbastanza vicini.

Il matematico indiano Srinivasa Aiyangar Ramanujan (1887-1920) propose le due seguenti formule approssimate:

$$[IV] \qquad p \approx \pi\left(3(a+b) - \sqrt{(3a+b)(a+3b)}\right)$$

$$[V] \qquad p \approx \pi(a+b)\left(1 + \frac{3h}{10 + \sqrt{4-3h}}\right).$$

Nelle due formule compare la costante *h* che è data da

$$h = \frac{a-b}{a+b}$$

\- APPROFONDIMENTO -

<u>Confrontiamo le *cinque* formule</u>

Calcoliamo la lunghezza dell'ellisse contenuta nella precedente figura applicando le *cinque* formule.

Fissiamo alcuni dati:

* a = 39
* b = 22
* (a + b) = 61
* (a – b) = 17
* h = 17/61 ≈ 0,27868 .

La tabella che segue riassume i valori approssimati ottenuti:

formula	lunghezza dell'ellisse
I	198,839
II	195,339
III	195,189
IV	195,276
V	203,705

I risultati offerti dalla II, dalla III e dalla IV formula sono pressoché coincidenti: la I e ancora più la V se ne discostano.

Più l'ellisse si avvicina a una circonferenza più esatto è il risultato offerto dalle cinque formule.

%%%%%%%%%%%%%%%%%

Il matematico italiano Leonardo Colzani (Università degli Studi di Milano Bicocca) propone la formula seguente per il calcolo del perimetro dell'ellisse, che egli attribuisce a Ramanujan (1914):

$$\text{[VI]} \qquad \pi(a+b)\left(3-\sqrt{4-\frac{(a-b)^2}{(a+b)^2}}\right).$$

Lo stesso Colzani presenta un'altra formula approssimata che offre il vantaggio di eliminare le radici quadrate:

$$\text{[VII]} \qquad \pi(a+b)\frac{16(a+b)^2+3(a-b)^2}{16(a+b)^2-(a-b)^2}.$$

Applicando queste due formule, la VI e la VII, si ottengono i risultati mostrati nella tabella che segue:

formula	lunghezza dell’ellisse
VI	191,600
VII	195,277

- -

%%%%%%%%%%%%%%%%%

Il matematico italiano Leonardo Colzani (Università degli Studi di Milano Bicocca) propone la formula seguente per il calcolo del perimetro dell’ellisse, che egli attribuisce a Ramanujan (1914):

$$\pi(a+b)\left(3-\sqrt{4-\frac{(a-b)^2}{(a+b)^2}}\right).$$

Lo stesso Colzani presenta un’altra formula approssimata che offre il vantaggio di eliminare le radici quadrate:

$$\pi(a+b)\frac{16(a+b)^2+3(a-b)^2}{16(a+b)^2-(a-b)^2}.$$

Applicando queste due formule, la VI e la VII, si ottengono i risultati mostrati nella tabella che segue:

formula	lunghezza dell’ellisse
VI	191,600
VII	195,277

- -

Consideriamo la prima formula: essa approssima l’ellisse a una circonferenza di raggio

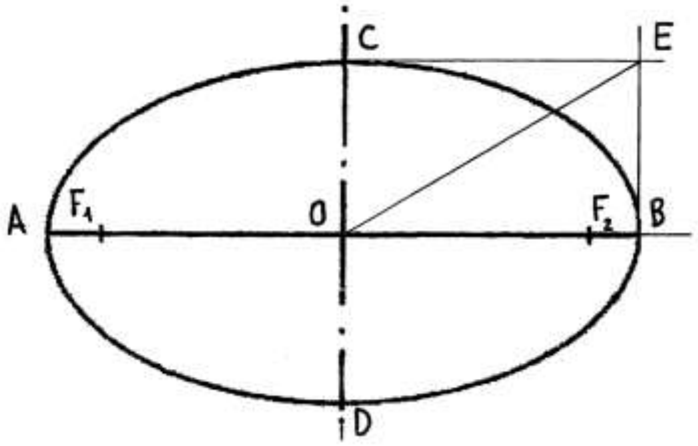
$$r = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

e cioè

$$p_{\text{ELLISSE}} \approx 2 * \pi * \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

.

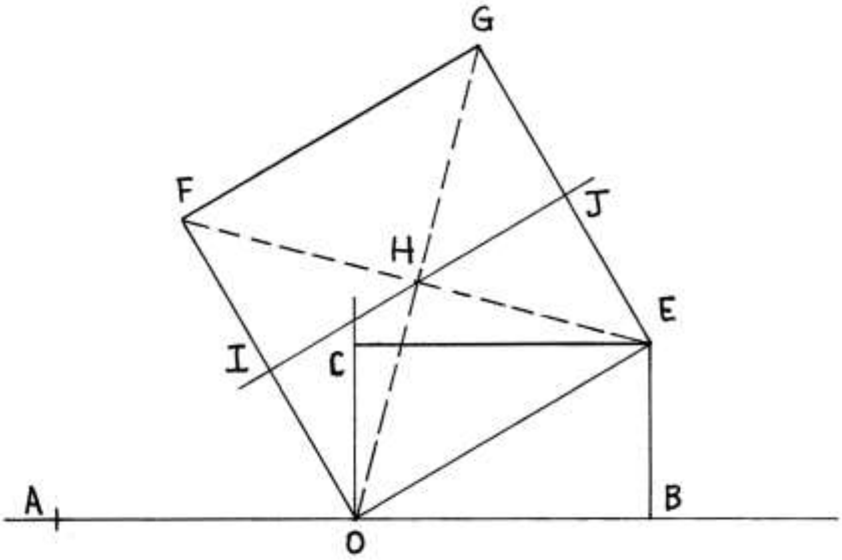
Utilizziamo una semplice procedura geometrica per ricavare la lunghezza di *r*:



Costruire il rettangolo OCEB che ha lati OB =a e OC = b. Tracciare la diagonale OE: essa è lunga

$$OE = \sqrt{(OB^2 + BE^2)} = \sqrt{(a^2 + b^2)}\ .$$

Disegnare una retta orizzontale, riportarvi la lunghezza dell'asse maggiore AB e fissarvi il punto medio O:



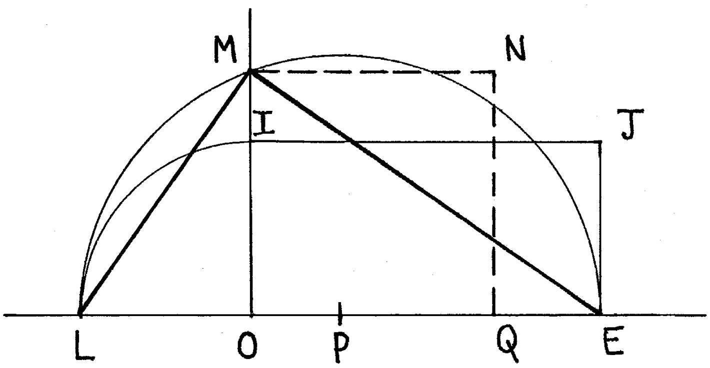
Tracciare il rettangolo OCEB e la diagonale OE.

Sulla diagonale OE costruire il quadrato OFGE e disegnare le due diagonali OG e FE: esse si incontrano nel punto H.

Per questo ultimo punto tracciare la mediana IJ. Il rettangolo OIJE è metà del quadrato OFGE e ha area equivalente a

$$\frac{a^2 + b^2}{2}\ .$$

Applichiamo il *2° teorema di Euclide* relativo ai triangoli rettangoli inscritti in un semicerchio:



Tracciare una retta orizzontale e su di essa posizionare il lato OE; costruire il rettangolo OIJE.

Fare centro in O e con raggio OI disegnare un arco da I fino a fissare il punto L. Determinare il punto medio di LE: è P.

Fare centro in P e con raggio PL = PE tracciare la semicirconferenza da L a E.

Dal punto O elevare la perpendicolare a LE: essa incontra la semicirconferenza in M.

LME è un triangolo rettangolo inscritto in un semicerchio.

Per il 2° teorema di Euclide vale la relazione:

LO : OM = OM : OE da cui $OM^2 = LO * OE$.

Ma LO = OI = OE/2, per cui

$OM^2 = OE * OE/2 = OE^2/2 = (a^2 + b^2)/2$.

OM è la lunghezza del raggio della circonferenza convenzionalmente lunga quanto l’ellisse:

$$OM = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$

.

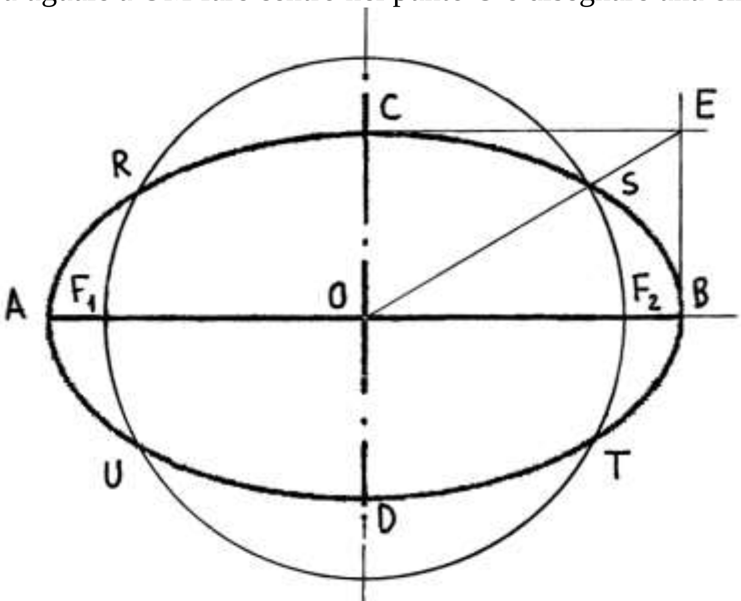
Il rettangolo OIJE è un *doppio quadrato*: il lato OI è lungo la metà di quello OE:

OI : OE = 1 : 2 da cui LO : OE = 1 : 2 .

L’altezza OM è medio proporzionale fra LO e OE e quindi vale la relazione:

LO : OM = 1 : √2 .

Con apertura uguale a OM fare centro nel punto O e disegnare una circonferenza:



Essa taglia l’ellisse nei punti R, S, T e U. E, cosa più importante, la circonferenza passa per i fuochi F_1 e F_2.

La circonferenza di centro O e raggio $OF_1 = OF_2$ = OR = OM è *approssimativamente* lunga quanto l'ellisse che ha assi lunghi AB = 2*a e CD =2*b .

- APPROFONDIMENTO -

I perimetri dell'ellisse e del cerchio

Un'ellisse che ha semiassi lunghi *a* e *b* e un cerchio di raggio *r* = √(a*b) hanno uguale area, ma il perimetro dell'ellisse è più lungo di quello della circonferenza del cerchio:

$\text{perimetro}_{\text{ELLISSE}} > 2*\pi*\sqrt{(a*b)}$.

- -

Area di un'ellisse

L'area dell'ellisse di questo esempio è:

$$\text{Area}_{\text{ELLISSE}} = \pi * a * b \ .$$

L'area del cerchio di uguale superficie è:

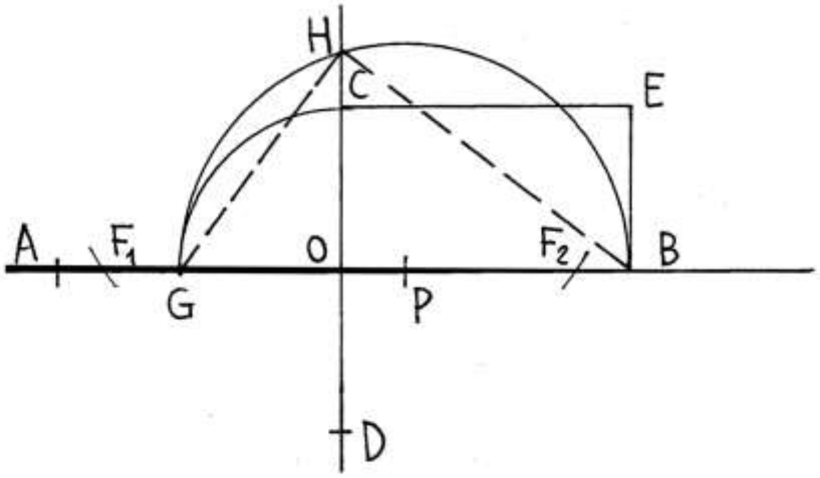
$$\text{Area}_{\text{CERCHIO}} = \pi * R^2 \ .$$

Dobbiamo calcolare il valore, *incognito* di R per cui vale l'eguaglianza:

$\text{Area}_{\text{ELLISSE}} = \text{Area}_{\text{CERCHIO}}$ e cioè $\pi * a * b = \pi * R^2$.

Ne consegue che $a * b = R^2$ e $R = \sqrt{(a*b)}$.

Per determinare graficamente la lunghezza di R occorre applicare nuovamente il 2° teorema di Euclide:



Tracciare una retta orizzontale e riportarvi l'asse maggiore AB. Su di esso fissare i punti O, F_1 e F_2.

Costruire il rettangolo OCEB con lati lunghi: OB = a e OC = b .

Prolungare verso l'alto il lato OC. Fare centro nel punto O e con raggio OC disegnare l'arco CG. Stabilire il punto medio di GB: è P.

Fare centro in P e con raggio PG = PB tracciare una semicirconferenza da G a B: essa incontra in H il prolungamento dell'asse minore.

GHB è un triangolo rettangolo inscritto nel semicerchio.

Per il 2° teorema di Euclide vale la relazione

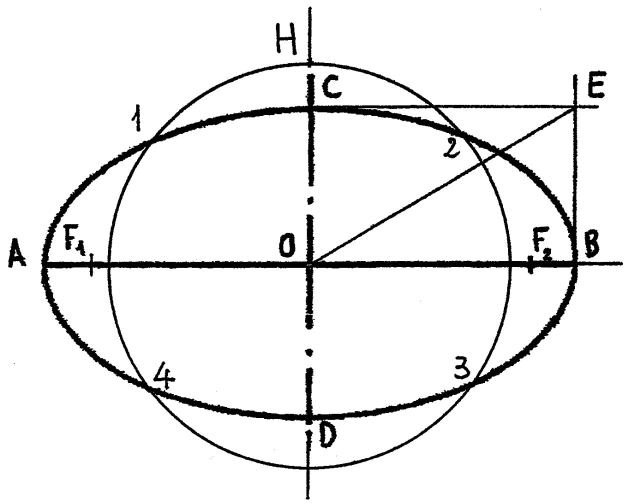
GO : OH = OH : OB → OC : OH = OH : OB → b : OH = OH : a .

Ne consegue: $OH^2 = a*b$.

Ma OH è il raggio R del cerchio di area uguale a quella dell'ellisse:

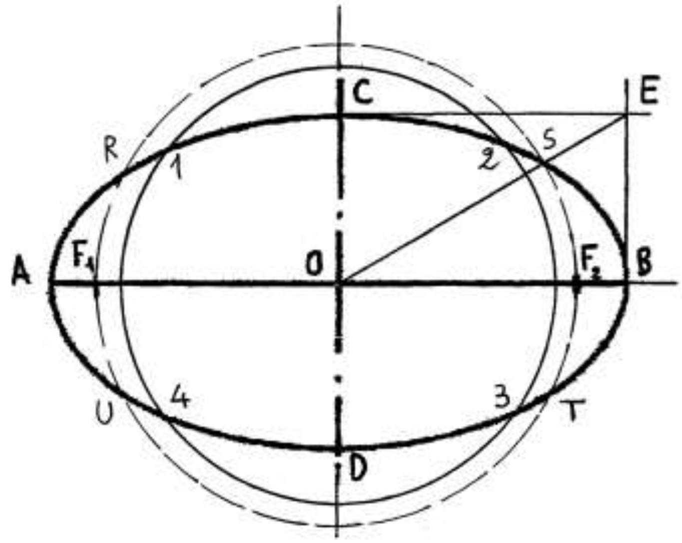
$OH = R = \sqrt{(a*b)}$.

Con il compasso misurare la lunghezza di OH e con questa apertura fare centro in O e disegnare una circonferenza:



La circonferenza taglia l'ellisse nei punti 1, 2, 3 e 4.

Per un opportuno confronto, nella figura che segue è aggiunta la circonferenza passante per i punti R, S, T e U che ha la stessa lunghezza dell'ellisse:



<u>Confronto fra le due circonferenze e i due cerchi</u>

Nell'ultima figura sono disegnate due circonferenze: quella più esterna che ha raggio OF_1 e quella interna di raggio O-1.

La prima circonferenza è lunga quanto l'ellisse:

circonferenza $_{FUOCHI} = 2 * \pi * \sqrt{[(a^2 + b^2)/2]}$.

L'area del cerchio che essa delimita è:

Area $_{CERCHIO\ FUOCHI} = \pi * r^2 = \pi * (a^2 + b^2)/2$.

La seconda circonferenza ha raggio R lungo O-1 = $\sqrt{(a*b)}$ ed è lunga

circonferenza = $2 * \pi * \sqrt{(a*b)}$.

Il cerchio da essa definito ha area

Area $_{CERCHIO\ 1\text{-}4} = \pi * R^2 = \pi * (a*b)$.

Queste formule portano alle seguenti disuguaglianze:

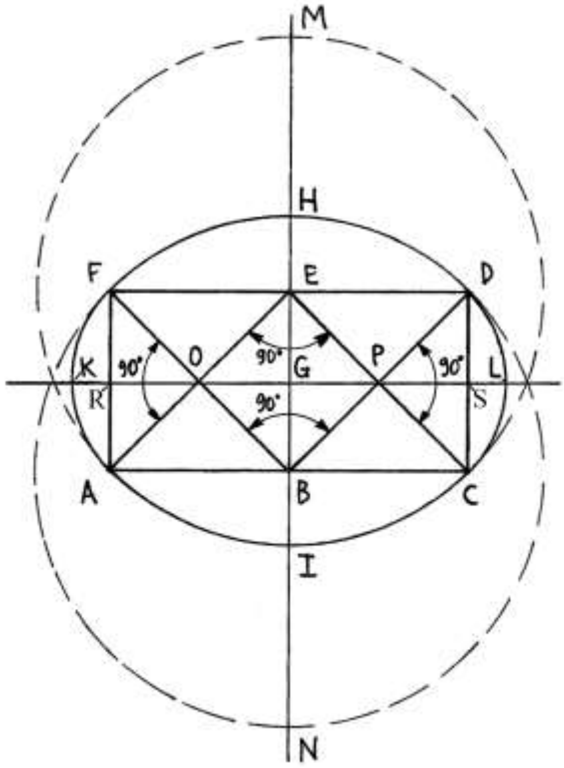
$\sqrt{[(a^2 + b^2)/2]} > \sqrt{(a*b)}$ e $(a^2 + b^2)/2 > a*b$.

In un'ellisse è sempre $a > b$.

Nota: il citato *Manuale* del Bartsch offre anche alcune formule per il calcolo delle aree di segmenti e settori *ellittici*.

<u>Perimetro e area di un'ovale</u>

Riprendiamo in considerazione la III costruzione dell'ovale del Serlio:



Il segmento OP è già stato definito con il simbolo **z** .

Come abbiamo già visto, questa ovale è formata da quattro archi di circonferenza raccordati con raggi OA e BF = 2 * OA.

Il raggio OA è un cateto del triangolo rettangolo isoscele OAB che ha l'ipotenusa AB lunga quanto OP = z.

In un precedente paragrafo abbiamo già calcolato la lunghezza di OA in funzione di z:

$$OA = z * (\sqrt{2})/2 .$$

Il secondo raggio, BF, è lungo

$$BF = z * \sqrt{2} .$$

I quattro archi di circonferenza che formano l'ovale sottendono tutti degli angoli di 90°.

L'arco AKF è lungo:

$$AKF = 2*\pi * OA/4 = 2*\pi * z * [(\sqrt{2})/2]/4 = \pi*z * (\sqrt{2})/4 .$$

Anche l'arco DLC è lungo $\pi*z * (\sqrt{2})/4$.

L'arco AIC è lungo *un quarto* della circonferenza della quale è parte:

$AIC = 2*\pi * EI/4 = 2*\pi * BF/4 = 2*\pi * z * (\sqrt{2})/4 = \pi * z * (\sqrt{2})/2$, che è anche la lunghezza dell'arco FHD.

La lunghezza dell'ovale è data da:

$$perimetro_{OVALE} = AKF + FHD + DLC + CIA = 2*[\pi*z * (\sqrt{2})/4] + 2*[\pi * z * (\sqrt{2})/2] =$$
$$= \pi * z * (3 * \sqrt{2})/2 .$$

%%%%%%%%%%%%%%%%

L’area dell’ovale è facilmente calcolabile perché la figura è composta da *cinque* poligoni:
* doppio quadrato AFDC ;
* segmenti circolari AKF e DLC ;
* segmenti circolari CIA e FHD .

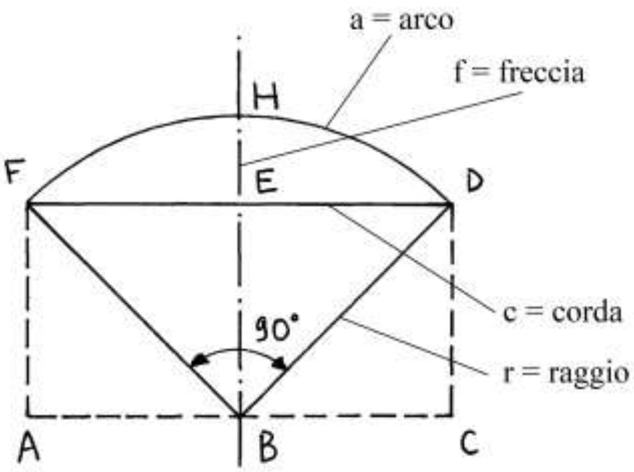
Il doppio quadrato ha area:

Area $_{AFDC}$ = AF * AC = z * (2 * z) = 2 * z^2 .

Per calcolare l’area di un segmento circolare usiamo la formula

Area = ½ * [a * r – c * (r – f)].

Nella figura che segue:
* *a* è la lunghezza dell’FHD (che è un quarto della sua circonferenza) ;
* *c* è la corda FED ;
* *f* è la freccia HE ;
* *r* è il raggio BD.



Come già visto, le lunghezze dei quattro archi che delimitano i segmenti circolari corrispondono a quelle di *un quarto* delle circonferenze alle quali appartengono.

Calcoliamo l’area del segmento circolare FHD. Il raggio *r* è lungo:

r = BH = z * √2 .

L’arco FHD = a è lungo:

a = ¼ * 2*π * BF = ¼ * 2*π * z * √2 = (√2)/2 * π * z .

Anche l’arco AIC ha lunghezza AIC = FHD = (√2)/2 * π * z .

La corda FD è lunga:

FD = c = 2*z .

La freccia EH è lunga:

EH = c = BH – BE = BF – OP = z * √2 – z = z * (√2 – 1) .

L’area del segmento circolare FHD è:

Area $_{FHD}$ = ½ * {(√2)/2 * π * z – 2*z * [(√2 * z – z * (√2 – 1)]} = z^2 * (π – 2)/2 .

Calcoliamo l’area del segmento circolare AKF (rivedere la penultima figura). Il raggio OA è:

OA = r = z * (√2)/2 . A sua volta, l’arco AKF è:

AKF = a = ¼ * 2 * π * r = (√2)/4 * π * z .

La corda AF è lunga:

AF = c = OP = z .

La freccia KR è:

KR = f = KO – RO = OA – RO = z * (√2)/2 – z = z/2 * (√2 – 1) .

L’area di AKF è:

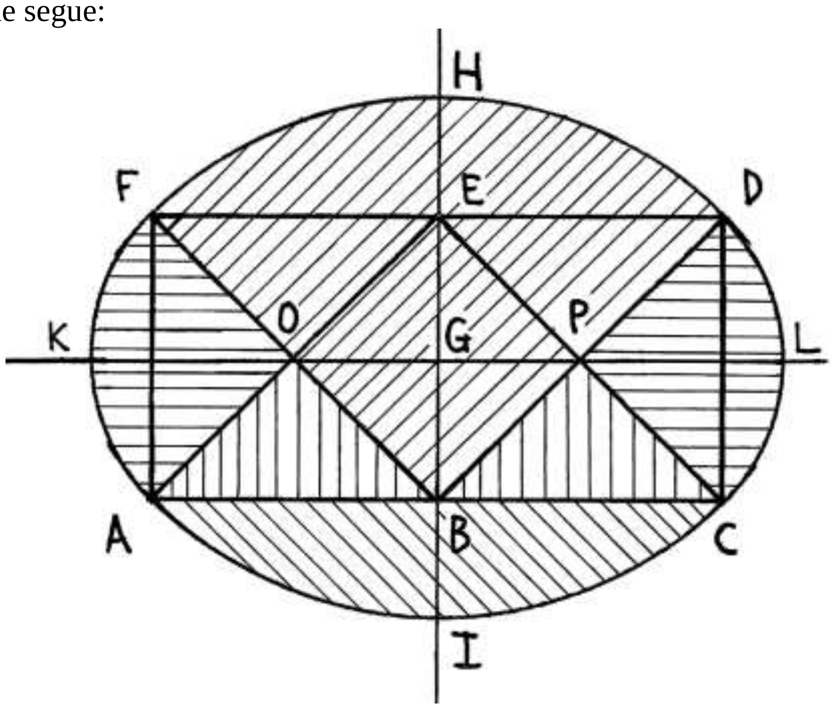
Area $_{AKF}$ = ½ * {[(√2)/4 * π * z * z * (√2)/2 – [z * (√2)/2 – z/2 * (√2 – 1)]} =
= z^2 * (π – 2)/8 .

L’area totale dell’ovale è data dalla somma delle aree del doppio quadrato e dei quattro segmenti circolari:

Area $_{OVALE}$ = Area $_{AFDC}$ + Area $_{FHD}$ + Area $_{AIC}$ + Area $_{AKF}$ + Area $_{DLC}$ =
= 2 * z^2 + 2 * [z^2 * (π – 2)/2] + 2 * [z^2 * (π – 2)/] =
= z^2 * [2 + 5/4 * (π – 2)] .

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Un’altra soluzione adottabile allo scopo di calcolare l’area racchiusa dall’ovale è mostrata nella figura che segue:



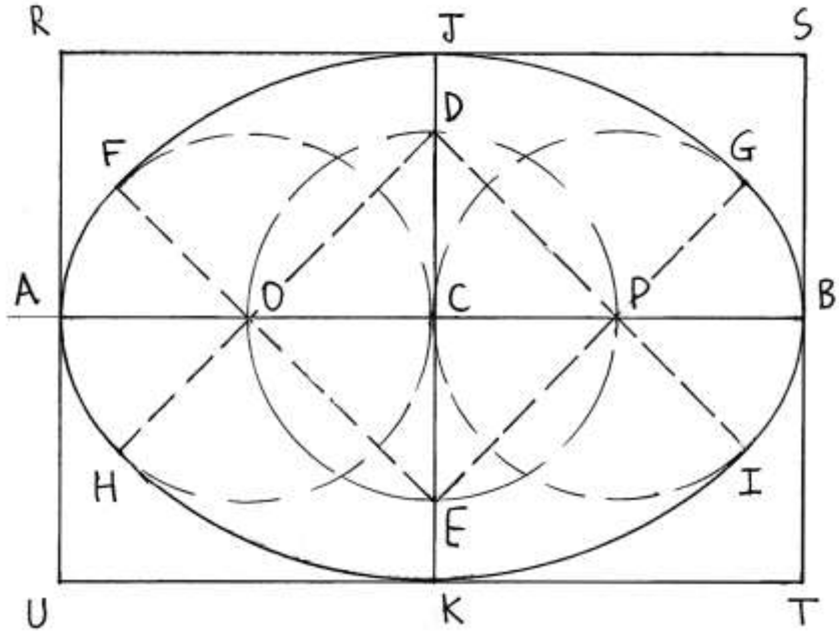
Essa richiede il calcolo e la successiva somma delle aree dei poligoni fra i quali è scomposta l’ovale:

- il settore circolare BFHD ;
- i settori circolari AKFO e CLDP ;
- il segmento circolare ABCI ;
- i triangoli rettangoli isosceli AOB e BPC .

CURVE INSCRITTE

Ovale a 4 centri inscritta in un rettangolo

Questa ovale ha il quadrato ODPE quale poligono generatore:



L'ovale è inscritta nel rettangolo RSTU che ha lati lunghi quanto i due assi dell'ovale, AB e JK.

Il quadrato generatore ha le diagonali OP e DE adagiate sui due assi. Da esse derivano i raggi CO, OA e PB che sono lunghi metà delle diagonali.

Il quadrato ha lati lunghi

$$OD = (\sqrt{2})/2 * OP.$$

Esso è inscritto nel cerchio di centro C.

Questa costruzione è nota come la II di Serlio.

I due archi di raccordo, FJG e HKI sono disegnati rispettivamente con centri in E e in D e con raggi di uguale lunghezza:

$$DH = DO + OH = DO + OC .$$

Ma DO è l'ipotenusa del triangolo rettangolo isoscele ODC i cui cateti, OC e PC, sono lunghi la metà delle diagonali OP e DE:

$$DO = OC * \sqrt{2} \text{ , per cui}$$
$$DH = OC * \sqrt{2} + OC = OC * (\sqrt{2} + 1) .$$

Il raggio DK è lungo quanto DH.

Il segmento EK è

$$EK = DK - DE = DH - DE = OC * (\sqrt{2} + 1) - 2*OC = OC * (\sqrt{2} + 1 - 2) =$$
$$= OC * (\sqrt{2} - 1) .$$

Per ragioni di simmetria, i segmenti JD e EK hanno uguale lunghezza.

L'asse minore JK è lungo

$$JK = JD + DE + EK = JD + DK = OC * (\sqrt{2} - 1) + OC * (\sqrt{2} + 1) =$$
$$= OC * (\sqrt{2} - 1 + \sqrt{2} + 1) = 2 * \sqrt{2} * OC .$$

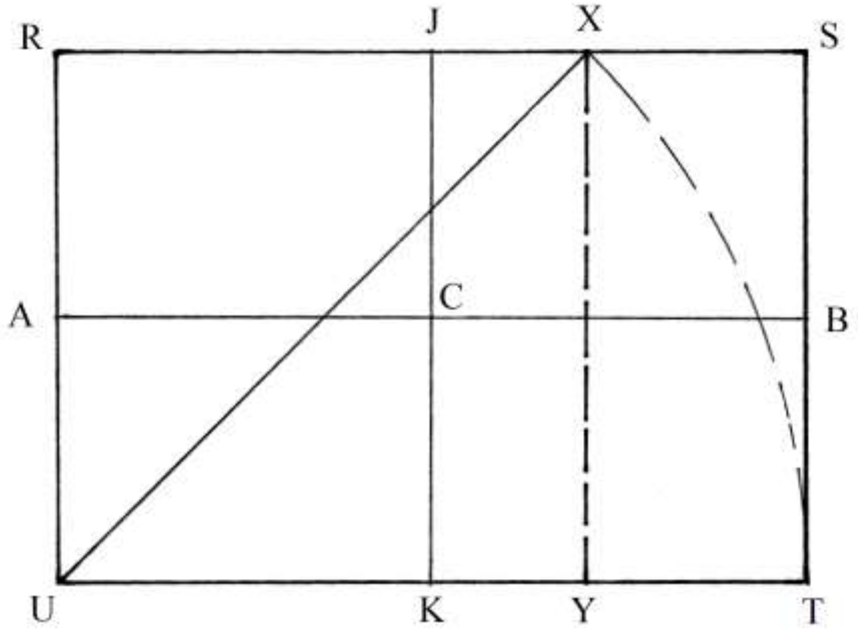
L'asse maggiore AB è lungo

$$AB = AO + OC + CP + PB = 4 * OC .$$

Il *rapporto d'aspetto* RA fra le lunghezze dei due assi è:

$$RA = \text{asse maggiore/asse minore} = 4 * PC/(2 * \sqrt{2} * OC) = 2/\sqrt{2} =$$
$$= 2*\sqrt{2}/2 = \sqrt{2} .$$

Questa ovale è inscritta nel rettangolo RSTU che ha lati lunghi nel rapporto √2:



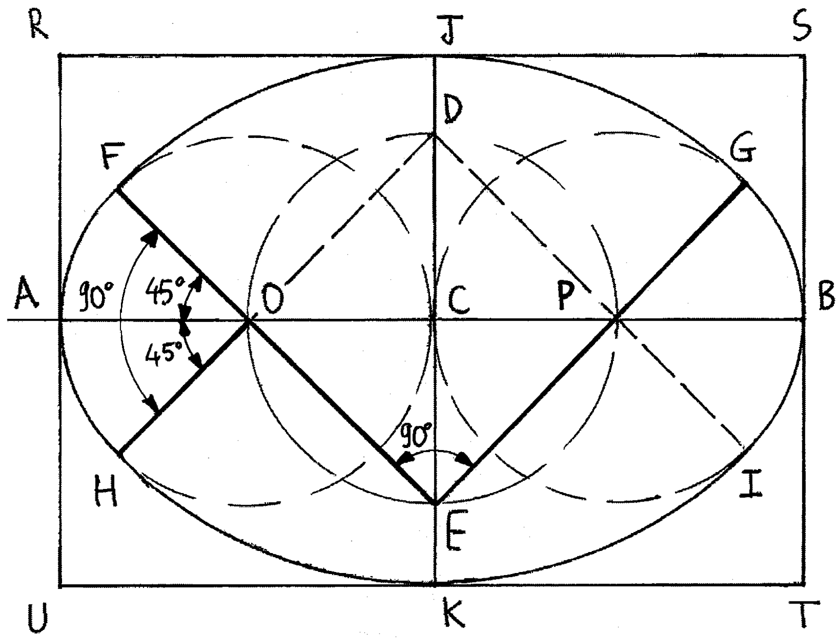
La dimostrazione per via geometrica è semplice: costruire il quadrato RXYU e prolungare verso destra i suoi lati orizzontali.

Disegnare la diagonale UX. Fare centro in U e con raggio UX tracciare un arco da X fino a incontrare il prolungamento di UY nel punto T.

RSTU è il rettangolo circoscritto all'ovale.

<u>L'area dell'ovale</u>

Il calcolo dell'area dell'ovale è facile perché essa è formata da *settori circolari* caratterizzati da angoli al vertice ampi 45° o 90° e quindi assai gestibili.



Per semplificare i calcoli assegniamo alla lunghezza del raggio OC, che è una *costante*, il valore *z*.

L'area del settore circolare OAF è:

$\text{Area}_{\text{OAF}} = 1/8 * \text{Area}_{\text{CERCHIO}} = 1/8 * \pi * z^2$.

L'area del triangolo rettangolo isoscele OEP è:

$\text{Area}_{\text{OEP}} = OE^2/2 = (\sqrt{2} * OC)^2/2 = 2 * z^2/2 = z^2$.

L'area del settore circolare EFJG è:

$\text{Area}_{\text{EFJG}} = ¼ * \text{Area}_{\text{CERCHIO}} = ¼ * \pi * EJ^2$.

Ma $EJ = DH = OC * (\sqrt{2} + 1) = z * (\sqrt{2} + 1)$.

Quindi l'area di EFJG è:

$\text{Area}_{\text{EFJG}} = ¼ * \pi * [z * (\sqrt{2} + 1)]^2 = ¼ * \pi * z^2 * (\sqrt{2} + 1)^2$.

L'area della semiovale AFJGB è data da:

$\text{Area}_{\text{AFJGB}} = \text{Area}_{\text{EFJG}} - \text{Area}_{\text{OEP}} + \text{Area}_{\text{OAF}} + \text{Area}_{\text{PGB}} =$

$= ¼ * \pi * z^2 * (\sqrt{2} + 1)^2 - z^2 + 1/8 * \pi * z^2 + 1/8 * \pi * z^2 =$

$$= z^2 * [\frac{\pi * (\sqrt{2} + 1)^2}{4} - 1 + ¼ * \pi] = z^2 * \frac{\pi * (\sqrt{2} + 1)^2 - 4 + \pi}{4} =$$

$$= z^2 * \frac{\pi * (2 + 2*\sqrt{2} + 1) - 4 + \pi}{4} = z^2 * \frac{2*\pi + 2*\pi * \sqrt{2} + \pi - 4 + \pi}{4} =$$

$$= z^2 * \frac{4*\pi + 2*\pi*\sqrt{2} - 4}{4} \approx z^2 * 4{,}360315 .$$

L'area dell'intera ovale è:

$\text{Area}_{\text{OVALE}} = 2 * \text{Area}_{\text{AFJGB}} \approx 2 * z^2 * 4{,}360310 \approx 8{,}7206 * z^2$.

A sua volta l'area del rettangolo circoscritto all'ovale è:

$\text{Area RSTU} = RS * ST = 4 * OC * 2 * \sqrt{2} * OC = 8 * \sqrt{2} * z^2$.

Il rapporto fra l'area dell'ovale e quella del rettangolo RSTU è:

area ovale/area rettangolo $\approx 8{,}7206/(8 * \sqrt{2}) \approx 0.7708$.

Il perimetro dell'ovale

L'ovale è formata da quattro archi di circonferenza e le loro coppie opposte hanno lunghezze uguali:

HAF = GBI e FJG = IEH.

L'arco HAF è lungo:

$HAF = ¼ * \text{circonferenza} = ¼ * 2 * \pi * OA = \pi/2 * z$.

L'arco FJG è lungo:

$FJG = ¼ * \text{circonferenza} = ¼ * 2 * \pi * EJ = \pi/2 * z * (\sqrt{2} + 1)$.

L'ovale è lunga:

$OVALE = 2 * HAF + 2 * FJG = \pi/2 * z + 2 * \pi/2 * z * (\sqrt{2} + 1) =$

$= \pi * z * (1 + \sqrt{2} + 1) = \pi * z * (2 + \sqrt{2})$.

Calcoliamo i rapporti fra le lunghezze del perimetro dell'ovale e quelle dei due assi:

perimetro ovale/asse maggiore $= \pi * z * (2 + \sqrt{2})/(4 * z) = = \pi * (2 + \sqrt{2})/4 \approx$

$\approx 0{,}8535 * \pi \approx 2{,}68$;

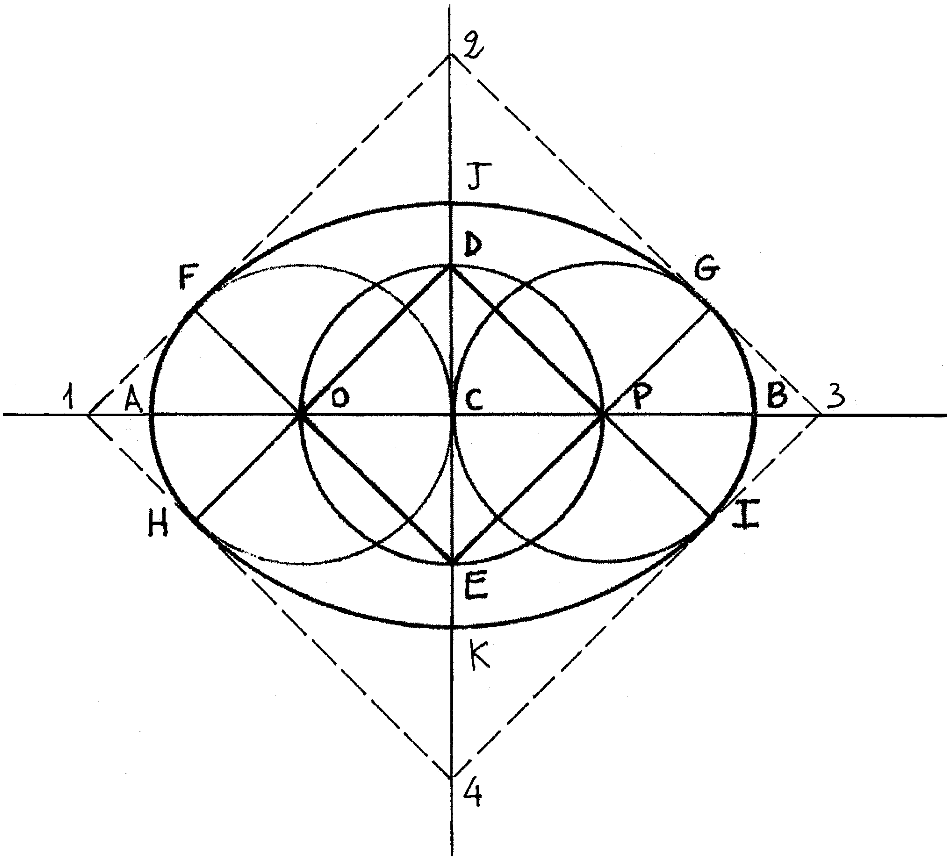
perimetro ovale/asse minore $= \pi * z * (2 + \sqrt{2})/(2 * \sqrt{2} * z) = \pi * (2 + \sqrt{2})/(2 * \sqrt{2}) =$

$= \pi * \sqrt{2} * (2 + \sqrt{2})/4 = \pi * (2*\sqrt{2} + 2)/4 \approx 3{,}79$.

- APPROFONDIMENTO -

Rombo circoscritto

L’ovale fino a questo punto considerato è a sua volta inscrittibile in un *rombo* che è tangente alla curva nei punti F. G. H e I:



Prolungare i due assi dell’ovale. Per i punti appena citati tracciare le perpendicolari ai raggi: quelle linee sono tangenti all’ovale e convergono verso quattro punti (1, 2, 3 e 4) che si posiziano sui prolungamenti dei due assi.

Il rombo 1-2-3-4 è un *quadrato* con le diagonali 1-3 e 2-4 di uguale lunghezza, adagiate sui due assi dell’ovale.

La semidiagonale 1-C è lunga:

$$1\text{-}C = 1\text{-}O + OC \ .$$

Ma 1-O è la diagonale di un quadrato che ha lati lunghi $OH = OF = OC = z$ per cui è

$$1\text{-}O = \sqrt{2} * z \ .$$

La semidiagonale è

$$1\text{-}O = \sqrt{2} * z + z = z * (\sqrt{2} + 1) \ .$$

La diagonale 1-3 è lunga il doppio di 1-C:

$$1\text{-}3 = 2 * z * (\sqrt{2} + 1) \ .$$

Il lato 1-2 è l’ipotenusa del triangolo rettangolo isoscele 1-2-C ed è:

$$1\text{-}2 = (1\text{-}C) * z * \sqrt{2} = z * z * (\sqrt{2} + 1) * z * \sqrt{2} = z * z * (2 + \sqrt{2}) \ .$$

Il quadrato generatore ODPE ha lati lunghi

$$OD = \sqrt{2} * z.$$

Fra le lunghezze dei lati dei quadrati 1-2-3-4 e ODPE intercorre la proporzione

$$(1\text{-}2)/OD = z * (2 + \sqrt{2}))/(z * \sqrt{2}) = (2 + \sqrt{2})/\sqrt{2} = \sqrt{2} + 1 \ .$$

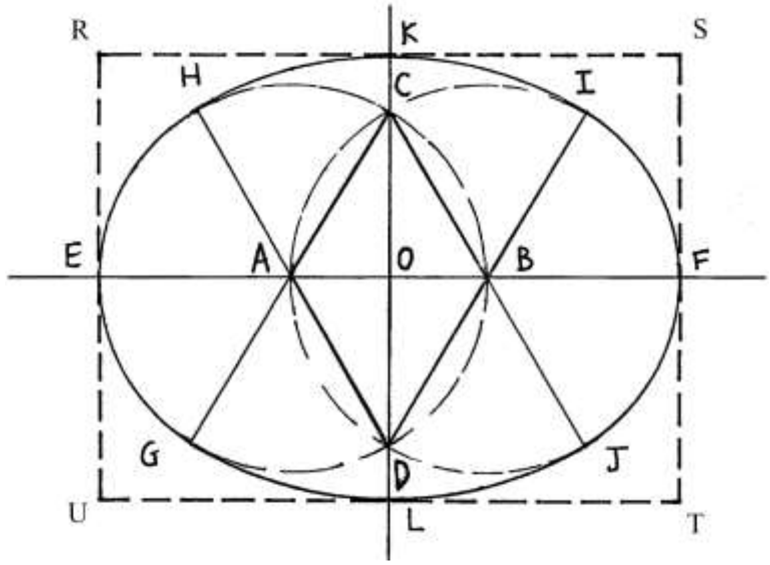
Fra le aree dei due quadrati vale un rapporto proporzionale al quadrato del rapporto fra le lunghezze dei rispettivi lati:

$$Area_{\ 1\text{-}2\text{-}3\text{-}4} / Area_{\ ODPE} = (\sqrt{2} + 1)^2 = 3 + 2*\sqrt{2} \ .$$

- -

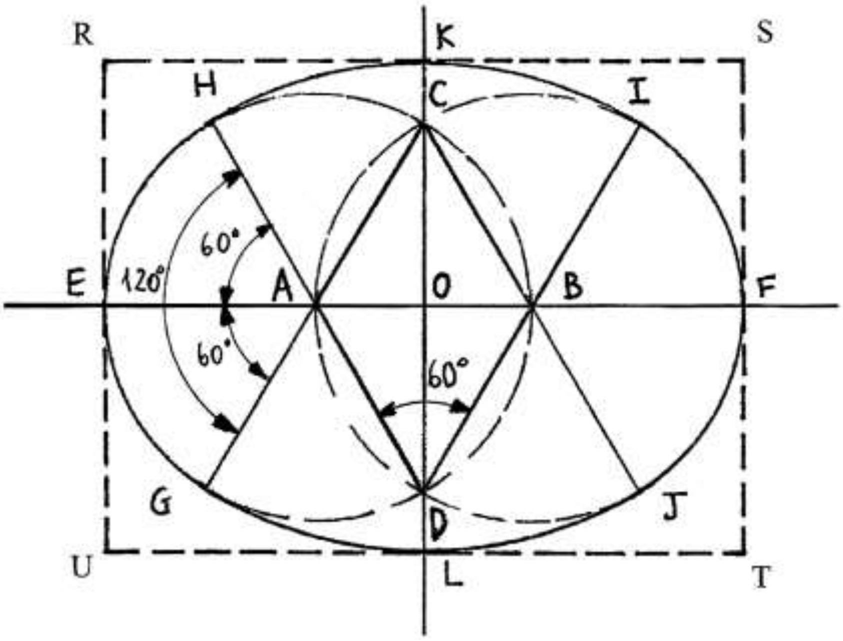
Ovale generata dal triangolo equilatero

L’ovale generata dal doppio triangolo equilatero ACBD è inscritta nel rettangolo RSTU:



Calcoliamo le lunghezze e le aree dei poligoni che compongono questa ovale.

Il doppio triangolo equilatero generatore comporta la presenza di angoli multipli e sottomultipli di 60°, che è l’ampiezza degli angoli interni dfi un triangolo equilatero:



La lunghezza che caratterizza la costruzione è quella del lato del triangolo generatore, AB, che è la costante *z* usata nelle formule che seguono.

Le altezze OC e OD hanno uguale lunghezza:

$$OC = OD = (\sqrt{3})/2 * AB = (\sqrt{3})/2 * z .$$

L’asse maggiore EF è lungo:

$$EF = EA + AB + BF = 3 * z .$$

L’asse minore KL è lungo:

$$KL = DK + DL = DH + DL = 2*z + DL.$$

Ma $DL = CL – CD = 2*z – 2*OC = 2*z – 2 * (\sqrt{3})/2 * z = 2*z – \sqrt{3} * z = z * (2 – \sqrt{3})$.

Ne consegue:

$$KL = 2*z + z * (2 – \sqrt{3}) = z * (4 – \sqrt{3}) .$$

Il *rapporto d’aspetto* RA fra i due assi è:

$$RA = EF/KL = 3*z/[z * (4 – \sqrt{3})] = 3/(4 – \sqrt{3}) \approx 1,32278 .$$

L'area dell'ovale

Procediamo a calcolare l'area della semiovale.

L'area del settore circolare AEH è:

$\text{Area}_{AEH} = 1/6 * \text{Area}_{CERCHIO} = 1/6 * \pi * EA^2 = \pi/6 * z^2$.

L'area del settore circolare BIF è uguale a quella di AEH.

L'area del settore circolare DHI è:

$\text{Area}_{DHI} = 1/6 * \text{Area}_{CERCHIO} = 1/6 * \pi * DH^2 = v/6 * (2*z)^2 = 2/3 * \pi * z^2$.

Da questa ultima deve essere sottratta l'area del triangolo equilatero ABD:

$\text{Area}_{ABD} = AB * OD/2 = z * (\sqrt{3})/2 * z/2 = z^2 * (\sqrt{3})/4$.

L'area della semiovale EHKIF è data da:

$\text{Area}_{EHKIF} = \text{Area}_{AEH} + \text{Area}_{BIF} + \text{Area}_{DHI} - \text{Area}_{ABD} =$
$= \pi/6 * z^2 + \pi/6 * z^2 + 2/3 * \pi * z^2 - z^2 * (\sqrt{3})/4 =$
$= z^2 * [12*\pi - 3*(\sqrt{3})]/12 \approx 2{,}7072 * z^2$.

L'area dell'intera ovale è il doppio:

$\text{Area}_{OVALE} = 2 * \text{Area}_{EHKIF} \approx 2 * 2{,}7072 * z^2 \approx 5{,}414 * z^2$.

L'area del rettangolo RSTU è:

$\text{Area}_{RSTU} = EF * KL = 3 * z * (4 - \sqrt{3}) \approx 6{,}8038 * z^2$.

Il rapporto fra l'area dell'ovale e quella del rettangolo circoscritto è:

$\text{Area}_{OVALE}/\text{Area}_{RETTANGOLO} \approx 5{,}414 * z^2/6{,}8038 * z^2 \approx 0{,}7957$.

La tradizione attribuisce ad Archimede il rapporto approssimato di 11/14 fra l'area di un cerchio e quella del quadrato ad esso circoscritto:

$\text{Area}_{CERCHIO}/\text{Area}_{QUADRATO} \approx 11/14 \approx 0{,}7857$, rapporto che si discosta poco da quello appena calcolato per l'ovale.

Come è noto, la costante 11/14 è una buona approssimazione del rapporto fra l'area di un quadrato circoscritto a un cerchio di raggio unitario e l'area di questo ultimo:

$\pi/4 \approx 3{,}14/4 \approx 0{,}785$.

Il perimetro dell'ovale

L'ovale mostrata nelle precedenti figure è ottenuta con il raccordo di *quattro* archi di circonferenza: quelli fra loro opposti hanno uguali lunghezze:

GEH = IFJ   e   HKI = JLG .

L'arco GEH sottende un angolo di 120° e quindi esso è lungo 1/3 della circonferenza di cui è parte:

$GEH = 1/3 * \text{circonferenza} = 1/3 * 2 * \pi * AE = 2/3 * \pi * z$.

L'arco HKI è definito dall'angolo HDI che è ampio 60° ed è parte di una circonferenza di raggio DH = 2 * z. La sua lunghezza è:

$HKI = 1/6 * \text{circonferenza} = 1/6 * 2 * \pi * 2 * z = 2/3 * \pi * z$.

I quattro archi hanno uguale lunghezza.

La lunghezza dell'ovale è:

$\text{perimetro}_{OVALE} = GEH + IFJ + HKI + JLG = 2 * 2/3 * \pi * z + 2 * 2/3 * \pi * z =$
$= 8/3 * \pi * z$.

Infine, calcoliamo i rapporti fra le lunghezze del perimetro dell'ovale e quello dei suoi assi:

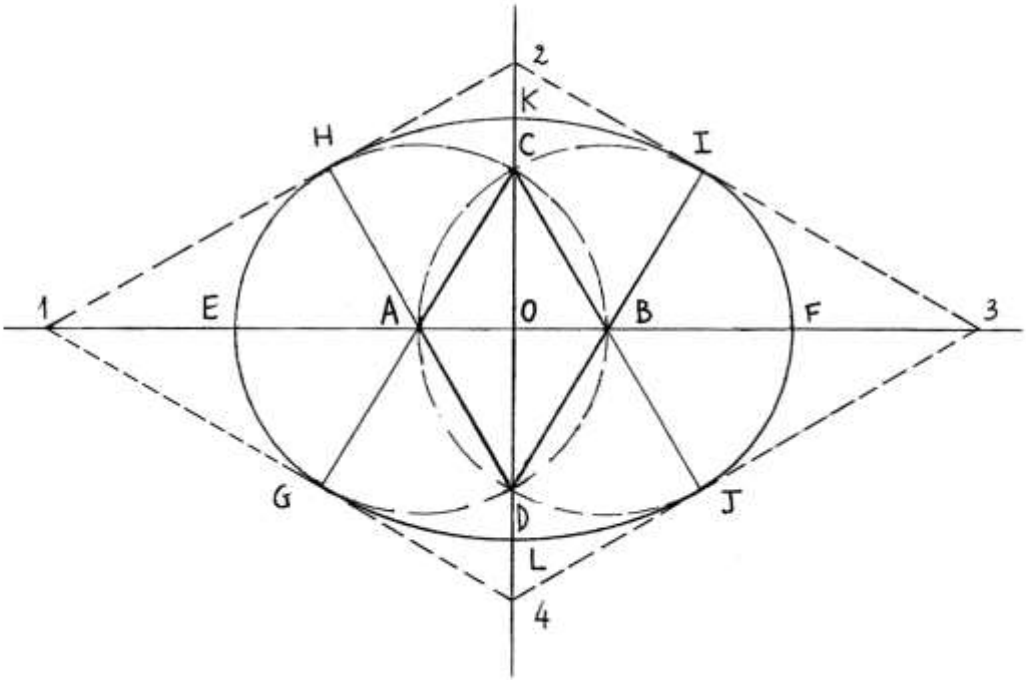
perimetro ovale/asse maggiore $= (8/3 * \pi * z)/(3*z) = 8/3 * \pi \approx 2{,}79(111)$;

perimetro ovale/asse minore $= (8/3 * \pi * z)/[z * (4 - \sqrt{3})] = (8/3 * \pi)/(4 - \sqrt{3}) \approx$
$\approx 3{,}692$.

- APPROFONDIMENTO -

Un altro rombo circoscritto

Anche l’ovale costruita su di un triangolo equilatero può essere inscritta in un rombo:



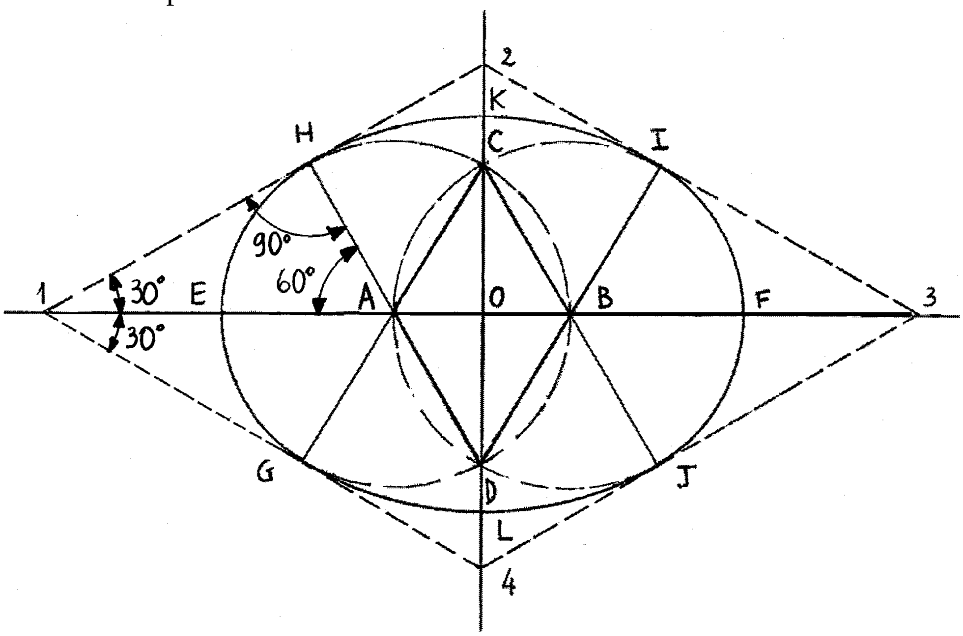
Prolungare gli assi EF e KL.

Per i punti G, H, I e J tracciare rette perpendicolari ai raggi che convergono in questi punti: le rette sono tangenti alla curva.

Le quattro rette si incontrano nei punti 1, 2, 3 e 4 che sono posizionati sui prolungamenti degli assi dell’ovale.

Costruire il rombo 1-2-3-4.

Consideriamo il triangolo rettangolo 1-HA: l’angolo HA-1 è ampio 60° e quello H-1-A è ad esso complementare ed è ampio 30°:



Il triangolo 1-HA è metà di un triangolo equilatero e 1-A è lungo il doppio di AH e quindi

1-A = 2 * AH = 2 * AB = 2 * z .

La semidiagonale 1-O è lunga

1-O = 1-A + AO = 2 * z + z/2 = 5/2 * z .

I triangoli rettangoli 1-HA e 1-2-O sono *simili* e anche il triangolo 1-2-4 è equilatero.

Il semiasse 1-O è un'altezza del triangolo 1-2-4: il lato 1-2 è:

$1\text{-}2 = (1\text{-}O)/[(\sqrt{3})/2] = 5/2 * z * 2/\sqrt{3} = 5/3 * \sqrt{3} * z$.

Il rombo 1-2-3-4 è un doppio triangolo equilatero.

I rombi 1-2-3-4 e ACBD sono *simili* e le lunghezze dei loro lati stanno in proporzione

$(1\text{-}2) : AB = (5/3 * \sqrt{3} * z) : z = 5/3 * \sqrt{3} : 1$.

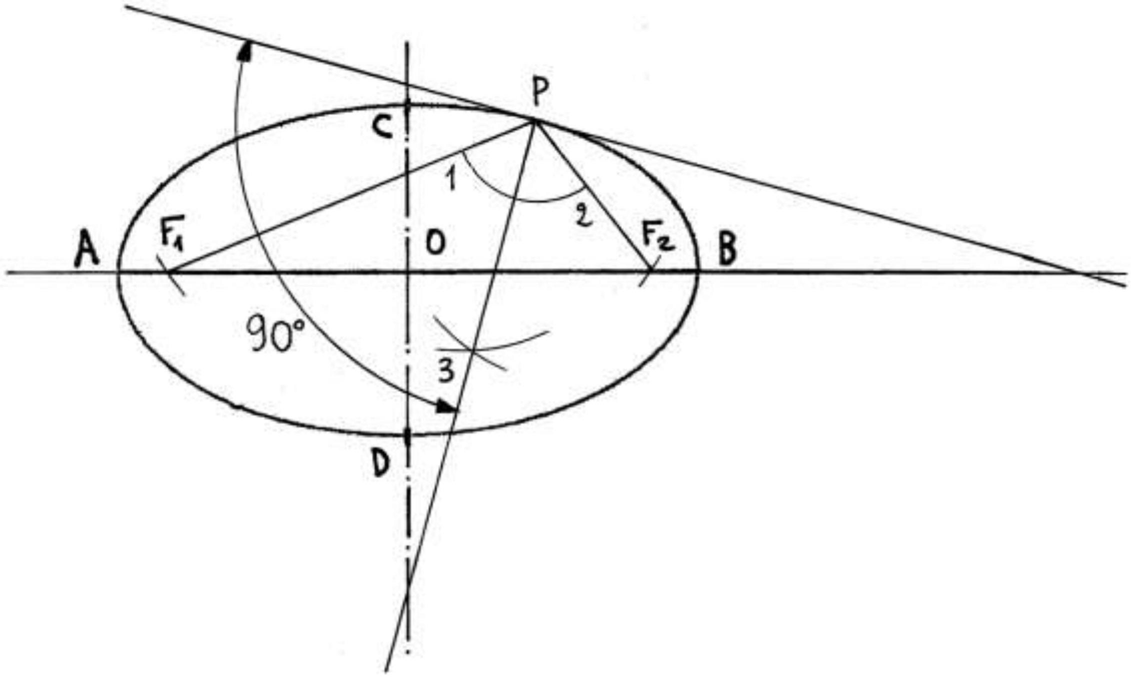
Le aree dei due rombi sono proporzionali ai quadrati delle lunghezze dei rispettivi lati (e diagonali) e quindi:

$\text{Area}_{\ 1\text{-}2\text{-}3\text{-}4} : \text{Area}_{\ ABCD} = (5/3 * \sqrt{3} * z)^2 : z^2 = 25/9 * 3 : 1 = 25/3 : 1 = 25 : 3$.

- -

La costruzione delle tangenti a un'ellisse e a un'ovale

La figura che segue mostra un'ellisse:

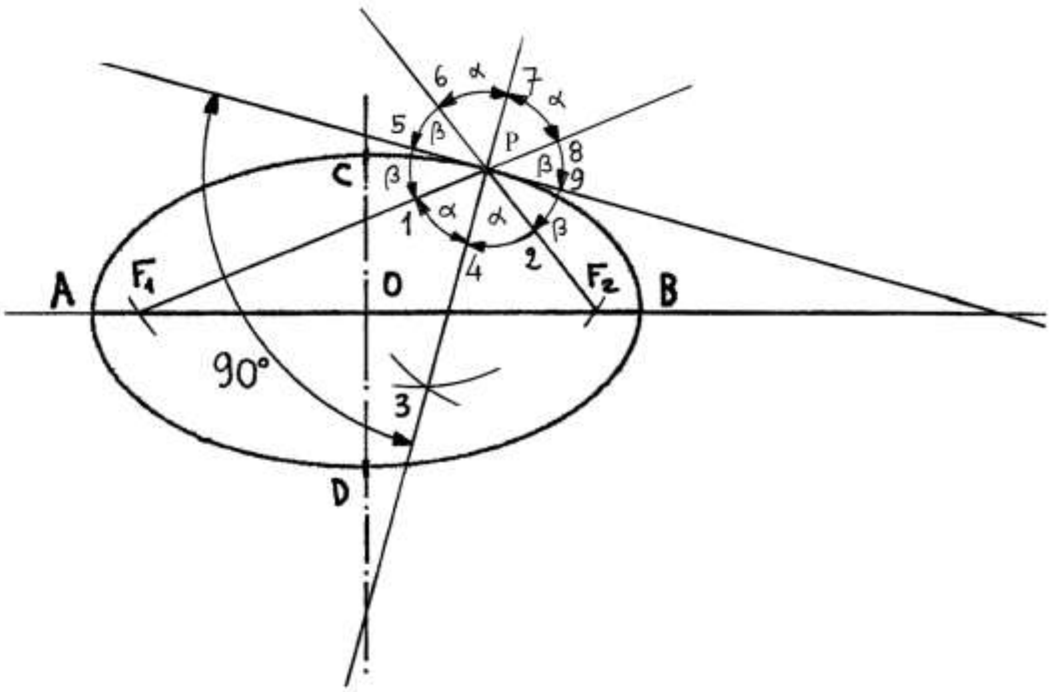


Scegliere un generico punto P sulla curva e collegarlo con i due fuochi.

Occorre costruire la bisettrice dell'angolo F_1PF_2: con il noto metodo viene fissato il punto 3. Per P e per 3 passa la bisettrice dell'angolo.

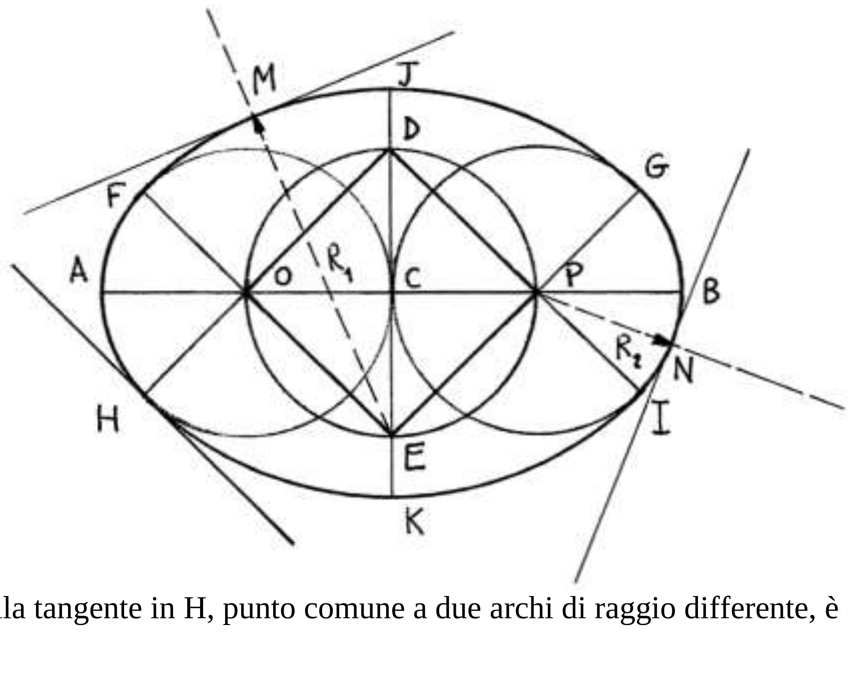
Per il punto P disegnare la perpendicolare a P-3: questa retta è la *tangente* all'ellisse nel punto P.

Prolungare oltre P tutte le linee che convergono in questo punto. Sono così evidenziati gli *angoli opposti al vertice*, α e β:

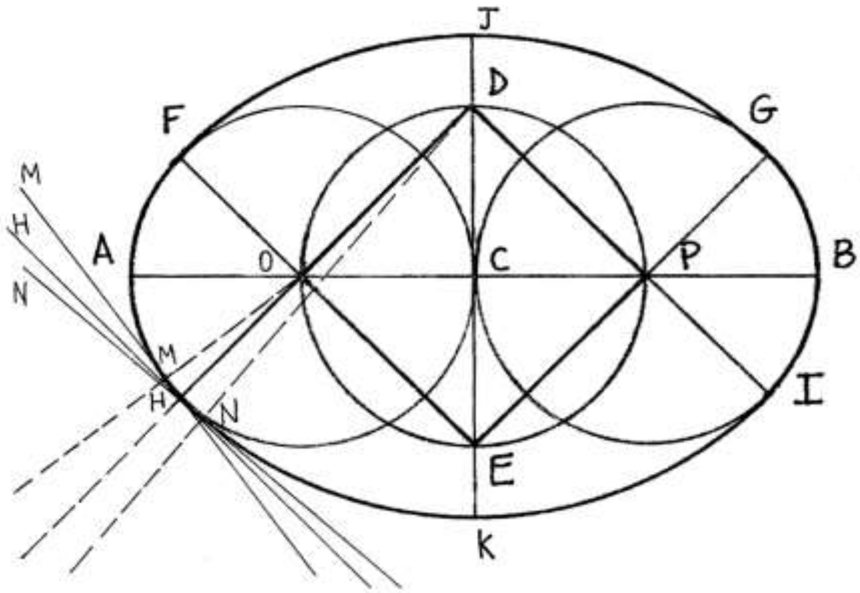


%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

La tangente all'ovale in un punto della curvatura (che non sia il punto di raccordo di archi di raggio differente) è perpendicolare al raggio dell'arco di cui quel punto fa parte, come è il caso di M e di N:



Il caso della tangente in H, punto comune a due archi di raggio differente, è affrontato nella figura che segue:



Le tangenti sono tracciare per tre punti vicini dell’ovale, M, H e N: le tre rette sono nettamente divergenti. La tangente nel punto M è perpendicolare al raggio OM e quella passante per N è perpendicolare al raggio DN.

Bibliografia

1. Bartsch Hans-Jochen, “Manuale delle formule matematiche”, trad. it., Milano, Hoepli, 2002, pp. 702.
2. Colzani Leonardo, “La quadratura del cerchio e dell’iperbole”, 2016, pp. 274, http://www.matapp.unimib.it/~leonardo/314/314.pdf
3. Cresci Luciano, “Le curve matematiche tra curiosità e divertimento”, Milano, Hoepli, 2005, pp. XI-244.
4. Dotto Edoardo, “Il disegno degli ovali armonici”, Catania, Le Nove Muse Editrice, 2002, pp. 95.
5. “Il Colosseo. Studi e Ricerche”, “Disegnare idee immagini”, Roma, Gangemi, anno X, n. 18-19, giugno-dicembre 1999, pp. 144.
6. “Matematica e architettura. Metodi analitici, metodi geometrici e rappresentazione in Architettura”, Firenze, Alinea Editrice, 2001, pp. 224.
7. “Oltre il compasso. La geometria delle curve”, a cura di Franco Conti e Enrico Giusti, Roma, Carte Segrete, 1995, pp. 93.
8. Rosin Paul L., “On Serlio’s constructions of ovals”, 2003, pp. 15, http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.159.9758&rep=rep1&type=pdf
9. Rosin Paul L. – Trucco Emanuele, “The Amphitheatre Construction Problem”, pp. 10, https://pdfs.semanticscholar.org/7cec/24c92a13e10698282948254229b945295d45.pdf
10. Trevisan Camillo, “Sullo schema geometrico costruttivo degli anfiteatri romani: gli esempi del Colosseo e dell’Arena di Verona”, in “Il Colosseo. Studi e Ricerche”, “Disegnare idee immagini”, citato sopra al n. 5, pp. 117-132.
11. Valerio Vladimiro, “Sul disegno e sulla forma degli anfiteatri”, in “Disegnare idee immagini”, Roma, Gangemi, anno IV, n. 6, giugno 1993, pp. 25-33.