sergio(punto)calzolani(at)outlook(punto)it

Parole chiave: Aztechi; codici aztechi; decifrazione dei simboli dei catasti; formula degli agrimensori; formula di Bretschneider; formula di Brahmagupta; carta prodotta dagli Aztechi; unità di misura lineari e di superficie; strumenti tecnici; metodi di calcolo delle aree; quadrilateri ciclici e non ciclici.

Nota: parte del materiale contenuto in questo articolo è riprodotta dal testo "la formuladegliagrimensori.pdf", disponibile sul sito www.geometriapratica.it

DUE CODICI AZTECHI

Gli Aztechi sono stati un popolo emigrato dalla California nella Valle del Messico dove crearono un'importante civiltà che fu distrutta dall'invasione spagnola all'inizio del XVI secolo.

Gli Aztechi avevano realizzato molti codici scritti su di una carta di loro produzione (vedere l'APPROFONDIMENTO che segue). I codici realizzati sotto la dominazione spagnola, come i due che sono qui citati, furono scritti su carta di origine europea.

Il *Codice Vergara* è conservato a Parigi mentre il "*Códice de Santa María Asunción*" è custodito a Città del Messico.

I due codici contengono centinaia di mappe catastali di terreni coltivati dagli agricoltori Aztechi: sui disegni sono riportate in forma di pittogrammi le dimensioni lineari e le superfici.

Si tratta in gran parte di lotti di terreno di forma *quadrilatera* e in alcuni casi triangolare.

Alcuni studiosi americani e messicani sono riusciti a decifrare il significato dei simboli pittografici contenuti sulle mappe, simboli che indicavano lunghezze e dimensioni:

* Barbara J. Williams è professore di Geografia e geologia all'Università del Wisconsin;
* Herbert R. Harvey, professore di Antropologia all'Università del Wisconsin;
* Maria del Carmen Jorge y Jorge, professore di Matematica all'Università Nazionale autonoma di Città del Messico.

Un fondamentale studio sul *Codice Vergara* è stato condotto dalla Jorge y Jorge, dalla Williams, dalla C.E. Garza – Hume e da Arturo Olvera e pubblicato nel 2001 su PNAS (vedere la bibliografia). In allegato all'articolo, i quattro ricercatori hanno pubblicato un grande archivio (*Appendix.pdf* all'indirizzo http://www.pnas.org/content/suppl/2011/08/26/1107737108.DCSupplemental): esso consta di ben 459 pagine. Vi sono riprodotte le mappe con due differenti misurazioni: una corrisponde a quella disegnata nel Codice e l'altra a quella che fornisce la superficie massima.

Di ciascun terreno sono indicate le lunghezze dei lati e l'area.

I dati sono stati ricalcolati con almeno due metodi:

* la *formula degli agrimensori*;
* la *formula di Bretschneider* per determinare l'area massima di ciascun terreno.

- APPROFONDIMENTO -

La carta degli Aztechi

Le Biblioteche di diversi Stati conservano alcuni codici miniati che descrivono usi e costumi della civiltà azteca. Alcuni contengono solo pittogrammi, altri (dopo la conquista spagnola) furono scritti nei caratteri dell'alfabeto latino nella lingua degli Aztechi, il *nahuatl*, oppure in spagnolo e talvolta in latino.

I più antichi furono scritti dagli scribi Aztechi su una carta chiamata *amatl*, ricavata dalla bollitura della corteccia interna di alberi del genere *Ficus* e in particolare dalla varietà *Ficus Cotonifolia*. È conosciuta con l'espressione *bark paper* (che in americano significa "carta di corteccia").

La sua produzione sembra abbia avuto inizio intorno al I millennio a.C., ad opera di altri popoli della Mesoamerica.

La dominazione spagnola portò all'introduzione della carta di fabbricazione europea: ad esempio, l'analisi delle filigrane della carta usata per il "*Códice de Santa María Asunción*" ha mostrato che essa era di produzione italiana e spagnola.

È assai probabile che molti antichi codici aztechi siano stati distrutti dagli spagnoli.

L'*amatl* è prodotta ai giorni nostri in Messico e in altri Stati dell'America centrale e perfino in Italia. La sua natura rugosa la avvicina alla pergamena. Viene usata per realizzare biglietti decorati, borse di carta e immagini dipinte.

I pittogrammi degli Aztechi

Gli Aztechi non giunsero a elaborare un sistema di scrittura alfabetico, ma usarono i pittogrammi per rappresentare gli oggetti.

Un pittogramma è un segno grafico che indica un dato oggetto o un organo del corpo umano, ad esempio un *cuore*, ma non fornisce il suono necessario per identificarlo.

- -

L'unità di misura della lunghezza

L'unità di misura della lunghezza usata dagli Aztechi era il *tlalcuahuitl* (o *tlalquahiutl*), che per semplicità è qui abbreviata con T.

Un quadrato di lato 1 T ha area uguale a 1 T^2.

L'unità T equivaleva alla lunghezza di 2,5 metri, ma talvolta si discostava da questo standard.

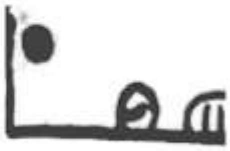
L'unità di superficie T^2 valeva 2,5*25 = 6,25 m^2.

I simboli per le frazioni

Gli Aztechi usarono alcuni pittogrammi per indicare le frazioni di T:

* una *freccia* (*arrow*) valeva ½ T ;
* un *braccio* (*arm*) 1/3 T ;
* un *osso* (*bone*) 1/5 T ;
* un *cuore* (*heart*) 2/5 T ;
* una *mano* (*hand*) 3/5 T .

La figura che segue è tratta dallo studio di Williams e Harvey e si riferisce ai simboli contenuti nel *Codice di Santa Maria Asuncion*.

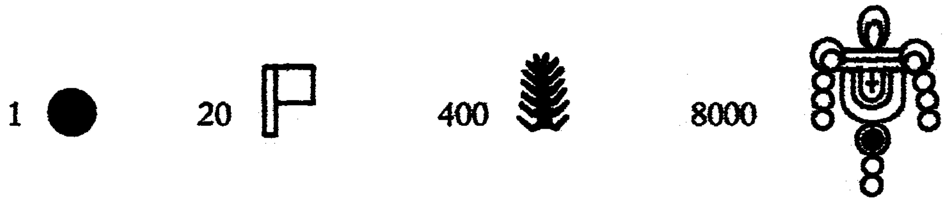
Monad glyphs in Acolhua land documents	Glosses Nahuatl	Proportion of monads to standard “land rods” (T)	Fractional equivalent of (T)	Metric equivalent (1T equals 2.5 m)
	Cemmatl one hand	5 : 3	3 / 5	1.5 m
	Cenyollotli one heart	5 : 2	2 / 5	1.0 m
	Cemomitl one bone	5 : 1	1 / 5	0.5 m
	Cemacolli one arm	3 : 1	1 / 3	0.83 m
	Cemmitl one arrow	2 : 1	1 / 2	1.25 m

<u>La numerazione in base 20 degli Aztechi</u>

Dalle pp. 60-61 del volume di George Gheverghese Joseph riproduciamo i seguenti passi:

“ …Gli aztechi erano un popolo che, all’inizio del XIII secolo d.C., era migrato da nord verso il Messico e qui aveva fondato un vasto impero basato sull’imposizione di tributi, esercitandone il controllo amministrativo dalla capitale Tenochtitlan, che assurse al massimo splendore tra i XV secolo e l'inizio del XVI. La prosperità dell'impero si fondava su un sistema agricolo altamente centralizzato, che prevedeva la coltivazione intensiva degli appezzamenti esistenti, la costruzione di reti d'irrigazione e la bonifica delle zone palustri. Il prodotto principale dei raccolti, il granoturco, occupava un posto preminente nel sistema numerico azteco.

“Questo sistema era vigesimale (in base 20) e utilizzava quattro simboli diversi. Il simbolo per l'unità era una “macchia” che rappresentava il guscio del seme; il simbolo per il 20 era una bandiera, che veniva comunemente usata per contrassegnare i confini delle terre; il 400 era rappresentato da una pianta di granoturco schematizzata; e si pensa che il simbolo di 8000 fosse una “bambola di granoturco”, simile alle figure ornamentali che venivano intrecciate con la paglia in alcune regioni dell'Europa. I quattro simboli erano:



“…Essi svilupparono anche un complicato sistema di calcolo nel quale le basi dipendevano dalla specie degli oggetti da contare. I vestiti o le focacce sarebbero stati contati a ventine, mentre gli oggetti rotondi come uova o arance [o *frutti*] a decine…”.

È dubbio che gli Aztechi conoscessero le *arance*.

Il contenuto dei codici

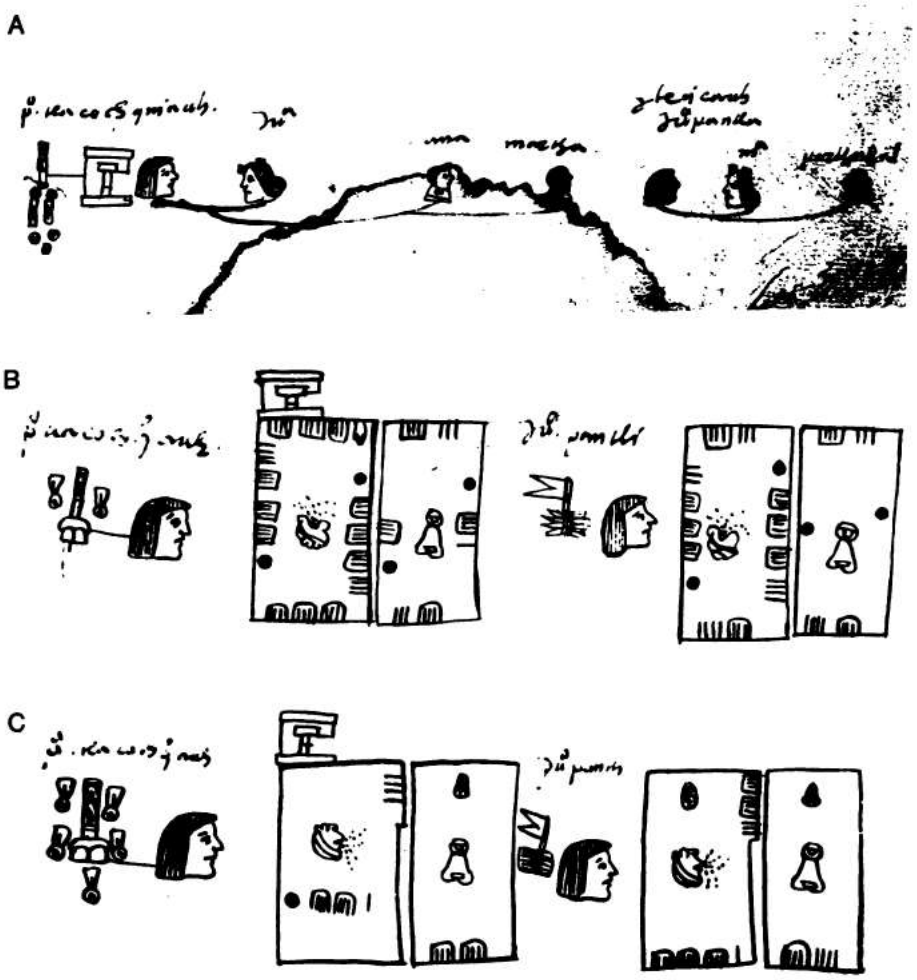
I due codici citati sono dei veri e propri registri catastali.

Le registrazioni contenute nei due codici sono divise in *tre parti*:

* Nella *prima parte* sono mostrati i riferimenti ai conduttori delle singole proprietà.
* Nella *seconda parte* sono disegnate le mappe delle singole particelle con indicate le lunghezze dei lati.
* Nella *terza parte* sono scritte le superfici e le indicazioni sulla natura dei terreni.

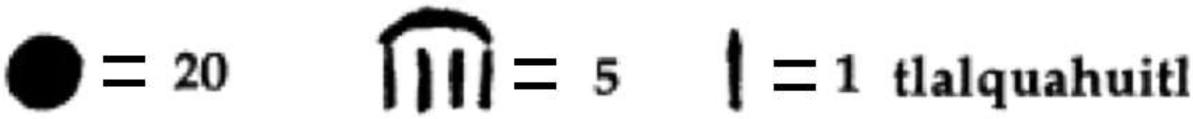
Nei due Codici sono usati simboli aritmetici con valori differenti da quelli presentati nel precedente paragrafo.

La figura che segue proviene dal “*Códice de Santa María Asunción*” e riassume unendole in un’unica rappresentazione le tre diverse indicazioni riferite agli stessi conduttori e ai terreni da loro coltivati [7]:

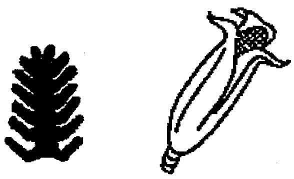


Nella striscia superiore (indicata in figura con A) erano indicati i nomi dei conduttori.

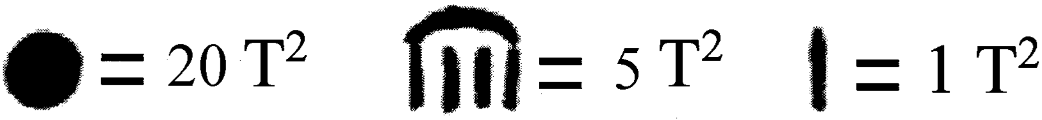
Nella striscia centrale (B) venivano scritte le dimensioni dei lati dei quadrilateri: erano usati i seguenti simboli:



Per le maggiori dimensioni, era impiegata l’unità rappresentata da una *pannocchia* di granoturco che valeva 400 T:

 = 400 T

Infine, nella striscia inferiore venivano riportate le aree in T^2. Le aree erano definite per mezzo degli stessi simboli che però assumevano un valore differente:



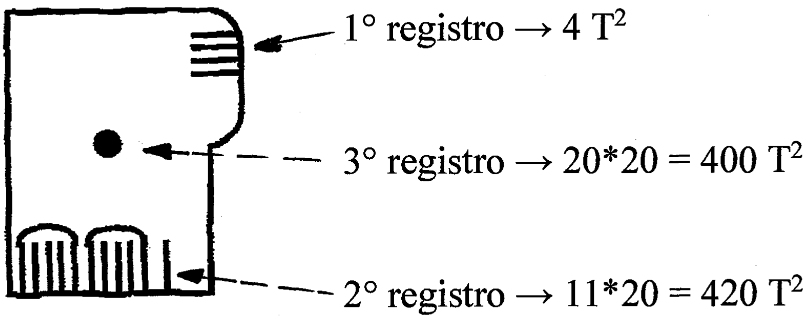
\- APPROFONDIMENTO -

<u>Il significato dei *registri* delle mappe catastali</u>

Le mappe della terza striscia vista in precedenza sono state interpretate come *tre diversi registri*.

La spiegazione del valore dei simboli usati per le aree deve tenere conto del fatto che gli Aztechi usavano un sistema numerico in base 20 e con misure lineari scritte in questa base, l'area era espressa da numeri in base 20^2. In queste mappe venivano scritte le *aree* espresse in T^2.

All'interno delle mappe erano impiegati tre diversi *registri*, come mostrano i due esempi che seguono.



Il *primo registro* contiene 4 linee ciascuna del valore di 1 T^2: il valore di questo registro era compreso fra 1 e 19. Se quei simboli erano necessari, il quadrilatero veniva modificato con l'aggiunta nell'angolo superiore destro di una sporgenza o gobba.

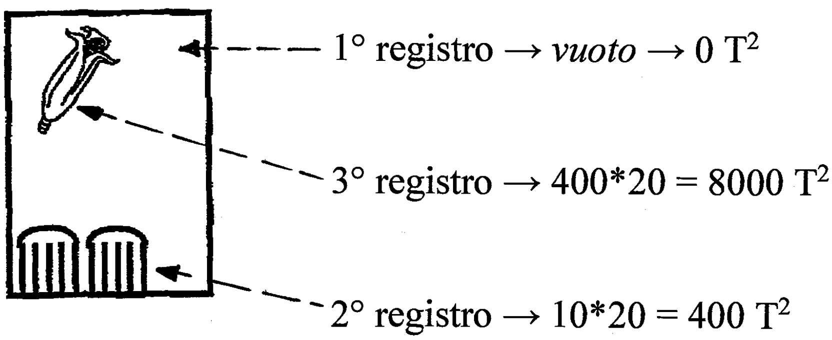
Il *secondo registro* veniva scritto in basso.

Infine, il *terzo registro* era collocato al centro del quadrilatero.

L'area del campo era data dalla somma dei numeri scritti nei tre registri:

Area $_{\text{CAMPO}}$ = 1° registro + 2° registro + 3° registro = 4 T^2 + 420 T^2 + 400 T^2 = 824 T^2.

Nel secondo esempio, il *primo registro* è vuoto:



Il *secondo registro* contiene 10 unità di 20 T^2 , mentre il *terzo registro* contiene una *pannocchia* di granoturco che vale 400 volte l'unità pari a 20 T^2.

In questo caso, l'area del campo è:

Area $_{\text{CAMPO}}$ = 2° registro + 3° registro = 400 T^2 + 8000 T^2 = 8400 T^2 .

I due grafici qui sopra sono stati rielaborati da pagina 29 di “Algebra. Activities for Many Cultures” di Beatrice Lumpkin, citato in bibliografia.

\- -

Alcuni strumenti tecnici

Le popolazioni della Mesoamerica, fra le quali gli Aztechi, conoscevano e usavano alcuni strumenti tecnici per il disegno, l’artigianato e l’edilizia: il compasso, il filo a piombo, la livella, la squadra, la corda (per misurare ad esempio le lunghezze dei campi coltivati).

Riguardo alla *corda* usata dagli agrimensori Aztechi sembra ragionevole ipotizzare che essi ne usassero di diverse dimensioni e divise in parti uguali: le più lunghe ripartite in tratti di lunghezza uguale a un *tlalcuahuitl* (1 T) e le corde più corte divise in lunghezze corrispondenti ai *cinque* sottomultipli di questa unità (*freccia, braccio, osso, cuore* e *mano*).

La squadra serviva a definire angoli retti.

Probabilmente, il compasso aveva varie forme: la più grande consisteva in un cordicella recante agli estremi dei pioli: uno strumento simile è usato anche nei tempi moderni dai giardinieri per tracciare aiuole ellittiche.

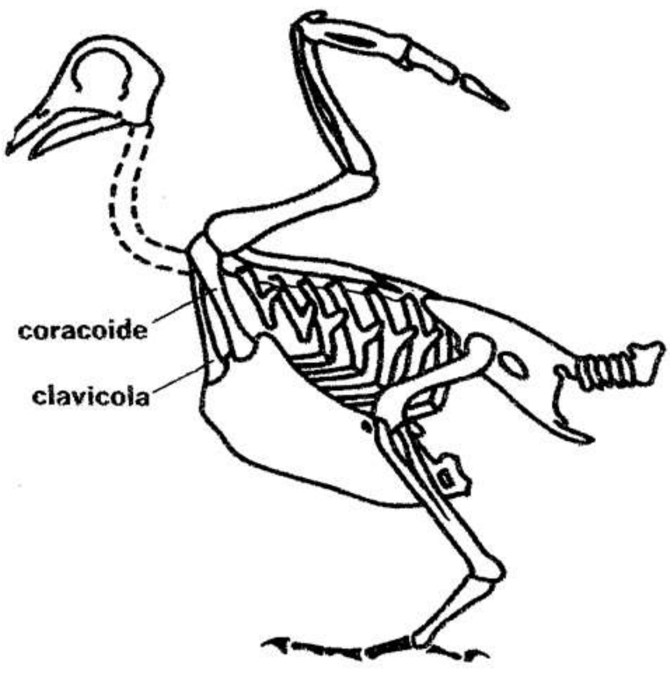
Un più piccolo compasso poteva servire per disegnare circonferenze, per costruire poligoni e per dividere angoli.

È stato ipotizzato (Francine Vinette, in Closs, p. 388) che la popolazione di Teotihuacan (presso Città del Messico) nel periodo compreso fra il 100 a.C. e il 250 d.C. conoscesse l’uso di uno strumento simile a un compasso con estremità appuntite. Le pitture murali presenti nelle rovine del tempio della grande dea Tepantitla nella stessa località, mostrerebbero tracce dell’uso di uno strumento con una o due punte. Lo strumento era di osso o di legno? Recava punte di ossidiana o forse di rame? Sono solo ipotesi.

Nel corso del I millennio a.C., le popolazioni native dell’America settentrionale e centrale avevano addomesticato il *tacchino*.

Gli Aztechi producevano ceramiche con l’aiuto di stampi: non sembra che conoscessero la ruota o tornio del vasaio. Ciò può avere comportato delle difficoltà nell’ideazione del compasso.

I volatili, famiglia della quale fa parte anche il tacchino, presentano una particolare struttura scheletrica: le loro due clavicole si sono fuse per formare un unico *osso a forchetta*, chiamato anche furcula o forcella, a forma di Y, come mostra l’esempio che segue dello scheletro di un pollo:

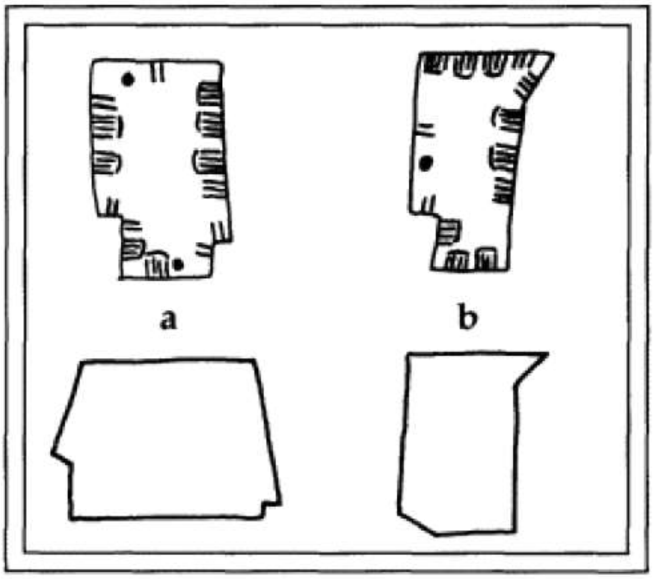


Presso certi popoli antichi, questo osso è forse stato utilizzato per costruire alcuni fra i primissimi compassi: il pollo e altre varietà del pollame offrivano la materia prima. Gli Aztechi conoscevano questa proprietà dello scheletro dei volatili?

Un'altra fonte di ispirazione per l'idea del compasso di piccole dimensioni può essere venuta dalla *fionda*, un antico strumento usato nella caccia e nella guerra, con la forma di una Y. Gli Aztechi la usarono?

I terreni disegnati nei Codici furono tracciati con una certa approssimazione e spesso senza rispettare i rapporti di scala, quasi che oltre alla conoscenza delle dimensioni, gli scribi Aztechi fossero interessati a una rappresentazione più topologica che geometrica.

La figura che segue è a p. 29 dell'edizione del "*Códice de Santa María Asunción*" di Williams e Harvey:



In alto sono i grafici di due campi (con le lunghezze dei lati) contenuti nel Codice e in basso le figure sono state ridisegnate in scala da Williams e Harvey.

Gli scribi usavano righelli molto rudimentali o tracciavano i segmenti a mano libera? Oppure le deformazioni delle linee sono dovute alla carta e agli inchiostri usati?

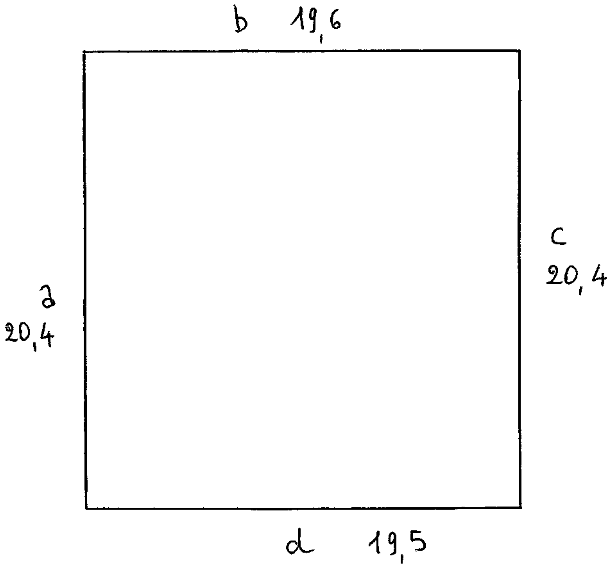
<u>I metodi usati dagli agrimensori Aztechi per calcolare le superfici</u>

Stando alle ricostruzioni che sono state effettuate dai ricercatori Autori dei saggi citati in bibliografia, gli agrimensori Aztechi avrebbero usato una pluralità di metodi per calcolare la superficie dei terreni di forma quadrangolare. Essi possono essere classificati in *cinque* distinti gruppi:

A. Prodotto delle lunghezze di due lati *adiacenti*.
B. Prodotto della media delle lunghezze di due lati *opposti* per un lato adiacente.
C. Formula degli agrimensori.
D. Regola del triangolo.
E. Regola della compensazione (più o meno).

<u>A – Prodotto delle lunghezze di due lati adiacenti</u>

Il primo caso è descritto nella figura che segue, che mostra un campo con le lunghezze indicate sulla figura:



Le dimensioni dei quattro lati sono le seguenti:

* a = 20 + *cuore* = 20 + 2/5 = 20,4 T;
* b = 19 + *mano* = 19 + 3/5 = 19,6 T;
* c = 20 + *cuore* = 20 + 2/5 = 20,4 T;
* d = 19 + *freccia* = 19 + ½ = 19,5 T.

L'area è calcolata moltiplicando le *lunghezze* arrotondate *per difetto* dei due lati adiacenti *a* e *b*:

Area ≈ a * b ≈ 20 * 19 ≈ 380 T^2.

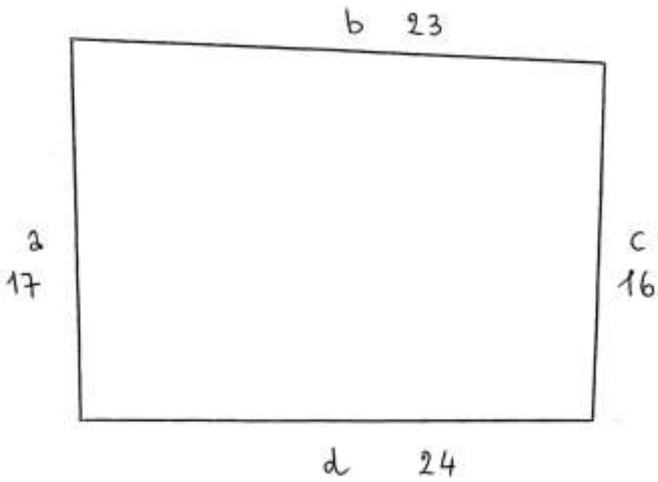
In questo caso, l'area poteva essere ricavata dal prodotto delle lunghezze, arrotondate *per difetto*, di qualsiasi coppia di lati adiacenti:

Area ≈ a * b ≈ b * c ≈ c * d ≈ d * a . Infatti, sostituendo alle quattro coppie le lunghezze dei corrispondenti lati, il risultato non cambia:

Area ≈ 20 * 19 ≈ 19 * 20 ≈ 20 * 19 ≈ 19 * 20 ≈ 380 T^2.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Il secondo caso è presentato nella figura che segue:



L'area del quadrilatero è calcolata moltiplicando le lunghezze dei lati adiacenti *a* e *b*:

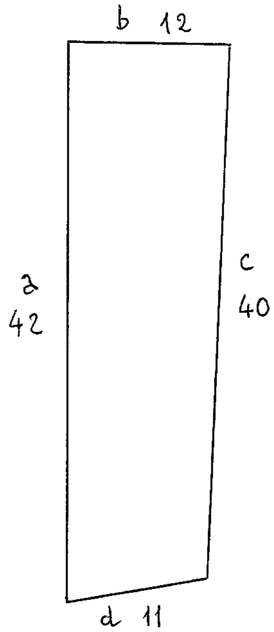
Area = a * b = 17 * 23 = 391 T^2.

Se fossero state usate le altre tre coppie di lati adiacenti, i risultati sarebbero stati leggermente diversi:

b * c = 23 * 16 = 368 T^2 ;
c * d = 16 * 24 = 384 T^2;
d * a = 24 * 17 = 408 T^2 .

<u>B – Prodotto della media delle lunghezze di due lati opposti per quella di un lato adiacente</u>

Nel primo caso, il quadrilatero ha la forma e le dimensioni contenute nella figura che segue:

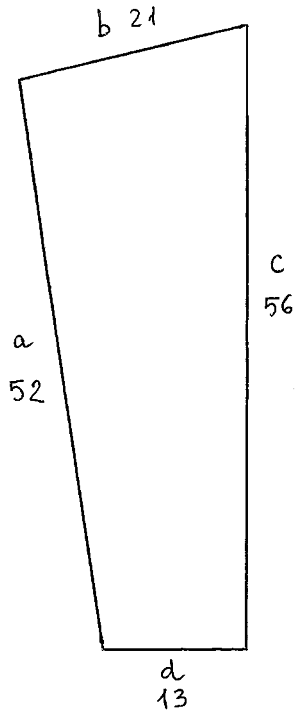


La sua area è calcolata da

Area = (a + c)/2 * d = (42 + 40)/2 * 11 = 41 * 11 = 451 T^2.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Nel secondo caso, il quadrilatero ha lati lunghi 52, 21, 56 e 13 T:

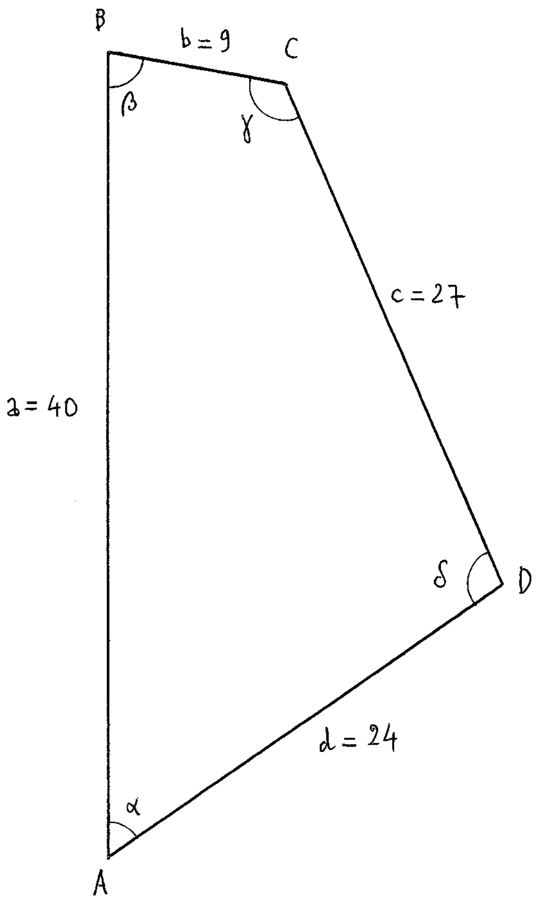


La sua area vale

Area = a * (b + d)/2 = 52 * (21 + 13)/2 = 52 * 17 = 884 T^2.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Nel terzo caso, il quadrilatero ha lati lunghi 40, 9, 27 e 24 T:



La sua area è data da

Area = c * (b + d)/2 = 27 * (9 + 24)/2 = 27 * 16,5 = 445,5 T^2, ma sul *Codice* è scritto 432 T^2, perché probabilmente l'espressione (9 + 24)/2 è stata arrotondata per difetto all'intero più vicino, 16 T.

La soluzione fornisce un risultato chiaramente arrotondato *per difetto* perché trascura la presenza del lato più lungo, a = 40 T.

- APPROFONDIMENTO -

La formula di Bretschneider

Stando al disegno del terreno della figura precedente, i suoi angoli interni valgono:

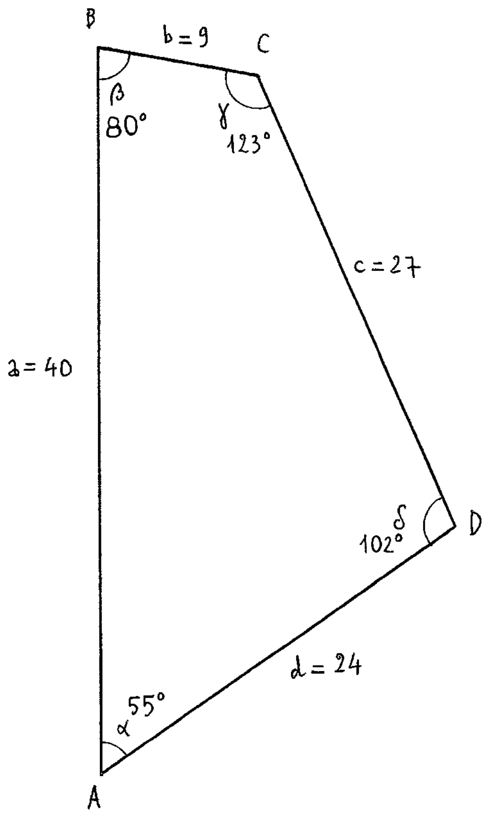
* $\alpha = 55°$;
* $\beta = 80°$;
* $\gamma = 123°$;
* $\delta = 102°$.

Le somme delle ampiezze delle due coppie di angoli opposti valgono:

$\alpha + \gamma = 55 + 123 = 178°$

$\beta + \delta = 80 + 102 = 182°$.

Il quadrilatero ABCD *non è ciclico* perché non può essere inscritto in un cerchio: solo tre dei suoi quattro vertici giacciono sulla stessa circonferenza. La figura riproduce la precedente con l'aggiunta delle ampiezze degli angoli:



A questa famiglia di quadrilateri è applicabile la formula di Bretschneider, dal nome del matematico tedesco Carl Anton Bretschneider (1808-1878) che la propose nel 1842. Essa è un'estensione della formula di Brahmagupta e serve a calcolare l'area di qualsiasi quadrilatero convesso, anche non ciclico: come vedremo con un esempio, la formula è applicabile anche ai quadrilateri *non convessi*.

La formula è:

$$\text{Area} = \sqrt{(q-a)*(q-b)*(q-c)*(q-d) - a*b*c*d * \cos^2[(\alpha+\gamma)/2]}$$

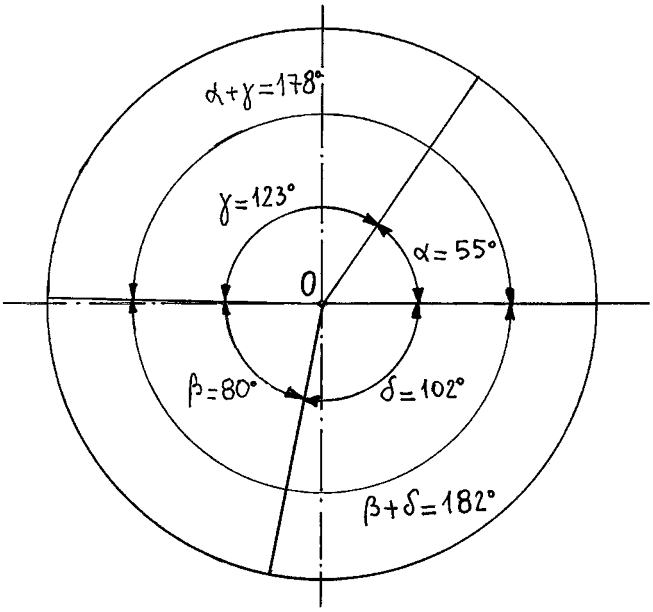
Nella formula, *q* è il semiperimetro che è ricavato dal perimetro *p*:
p = a + b + c + d e q = (a + b + c + d)/2 .
L'espressione

$$\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)$$

può essere sostituita con la sua equivalente

$$\cos^2\left(\frac{\beta+\delta}{2}\right).$$

La figura mostra le ampiezze dei quattro angoli e dei due originati dalla somma delle coppie di quelli opposti:



Gli angoli formati dalle due coppie (α + γ) e (β + δ) sono detti *esplementari* perché sommati formano un angolo giro:

(α + γ) + (β + δ) = 360° . Infatti la somma delle ampiezze degli angoli interni di un quadrilatero è uguale a 360°.

Il coseno degli angoli somma è:

cos (α + γ)/2 = cos (178/2)° ≈ 0,001745 ;

cos (β + δ)/2 = cos (182/2)° = cos 91° ≈ – 0.001745 .

In valore assoluto, i due dati sono identici.

Il perimetro *p* del quadrilatero è: p = a + b + c + d = 40 + 9 + 27 + 24 = 100 .
Il semiperimetro *q* vale q = 50.

Applicando la formula di Bretschneider a questo quadrilatero si ottiene l'area:

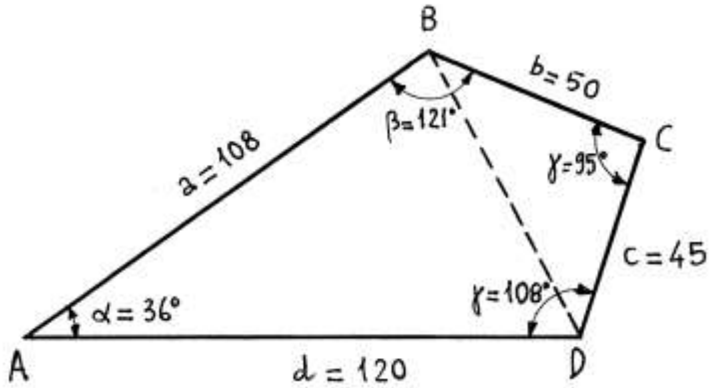
$$\text{Area}_{ABCD} = \sqrt{(50-40)*(50-9)*(50-27)*(50-24) - 40*9*27*24 * 0{,}001745^2} \approx$$

$$\approx \sqrt{245180 - 71{,}0539} \approx \sqrt{245108{,}9461} \approx 495{,}084\ T^2 .$$

Nell'articolo della Del Carmen Jorge, della Williams e di altri due AA., citato in bibliografia [2], è stata impiegata la formula di Bretschneider a tutti i terreni: nel caso specifico, hanno ottenuto un'*area massima* di 495,2 T^2.

<u>La formula di Bretschneider e i quadrilateri non convessi</u>

Il quadrilatero ABCD è *convesso* perché i segmenti che uniscono due punti qualsiasi, ad esempio i vertici B e D, giacciono completamente al suo interno.



Il perimetro *p* è: $p = a + b + c + d = 108 + 50 + 45 + 120 = 323$ e il semiperimetro *q* vale $q = p/2 = 323/2 = 161{,}5$.

Le somme delle coppie di angoli opposti sono:

$(\alpha + \gamma) = 36° + 95° = 131°$

$(\beta + \delta) = 121° + 108° = 229°$.

I due coseni valgono:

$\cos (131/2)° \approx 0{,}41469$

$\cos (229/2)° \approx -0{,}41469$.

In valore assoluto i due coseni sono uguali:

$|0{,}41469| = |-0{,}41469|$.

Elevati al quadrato, i due coseni danno: $(\cos 131/2°)^2 \approx 0{,}17197$.

Calcoliamo il prodotto delle lunghezze dei quattro lati:

$a*b*c*d = 108*50*45*120 = 29160000$.

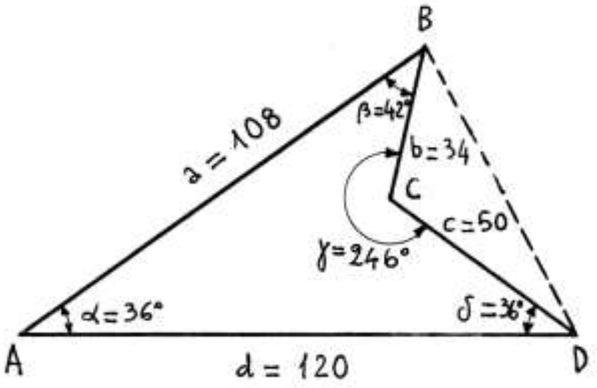
Con tutti questi possiamo impiegare la formula di Bretschneider:

$$\text{Area}_{\text{ABCD}} = \sqrt{(161{,}5 - 108)*(161{,}5 - 50)*(161{,}5 - 45)*(161{,}5 - 120) - 29160000*0{,}17197} \approx$$

$$\approx \sqrt{28840492{,}44 - 5014659{,}357} \approx \sqrt{23825833{,}08} \approx 4881{,}17 .$$

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Il quadrilatero ABCD contenuto nella figura che segue *non è convesso*, perché il segmento BD che congiunge due suoi punti è *esterno* al poligono:



Il perimetro *p* è: p = a + b + c + d = 108 + 34 + 50 + 120 = 312 e il semiperimetro *q* vale q = p/2 = 312/2 = 156 .

Le somme delle coppie di angoli opposti sono:

(α + γ) = 36° + 246° = 282°

(β + δ) = 42° + 36° = 78° .

I due coseni valgono:

cos (282/2)° ≈ –0,77715

cos (78/2)° ≈ 0,77715 .

Anche in questo caso, i due coseni hanno lo stesso valore assoluto:

|–0,77715| =|0,77715| .

Elevati al quadrato, i due coseni danno: $(\cos 282/2°)^2 \approx 0{,}60396$.

Calcoliamo il prodotto delle lunghezze dei quattro lati:

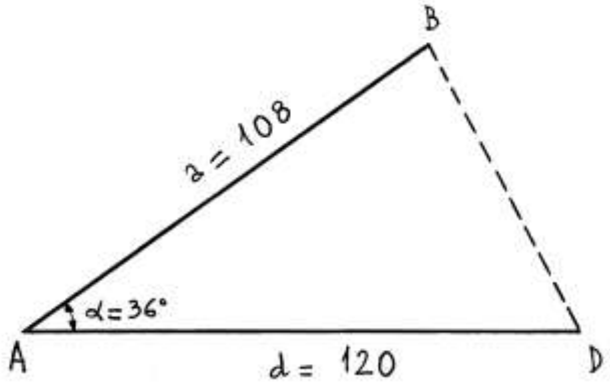
a*b*c*d = 108*34*50*120 = 22032000 .

Con tutti questi possiamo impiegare la formula di Bretschneider:

$$\text{Area}_{ABCD} = \sqrt{(156-108)*(156-34)*(156-50)*(156-120) - 22032000*0{,}60396} \approx$$

$$\approx \sqrt{22346496 - 13306446{,}72} \approx \sqrt{9040049{,}28} \approx 3006{,}67 \, .$$

I due quadrilateri, *convesso* e *non convesso*, derivano dallo stesso triangolo ABD:



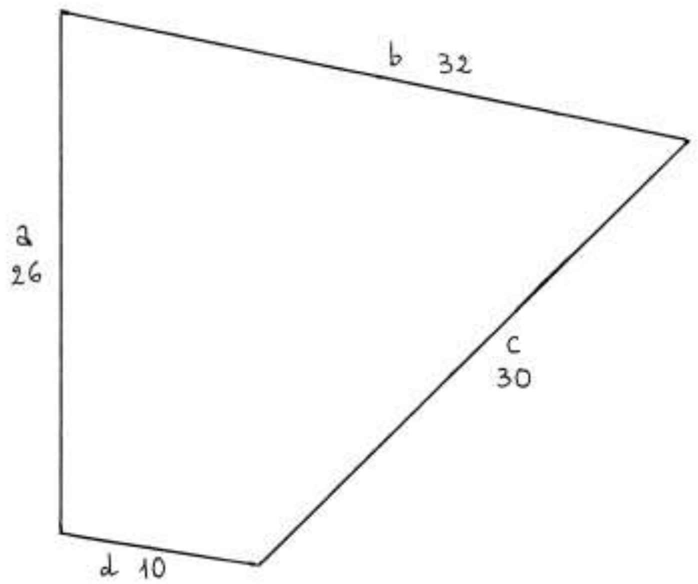
Calcolando l’area di ABD e detraendo da questa l’area del triangolo BCD del quadrilatero *non convesso* è facilissimo provare che il risultato dell’ultimo calcolo è corretto: la formula di Bretschneider si applica a tutti i quadrilateri, anche non convessi.

Nota: nell’APPENDICE 1 sono contenute ulteriori informazioni su questa formula.

- -

C – Formula degli agrimensori

Il primo caso considerato è quello di un quadrilatero con lati lunghi 26, 32, 30 e 10 T:



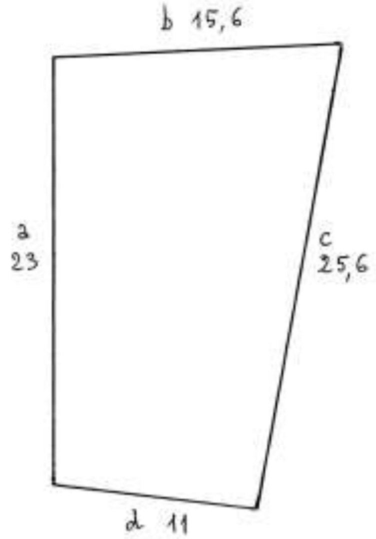
La sua area è calcolata con la *formula degli agrimensori*:

Area = [(a + c)/2]*[(b + d)/2] = [(26 + 30)/2]*[(32 + 10)] = 28 * 21 = 588 T^2.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Il secondo caso presenta un quadrilatero con lati lunghi come segue:

* a = 23 T ;
* b = 15 + *mano* = 15 + 3/5 = 15,6 T ;
* c = 25 + *mano* = 25 + 3/5 = 25,6 T ;
* d = 11 T.



Gli agrimensori Aztechi calcolarono l'area tralasciando la parte frazionaria delle lunghezze dei lati *b* e *c* e arrotondando il risultato per *difetto*:

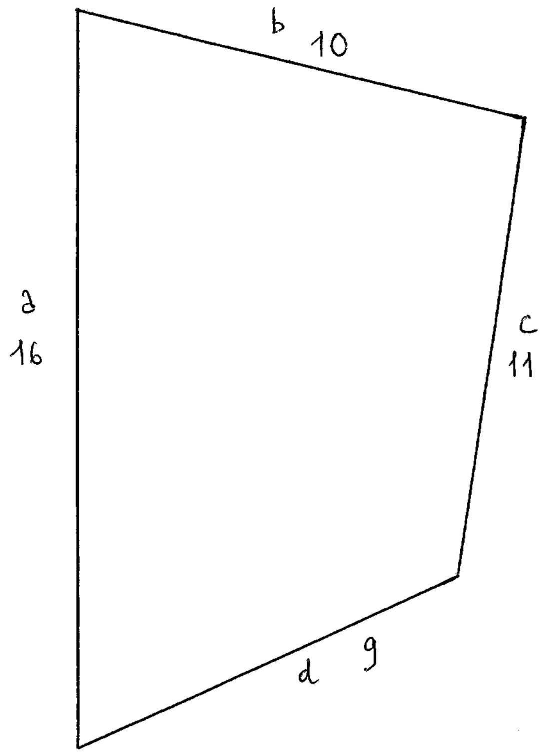
Area = [(a + c)/2]*[(b + d)/2] = [(23 + 25)/2]*[(15 + 11)] = 24 * 13 = 312 T^2.

Il risultato corretto, sempre calcolato con la stessa formula approssimata, è:

Area = [(a + c)/2]*[(b + d)/2] = [(23 + 25,6)/2]*[(15,6 + 11)] = 24,3 * 13,3 = 323,19 T^2.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Il terzo caso si riferisce a un quadrilatero con lati lunghi 16, 10, 11 e 9 T:



L'area è data da:

$$\text{Area} = [(a + c)/2]*[(b + d)/2] = [(16 + 11)/2]*[(10 + 9)] \approx 14 * 9 = 126\ T^2.$$

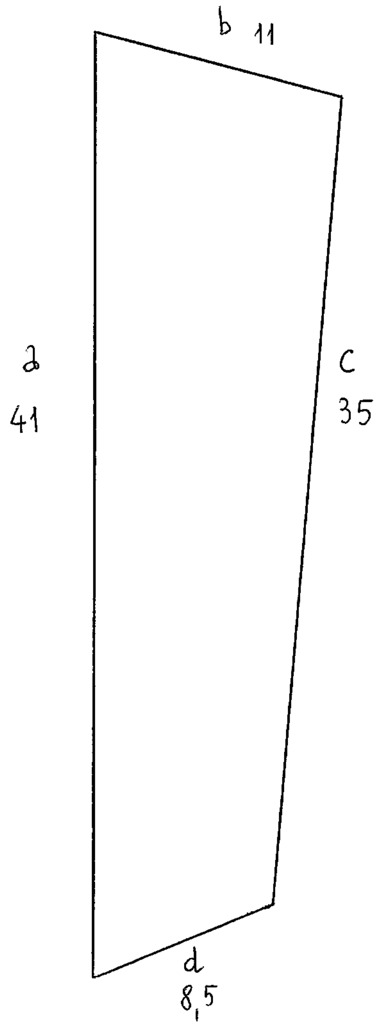
Il calcolo ha subito due arrotondamenti: la media fra le lunghezze di *a* e *c* è stata arrotondata per *eccesso* a 14 e quella fra le lunghezze di *b* e *d* per *difetto* a 9.

Il calcolo corretto è:

$$\text{Area} = [(a + c)/2]*[(b + d)/2] = [(16 + 11)/2]*[(10 + 9)] = 13{,}5 * 9{,}5 = 128{,}25\ T^2.$$

D – Regola del triangolo

Il *primo caso* considera un quadrilatero con lati lunghi 41, 11, 35 e (8 + *freccia* e cioè 8,5 T):



L’area è calcolata con la formula

$$\text{Area} = (a * b)/2 + (c * d)/2 = (41 * 11)/2 + (35 * 8{,}5)/2 \rightarrow$$

$$\rightarrow (41 * \mathit{12})/2 + (35 * \mathit{8})/2 \approx 246 + 146 = 386\ T^2.$$

In *corsivo* sono indicate le lunghezze arrotondate per eccesso o per difetto.

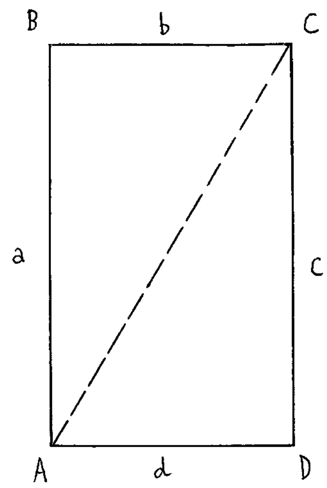
Il risultato corretto è

$$\text{Area} = (a * b)/2 + (c * d)/2 = (41 * 11)/2 + (35 * 8{,}5)/2 = 225{,}5 + 148{,}75 = 374{,}25\ T^2.$$

Come è messo in evidenza dalla formula, il metodo calcola l’area sommando i prodotti delle lunghezze di due coppie di lati *adiacenti*, quali sono le coppie “*a* e *b*” e “*c* e *d*”.

- APPROFONDIMENTO -

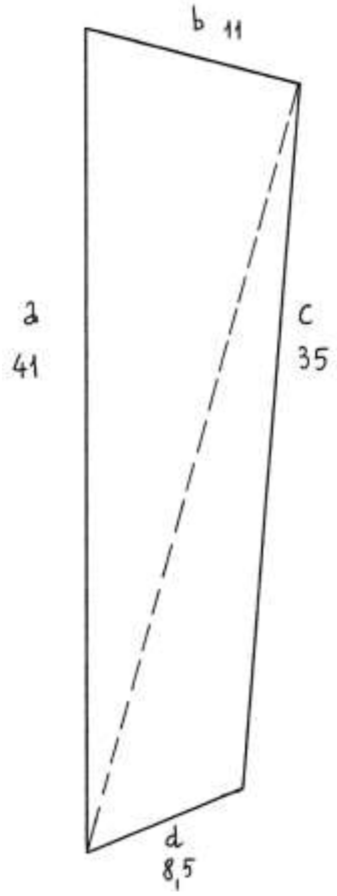
La *regola del triangolo* sembrerebbe derivata dall’assimilazione di un quadrilatero a un rettangolo, poi diviso in due triangoli rettangoli (o *quasi* rettangoli) da una diagonale (AC), come è il caso della figura che segue:



L’area del quadrilatero ABCD è ricavata da:

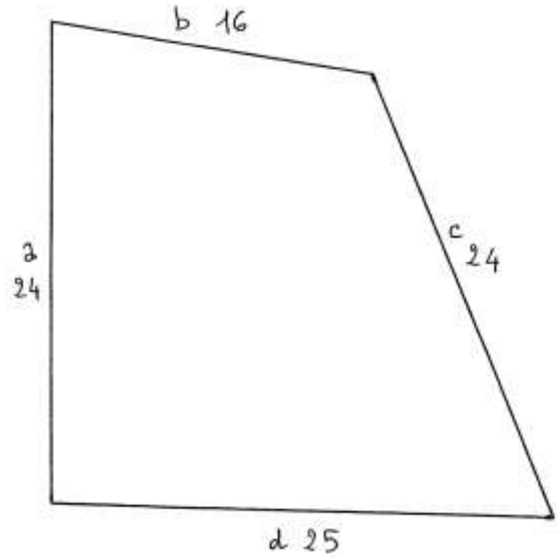
Area = (AB * BC)/2 + (CD * AD)/2 = (a * b)/2 + (c * d)/2, che riporta alla formula usata dagli agrimensori Aztechi per calcolare l’area di alcuni casi particolari di quadrilateri, apparentemente assimilabili a dei rettangoli, con sufficienza approssimazione.

Nel caso del quadrilatero della penultima figura, la diagonale lo divide in due triangoli che hanno lati indicati con le coppie *a*-*b* e *c*-*d* e con la diagonale in comune, ma esso è assai lontano dalla forma del rettangolo:



- -

Il *secondo caso* si riferisce a un quadrilatero che ha lati lunghi, in senso orario, 24, 16, 24 e 25 T:

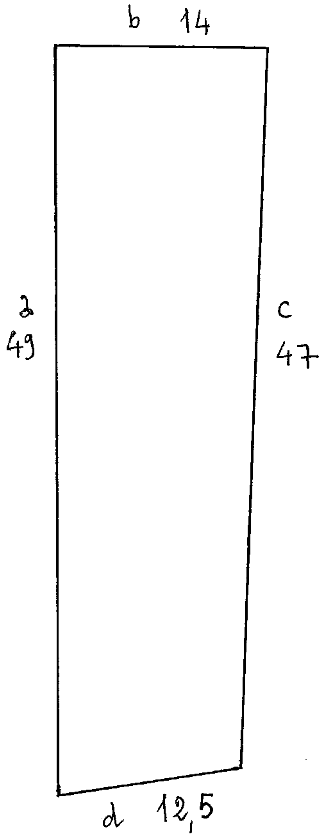


L'area è calcolata con la formula:

Area = (a * b)/2 + (c * d)/2 = (24 * 16)/2 + (24 * 25)/2 = 192 + 300 = 492 T^2.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Il *terzo caso* considera un quadrilatero con lati lunghi 49, 14, 47 e (12 + *freccia* = 12,5) T:



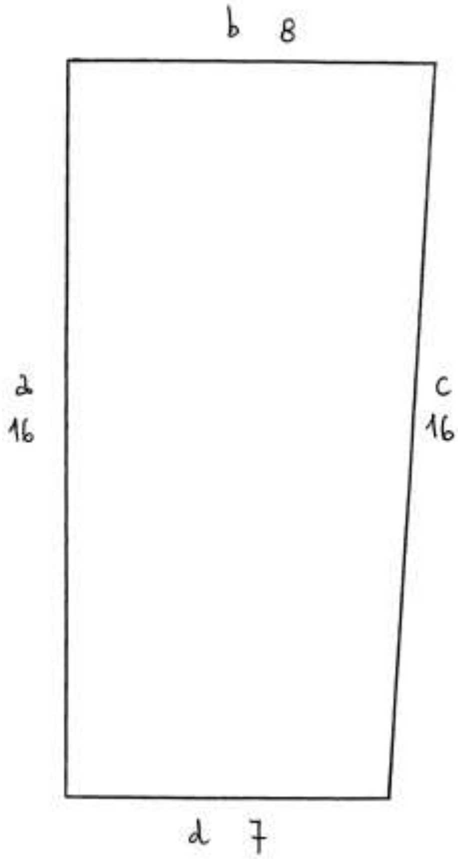
La sua area è:

Area = (a * d)/2 + (b * c)/2 = (49 * 12)/2 + (14 * 47)/2 = 294 + 329 = 623 T^2.

La lunghezza del lato *d* è arrotondata per difetto a 12 T.

E – Regola della compensazione (più o meno)

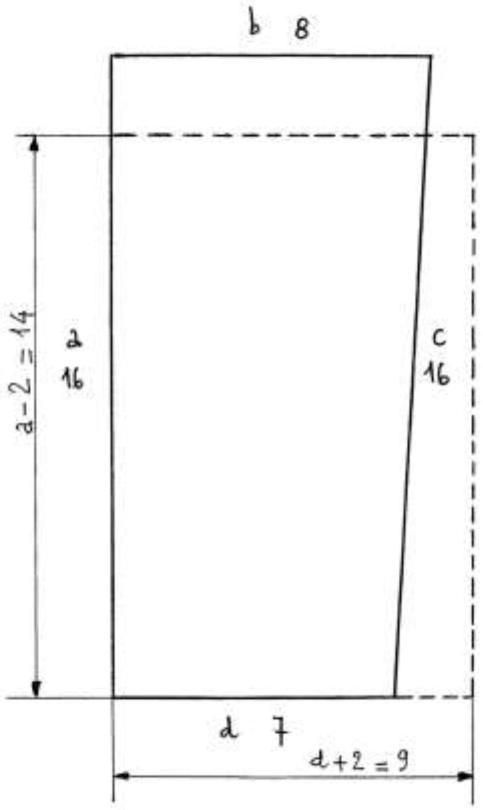
Il *primo caso* è quello di un quadrilatero con lati lunghi 16, 8, 16 e 7 T:



L’area è calcolata con il prodotto di due lati *adiacenti* (ad esempio *a* e *d*) alle lunghezze dei quali è aggiunta o sottratta la stessa cifra, in questo caso 2:

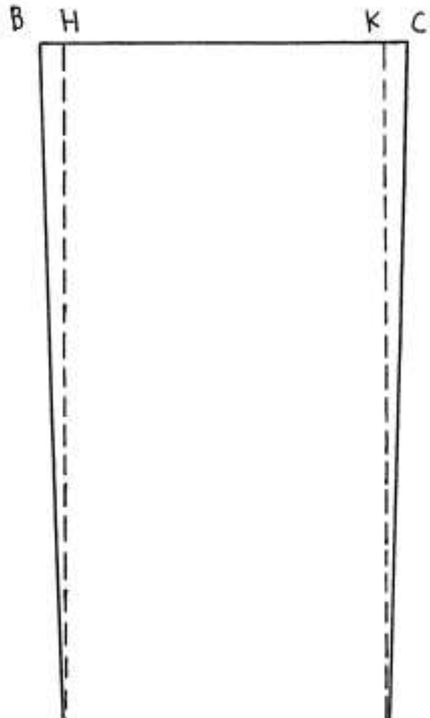
Area = (a – 2) * (d + 2) = (16 – 2) * (7 + 2) = 14 * 9 = 126 T^2.

Il quadrilatero è assimilato a un *rettangolo* che ha lati lunghi 14 e 9 T, disegnato con linee tratteggiate nella figura che segue:



- APPROFONDIMENTO -

Con buona approssimazione, il quadrilatero precedente può essere avvicinato a un *trapezio isoscele* con basi lunghe 8 e 7 T e lati obliqui lunghi 16 T:



Per calcolarne l'area è necessario ricavare l'altezza AH = DK:

$$AH = \sqrt{AB^2 - BH^2}.$$

Ma BH è:

$$BH = \frac{BC - AD}{2} = \frac{8-7}{2} = 0{,}5\ T \quad .$$

L’altezza AH è:

AH = √(16^2 – 0,5^2) = √(256 – 0,25) = √(255,75) ≈ 15,992 .

L’area del trapezio isoscele ABCD è:

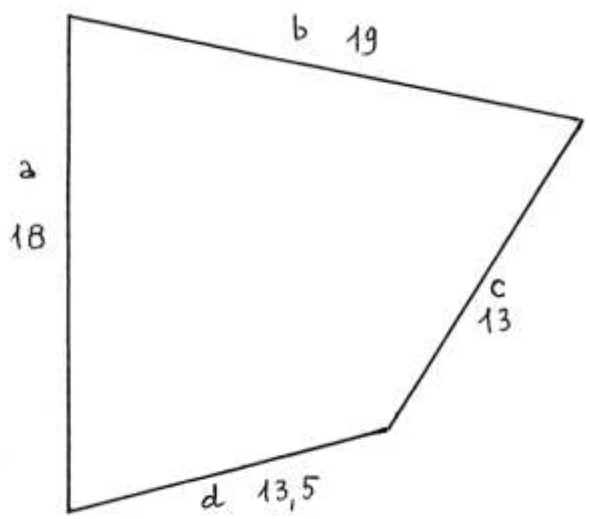
$$\text{Area trapezio} = \frac{AD + BC}{2} \cdot AH =$$

$$= \frac{7+8}{2} \cdot 15{,}992 = 119{,}94\ T^2$$

Il risultato è leggermente inferiore a quello calcolato dagli agrimensori Aztechi, 126 T^2.

- -

Il *secondo caso* è quello di un quadrilatero che ha lati lunghi 18, 19, 13 e (13 + *freccia* = 13,5) T:

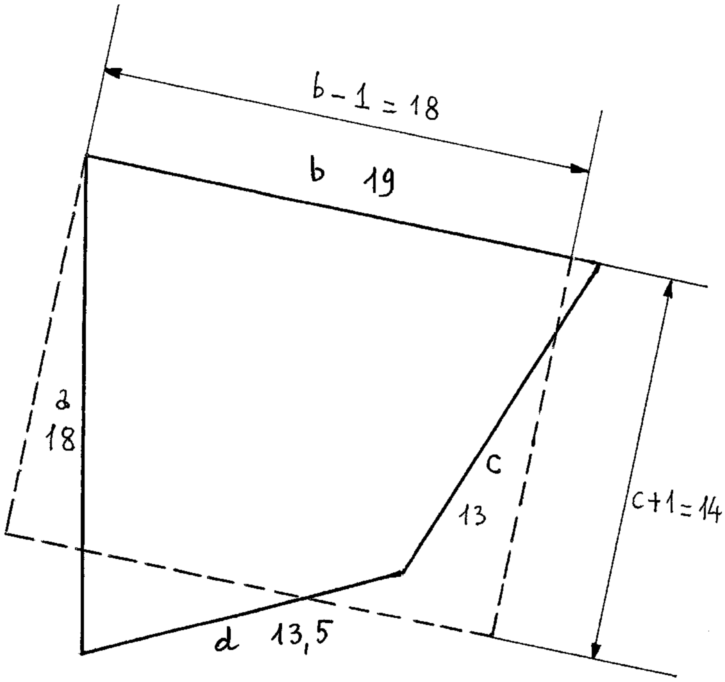


L’area è calcolata con la formula

Area = (b – 1) * (c + 1) = (19 – 1) * (13 + 1) = 18 * 14 = 252 T^2.

In questo caso alle due lunghezze è aggiunto il valore “1”.

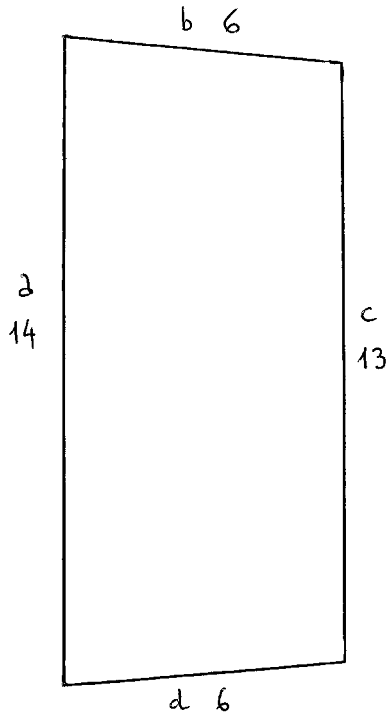
Il quadrilatero è così trasformato in un rettangolo che ha lati lunghi 18 e 14 T:



Nota: l’intero che viene aggiunto o sottratto alla/dalla lunghezza di un lato può essere 1 oppure 2. In una qualsiasi formula è usato *un* solo intero: 1 o 2.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

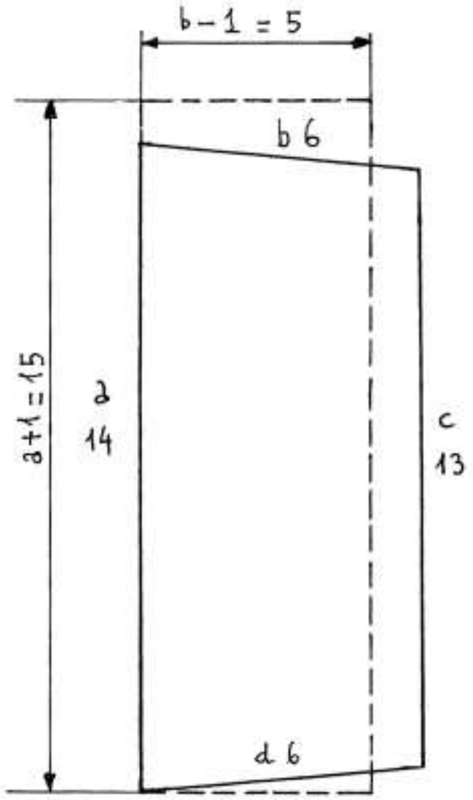
Il *terzo caso* è quello di un quadrilatero che ha lati lunghi 14, 6, 13 e 6 T:



La formula che ne calcola l’area è:

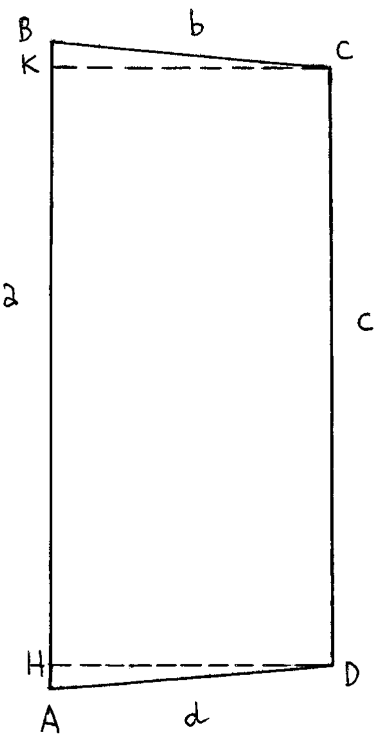
Area = (a + 1) * (b – 1) = (14 + 1) * (6 – 1) = 15 * 5 = 75 T^2.

Gli agrimensori Aztechi assimilarono questo quadrilatero a un rettangolo con lati lunghi 15 e 5 T:



- APPROFONDIMENTO -

Anche in questo caso, il quadrilatero è assimilabile a un *trapezio isoscele,* ABCD:



HD e KC sono due altezze del trapezio e hanno uguale lunghezza.
Procediamo a calcolare l'area del trapezio. L'altezza KC è data da

$$KC = \sqrt{BC^2 - BK^2}\,.$$

Ma

$$BK = AH = \frac{AB - CD}{2} = \frac{a - c}{2} = \frac{14 - 13}{2} = 0{,}5\ T$$

, per cui

$$KC = \sqrt{6^2 - 0{,}5^2} = \sqrt{36 - 0{,}25} \cong 5{,}979\ T.$$

L'area del trapezio è

$$Area_{ABCD} = \frac{AD + CD}{2} \cdot KC = \frac{14 + 13}{2} \cdot 5{,}979 = $$
$$= 80{,}7165\ T^2.$$

L'area calcolata dagli agrimensori Aztechi (75 T^2) è errata per *difetto*.

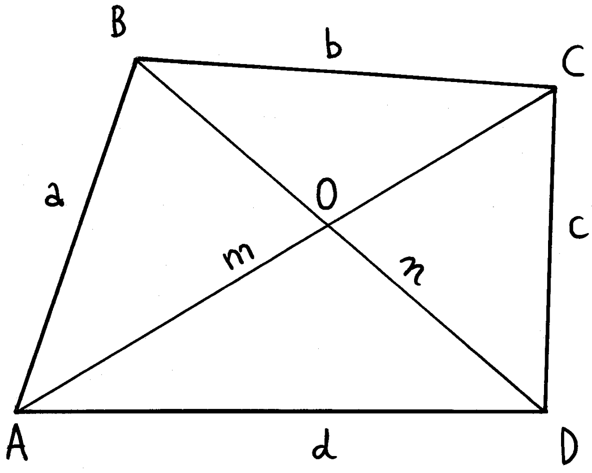
- -

<u>APPENDICE n. 1</u>

<u>Una variante della formula di Bretschneider</u>

Esiste una variante della formula di Bretschneider che, almeno in parte, tiene conto del teorema di Tolomeo relativo ai quadrilateri ciclici.

La variante si applica a tutti i quadrilateri, ciclici e non ciclici. Richiede soltanto la conoscenza delle lunghezze dei lati (*a*, *b*, *c*, e *d*) e delle diagonali (*m* e *n*).



ABCD è un quadrilatero *non ciclico*: i vertici dei lati sono definiti da lettere disposte in senso orario, a partire dal punto A e le lunghezze sono anch'esse stabilite in senso orario.

I lati hanno lunghezze convenzionali uguali a:

* AB = a = 70.
* BC = b = 80.
* CD = c = 61.
* DA = d = 100.

Le diagonali sono lunghe:

* AC = m = 120.
* BD = n = 102.

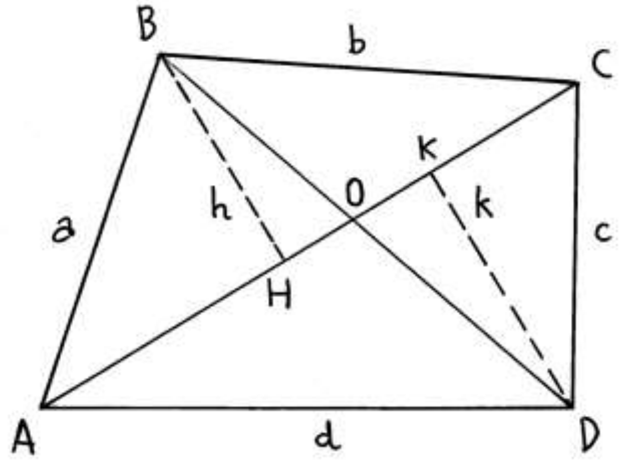
L'area è ricavata dalla formula che segue, che è la variante:

$$\text{Area}_{ABCD} = ¼ * \sqrt{4*m^2*n^2 - (b^2 + d^2 - a^2 - c^2)^2}$$

Nel caso specifico, l'area è:

$$\text{Area}_{ABCD} = ¼ * \sqrt{4*120^2*102^2 - (80^2 + 100^2 - 70^2 - 61^2)^2} \approx 5802{,}788 .$$

La validità della formula può essere verificata con il calcolo delle aree dei triangoli ABC e ACD che sono originati dalla diagonale AC:



BH è l'altezza *h* relativa a AC abbassata da dal vertice B e DK = *k* è l'altezza elevata dal vertice D.

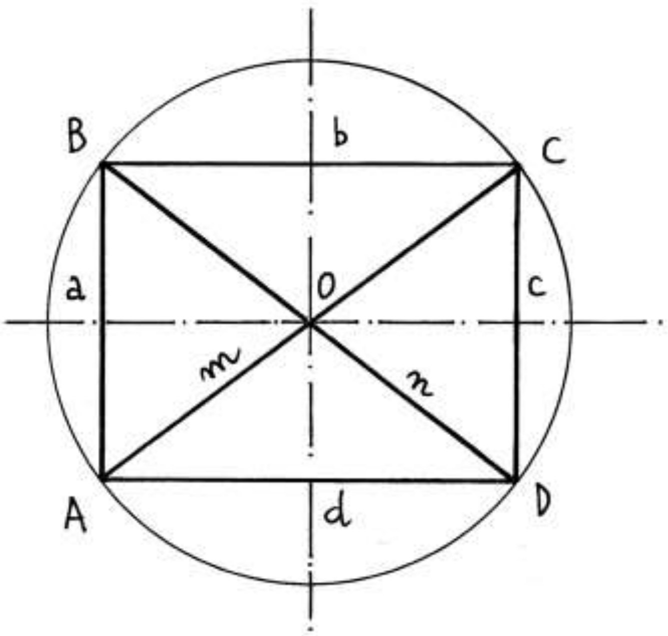
L'area di ABCD è uguale alla somma delle aree dei due triangoli ABC e ACD:

Area $_{ABCD}$ = Area $_{ABC}$ + Area $_{ACD}$ = AC*BH/2 + AC*DK/2 = AC*(BH + DK)/2 = AC*(h + k)/2 .

Occorre misurare con la massima precisione le lunghezze di *h* e di *k*. Sostituendo nell'ultima formula i valori delle due altezze è facile verificare la correttezza della variante.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

La formula variante è applicabile anche ai quadrilateri ciclici, come è il caso del rettangolo e del quadrato inscritti.



Il rettangolo ABCD ha lati convenzionalmente lunghi:

AB = CD = a = c = 6

AD = BC = b = d = 8 .

Le diagonali sono lunghe:

AC = m = 10 e BD = n = 10 .

Esse sono pure due diametri del cerchio di centro O in cui è inscritto il rettangolo.

Le diagonali scompongono il rettangolo in triangoli rettangoli con i lati lunghi 6-8-10: si tratta di terne pitagoriche derivate dalla terna primitiva 3-4-5.

Il calcolo dell'area del rettangolo è facilissimo:

Area ABCD = AD*AB = 8*6 = 48 .

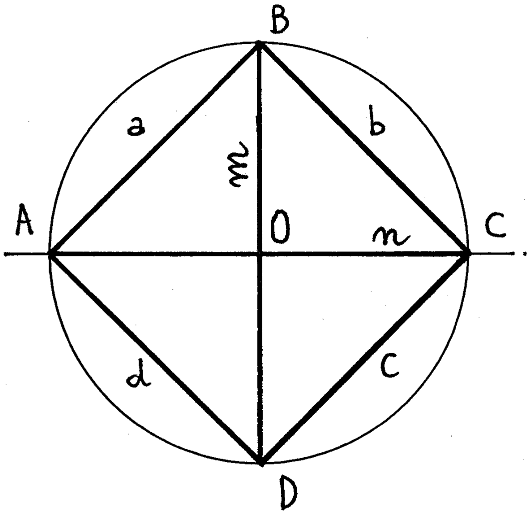
Usando la variante della formula di Bretschneider si ha:

$$\text{Area}_{ABCD} = \tfrac{1}{4} * \sqrt{4*10^2*10^2 - (8^2 + 8^2 - 6^2 - 6^2)^2} =$$

$$= \tfrac{1}{4} * \sqrt{40000 - 56^2} = \tfrac{1}{4} * \sqrt{36864} = \tfrac{1}{4} * 192 = 48 .$$

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Il caso del quadrato inscritto è simile a quello del rettangolo:



Le lunghezze convenzionali sono:

AC = n = 8 e BD = m = 8 .

I quattro lati sono lunghi: $a = b = c = d = 4*\sqrt{2}$.

L'area del quadrato è:

$\text{Area}_{ABCD} = a*b = (4*\sqrt{2})^2 = 32$.

Verifichiamo il risultato applicando la formula variante:

$$\text{Area}_{ABCD} = \tfrac{1}{4} * \sqrt{4*8^2*8^2 - [(4*\sqrt{2})^2 + (4*\sqrt{2})^2 - (4*\sqrt{2})^2 - (4*\sqrt{2})^2]^2} =$$

$$= \tfrac{1}{4} * \sqrt{4*64*64 - 0} = \tfrac{1}{4} * \sqrt{16384} = \tfrac{1}{4} * 128 = 32 .$$

Nota: la variante della formula di Bretschneider può essere scritta anche nella forma che segue (che è equivalente):

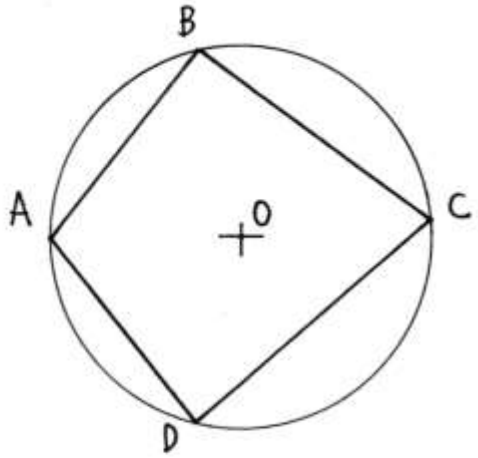
$$\text{Area}_{ABCD} = \sqrt{(q - a)*(q - b)*(q - c)*(q - d) - \tfrac{1}{4}*(a*c + b*d + m*n)(a*c + b*d - m*n)}$$

APPENDICE n. 2

La formula di Brahmagupta per i quadrilateri

Brahmagupta (598-668 d.C.) è stato un matematico e astronomo indiano. A lui si deve una formula per il calcolo dell'area di un *quadrilatero ciclico* conoscendo le lunghezze dei suoi lati.

Un quadrilatero è ciclico se i suoi vertici giacciono sulla circonferenza di un cerchio e cioè se esso vi è inscritto:



I lati del quadrilatero ABCD sono lunghi:

AB = a BC = b CD = c AD = d .

Il perimetro *p* è: p = a + b + c + d .

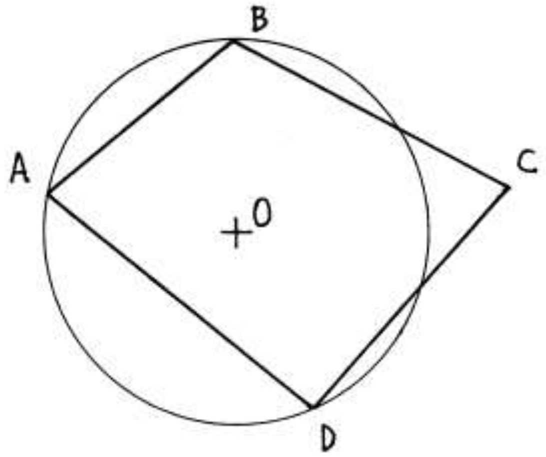
Il semiperimetro *q* è dato da q = p/2 .

La formula di Brahmagupta per l'area del quadrilatero ciclico ABCD è:

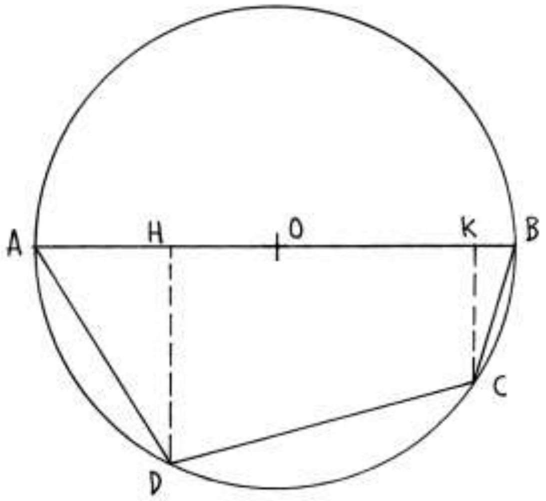
$$\text{Area} = \sqrt{(q-a)*(q-b)*(q-c)*(q-d)}$$

Questa formula calcola l'*area massima* del quadrilatero.

Nell'esempio che segue, il quadrilatero ABCD non è ciclico perché il vertice C giace fuori dal cerchio e la formula di Brahmaputra non può essere applicata:



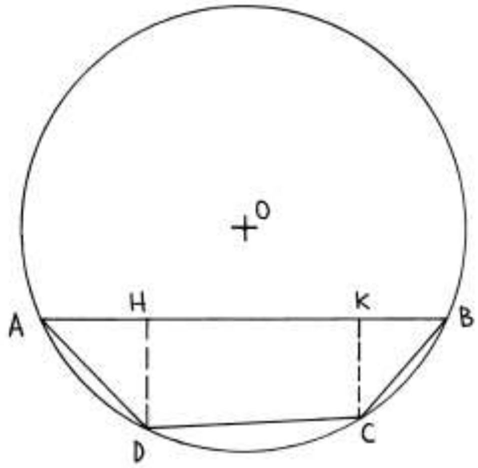
Nella prossima figura, ABCD è un quadrilatero ciclico inscritto sia in un cerchio che in un suo semicerchio perché il lato AB è anche un diametro:



DH e CK sono due perpendicolari al lato AB che dividono il quadrilatero in due triangoli rettangoli, AHD e BKC, e in un trapezio, DHKC.

L’area di ABCD è uguale alla somma delle aree di questi ultimi tre poligoni, ma l’applicazione della formula di Brahmagupta facilità i calcoli.

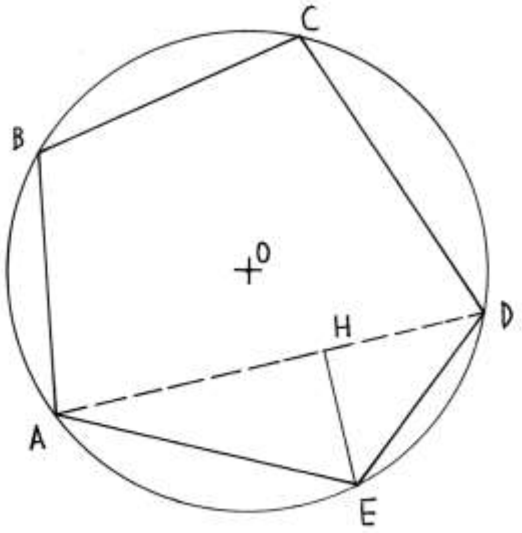
Anche il quadrilatero ABCD della figura che segue è *ciclico*:



Perfino in questo caso l’area è ricavabile con la formula di Brahmaputra.

%%%%%%%%%%%%%%%%

ABCDE è un *pentagono ciclico*, perché inscritto nel cerchio di centro O, ma non è un poligono regolare:



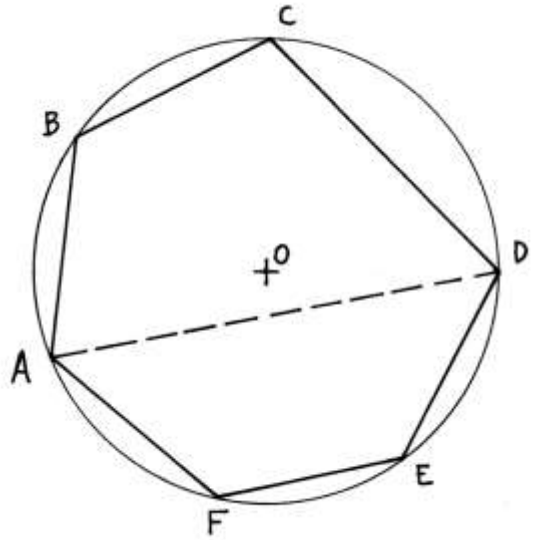
È possibile calcolare la sua area applicando la formula di Brahmagupta. Tracciare una *corda*, ad esempio AD, che unisce due vertici non consecutivi: il pentagono è ora diviso in due poligoni, il quadrilatero ciclico ABCD e il triangolo ADE.

Dal punto E disegnare l'altezza EH.

L'area di ABCDE è uguale alla somma delle aree di ABCD (ricavabile con la formula di Brahmagupta) e di ADE.

Analoghe considerazioni valgono per poligoni ciclici, anche non regolari, con un maggiore numero di lati.

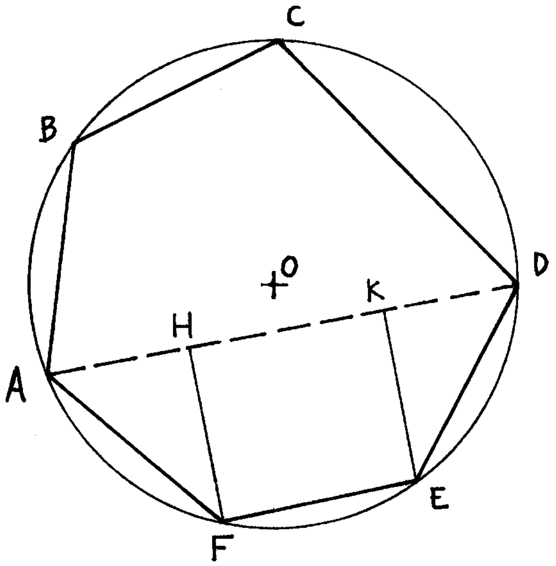
ABCDEF è un esagono ciclico, ma non regolare:



Tracciare la corda AD: essa unisce due vertici quasi opposti. Il poligono è suddiviso in due quadrilateri ciclici: ABCD e ADEF.

L'area dell'esagono è uguale alla somma delle aree dei due quadrilateri calcolate con la formula di Brahmagupta.

Lo stesso risultato può essere ottenuto in altro modo, che però richiede una procedura più lunga:

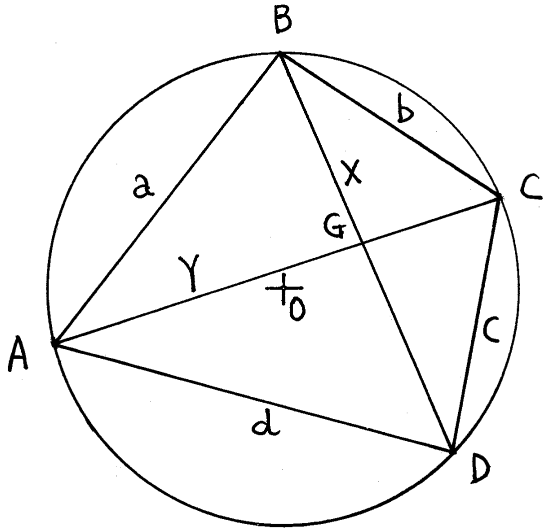


Dai vertici F e E tracciare le perpendicolari alla corda AD. Queste ultime dividono ADEF in due triangoli rettangoli (AHF e KDE) e in un trapezio (HKEF): questo ultimo è un trapezio perché ha due basi parallele (HF e KE) e l'altezza HK.

L'area di ABCDEF è uguale alla somma delle aree di ABCD, AHF, KDE e HKEF.

Le diagonali di un quadrato ciclico

La figura contiene un quadrilatero ciclico nel quale sono tracciate le diagonali BD = x e AC = y.



Le due formule che seguono forniscono le lunghezze delle due diagonali conoscenze quelle di *a*, *b*, *c* e *d*:

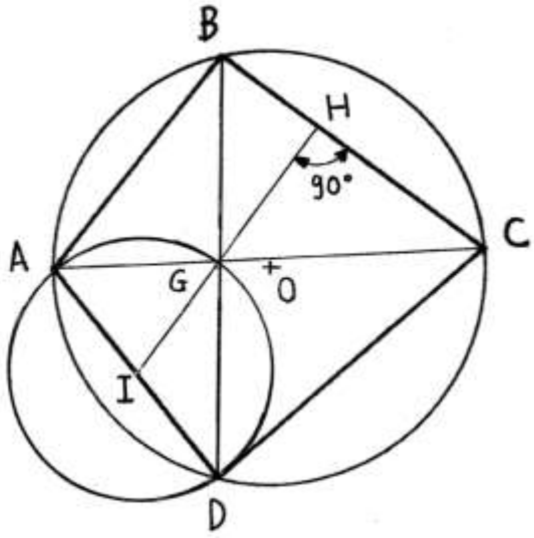
$$x = \sqrt{\frac{(ab + cd)(ac + bd)}{ad + bc}}$$

$$y = \sqrt{\frac{(ad + bc)(ac + bd)}{ab + cd}}$$

Anche esse sono dovute a Brahmagupta.

%%%%%%%%%%%%%%%%

ABCD è un quadrilatero ciclico inscritto nel cerchio di centro O:



Tracciare le diagonali: sono AC e BD e si incrociano nel punto G.

Da uno dei quattro lati, ad esempio BC, condurre la perpendicolare – passante per il punto G – fino a incontrare il lato opposto AD in un punto, I.

Questo ultimo punto divide AD in *due parti uguali*: AI = ID. Inoltre il segmento GI, che fa parte di HI, ha la stessa lunghezza di AI e di ID.

Fare centro in I e con raggio IA disegnare una circonferenza che passa anche per i punti A e D.

Analoghe costruzioni possono essere realizzate con riferimento agli altri tre lati del quadrilatero: AB, BC e CD.

<u>Modifica della formula dell'area secondo Brahmagupta</u>

Introduciamo una modifica alla formula di Brahmagupta:

$$\sqrt{(q-a)*(q-b)*(q-c)*(q-d) - a*b*c*d} = 0$$

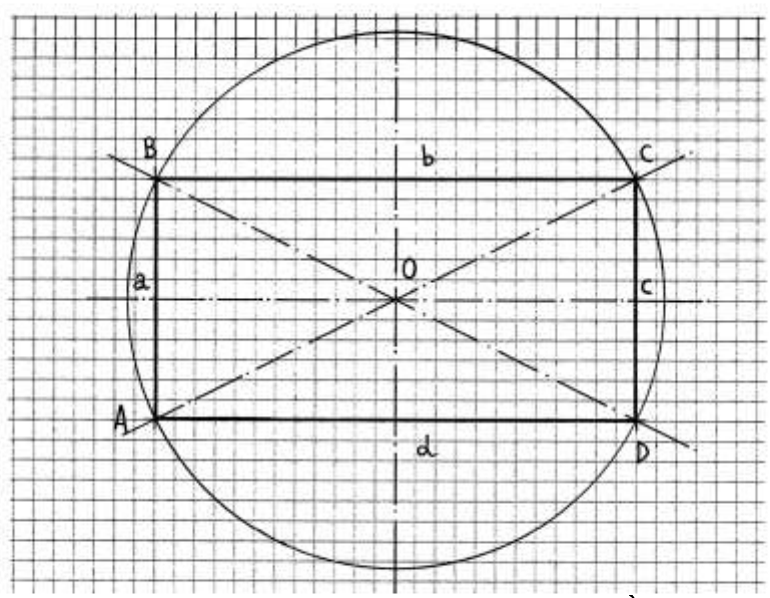
Il risultato è *zero* (0).

Eleviamo al quadrato la precedente espressione e introduciamo un'eguaglianza:

$$(q-a)*(q-b)*(q-c)*(q-d) = a*b*c*d$$

Anche l'espressione $a*b*c*d$ fornisce l'area di un quadrilatero ciclico.

Per chiarire il concetto utilizziamo un esempio:



ABCD è un rettangolo inscritto nel cerchio di centro O. È un quadrilatero ciclico ed è anche un *bislungo* e cioè un rettangolo formato da due quadrati uniti. I lati AB e CD sono lunghi 6 e quelli BC e AD sono 12.

L'area del rettangolo è:

Area $_{ABCD}$ = AB*AD = 6*12 = 72 .

Il perimetro *p* è: p = a + b + c + d = 6 + 12 + 6 + 12 = 36 .

Il semiperimetro *q* vale: q = p/2 = 36/2 = 18 .

Con la formula di Brahmagupta l'area è:

$$\text{Area}_{ABCD} = \sqrt{(q-a)*(q-b)*(q-c)*(q-d)} = \sqrt{(18-6)*(18-12)*(18-6)*(18-12)} =$$

$$= \sqrt{12*6*12*6} = \sqrt{72^2} = 72$$

Il prodotto delle lunghezze dei quattro lati è:

a*b*c*d = 6*12*6*12 = 72*72 = 72^2 e cioè è il *quadrato dell'area*, per cui

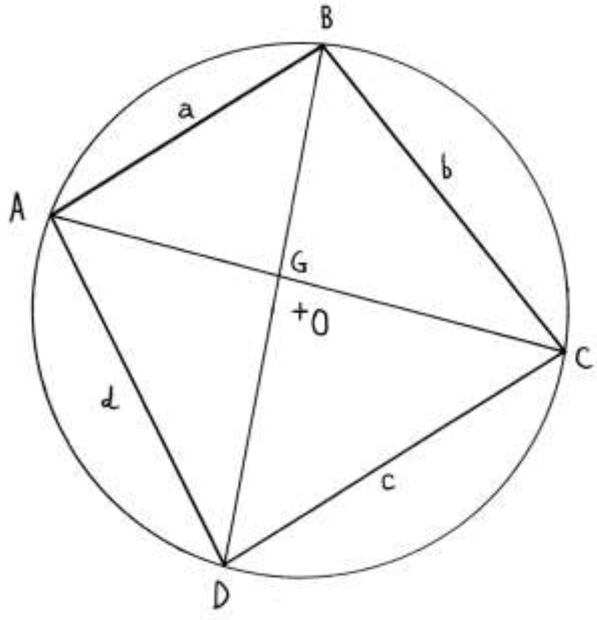
$$\text{Area}_{ABCD} = \sqrt{a*b*c*d}$$

<u>Il teorema di Tolomeo</u>

Il teorema di Tolomeo (circa 100-175 d.C.) si riferisce ai *quadrilateri ciclici*, inscritti nei cerchi.

Esso afferma che la somma dei prodotti delle coppie di lati opposti è uguale al prodotto delle due diagonali.

Nel caso della figura



vale la relazione

AB*CD + BC*AD = AC*BD e cioè

a*c + b*d = AC*BD .

APPENDICE n. 3

La formula shoelace

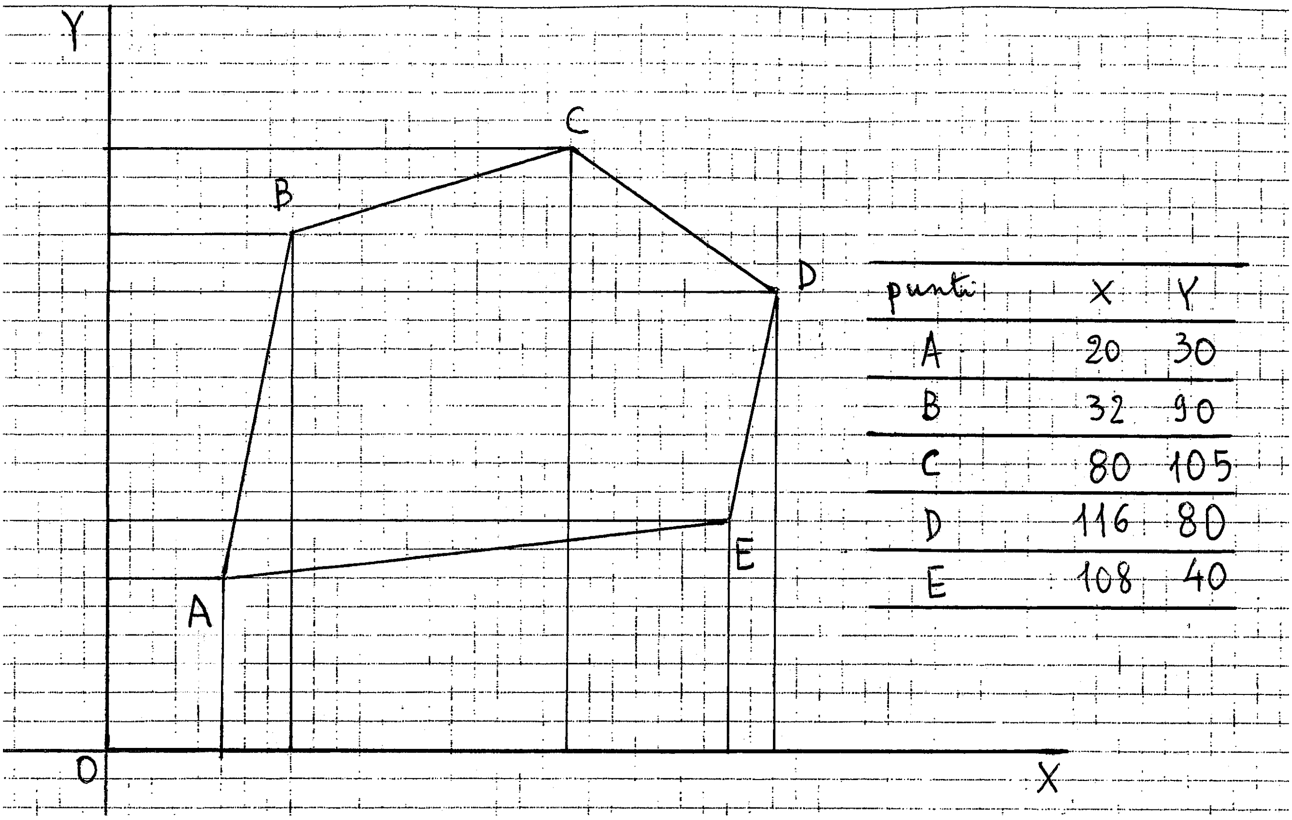
Gli stessi tre ricercatori messicani già citati (Jorge, Garza e Olvera) hanno di recente, nel 2018, pubblicato un nuovo studio sull'argomento: in esso, fra gli altri, ricorrono anche all'impiego del metodo descritto in questa Appendice. Allo *shoelace* era fatto un brevissimo cenno nella bibliografia contenuta nell'articolo [2].

In inglese *shoelace* significa *laccio* o *stringa* da scarpe. Il termine è usato per definire un metodo grafico usato dagli agrimensori per calcolare l'area di una superficie piana. Essa rappresenta un perfezionamento dell'antica "formula degli agrimensori".

Conoscendo le coordinate dei vertici di un terreno pianeggiante che è definito da spigoli rettilinei che gli danno la forma di un poligono non regolare è possibile calcolare la sua area.

Come vedremo, il metodo richiama uno dei metodi usati per allacciarsi le scarpe.

Facciamo un esempio:



punti	X	Y
A	20	30
B	32	90
C	80	105
D	116	80
E	108	40

Il pentagono non regolare ABCDE ha i vertici le cui coordinate rispetto agli assi X-Y sono note e indicate nella tabella a destra del diagramma.

Il grafico è disegnato in un'adeguata scala di rappresentazione.

Il punto O è l'origine degli assi cartesiani e ha coordinate [0, 0]: è fissato all'esterno del pentagono e da esso sono misurate le coordinate.

L'area è data dalla formula

$$\text{Area}_{ABCDE} = \frac{1}{2} \cdot \left[X_A \cdot y_B + X_B \cdot Y_C + X_C \cdot y_D + X_D \cdot Y_E + X_E \cdot Y_A - X_B \cdot y_A - X_C \cdot y_B - X_D \cdot Y_C - X_E \cdot Y_D - X_A \cdot Y_E \right].$$

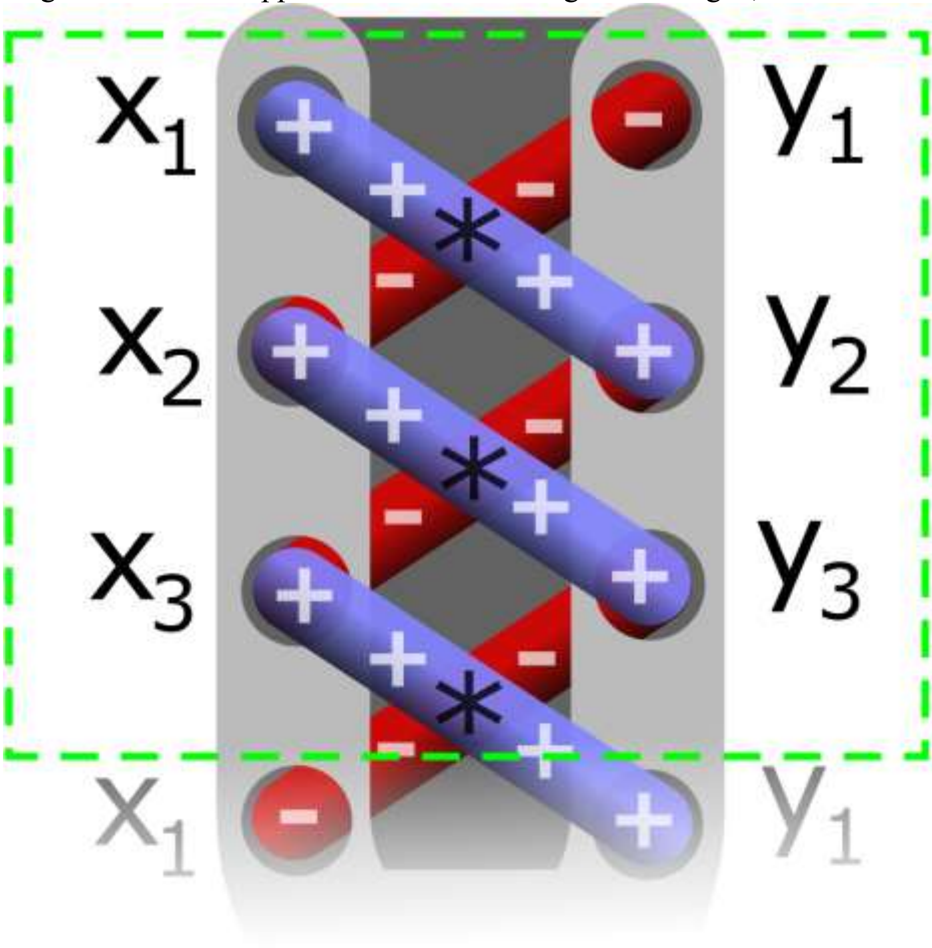
Con i dati della tabella, l'area è:

$$\text{Area}_{ABCDE} = ½ * [20*90 + 32*105 + 80*80 + 116*40 + 108*30 –$$
$$– 32*30 – 80*90 – 116*105 – 108*80 – 20*40] =$$
$$= ½ * [19440 – 29780] = – 5170 .$$

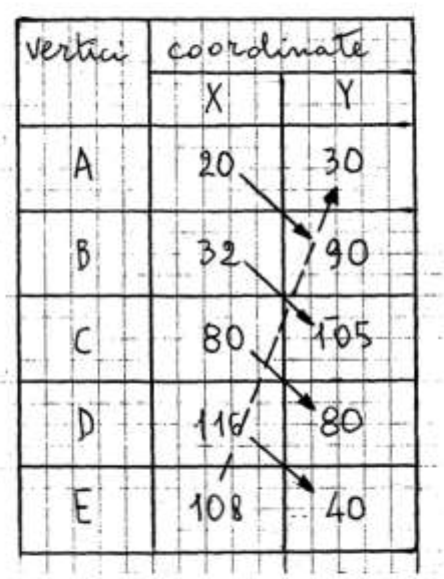
In *valore assoluto*, l'area del poligono è uguale a 5170 unità quadrate.

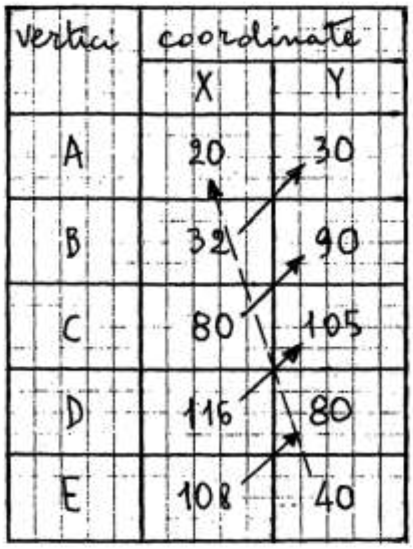
Per ottenere immediatamente un risultato positivo, è sufficiente invertire i segni dei blocchi di moltiplicazioni racchiuse fra le parentesi quadre della precedente formula.

Il metodo grafico usato è rappresentato con l'immagine che segue, tratta da Wikipedia:



I due grafici che seguono mostrano l'applicazione del metodo al caso concreto:





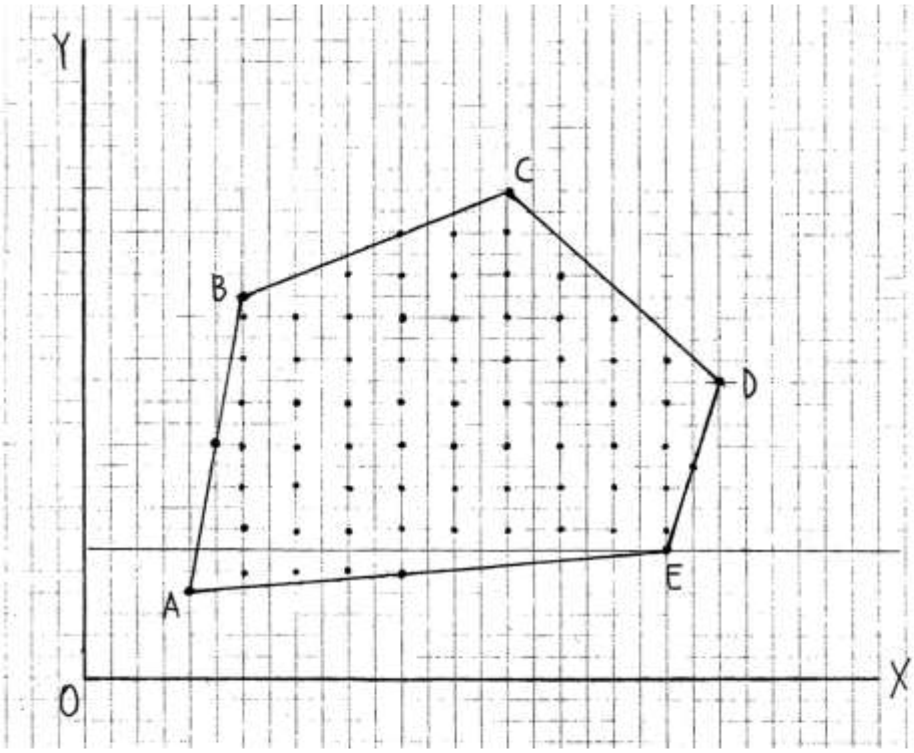
Risulta evidente l'analogia con le tecniche di allacciatura delle scarpe descritte nell'APPROFONDIMENTO che segue.

<u>Il teorema di Pick</u>

Questo teorema permette di calcolare l'area di un poligono qualsiasi con lati rettilinei e con vertici aventi coordinate espresse da *numeri interi*.

Deve il suo nome al matematico austriaco Georg Alexander Pick (1859 – 1942), deportato e ucciso in un campo di sterminio tedesco.

L'esempio che segue contiene un diagramma cartesiano con il pentagono non regolare ABCDE, che è un poligono *convesso*:



Il grafico è costruito su un reticolato quadrato. I vertici del poligono sono tutti collocati sui nodi del reticolato e hanno coordinate intere.

Altri tre punti dei lati coincidono con i nodi del reticolato: sono uno ciascuno sui segmenti AB, BC e AE.

Il teorema di Pick chiede il conteggio dei punti con coordinate intere interni al poligono (I) e il numero dei punti, sempre con coordinate intere, che sono collocati sul perimetro (P).

L'area è data da:

$$\text{Area}_{\text{poligono}} = I + (P/2) - 1.$$

Nell'esempio, I vale 63 e P è 8 per cui l'area è

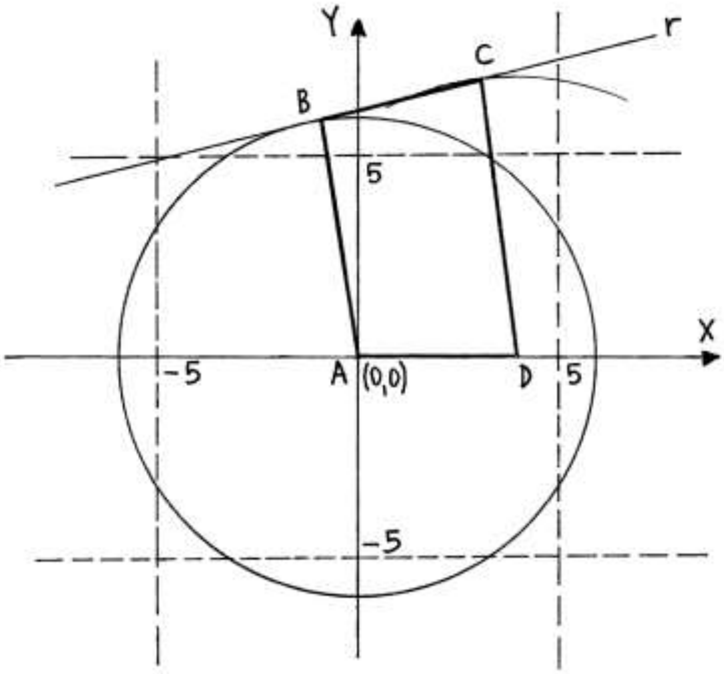
$$\text{Area} = 63 + (8/2) - 1 = 66 \text{ unità quadrate.}$$

Conoscendo la scala usata per rappresentare il poligono è facile ricavare l'effettivo valore della superficie.

La formula vale per qualsiasi poligono *convesso* o *concavo*.

APPENDICE n. 4

Nel nuovo articolo del 2018, già citato, i tre ricercatori messicani già citati (Jorge, Garza e Olvera) hanno presentato un altro metodo per calcolare l'area di un quadrilatero con l'aiuto della geometria analitica:



ABCD è un quadrilatero i cui lati sono lunghi

* AB = a = 6.
* BC = b = 4.
* CD = c = 7.
* AD = d = 4.

Il perimetro *p* del quadrilatero è: p = a + b + c + d = 6 + 4 + 7 + 4 = 21 .
Il semiperimetro *q* è: q = p/2 = 21/2 = 10,5.

Applicando la formula di Brahmagupta si ha:

$$\text{Area}_{ABCD} = \sqrt{(q-a)*(q-b)*(q-c)*(q-d)} = \sqrt{(10{,}5-6)*(10{,}5-4)*(10{,}5-7)*(10{,}5-4)} =$$

$$= \sqrt{4{,}5*6{,}5*3{,}5*6{,}5} = \sqrt{665{,}4375} \approx 25{,}796 \rightarrow 25{,}80\,.$$

I tre Autori hanno impiegato un programma di grafica per disporre il quadrilatero ABCD nella configurazione che fornisce l'area massima di 25,80, calcolata con la formula di Brahmagupta.

Come esposto nella figura qui sopra, il quadrilatero è disegnato su di un diagramma cartesiano, con il vertice A nell'origine degli assi (0, 0).

Benché il quadrilatero possieda due lati di uguale lunghezza (AD = BC = 4), esso non è un trapezio perché i lati AB e CD non sono paralleli.

La costruzione del grafico è così spiegata: disegnare a tratteggio un reticolato quadrettato con lati lunghi 5. Sull'asse *x* fissare D a distanza AD = 4. Fare centro nel punto di coordinate (0, 0) con raggio AB = 6 e tracciare una circonferenza.

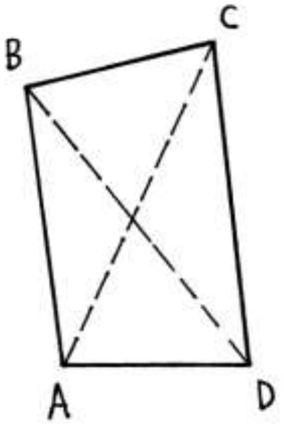
Fare centro nel punto D e con raggio c = 7 tracciare un arco di circonferenza.

Per tentativi, disegnare una retta *r* tangente alla circonferenza che sia in grado di tagliare l'ultimo arco: sono fissati i punti B e C.

BC è lungo 4 e CD 7.

I tre Autori hanno calcolata l’area convenzionale del quadrilatero con questa configurazione: 25,80, che coincide con il risultato dell’applicazione della formula di Brahmagupta. Questa particolare disposizione del quadrilatero ha l’area massima ottenibile.

Un quadrilatero non è indeformabile come lo è un triangolo: per renderlo stabile occorre tracciare una diagonale, AC o DB.



Deformando il quadrilatero privo di diagonali, la sua area si riduce come è mostrato nella

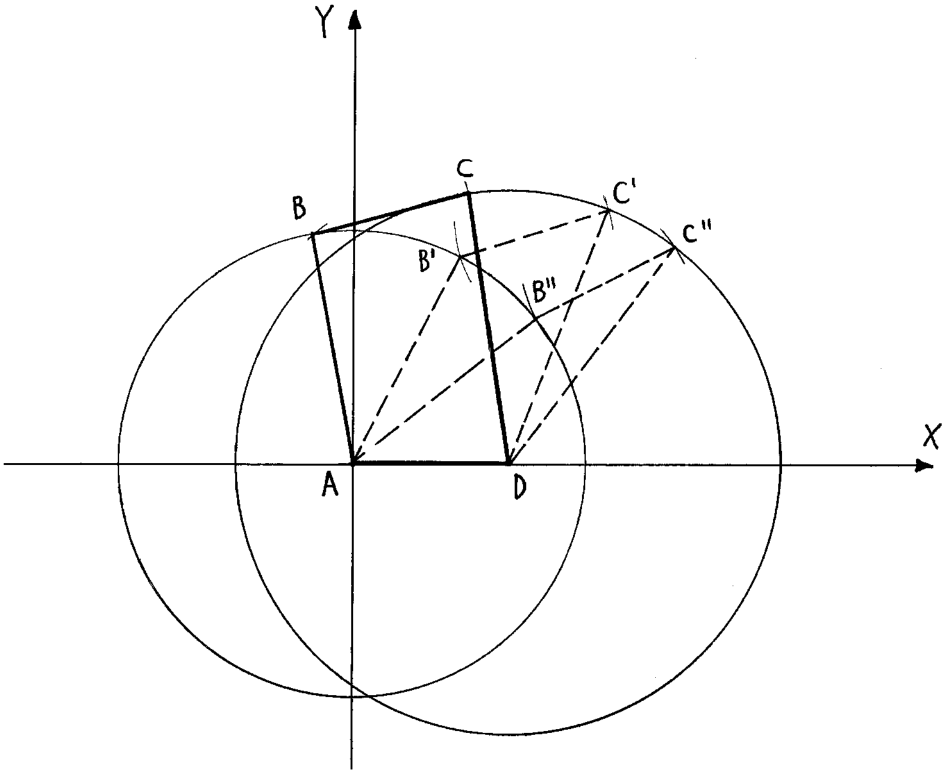


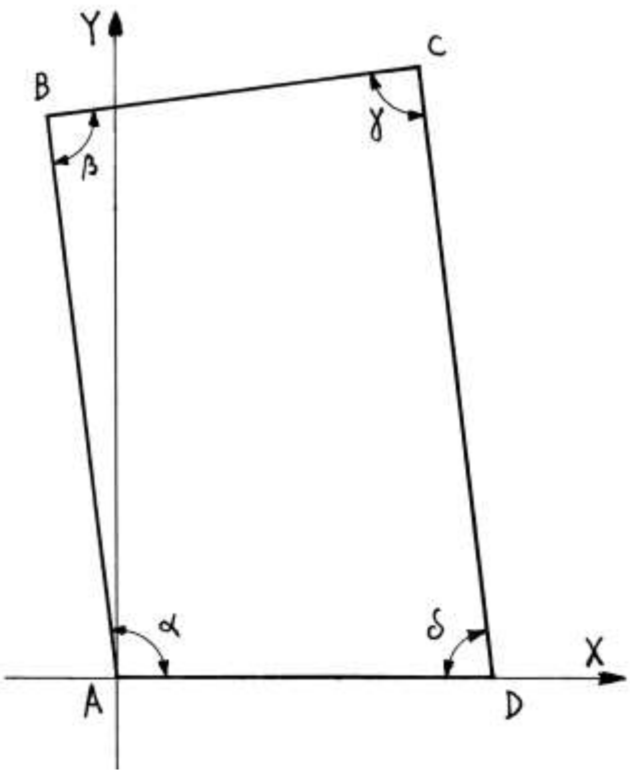
figura che segue:

ABCD è il quadrilatero già mostrato nelle precedenti figure. Fare centro nei punti A e D e tracciare due circonferenze di raggio, rispettivamente, AB e DC.

I quadrilateri AB’C’D e AB’’C’’D hanno lati e perimetri lunghi quanto quelli di ABCD ma le loro aree sono ridotte rispetto a quella di questo ultimo.

Misurando con un’accettabile approssimazione, gli angoli interni del quadrilatero ABCD hanno le seguenti ampiezze:

* $\alpha = 98°$;
* $\beta = 98°$;
* $\gamma = 82°$;
* $\delta = 82°$.



Applichiamo la formula di Bretschneider. Prima di procedere è opportuno calcolare il valore del coseno:

$\alpha + \gamma = 98° + 82° = 180°$

$(\alpha + \gamma)/2 = 90°$ e $\cos 90° = 0$.

Le stesse considerazioni valgono per l'altra coppia di angoli opposti:

$\beta + \delta = 98° + 82° = 180°$

$(\beta + \delta)/2 = 90°$ e $\cos 90° = 0$.

L'area è:

$$\text{Area}_{ABCD} = \sqrt{(q-a)*(q-b)*(q-c)*(q-d) - a*b*c*d * \cos^2 (\alpha+\gamma)/2} =$$

$$= \sqrt{4{,}5*6{,}5*3{,}5*6{,}5 - a*b*c*d * 0^2} = \sqrt{666{,}4375} \approx 25{,}796 \rightarrow 25{,}80\ T^2 .$$

In questo caso, la formula di Bretschneider si è ridotta a quella di Brahmagupta.

Dalla formula di Bretschneider a quella di Brahmagupta

Nel caso di un quadrilatero ciclico, come quello della figura che segue, la somma delle ampiezze degli angoli opposti è sempre 180°:

$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180°$.

Il coseno delle due coppi è: $\cos(\alpha + \gamma) = \cos(\beta + \delta) = \cos 180° = -1$.

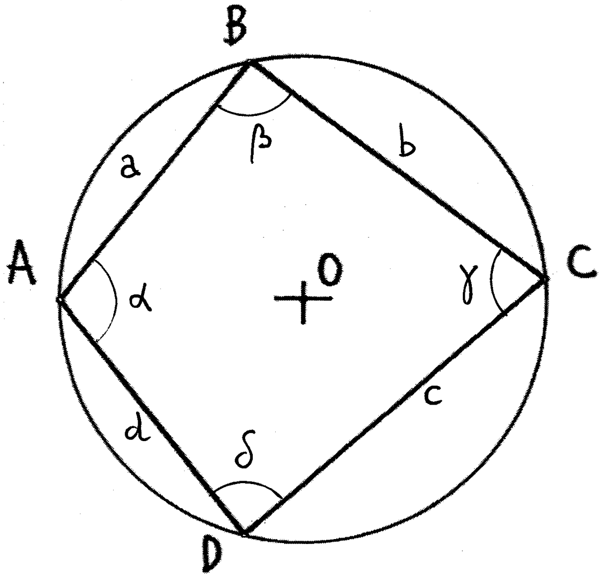
Il coseno dei due angoli somma divisi per 2 è:

$\cos(\alpha + \gamma)/2 = \cos(\beta + \delta)/2 = \cos 90° = 0$.

Ne consegue che il secondo membro della formula di Bretschneider sotto il segno di radice è uguale a 0:

$a*b*c*d * \cos^2 90° = a*b*c*d* (0)^2 = a*b*c*d * 0 = 0$.

In questo caso la formula di Bretschneider coincide con quella di Brahmagupta:



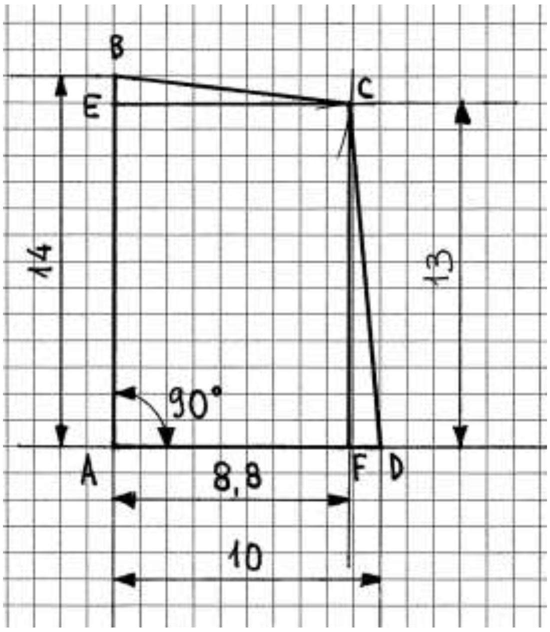
$$\text{Area}_{ABCD} = \sqrt{(q-a)*(q-b)*(q-c)*(q-d) - a*b*c*d*0} =$$

$$= \sqrt{(q-a)*(q-b)*(q-c)*(q-d)}$$

APPENDICE n. 5

La matematica americana Beatrice Lumpkin (1918 -) ha suggerito di calcolare le aree dei campi considerati nei codici catastali aztechi nel modo che è descritto di seguito.

L'esempio è esaminato alle pp. 38-39 del suo libro "Geometry. Activities for Many Cultures" citato in bibliografia.



Un terreno ha forma quadrangolare e ha lati lunghi

* a = 14 ;
* b = 9 ;
* c = 13 ;
* d = 10 .

Il quadrilatero è ABCD.

Il metodo suggerito dalla Lumpkin muove dalla fissazione di un angolo retto formato dai lati AB e AD.

La costruzione procede come segue: con raggio b = 9, fare centro in B e tracciare un arco. Con raggio c = 13 fare centro nel punto D e disegnare un secondo arco che interseca il precedente arco in un punto, C.

Dal punto C condurre le perpendicolari a AB e a AD. Sono fissati i punti E e F.

AE è lungo 13 e AF è 8,8.

Il quadrilatero ABCD è ora suddiviso in tre poligoni:

* il rettangolo AECF ;
* il triangolo rettangolo EBC ;
* il triangolo rettangolo FCD.

EB è lungo: EB = AB – AE = 14 – 13 = 1.

FD è lungo: FD = AD – AF = 10 – 8,8 = 1,2.

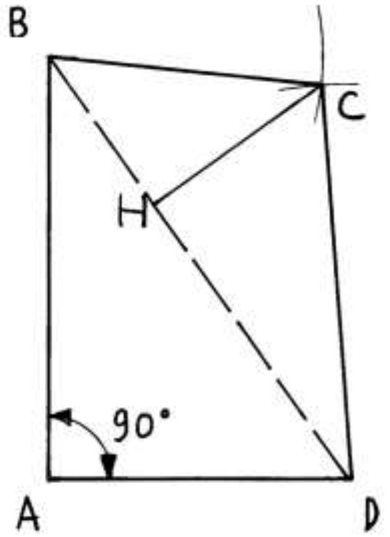
Possiamo ora calcolare l'area:

Area $_{ABCD}$ = Area $_{AECF}$ + Area $_{EBC}$ + Area $_{FCD}$ = AE*AF + EB*EC/2 + FC*FD/2 =

= 13*8,8 + 1*8,8/2 + 13*1,2/2 = 114,4 + 4,4 + 7,8 = 126,6 approssimato a 127 T^2.

%%%%%%%%%%%%%%%%%

Calcoliamo l'area di ABCD con un altro metodo. Dividiamo il quadrilatero con una diagonale, BD:



Il quadrilatero è scomposto in due triangoli: ABD (che è rettangolo) e BCD.

Tracciare l'altezza CH e misurarla: è lunga 6,6.

La diagonale BD è lunga:

$BD = \sqrt{(AB^2 + AD^2)} = \sqrt{(14^2 + 10^2)} = \sqrt{(196 + 100)} = \sqrt{296} \approx 17{,}2$.

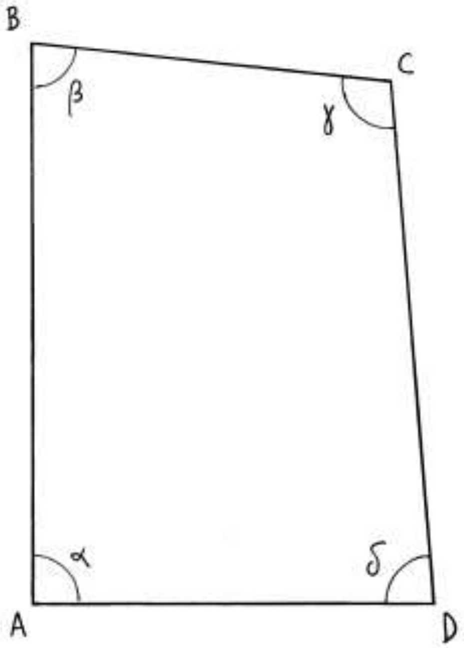
L'area di ABCD è data da:

$Area_{ABCD} = Area_{ABD} + Area_{BCD} = AB*AD/2 + BD*CH/2 = 14*10/2 + 17{,}2*6{,}6/2 = 70 + 56{,}76 = 126{,}76\ T^2$, dato che si avvicina a quello calcolato in precedenza ($126{,}6\ T^2$).

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Applichiamo ora la *formula di Bretschneider*. Gli angoli del quadrilatero ABCD misurano:

* $\alpha = 90°$;
* $\beta = 84°$;
* $\gamma = 100°$;
* $\delta = 86°$.



Calcoliamo le ampiezze delle somme dei due lati opposti:

* $\alpha + \gamma = 90° + 100° = 190°$;
* $\beta + \delta = 84° + 86° = 170°$.

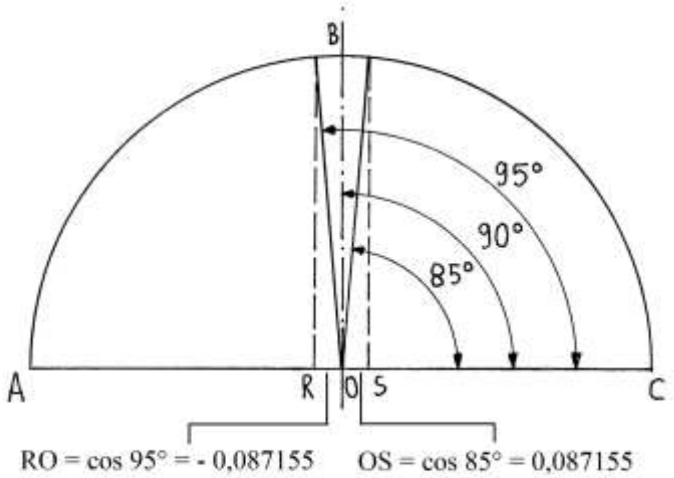
Occorre dividere per 2 le somme:

* $(\alpha + \gamma)/2 = 190/2 = 95°$;
* $(\beta + \delta) = 170/2 = 85°$.

Il coseno di 95° è , in *valore assoluto*, uguale a quello di 85°:

cos 95° = -0,087155

cos 85° = 0,087155 .



Il quadrato del coseno di 95° è: $\cos^2 95° = (-0{,}087155)^2 = 0{,}007596123 \approx 0{,}0076$.

Il perimetro *p* del quadrilatero è:

$$p = a + b + c + d = 14 + 9 + 13 + 10 = 46 .$$

Il semiperimetro *q* del quadrilatero è: $q = p/2 = 46/2 = 23$.

Abbiamo tutti i dati necessari per applicare la formula di Bretschneider:

$$\text{Area}_{ABCD} = \sqrt{(23-14)*(23-9)*(23-13)*(23-10) - (14*9*13*10)*0{,}0076} =$$

$$= \sqrt{16380 - 124{,}488} = \sqrt{16255{,}512} = 127{,}497\ T^2 .$$

Anche questo risultato si avvicina ai precedenti.

%%%%%%%%%%%%%%%%

Infine, calcolando l'area con la *formula degli agrimensori* si orttiene:

$\text{Area}_{ABCD} = (AB + CD)/2 * (BC + AD)/2 = (14 + 13)/2 * (9 + 10)/2 =$

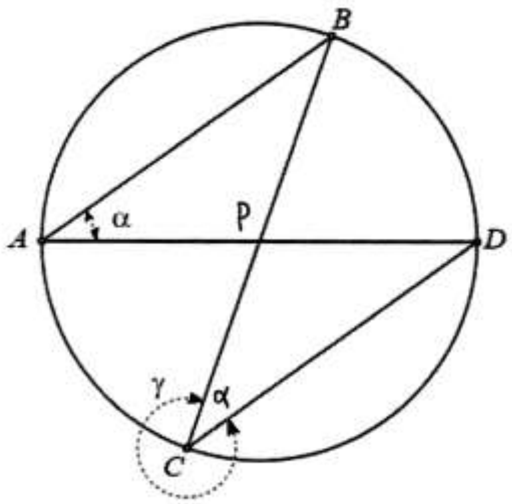
$27*19/4 = 128{,}25\ T^2$, valore leggermente errato per eccesso.

%%%%%%%%%%%%%%%%

L'imposizione della presenza di un angolo retto all'interno del quadrilatero ABCD porta a calcolare l'area massima del poligono.

APPENDICE n. 6

Garza-Hume, Jorge e Alvera concludono il loro articolo del 2018 [4] con un'Appendice nella quale presentano il caso dei quadrilateri intrecciati come quello della figura che segue:



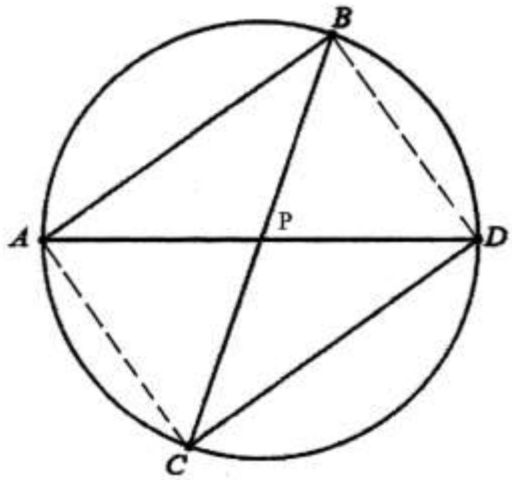
Il quadrilatero ABCD è *ciclico* perché i suoi vertici giacciono sulla circonferenza del cerchio in cui è inscritto.

Gli angoli α e γ sono *esplementari* perché la loro somma è uguale a 360°. L'angolo BC è ampio α come quello BAD perché entrambi sono sottesi dall'arco BD.

I tre Autori forniscono scarse informazioni sul calcolo dell'area del quadrilatero.

Vediamo alcune soluzioni.

L'applicazione della formula di Bretschneider risulta difficoltosa: è possibile tracciare due "diagonali", AC e BD, e misurarle ma – come vedremo in seguito – i calcoli forniscono risultati notevolmente errati per eccesso:



Fissiamo le dimensioni dei lati di questa figura:

* AB = a = 67 ;
* BC = b = 82 ;
* CD = c = 67 ;
* DA = a = 82.

Il perimetro *p* è: p = a + b + c + d = 67 + 82 + 67 + 82 = 298 .

Il semiperimetro *q* vale: q = p/2 = 298/2 = 149.

Le diagonali sono lunghe:

* AC = m = 48 ;
* BD = n = 48.

Applicando la prima variante della formula di Bretschneider si ha:

$$\text{Area}_{ABCD} = \sqrt{(149-67)*(149-82)*(149-67)*(149-82)} = \sqrt{82^2*67^2} = 5494$$

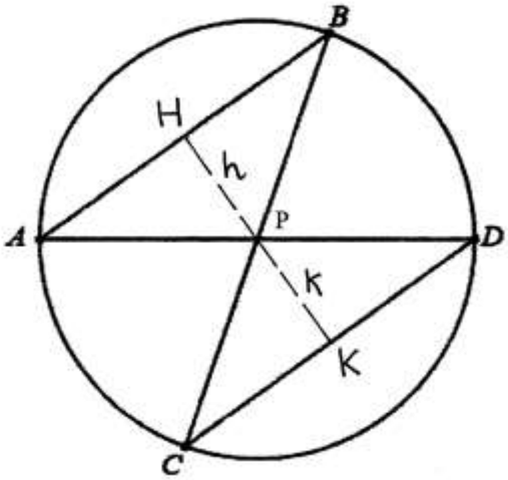
Impiegando la seconda variante della formula, si ottirne un risultato assurdo:

$$\text{Area}_{ABCD} = ¼ * \sqrt{4*m^2*n^2 - (b^2 + d^2 - a^2 - c^2)^2} = ¼ * \sqrt{4*48^2*48^2 - (82^2 + 82^2 - 67^2 - 67^2)^2} =$$

$$= ¼ * \sqrt{9216 - (6724 + 6724 - 4489 - 4489)^2} = \sqrt{9216 - 19980900} = \sqrt{-19971684}$$

Cerhiamo un'altra soluzione.

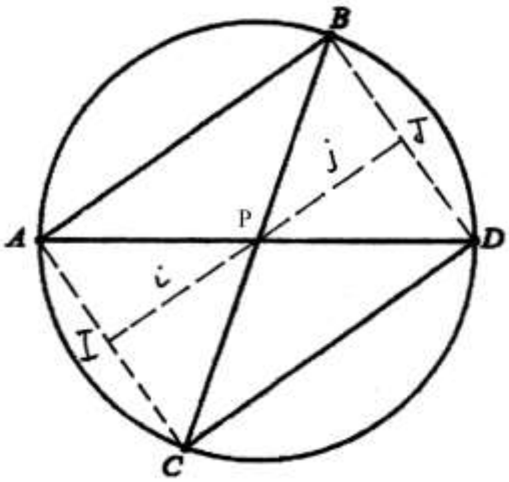
Tracciare le altezze PH e PK: esse sono lunghe 23,5.



L'area del quadrilatero intrecciato ABCD è data da:

Area $_{ABCD}$ = Area $_{ABP}$ + Area $_{CPD}$ = AB*h/2 + CD*k/2 = 67*23,5/2 + 67*23,5/2 =
= 67*23,5 = 1574,5 T^2, che è un valore corretto rispetto ai 5494 T^2 ottenuti con l'applicazione della prima variante della formula di Bretschneider.

Infine, l'area di ABCD può essere correttamente calcolata anche in altro modo:



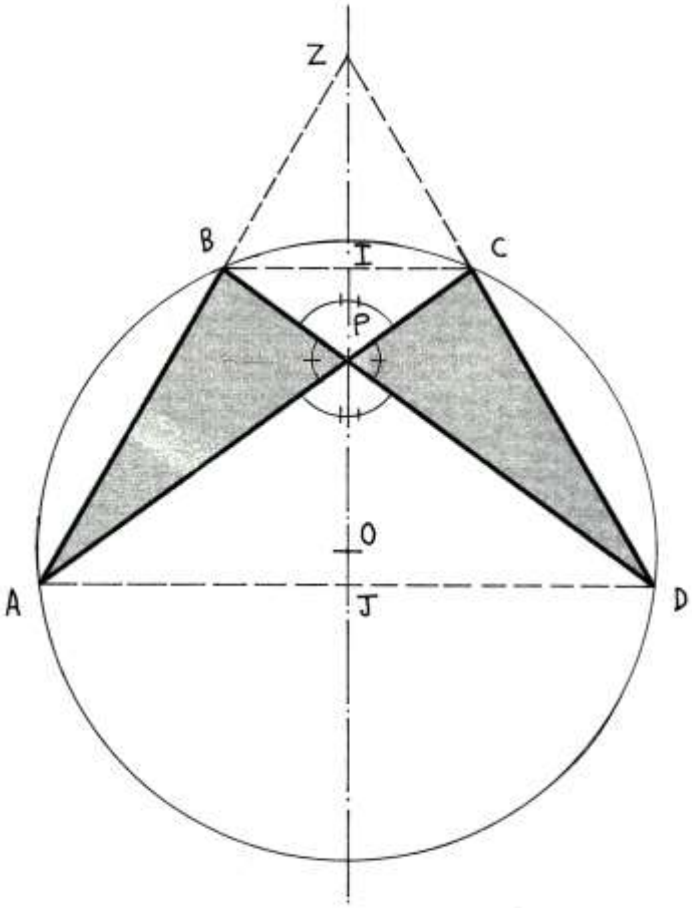
Area $_{ABCD}$ = AC*CD – Area $_{APC}$ – Area $_{BPD}$ = m*c – m*i/2 – n*j/2 =
= 48*67 – 48*34/2 – 48*34/2 = 3216 – 816 – 816 = 1584 T^2, valore – che a parte errori di misura – coincide con il precedente.

Infine è utile una considerazione: nelle mappe catastali degli Aztechi non sembra esservi traccia di terreni con questa forma "a cravatta a farfalla" o "farfallino".

- APPROFONDIMENTO -

Antiparallelogramma

Il quadrilatero intrecciato ABCD considerato nel precedente paragrafo rientra nella famiglia degli enti geometrici chiamati *antiparallelogrammi*.

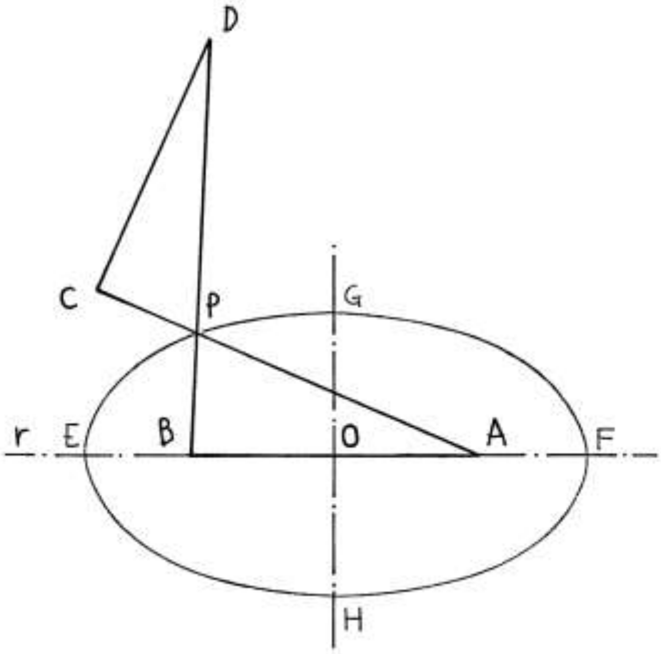


Le proprietà dell'antiparallelogramma mostrato qui sopra sono:

* gli angoli opposti nel vertice P hanno la stessa ampiezza.
* I segmenti AD e BC sono paralleli.
* Il poligono possiede un asse di simmetria IPJ che è l'asse di AD e BC.
* I prolungamenti dei due lati opposti, AB e DC, si incontrano in un punto esterno, Z, posto sull'asse di simmetria.
* È inscritto nel trapezio isoscele ABCD che è formato dai lati AB e CD e dalle basi AD e BC.
* AC e BD sono le diagonali del trapezio isoscele ABCD.
* È inscritto in un cerchio che ha centro O, collocato sull'asse di simmetria.

La struttura è alla base di uno strumento meccanico usato per disegnare ellissi, l'*ellissografo*, come è spiegato con una certa *approssimazione* con i due grafici che seguono.

Il quadrilatero ABCD è articolato nel punto P:

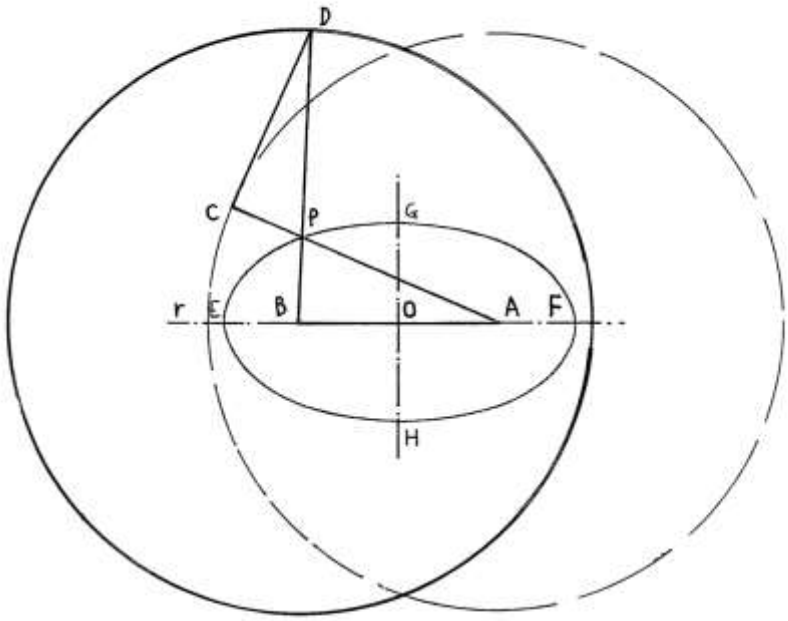


Il segmento AB dell'antiparallelogramma è fissato su di una retta orizzontale, *r*, e i suoi estremi, A e B, sono i *fuochi* dell'ellisse da costruire.

Il risultato del movimento di P è l'ellisse che ha asse maggiore EF e minore GH.

Nel punto P è inserita una punta scrivente: l'asta AB è immobile mentre le aste AC e BD sono imobili e possono ruotare intorno al punto P.

Mentre gli estremi C e D tracciano due circonferenze (con centri rispettivamente in A e in B), il punto P è vincolato a muoversi lungo un'ellisse.



L'antiparallelogramma ABCD è la struttura essenziale di uno strumento usato per tracciare ellissi: l'ellissografo ad antiparallelogramma.

- -

Bibliografia

1. Closs Michael P. (a cura di), “Native American Mathematics”, Austin, University of Texas Press, 1986, pp. 432.
2. Cundy H.M. – Rollett A.P., “I modelli matematici”, trad. it., Milano, Feltrinelli, 1974, pp. 292.
3. Del Carmen Jorge y Jorge. Maria – Williams, Barbara – Garza-Hume, Clara E. – Olvera, Arturo, “Mathematical accuracy of Aztech land survey assessed from record in the *Codex Vergara*”, in PNAS, september 13, 2001, vol. 108, n. 37, pp. 15053-15057.
4. Garza-Hume C.E – Jorge Maricarmen C.- Olvera Arturo, “Areas and Shapes of Planar Irregular Polygons”, in “Forum Geometricum”, Volume 18 (2018), pp. 17-36, http://forumgeom.fau.edu/FG2018volume18/FG201803.pdf
5. Gheverghese Joseph George, “C’era una volta un numero”: La vera storia della matematica, trad. it., Milano, Il Saggiatore, 2000, pp. 444.
6. Harvey H.(erbert) R. – Williams B.(arbara) J., “Aztec Arithmetic: Positional Notation and Area Calculation”, Science, vol. 210, 31 october 1980, pp. 499-505.
7. Knijnik Gelsa: http://webapp1.dlib.indiana.edu/virtual_disk_library/index.cgi/4273355/FID840/eqtyres/erg/111575/1575.htm (accesso 24 aprile 2017).
8. Lumpkin Beatrice, “Algebra. Activities from Many Cultures”, Portland, J. Weston Walch Publisher, 1997, pp. vi-119.
9. Lumpkin Beatrice, “Geometries. Activities for Many Cultures”, Portland, J. Weston Walch Publisher, Portland, 1997, pp. vi-121.
10. Williams Barbara J. – Harvey H.(erbert) R., “The *Códice de Santa María Asunción*”. Households and Lands in Sixteenth-Century Teperlaoztoc”, University of Utah Press, Salt Lake City, 1997, pp. xii-410.
11. Williams Barbara J. – Del Carmen Jorge y Jorge Maria, “Surface area computation in ancient Mexico: documentary evidence of Acolhua-Aztec proto-geometry”, in “Simmetry: Culture et Science”, vol. 12, Nos. 1-2, 2001, pp. 185-200.