sergio(punto)calzolani(at)outlook(punto)it

Parole chiave: compasso ad apertura fissa, riga non graduata, multipli o sottomultipli di un segmento, pentagono e ettagono approssimati, figure inscritte e circoscritte. Teodoro di Cirene, unione poligoni.

Il matematico Abu'l – Wafa al Buzjani

Abu'l – Wafa nacque nel Khorasan (attuale Iran) nel 940 e all'età di 19 anni si trasferì alla corte dei Califfi a Baghdad, città nella quale morì nel 998.

È stato uno dei maggiori matematici della storia. A lui si devono fondamentali contributi alla *trigonometria*.

Scrisse numerose opere e fra quelle di natura più pratica sono le seguenti:

- un trattato di aritmetica applicata destinato a amministratori e uomini d'affari (un precursore dei numerosi *trattati di abaco* compilati in Italia, a partire dal basso Medioevo, per mercanti, banchieri e artigiani);
- un trattato di geometria ad uso degli artigiani ("*Su quelle parti di geometria necessarie agli artigiani*").

In questa seconda opera Abu'l – Wafa spiegò le costruzioni geometriche piane: poligoni regolari, inscrizione e circoscrizione di poligoni dentro o su circonferenze, divisione di figure in parti uguali e unione di poligoni in altri poligoni più grandi.

Le costruzioni di Abu'l – Wafa, con poche eccezioni, richiedevano solo l'uso della riga *non graduata* e del compasso ad apertura *fissa*.

L'uso del compasso ad apertura fissa eliminava gli errori dovuti alla reciproca mobilità delle due aste: solo nei tempi moderni, l'invenzione del *balaustrone* controllato da una vite senza fine ha permesso di bloccare le aste sull'apertura voluta. Un compasso di questo tipo era necessario agli artigiani che lavoravano i metalli: essi avevano necessità di tracciare circonferenze o archi con i solchi evidenti. Per impedire l'arbitraria apertura del compasso provocata dal divaricamento delle aste causata dalla pressione manuale su di esse, almeno fin dal XVII secolo furono introdotti modelli con apertura regolabile. Nei secoli precedenti erano usati *compassi a settore*, con apertura controllata: un esemplare è disegnato nel Taccuino di Villard de Honnecourt.

La figura che segue presenta un compasso di ottone con vite micrometrica: esso risale al XVII secolo ed è lungo 150 mm; è conservato nell'*Istituto e Museo di Storia della Scienza* di Firenze:

Il trattato non sembra essere stato scritto direttamente da Abu'l – Wafa, ma probabilmente da un suo allievo. Da un primitivo testo in arabo (la lingua scientifica del mondo arabo e islamico) deriverebbe la traduzione in persiano.

Il testo è diviso in alcuni capitoli:

- un'*Introduzione* dedicata all'uso della riga, del compasso e della squadra.
- I capitolo: problemi geometrici, trisezione dell'angolo, duplicazione del cubo e costruzione di uno specchio parabolico.
- II capitolo: costruzione dei poligoni regolari, incluse quelle realizzate con una sola apertura di compasso.
- III capitolo: costruzione di poligoni regolari inscritti in una circonferenza.
- IV capitolo: costruzione della circonferenza circoscritta ai poligoni regolari.
- V capitolo: costruzione della circonferenza inscritta nei poligoni.
- VI capitolo: poligoni inscritti in altri poligoni.
- VII capitolo: divisione dei triangoli.
- VIII capitolo: divisione dei quadrilateri.
- IX capitolo: divisione di cerchi.
- X capitolo: sul modo di stabilire dei percorsi.
- XI capitolo: sulla divisione dei quadrati in un certo numero di quadrati e sulla composizione di un quadrato a partire da un certo numero di quadrati, con operazioni di *copia e incolla*.
- XII capitolo: sulla divisione delle sfere e sulle differenti specie di figure che possono essere disegnate sulla sfera.

Non tutti i capitoli sono giunti a noi integri.

Non sono pervenuti due capitoli:

- Sulla divisione delle figure scalene.
- Sulle tangenti alle circonferenze.

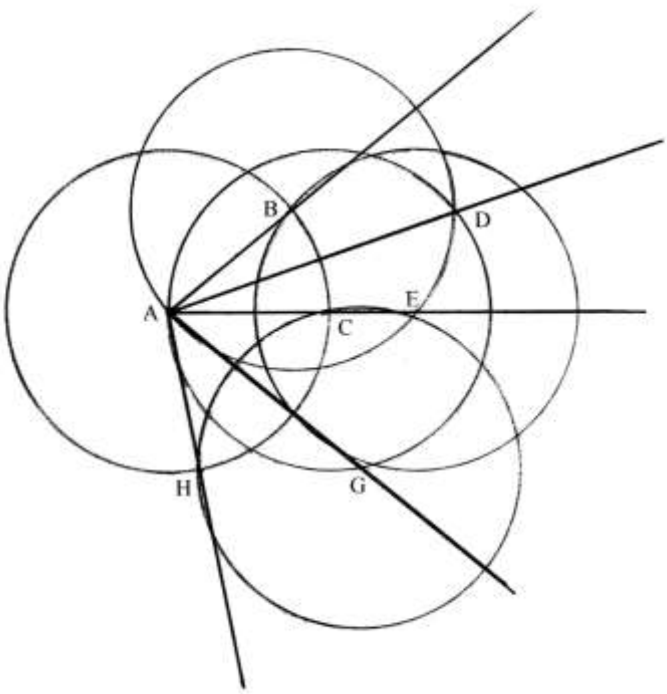
Il testo conservato contiene 171 problemi geometrici, 150 dei quali sono di geometria piana.

COSTRUZIONI CON LA RIGA E UNA SOLA APERTURA DI COMPASSO

Angoli

Abu'l – Wafa presentò una costruzione geometrica per dividere o moltiplicare un angolo per un numero intero, usando una sola apertura di compasso (e cioè usando un compasso a *apertura fissa*).

L'angolo ha il vertice in A:



Con raggio R fare centro in A e disegnare un arco che taglia i due lati dell'angolo nei punti B e C.

Con la stessa apertura fare centro nei punti B e C e tracciare due archi che si intersecano in un nuovo punto, D: la semiretta AD è la bisettrice dell'angolo BAC.

Fare centro in A e in B e disegnare due circonferenze: la seconda interseca il lato AC dell'angolo in un punto, E.

Con centro in E, tracciare una circonferenza che taglia quella di centro A in un nuovo punto, F. Per questo ultimo punto condurre la semiretta AF: l'angolo CAF ha la stessa ampiezza di quello BAC.

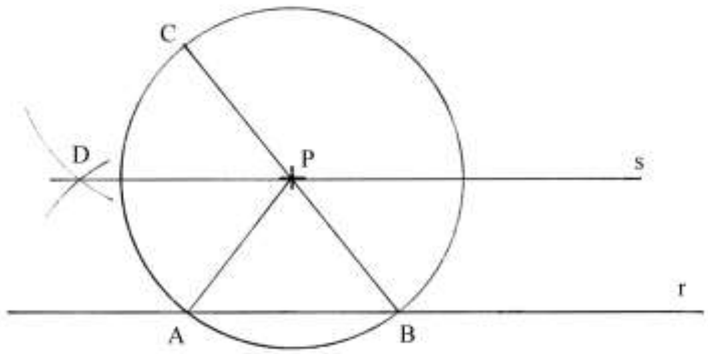
La semiretta passante per i punti A e F taglia la circonferenza di centro in C in un punto, G.

Sempre con la stessa apertura, fare centro in G e disegnare una circonferenza che interseca quella di centro A in un nuovo punto, H.

Tracciare la semiretta uscente da A e passante per H: l'angolo GAH ha la stessa ampiezza di quelli BAC e EAG.

Retta parallela

È data la retta **r**. Per il punto P, esterno ad essa, deve essere tracciata una retta parallela, **s**.



Fare centro in P e disegnare una circonferenza che incontra la retta r in due punti, A e B.

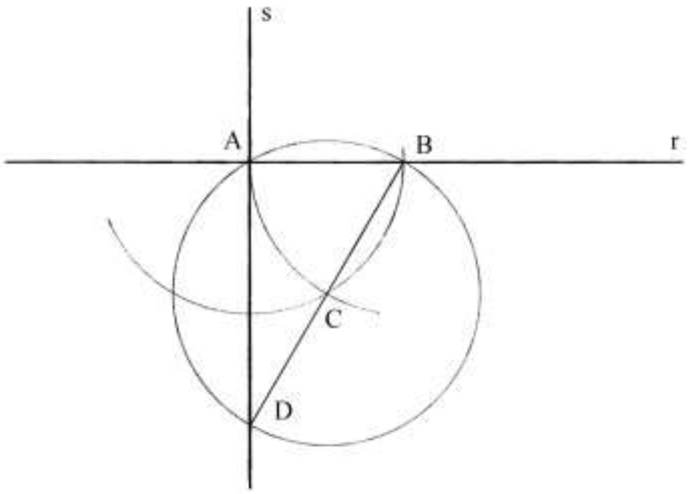
Condurre il raggio PA e il diametro passante per i punti P e B: esso taglia la circonferenza nel punto C.

Costruire la bisettrice dell'angolo CPA: con la stessa apertura usata per la circonferenza, fare centro in A e in D e tracciare due archi che si intersecano nel punto D.

La retta s, passante per D e per P, è la bisettrice degli angoli CPA e APC ed è la retta parallela cercata.

Perpendicolare a una retta per un suo punto

Sulla retta **r** è fissato un punto A per il quale deve essere tracciata una retta perpendicolare alla stessa **r**.



Anche questa costruzione è realizzata con un'unica apertura di compasso.

Con il raggio imposto dall'apertura fissa del compasso, fare centro nel punto A e tracciare un arco che determina il punto B; ripetere questa operazione con centro in B. I due archi si intersecano in un nuovo punto, C.

Fare centro in C e disegnare un'intera circonferenza e tracciare il diametro passante per i punti B e C: esso taglia la circonferenza nel punto D.

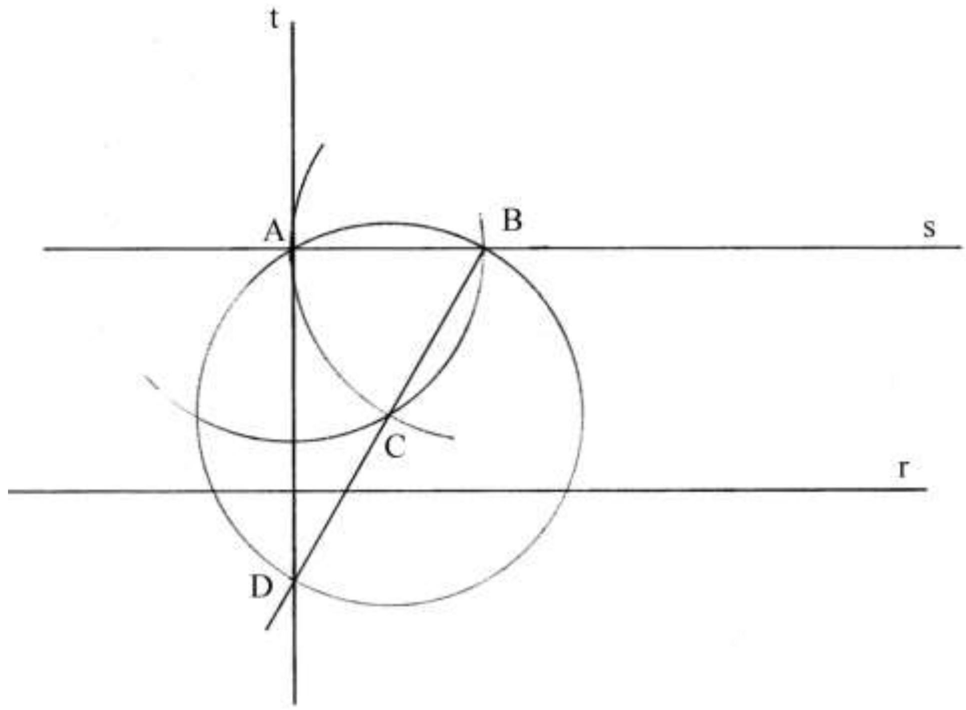
La retta **s**, passante per i punti A e D, è perpendicolare alla retta **r**.

Perpendicolare a una retta da un punto esterno

Deve essere tracciata una perpendicolare alla retta **r**, passante per il punto A, ad essa esterno.

Disegnare una retta parallela, **s**, passante per il punto A.

Con il raggio prefissato, fare centro in A e tracciare un arco che taglia la retta **s** in un secondo punto: è B; ripetere questa operazione facendo centro in questo ultimo punto. I due archi si intersecano nel punto C.



Con la stessa apertura fare centro in C e disegnare una circonferenza.
Per i punti B e C condurre un diametro che taglia la circonferenza in un punto, D.

La retta **t**, perpendicolare alle rette **r** e **s**, passa per i punti A e D.

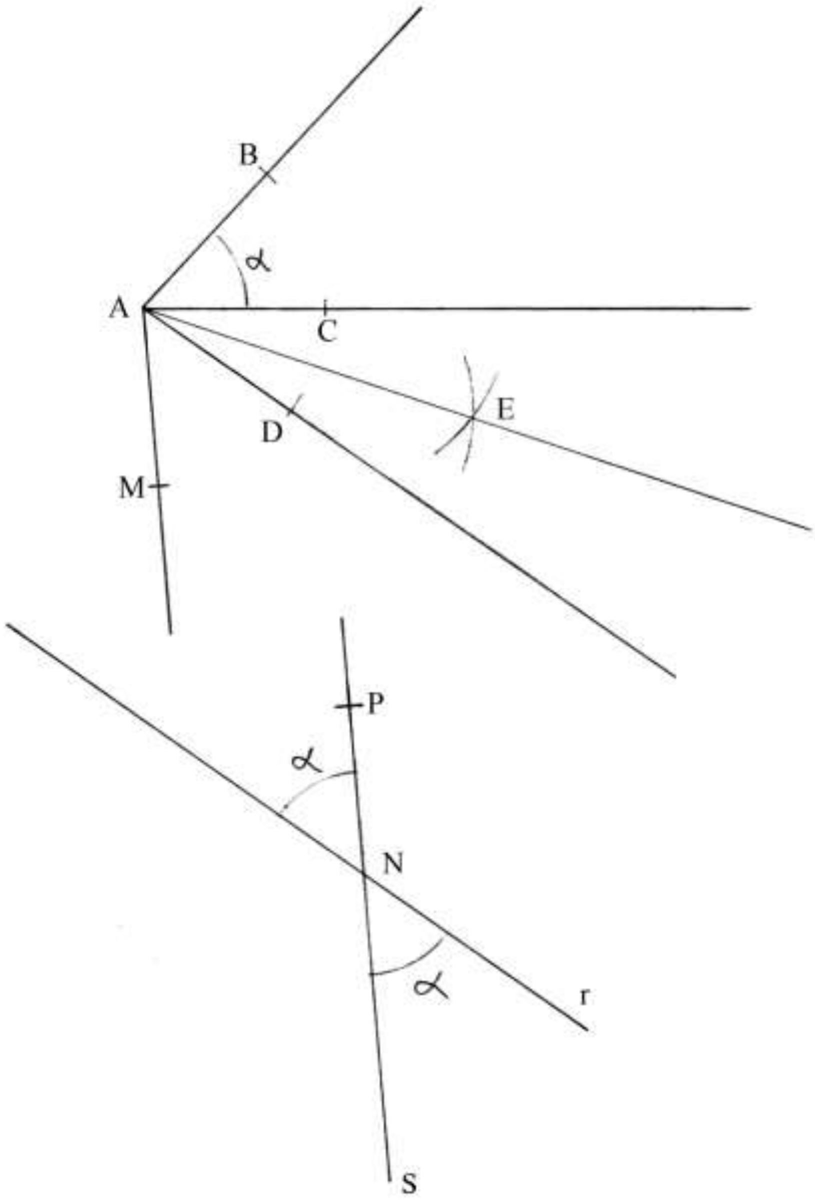
Tracciare una retta che formi un angolo dato

BAC è un angolo di ampiezza **α**. Sono dati una retta **r** e un punto, P, ad essa esterna.

Deve essere tracciata una retta, **s**, passante per il punto P, che formi con la retta **r** un angolo di ampiezza **α**.

Dal punto A disegnare una semiretta parallela alla retta **r**. Il punto D è a distanza AD = AC.
Costruire la bisettrice dell'angolo CAB: è la semiretta AE.
Determinare un angolo, BAM, di ampiezza doppia di quella di BAC:

$$BAM = 2 * BAC = 2 * \alpha$$



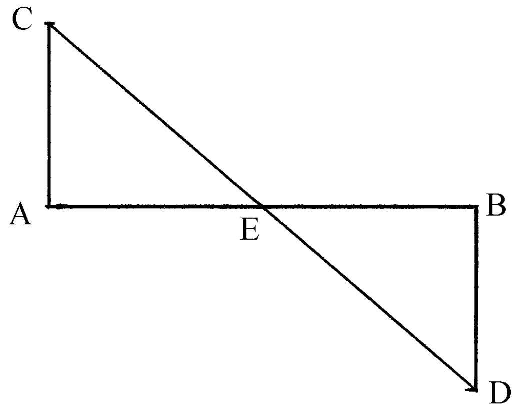
Per il punto P tracciare una retta parallela alla semiretta AM: essa taglia la retta **r** in un punto, N, e forma quattro angoli, due dei quali – opposti nel vertice N – hanno ampiezza uguale a quella di BAC = $\boldsymbol{\alpha}$.

La costruzione serviva forse a Abu'l – Wafa a risolvere un problema di agrimensura?

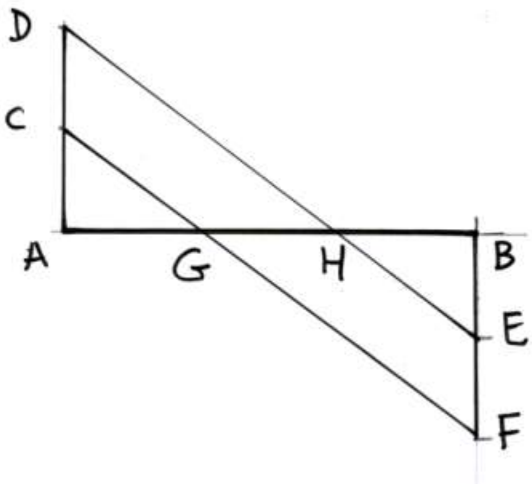
Costruzione di multipli o sottomultipli di un segmento

Abu'l Wafa propone una costruzione per ottenere multipli o sottomultipli di un segmento dato: nel secondo caso, la costruzione si riduce alla divisione in parti uguali di un segmento. Partiamo da questo secondo caso.

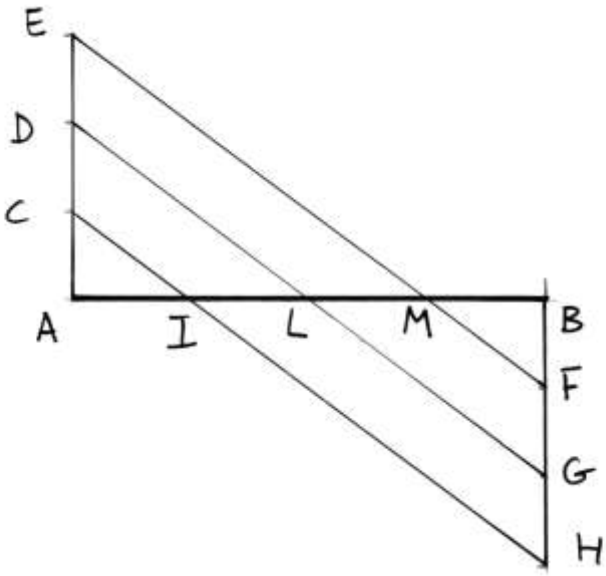
Il segmento AB deve essere diviso in *due* parti uguali:



Tracciare le perpendicolari nei punti A e B, orientate in direzioni opposte.
Sulle due linee appena tracciate riportare la stessa lunghezza AC = BD.
Disegnare il segmento CD: esso taglia AB nel suo punto medio, E, per cui AE = ED.
La costruzione appena descritta ha validità generale ed è applicabile alla divisione di un segmento in **n** parti uguali, come spiegano gli esempi che seguono.
Il segmento AB deve essere diviso per via geometrica in *tre* parti uguali:

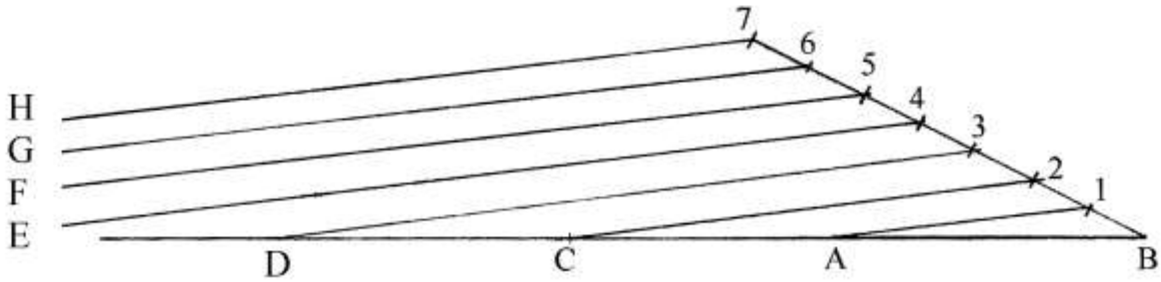


Il metodo che viene qui spiegato fu descritto dal matematico musulmano a**l-Nayrizi** (conosciuto in Europa con il nome latinizzato di *Anaritius*): egli nacque intorno all'865 a Nayriz (nell'attuale Iran) e morì verso il 922 a Baghdad (Iraq). Studiò in maniera approfondita gli *Elementi* di Euclide.
All'estremo A tracciare un segmento verticale, rivolto verso l'alto, e perpendicolare ad AB. All'altro estremo, B, va disegnato un altro segmento perpendicolare, orientato verso il basso.
A partire da, e poi da B, riportare un segmento di lunghezza a piacere, AC, per due volte: AC = CB = BE = BF.
Dal punto C tracciare un segmento fino al punto F: esso interseca AB nel punto G. Il successivo segmento CF taglia AB nel punto H.
I segmenti AG, GH e HB hanno la stessa lunghezza.
Il metodo descritto nella precedente figura è molto pratico ed ha applicazione generale, come mostra la figura che segue che fornisce l'esempio della divisione in 4 parti uguali di un altro segmento AB:



La regola generale che si può ricavare dai due esempi precedenti è la seguente: per dividere in N parti uguali un segmento dato, è sufficiente dividere in (N-1) parti uguali due segmenti perpendicolari disegnati agli estremi del segmento da suddividere e collegare i loro punti.

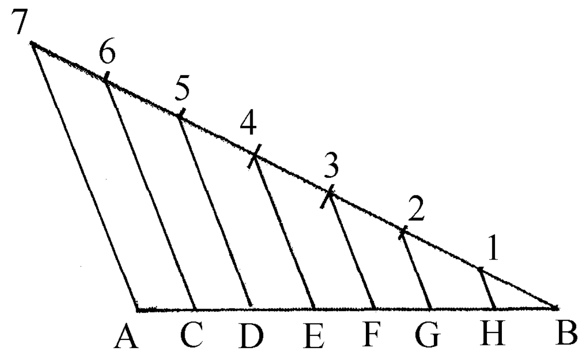
Il metodo di **al-Nayrizi** fu poi applicato da Abu'l - Wafa allo scopo di ricavare multipli di un segmento dato, come spiega la figura che segue:



Il segmento AB deve essere ingrandito un numero **n** di volte, ad esempio 7 come in figura. A partire dal punto B, tracciare una semiretta inclinata e di lunghezza a piacere. Su di essa riportare dal punto B sette volte una lunghezza a piacere: si determinano i punti 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7.

Dal punto 1 tracciare un segmento fino al punto A. Con la coppia squadra-squadra o squadra-righello, disegnare linee parallele al segmento 1-A a partire dai punti 2, 3 e così via: esse intersecano i punti C, D e i successivi sulla semiretta che costituisce il prolungamento verso sinistra del segmento AB. I segmenti AC, CD e i successivi (non mostrati nella figura) hanno lunghezza identica a quella di AB: nel caso della figura è stato costruito il segmento BD multiplo di ragione 3 del segmento AB.

La stessa costruzione fu usata da Abu'l - Wafa per dividere il segmento AB in un certo numero di parti uguali, 7 nell'esempio:



In questo secondo caso, il punto terminale, 7, viene collegato con il vertice A e i segmenti successivi sono disegnati parallelamente a A-7, a partire dai punti 6, 5, 4, 3, 2, 1, fino a intersecare il segmento AB nei punti C, D, E, F, G e H.

Riassumendo, la costruzione fu impiegata da Abu'l – Wafa per due differenti scopi:

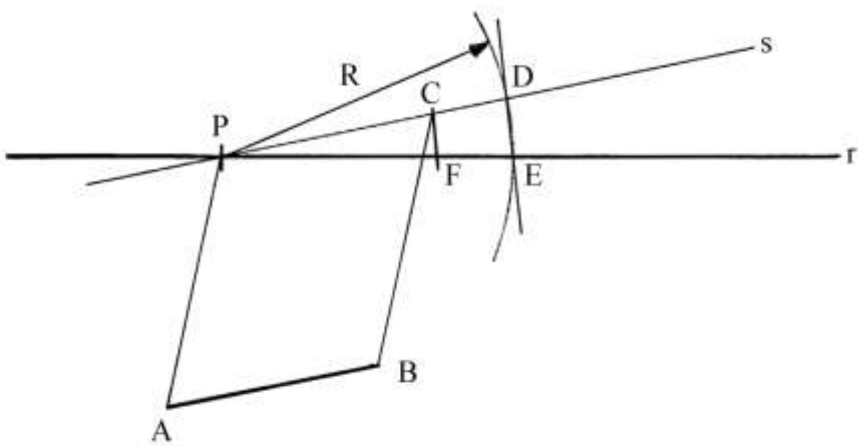
- costruire un segmento *multiplo* di AB, con linee tracciate parallelamente a A-1;
- dividere il segmento AB in parti uguali (*sottomultipli*), con linee disegnate parallelamente a A-7.

Nel primo caso, la costruzione era appoggiata sul *primo* punto della divisione (1) e nel secondo caso sull'ultimo punto (7).

I metodi suggeriti da a**l-Nayrizi** e da **Abu'l – Wafa** presentavano un grande vantaggio per gli artigiani e per i pratici: non richiedevano l'uso del compasso, ma soltanto quello della riga e della squadra (per tracciare le perpendicolari agli estremi del segmento da dividere).

Riportare una lunghezza su di una retta

È data una retta **r**. Un segmento AB, ad essa esterno, è collocato in una posizione qualsiasi rispetto alla retta: nell'esempio non è né parallelo né perpendicolare.



Sulla retta **r**, a partire da un suo punto qualsiasi, P, deve essere tracciato un segmento di lunghezza uguale a AB.

Collegare i punti A e P e parallelamente a AP tracciare una linea passante per il punto B.

Per il punto P condurre una retta, **s**, parallela al segmento AB.

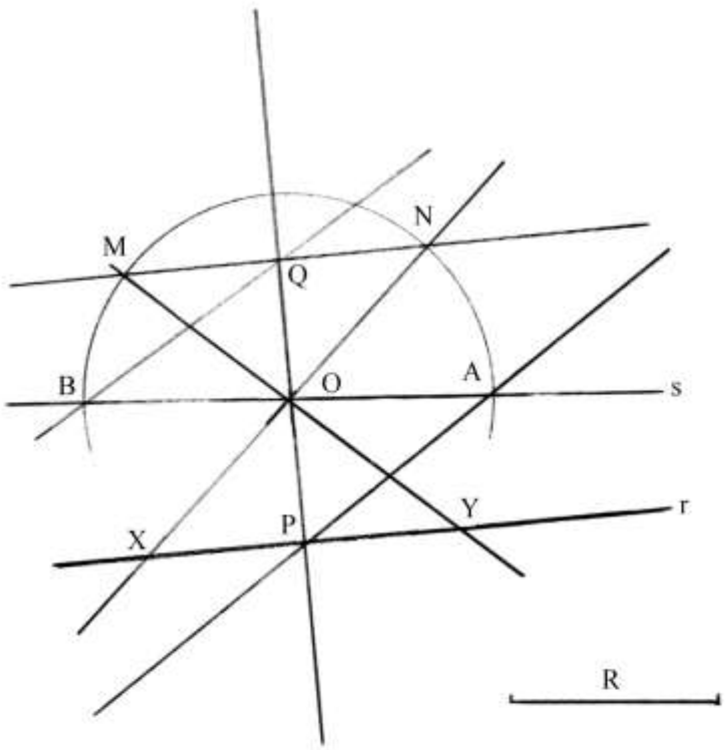
Anche in questo caso, Abu'l – Wafa pose la condizione dell'uso di un compasso a *apertura fissa*: senza questa limitazione, un geometra farebbe centro in P e, con raggio PC, traccerebbe un arco da C fino a incontrare la retta **r**. Ma ciò non era possibile.

Con raggio R, uguale all'*apertura fissa* del compasso, fare centro in P e disegnare un arco che interseca le rette **s** e **r** in due punti: rispettivamente D e E.

Tracciare la corda DE e parallelamente ad essa condurre una linea passante per C, fino a tagliare la retta **r** in un nuovo punto, F: il segmento PF ha la stessa lunghezza di quello AB.

<u>Intersezioni fra una retta e una circonferenza</u>

Il punto O è il centro di una circonferenza di cui è conosciuto il raggio R. Inoltre, è data una retta **r**, comunque inclinata:



Devono essere determinati i punti nei quali la retta **r** è tagliata dalla circonferenza di centro O.

Dal punto O condurre la perpendicolare alla retta **r**: è stabilito il punto P.

Disegnare una retta, **s**, comunque orientata, passante per il punto O e, su di essa, a partire da O, fissare il punto A a distanza OA = R.

Fare centro in O e, con raggio R, tracciare un ampio arco di circonferenza che taglia la retta **s** in un punto, B.

Dal punto A condurre una retta passante per il punto P. Parallelamente a questa ultima, per il punto B tracciare una nuova retta che interseca il diametro passante per O in un nuovo punto, Q.

Per il punto Q disegnare una retta parallela alla retta **r**: essa taglia l'arco di circonferenza in due punti, M e N.

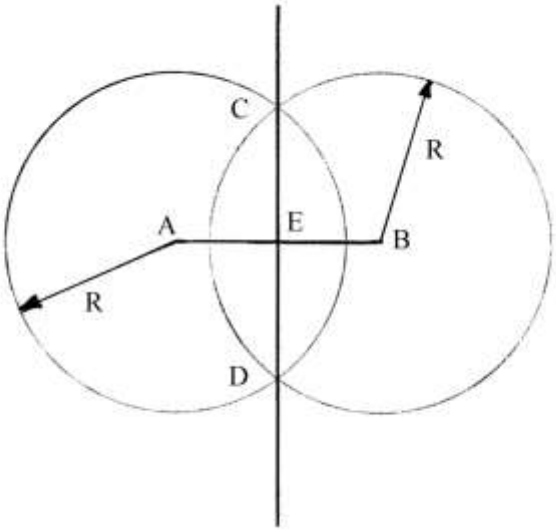
Infine, tracciare due rette passanti per le coppie di punti M-O e N-O: esse incontrano la retta **r** in due punti, X e Y, che sono le intersezioni della circonferenza di centro O e raggio R con la stessa retta.

Questa costruzione, in apparenza macchinosa, fu forse suggerita a Abu'l – Wafa dall'inaccessibilità di parte della situazione da rilevare: in condizioni di normale visibilità sarebbe sufficiente disegnare una circonferenza intera che taglierebbe la retta **r** nei due punti cercati, X e Y.

Il problema potrebbe essere nato nell'ambito degli agrimensori.

Costruzione di un angolo retto

AB è un segmento. L'apertura del compasso è *fissa* ed è uguale a R:



Con questa apertura, fare centro nei punti A e B e tracciare due circonferenze: esse si intersecano in due punti, C e D.

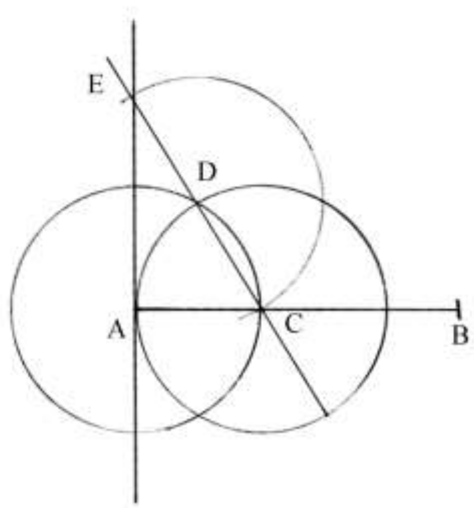
Disegnare la retta passante per i punti C e D: essa taglia il segmento AB nel suo punto medio, E, e forma *quattro angoli retti* nello stesso punto.

Costruzione della perpendicolare all'estremo di un segmento

AB è un segmento e al suo estremo A deve essere costruita una retta perpendicolare e quindi due angoli retti, senza prolungare il segmento stesso verso sinistra o verso destra.

Scegliere un punto, C, sul segmento.

Fare centro in A e in C con apertura AC e tracciare due circonferenze che si intersecano in due punti, fra i quali vi è D.



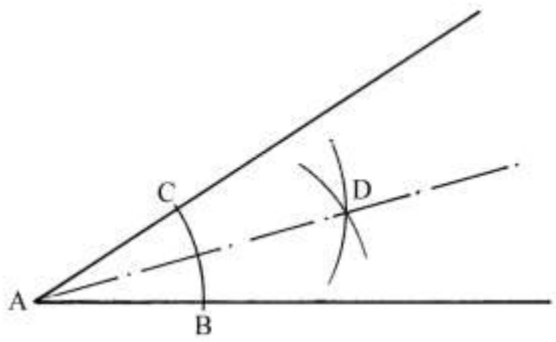
Fare centro in D con la stessa apertura di compasso e disegnare un arco dal punto C, procedendo in senso antiorario.

Tracciare il raggio CD e prolungarlo fino a incontrare l'ultimo arco in un nuovo punto, E.

Per i punti E e A disegnare una retta: essa è *perpendicolare* al segmento AB nel suo vertice A e forma angoli retti.

Dividere un angolo in due parti uguali

A è il vertice di un angolo qualsiasi che deve essere diviso in due parti uguali:



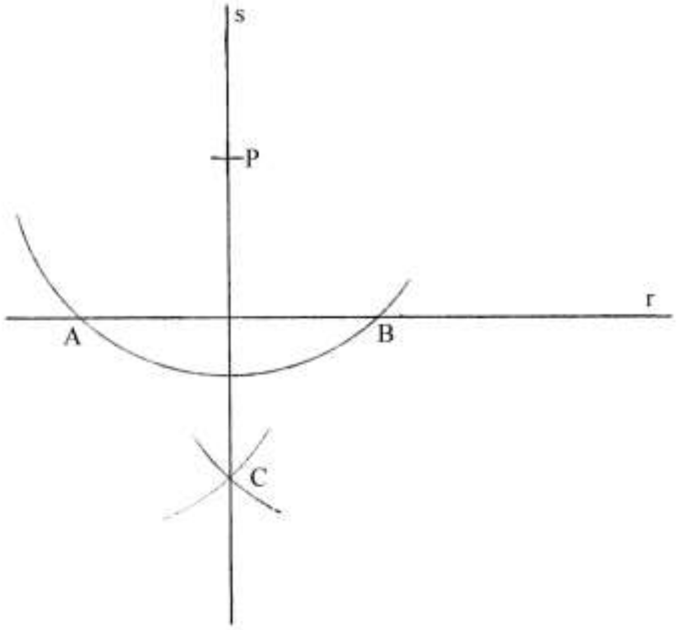
Fare centro in A e tracciare un arco che taglia i lati dell'angolo in due punti, B e C.

Con la *stessa apertura*, fare centro in B e in C e disegnare due archi che si intersecano in un punto, D.

Per i punti A e D passa la bisettrice dell'angolo CAB che divide lo stesso in due angoli uguali.

Abbassare una perpendicolare a una retta

Sono dati un punto, P, e una retta, **r**: deve essere tracciata una perpendicolare alla retta **r**, passante per il punto P, esterno alla stessa.



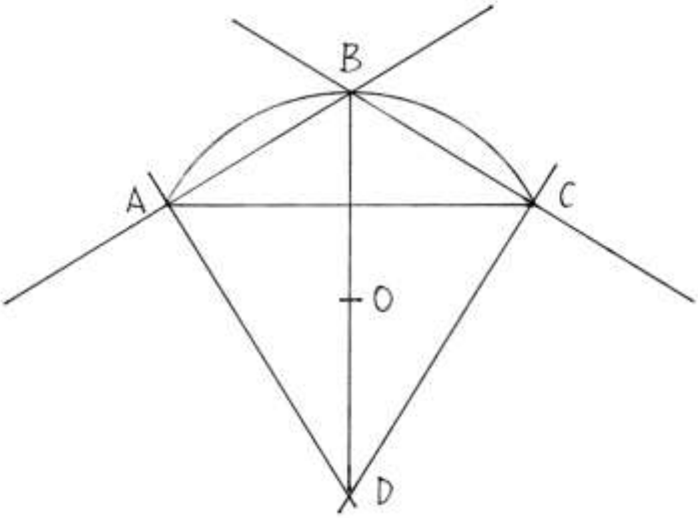
Fare centro nel punto P e disegnare un arco che interseca la retta in due punti, A e B.

Con la stessa apertura, fare centro nei punti A e B e tracciare due archi che si incrociano in un nuovo punto, C.

Per i punti P e C passa una retta, **s**, perpendicolare alla retta **r**.

<u>Centro di un arco di circonferenza</u>

AC è un arco di circonferenza di cui non è noto il centro O:



Determinare il punto medio dell'arco: è B.

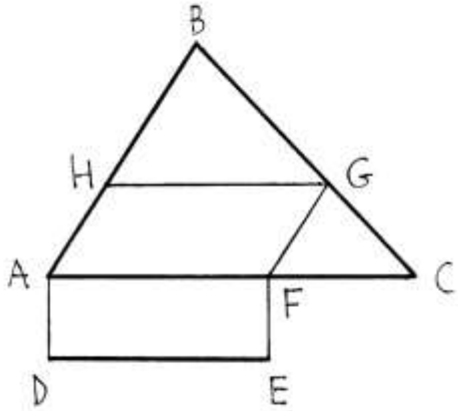
Tracciare due rette per le coppie di punti A-B e B-C.

Per i punti A e C condurre due rette perpendicolari rispettivamente a AB e a BC: esse si incontrano nel punto D.

Disegnare una retta passante per i punti B e D e determinare il punto medio, O, del segmento BD: esso è il centro cercato.

<u>Segmento parallelo a un lato di un triangolo</u>

ABC è un triangolo qualsiasi. DE è un segmento che deve essere riportato all'interno del triangolo, parallelamente ad un lato, ad esempio AC.



Allineare il segmento DE al vertice A e parallelamente al lato AC.

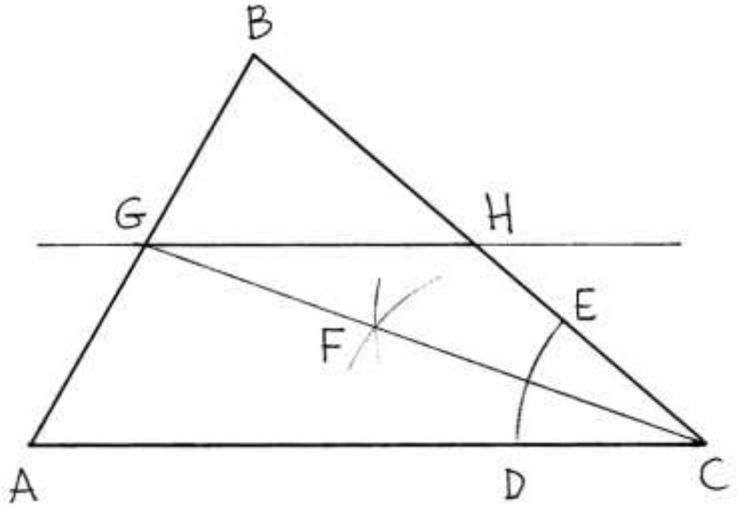
Proiettare i punti D e E perpendicolarmente sul lato AC: il segmento AF ha la stessa lunghezza di DE.

Dal punto F tracciare un segmento parallelo al lato AB fino a incontrare il lato BC in un nuovo punto, G.

Dal punto G disegnare una linea parallela al lato AC, fino a tagliare il lato AB nel punto H: il segmento HG è parallelo a AC e ha la stessa lunghezza di DE.

Segmento che taglia un lato di un triangolo

ABC è un triangolo generico. Deve essere tracciato al suo interno un segmento parallelo al lato di base, AC, e che abbia lunghezza uguale a quella di una parte del lato BC: GH = HC :



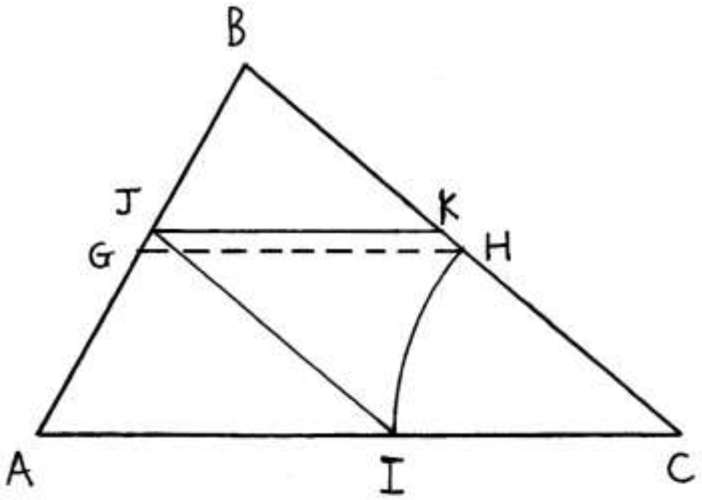
La costruzione è stata ottenuta seguendo alla lettera le istruzioni di Abu'l – Wafa, ma essa *non* è sempre corretta.

Fare centro nel vertice C e tracciare un arco che taglia i lati nei punti D e E. Con la stessa apertura di compasso, fare centro nei punti D e E e disegnare due archi che si intersecano nel punto F. La linea passante per C e per F è la *bisettrice* dell'angolo DCE e interseca il lato opposto AB in un nuovo punto, G.

Dal punto G condurre una linea parallela a AC fino a determinare il punto H.

- APPROFONDIMENTO -

La corretta costruzione è mostrata con l'aiuto della figura che segue:



H è il punto medio del lato AC. Fare centro nel punto C e con raggio CH tracciare un arco da H fino a incontrare il lato AC nel punto I.

Dal punto I condurre la parallela al lato BC fino a tagliare AB in un nuovo punto, J.

Il segmento JK è parallelo a AC ed è lungo quanto IC (e HC).

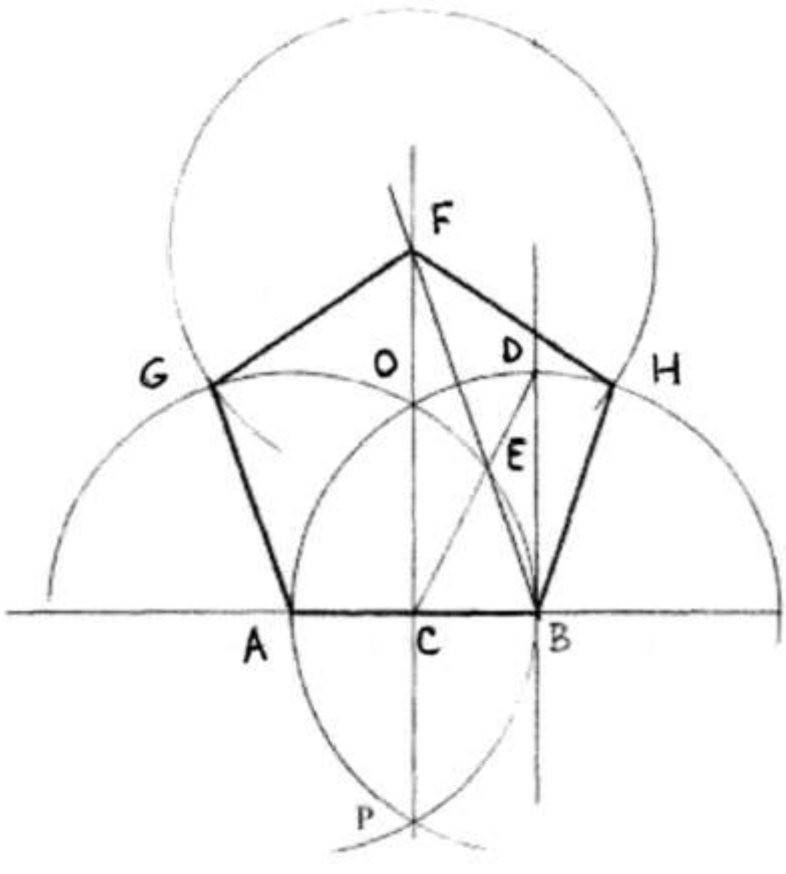
Il segmento tratteggiato GH presenta la soluzione *errata* di Abul' l Wafa.

- -

Pentagono regolare dato il lato

Abu'l – Wafa mise a punto un metodo in grado di soddisfare un'esigenza degli artigiani: disegnare un pentagono regolare usando una sola apertura di compasso.

Su di una retta orizzontale, disegnare il lato orizzontale AB, prolungare verso destra e verso sinistra e determinare il suo punto medio (con la costruzione dell'asse del segmento realizzata con apertura uguale a AB e passante per i punti O e P). Tracciare l'asse passante per C e la parallela passante per B. Viene così individuato il punto D.



Tracciare il segmento CD che taglia uno dei due archi nel punto E.

Disegnare una semiretta uscente da B e passante per il punto E: sulla verticale uscente da C viene intercettato il punto F. Questo ultimo punto è il terzo vertice del pentagono. Con apertura uguale a AB, fare centro in F: sono determinati i punti G e H.

Il poligono ABHFG è il pentagono costruito a partire dal lato AB con un'*unica apertura di compasso*.

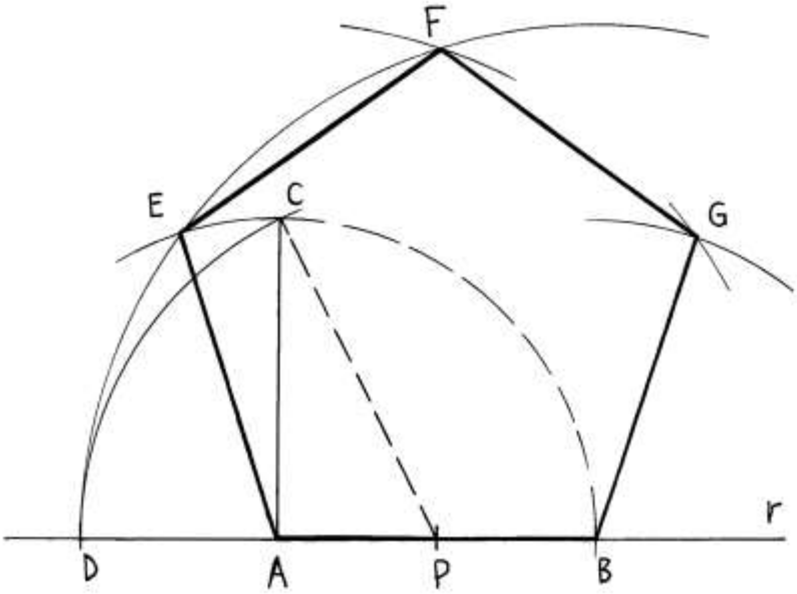
La costruzione di Abu'l – Wafa deriva da un'altra elaborata dal matematico egiziano Abu Kamil (circa 850-930).

- APPROFONDIMENTO -

<u>Pentagono dato il lato</u>

La costruzione che è qui descritta è quella del pentagono dato il lato.

Tracciare una retta orizzontale, *r*:



Su di essa fissare il primo lato, AB, e il suo punto medio, P.

Dal punto A innalzare la perpendicolare alla retta *r*.

Fare centro nel punto A e con raggio AB disegnare un arco da B fino a intersecare la perpendicolare in un punto, C.

Collegare i punti P e C. Fare centro in P e con raggio PC tracciare un arco da C fino a tagliare la retta *r* in un punto, D.

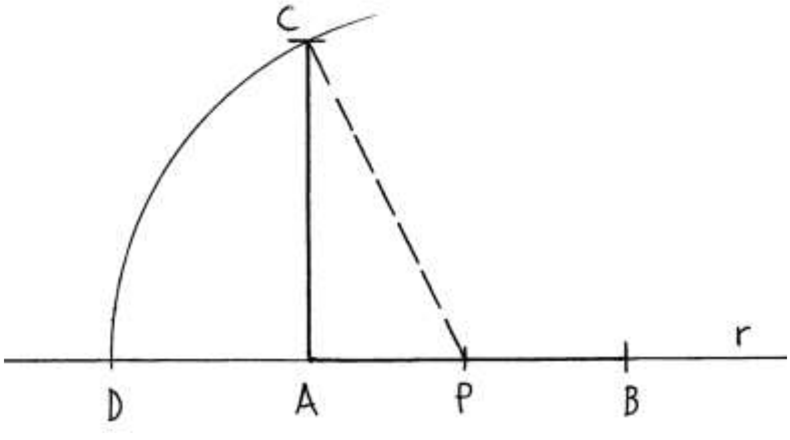
Con raggio DB fare centro nei punti A e B e disegnare due archi per stabilire i punti E e F .

Completare la costruzione facendo centro in B con raggio BA per determinare il vertice G.

AEFGB è il pentagono regolare cercato.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Approfondiamo la conoscenza della costruzione. Lo schema che segue descrive il suo significato.



ACP è un triangolo rettangolo: il cateto AP è lungo ½ di AB e quello AC è lungo quanto il lato AB.

L’ipotenusa CP è lunga

$$CP = \sqrt{AP^2 + AC^2} = \sqrt{\left(\frac{AB}{2}\right)^2 + AB^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{5}{4} \cdot AB^2} = \sqrt{5} \cdot \frac{AB}{2}$$

Il segmento CP è lungo quanto DP.

La lunghezza di DB è

$$DB = DP + PB = CP + PB =$$

$$= \sqrt{5} \cdot \frac{AB}{2} + \frac{AB}{2} = AB \cdot \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$$

L'espressione (√5 + 1)/2 vale 1,618… ed è il *numero aureo* Φ.

Il rapporto fra le lunghezze dei segmenti DB e AB (e cioè fra una *diagonale* e un *lato* di un pentagono regolare) è:

$$DB : AB = AB \cdot \left(\sqrt{5}+1\right)/2 : AB =$$

$$= \left(\sqrt{5}+1\right)/2 : 1 = \phi : 1$$

La costruzione di Abu'l – Wafa è corretta.

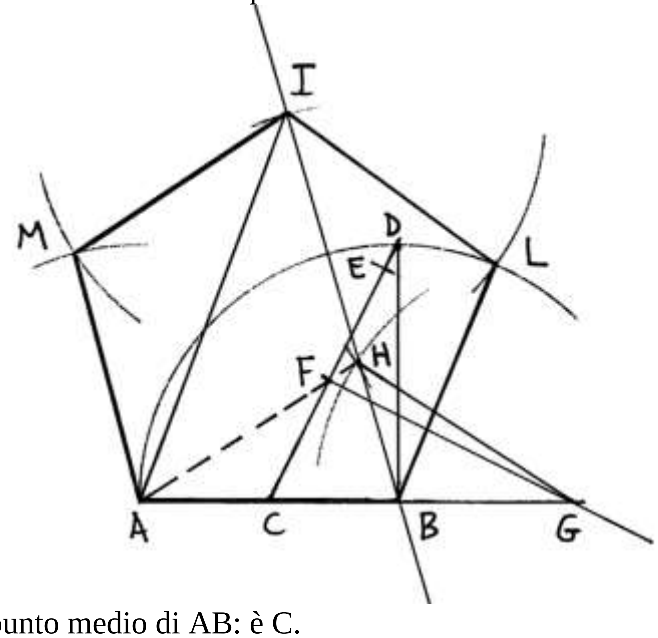
- -

Pentagono quasi esatto

La costruzione che è spiegata con la figura che segue fu proposta da Abu'l – Wafa nel rispetto della consueta condizione: l'uso di un compasso ad *apertura fissa*.

Tracciare una retta orizzontale e con l'*apertura fissa* stabilire i due punti A e B: il segmento B è il primo lato del pentagono da costruire.

Elevare la perpendicolare a AB nel punto B:



Determinare il punto medio di AB: è C.

Fare centro in B e, con raggio BA, tracciare un arco che taglia la perpendicolare in un nuovo punto: è D.

Con la stessa apertura, fare centro in C e disegnare un arco che interseca CD in un punto, E.

Stabilire il punto medio di CE: è F.

Per il punto F condurre la perpendicolare a CE: essa incontra la retta orizzontale nel punto G.

Con centro in A e in G (e con stessa *apertura fissa* del compasso) disegnare due archi che si tagliano in un nuovo punto, H: il triangolo AHG è isoscele perché i lati AH e HG hanno uguale lunghezza (per costruzione).

Tracciare una retta passante per i punti B e H. Fare centro in H e determinare il punto I sulla retta passante per B e H. Questo nuovo punto è il terzo vertice del pentagono.

Disegnare gli archi occorrenti per completare il pentagono facendo centro nei punti B, I e A.

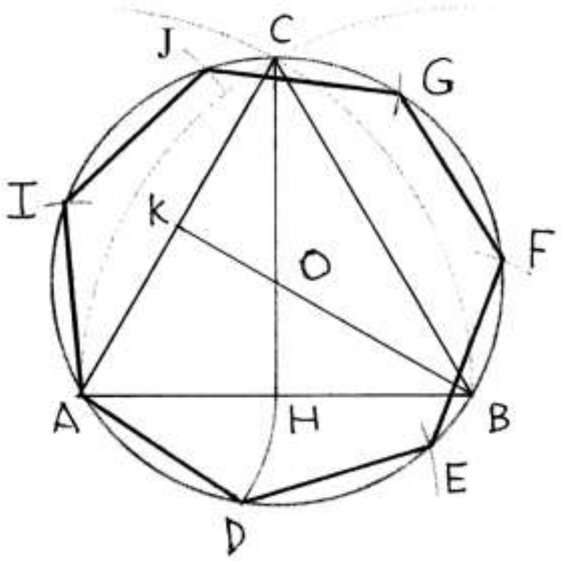
AMILB è il pentagono *quasi* esatto costruito con una sola apertura di compasso, uguale alla lunghezza del lato.

<u>Ettagono approssimato dato il lato</u>

La costruzione proposta da Abu'l – Wafa è una variante di quella, anch'essa approssimata, che è basata sul triangolo equilatero, probabilmente risalente a Erone di Alessandria (I secolo d.C.).

AB è il lato e ABC è il triangolo equilatero inscritto, *generatore dell'ettagono*.

Determinare i punti medi dei lati AB e AC: sono rispettivamente H e K. I segmenti AH = HB sono lunghi quanto il lato dell'ettagono approssimato da costruire.



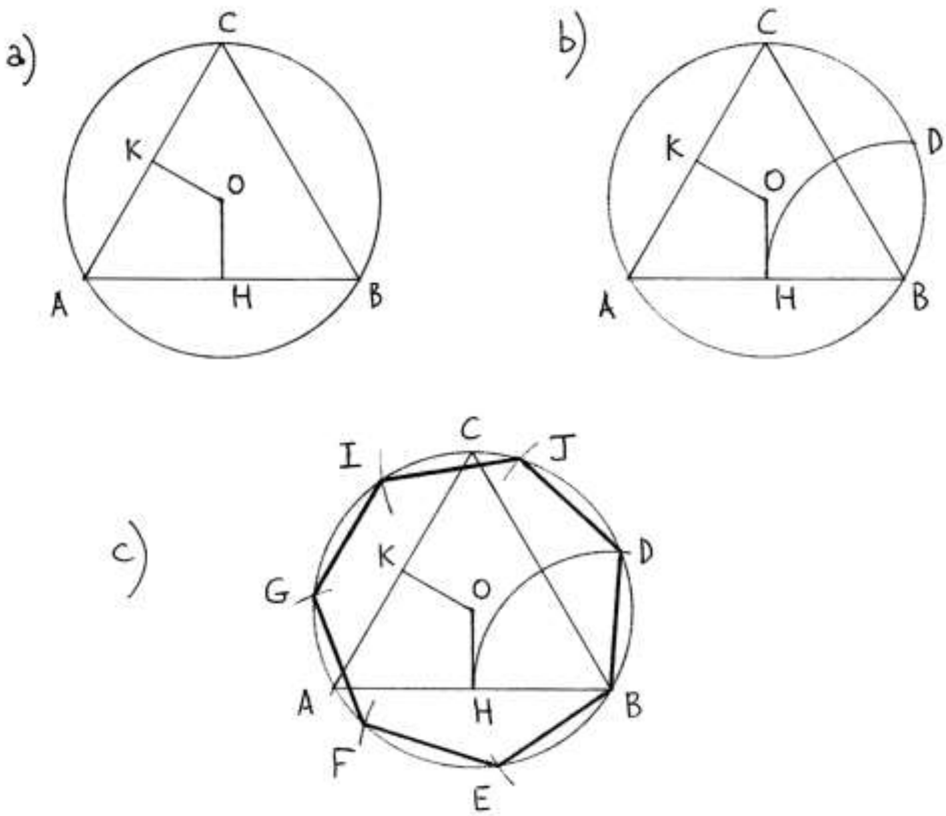
Tracciare le altezze CH e BK: esse si intersecano nel punto O, centro della circonferenza circoscritta al triangolo ABC (e al costruendo ettagono).

Disegnare la circonferenza di centro O e raggio OA = OB = OC e riportarvi la lunghezza del segmento AH.

Il poligono ADEFGJI è l'ettagono approssimato.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Un metodo simile è descritto nelle figure che seguono. Disegnare una circonferenza con centro nel punto O e inscrivervi il triangolo equilatero ABC (*figura a*):



Fissare i punti medi dei lati AB e AC: sono, rispettivamente, H e K.

Tracciare gli apotemi OH e OK.

Fare centro nel punto B (*figura b*) e, con raggio BH, disegnare un arco da H fino a incontrare la circonferenza in un punto, D.

La corda BD è la lunghezza *approssimata* del lato dell'ettagono inscritto.

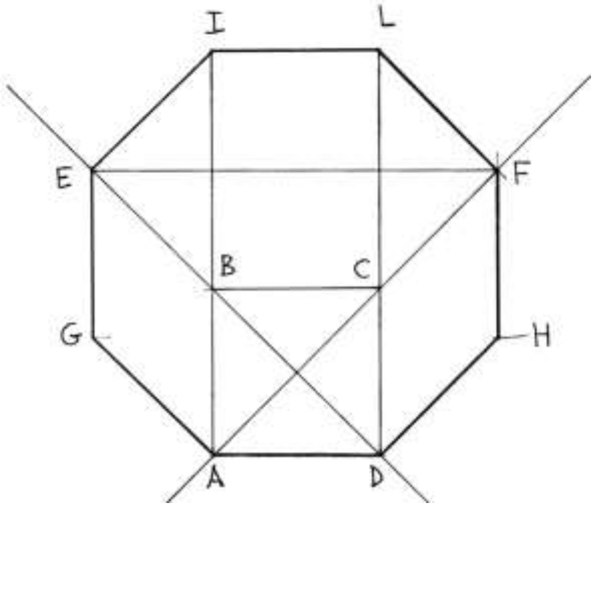
Riportando con il compasso la lunghezza di BD sulla circonferenza si ottengono i vertici E, F, G, I e J (*figura c*).

Il poligono DBEFGIJ è l'ettagono *approssimato* inscritto.

Ottagono regolare dato il lato

La costruzione che segue è una rielaborazione di quella proposta da Abu'l – Wafa con il consueto vincolo dell'*apertura fissa* del compasso.

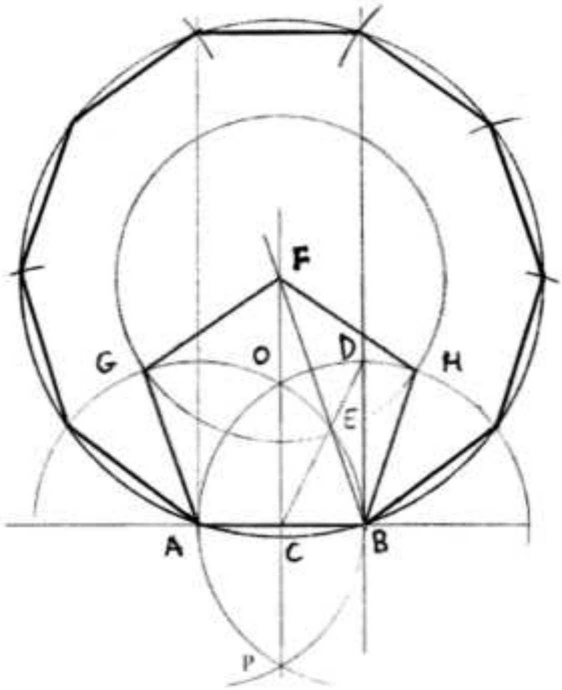
Costruire il quadrato ABCD: il suo lato AB è il primo dell'ottagono da disegnare.



Prolungare verso l’alto i lati AB e DC.
Tracciare due rette passanti per le coppie di punti A-C e B-D.
Con apertura AB, fare centro in B e in C e disegnare due archi che fissano i punti E e F.
Fare centro nei punti A, D, E e F e determinare i punti G, H, I e L.
Il poligono AGEILFHD è l’ottagono regolare.

<u>Decagono dato il lato</u>

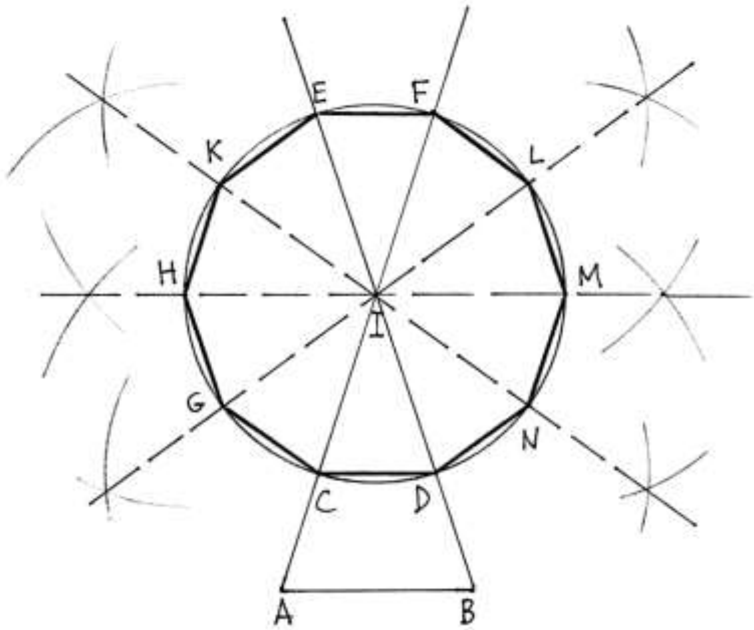
La costruzione del pentagono a partire dal lato, già vista in precedenza, fu sfruttata da Abu’l – Wafa per ricavare il decagono regolare inscritto, con lato AB uguale e sovrapposto a quello del pentagono:



Fare centro in F e, con raggio FA = FB (uguale alla lunghezza della *diagonale* del pentagono AGFHB), tracciare una circonferenza.
Riportare sulla circonferenza la lunghezza di AB: si ottiene il decagono regolare.

<u>Decagono dato il lato</u>

Abu’l – Wafa propose una costruzione del decagono regolare a partire dal lato: egli utilizzò la costruzione del pentagono.
Riprodurre il *triangolo aureo* AIB (rivedere il precedente paragrafo *Pentagono quasi esatto* e la figura in esso contenuta).
Fare centro in I e con raggio AB tracciare una circonferenza che taglia i lati di AIB nei punti C e D.



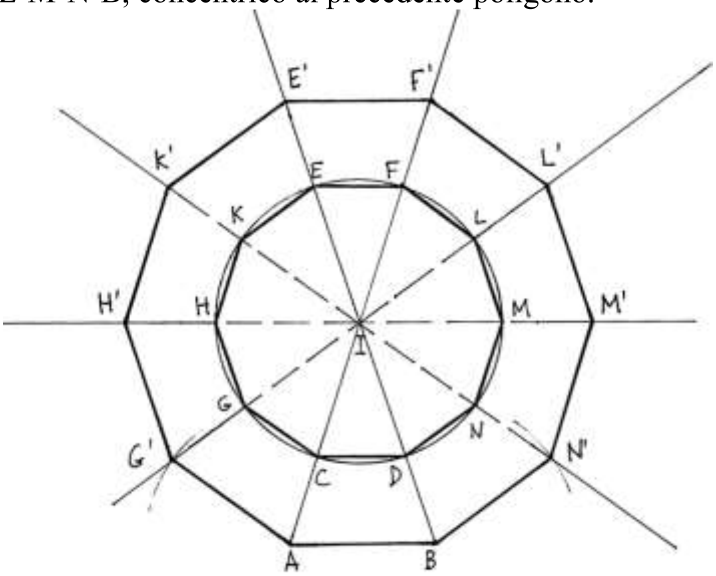
Prolungare i lati AI e IB fino a intersecare la circonferenza nei punti E e F.

Dividere gli angoli CIE e DIF in quattro parti uguali.

I punti C, G, H, K, E, F, L, M, N e D sono i vertici del decagono regolare.

Da questa costruzione deriva una ad essa simile che richiede l’uso di una unica apertura di compasso, uguale a AB.

Fare centro in A e in B con raggio AB e tracciare gli archi che tagliano le rette passanti per i vertici del decagono CGHKEFLMND. Viene così costruito il decagono regolare AG’H’K’E’F’L’M’N’B, concentrico al precedente poligono.



Il decagono esterno poteva essere costruito semplicemente disegnando una circonferenza con centro in I e raggio IA = IB, ma la restrizione dell’*apertura fissa* del compasso non lo permetteva.

Triangolo equilatero circoscritto a una circonferenza

Disegnare una circonferenza con centro in O e raggio OA. L'apertura di compasso è *fissa*.

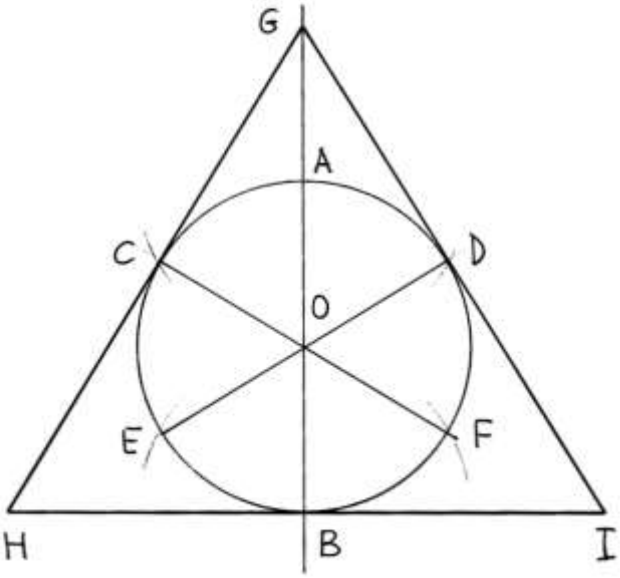
Tracciare il diametro verticale. Con la stessa apertura di compasso, fare centro nei punti A e B e disegnare gli archi che dividono la circonferenza in sei parti uguali. Sono così determinati i punti C. D, E e F.

Tracciare i diametri CF e ED.

Disegnare tre rette tangenti nei punti B, C e D: esse risultano *perpendicolari* ai diametri passanti per quei punti.

Le tre rette si intersecano in tre punti: G, H e I.

GIH è il triangolo equilatero circoscritto.

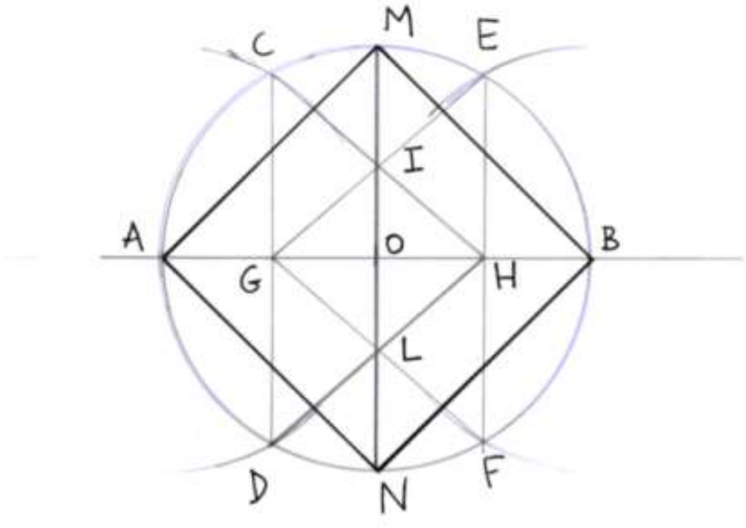


Quadrato inscritto

Come molti antichi geometri, Abu'l – Wafa presentò la costruzione del quadrato inscritto in una circonferenza disegnata con un *compasso ad apertura fissa* (che in inglese e in americano è chiamato *rusty compass* e cioè letteralmente "compasso arrugginito").

Il metodo qui descritto è uno dei *cinque* proposti da Abu'l – Wafa.

La circonferenza ha centro in O e diametro orizzontale AB:



Facendo centro in A e in B (con l'apertura di compasso *fissa*) si trovano i punti C, D, E e F.

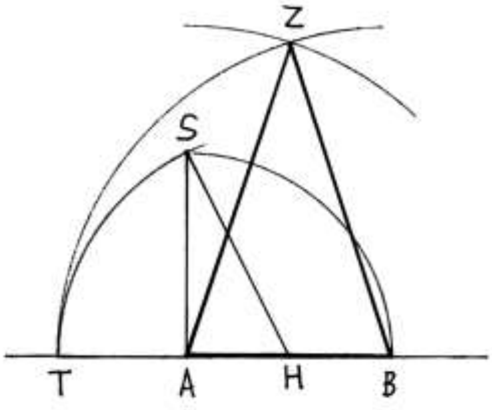
Tracciamo le corde CD e EB: esse individuano i punti G e H sul diametro orizzontale.

Disegniamo i segmenti GE, GF, HC e HD: le loro intersezioni sono i punti I e L. Per questi ultimi passa il diametro verticale MN che fornisce i due vertici mancanti del quadrato.

Nota – Il quadrilatero GIHL non è un quadrato, ma un rombo: i suoi lati *non* sono paralleli a quelli del quadrato AMBN.

<u>Pentagono inscritto</u>

Abu'l – Wafa propose una costruzione del pentagono inscritto a partire dalla lunghezza del raggio della circonferenza:



Tracciare una retta e fissarvi due punti, A e B, a distanza AB uguale al raggio della circonferenza circoscritta al pentagono.

Determinare il punto medio di AB: è H. Dal punto A elevare la perpendicolare a AB.

Con raggio AB, fare centro in A e disegnare un arco da B fino a intersecare in S la perpendicolare.

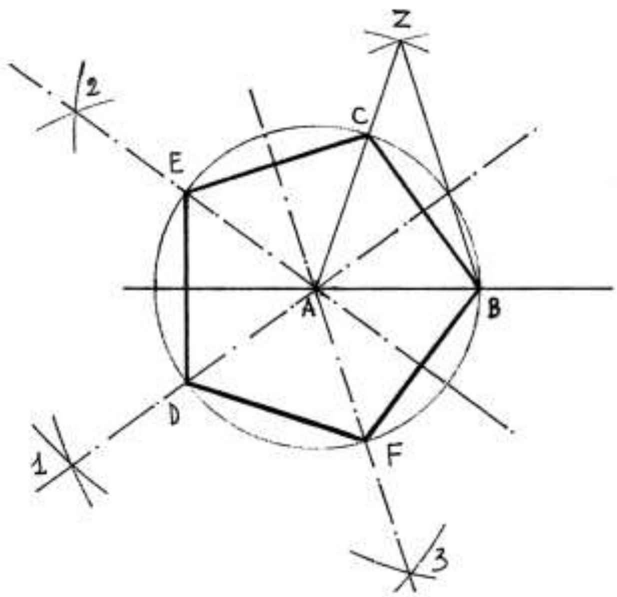
Collegare i punti S e H. Fare centro nel punto H e, con raggio HS, tracciare un arco da S fino a tagliare la retta orizzontale in un nuovo punto, T.

Con apertura BT, fare centro nei punti A e B e disegnare due archi che si incontrano in un punto, Z: il triangolo AZB è un *triangolo aureo*.

Abu'l – Wafa usò la costruzione del *triangolo aureo* per ricavare il pentagono.

Il metodo qui descritto richiede l'uso del compasso a apertura variabile, perché sono impiegati tre raggi diversi di differente lunghezza: AB, HS e BT (o la disponibilità di tre compassi con diverse aperture fisse).

Nella figura che segue è inizialmente riprodotta la precedente costruzione:



Fare centro in A e tracciare la circonferenza di raggio AB. Sul segmento AB riprodurre il triangolo aureo AZB.

Il lato AZ taglia la circonferenza in un punto, C: la corda CB è il primo lato del pentagono inscritto.

I rimanenti vertici del pentagono possono essere ottenuti sia riportando la lunghezza di CB, sia tracciando in successione le bisettrici degli angoli CAB, DAC e BAD.

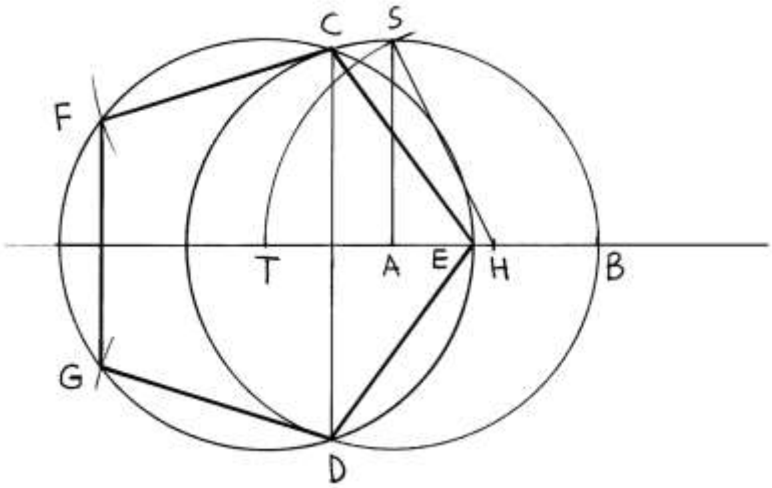
Il poligono CBFDE è il pentagono inscritto.

<u>Pentagono inscritto</u>

La costruzione descritta nella figura che segue è una variante della precedente.

Su di una retta orizzontale, fissare un punto, A, e tracciare una circonferenza con raggio AB. Elevare nel punto A la perpendicolare al segmento AB. Fissare il punto medio di AB: è H.

Collegare i punti H e S.



Fare centro in H e, con raggio HS, disegnare un arco da S fino a tagliare in T la retta orizzontale.

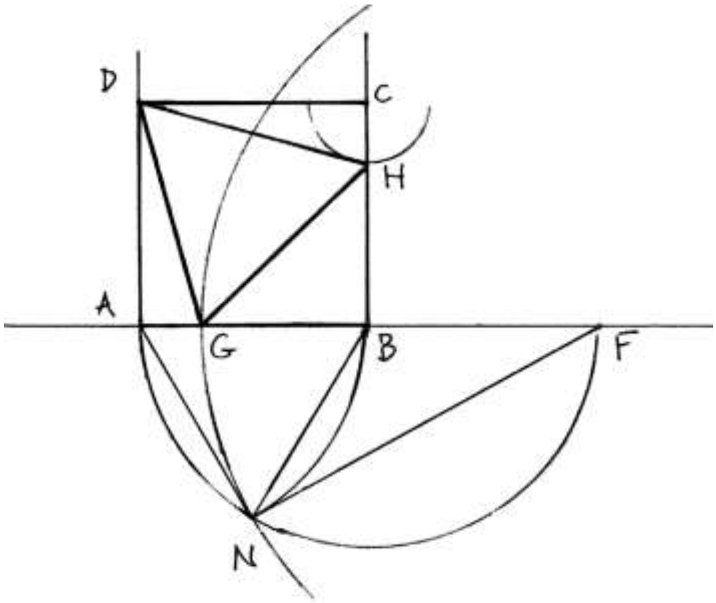
Fare centro nel punto T e, con raggio AB, tracciare una circonferenza che interseca la prima circonferenza in due punti, C e D, e il segmento AB nel punto E.

Le corde CE e ED sono i primi due lati del pentagono inscritto: riportando la lunghezza di una delle corde sulla seconda circonferenza sono fissati i punti F e G.

CEDGF è il pentagono cercato.

Triangolo equilatero inscritto in un quadrato

La figura ABCD è un quadrato al cui interno deve essere inscritto un triangolo equilatero con i vertici sui lati del primo:



Con raggio AB fare centro in A e in B: si ottengono i punti N e F (il segmento BF ha la stessa lunghezza di AB).

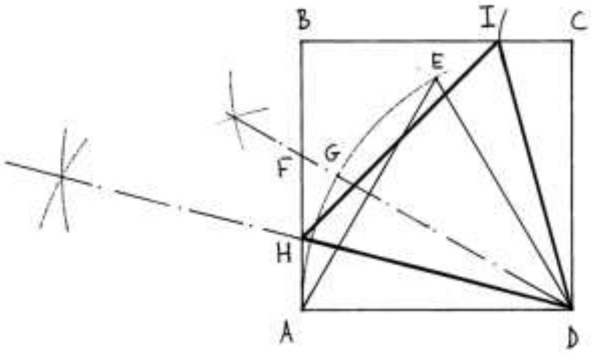
Con centro in F e raggio FN, disegnare l'arco che dal punto N taglia il lato AB nel punto G.

Con raggio AG fare centro in C e tracciare l'arco che interseca il lato BC nel punto H.

Disegnare il triangolo equilatero DHG.

Triangolo equilatero inscritto in un quadrato – altro metodo

ABCD è un quadrato. Sul lato AD costruire il triangolo equilatero AED:



Disegnare la bisettrice dell'angolo EDA: essa taglia il lato AB nel punto F e l'arco da A a E nel punto G.

Tracciare la bisettrice dell'angolo GDA: essa interseca il lato AB nel punto H.

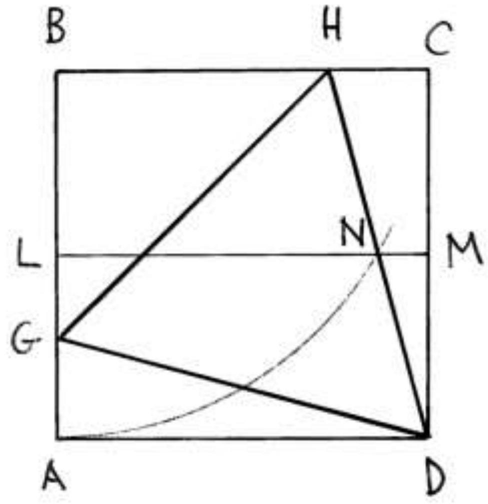
Misurare la lunghezza di AH e riportarla sul lato BC a partire dal punto C: è fissato il punto I.

HID è il triangolo equilatero inscritto nel quadrato ABCD ed ha la massima superficie possibile.

Triangolo equilatero inscritto in un quadrato

Questa costruzione è una variante della precedente.

ABCD è il quadrato. I punti L e M sono i medi dei lati AB e CD. Tracciare la mediana LM.



Disegnare il segmento passante per i punti D e N, fino a intersecare BC in un nuovo punto, H: DH è il primo lato del triangolo equilatero.

Con il compasso misurare la lunghezza CH e riportarla facendo centro in A: viene determinato il punto G.

GHD è il triangolo equilatero inscritto.

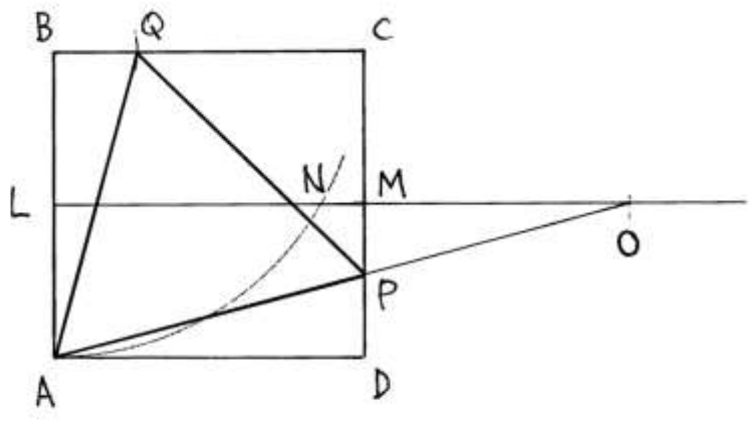
Triangolo equilatero inscritto in un quadrato

Anche questa costruzione è una variante.

Prolungare la mediana LM verso destra.

Fare centro in N e, con raggio AB, tracciare un arco che fissa il punto O.

Collegare A e O: il segmento AO taglia il lato CD in un punto, P

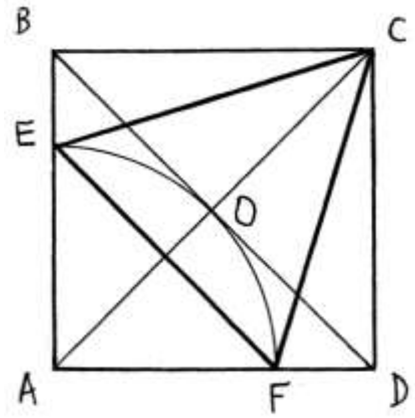


Riportare la lunghezza di DP dal punto B, sul lato BC, e fissare il punto Q.

AQP è il triangolo equilatero inscritto.

Triangolo equilatero inscritto in un quadrato

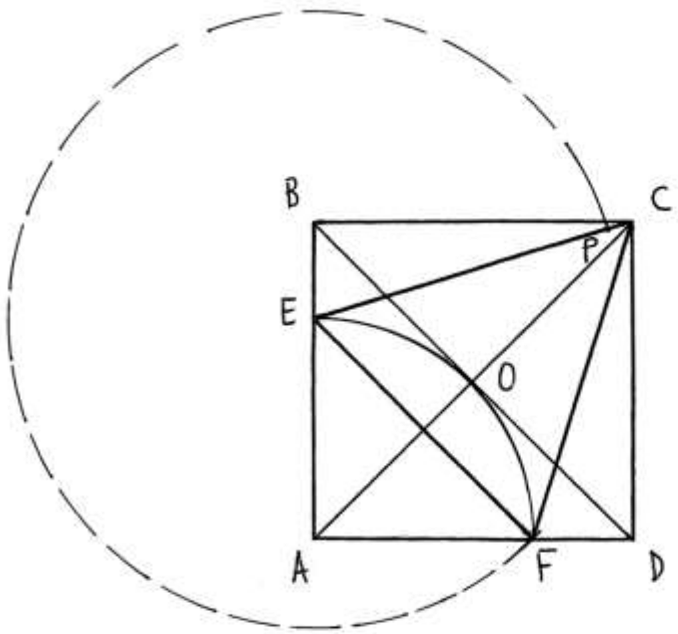
Disegnare il quadrato ABCD e tracciare le due diagonali AC e BD, che si intersecano in O:



Con centro in A e raggio AO disegnare l'arco che interseca i lati del quadrato nei punti E e F.

Il triangolo equilatero CEF è quello desiderato.

Questa costruzione è *approssimata*, perché il lato EF è leggermente più corto degli altri due: il triangolo è isoscele e *quasi* equilatero: la figura che segue ne è una dimostrazione.

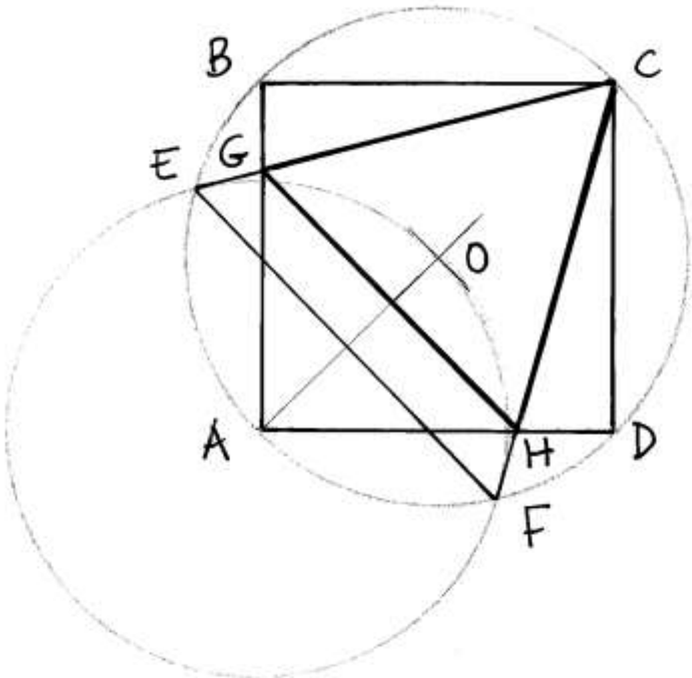


Il segmento EP ha la stessa lunghezza del lato EF ed è *più corto* del lato EC (e del lato FC). Il triangolo ECF non è propriamente equilatero.

Triangolo equilatero inscritto in un quadrato

La costruzione che segue deriva dalla precedente ed è *esatta*.

La superficie del quadrato ABCD deve essere utilizzata al massimo per ricavare un triangolo equilatero inscritto: per ottimizzare lo sfruttamento del materiale disponibile e ridurre al minimo i tagli necessari, i tre vertici del triangolo equilatero devono trovarsi sui lati del quadrato.



Determinare il centro O del quadrato; con raggio OA disegnare la circonferenza passante per i vertici A, B, C e D. Il quadrato è così inscritto in un cerchio.

Con la stessa apertura OA, fare centro in A e disegnare una seconda circonferenza che interseca la prima nei punti E e F: tracciare la corda EF e i segmenti EC e FC.

Il triangolo ECF è equilatero, ma non soddisfa la condizione di essere inscritto nel quadrato ABCD.

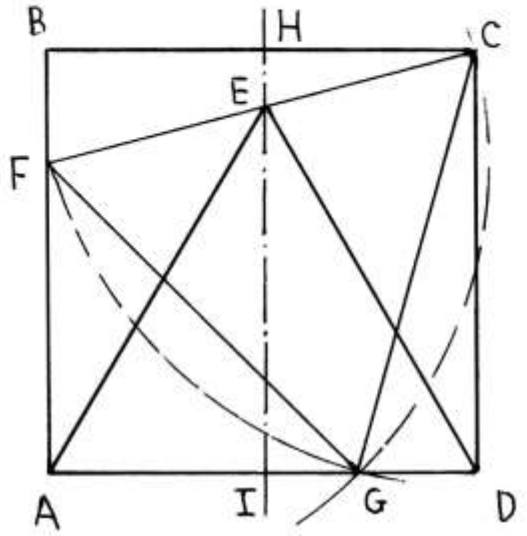
Il segmento CE taglia il lato AB nel punto G e CF intercetta il lato AD nel punto H.

Il triangolo equilatero CGH ha i vertici poggiati sui lati del quadrato ABCD.

Triangoli equilateri inscritti in un quadrato

Da tutte le precedenti costruzioni è possibile estrarre alcuni contributi per inscrivere in un solo quadrato almeno *due* triangoli equilateri aventi dimensioni differenti.

ABCD è un quadrato. Sul lato AD è costruito il triangolo rettangolo AED che non è propriamente inscritto perché uno dei suoi vertici – E – non cade su di un lato del quadrato:



Dal punto C tracciare la corda passante per il vertice E, fino a incontrare AB nel punto F.

Con raggio CF fare centro nei punti C e F e disegnare due archi che si incontrano in un nuovo punto, G.

CFG è un secondo triangolo equilatero, inscritto nel quadrato perché ha tutti e tre i vertici posti sui lati di ABCD.

HI è la mediana verticale del quadrato.

I triangoli rettangoli FBC e HEC sono *simili*.

La lunghezza di EH è data da

$$EH = HI - EI = \text{lato quadrato} - \text{altezza triangolo}_{AED} =$$
$$= \text{lato} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \text{lato} = \text{lato} \cdot \frac{2-\sqrt{3}}{2}$$

Dalla similitudine deriva la proporzione

BF : EH = BC : HC

Da cui

$$BF = \frac{EH \cdot BC}{HC} = \frac{EH \cdot \text{lato}}{\frac{\text{lato}}{2}} = 2 \cdot EH =$$
$$= 2 \cdot \left(\text{lato} \cdot \frac{2-\sqrt{3}}{2}\right) = \text{lato} \cdot \left(2-\sqrt{3}\right)$$

La lunghezza dell'ipotenusa FC è data da

$$FC^2 = BF^2 + BC^2 = \text{lato}^2 * (2 - \sqrt{3})^2 + \text{lato}^2 = \text{lato}^2 * (4 - 4 * \sqrt{3} + 3) + \text{lato}^2 =$$

$$= \text{lato}^2 * (7 + 1 - 4 * \sqrt{3}) = \text{lato}^2 * (8 - 4 * \sqrt{3}) = 4 * \text{lato}^2 * (2 - \sqrt{3}) .$$

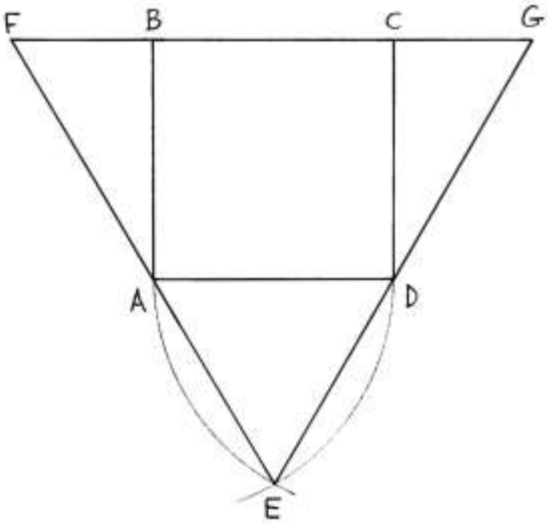
La lunghezza di FC è:

$$FC = 2 \cdot \text{lato} \cdot \sqrt{2-\sqrt{3}} \cong 1{,}035276 \cdot \text{lato}$$

Ciò conferma che il triangolo equilatero CGF ha lati leggermente più lunghi di quelli di AED.

Triangolo equilatero circoscritto a un quadrato

ABCD è un quadrato e deve essere inscritto in un triangolo equilatero. Prolungare verso destra e verso sinistra il lato BC:

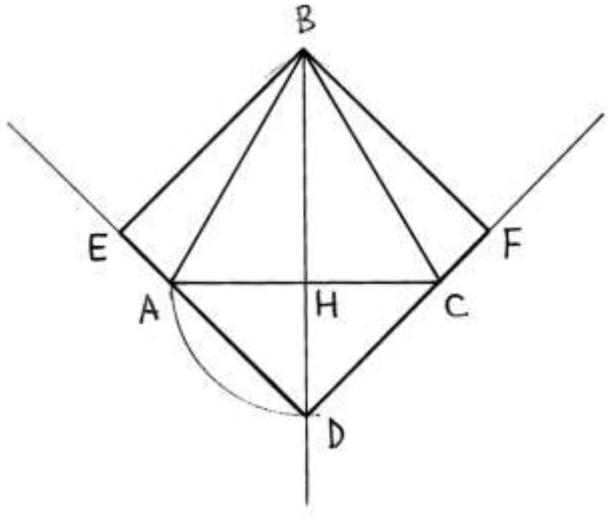


Esternamente al quadrato, sul lato AD, costruire il triangolo equilatero ADE.

Prolungare i lati EA e EB fino a intersecare la retta passante per B e per C: il triangolo equilatero EFG è circoscritto al quadrato ABCD.

Quadrato circoscritto a un triangolo equilatero

ABC è un triangolo equilatero che deve essere inscritto in un quadrato:



Tracciare l'altezza relativa al lato AC: è BH; prolungarla verso il basso.

Fare centro in H e, con raggio HA = HC, disegnare un arco da A fino a tagliare il prolungamento dell'altezza nel punto D.

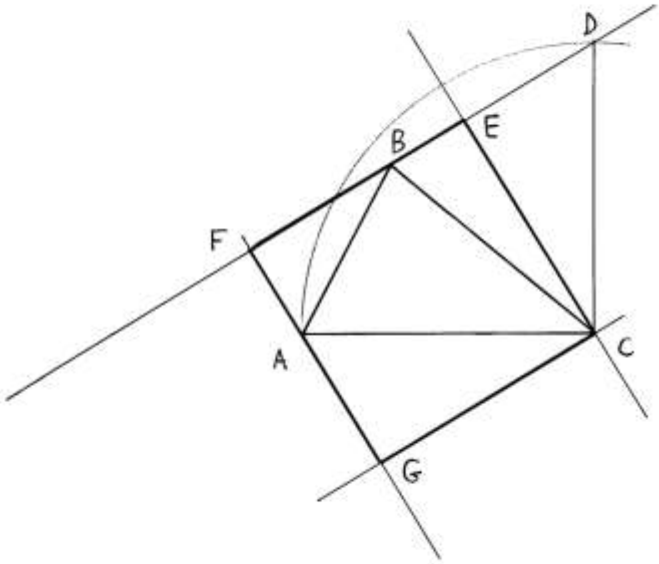
Tracciare due semirette uscenti da D e passanti per i punti A e C.

Dal punto B condurre le perpendicolari alle due semirette uscenti da D: esse fissano i punti E e F.

Il poligono BFDE è il quadrato circoscritto al triangolo equilatero ABC.

Quadrato circoscritto a un triangolo scaleno

ABC è un triangolo scaleno che deve essere inscritto in un quadrato:



Fare centro nel punto C e, con raggio CA, tracciare un arco di circonferenza.

Dal punto C elevare la perpendicolare al segmento AC: essa interseca l’arco nel punto D.

Per i punti B e D condurre una retta.

Dal punto C innalzare la perpendicolare alla retta appena tracciata: esse si incontrano nel punto E.

Per il punto C tracciare una retta parallela a quella passante per B e D.

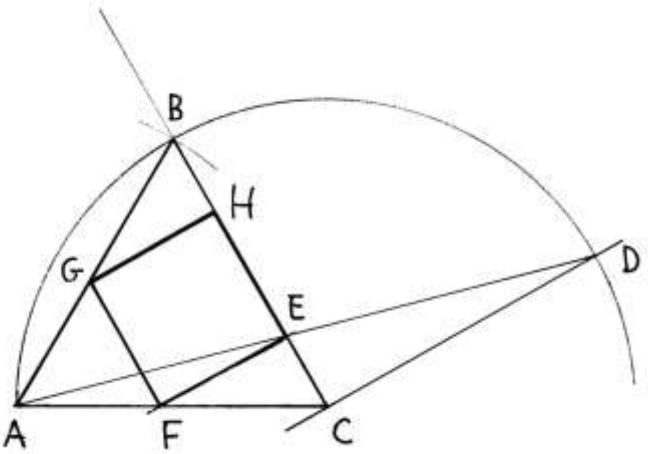
Infine, per il punto A disegnare una retta parallela a EC e, quindi, perpendicolare alle due rette già tracciate. Sono così determinati i punti F e G.

Il poligono ECGF è il quadrato circoscritto al triangolo scaleno ABC.

Quadrato inscritto in un triangolo equilatero

ABC è un triangolo equilatero in cui deve essere inscritto un quadrato.

Per il punto C innalzare la perpendicolare al lato BC.



Fare centro in C e, con raggio CB, tracciare un arco che taglia la perpendicolare nel punto D.

Collegare i punti D e A: il segmento interseca il lato BC nel punto E.

Dal punto E condurre una parallela a CD: essa incontra il lato AC nel punto F.

Dal punto F elevare una perpendicolare a FE fino a intersecare il lato AB nel punto G e da questo ultimo condurre una parallela a FE fino a incrociare il lato BC in un punto, H.

Triangolo equilatero inscritto in un triangolo scaleno

ABC è un triangolo scaleno e in esso deve essere inscritto un triangolo equilatero.

Abu'l – Wafa pose una condizione: il triangolo equilatero doveva avere un lato parallelo a uno dei lati di ABC, ad esempio AC.

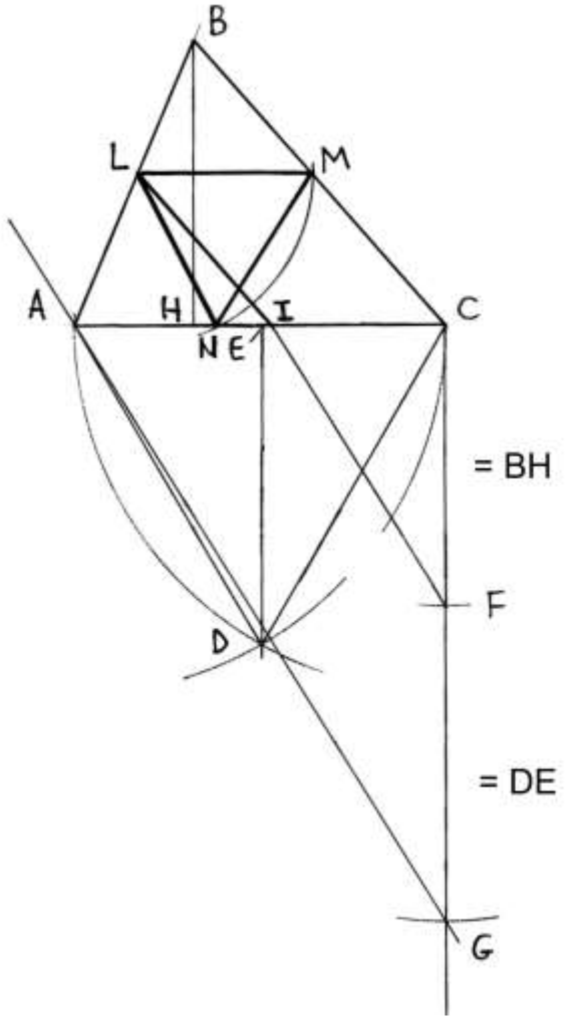
Tracciare l'altezza BH.

Sul lato AC costruire il triangolo equilatero ADC e la sua altezza DE.

Per il punto C abbassare la perpendicolare al segmento AC, quindi, verso il basso.

Misurare la lunghezza dell'altezza BH e riportarla sulla perpendicolare dal punto C, fino a determinare il punto F.

A partire da questo ultimo punto, riportare la lunghezza di DE, fino stabilire il punto G.



Tracciare una retta passante per i punti A e G e parallelamente ad essa disegnare un segmento da F fino a intersecare il lato AC in un nuovo punto, I.

Il segmento IC è la lunghezza del lato del triangolo equilatero cercato; deve essere costruito un lato parallelo a AC: per farlo, a partire dal punto I condurre una parallela al lato BC fino a tagliare AB in un punto, L.

Da L tracciare una parallela a AC fino a incontrare BC in un punto, M.

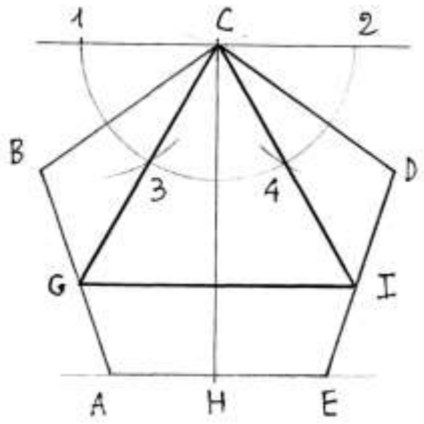
Infine, fare centro in L o in M con raggio LM e determinare il punto N sul lato AC.

LMN è il triangolo equilatero inscritto in ABC e con un lato (LM) parallelo a AC.

<u>Triangolo equilatero inscritto in un pentagono regolare</u>

ABCDE è un pentagono regolare nel quale deve essere inscritto un triangolo equilatero che soddisfi a due condizioni:

- abbia un vertice nel punto C;
- gli altri due vertici del triangolo devono essere collocati sui lati AB e DE.



Tracciare l'altezza CH e perpendicolarmente ad essa una retta passante per il punto C.

Con apertura di compasso *fissa*, fare centro in C e disegnare una semicirconferenza che interseca la retta nei punti 1 e 2. Con la stessa apertura fare centro nei punti 1 e 2 e tracciare due archi che tagliano la semicirconferenza nei punti 3 e 4. La costruzione è la divisione dell'*angolo piatto* 1-C-2 in tre angoli di uguale ampiezza (60°).

Dal punto C condurre due linee passanti per i punti 3 e 4 fino a incontrare i lati del pentagono nei punti G e I: CGI è il triangolo equilatero inscritto, che ha angoli interni di 60°.

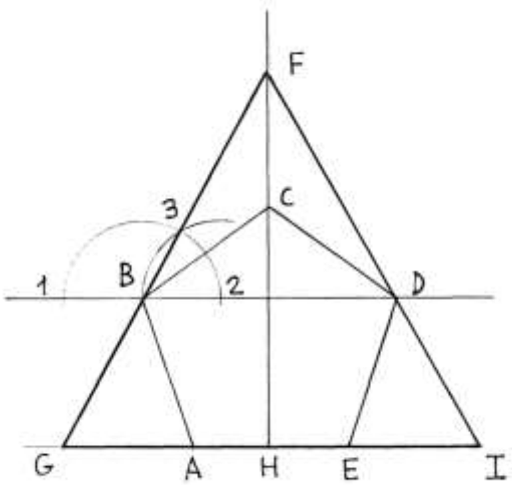
<u>Circoscrivere un triangolo equilatero a un pentagono regolare</u>

ABCDE è un pentagono regolare che deve essere inscritto in un triangolo equilatero, rispettando due condizioni:

- un lato del triangolo deve sovrapporsi a uno del pentagono (ad esempio AE);
- gli altri due lati del triangolo devono passare per altri due vertici del pentagono e quindi B e D.

Tracciare l'altezza CH e prolungarla verso l'alto.

Prolungare il lato AE verso destra e verso sinistra:



Condurre una retta passante per i vertici B e D, parallela al lato AE: il segmento BD è una *diagonale* del pentagono.

Con apertura di compasso *fissa* fare centro in B e tracciare una semicirconferenza che è delimitata dai punti 1 e 2. Con la stessa apertura fare centro nel punto 2 e disegnare un arco che taglia la semicirconferenza nel punto 3.

Tracciare una linea passante per i punti B e 3: essa taglia il prolungamento dell'altezza CH in un punto, F, e il prolungamento del lato AE in un altro punto, G.

Il segmento FBG è il primo lato del triangolo equilatero circoscritto: la costruzione basata sui punti 1, 2 e 3 ha permesso la tracciatura di un angolo di 30° (BFC) e di uno di 60° (FGH).

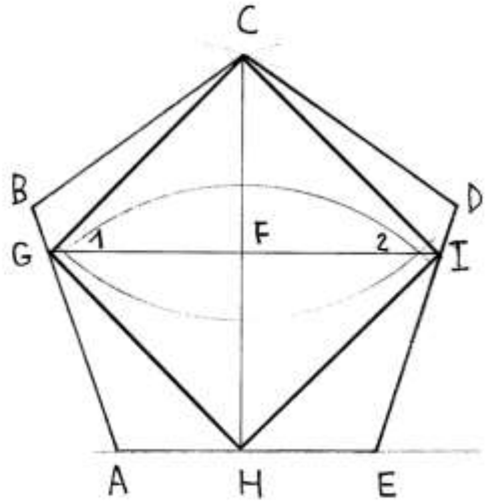
Disegnare una linea passante per i punti F e D: essa taglia il prolungamento di AE in un nuovo punto, I.

GHI è il triangolo equilatero circoscritto al pentagono ABCDE.

Quadrato inscritto in un pentagono regolare

ABCDE è il pentagono regolare nel quale deve essere inscritto un quadrato.

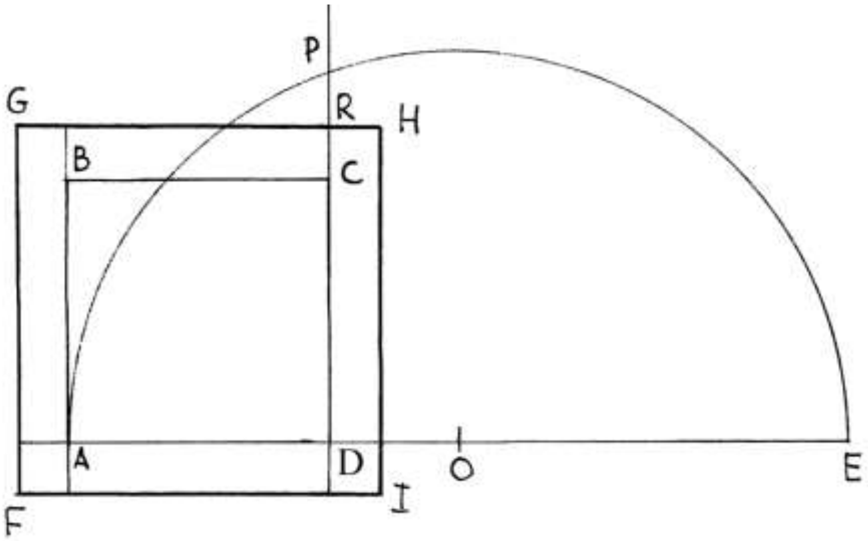
Tracciare l'altezza CH e costruire l'asse di questo segmento: per i punti 1 e 2 passa la linea che divide CH in due parti uguali e incrocia due lati del pentagono nei punti G e I:



Il poligono HGCI è il quadrato inscritto.

Quadrato doppio di un altro

ABCD è un quadrato: deve esserne costruito un altro, concentrico al primo, di superficie doppia, quale risultato della somma di ABCD e di un altro quadrato di uguale superficie.



Prolungare verso l’alto il lato DC e verso destra quello AD.

Dal punto D determinare la lunghezza DE = 2*AD.

Fissare il punto medio di AE: è O.

Fare centro nel punto O e, con raggio OA = OE, tracciare una semicirconferenza che taglia il prolungamento di DC in un punto, P.

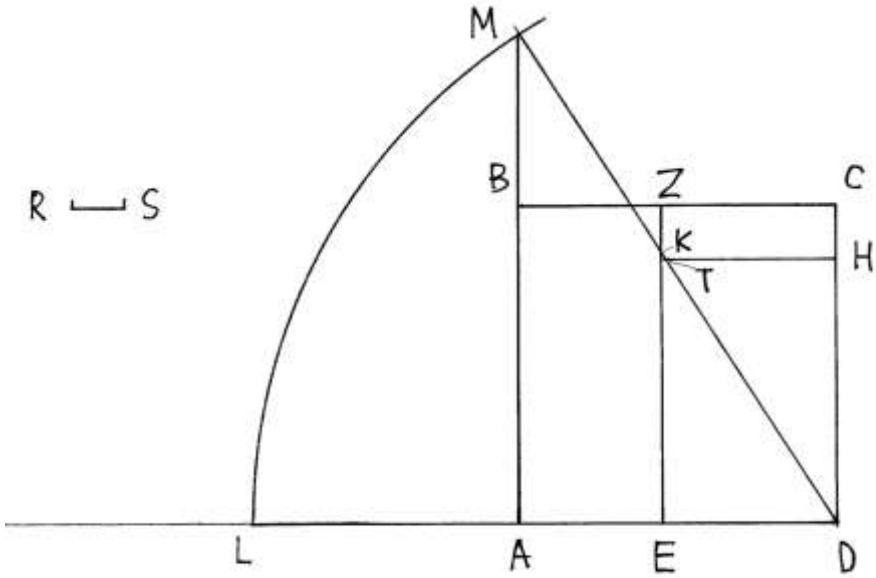
Determinare il punto medio del segmento CP: è R.

Riportare la lunghezza di RC, a partire da tutti i vertici di ABCD, sugli otto prolungamenti esterni dei suoi lati.

Il quadrato FGHI ha superficie doppia di quella di ABCD.

<u>Dividere un quadrato in due parti uguali con un percorso</u>

Come accade ad alcune costruzioni che ad essa seguono nel trattato di Abu’l – Wafa, questa sembra risolvere problemi di divisione di eredità: un terreno di forma regolare deve essere suddiviso in parti uguali lasciando una superficie comune, che poteva essere occupata da un pozzo o da fabbricati di uso comune:



ABCD è il quadrato da dividere e RS è la larghezza del percorso.

Sul lato CD, dal punto C, riportare la lunghezza di RS: viene fissato il punto H.

Prolungare verso sinistra il lato AD e verso l’alto il lato AB.

A partire dal punto A riportare la lunghezza di DH: AL = DH.

Fare centro nel punto D e, con raggio DL, tracciare un arco da L fino a intersecare il prolungamento di AB nel punto M.

Disegnare il segmento MD: a partire da M riportarvi la lunghezza di DH per determinare il punto K.

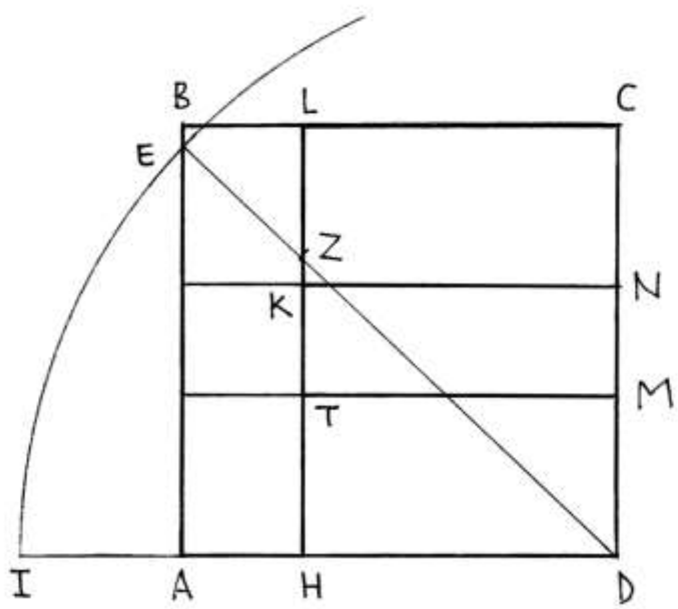
Per il punto K tracciare un segmento parallelo ai lati AB e CD: è EZ.

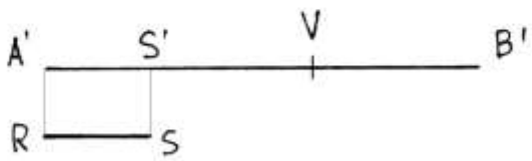
Dal punto H condurre un segmento parallelo ai lati AD e BC, fino a incontrare EZ in un nuovo punto, T.

I rettangoli ABZE e ETHD hanno uguale superficie e TZCH è il percorso comune di larghezza CH = TZ, uguale a RS e lasciato quale *proprietà indivisa*.

<u>Dividere un quadrato in tre parti uguali</u>

La costruzione precedente deve essere impiegata per dividere in *tre* parti uguali il solito quadrato ABCD.





RS è la larghezza del percorso comune: il segmento A’B’ ha la stessa lunghezza del lato AB. S’B’ è uguale alla differenza fra le lunghezze di A’B’ e RS:

S’B’ = A’B’ – RS = AB – RS.

Il punto V divide a metà il segmento S’B’.

Prolungare verso sinistra il lato AD.

Dai vertici C e D riportare la lunghezza di S’V:

CN = DM = S’V.

Dai punti N e M tracciare due segmenti paralleli al lato AD.

Sul prolungamento di AD, riportare da A la lunghezza di S’V: viene determinato il punto I.

Fare centro in D e, con raggio DI, disegnare un arco da I fino a incrociare il lato AB nel punto E: sul raggio DE riportare la lunghezza di S'V da E fino a determinare il punto Z.

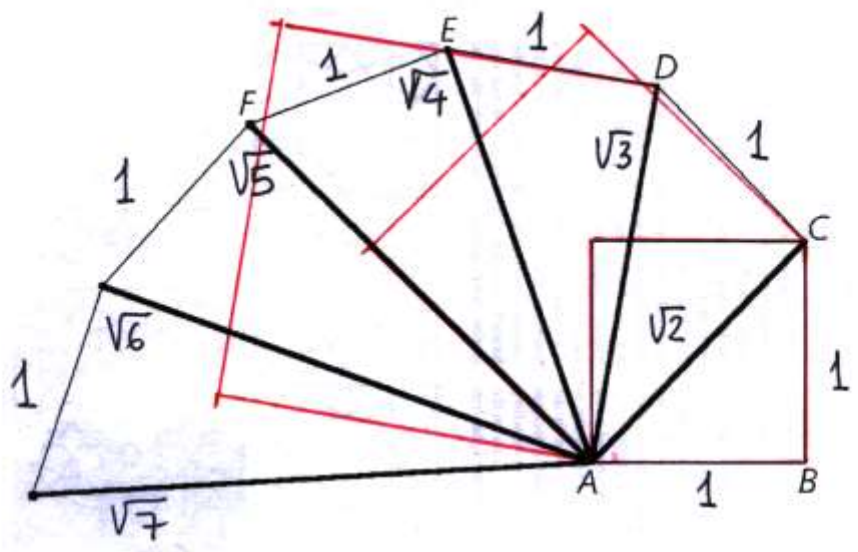
Per il punto Z condurre un segmento parallelo al lato AB: i suoi estremi sono i punti H e L.

I rettangoli ABLH, KLCN e HTMD hanno la stessa superficie e TKNM è il percorso comune ai tre rettangoli, con larghezza TK = NM = RS.

Un problema pratico

Abu'l – Wafa riuniva spesso a Baghdad matematici e artigiani per cercare di trovare metodi pratici corretti per risolvere problemi di geometria piana e solida.

Fra i problemi di geometria piana che gli artigiani gli sottoposero era quello della costruzione di un quadrato di superficie doppia, tripla o quadrupla di uno dato. I matematici risolsero il problema applicando ripetutamente il teorema di Pitagora, come spiega la figura che segue:



Un triangolo rettangolo isoscele ha cateto lungo 1: la sua ipotenusa (che è la diagonale del quadrato costruito su un cateto) è lunga $\sqrt{2}$, che è un numero irrazionale; il quadrato costruito sul cateto ha area 1.

Costruendo il quadrato sull'ipotenusa, esso ha superficie uguale a $(\sqrt{2})^2$ e cioè uguale a 2. Riportando con il compasso la lunghezza della diagonale uguale a $\sqrt{2}$ era possibile costruire per via geometrica il quadrato di superficie doppia di quello di lato lungo 1.

Gli artigiani erano insoddisfatti della soluzione proposta dai matematici, perché essi volevano ricavare un quadrato più grande con la composizione di parti sezionate di quadrati più piccoli, impiegando il *minimo numero possibile di tagli* e avendo un altro vincolo: riutilizzare tutto il materiale disponibile, senza sprechi.

Infine, per gli artigiani risultava troppo complicato seguire i metodi suggeriti dai teorici, a digiuno di qualsiasi conoscenza del cantiere o della bottega artigiana.

- APPROFONDIMENTO -

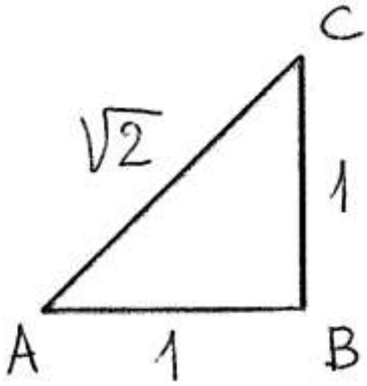
Teodoro di Cirene

La costruzione descritta nella precedente figura risale al matematico Teodoro di Cirene (vissuto nel V secolo a.C.), che propose un metodo geometrico per determinare la radice quadrata di un numero intero qualsiasi: esso è conosciuto con l'espressione *spirale di Teodoro*.

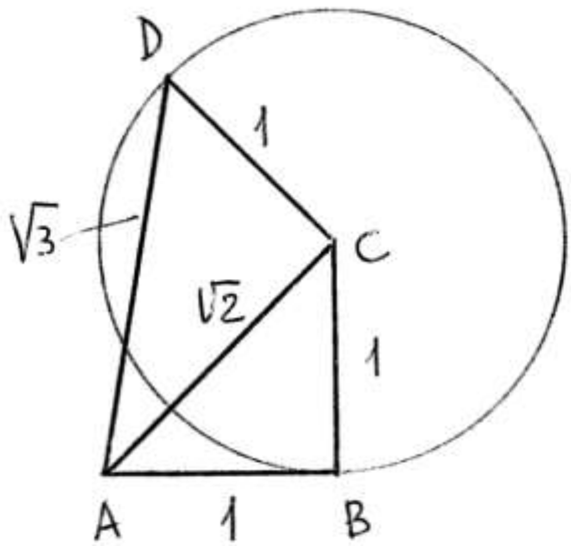
Teodoro dimostrò che le radici quadrate dei numeri compresi fra 3 e 17 – ad eccezione di 9 e di 16 che sono quadrati perfetti ($9 = 3^2$ e $16 = 4^2$) – fossero *incommensurabili,* ciò che nel linguaggio matematico significa che non sono esprimibili con un numero intero o con un rapporto fra numeri interi.

Il metodo per costruire la spirale è descritto nelle figure che seguono.

Un triangolo rettangolo isoscele ha cateti AB e BC lunghi 1 e l'ipotenusa AC è lunga √2:



La costruzione viene continuata nella figura che segue:



Con centro in C e raggio CB disegnare una circonferenza. Dal punto C tracciare un raggio *perpendicolare* all'ipotenusa AC: è il segmento CD.

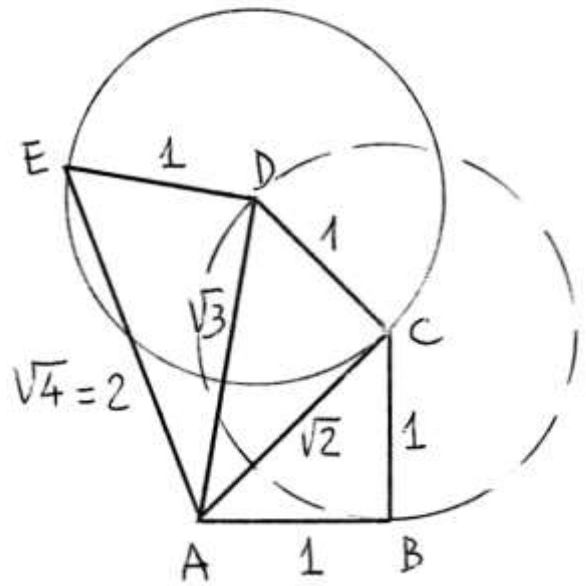
Il triangolo ACD è rettangolo in C. Il cateto CD è lungo 1 e l'ipotenusa AB è lunga √3: infatti, per il *teorema di Pitagora,* vale:

$$AD^2 = AC^2 + CD^2$$

da cui

$$AD = \sqrt{AC^2 + CD^2} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 1^2} = \sqrt{2+1} = \sqrt{3}$$

Proseguiamo nella costruzione, come è spiegato nella figura che segue:



Fare centro in D e, con raggio DC, tracciare una seconda circonferenza. Disegnare il raggio DE, perpendicolare all'ipotenusa AD.

Il triangolo ADE è rettangolo in D. Il cateto AD è lungo √3 e quello DE è lungo 1. L'ipotenusa AE è lunga:

$$AE^2 = AD^2 + DE^2 = (\sqrt{3})^2 + 1^2 = 3 + 1 = 4$$

da cui

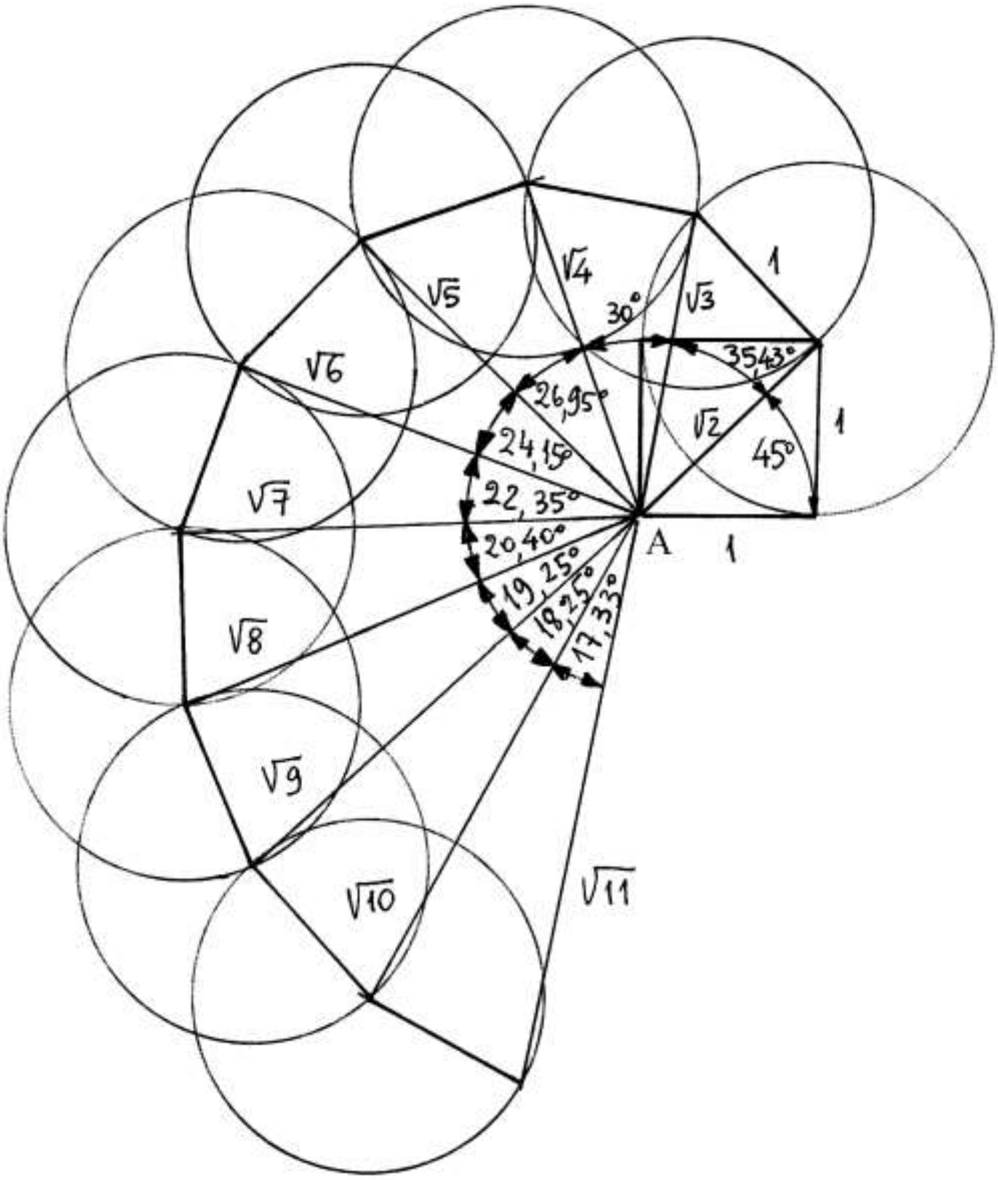
$$AE = \sqrt{4} = 2$$

La linea spezzata BCDE è la parte iniziale della *spirale di Teodoro*. La spezzata può essere ulteriormente tracciata dopo il punto E, come descritto nella costruzione di Abu'l – Wafa.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Gli angoli nella spirale di Teodoro

Il grafico che segue mostra un'interessante proprietà posseduta dai triangoli rettangoli che hanno in comune il vertice A: l'ampiezza dell'angolo in A diminuisce con l'aumentare della lunghezza del secondo cateto e dell'ipotenusa:



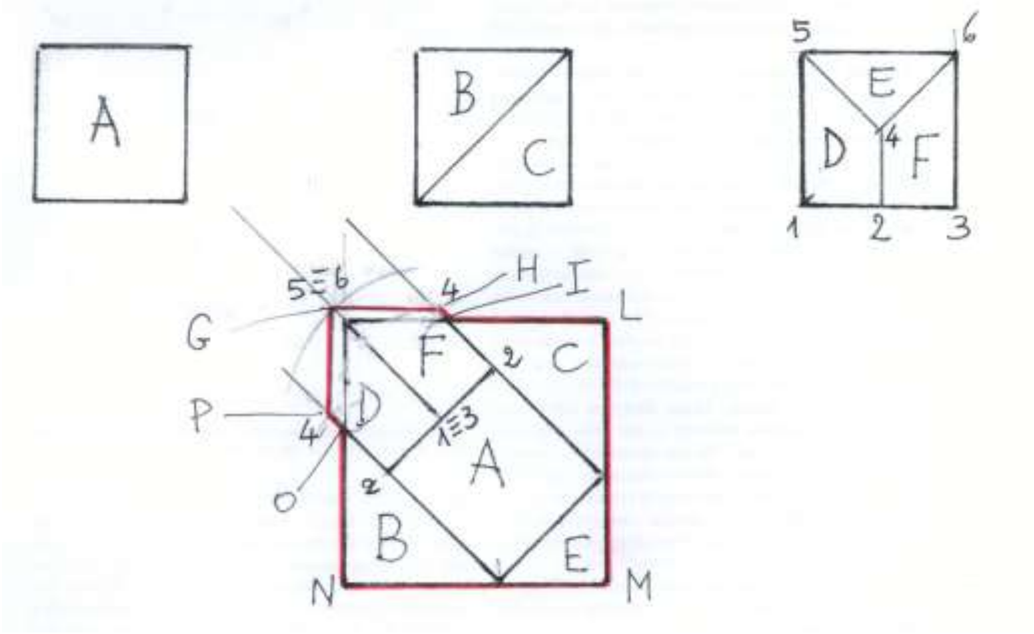
La tabella che segue fornisce i dati delle tangenti degli angoli in A e l'ampiezza decrescente degli angoli stessi:

rapporto fra le lunghezze dei cateti (tangente dell'angolo delimitato dalle frecce nel grafico precedente)	ampiezza angolo in gradi e centesimi
$1:1=1$	45°
$1:\sqrt{2} = 0,707$	35,43°
$1:\sqrt{3} = 0,577$	30°
$1:\sqrt{4} = 1:2 = 0,5$	26,95°
$1:\sqrt{5} = 0,447$	24,15°
$1:\sqrt{6} = 0,408$	22,35°
$1:\sqrt{7} = 0,3779$	20,40°
$1:\sqrt{8} = 0,3535$	19,25°
$1:\sqrt{9} = 1:3 = 0,3333$	18,25°
$1:\sqrt{10} = 0,3162$	17,33°

- -

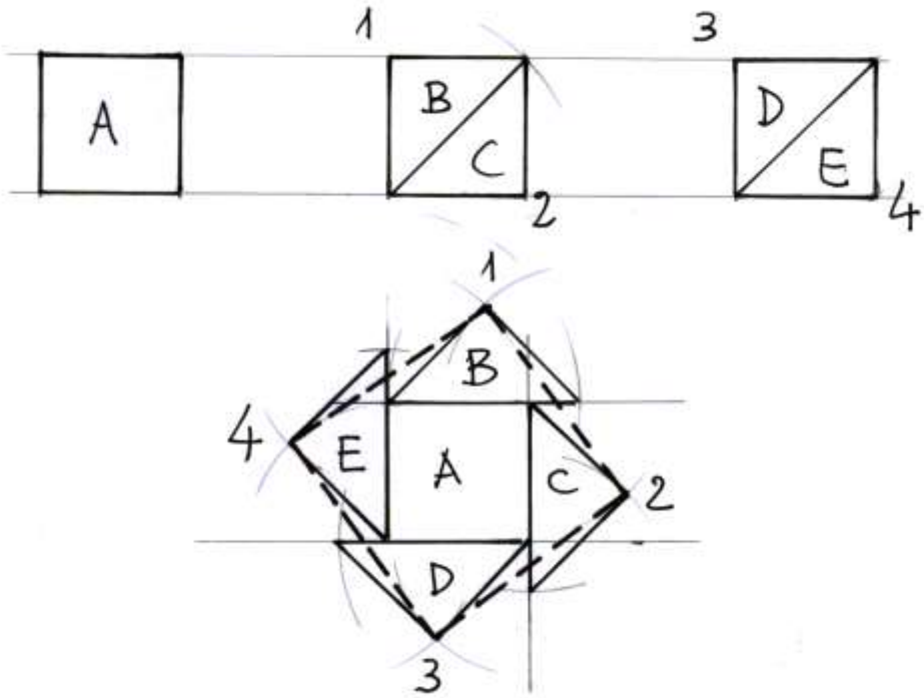
Il problema dei quadrati risolto da Abu'l – Wafa

Dovendo, ad esempio, costruire un quadrato di superficie tripla di un altro, avendo a disposizione tre piccoli quadrati uguali, gli artigiani dividevano i tre quadrati piccoli della figura e assemblavano le diverse parti per formare un *quadrato* più grande di superficie *tripla* di uno dei piccoli:



La soluzione adottata dagli artigiani non forniva un quadrato perfetto, ma un poligono irregolare più complesso e ciò a causa del posizionamento delle tre parti – D, E e F – del terzo quadrato. Il poligono evidenziato in *rosso* nella precedente figura è irregolare: GHILMNOP non è un quadrato perché possiede quattro spigoli per così dire *sporgenti*: OP, PG, GH e HI.

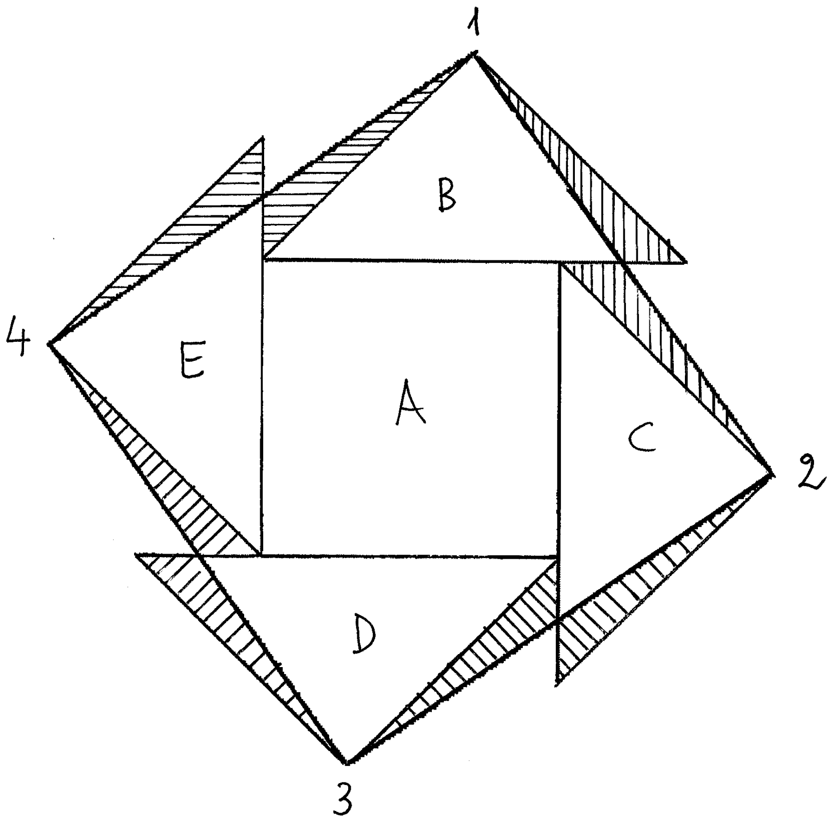
Abu'l – Wafa studiò il problema e giunse ad una soluzione esatta dal punto di vista geometrico:



Egli lasciò integro il primo quadrato, A, e tagliò a metà gli altri due lungo una diagonale: ottenne quattro triangoli rettangoli isosceli uguali, B e C e D e E.

Li unì come in figura e collegò i vertici 1, 2, 3 e 4: il quadrato 1-2-3-4 aveva superficie perfettamente uguale alla somma di quella dei tre piccoli quadrati di partenza.

La figura che segue mostra, per via geometrica, la validità del metodo di Abu'l – Wafa:

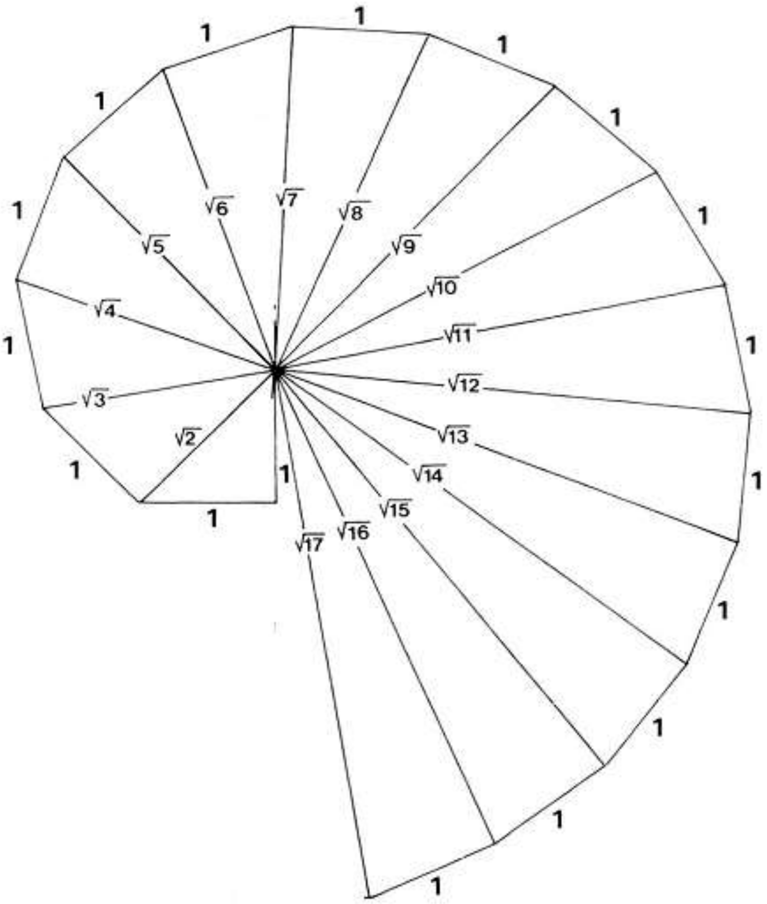


Le otto superfici tratteggiate sono uguali e hanno tutte forma di triangoli scaleni. Esse sono contrassegnate con quattro differenti tipi di tratteggi: le aree esterne al quadrato 1-2-3-4 sono compensate dalle aree interne tratteggiate. Le prime devono essere tagliate per bilanciare le seconde.

- APPROFONDIMENTO -

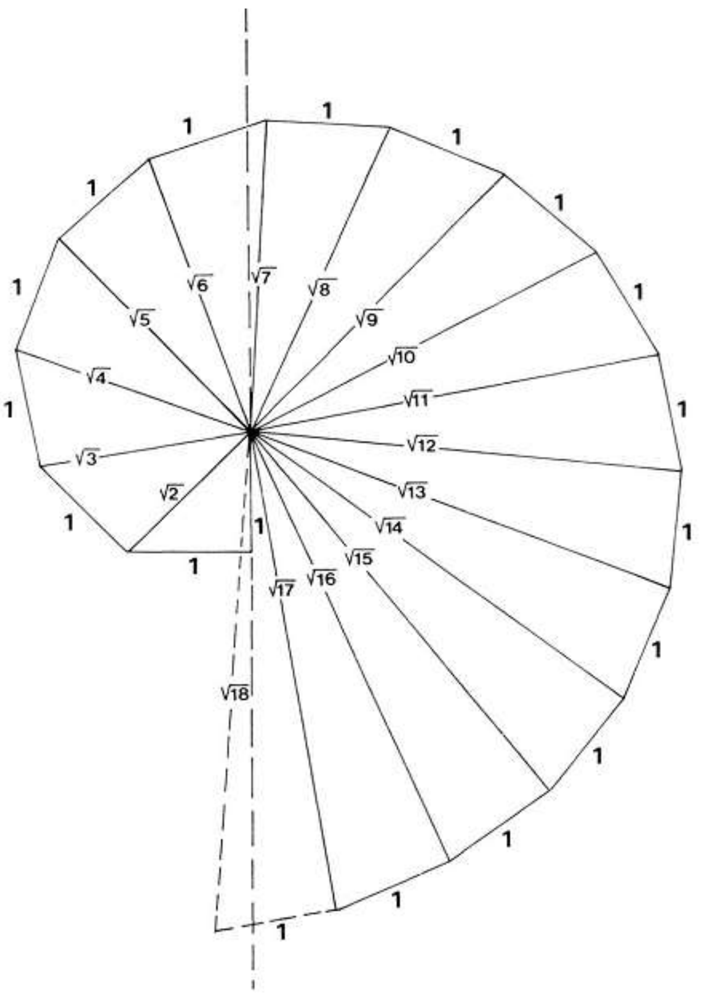
Il problema della costruzione dei quadrati in progressione non era stato studiato per primo da Abu'l – Wafa, ma risaliva al matematico greco **Teeteto** (vissuto a Atene fra circa il 415 e il 369 a.C.).

Teeteto mostrò la costruzione geometrica dei *numeri razionali o irrazionali* (che risolvono le radici quadrate dei numeri interi fino a 17) usando soltanto la squadra e la riga e espose un metodo che è noto con l'espressione *generatrice degli irrazionali*:



(fonte: Pierre Gros, “*Nombres irrationales et nombres parfaits chez Vitruve*”, in MEFRA, 1976)

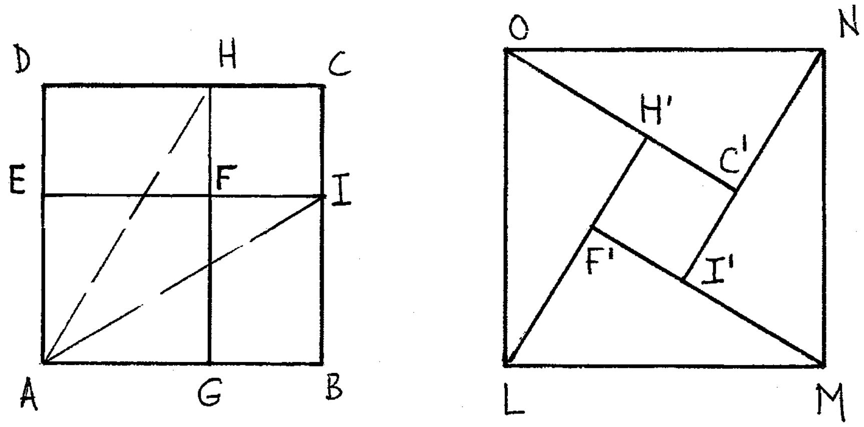
Teeteto si fermò alla costruzione della radice di 17, perché a partire da √18 si verifica una sovrapposizione, come spiega la figura che segue:


1
1
1
1
1
1
1
1
1
1
1
1
1
1
1
1
1
1
√2
√3
√4
√5
√6
√7
√8
√9
√10
√11
√12
√13
√14
√15
√16
√17
√18

Altre elaborazioni relative ai quadrati

Abu'l Wafa studiò anche i casi dell'assemblaggio di 2, 5 e 9 quadrati.

Nella figura che segue sono presentati due quadrati differenti e con il più piccolo *sovrapposto* al più grande, ABCD e AEFG, che hanno in comune il vertice A e i lati parzialmente coincidenti:



Prolungare i lati EF e GF per determinare i punti H e I.

Disegnare le diagonali AH e AI, che hanno la stessa lunghezza.

Fissare il punto L su una linea orizzontale. Tracciare la perpendicolare nel punto L.

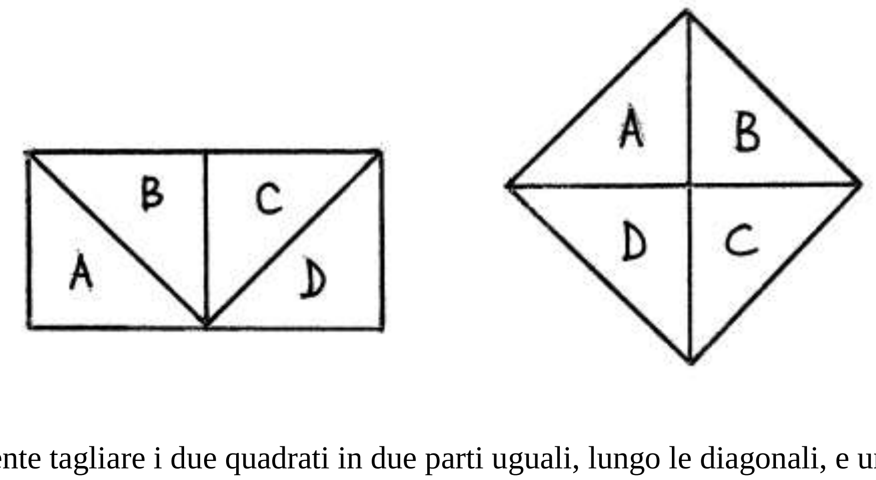
Con il compasso prendere la lunghezza di AI e riportarla a partire dal punto L, per costruire il quadrato LMNO.

Sempre con il compasso, misurare la lunghezza di AB e poi quella di IB. Fare centro nei punti L, M, N e O con le due misure (AB e IB): le intersezioni degli archi sono i punti F', I', C' e H' che sono i vertici di un quadrato identico a quello FICH.

Il quadrato LMNO ha la superficie uguale alla somma di quelle dei due quadrati di partenza.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Il caso dei due quadrati *uguali* è molto più semplice:



È sufficiente tagliare i due quadrati in due parti uguali, lungo le diagonali, e unire i quattro triangoli rettangoli isosceli (A, B, C e D) affiancandoli lungo i cateti (che corrispondono ai lati dei quadrati iniziali.

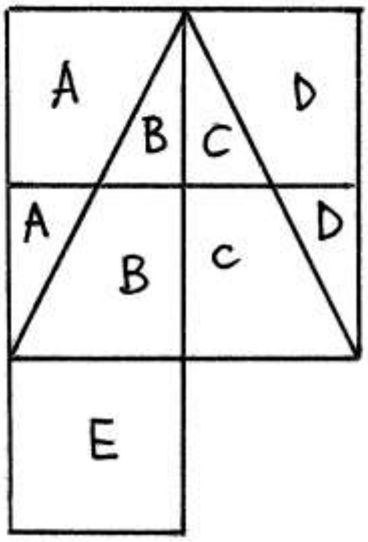
Il risultato è presentato a destra nella precedente figura. Con due soli tagli e senza alcuno spreco di materiale è stato ricavato un quadrato che la stessa superficie della somma di quelle dei due quadrati originari.

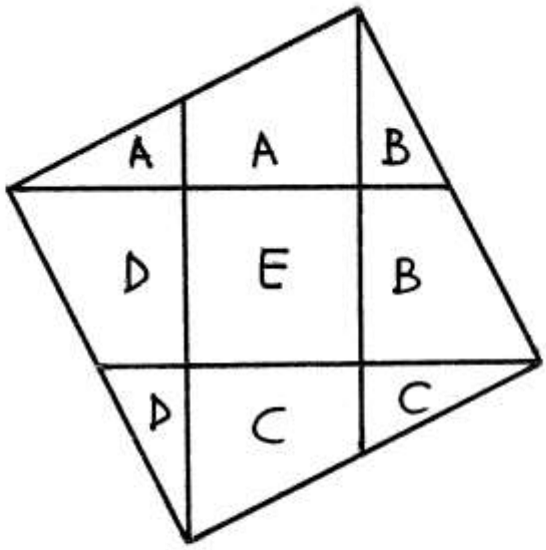
Il metodo può essere usato anche in senso inverso, per ricavare due quadrati uguali da un quadrato. Tagliando il quadrato di destra lungo le due diagonali, si ottengono quattro triangoli rettangoli isosceli che, uniti due a due, riformano i due più piccoli quadrati (A+B e C+D), di area uguale alla metà.

La diagonale di un quadrato è lunga $\sqrt{2}$ volte il lato: per via aritmetica non è possibile determinare la sua esatta lunghezza. La costruzione geometrica era l'unica soluzione accettabile per gli artigiani e per i tecnici.

Nel caso di *cinque quadrati* uguali è necessario tracciare le diagonali di due rettangoli ricavati dall'accostamento di due quadrati: si ottengono i triangoli rettangoli AA, BB, CC e DD che hanno uguali dimensioni.

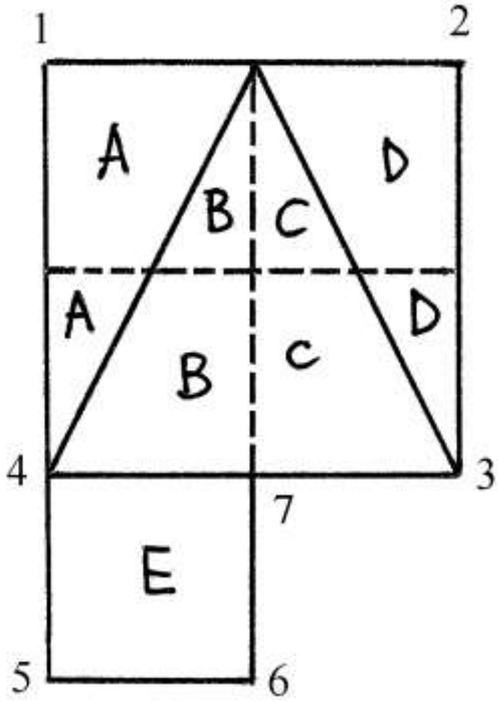
Il quinto quadrato, E, è la figura intorno alla quale vanno assemblati i triangoli:





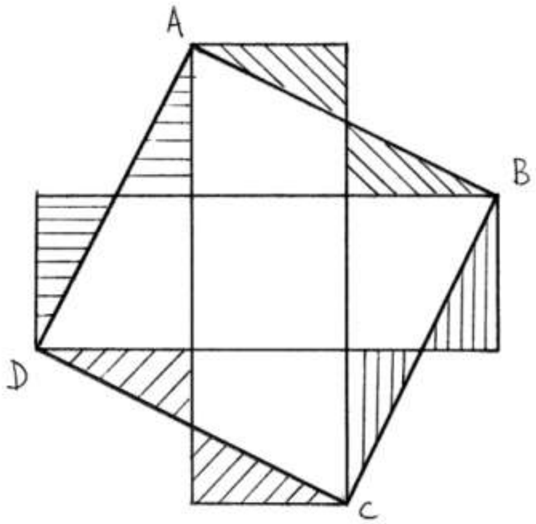
Il nuovo quadrato, visibile in basso nella precedente figura, ha superficie uguale a quella della somma dei cinque quadrati iniziali. Se questi ultimi hanno lato, *convenzionalmente*, lungo 1, anche la loro singola area è uguale a 1. Il quadrato risultante ha quindi area uguale a 5 e il suo lato è lungo $\sqrt{5}$. Per la difficoltà di calcolare l'esatto valore di questo ultimo numero, anche in questo caso la costruzione geometrica di Abu'l Wafa è l'unica possibile per i pratici: tutto il materiale iniziale è reimpiegato nella figura finale.

La precedente costruzione può essere usata anche nel caso in cui siano disponibili *due* quadrati, uno dei quali (1-2-3-4) è *quattro* volte più grande dell'altro (4-5-6-7):



Il quadrato 1-2-3-4 è scomponibile in quattro quadrati che hanno le stesse dimensioni di quello 4-5-6-7.

I cinque quadrati possono essere disposti "a croce", come nella figura che segue:

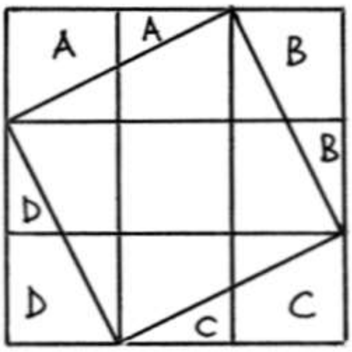


Deve essere costruito un quadrato di superficie uguale alla somma delle aree dei cinque quadrati. Il poligono ABCD è il quadrato cercato. Le superfici tratteggiate con lo stesso tipo sono uguali e hanno tutte forma di triangolo rettangolo scaleno: le superfici interne compensano le esterne e con *quattro* tagli obliqui si ottiene il risultato cercato.

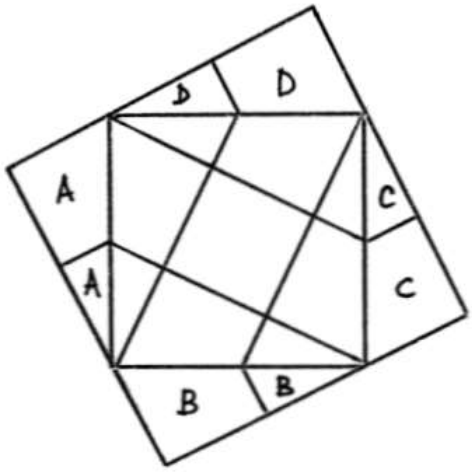
Un ultimo caso affrontato da Abu'l Wafa è quello dei 9 quadrati uguali da assemblare, con *tagli obliqui*, per ricavare un quadrato di superficie equivalente alla loro somma.

Come spiega la figura a), è necessario effettuare dei tagli obliqui (come nel caso dei 5 quadrati):

a)



b)



Tagliando i quattro triangoli rettangoli AA, BB, CC e DD resta un quadrato da usare per affiancargli i quattro triangoli, come spiega la figura b).

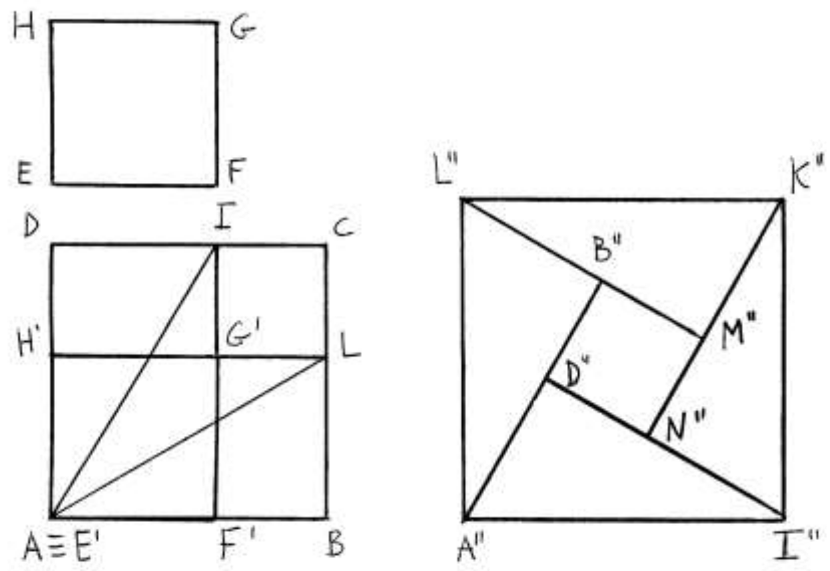
Il semplice accostamento dei nove piccoli quadrati potrebbe sembrare la soluzione più logica. Essa avrebbe richiesto un maggior numero di incastri e collegamenti fra i quadrati: con i tagli obliqui, il grande quadrato risulta più robusto.

Assemblare due quadrati

I quadrati ABCD e EFGH hanno differenti superfici e devono essere assemblati per formare un terzo quadrato di area uguale alla somma dei primi due. Il problema è simile a quello già incontrato a pagina 47: in questo caso i due quadrati non sono sovrapposti ma separati. Il risultato è pressoché identico.

Di seguito è descritto il metodo proposto da Abu'l – Wafa.

Sovrapporre il quadrato EFGH sul quadrato ABCD: ne risultano i punti A≡E', F', G' e H'.



Prolungare i segmenti F’G’ e H’G’, fino a determinare i punti I e L.

È evidente che il quadrato G’ICL ha superficie uguale alla *differenza* fra quelle dei due quadrati di partenza.

Disegnare le corde AI e AL: all’interno del quadrato ABCD sono così prodotti dei triangoli rettangoli.

Fissare un punto, A’’, e da esso tracciare due linee fra loro perpendicolari: una orizzontale e verso destra e una verticale verso l’alto.

Dal punto A’’, riportare in senso orizzontale la lunghezza dell’ipotenusa AI: si ottiene il punto I’’. Il segmento A’’I’’ è il lato del quadrato cercato.

Costruire il quadrato A’’I’’K’’L’’.

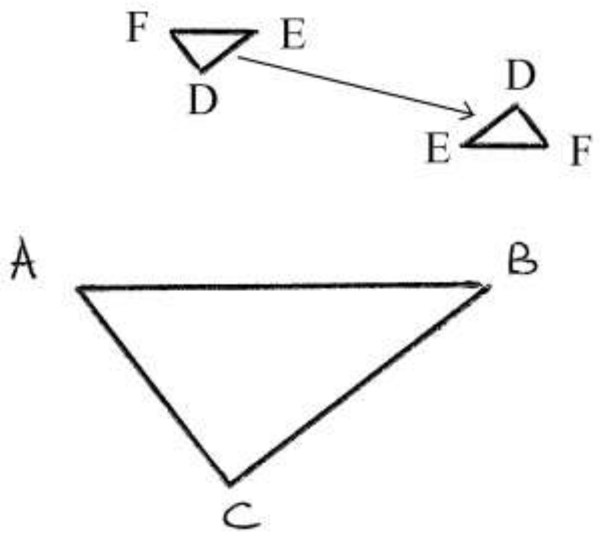
Con raggio DI, fare centro in A’’ e tracciare un arco all’interno del quadrato. Poi, con apertura uguale a AD, fare centro in I’’ e disegnare un arco che taglia il precedente nel punto D’’. Il triangolo rettangolo A’’D’’I’’ è uguale a quello ADI.

Ripetendo la stessa operazione dai vertici L’’, K’’ e I’’ si ottiene la figura finale: il quadrato D’’B’’M’’N’’ ha la stessa superficie del quadrato GICL.

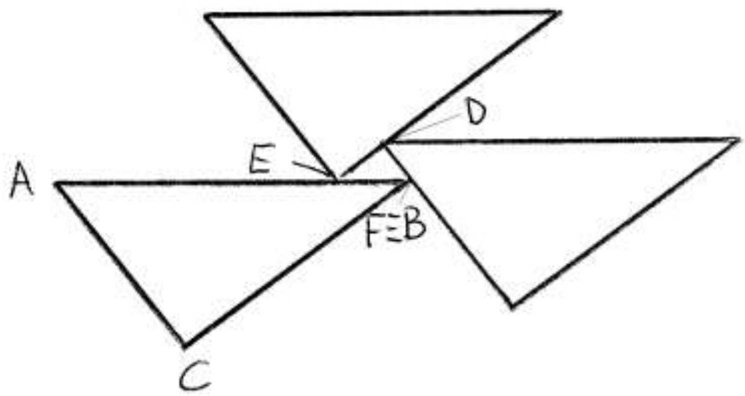
È necessario notare che le lettere apposte ai vertici delle figure che compongono il quadrato somma non corrispondono perfettamente a quelle delle figure di partenza.

Unione di triangoli simili

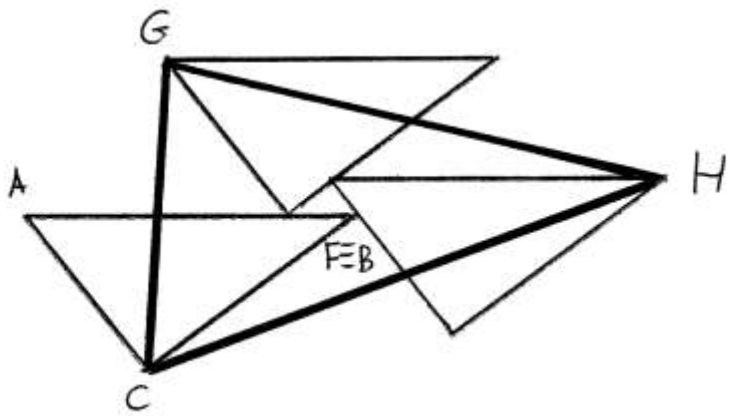
Tre triangoli uguali a quello ABC della figura che segue e il triangolo simile FED devono essere uniti per formare un triangolo che abbia superficie uguale alla somma dei quattro triangoli originari:



Abu’l – Wafa suggerì un metodo che è qui riprodotto.
Ruotare di 90° e capovolgere il triangolo FED come mostrato in figura.
Assemblare i tre triangoli uguali intorno al più piccolo EDF:



I quattro triangoli combaciano perfettamente e non si hanno sovrapposizioni.
La figura che segue presenta la soluzione:



Disegnare il triangolo CGH: esso ha superficie uguale alla somma delle superfici dei quattro triangoli di partenza.

APPENDICE

Benché Abu'l – Wafa fosse di origine persiana, come già accennato, il suo trattato geometrico fu originariamente scritto in arabo, la lingua scientifica del Medio Oriente all'epoca in cui egli visse.

Il fascicolo è stato probabilmente raccolto da uno studente che seguiva le sue lezioni o le *conversazioni* tenute dal maestro con artigiani e architetti a Baghdad.

Un manoscritto in lingua persiana (*Ms persan* 169 della Bibliothèque Nationale di Parigi), risalente al 1300 circa, contiene fra gli altri due testi di natura geometrica:

* alle carte 141*verso* – 179*verso*, la traduzione in persiano del trattato geometrico di Abu'l Wafa;
* alle carte 180*recto* – 199*verso*, un testo anonimo, conosciuto con l'espressione "On Interlocks of Similar or Corresponding Figures", titolo che è scritto in una nota verticale a margine del manoscritto.

Il secondo documento contiene una serie di schemi e costruzioni geometriche relative alla composizione di complesse tassellazioni: nei paragrafi che seguono sono descritti alcuni esempi, tutti ricavati dalle ricerche dello scomparso Alpay Özdural, citate in bibliografia.

Il Topkapı Scroll

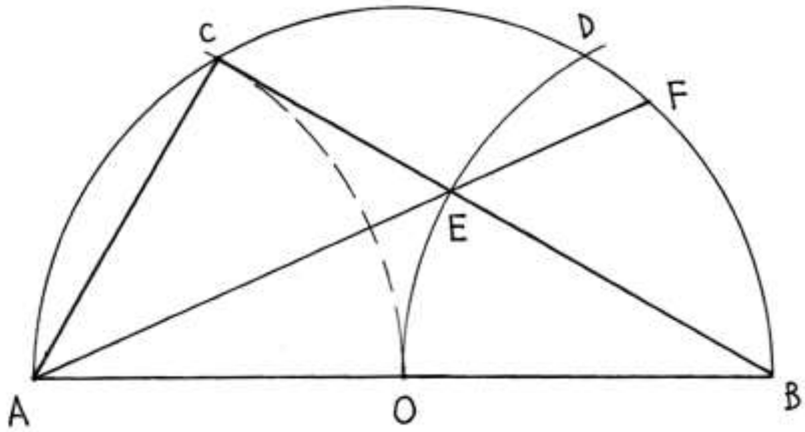
Il *Rotolo Topkapı* (o *Topkapı Scroll*, in inglese) è un rotolo conservato a Istanbul: è largo 33 cm ed è lungo 29,5 m. È formato da molti fogli di pergamena.

Sarebbe stato creato in Persia alla fine del XV secolo.

Contiene 114 motivi geometrici.

In alcuni schemi potrebbe esservi una traccia del lavoro geometrico di Abu'l – Wafa.

Fra le altre costruzioni originali che vi sono contenute vi è quella del pentagono *approssimato* inscritto, presentata nella figura che segue:



Seguendo l'insegnamento di Abu'l – Wafa, il compasso impiegato era ad *apertura fissa*.

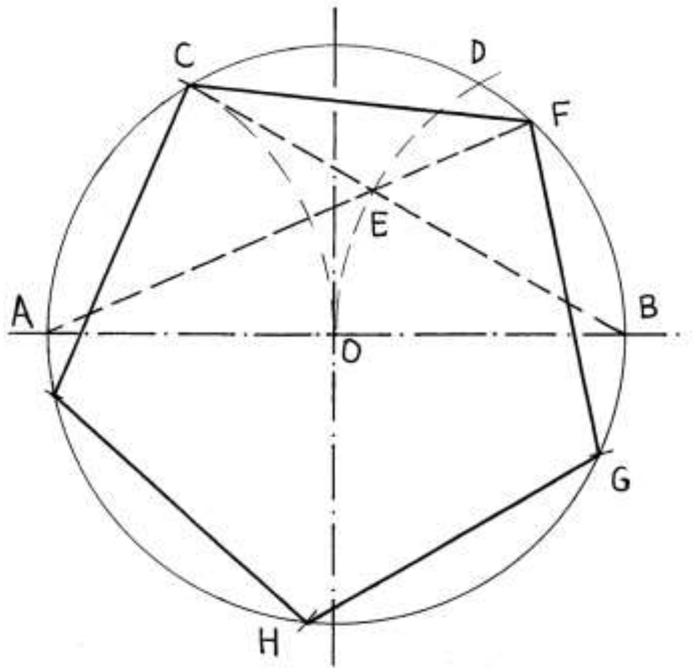
AB è il diametro di un semicerchio di centro O. Con raggio AO = BO fare centro nei punti A e B e tracciare due archi che intersecano la semicirconferenza nei punti C e D.

Disegnare le corde AC e CB: esse sono i cateti del triangolo rettangolo ACB. AC è pure il lato di un esagono inscritto e CB quello di un triangolo equilatero anch'esso inscritto.

La corda CB incontra l'arco di centro B in un punto, E.

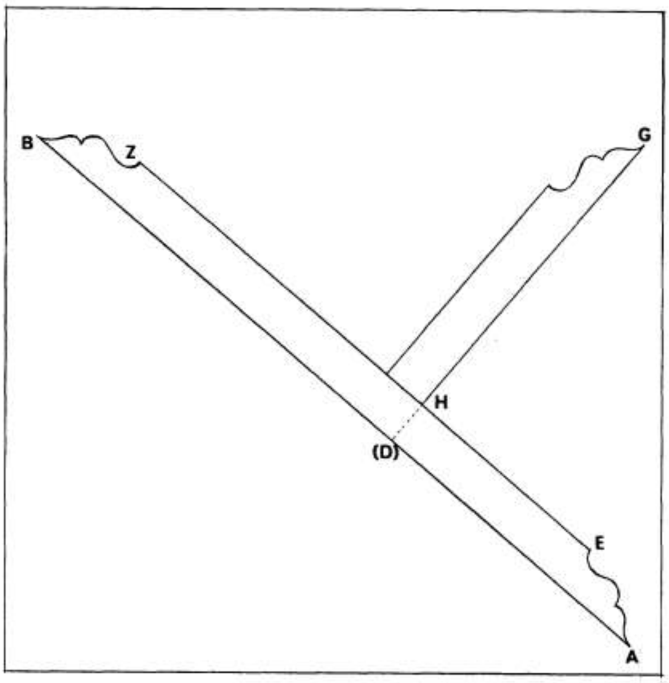
Tracciare la corda uscente da A e passante per E, fino a tagliare la semicirconferenza in un punto, F.

La corda CF è il primo lato del pentagono inscritto, come spiega la figura che segue:



Sia nel libro geometrico di Abu'l – Wafa che in nel manoscritto *Interlocks* …, citato in precedenza, sono citati una serie di strumenti geometrici indicati con l'espressione *gonia*.

In *Interlocks*… è rappresentata una squadra che somiglia molto a una moderna "riga a T":



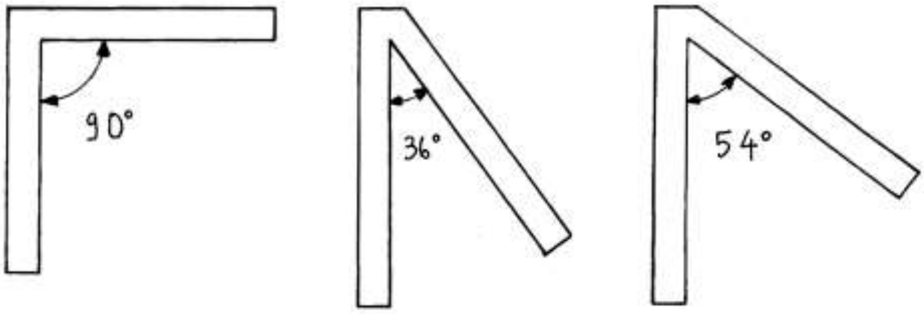
Dai tre testi (trattato di Abu'l – Wafa, *Interlocks* e *Rotolo Topkapı*) emerge un dato di fatto: oltre al compasso, la *gonia* comprendeva anche una serie di *squadre* con angoli di

90° , 180/n ° e (90 – 180/n)° , dove *n* è un numero intero corrispondente al numero dei lati di un poligono regolare da disegnare.

Per il caso di n = 5, cioè per il *pentagono*, erano disponibili le seguenti tre squadre:

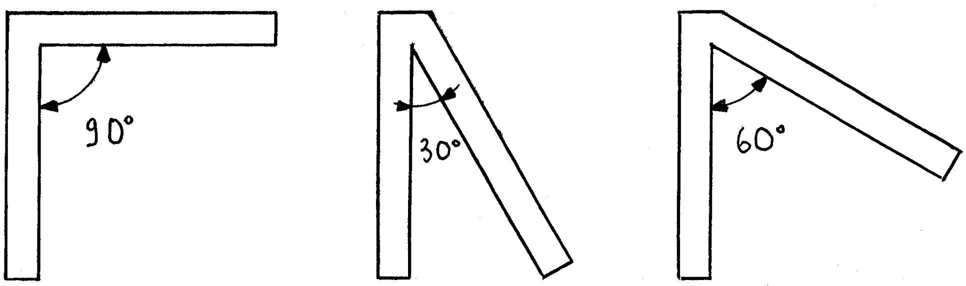
90° , 180/5 = 36° e (90 – 180/5) = 90 – 36 = 54° che è l'angolo *complementare* di quello ampio 36°.

La figura che segue mostra le tre squadre di *gonia* = 5:



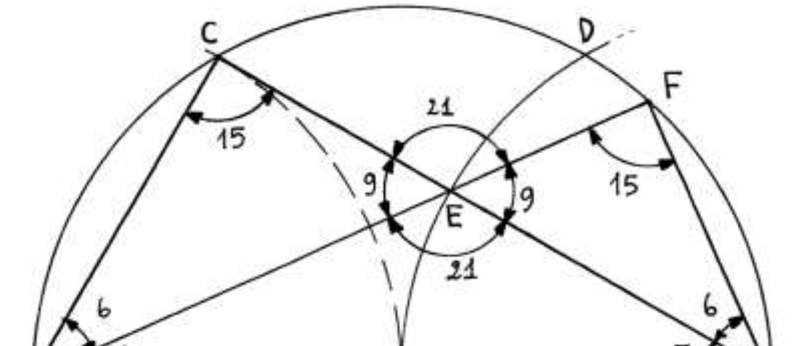
Con queste tre squadre era facile tracciare il pentagono e il decagono regolari.

Con n = 6, che è il caso dell'*esagono* (e del *triangolo equilatero* e del *dodecagono)*, le squadre assumevano la forma della figura che segue:



È ragionevole supporre che gli artigiani e i geometri avessero a disposizione delle squadre specializzate per costruire poligoni regolari con un più alto numero di lati (7, 8, 9, 11, ecc.)?

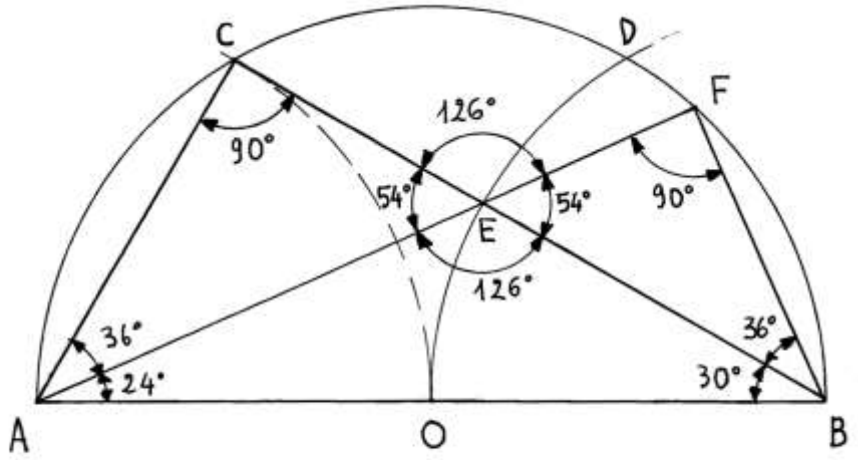
La costruzione del pentagono approssimato inscritto, contenuta nel *Rotolo Topkapı* (e già vista in precedenza) aveva gli angoli misurati in *unità* di ampiezza pari a 6°:



L'angolo giro era pertanto diviso in 60 parti uguali.

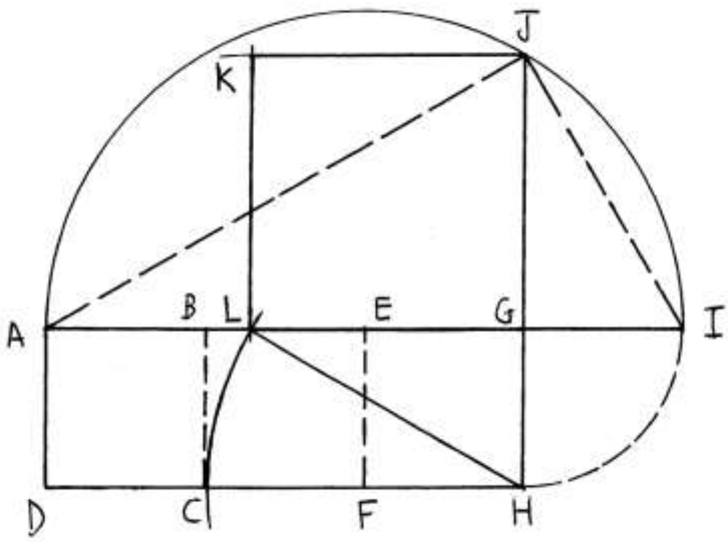
La divisione dell'angolo retto in 90° era usata solo in astronomia e in geografia.

Gli angoli effettivi della precedente costruzione sono i seguenti:



Quadratura di tre quadrati uguali

ABCD, BEFC e EGHF sono tre quadrati uniti lungo un lato e di uguali dimensioni: Devono essere assemblati per formare un quadrato di superficie uguale alla loro somma.



In pratica, si tratta di quadrare un rettangolo – AGHD – che ha lati lunghi nel rapporto

AG : GH = 3 : 1 .

Prolungare il lato AG verso destra. Fare centro in G e con raggio GH tracciare un arco da H fino a fissare il punto I.

Determinare il punto medio di AI: è E

Fare centro in E e con raggio EA = EI disegnare una semicirconferenza da A a I.

Prolungare verso l'alto il lato HG fino a incontrare la semicirconferenza in un punto, J.

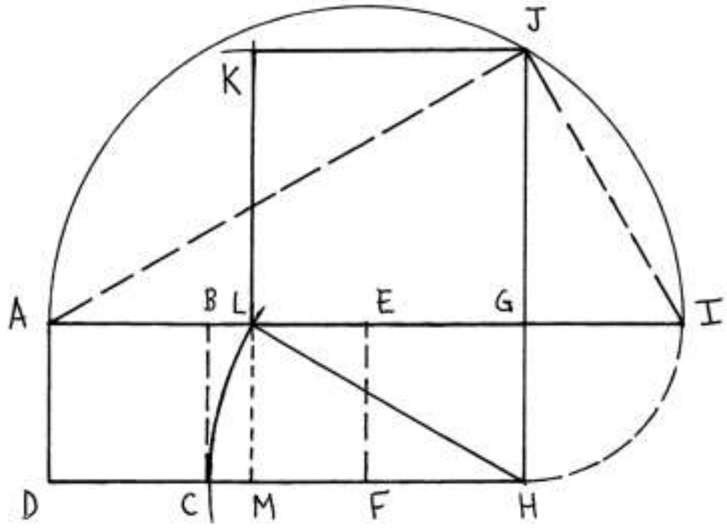
GJ è il lato del quadrato GJKL, che la stessa area dei tre quadrati di partenza e la stessa del rettangolo AGHD.

Ma GJ è anche l'altezza del triangolo rettangolo AJI relativamente alla sua ipotenusa AI. Per il secondo teorema di Euclide relativo ai triangoli rettangoli, l'altezza GJ è *medio proporzionale* fra le lunghezze delle proiezioni (rispettivamente AG e GI) dei cateti (AJ e JI) sull'ipotenusa AI:

AG : GJ = GJ : GI da cui $GJ^2 = AG * GI$.

Ma $AG = 3 * GI^2$ e $GJ = (\sqrt{3}) * GI$.

Prolungare verso il basso il lato KL fino a stabilire il punto M:



Fare centro in H e con raggio HC tracciare un arco da C fino a L.

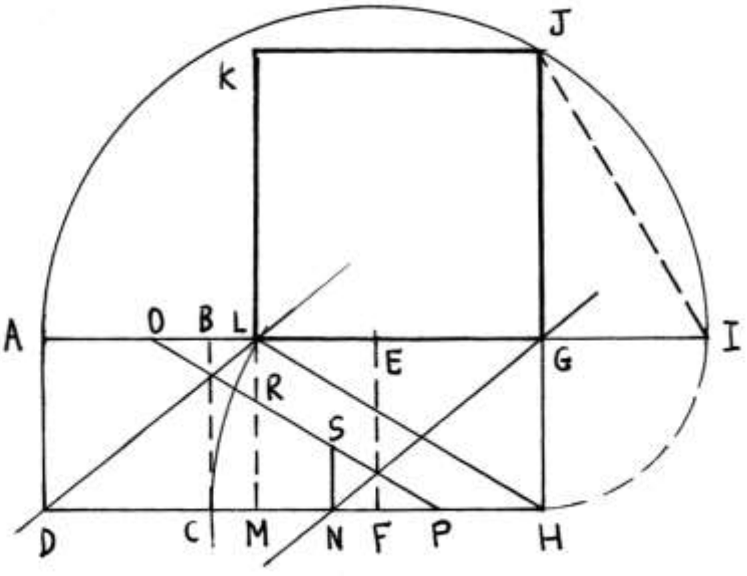
Il triangolo LMH è rettangolo e sono note le lunghezze dell'ipotenusa HL (HL = CH = 2 * LM) e del cateto LM.

Il cateto MH è lungo:

$$MH = \sqrt{LH^2 - LM^2} = \sqrt{(2 \cdot LM)^2 - LM^2} = LM \cdot \sqrt{3}$$

Questa è pure la lunghezza dei lati del quadrato JKLG.

Condurre una retta per i punti L e D e parallelamente ad essa una seconda retta passante per G: questa ultima incontra DH nel punto N.



Il segmento DN è lungo quanto il lato di uno dei tre quadrati da unire.

Stabilire il punto medio di AB: è O. Da O tracciare una parallela a LH fino a tagliare DH nel punto P: essa determina anche il punto R.

Dal punto N elevare la perpendicolare a DH fino a stabilire il punto S.

In linea teorica, il quadrato JGLK ha la stessa superficie della somma di quelle dei tre quadrati ABCD, BEFC e EGHF: ma lo scopo perseguito dagli artigiani era quello di sezionare i tre quadrati iniziali per poi ricomporli fino a formare il quadrato somma. E con la costruzione puramente teorica l'esigenza degli artigiani non era ancora soddisfatta.

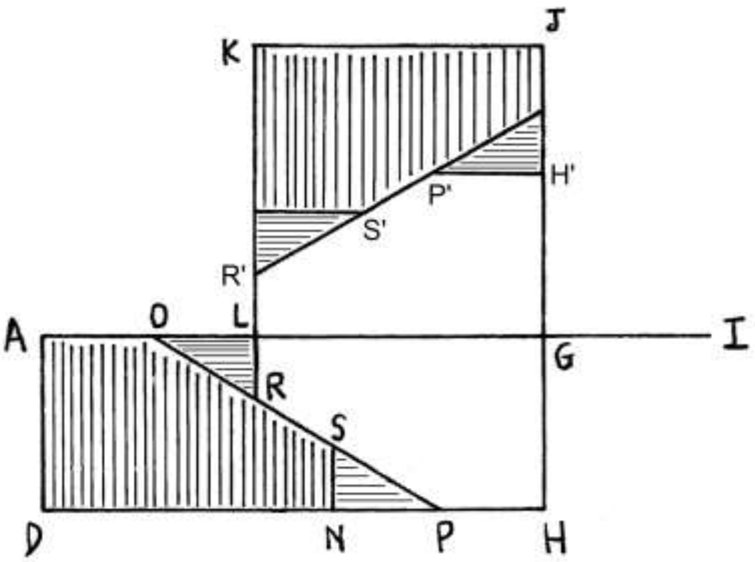
La costruzione ha scomposto il rettangolo AGHD (formato dai tre quadrati affiancati) in quattro poligoni:

* i pentagoni non regolari AOSND e GHPRL che hanno uguali dimensioni;
* i triangoli rettangoli NSP e LRO che, anch'essi, hanno identiche dimensioni.

I quattro poligoni sono ricomposti fino a coprire perfettamente il quadrato JGLK.

La costruzione presentata nell'ultima figura e in quella che segue rappresenta la risposta di Abu'l – Wafa alle richieste degli artigiani. I tre quadrati sono sezionati e i singoli pezzi sono ricomposti a formare il quadrato equivalente JGLK, senza avanzi di materiale e senza lacune nel poligono finale.

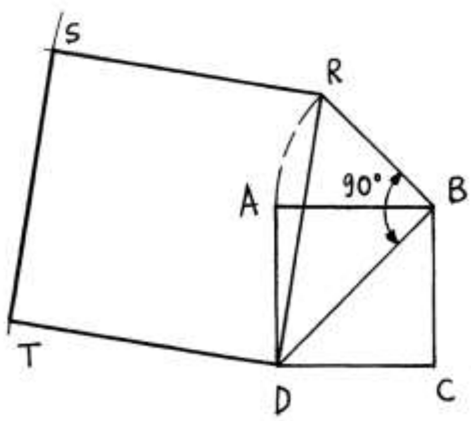
La scomposizione effettuata nella precedente figura è meglio descritta con la figura che segue:



Le equivalenze fra i quattro poligoni nei quali sono stati sezionati i tre quadrati originari e i quattro poligoni assemblati in JGLK sono evidenziate con tratteggi identici.

Altra costruzione del quadrato equivalente a tre quadrati uguali

La costruzione del lato del quadrato risultante dall'unione dei tre quadrati del problema precedente è ricavabile anche con il metodo che è mostrato nella figura che segue:



ABCD è uno dei tre quadrati da assemblare.

Tracciare la diagonale DB: essa è lunga DB = (√2) * BC .

Per il vertice B condurre la perpendicolare a DB. Fare centro in B e con raggio BA disegnare un arco che interseca la perpendicolare nel punto R: Unire R e D.

Il triangolo DRB è rettangolo e la lunghezza della sua ipotenusa RD è data da:

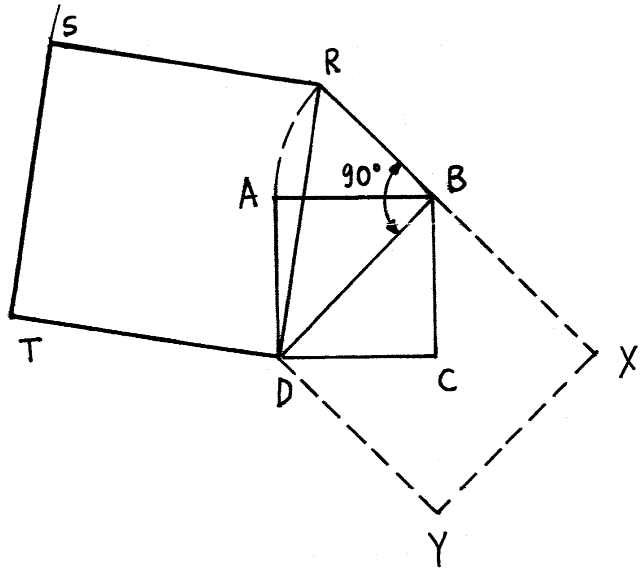
$$RD^2 = DB^2 + RB^2 = [(\sqrt{2}) * BC]^2 + AB^2 = 2 * BC^2 + BC^2 = 3 * BC^2 \text{, da cui}$$

$$RD = \sqrt{3} * BC.$$

RSTD è il quadrato somma cercato, che ha area uguale a $(\sqrt{3} * BC)^2 = 3 * BC^2$ e cioè ha area tripla din quella di ABCD.

La costruzione non risolve il problema sottoposto agli artigiani a Abu'l – Wafa, ma si limita a calcolare la lunghezza del lato del quadrato equivalente alla somma dei tre quadrati uguali a quello ABCD.

Infine, il quadrato costrruito sulla diagonale DB – DBXY nella figura che segue – ha superficie *doppia* di quella di ABCD:



Bibliografia su Abu'l – Wafa

1. Hogendijk Jan P., "Mathematics and geometric ornamentation in the medieval Islamic world", pp. 15, http://www.jphogendijk.nl/talks/neugebauer-written.pdf (accesso del 10 maggio 2015).
2. Özdural Alpay, "On Interlocking Similar or Corresponding Figures and Ornamental Patterns of Cube Equations", *Muqarnas*, vol. 13 (1996), pp. 191-211.
3. Özdural Alpay, "Mathematics and Arts: Connection between Theory and Practice in the Medieval Islamic World", in "Historia Mathematica", 27 (2000), pp. 171-201.
4. Raynaud Dominique, "Abu al – Wafa' Latinus? A study of Method", in "Historia Mathematica", 39 (2012), pp. 34-83.
5. Woepcke Franz, "Recherches sur l'histoire des sciences mathématiques chez le Orientaux, d'après des traits inédits arabes et persans", in "Journal Asiatique", Parigi:
   I. Octobre-novembre 1854, pp. 348-84.
   II. Février-mars 1855, pp. 218-56.
   III. Avril 1855, pp. 30-59.