sergio(punto)calzolani(at)outlook(punto)it

Parole chiave: strumenti del disegnatore; scala grafica; unità di misura lineari; triangolo equilatero; triangolo isoscele; triangolo scaleno; quadrilateri; pentagono; poligoni regolari inscritti; sezione aurea; Amedeo Agostini; segmenti proporzionali; operazioni sui segmenti; teorema dello gnomone; quadratura di figure piane; radice quadrata; cerchi e circonferenze; teorema delle corde

Note

* I disegni originali di Pacioli sono rifatti e completati e sono allegati altri schemi per chiarire le sue soluzioni. Le linee che si è ritenuto utile aggiungere sono spesso tratteggiate.

In alcuni casi sono stati riprodotti gli schemi originali di Pacioli traendoli dal testo curato da Maria Garlaschi Peirani, citato in bibliografia.

* Le lettere [qui maiuscole] mancanti nei disegni originali sono scritte sugli schemi racchiudendole fra parentesi tonde, ad esempio (G).

* Sulle figure e nel testo, per indicare i vertici, Pacioli usa le lettere *minuscole*: seguendo la trascrizione della Garlaschi Peirani sono qui impiegate sempre le lettere maiuscole.

* I termini usati da Pacioli per indicare gli enti geometrici sono stati conservati soltanto nei casi nei quali essi coincidono con quelli odierni: i termini caratteristici del lavoro di Pacioli sono stati debitamente sostituiti. Per maggiori approfondimenti sull'argomento è indispensabile consultare il saggio di Enzo Mattesini, citato in bibliografia.

* Tutte le costruzioni di poligoni descritte da Pacioli si riferiscono a figure *inscritte* in un cerchio: egli non offre metodi per disegnare i poligoni regolari a partire dalla conoscenza della lunghezza di un lato.

IL TRATTATO "DE VIRIBUS QUANTITATIS"

Il trattato di Luca Pacioli "*De Viribus Quantitatis*" reca un titolo in latino che può essere tradotto con "le forze della quantità" o con l'equivalente "le forze dei numeri". Il testo è in italiano.

Luca Pacioli nacque a Borgo San Sepolcro (oggi Sansepolcro) fra l'ottobre 1446 e l'ottobre 1448 e morì a Roma nel 1517.

Dal 1441 Borgo San Sepolcro era passata sotto il controllo della Repubblica Fiorentina.

L'unica copia manoscritta conosciuta del trattato è contenuta nel codice 250 della Biblioteca Universitaria di Bologna. Il manoscritto è cartaceo ed è formato da 306 "carte" di dimensioni 240x165 mm: la sua stesura è opera di un anonimo copista.

La riproduzione pubblicata da Aboca Edizioni (citata in bibliografia) conserva le dimensioni originali del manoscritto: dato che le figure originali sono piuttosto piccole e inserite nelle pagine alle si riferiscono, questa edizione è un po' problematica per coloro che desiderano conoscere a fondo gli schemi.

La soluzione adottata dall' edizione della ricordata Garlaschi Peirani si mostra più utile: i disegni sono stati riprodotti alla fine del libro e notevolmente ingranditi.

Il ricercatore bolognese Dario Uri ha riprodotto le pagine del manoscritto nel suo sito http://www.uriland.it/matematica/DeViribus/Presentazione.html (visitato il 6 dicembre 2021). Si tratta di un eccellente lavoro, utile per gli studiosi del trattato dato che consente di ingrandire l'immagine di una singola pagina dopo averla scaricata.

Interessante è anche la tesi di laurea, pubblicata in inglese, su questo trattato di Pacioli, del ricercatore portoghese Hirth Nunes Dos Santos, che è citata in bibliografia.

La lettera dedicatoria che si trova all'inizio del trattato consente di fissare la sua compilazione negli anni fra il 1496 e il 1508 perché in essa vi è un cenno al manoscritto di un altro testo di Pacioli, il *De Divina Proportione*, ma non parla della sua edizione a stampa, avvenuta nel 1509.

L'opera è divisa in tre parti:

1. Delle forze numerali o Aritmetica.
2. Della forza lineale o Geometria.
3. Documenti morali.

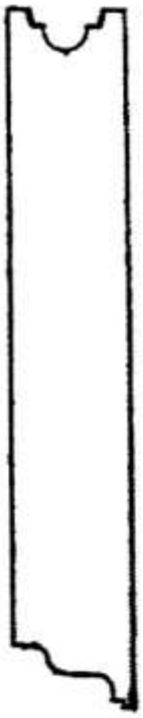
In questo articolo sono prese in considerazione solo le costruzioni contenute nella *parte seconda*, quella dedicata alla *Geometria*.

I singoli problemi affrontati da Pacioli sono da lui presentati in paragrafi chiamati *Documenti*: quelli di natura strettamente geometrica sono *ottanta* che sono contrassegnati da *numeri romani*. In questo articolo sono considerati i primi *settantanove.*

Nei titoli è stata conservata la numerazione romana usata da Pacioli.

Documento I

Pacioli descrive i due strumenti più utili per il disegnatore: il compasso (o *sexto* o *circino* e la riga.



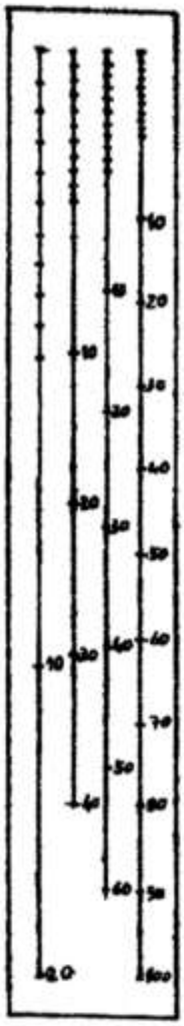
Doc. I

Il compasso era chiamato *sexto* perché la sua applicazione alla circonferenza la divide esattamente in *sei* parti uguali.

È da notare l'assenza della squadra fra gli strumenti consigliati: per tutto il Medioevo le squadre prive dell'ipotenusa erano gli strumenti preferiti da artigiani, progettisti e costruttori. Da quelle antiche squadre sono derivate quelle usate da falegnami e carpentieri.

<u>Documento II</u>

Pacioli suggerisce di approntare un manufatto di ottone, di rame, di acciaio o di legno duro ("sodo") di lunghezza a piacere, per farne un righello.

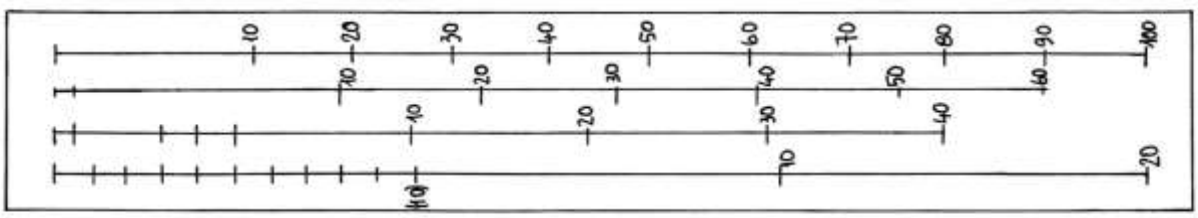


Doc. II

Su di una faccia, oppure su entrambe, occorre incidere 3, 4, 5 e perfino 6 linee rettilinee e parallele con scale misurate e numerate in *base 10* e non *12* come accadeva alla suddivisione delle unità di misura lineari quali il braccio.

Lo strumento proposto da Pacioli anticipa gli *scalimetri* a forma di prisma triangolare oggi usati dai tecnici e dai disegnatori: questi contengono spesso scale quali 1:20, 1:25, 1:50, 1:75, 1:100 e 1:125.

Lo schema che segue riproduce la riga di Pacioli che recava quattro scale: le cifre sono state scritte a mano:



- APPROFONDIMENTO -

Nella parte dedicata alla Geometria della *Summa di arithmetica geometria proportioni et proportionalita* Pacioli descrive le unità di misura utilizzate nella compravendita dei terreni nella Repubblica Fiorentina e cita le unità di superficie: braccia quadrate, pugnora, panora, staiora.

Le unità di misura lineari

Nel Medioevo, a Firenze erano usate due unità di misura della lunghezza:

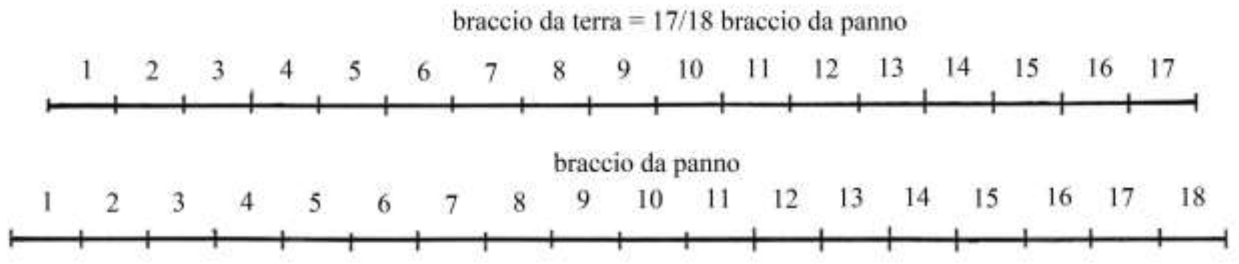
* il *braccio da panno* o *braccio a panno* ("braccio di Calimala", dal nome della strada fiorentina che ospitava molte botteghe di artigiani tessili): esso era lungo l'equivalente di 58,3626 cm;
* al suo fianco, per le misure itinerarie era usato il *braccio da terra* o *braccio a terra*.

Le due unità di misura lineare erano legate da un rapporto fisso:

1 braccio da terra = (17/18) * braccio da panno ≈
≈ 58,3626 * (17/18) ≈ 55,1202 cm.

Molte grandi opere edilizie furono progettate con misure espresse in *braccia da panno* e suoi multipli e sottomultipli.

Il *braccio da terra* ebbe limitata importanza e fu soppresso con l'editto granducale del 13 marzo 1781. Fu usato nella misurazione dei terreni agricoli e nella stesura delle relative mappe catastali.



Non è chiara la ragione che portò a fissare il rapporto 17/18 fra le lunghezze delle unità fiorentine del *braccio a terra* e del *braccio a panno*.

Alcune mappe catastali toscane risalenti agli ultimi secoli del Granducato contengono riferimenti a misure di terreni effettuate con una *canna di sei braccia a terra*: era uno strumento di legno, metallico o di corda? Essa aveva lunghezza uguale a:

canna di sei braccia a terra = 6 * (17/18 di braccio a panno) = 5 + 2/3 braccia da panno ≈
≈ 3,307 metri.

Come avveniva per il *fiorino*, il *braccio da panno* fiorentino era diviso in 20 *soldi* e ciascun soldo era ripartito in 12 *denari*: per le monete e per le unità di misura lineari furono usati gli stessi termini e uguali rapporti, sempre secondo la doppia base 20 e 12.

La tabella che segue elenca i multipli (il *miglio*, la *pertica*, la *canna mercantile*, il *passetto*) e molti sottomultipli del *braccio da panno*:

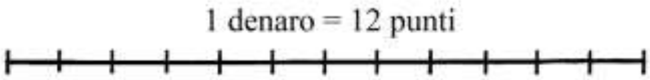
Unità	Rapporti	Equivalenze in metri o in centimetri
Miglio	2833,33 braccia da panno	1653,607 m (*)
Pertica (canna agrimensoria)	5 braccia	2,918 m
Canna mercantile	4 braccia	2,3345 m
Passetto	2 braccia	1,1673 m
Braccio da panno	20 soldi	58,3626 cm
Palmo	½ braccio	29,1813 cm
Oncia o crazia	1/12 di braccio	4,863 cm
Soldo	12 denari	2,9181 cm
Quattrino	4 denari = 1/60 di braccio	0,9727 cm
Denaro	12 punti	0,2432 cm
Punto		0,0203 cm
1 braccio e 1/4		72,9532 cm
16 soldi		46,69008 cm
¾ di braccio	15 soldi	43,7718 cm
2/3 di braccio		38,9084 cm
3/10 di braccio	18 quattrini	17,50778 cm

(*) Il *miglio* era lungo 3000 *braccia da terra* e quindi:

1 miglio = 3000 braccia da terra = 17/18 * 3000 = 2833,33 braccia da panno.

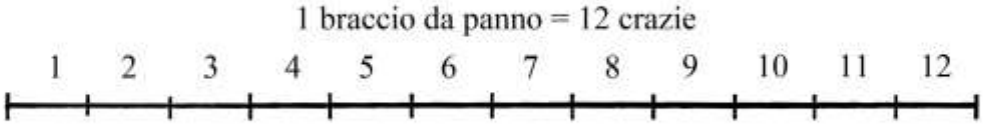
Braccio era sinonimo di *cubito*.

La *canna ferrata*, usata in edilizia, era lunga quanto una canna mercantile e cioè 4 braccia da panno: probabilmente essa recava incise le tacche rappresentative dei sottomultipli della canna e del braccio.



Il braccio da panno prevedeva un doppio sistema di sottomultipli:

* 1 braccio = 20 soldi; 1 soldo = 12 denari; 1 braccio = 240 denari (che è il sistema contenuto nella precedente tabella).
* 1 braccio = 12 once o *crazie*; 1 oncia = 20 denari; 1 braccio = 240 denari.



I due metodi condividevano la proporzione 1 braccio da panno = 240 denari.
Il rapporto fra il soldo e l'oncia (o crazia) era:

1 soldo : 1 oncia (o crazia) = 12 denari : 20 denari e quindi
1 soldo : 1 oncia (o crazia) = 3 : 5 .

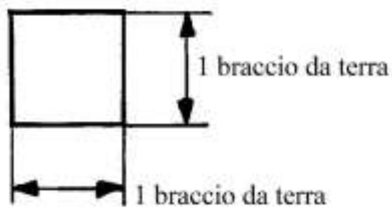
Stando alla tradizione la lunghezza del braccio da panno fu ritenuta equivalente a quella di *2 piedi romani*, lunghi ciascuno 29,57 cm:

1 braccio ≈ 2 piedi → 58,3626 cm ≈ 2*29,57 cm → 58,3626 cm ≈ 59,14 cm.

Anche il *panno da terra* si divideva in 20 soldi e ciascun soldo in 12 denari, con lunghezze pari ai 17/18 di quelle dei corrispondenti soldi e denari del braccio da panno.

<u>Le unità di misura delle superfici a Firenze anteriori alla riforma del 1781-1782</u>

Fino alla riforma del 1781-1782, le unità di misura delle superfici agrarie usate a Firenze erano basate sul *braccio quadro da terra*.



La sua area era:

1 braccio^2 da terra = (1 braccio a terra)^2 ≈ (0,551202 m)^2 ≈ 0,303824 m^2.

La tabella che segue riassume i rapporti fra le unità di misura superficiali in uso a Firenze fino alla riforma del 1781-1782:

Unità di misura	Rapporti con il braccio quadro da terra
Braccio^2 da terra	1
Pugnoro	12
Panoro	$12^2 = 144$
Stioro fiorentino (staioro a corda)	$12^3 = 1728$
Staioro a seme (= 3 stiora)	$3*12^3 = 5184$
Saccata	$12^4 = 20736$

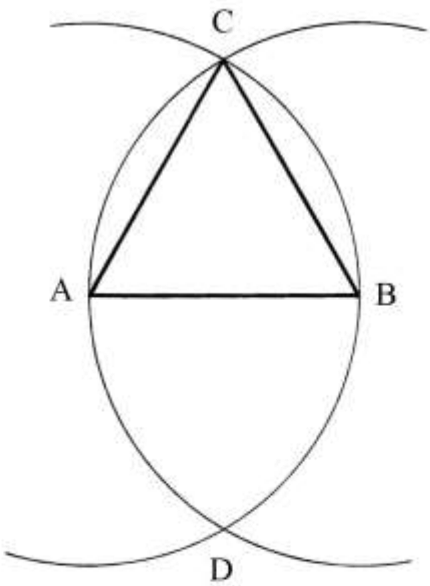
Tutte le unità erano strutturate su base *duodecimale*: Pacioli anticipò l'introduzione del sistema metrico decimale?

- -

Documento III

È data la lunghezza del lato di un triangolo equilatero.

AB è il lato orizzontale.



Fare centro in A e in B con raggio AB e disegnare due archi che si incontrano nei punti C e D. ABC è il triangolo equilatero.

Interessante è un cenno che Pacioli fa alla fissazione della lunghezza del lato:

"…*per ogni faccia* [lato] *io dico che spanda el sexto da uno fin 11 inclusive*…".

Nello stesso paragrafo, l'Autore ripete:

"…*che tu habbi aperto el sexto da 1 fin 11, che sonno 10 spatij*…".

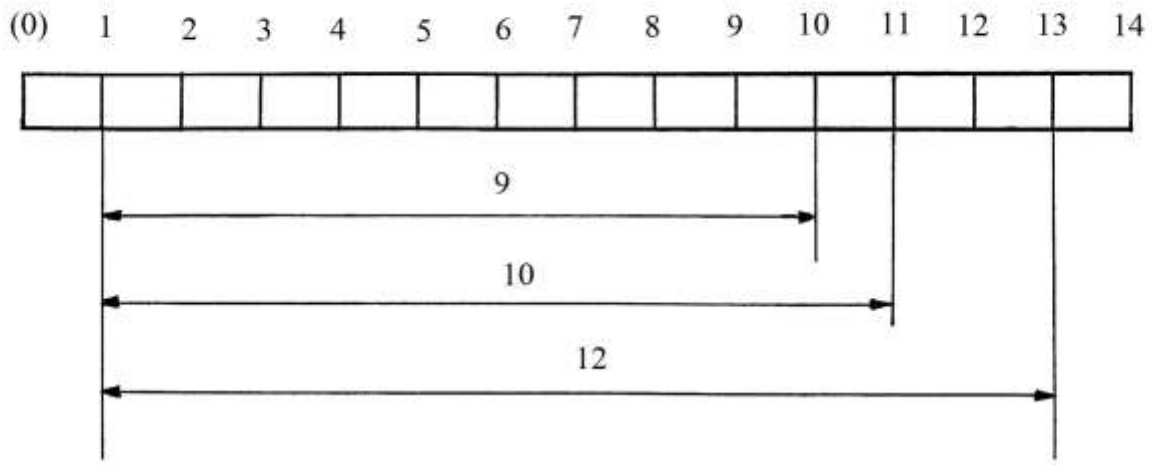
Pacioli misura la lunghezza "10" su di un righello a partire dal segno "1" fino a quello contrassegnato con "11": le spiegazioni di questo comportamento possono essere almeno due:

* era pratica comune l'uso di non contare da "0" ma soltanto da "1";
* le righe non recavano il simbolo dello *zero* all'inizio della scala graduata.

Nel paragrafo dedicato al successivo Documento IV vi è un altro cenno a questo modo di misurare.

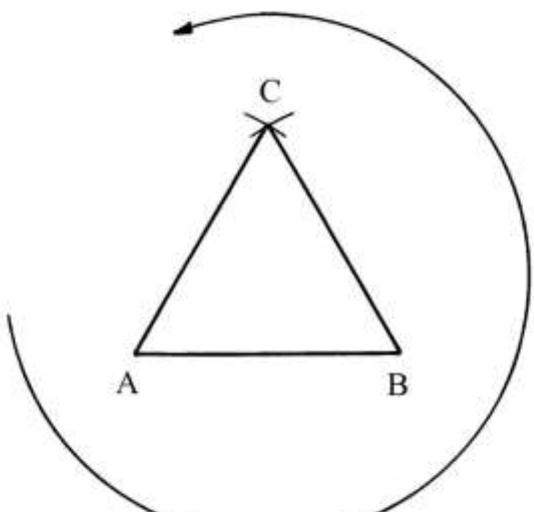
Nel precedente paragrafo dedicato al Documento II le due figure con i righelli confermano l'assenza dello "0" sulle scale graduate.

Il grafico che segue presenta un righello con una scala con segni compresi fra (0) e 14 e spiega il modo di misurare con il metodo di Pacioli:



- APPROFONDIMENTO -

Molte figure contenute nel manoscritto recano lettere apposte ai vertici: esse sono maiuscole e sembrano essere quasi sempre disposte in senso antiorario, a partire da sinistra oppure dall'alto:

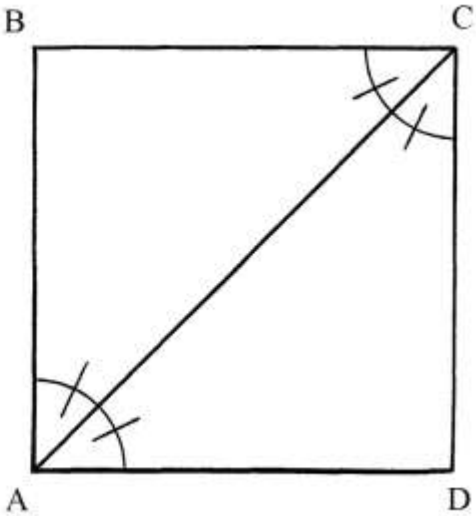


- -

<u>Documento IV</u>

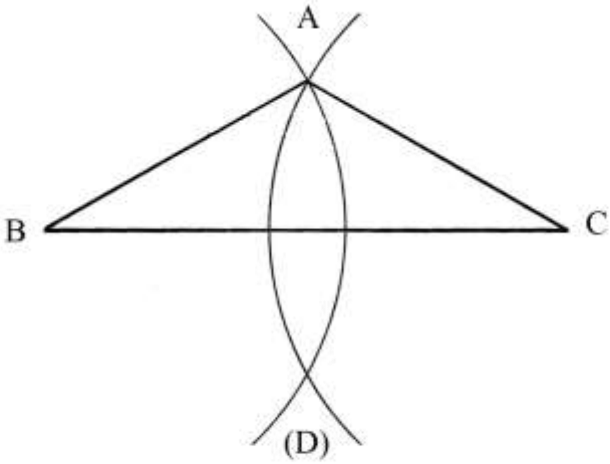
La costruzione di un triangolo isoscele è accompagnata da una dettagliata precisazione. In generale un triangolo isoscele possiede due lati di uguale lunghezza (e due angoli di uguale ampiezza).

Pacioli accantona per il momento il caso dei triangoli rettangoli isosceli generati dalla divisione di un quadrato con una diagonale, AC nella figura:



I quattro angoli creati nei vertici A e C hanno ampiezze uguali a 45°.

AB è il primo lato, orizzontale, del triangolo isoscele da disegnare.



L'Autore suggerisce di misurare con il compasso un'apertura uguale a 10 braccia o gradi o piedi: con un compasso da disegno sembra difficile ottenere un'apertura lunga 10 braccia, dato che un braccio da panno fiorentino era lungo 58,3626 cm.

Pacioli ritorna sulla modalità di misurazione: egli propone di aprire il compasso dalla tacca "1" fino alla tacca "11" per misurare la lunghezza di 10. L'Autore continua con altri esempi:

* la lunghezza 9 è misurata fra i segni "1" e "10";
* la lunghezza 12 è misurata fra i segni "1" e "13".

Il primo lato è BC, orizzontale, lungo 10 unità.

Prima di scegliere la lunghezza dei lati obliqui, Pacioli ricorda che in un triangolo isoscele la somma dei quadrati delle lunghezze dei due lati obliqui deve essere maggiore del quadrato della lunghezza del lato BC, che è 10 unità:

$AB^2 + AC^2 > BC^2$

$2*AB^2 > 100$.

In caso di uguaglianza e cioè con

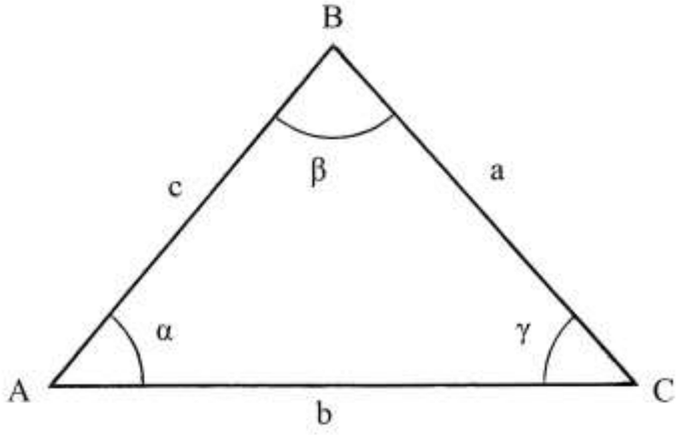
$2*AB^2 = 100$ il triangolo sarebbe *rettangolo*.

Con apertura BA, uguale alla lunghezza dei due lati obliqui, fare centro in B e in C e tracciare due archi che si incontrano nei punti A e (D): ABC è il triangolo isoscele *ottusangolo* perché i suoi lati obliqui sono più corti della base BC.

\- APPROFONDIMENTO -

Alcune proprietà dei triangoli

Il *teorema dei seni* o *teorema di Eulero* (1707-1783) indica una relazione di proporzionalità diretta fra le lunghezze dei lati di un triangolo e i *seni* degli angoli opposti:



$a : \text{sen}\ \alpha = b : \text{sen}\ \beta = c : \text{sen}\ \gamma.$

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

In un triangolo la lunghezza di ciascun lato è minore della somma delle lunghezze degli altri due:

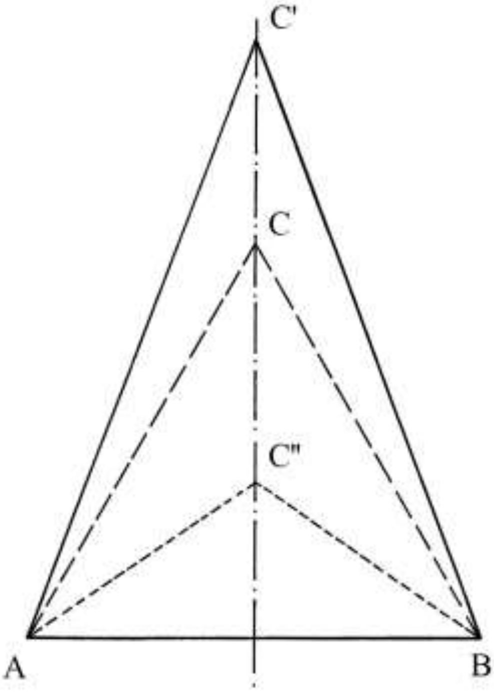
$a < (b + c)$
$b < (a + c)$
$c < (a + b).$

Esiste un'ulteriore relazione secondo la quale la lunghezza di un lato è maggiore della differenza fra le lunghezze degli altri due:

$a > (b – c)$
$b > (a – c)$
$c > (a – b).$

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Lo schema che segue mostra tre triangoli "isosceli" che hanno in comune la base AB:



Il triangolo ABC è equilatero e quelli ABC’ e ABC’’ sono soltanto isosceli.
ABC’ è acutangolo e ABC’’ è ottusangolo.
Nel triangolo ABC’ la differenza fra le lunghezze di AB e di AC’=BC’ è notevole:

(AC’ = BC’) > AB.

Nel triangolo ABC’’ si verifica l’opposto:

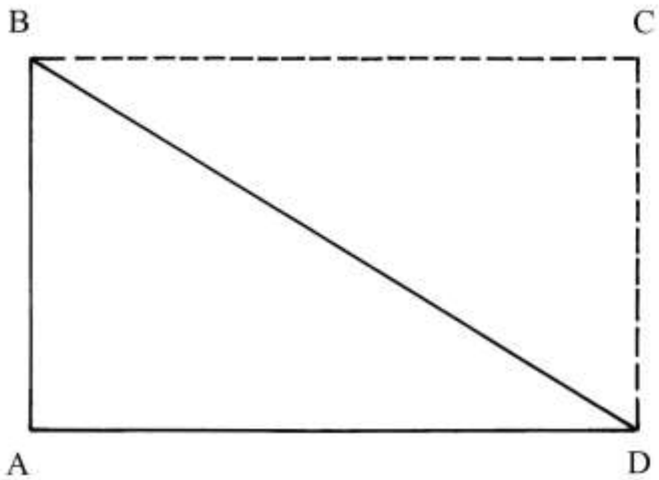
AB > (AC’’ = BC’’).

- -

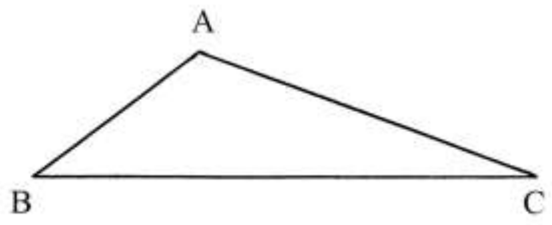
<u>Documento V</u>

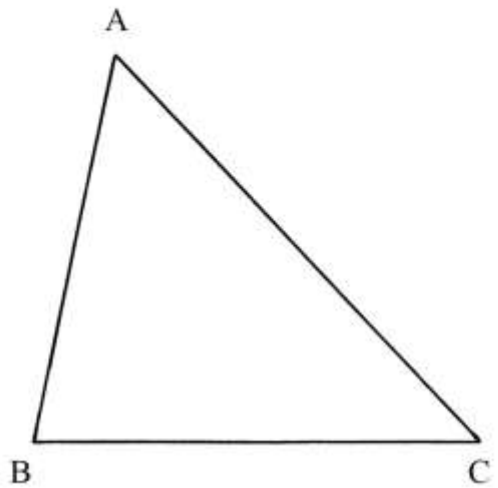
La terza specie di triangoli è rappresentata da quelli *scaleni*.

Un primo caso è dato dal triangolo rettangolo scaleno che è ottenuto dalla divisione di un rettangolo (un *tetragono longo*) con una diagonale che Pacioli chiama *diametro*:



Pacioli presenta due esempi di triangoli scaleni:





In alto è un triangolo ottusangolo e in basso un acutangolo.

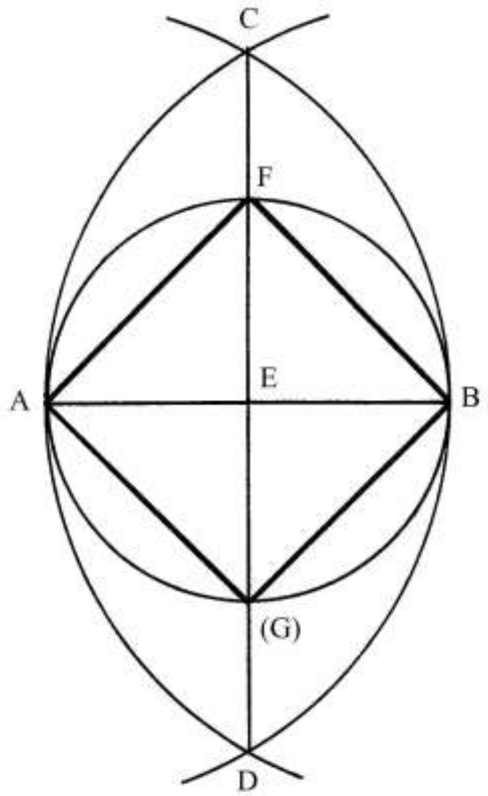
I due triangoli sono costruiti con il compasso dopo avere fissato il lato orizzontale BC e avere scelte le lunghezze dei lati obliqui.

Documento VI

Pacioli distingue alcune specie di quadrilateri:

1. La prima specie è quella *quadrata equilatera*, cioè il quadrato.
2. La seconda è la *tetragona longa*, ovvero il rettangolo.
3. La terza è chiamata *elmuaym* o *rombon*: è il rombo.
4. La quarta è detta *romboyde*: si tratta del parallelogramma.

Lo schema che segue descrive la costruzione di un quadrato inscritto in un cerchio:



AB è un diametro del cerchio. Fare centro nei punti A e B e con raggio AB tracciare due archi che si incontrano nei punti C e D: la retta passante per questi è l'asse di AB che divide a metà nel punto E.

Fare centro in E e con raggio EA = EB disegnare una circonferenza che incontra l'asse verticale nei punti F e (G).

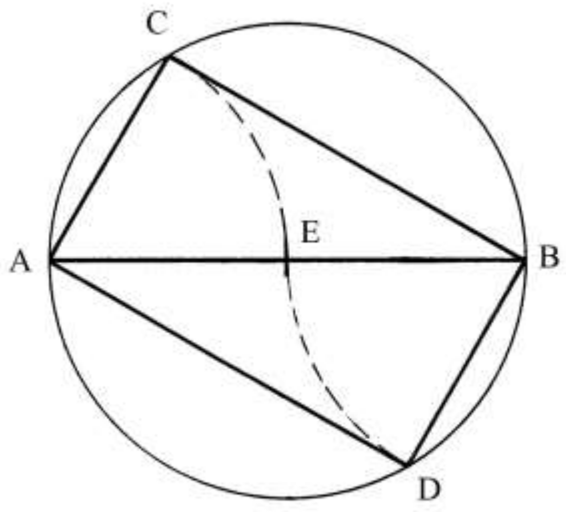
AFB(G) è il quadrato inscritto nel cerchio.

<u>Documento VII</u>

Pacioli chiama il rettangolo *tetragono longo* o *parte altera longiore*.

Anche questo quadrilatero è costruito inscrivendolo in un cerchio.

Disegnare il diametro orizzontale AB e fissare il suo punto medio E:



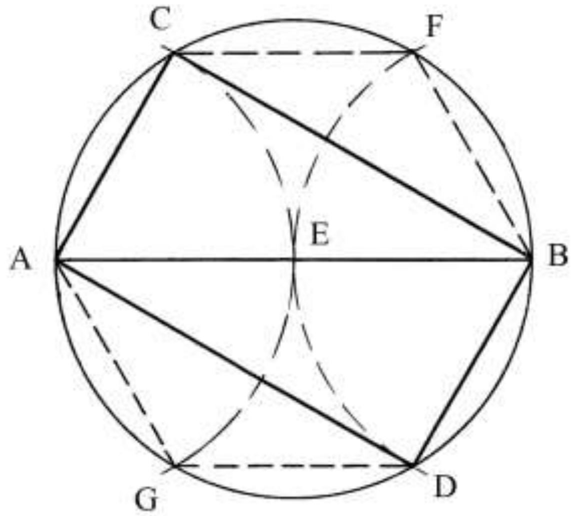
Fare centro in E e con raggio EA = EB tracciare una circonferenza.

Sempre con raggio EA fare centro in A e in B e disegnare due archi che tagliano la circonferenza in C e in D.

ACBD è il rettangolo inscritto nel cerchio.

I triangoli ACB e ABD sono rettangoli perché inscritti in semicerchi.

La costruzione può essere completata con la tracciatura di un esagono regolare inscritto:



ACFBDG è l'esagono. Nel rettangolo ACBD i lati AC e BD sono anche due lati dell'esagono e i lati AB e CB sono due delle *nove* diagonali di questo ultimo poligono.

- APPROFONDIMENTO -

Il numero delle diagonali, D, di un poligono di *n* lati è dato dalla formula:

$D = n * (n - 3)/2.$

La formula ha una sua logica: in un vertice concorrono due lati che sono definiti da *tre* vertici: questo numero va sottratto.

Una diagonale collega due vertici non consecutivi e va contata una sola volta e non due: per questo nella formula compare al denominatore il numero 2.

Nel caso dell'esagono il numero delle diagonali è:

$D_6 = 6 * (6 - 3)/2 = 6 * 3/2 = 9.$

- -

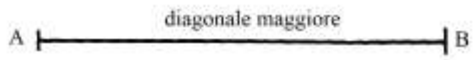
Infine, il diametro AB è una delle due diagonali del rettangolo e, forse, anche per questa ragione Pacioli chiama diametro la diagonale.

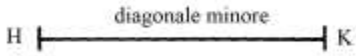
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Tutti i quadrilateri sono disegnati inscritti e Pacioli non offre alcun esempio di quadrilateri costruiti con le perpendicolari agli estremi di un segmento.

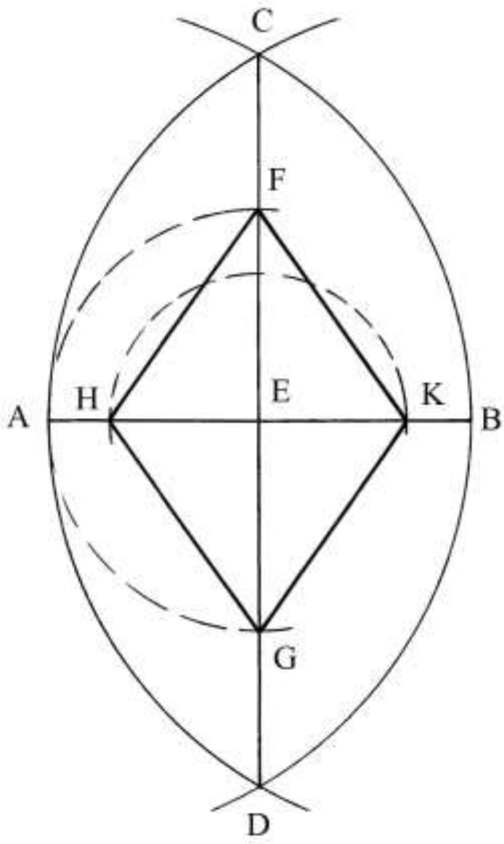
<u>Documento VIII</u>

La costruzione del rombo muove dalla conoscenza della lunghezza della diagonale maggiore del quadrilatero, AB, e di quella minore, HK.





Anche in questo caso sono aggiunti alcuni dettagli non presenti nell'originale e ciò allo scopo di chiarire la procedura usata dall'Autore. Lee linee aggiunte sono disegnate tratteggiate.



Fare centro in A e in B e con raggio AB tracciare due archi che si intersecano nei punti C e D. La retta passante per C e per D è l'asse di AB: le due linee si incontrano nel punto E.

Fare centro in E e con raggio EA = EB disegnare una semicirconferenza che taglia l'asse nei punti F e G.

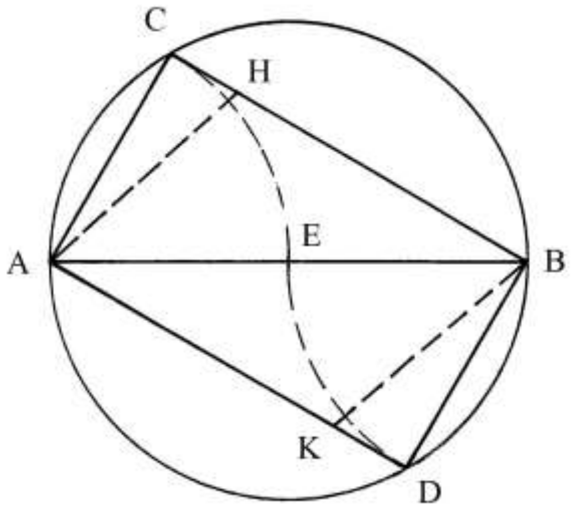
Infine, fare centro in E con raggio EH = EK =HK/2 e tracciare una seconda semicirconferenza da H a K: essa incrocia l'asse verticale nei punti F e G.

FKGH è il rombo.

<u>Documento IX</u>

La quarta specie di quadrilateri è il *romboide* o parallelogramma.

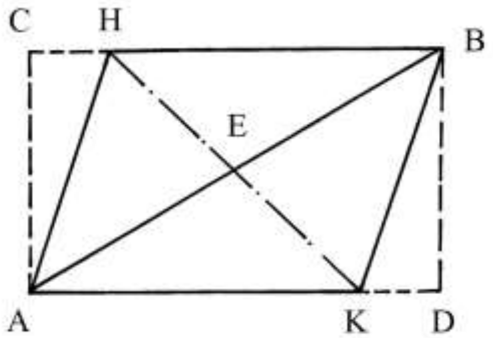
È data la lunghezza di una diagonale del parallelogramma, AB:



Fare centro in E e con raggio EA = EB = AB/2 tracciare una circonferenza. Con la stessa apertura fare centro in A e in B per disegnare due archi che tagliano la circonferenza nei punti C e D.

Inizialmente, la procedura riproduce il metodo già impiegato per la costruzione del rettangolo (Documento VII).

Occorre scegliere la lunghezza dei segmenti CH e DK, uguali:

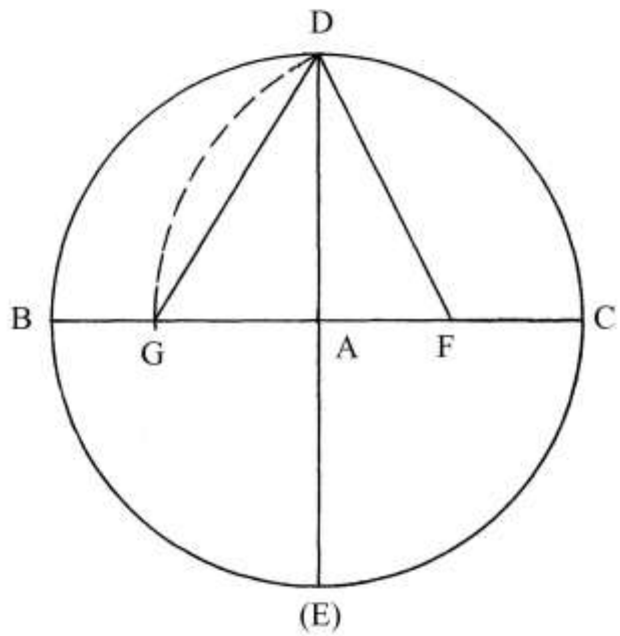


ACBD è il parallelogramma. Dai vertici C e D riportare la lunghezza CH = DK sui due lati orizzontali.

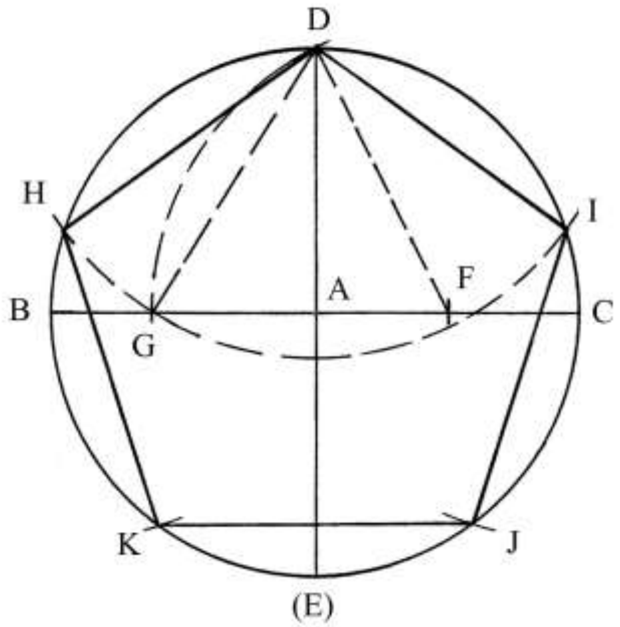
AHBK è il parallelogramma. AB è una diagonale del rettangolo ACBD e la diagonale maggiore del parallelogramma: HK è la sua diagonale minore. Le due diagonali si intersecano nel punto E.

<u>Documento X</u>

Questo documento descrive l'inizio della costruzione del pentagono regolare inscritto:



Il metodo impiegato da Pacioli deriva chiaramente da quello attribuito a Claudio Tolomeo (II secolo d.C.):



Disegnare due diametri perpendicolari, BC e D(E) che si incontrano nel punto A, centro del cerchio di raggio AB.

Fissare il punto medio del raggio AC: è F.

Collegare F con D.

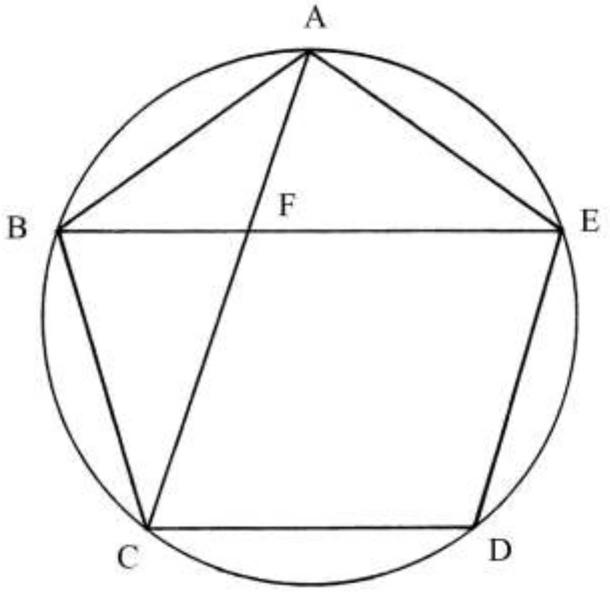
Fare centro in F e con raggio FD tracciare un arco da D fino a tagliare in G il diametro BC.

La corda DG è la lunghezza del lato del pentagono regolare inscritto: riportare la sua lunghezza sulla circonferenza.

DIJKH è il pentagono regolare inscritto.

Documento XI

Nel pentagono regolare inscritto ABCDE sono tracciate due delle sue cinque diagonali: AC e BC:



Con questo esempio, Pacioli introduce la *sezione aurea*: le due diagonali si tagliano reciprocamente e si hanno le seguenti uguaglianze:

AF = BF e FC = FE = AB = AE.

Fra le due parti delle diagonali valgono delle proporzioni: il prodotto della moltiplicazione della parte minore (BF) per l'intera lunghezza della diagonale (BF) è uguale al quadrato della lunghezza della parte maggiore:

$BF * BE = (FE * FE) = FE^2$.

Documento XII

Nel manoscritto i Documenti XII e XIII non sono accompagnati da disegni.

Il Documento XII presenta il caso di un pentagono, di un decagono e di un esagono regolari inscritti nello stesso cerchio.

Il quadrato della lunghezza del lato del pentagono è uguale alla somma dei quadrati delle lunghezze dei lati del decagono e dell'esagono.

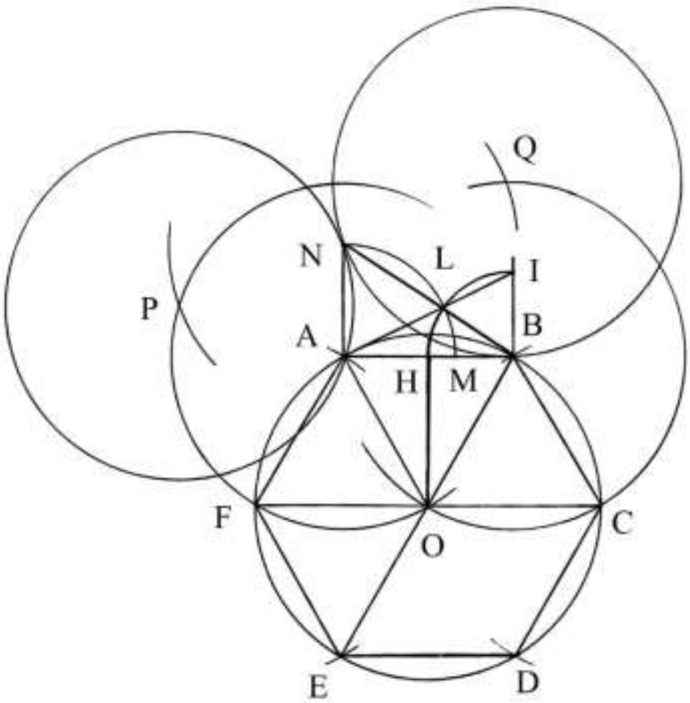
Per semplificare la spiegazione, i tre poligoni sono qui inscritti in tre cerchi distinti e di raggi di uguale lunghezza.

- APPROFONDIMENTO -

Pentagono, esagono e decagono regolari inscritti

Nel XIII libro degli *Elementi* di Euclide è dimostrata un'interessante relazione: tre poligoni regolari (pentagono, esagono e decagono) inscritti in tre cerchi, di raggio uguale, formano un triangolo rettangolo ANB con cateti e ipotenusa così legati:

- Il cateto AB è un lato dell'esagono.
- Il cateto AN è un lato del decagono.
- L'ipotenusa NB è un lato del pentagono.



In un decagono regolare inscritto, la lunghezza del lato è legata a quella del raggio della circonferenza dal *rapporto aureo* Φ:

raggio : lunghezza lato = ϕ : 1
lunghezza lato = raggio/ϕ.

La tabella che segue riassume i dati relativi ai tre poligoni:

Poligono regolare	Numero lati	Lunghezza del lato
Pentagono	5	~ 1,176 * raggio circonferenza
Esagono	6	1 * raggio circonferenza
Decagono	10	~ 0,618 * raggio circonferenza

La precedente figura descrive la costruzione.

Disegnare l'esagono regolare inscritto cerchio di centro O: è ABCDEF.

Determinare il punto medio del lato AB: è H. Elevare le perpendicolari al segmento AB nei due estremi A e B.

Fare centro in B e, con raggio BH, tracciare un arco da H fino a determinare il punto I. Disegnare il segmento AI.

Con centro in I e raggio IB (= BH), tracciare un arco da B fino a tagliare AI in un nuovo punto, L.

Fare centro in A e, con raggio AL, disegnare un quarto di circonferenza che fissa i punti M e N.

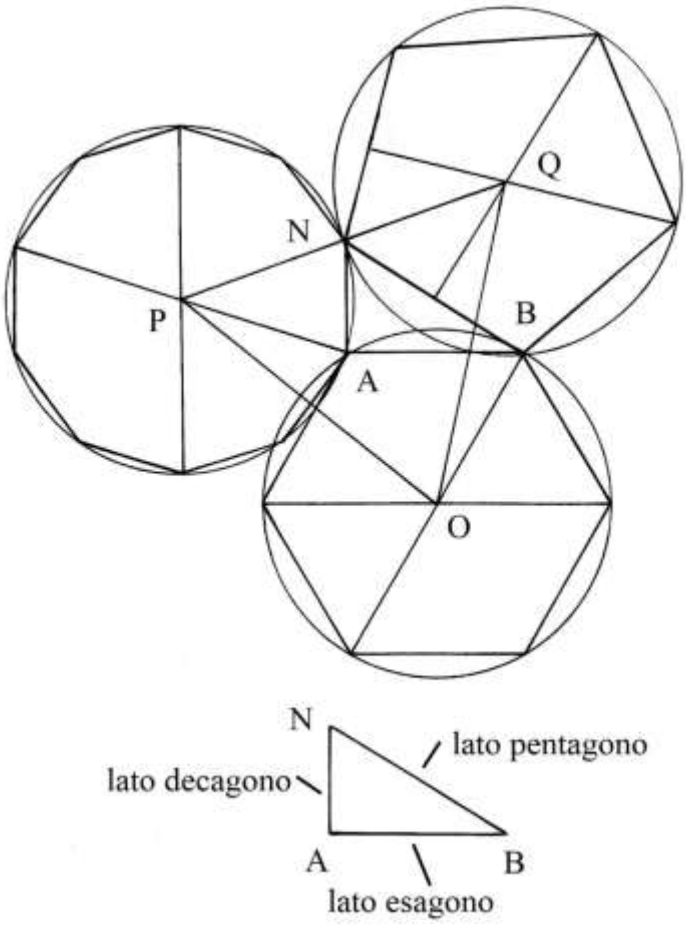
Il segmento AN (= AM) è la *sezione aurea* del lato AB. In un qualsiasi esagono regolare inscritto, il lato del poligono ha la stessa lunghezza del raggio della circonferenza: ne consegue che il segmento AN è la *sezione aurea* del raggio OA.

AN è la lunghezza del lato del decagono regolare inscritto in una circonferenza di raggio uguale a AB (= OA).

NB è l'ipotenusa del triangolo rettangolo ANB ed è un lato del pentagono regolare inscritto in un cerchio di raggio uguale a AB (= OA).

Con apertura uguale a AB, fare centro in A e in N: i due archi tracciati si intersecano in un punto, P, che è il centro del cerchio circoscritto al decagono regolare.

Con la stessa apertura (AB) fare centro in N e in B e disegnare due archi che si tagliano in un nuovo punto, Q, centro del cerchio circoscritto al pentagono regolare:



Tracciando i lati dei due poligoni, decagono e pentagono, si ottiene la costruzione presentata nella figura.

<u>Nota</u>: nel successivo Documento XLI Pacioli descrive la costruzione grafica della sezione aurea di un segmento.

- -

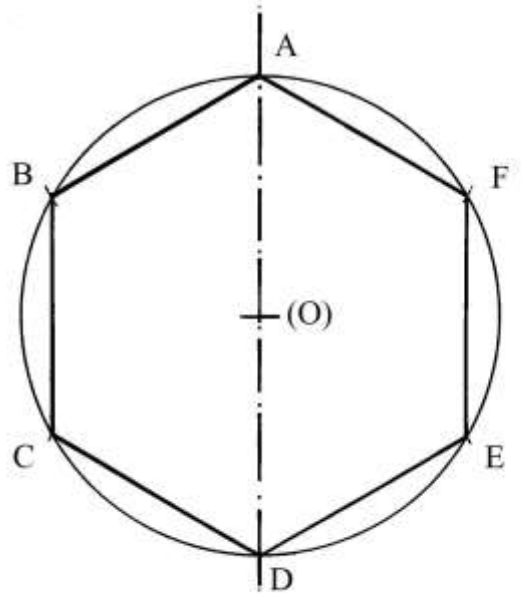
<u>Documento XIII</u>

Pacioli riassume alcune semplici proprietà del pentagono regolare inscritto in un cerchio: se la lunghezza del diametro è espressa da un numero razionale, allora la lunghezza del lato del poligono è un numero irrazionale.

Vale anche la regola opposta: se la lunghezza del lato del pentagono è razionale, quella del diametro è irrazionale.

Documento XIV

La costruzione dell'esagono inscritto in un cerchio è mostrata nella figura che segue:



Tracciare una retta verticale e fissare il centro (O) del cerchio.

Disegnare la circonferenza di raggio (O)A e stabilire i punti A e D.

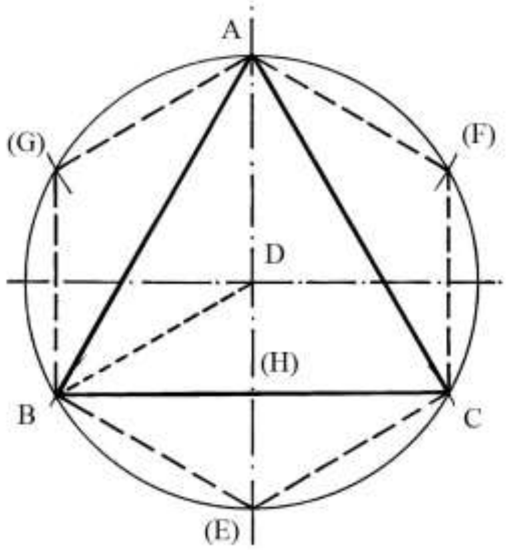
Con la stessa apertura (O)A fare centro in A e in D e tracciare gli archi che tagliano la circonferenza nei punti B, F, C e E.

ABCDEF è l'esagono inscritto.

Documento XV

Pacioli afferma che il quadrato della lunghezza del lato dell'esagono è la terza parte del quadrato della lunghezza del lato del triangolo equilatero inscritto nello stesso cerchio.

La figura contenuta nel manoscritto originale contiene soltanto il triangolo equilatero ABC inscritto nel cerchio di centro D: qui è completata con l'esagono A(F)C(E)B(G):



Il centro ha centro in D e raggio DA.

Il triangolo equilatero ABC ha lati lunghi 10 unità.

Calcoliamo la lunghezza dei lati dell'esagono: essi, come ad esempio quello B(E) hanno la stessa lunghezza del raggio DB.

BD(E) è un triangolo equilatero e B(H) è una sua altezza che è lunga metà di BC e cioè 10/2 = 5 unità.

A sua volta, D(H) è lungo la metà del raggio r = D(E).

Con il teorema cosiddetto di Pitagora applicato al triangolo rettangolo BD(H) calcoliamo la lunghezza del raggio DB = r:

$DB^2 = B(H)^2 + DH^2$

$r^2 = (BC/2)^2 + (r/2)^2$

$r^2 = 5^2 + r^2/4$

$¾ * r^2 = 25$

$r = \sqrt{(4/3 + 25)} = \sqrt{(100/3)}$.

Anche il lato dell'esagono è lungo √(100/3) e quindi l'affermazione di Pacioli è confermata:

$BC^2 = 3 * DB^2$

$10^2 = 3 * (\sqrt{(100/3)}^2$

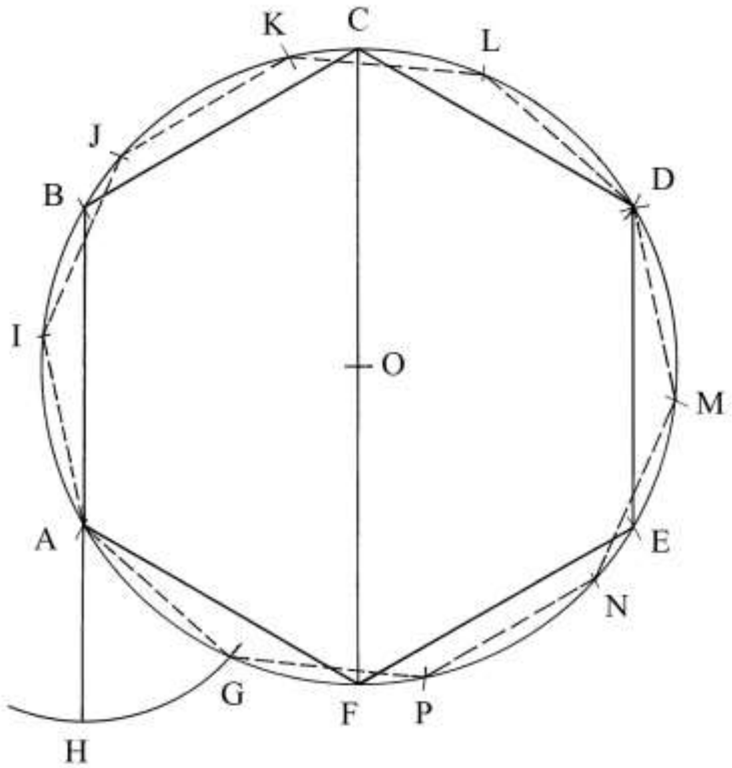
$100 = 3 * 100/3$

$100 = 100$.

Documento XVI

I Documenti da n. XVI al n. XX non sono accompagnati da disegni. Per questi Documenti sono proposte delle interpretazioni grafiche.

Un esagono e un decagono regolari sono inscritti nello stesso cerchio:

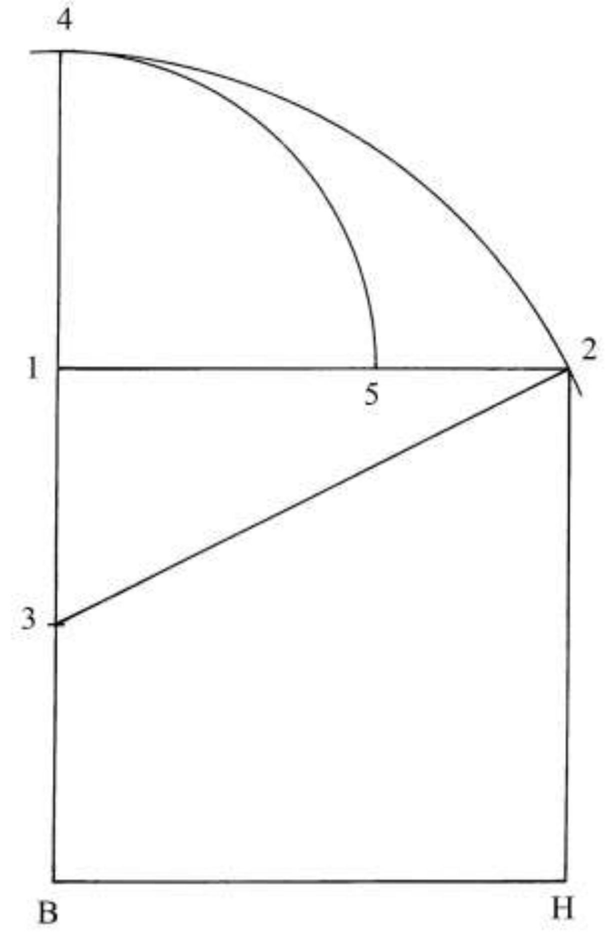


ABCDEF è l’esagono e AIJKLDMNPG è il decagono.

Pacioli afferma che se una linea formata da due segmenti adiacenti lunghi rispettivamente quanto il lato dell’esagono e il lato del decagono è divisa secondo la sezione aurea, la parte maggiore risulta lunga quanto il lato dell’esagono e la parte minore quanto il lato del decagono.

Il segmento BAH è formato da lato BA dell’esagono e dal segmento AH lungo quanto il lato del decagono.

Verifichiamo la tesi di Pacioli:



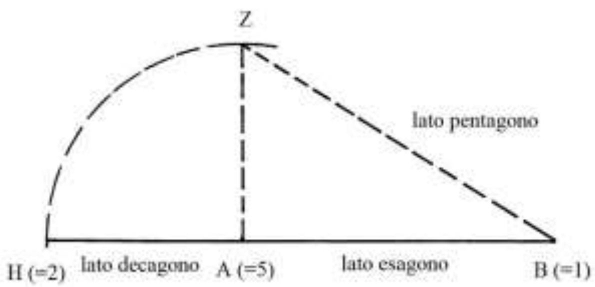
Sul segmento BH costruire il quadrato B-1-2-H e prolungare verso l'alto il lato B-1.

Fissare il punto medio di B-1: è 3. Collegare 3 con 2.

Fare centro in 3 e con raggio uguale alla corda 3-2 tracciare un arco da 2 fino a stabilire il punto 4.

Fare centro nel punto 1 e con raggio 1-4 disegnare un arco da 4 fino a incontrare 1-2 nel punto 5.

Il segmento 1-2 è diviso secondo la *sezione aurea*: lo schema che segue riproduce quello gi à presentato in calce alla seconda figura del Documento XII:



<u>Documento XVII</u>

Tre poligoni regolari sono inscritti nello stesso cerchio: un pentagono, un esagono e un decagono.

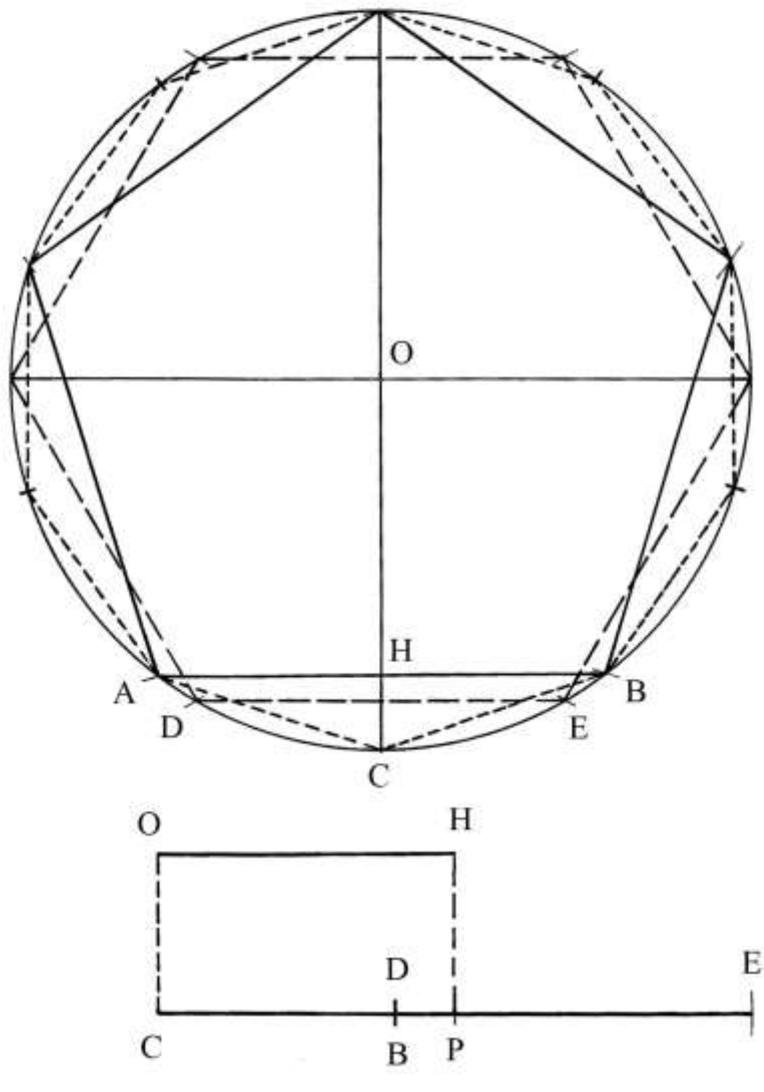
Pacioli afferma che la somma del quadrato della lunghezza del lato dell'esagono (ℓ_6) e quello del quadrato della lunghezza del lato del decagono (ℓ_{10}) è uguale al quadrato della lunghezza del lato del pentagono (ℓ_5):

$$(\ell_6)^2 + (\ell_{10})^2 = (\ell_5)^2.$$

L'affermazione conferma quanto già descritto nella soluzione dei problemi dei Documenti XII e XVI.

Documento XVIII

In un cerchio sono inscritti i soliti tre poligoni circolari: pentagono, esagono e decagono.



La perpendicolare condotta dal centro del cerchio a un lato del pentagono è un *apotema* di questo poligono e nella figura è OH.

La lunghezza di OH è uguale a metà della somma delle lunghezze di un lato dell'esagono e di un lato del decagono.

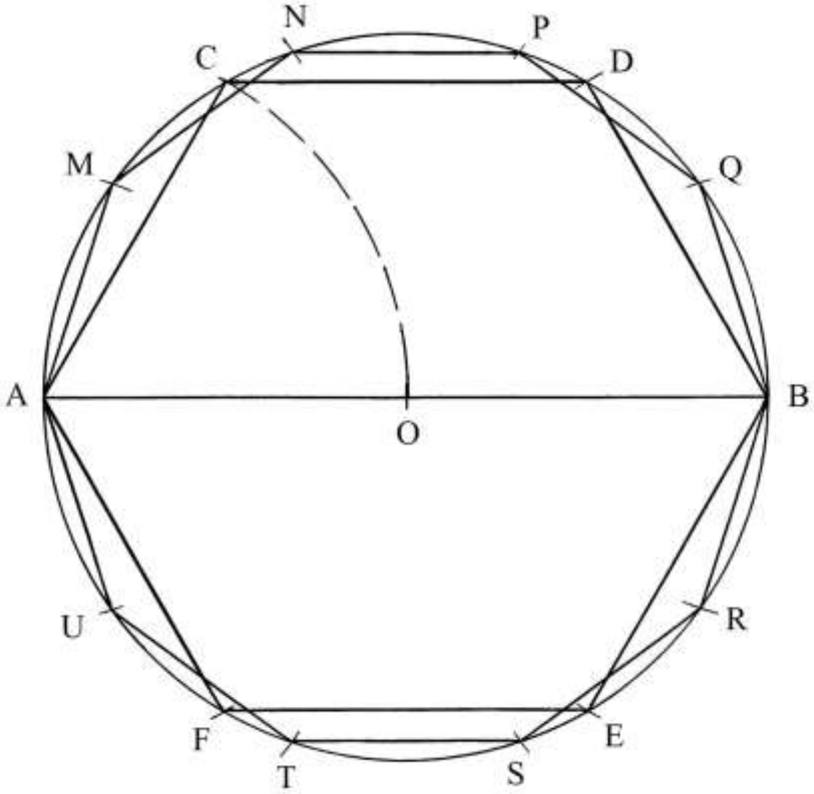
Nella figura i lati del pentagono sono disegnati con linea continua, quelli dell'esagono con linea tratteggiata lunga e quelli del decagono con linea a tratti corti.

In basso sono riportate le lunghezze dell'apotema e sotto le lunghezze di due segmenti adiacenti che formano la linea CE: CB è un lato del decagono e DE è un lato dell'esagono: il punto

P è il medio della somma delle lunghezze dei due lati. CP e PE hanno la stessa lunghezza dell'apotema OH.

<u>Documento XIX</u>

Il lato di un esagono inscritto in un cerchio possiede una proprietà: la parte maggiore della sua sezione aurea è lunga quanto il lato del decagono inscritto nello stesso cerchio.

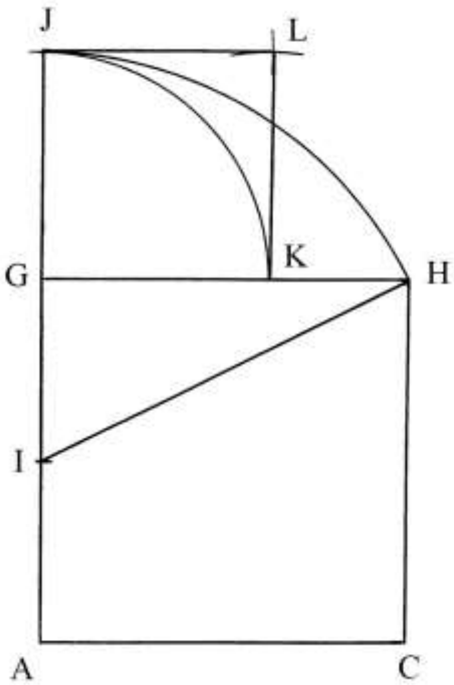


Il cerchio ha centro in O e diametro AB.

Con apertura OA fare centro in A e in B e tracciare gli archi per fissare i punti C, D, E e F, che sono quattro vertici dell'esagono inscritto ACDBEF.

Come è ben noto, nel caso dell'esagono inscritto il raggio del cerchio ha la stessa lunghezza dei lati del poligono.

Il grafico che segue genera la sezione aurea del lato dell'esagono:



Sul lato AC costruire il quadrato AGHC. Prolungare verso l'alto il lato AG. Fissare il punto medio di AG: è I. Collegare I con H.

Fare centro in I e con raggio IH disegnare un arco da H fino a stabilire il punto J. Fare centro in G e con raggio GJ tracciare un secondo arco da J fino a tagliare in K il lato GH.

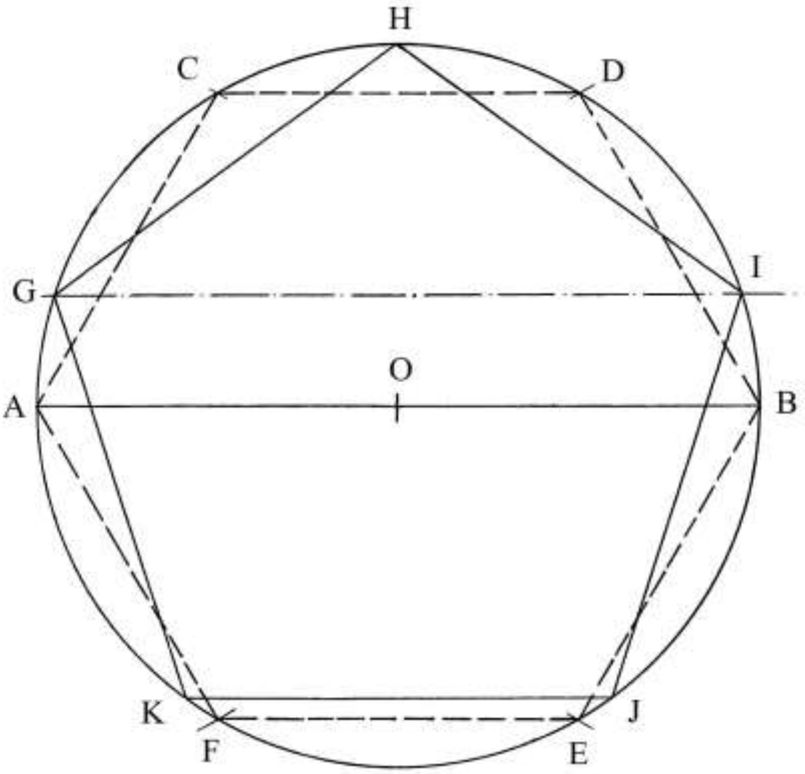
Su GJ e GK costruire il quadrato GJLK.

Il segmento GK è la parte maggiore della sezione aurea di GH, che è lungo quanto il lato AC dell'esagono.

A partire dal vertice A riportare la lunghezza di GK sulla circonferenza: AMNPQBRSTU è il decagono inscritto.

Documento XX

Il quadrato della lunghezza del lato dell'esagono (ℓ_6) è uguale a *un quinto* della somma del quadrato della lunghezza del lato del pentagono (ℓ_5) e del quadrato della lunghezza della *corda pentagonale* (la diagonale d_5). Entrambi i poligoni sono inscritti nello stesso cerchio.

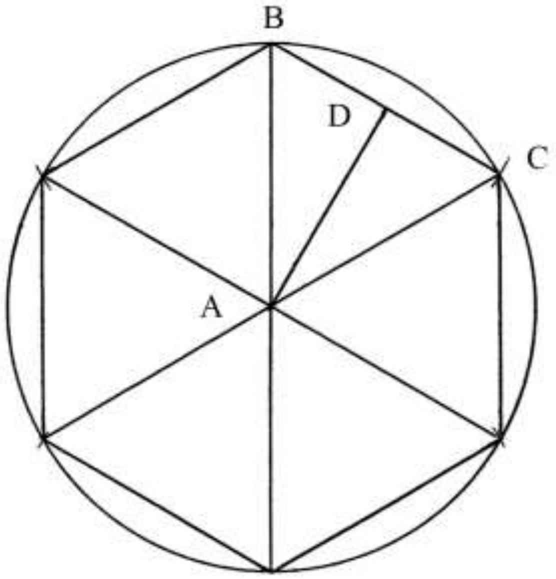


$$(\ell_6)^2 = [(\ell_5)^2 + (d_5)^2]/5$$
$$AC^2 = (GH^2 + GI^2)/5\ .$$

Documento XXI

Pacioli propone due distinte costruzioni *approssimate* dell'*ettagono* inscritto, che sono due varianti del metodo attribuito a Erone di Alessandria (I secolo d.C.).

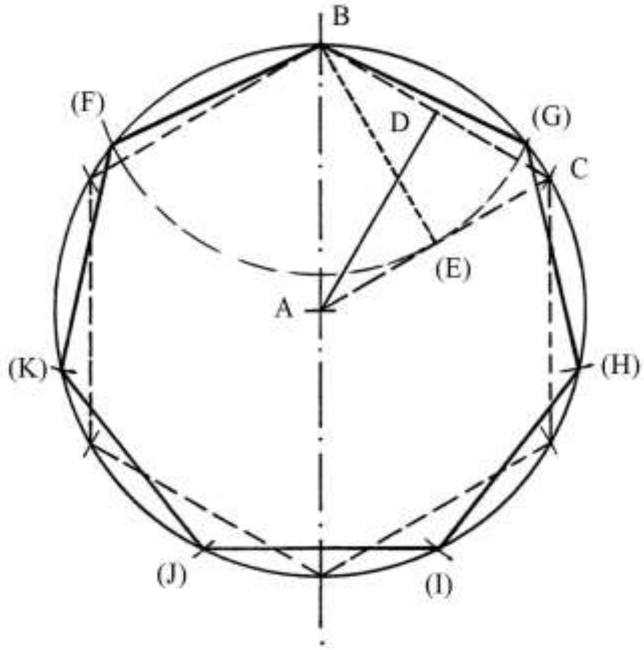
La prima è presentata nella figura che segue:



Nel cerchio di centro A è inscritto un esagono regolare: dal centro A viene tracciata la perpendicolare al lato BC. AD è un'altezza del triangolo equilatero ABC e un apotema dell’esagono: AD è anche la lunghezza approssimata del lato dell’ettagono inscritto nello stesso cerchio.

\- APPROFONDIMENTO -

Pacioli non ha completato la costruzione dell’ettagono. Lo schema che segue conclude l’opera.



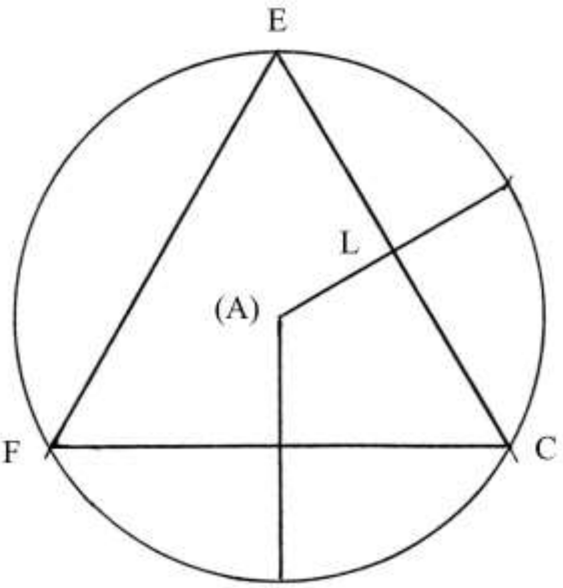
I lati dell’esagono sono disegnati tratteggiati.

Disegnare l’altezza B(E): questo segmento è pure la lunghezza approssimata del lato dell’ettagono.

Fare centro in B e con raggio B(E) tracciare un arco che taglia la circonferenza nei punti (F) e (G). A partire da questi ultimi riportare sulla circonferenza la lunghezza di B(E): B(G)(H)(I)(J)(K)(F) è l’ettagono approssimato inscritto.

\- -

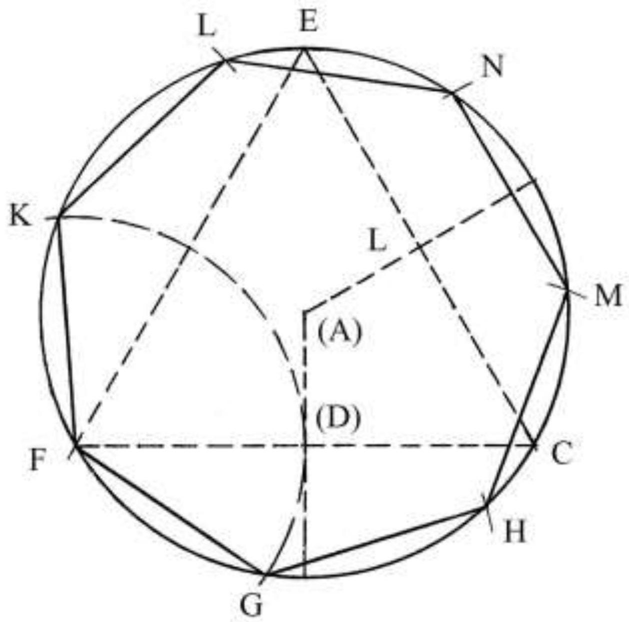
Il secondo metodo offerto da Pacioli inscrive nel cerchio di centro (A) il triangolo equilatero EFC:



Dal centro (A) è disegnato un raggio che taglia EC nel suo punto medio, L. EL e LC sono due lunghezze approssimate dei lati dell'ettagono.

Pacioli indica sulla circonferenza soltanto le posizioni dei vertici dell'ettagono ma non disegna il poligono.

Nel grafico che segue è riprodotto il precedente schema: i lati del triangolo equilatero sono disegnati tratteggiati.

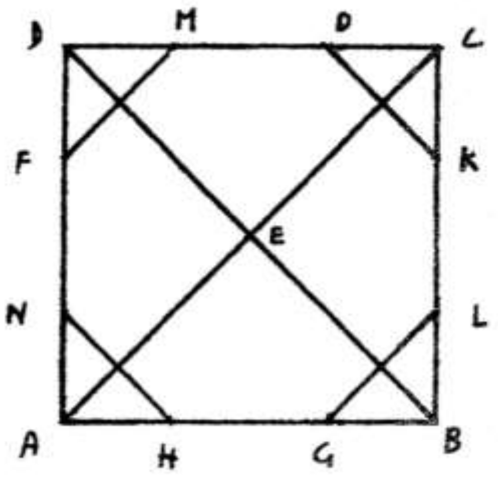


Nota: Pacioli usa *due* volte la lettera "L"

Le posizioni dei vertici indicati da Pacioli sono così ricostruite: fare centro in F e con raggio F(D) tracciare un arco che taglia la circonferenza nei punti K e G. Riportare la lunghezza di FG sulla circonferenza: FKLNMHG è l'ettagono regolare inscritto.

Documento XXII

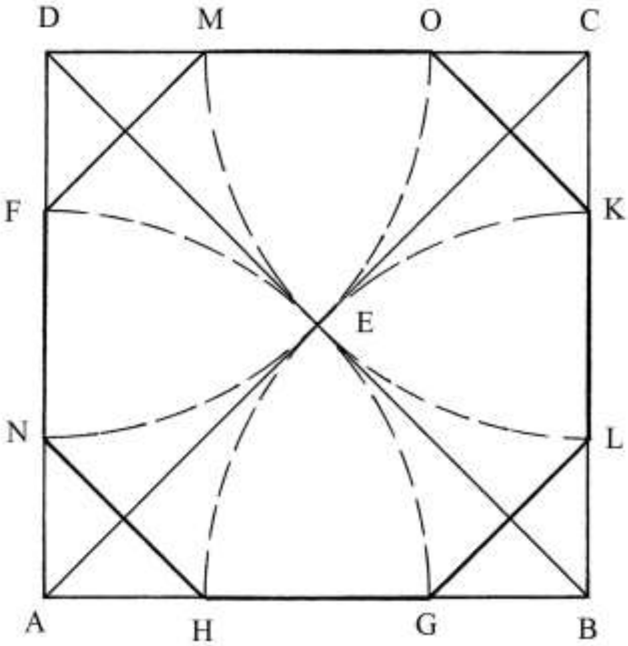
Nel volume contenente la trascrizione del trattato curata da Maria Garlaschi Peirani e da Augusto Marinoni, a pagina 446 è contenuto il grafico che è qui riprodotto:



Doc. XXI

Il Documento XXI si riferisce alla costruzione dell’ettagono: la sigla è un errore di Pacioli o del copista.

Lo schema che segue ricostruisce la soluzione impiegata dall’Autore:



Costruire il quadrato ABCD e tracciare le due diagonali AC e BD che si intersecano nel centro E.

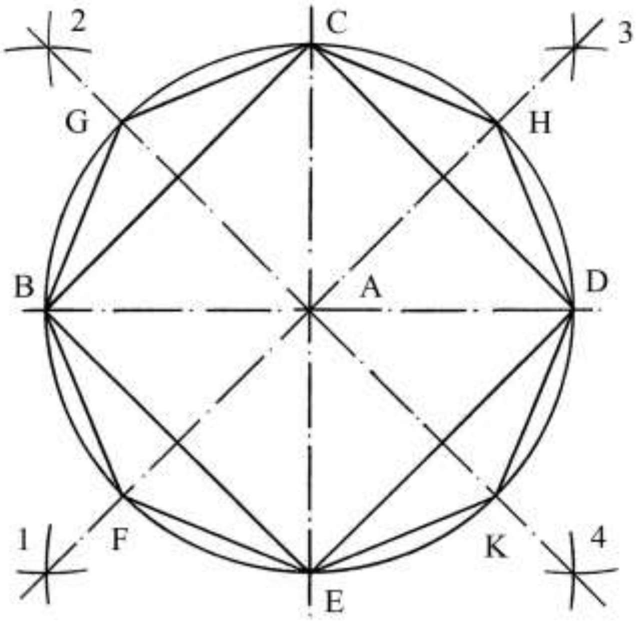
Con raggio AE fare centro nei vertici A, B, C e D e disegnare quattro archi passanti per il centro E: essi tagliano i lati del quadrato negli otto vertici dell’ottagono.

FMOKLGHN è il poligono inscritto nel quadrato ABCD.

Nello schema di Pacioli non sono disegnati i quattro archi di circonferenza.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

La seconda soluzione inizia con l'inscrizione del quadrato BCDE nel cerchio di centro A e raggio AB.



Con lo stesso raggio AB fare centro nei quattro vertici del quadrato e tracciare otto archi che si intersecano all'esterno del cerchio nei punti 1, 2, 3 e 4.

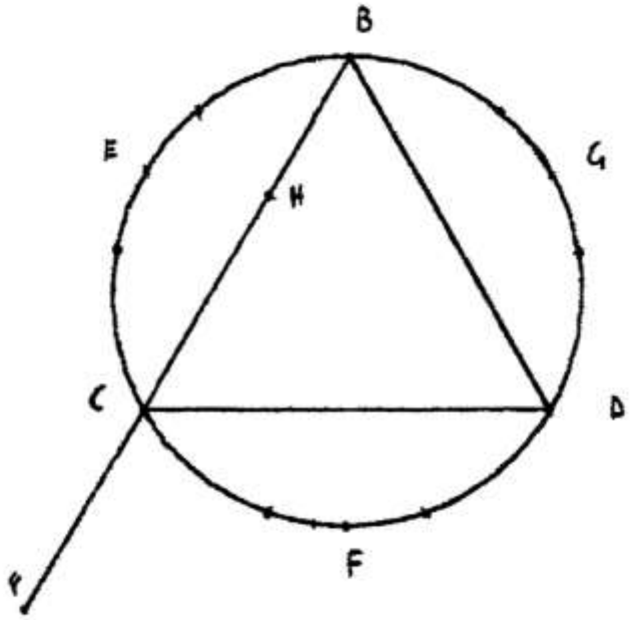
Per questi ultimi passano le rette 1-3 e 2-4 che sono le bisettrici dei quattro angoli retti al centro A.

CHDKEFBG è l'ottagono inscritto nel cerchio.

Documento XXIII

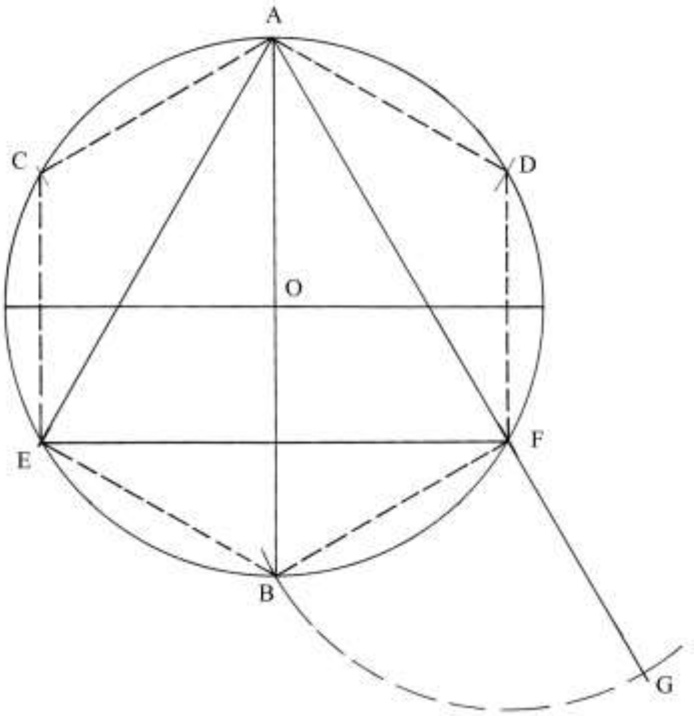
Per Pacioli il lato dell'*ennagono* è la quarta parte della lunghezza di un segmento formato da un lato del triangolo equilatero e da un lato dell'esagono inscritti nello stesso cerchio:

$$\ell_9 = (\ell_3 + \ell_6)/4.$$



Doc. XXIII

Il grafico che segue descrive il primo passo della costruzione dell'ennagono:



Rispetto allo schema originale di Pacioli sono state cambiate le lettere maiuscole assegnate ai vertici.

Tracciare il diametro verticale AB e la circonferenza di centro O e raggio OA = OB.

Con apertura OA fare centro in A e in B e disegnare gli archi che tagliano la circonferenza nei punti C, D, E e F.

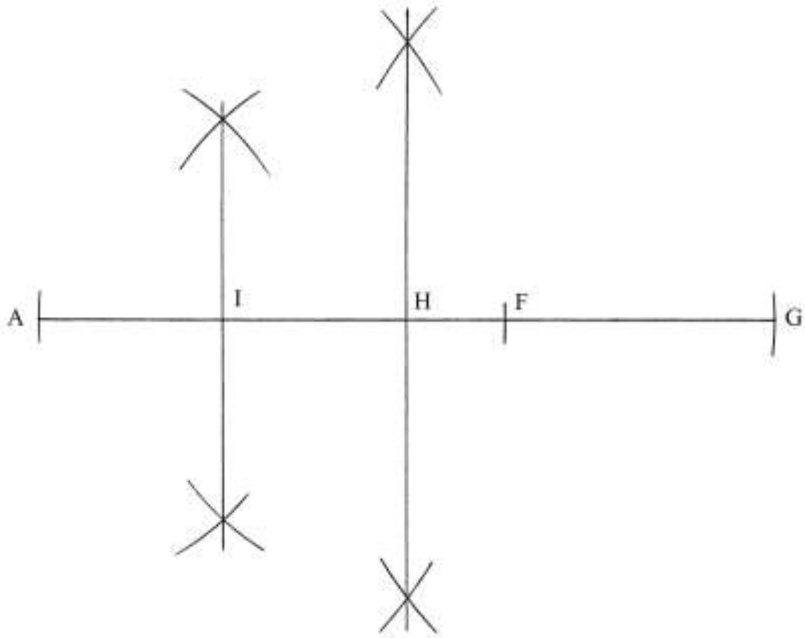
AEF è un triangolo equilatero e ADFBEC è l'esagono entrambi inscritti nel cerchio.

Prolungare verso il basso il lato AF e fare centro in F con raggio FB: l'arco uscente da B incontra il prolungamento di AF nel punto G.

Il segmento AG è lungo:

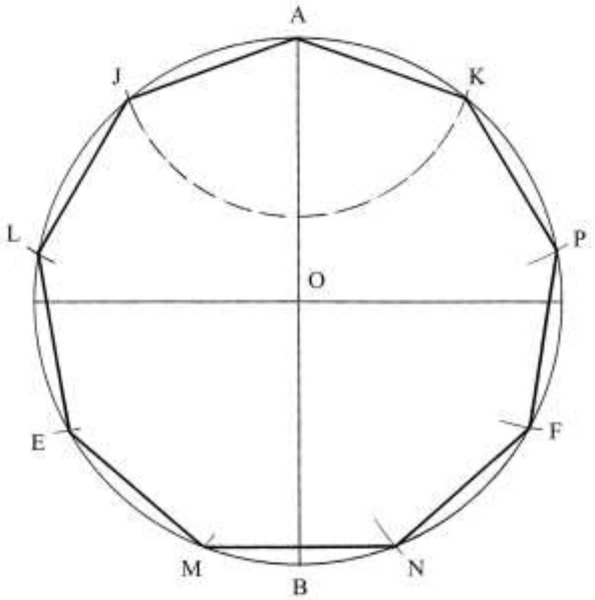
$$AG = AF + FG = AF + FB = \text{lato triangolo} + \text{lato esagono} = (\ell_3 + \ell_6).$$

Occorre ora dividere per *quattro* la lunghezza di AG: a ciò provvede la costruzione degli assi contenuta nella figura:



AH è il punto medio di AG e AI è il punto medio di AH: AI e AH sono lunghi la *quarta* parte di AG.

Con la stessa apertura di compasso OA usata nel primo schema, disegnare una circonferenza con centro in O:



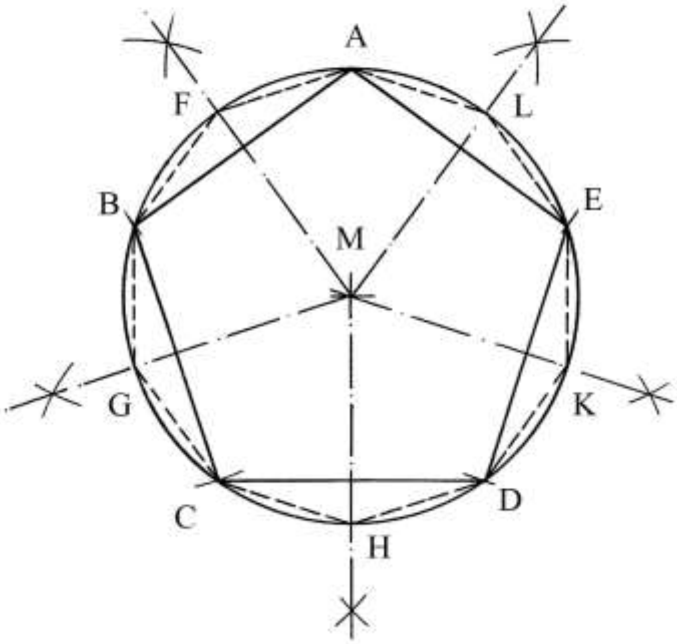
A partire dal vertice A riportare sulla circonferenza la lunghezza di AI: AKPFNMELJ è l'ennagono regolare inscritto.

Benché il poligono sia approssimato, il risultato è abbastanza preciso.

Documento XXIIII

Lo schema è erroneamente indicato come XXIII e non XXIIII come accade nel testo.

Il decagono inscritto è ottenuto partendo dalla costruzione del pentagono regolare inscritto.



M è il centro del cerchio e MA è il raggio della circonferenza.

ABCDE è il pentagono inscritto.

Occorre tracciare le bisettrici dei cinque angoli al centro M.

Fare centro nei vertici del pentagono e disegnare dieci archi con lo stesso raggio: per le loro intersezioni passano le semirette uscenti da M che dividono gli angoli e incontrano la circonferenza in ulteriori cinque punti.

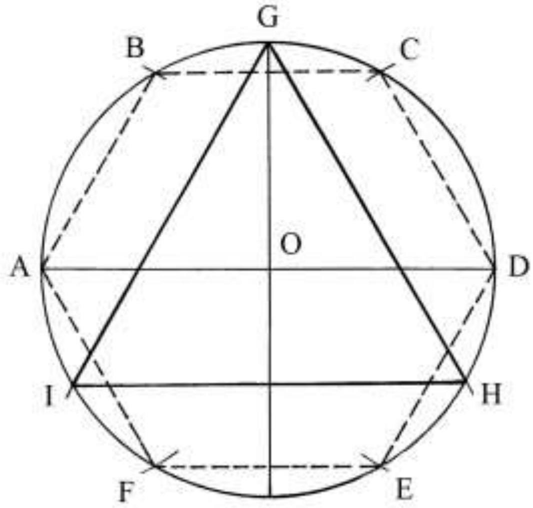
ALEKDHCGBF è il decagono regolare inscritto.

Documento XXV

L'*endecagono* inscritto può essere ottenuto soltanto con una costruzione approssimata.

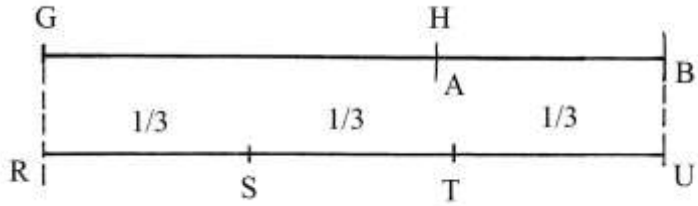
Per Pacioli la lunghezza del lato di questo poligono è uguale alla parte maggiore della sezione aurea di

$(\ell_3 + \ell_6)/3$, dove ℓ_3 è la lunghezza del lato di un triangolo equilatero e ℓ_6 quella del lato di un esagono, entrambi inscritti nello stesso cerchio.



In basso riportare le lunghezze di GH e di AB per formare due segmenti adiacenti di lunghezza

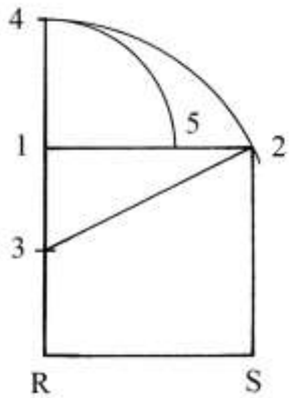
$(GH + AB) = (\ell_3 + \ell_6)$.



Dividere per *tre*: i segmenti RS, ST e TU hanno lunghezza uguale a *un terzo*.

Occorre determinare la sezione aurea della lunghezza di RS: la sua parte maggiore è la lunghezza del lato dell'endecagono.

Sul segmento RS costruire il quadrato R-1-2-S:

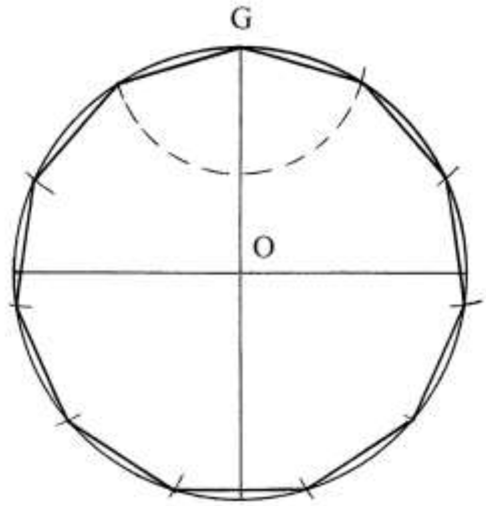


Prolungare verso l'alto il lato R-1. Fissare il punto medio di R-1: è 3. Fare centro in 3 e con raggio 3-2 tracciare un arco da 2 fino a 4.

Con centro in 1 e raggio 1-4 disegnare un arco da 4 a 5: il segmento 1-5 è la parte maggiore della sezione aurea di 1-2 e di RS.

Tracciare una seconda circonferenza con centro in O e raggio OG, uguale a quello della prima.

A partire da G riportare sulla circonferenza la lunghezza di 1-5:



La figura contiene l’endecagono regolare approssimato inscritto nel cerchio di centro O.

Documento XXVI

Anche il *tridecagono* inscritto, il poligono avente 13 lati, non può essere costruito con esattezza: le soluzioni esistenti sono soltanto approssimate.

Pacioli propone una sua procedura, senza allegare alcuno schema. Il lato del poligono è la parte maggiore della sezione aurea dei 5/8 del diametro del cerchio circoscritto.

Nel suo articolo citato in bibliografia, Nick Mackinnon legge il testo di Pacioli come segue:

$$\ell_{11} = (\ell_3 + \ell_6)/(3*\phi).$$

Apriamo una parentesi per analizzare l’ipotesi a suo tempo avanzata dal compianto matematico Amedeo Agostini.

- APPROFONDIMENTO -

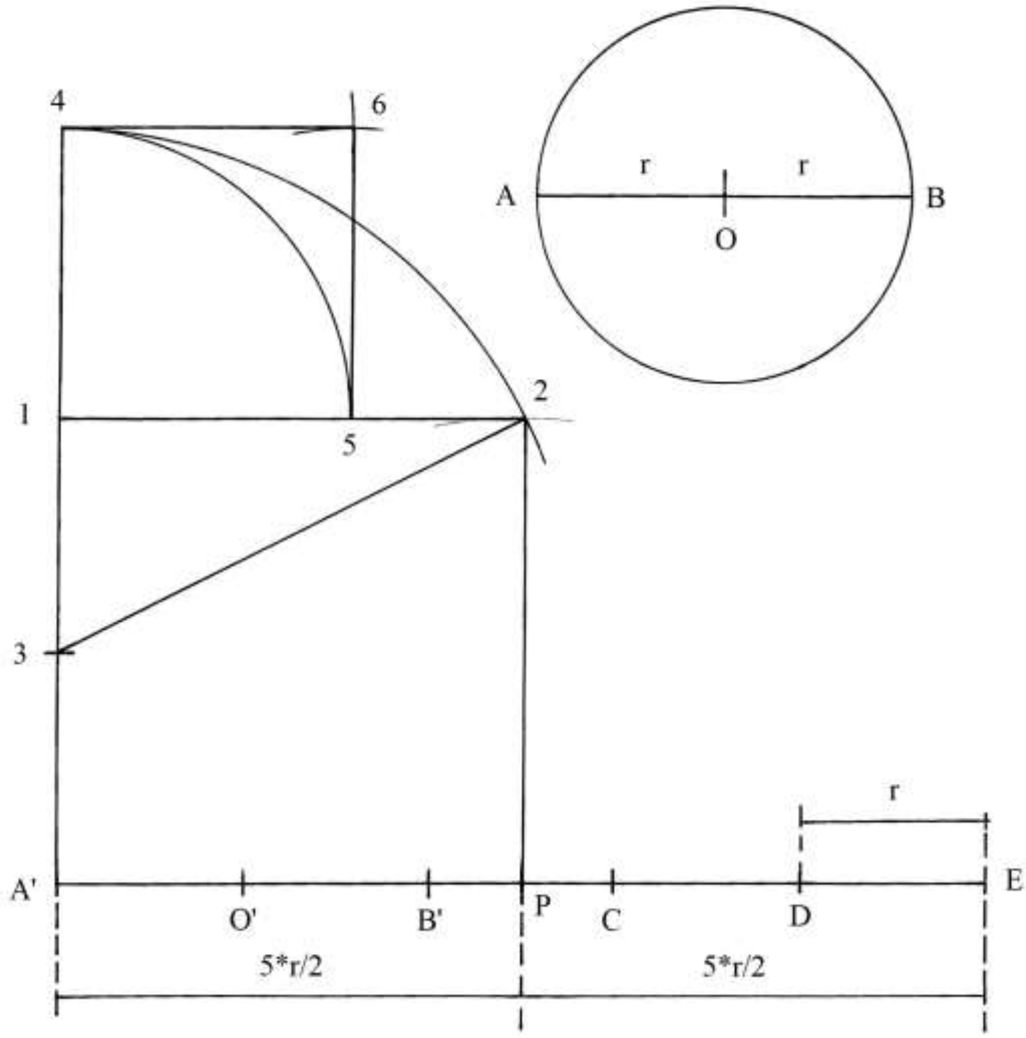
L’ipotesi Agostini

Amedeo Agostini (1892-1958), professore di Geometria analitica presso l’Accademia Navale di Livorno, e pure professore incaricato nell’Università di Pisa, nell’articolo citato in bibliografia afferma che la lunghezza del lato del tridecagono da lui letta nel manoscritto di Pacioli, ℓ_{13}, *è data dalla minore parte della sezione aurea di 5r/2,* dove *r* è da ritenersi la lunghezza del raggio del cerchio in cui è inscritto questo poligono.

Un altro Autore ripropone alla lettera l’affermazione dell’Agostini: Quirino Bortolato, a p. 57 del volume “*Atti e Memorie dell’Ateneo di Treviso*”, n. 27, 2009/2010. Nel suo contributo egli cita espressamente l’articolo dell’Agostini (“1509-2009: una riflessione in occasione dei 500 anni della *Divina Proportione* di Luca Pacioli”, pp. 45-70).

Vediamo le conseguenze dell’applicazione dell’ipotesi dell’Agostini alla costruzione del *tridecagono.*

AB è il diametro del cerchio in cui deve essere il poligono, O è il centro e OA e OB sono due raggi lunghi *r*.



Tracciare una retta orizzontale e riportarvi *cinque* volte la lunghezza del raggio *r*. il segmento definito è A’O’B’CDE.

Il punto P divide quel segmento in due parti uguali:

A’P = PE = 5*r/2.

Sul segmento A’P costruire il quadrato A’-1-2-P. Prolungare verso l’alto il lato A’-1.

Fissare il punto medio di A’-1: è 3.

Collegare 3 con 2.

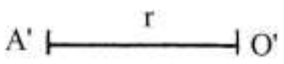
Fare centro in 3 e con raggio 3-2 disegnare un arco da 2 fino a incontrare il prolungamento nel punto 4.

Fare centro in 1 e con raggio 1-4 tracciare un arco da 4 fino a tagliare in 5 il lato 1-2.

Costruire il quadrato 1-4-6-5.

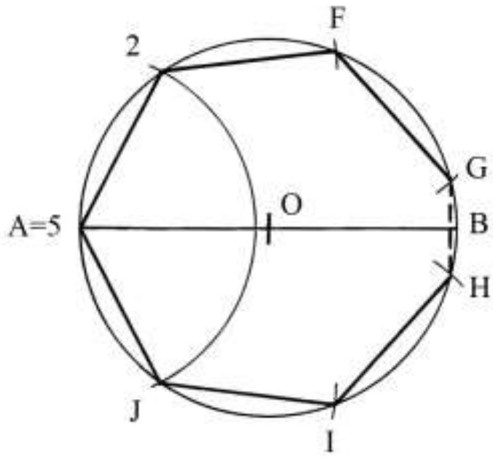
Il segmento 1-5 è la parte maggiore della sezione aurea di 1-2 e quello 5-2 è la sua *parte minore*, ciò che interessa per costruzione del tridecagono perché è la lunghezza dei suoi lati.

Lo schema che segue confronta la lunghezza del raggio del cerchio, A’O’ = r, con quella della parte minore della sezione aurea sopra ricavata, 5’-2’:



La parte minore (5-2) = (5’-2’) sarebbe lunga quanto i lati del poligono: ciò è impossibile perché il lato è poco più corto del raggio del cerchio.

Riportiamo la lunghezza del segmento 5-2 sulla circonferenza originaria di centro O, a partire dal vertice A:



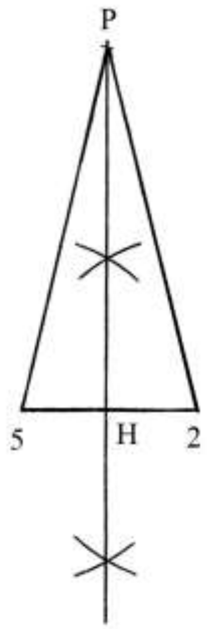
Il poligono che ne risulta, A-2-FGHIJ, ha sei lati di uguale lunghezza e il settimo, GH, risulta assai più corto: si tratta di un ettagono non regolare invece che di un tridecagono.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Procediamo con la considerazione dell’*apotema a* del tridecagono; la sua lunghezza è data da:

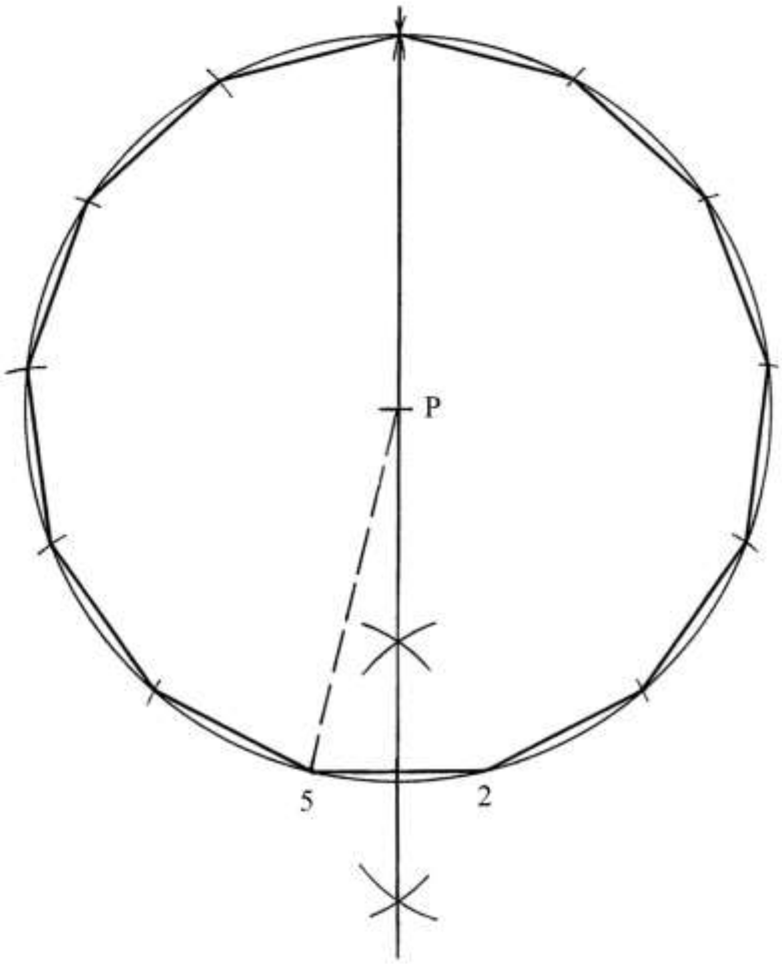
$a \approx 2{,}0286 * \text{lato}.$

Nello schema che segue, (5-2) è il lato del poligono e PH è l’apotema:



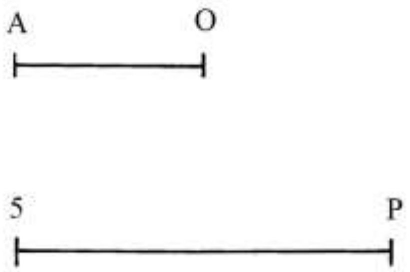
5-P-2 è uno dei tredici isosceli che compongono il tridecagono.

Disegnare la circonferenza di centro P e raggio P-5 = P-2. Riportare su di essa la lunghezza di 5-2:



La figura presenta il tridecagono approssimato inscritto.

Infine, lo schema che segue confronta la lunghezza del raggio OA con quella del raggio 5-P:

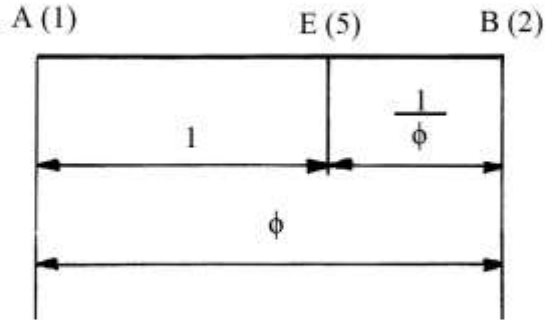


Il secondo raggio è lungo approssimativamente il doppio di AO.

- APPROFONDIMENTO -

Riguardo alla divisione del precedente segmento (1-2), è utile approfondire i rapporti fra i suoi tre componenti (1-2), (1-5) e (5-2).

Nella figura i tre punti 1, 5 e 2 sono rinominati rispettivamente in A, E e B, per semplicità:



I rapporti fra le lunghezze dei tre segmenti AB, AE e EB sono:

AB : AE = (AE + EB) : AE

Chiamando *x* il rapporto

AB/AE = x, modifichiamo la precedente proporzione:

AB/AE = (AE + EB)/AE = AE/AE + EB/AE = 1 + EB/AE.

Ma AB/AE = x, quindi: x = 1 + EB/AE.

La frazione EB/AE può essere scritta come:

EB/AE = 1/(EB/AE).

Ma EB/AE = AB/AE = x.

La precedente espressione diviene:

AB/AE = 1 + EB/AE → $x = 1 + 1/x$

$x^2 = x + 1$ → $x^2 - x - 1 = 0$

Questa equazione di secondo grado ha due radici: x_1 e x_2:

$$x_{1,2} = [1 \pm \sqrt{(1+4)}]/2 = \begin{cases} x_1 = (1+\sqrt{5})/2 = \phi \text{ (sezione aurea)} \\ x_2 = (1-\sqrt{5})/2 \end{cases}$$

La seconda radice, x_2, è:

$(1 - \sqrt{5})/2 = -0{,}618033988\ldots = -1/\phi$.

L'espressione $\sqrt{5}$ è un numero *irrazionale* il cui valore può essere determinato con una semplice costruzione geometrica.

Il valore approssimato di ϕ è:

ϕ = (1 + √5)/2 = 1,618033989…, ma per gli usi pratici viene approssimato per difetto a 1,618.

Se la lunghezza convenzionale di AE è fissata in 1 unità, quella di AB vale ϕ e quella di EB è:

EB = AB – AE = ϕ – 1 = 1/ϕ.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

A questo punto è opportuno richiamare alcune proprietà della costante ϕ:

$$1/\phi = \phi - 1$$
$$\phi = 1 + 1/\phi$$
$$\phi^2 = \phi + 1$$
$$\phi^3 = \phi^2 * \phi = (\phi + 1) * \phi = \phi^2 + \phi$$
$$\phi^4 = \phi^3 + \phi^2$$
$$\phi^5 = \phi^4 + \phi^3$$
$$\phi^6 = \phi^5 + \phi^4$$

In generale:

$$\phi^n = \phi^{(n-1)} + \phi^{(n-2)} = \phi * \phi^{(n-1)}.$$

In termini aritmetici si hanno i seguenti valori:

ϕ = (1 + √5)/2

ϕ + 1 = (1 + √5)/2 + 1 = (3 + √5)/2

$\phi^2 = [(1 + \sqrt{5})/2]^2 = (1 + 2*\sqrt{5} + 5)/2 = (3 + \sqrt{5})/2$

Fra le curiosità che questo numero manifesta vi sono le uguaglianze di alcune parti decimali:

* ϕ ≈ 1,*618039887...*
* 1/ϕ ≈ 0,*618039887...*
* ϕ^2 ≈ 2,*618039887...*

- -

L'ipotesi di Honsell e Bagni

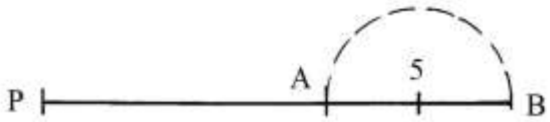
A p. 154 del testo di Furio Honsell e di Giorgio Tomaso Bagni ("Curiosità e divertimenti con i numeri"), gli Autori così spiegano la costruzione del tridecagono:

> Nel "XXVI Documento" Pacioli afferma che il lato del poligono regolare di tredici lati può essere fatto coincidere con i 5/4 del lato dell'esagono regolare inscritto nella stessa circonferenza moltiplicato per
>
> $$1 - \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

Honsell e Bagni citano il lato dell'esagono inscritto: questo ha la stessa lunghezza del raggio del cerchio in cui è inscritto.

Applichiamo la proposta di Honsell e Bagni a un cerchio che ha raggio lungo P-5, uguale a quello del caso precedente.

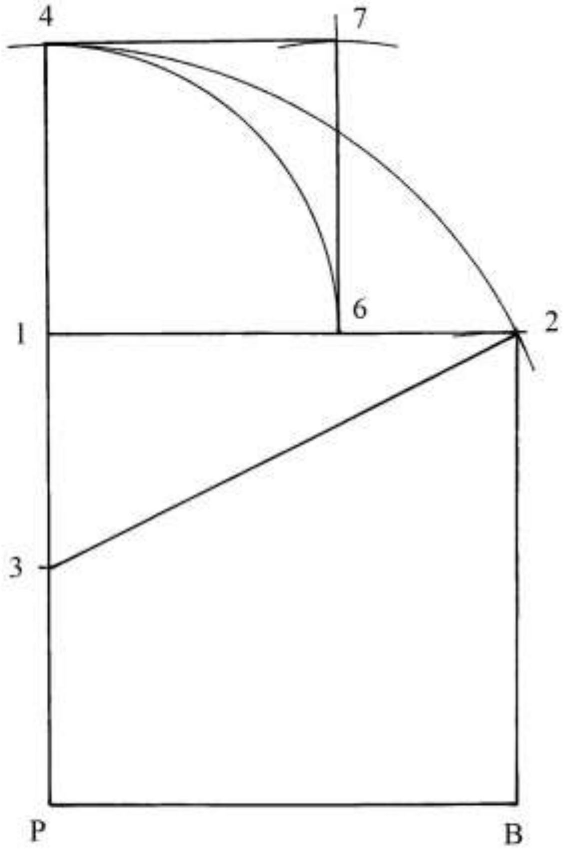
Disegnare il raggio P-5 e prolungare verso destra:



Determinare la posizione del punto A, a distanza (5-A) uguale alla lunghezza di *un quarto* di quella di P-5: fare centro in 5 e con raggio 5-A tracciare una semicirconferenza da A fino a stabilire il punto B.

La lunghezza di PB è uguale a 5/4 di quella di P-5.

Sul lato PB costruire il quadrato P-1-2-B e prolungare verso l’alto P-1:



Fissare il punto medio del lato P-1: è 3.

Collegare 3 con 2. Fare centro in 3 e con raggio 3-2 disegnare un arco da 2 fino a fissare il punto 4. Fare centro in 1 e con raggio 1-4 tracciare un arco da 4 fino a incontrare il lato 1-2 nel punto 6.

Costruire il quadrato 1-4-7-6.

Il segmento (6-2) è la parte minore della sezione aurea di (1-2) = PB ed è anche la lunghezza del lato del tridecagono.

L’espressione

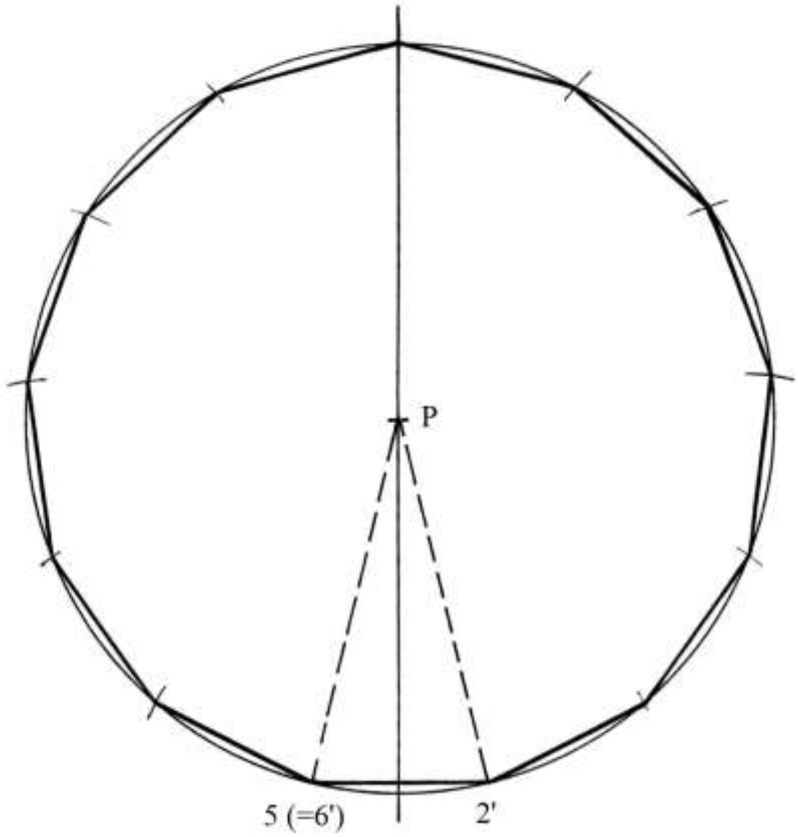
$$1-\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

può essere così trasformata:

(2 – √5 + 1)/2 = (1 – √5)/2 = – 1/ϕ.

In valore assoluto |1/ϕ| è la lunghezza convenzionale della parte minore della sezione aurea di (1-2).

Tracciare una retta verticale e scegliere la posizione del centro P:



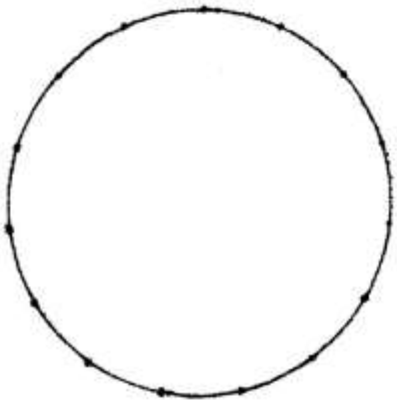
Con raggio P-5 fare centro in P e disegnare una circonferenza.

Stabilire il punto 5(=6') e da esso riportare la lunghezza di (6-2) ricavata dalla precedente figura. È così disegnato il tridecagono di centro P: esso coincide con quello ricavato nel precedente paragrafo.

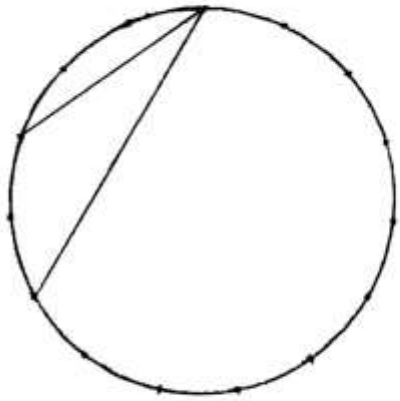
- -

Documento XXVII

Il pentadecagono descritto in questo Documento è corredato da due schemi, il primo dei quali è erroneamente attribuito al Documento XXVI:



Doc. XXVI

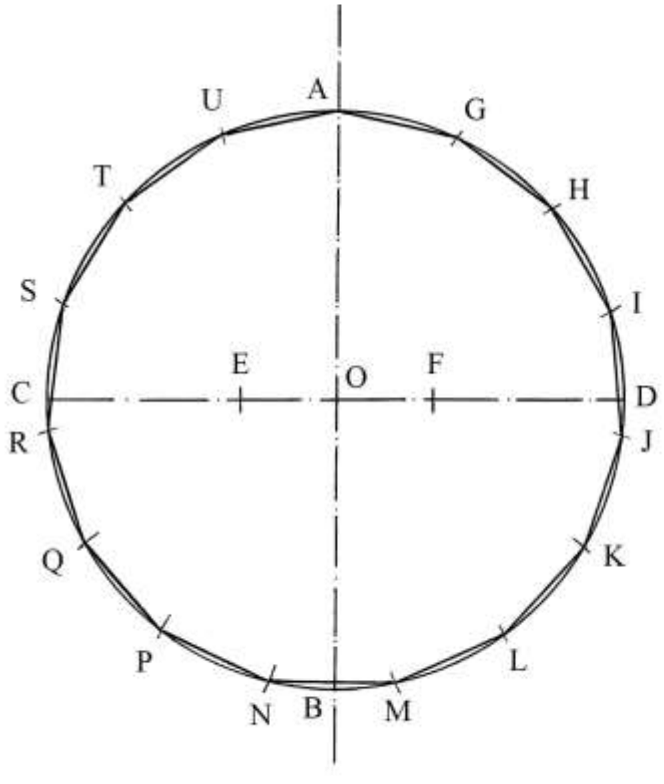


Doc. XXVII

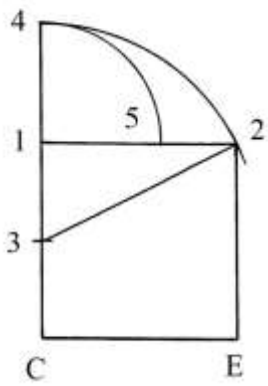
Pacioli propone due diverse procedure:

1. Dividere la lunghezza di *un terzo* del diametro del cerchio secondo la sezione aurea: la parte maggiore è la lunghezza del lato del pentadecagono.
2. La seconda soluzione è assai più semplice e chiede l'inscrizione nello stesso cerchio di un triangolo equilatero e di un pentagono regolare.

La prima procedura è presentata nello schema che segue:



Dividere il diametro CD in *tre* parti uguali: CE = EF = FD.
Con la procedura già utilizzata in precedenza costruire la sezione aurea del segmento CE:

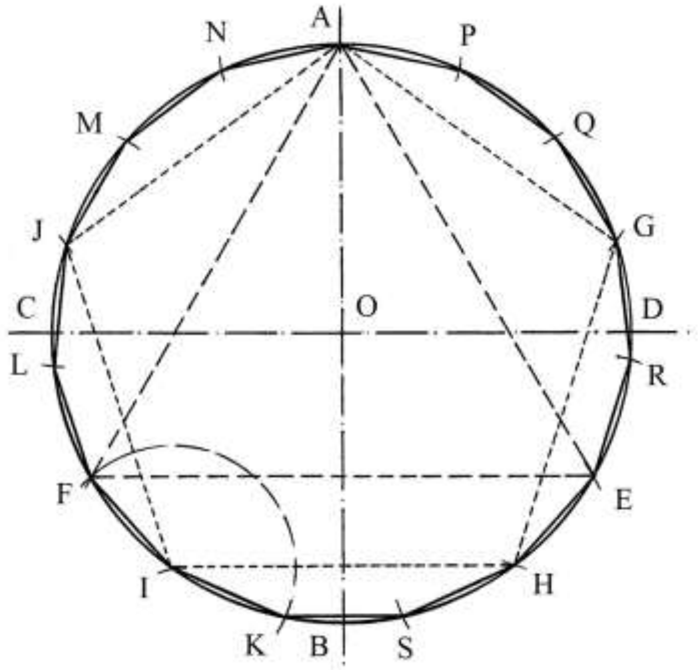


Il segmento 1-5 è la parte maggiore della sezione aurea di CE ed è la lunghezza del lato del pentadecagono che va riportata sulla circonferenza.

AGHIJKLMNPQRSTU è il pentadecagono inscritto.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

La seconda soluzione è presentata nello schema che segue:



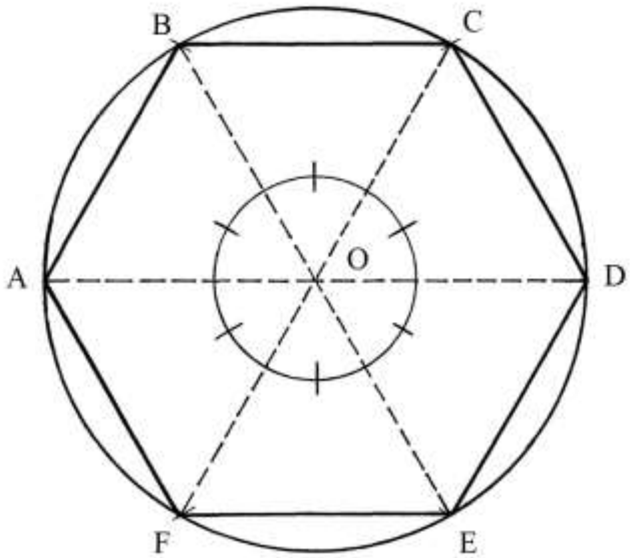
Nel cerchio di centro O sono presenti i diametri fra loro perpendicolari AB e CD e vi sono inscritti due poligoni regolari: il triangolo equilatero AEF e il pentagono AGHIJ.

Le corde FI e HE sono due lati del pentagono: riportare la loro lunghezza sulla circonferenza.

APQGREHSKIFLJMN è il poligono cercato.

- APPROFONDIMENTO -

Un poligono regolare inscritto in un cerchio può essere scomposto in triangoli isosceli aventi il vertice comune nel centro O del cerchio, come è il caso dell’esagono:



I sei raggi che collegano il centro con i vertici dell’esagono dividono questo poligono in sei triangoli che oltre che essere isosceli sono anche equilateri: gli angoli nel centro O hanno tutti uguale ampiezza che è uguale a 360°/6 = 60°.

Il numero dei triangoli che scompongono un poligono regolare inscritto è uguale al numero *n* dei suoi lati.

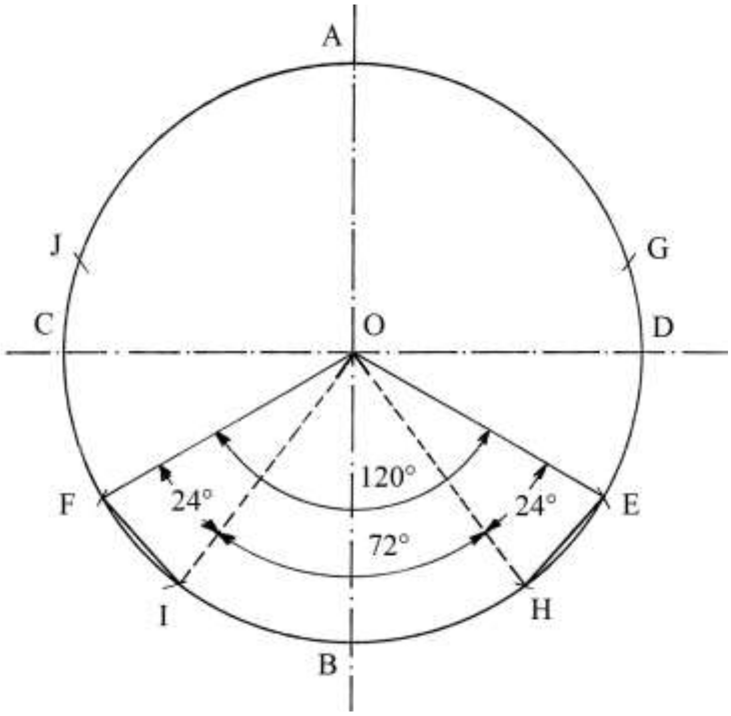
L’ampiezza α dell’angolo al centro di un singolo triangolo è data da:

$\alpha = 360°/n$.

La tabella che segue contiene i dati relativi ad alcuni poligoni regolari inscritti:

Poligoni	Numero lati *n*	Ampiezza angolo α al centro
Triangolo equilatero	3	$\alpha = 360°/3 = 120°$
Quadrato	4	$\alpha = 360°/4 = 90°$
Pentagono	5	$\alpha = 360°/5 = 72°$
Esagono	6	$\alpha = 360°/6 = 60°$
Pentadecagono	15	$\alpha = 360°/15 = 24°$

Lo schema che segue spiega perché le corde FI e HE sono due lati del pentadecagono:



L’angolo FOE è sotteso da un lato del triangolo equilatero ed è ampio 120°. L’angolo IOH è l’angolo al centro di un triangolo isoscele che compone il pentagono regolare ed è ampio 72°.

Gli angoli FOI e HDE sono angoli al centro di due dei quindici triangoli isosceli che formano il pentadecagono e la loro ampiezza è:

FOI = HOE
FOE – IOH = FOI + HOE
120° - 72° = FOI + HOE
FOI = HOE = (120° - 72°)/2 = 24°.

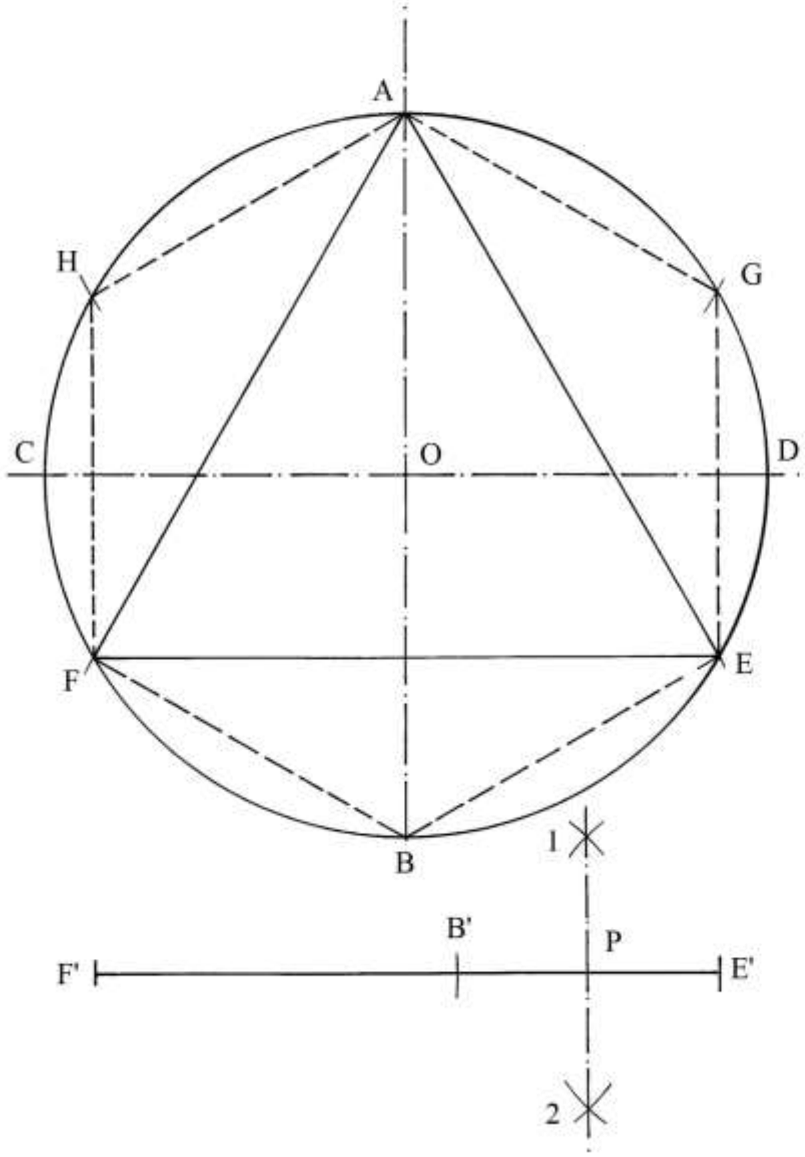
- -

Documento XXVIII

Questo Documento affronta la costruzione dell’eptadecagono, il poligono di 17 lati, approssimato.

Il testo di Pacioli contiene una lacuna che il già citato Nick Mackinnon interpreta: egli ritiene che la lunghezza del lato di questo poligono sia, con buona approssimazione, uguale alla *metà* della differenza fra le lunghezze del lato del triangolo equilatero (ℓ_3) e del lato dell’esagono (ℓ_6) inscritti nello stesso cerchio:

$$\ell_{17} = (\ell_3 - \ell_6)/2.$$



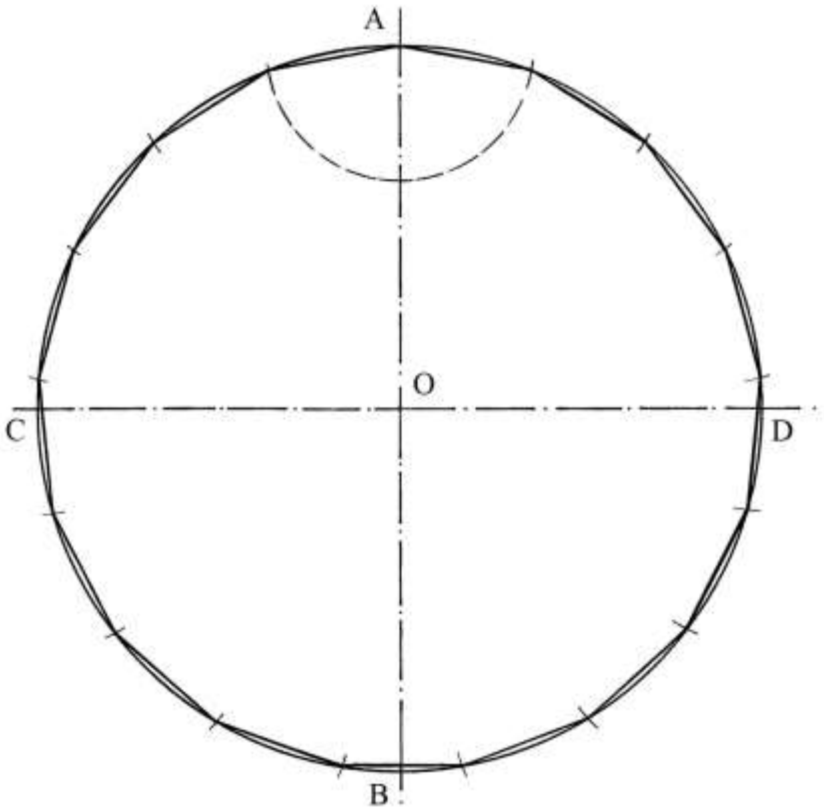
Nel cerchio di centro O e raggio OA sono tracciati i due diametri perpendicolari AB e CD.

AEF è il triangolo equilatero e AGEBFH è l’esagono regolare, ambedue inscritti nello stesso cerchio.

Su di una retta orizzontale riportare la lunghezza di un lato del triangolo equilatero, F’E’: dal punto F’ segnare la lunghezza F’B’ del lato BE dell’esagono.

Il segmento B’E’ è la differenza fra le lunghezze dei lati dei due poligoni.

Costruire l’asse del segmento B’E’ passante per 1 e per 2: B’P = PE’ è la lunghezza del lato dell’eptagono che è riportata lungo la circonferenza a partire dal vertice A:



La costruzione è approssimata: Mackinnon stima che la lunghezza del lato dell'eptadecagono ottenuta con questo metodo sia:

$\ell_{17} \approx 0{,}366$ * raggio cerchio.

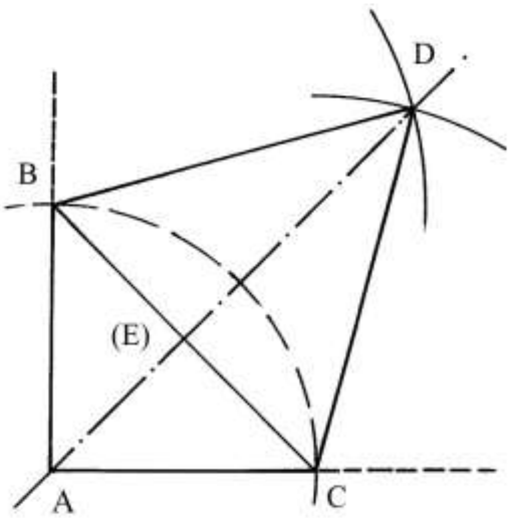
A suo avviso il valore esatto della costante da impiegare nella formula è 0,3675: la differenza è minima.

La costruzione dell'*eptadecagono regolare* inscritto è dovuta al matematico tedesco Carl Friedrich Gauss (1777-1855) che la propose nel 1796.

Documento XXIX

Un angolo retto, ABC, deve essere diviso in due parti uguali.

In primo luogo occorre accertarsi che le lunghezze dei lati AB e AC siano uguali:



A questo scopo è sufficiente tracciare, con centro in A, un arco da B a C.

BC è la corda sottesa dal relativo arco. Fare centro in B e in C e con raggio BC disegnare due archi che si incontrano nel punto D. BDC è un triangolo equilatero.

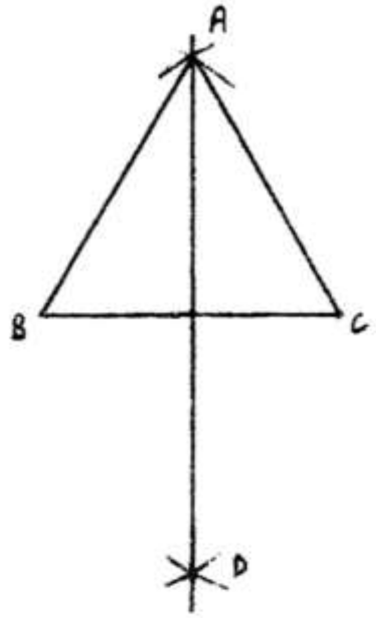
Per D e per A passa la bisettrice dell'angolo BAC.

D(E) è un'altezza del triangolo ma è anche la bisettrice dell'angolo BDC e l'asse di BC. (E) è il punto medio del lato BC.

Documento XXX

Il segmento BC deve essere diviso in due parti uguali.

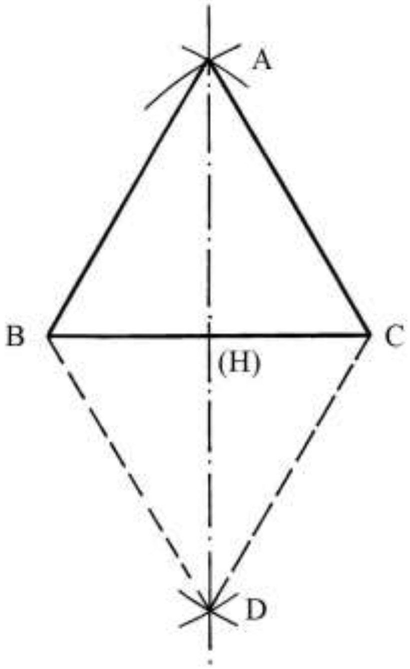
Pacioli richiama la costruzione del triangolo equilatero usata nel precedente Documento.



Doc. XXX

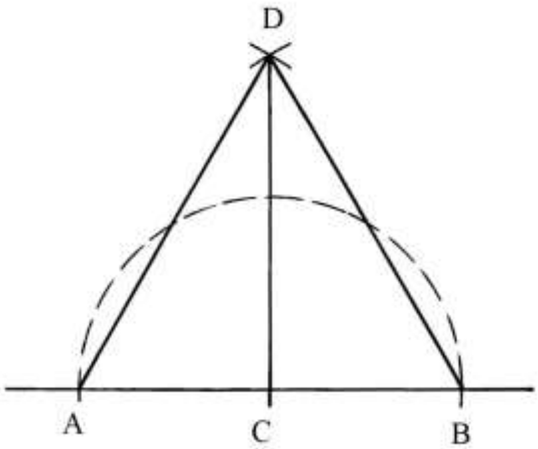
Nel testo l'Autore suggerisce la tracciatura dei due triangoli simmetrici rispetto al lato BC, ma nell'originale (riprodotto qui sopra) è presente solo il triangolo ABC.

La retta passante per i punti A e D divide in due parti uguali il lato BC: (H) è il suo punto medio, non evidenziato da Pacioli e qui indicato con la lettera identificativa racchiusa fra parentesi tonde:



Documento XXXI

Il problema chiede di elevare la perpendicolare a una linea, passante per un suo punto, C. La procedura utilizza di nuovo la costruzione di un triangolo equilatero:



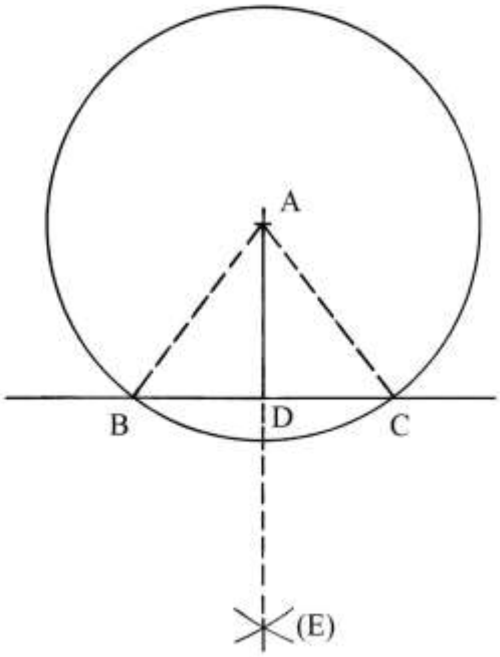
Il punto C deve trovarsi equidistante da altri due punti, A e B, giacenti sulla stessa linea. A questo scopo è necessario verificare questa proprietà geometrica tracciando una semicirconferenza con centro in C e raggio CA = CB.

Poi, fare centro in A e in B e con raggio AB disegnare due archi che si intersecano in D: ADBE è un triangolo equilatero.

Collegare D con C: DC è la perpendicolare cercata, che è anche un’altezza del triangolo equilatero.

Documento XXXII

Da un punto esterno, A, deve essere tracciata una perpendicolare a una retta.



Fare centro in A e con raggio a piacere disegnare una circonferenza che taglia la retta nei punti B e C: collegare A con B e con C.

ABC è un triangolo isoscele i cui lati AB e AC non sono presenti nell'originale.

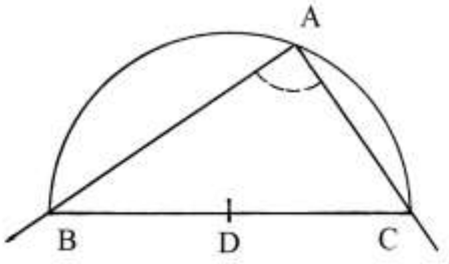
Occorre ora costruire la bisettrice dell'angolo BAC: fare centro in B e in C con raggio a piacere e tracciare due archi che si incontrano in (E): da A condurre la retta passante per (E) che taglia la retta orizzontale nel punto D. AD è la perpendicolare cercata.

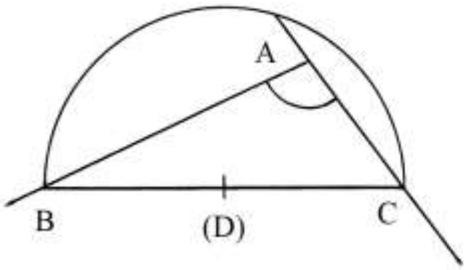
Documento XXXIII

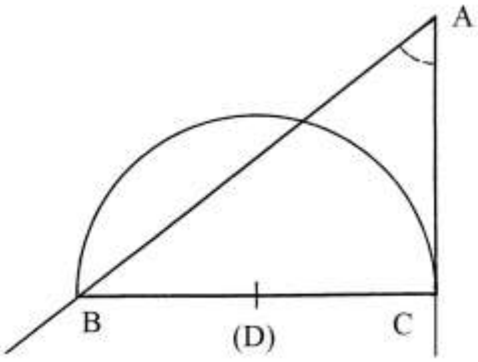
Sono dati tre angoli dei quali deve essere determinata la natura, la *qualità* secondo Pacioli.

I tre casi hanno in comune la presenza di triangoli scaleni e di un lato orizzontale, quello BC.

Determinare il punto medio di BC: è D. Con raggio DB = DC disegnare le tre semicirconferenze mostrate nella figura:







Nel primo caso, il vertice cade sulla semicirconferenza: il triangolo ABC è rettangolo perché è inscritto nel semicerchio e l'angolo in A è *retto*.

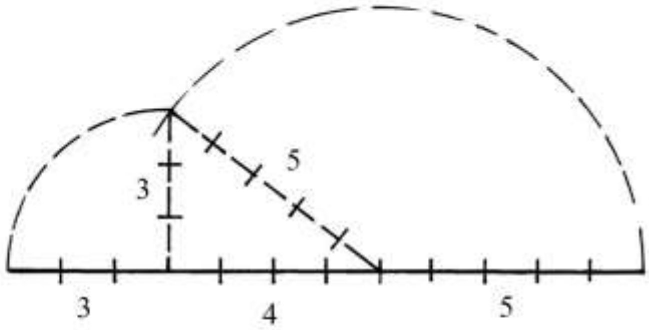
Nel secondo caso, il vertice A non si trova all'interno del semicerchio: l'angolo BAC è *ottuso*.

Infine, il terzo triangolo ha il vertice A che giace all'esterno del semicerchio: l'angolo BAC è *acuto*.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Pacioli fornisce poi dei suggerimenti per effettuare delle misure sul terreno, dove il comune compasso non può essere impiegato. Egli suggerisce di usare un suo sostituto, una corda e degli stecchi o dei chiodi per fissare i vertici.

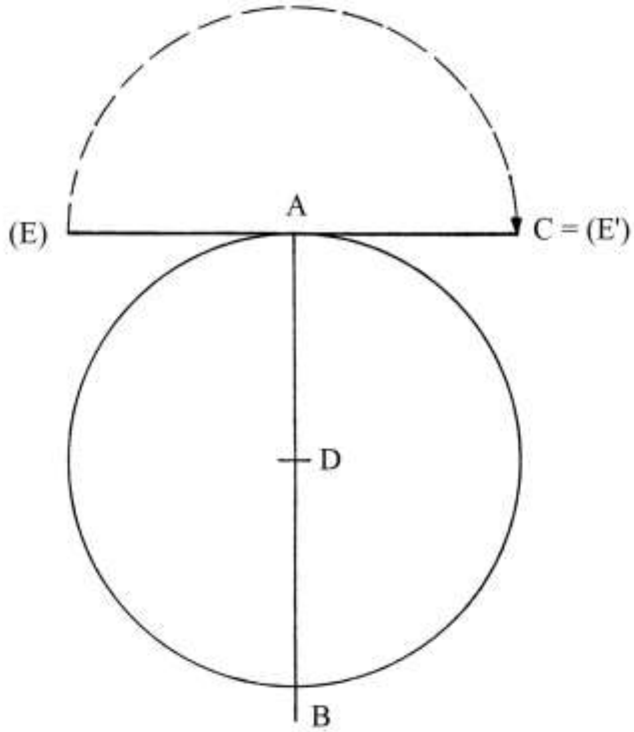
Una corda divisa in dodici tratti uguali è lo strumento perfetto per creare il triangolo rettangolo 3-4-5: con questo strumento è facile verificare la natura degli angoli nei tre vertici A:



Documento XXXIIII

Il Documento serve soltanto a definire l'angolo più acuto possibile.

Tracciare una circonferenza di centro D e raggio DA e il diametro verticale AB.



Per il punto A condurre la tangente alla circonferenza: essa è perpendicolare rispetto al diametro AB.

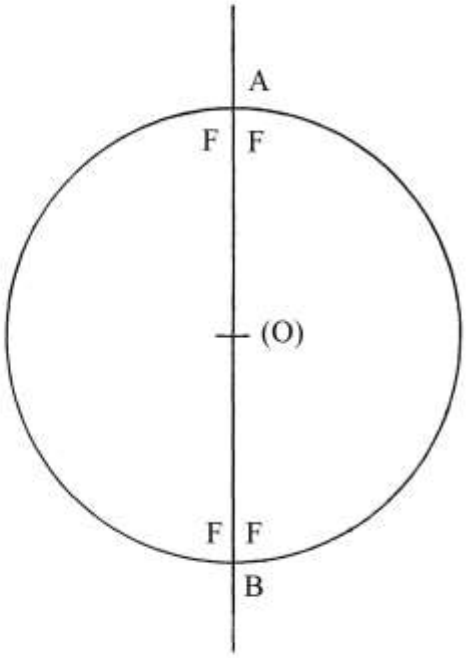
Sulla tangente scegliere un punto: è C.

Fare centro in A e con raggio AC disegnare una semicirconferenza che fissa il punto (E). Il ribaltamento di (E) genera il punto (E') che coincide con C.

L'angolo CA(E') è ampio 0°: è l'angolo più acuto che sia possibile costruire.

Documento XXXV

Il Documento propone di costruire un angolo molto ampio e acuto:



Il Documento sembra avere poco senso, ma forse tutto ciò è dovuto alla lingua usata da Pacioli, un miscuglio di apporti di diversi “volgari” (meglio *dialetti*) italiani: dal *borghese* parlato a Sansepolcro (influenzato dall’aretino e dal perugino), alle altre varianti toscane, al veneziano (oltre a altri dialetti italiani) e al latino.

Avanziamo un’ipotesi: il cerchio di centro (O) e diametro AB è diviso da questo ultimo in due semicerchi.

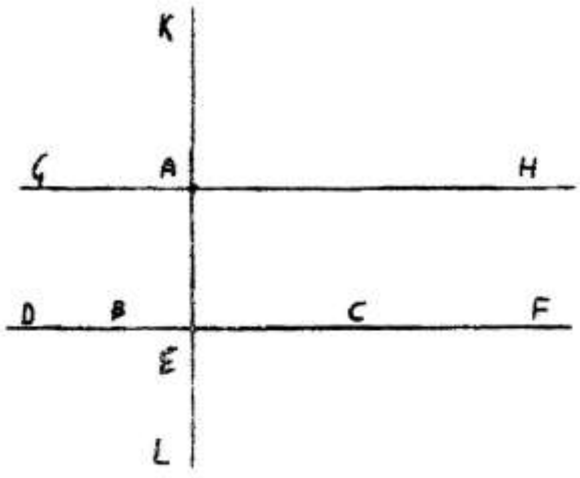
I due angoli F(O)F hanno entrambi ampiezza di 180° e sono due *angoli piatti*, usando una terminologia moderna. Non sono angoli acuti.

I due angoli piatti possono essere scomposti in un numero grandissimo di angoli acuti: per definizione, un angolo acuto ha ampiezza inferiore a quella di un angolo retto e cioè inferiore a 90°.

Dos Santos Hirth interpreta la costruzione come un angolo molto largo racchiudente più angoli acuti: esso sarebbe delimitato dal diametro verticale e da una semicirconferenza. Questo Autore ritiene che questo Documento offra una costruzione opposta a quella contenuta nel precedente Documento (il XXXIIII).

Documento XXXVI

Il problema è descritto in modo piuttosto impreciso e lo è pure lo schema che lo accompagna:



Doc. XXXVI

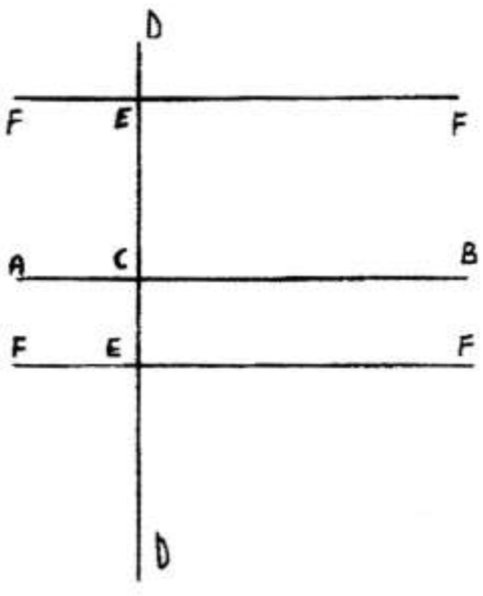
Nel testo è fatto un riferimento al problema contenuto nel Documento XXXI.

Il testo di Pacioli può essere interpretato come una doppia costruzione di due successive perpendicolari: la seconda perpendicolare risulta parallela rispetto alla retta di partenza.

<u>Documento XXXVII</u>

Il testo afferma che deve essere tracciata una linea parallela a un retta da un punto esterno ad essa.

Il disegno originale è il seguente:



Doc. XXXVII

Come si è verificato in alcuni dei precedenti Documenti, nello schema originale vi è una ripetizione delle lettere assegnate a punti diversi.

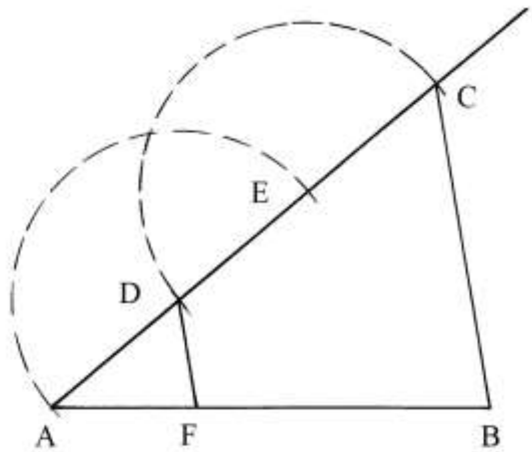
Il punto da cui deve essere tracciata la parallela è A.

Il testo è abbastanza confuso.

Nunes Dos Santos Hirth ritiene trattarsi di un'applicazione del teorema di Talete sulle rette parallele.

Documento XXXVIII

È dato un segmento, AB, del quale si vuole determinare la terza parte:



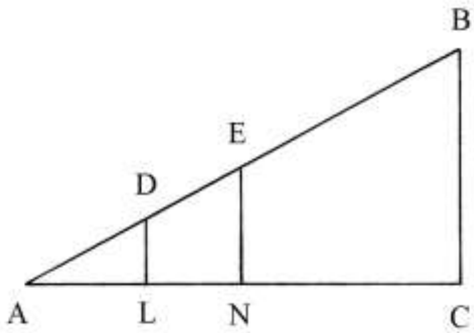
A partire da A tracciare una linea con inclinazione a piacere. Su di essa riportare con il compasso, per tre volte, una lunghezza: sono fissati i punti D, E e C.

Collegare C con B e parallelamente a questo segmento tracciarne un altro da D verso AB: è DF.

AF è lungo esattamente *un terzo* di AB: i triangoli ACB e ADF sono simili.

Documento XXXIX

Occorre dividere un segmento in parti proporzionali a quelle nelle quali è ripartito un secondo.



Nell'esempio della figura, AB è diviso in tre parti di differenti lunghezze: AD, DE e EB.

AC è il segmento che deve essere ripartito.

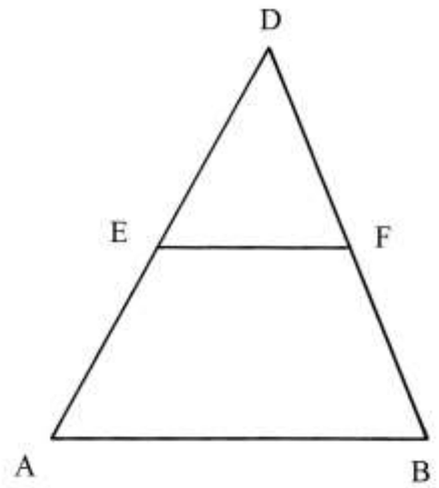
Collegare B con C e tracciare due segmenti paralleli a BC a partire da D e da E fino a incontrare AC nei nuovi punti L e N.

Valgono le proporzioni che seguono:

AD : AL = DE : LN = EB : NC.

Documento XL

Il triangolo ADB deve essere sezionato da un segmento parallelo al lato di base dividendo a metà i due lati obliqui:



I lati AD e DB devono essere divisi in due parti di uguale lunghezza:

AE = ED e BF = FD.

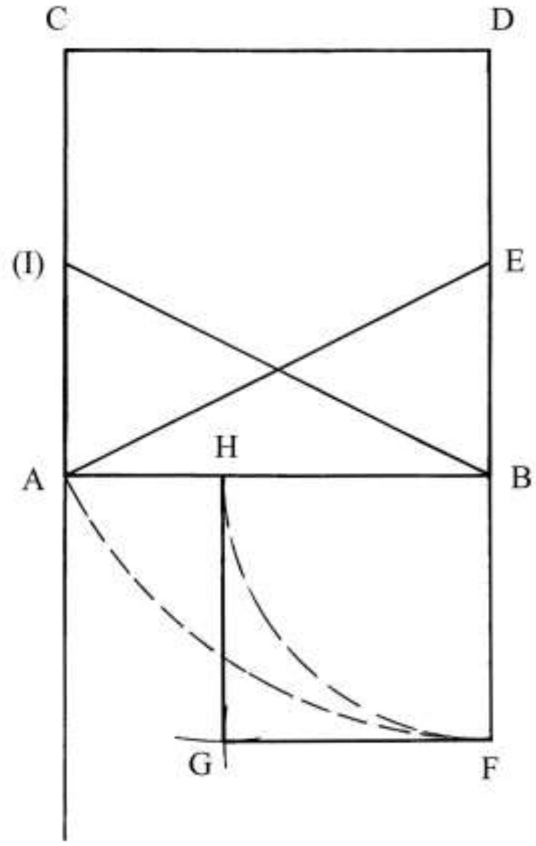
A questo proposito Pacioli richiama la costruzione usata nella soluzione del problema contenuto nel Documento XXX.

EF è parallelo a AB.

Documento XLI

Il segmento AB deve essere diviso secondo la *sezione aurea*.

Sul lato AB costruire il quadrato ACDB. Prolungare verso il basso i lati CA e DB:



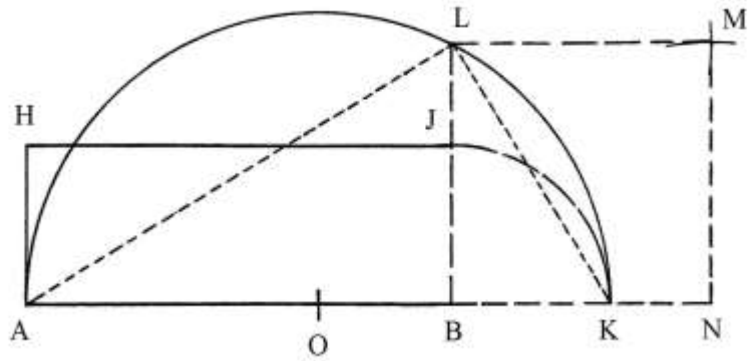
Fissare i punti medi dei lati CA e DB: sono (I) e E.

Tracciare le corde (I)B e EA.

Fare centro in E e con raggio EA disegnare un arco da A fino a stabilire il punto F. Con centro in B e raggio BF tracciare un arco da F fino a fissare il punto H: AB è diviso secondo la sezione aurea in parte minore (AH) e parte maggiore (HB).

Gli archi sono qui disegnati tratteggiati perché assenti nell'originale.

Pacioli afferma che il quadrato costruito su HB ha la stessa area del rettangolo che ha lati lunghi AH e AB. Verifichiamo per via geometrica la validità della sua affermazione:



Costruire il rettangolo AHJB con lati lunghi AB (quanto il lato del precedente quadrato ACDB) e AH (corrispondente al segmento AH della precedente figura).

Prolungare verso destra il lato AB. Fare centro in B e con raggio BJ tracciare un arco da J fino a incontrare il prolungamento di AB nel punto K.

Determinare il punto medio di AK: è O. Fare centro in O e con raggio OA = OK disegnare una semicirconferenza.

Dal punto B elevare la perpendicolare al diametro AK: essa incontra la semicirconferenza nel punto L.

ALK è un triangolo rettangolo perché è inscritto in un semicerchio. Per il 2° teorema di Euclide sui triangoli rettangoli, la lunghezza dell'altezza LB è medio proporzionale fra le lunghezze delle proiezioni dei due cateti (AL e LK) sull'ipotenusa (AK) che sono i segmenti AB e BK:

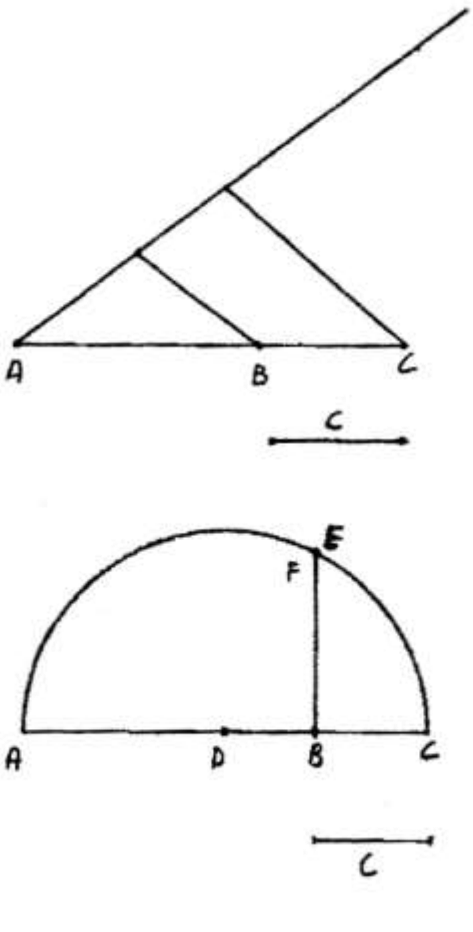
AB : LB = LB : BK e

$LB^2 = AB * BK$, ciò che conferma l'ipotesi di Pacioli.

Infine, sull'altezza LB è costruito il quadrato NLMN.

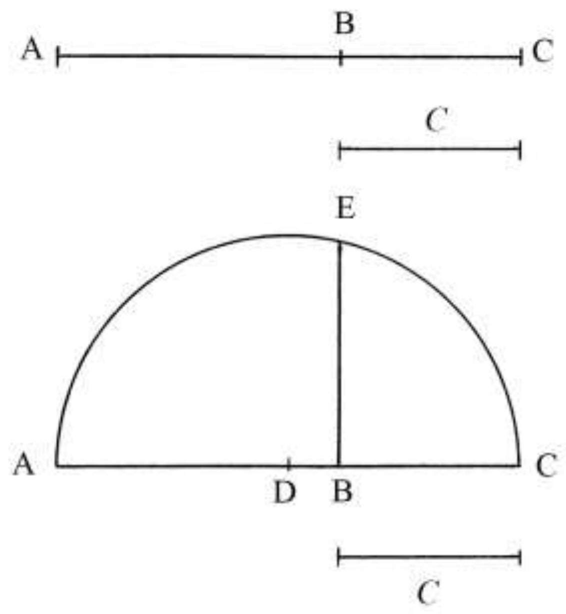
<u>Documento XLII</u>

La soluzione del problema descritto in questo Documento suggerisce l'uso del *compasso*, della *squadra* o della *riga*. È interessante notare che fra gli strumenti da disegno compare la *squadra*.



Doc. XLII

Sono dati due segmenti, indicati con AB e *C*: deve essere determinata la lunghezza di un segmento che sia medio proporzionale fra i primi due.



La soluzione impiegata da Pacioli è quella usata nella dimostrazione contenuta nel precedente paragrafo (Documento XLI).

Su di una retta orizzontale tracciare i due segmenti adiacenti AB e BC=*C*. Fissare il punto medio di AC: è D.

Fare centro in D e con raggio DA=DC disegnare una semicirconferenza.

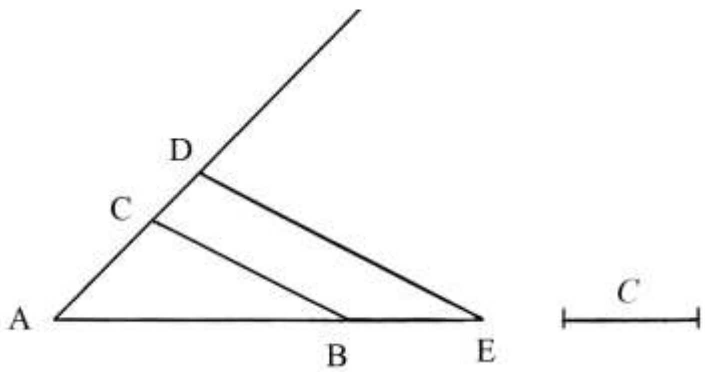
Dal punto B innalzare la perpendicolare al diametro AC: è BE.

L'altezza BE è medio proporzionale fra AB e BC:

AB : BE = BE : BC.

Documento XLIII

Sono dati due segmenti di lunghezza nota: AB e *C*.



Deve essere disegnato un terzo segmento la cui lunghezza sia in proporzione continua con quelle dei primi due.

Tracciare una linea orizzontale e fissarvi la lunghezza del primo segmento, AB.

Dal punto A disegnare una semiretta inclinata a piacere.

Misurare la lunghezza di *C* e riportarla da B fino al punto E e da A fino a stabilire il punto C. Collegare B con C e da E tracciare la parallela a BC: è ED.

Vale la proporzione:

AC : AB = CD : BE.

- NOTA -

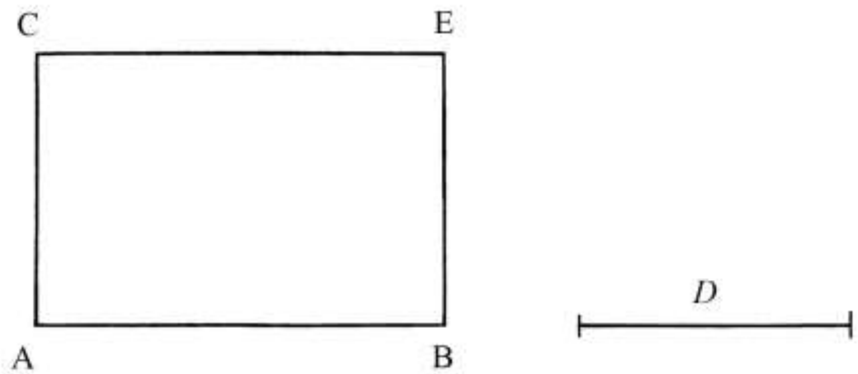
I Documenti XLIIII e XLV contengono problemi geometrici che sono ulteriori applicazioni della regola delle proporzioni fra lunghezze di segmenti e derivano entrambi dal problema descritto nel Documento XVIII.

Sia XLIIII che XLV non sono accompagnati da disegni.

- -

Documento XLVI

Il problema qui descritto consiste nella cosiddetta moltiplicazione di due linee:



AB è un segmento lungo convenzionalmente 9 unità. *D* è un secondo segmento lungo 4 unità.

Dagli estremi di AB elevare due perpendicolari allo stesso segmento. Da A e da B riportare la lunghezza di *D*: sono tracciati i segmenti AC e BE. ACEB è un rettangolo e la sua area è:

$A_{ACEB} = AB * AC = AB * D = 6 * 4 = 24$ unità quadrate.

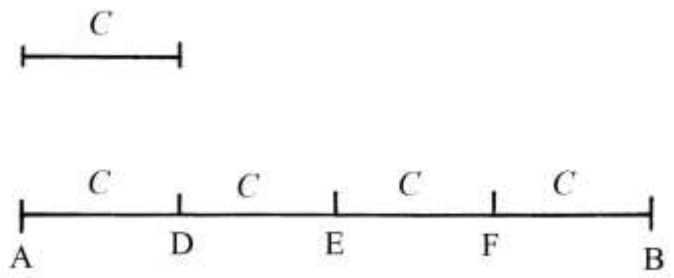
In conclusione, la moltiplicazione di due segmenti produce un rettangolo.

Documento XLVII

Questo Documento affronta un problema inverso a quello affrontato nel precedente Documento.

La divisione fra due segmenti può essere effettuata solo se il *divisore* è più corto del *dividendo*.

Un segmento AB, lungo 12 unità, deve essere diviso per un altro segmento, *C*, lungo 3 unità:



Su AB riportare da sinistra verso destra la lunghezza di *C*: esso vi rientra 4 volte perché

$12/3 = 4$.

D, E e F sono i punti che dividono AB.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

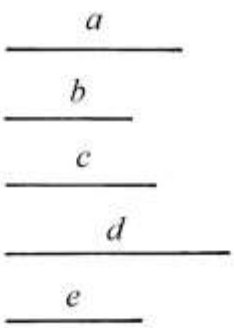
Se si verificasse il caso opposto, con AB = 4 unità e *C* = 12 unità, il risultato non sarebbe un numero intero (*sano* per Pacioli), ma soltanto degli “èsimi” e cioè 4/12 = 1/3.

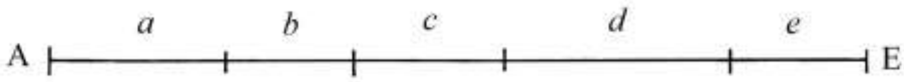
Documento XLVIII

Il problema descrive la somma di linee rette.

I cinque segmenti interessati hanno lunghezze *a*, *b*, *c*, *d* e *e*.

Tracciare una retta e fissarvi il punto A:





Da questo punto riportare in successione, da sinistra verso destra, le lunghezze dei cinque segmenti fino a stabilire il punto E.

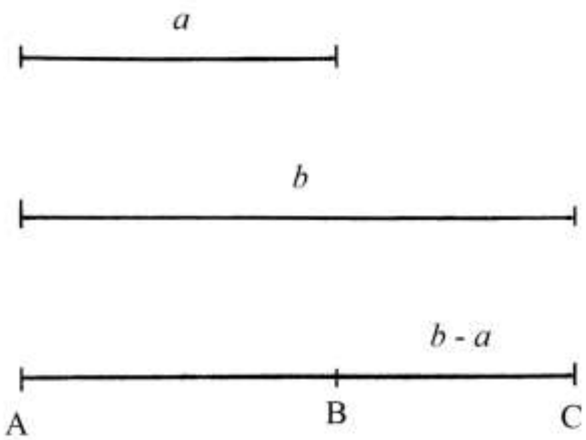
AE è lungo quanto la somma delle lunghezze dei cinque segmenti:

AE = *a* + *b* + *c* + *d* + *e*.

Documento XLIX

Per sottrarre la lunghezza di un segmento da quella di un altro è necessario che la prima sia maggiore della seconda: se le due lunghezze sono uguali non può effettuarsi la sottrazione.

La lunghezza del segmento più corto è *a* e quella del segmento più lungo è *b*:



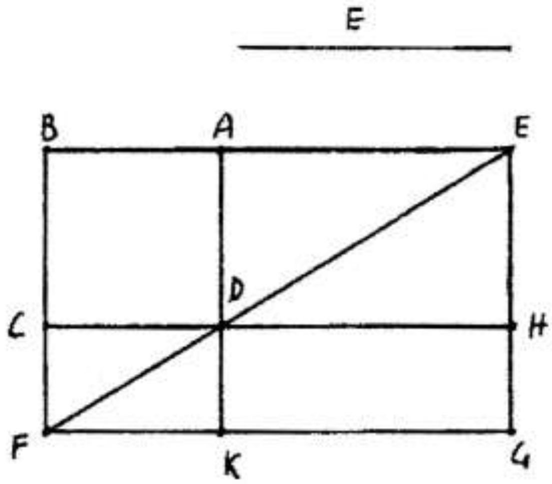
Fissare su di una retta la lunghezza di AC: è *b*.
Da A riportare verso destra la lunghezza di *a*:

AC = *b*

AC – AB = *b* – *a* = BC.

Documento L

Una superficie rettangolare deve essere divisa con una retta:



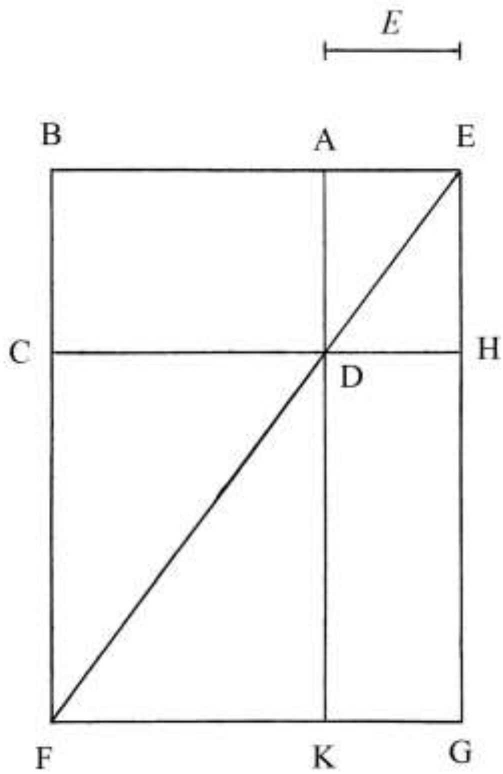
Doc. L

ABCD è un *rettangolo* di dimensioni:

* AB = 6 unità;
* AD = 4 unità.

Per *unità* Pacioli intende braccia, piedi o altre.
L'area del rettangolo è:

A_{ABCD} = AB * AD = 6 * 4 = 24 unità^2.



Lo schema di Pacioli è completamente fuori scala: ABCD è un rettangolo e non un quadrato.

Prolungare i lati di ABCD verso destra e verso il basso.

È data la lunghezza di un segmento, *E*, uguale a 3 unità. A partire da riportare verso destra la lunghezza di *E*:

BE = BA + AE = 6 + 3 = 9 unità.

Dal punto E abbassare la perpendicolare a BE: essa fissa il punto H.

Tracciare una linea da E e passante per il punto D fino a tagliare il prolungamento di BC in F.

Per il punto F condurre una parallela a BAE: sono stabiliti i punti K e G.

AEHD e BEGF sono due rettangoli simile: fra le lunghezze dei loro lati corrispondenti esiste una proporzione:

AE : BE = EH : EG

Le lunghezze dei lati sono:

* AE = 3 unità;
* BE = BA + AE = 6 + 3 = 9 unità;
* EH = BC = 4 unità.

EG ha lunghezza incognita ed è data da:

EG = (BE * EH)/AE = (9*4)/3 = 12 unità.

Ne consegue:

HG = EG – EH = 12 – 4 = 8 unità.

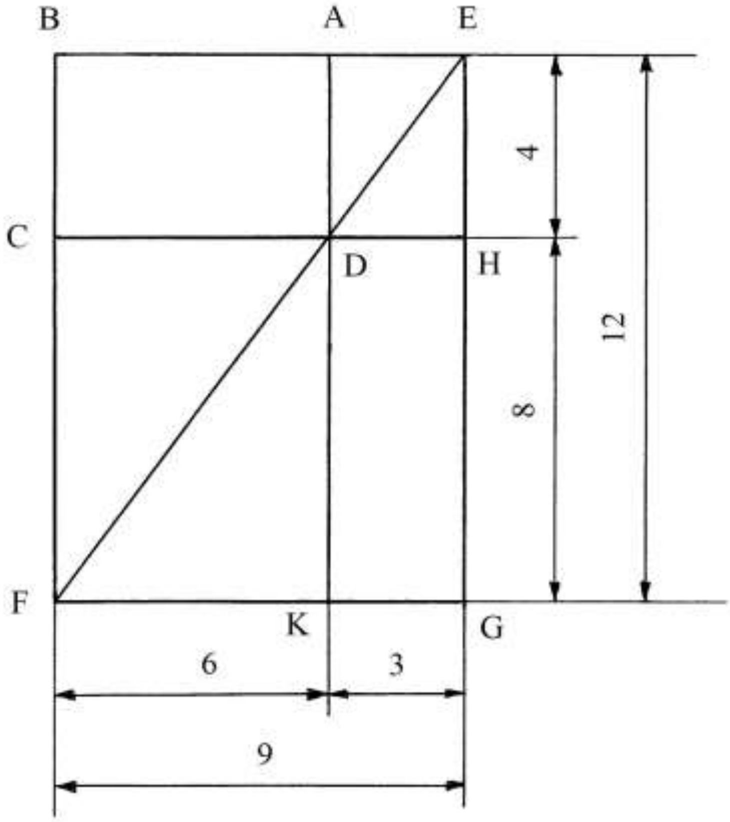
L'area del rettangolo DHGK è:

A_{DHGK} = DH * DK = AE * HG = 3 * 8 = 24 unità^2.

Le aree dei rettangoli ABCD e DHGK sono *uguali*.

- APPROFONDIMENTO -

In sintesi, sembra che lo scopo principale di questo Documento sia per Pacioli dimostrare l'uguaglianza delle aree dei rettangoli ABCD e DHGK:



Il grafico qui sopra riporta tutte le dimensioni lineari della costruzione: occorre di nuovo rimarcare l'imprecisione dello schema originale.

Un superficiale esame del grafico corretto porta a individuarvi la presenza del cosiddetto *teorema dello gnomone*.

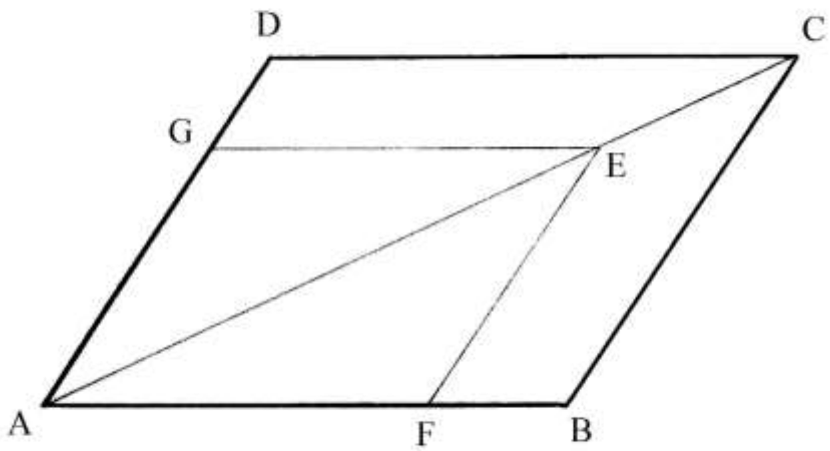
Il teorema dello gnomone

Nel I libro degli *Elementi* di Euclide, la proposizione 43 è conosciuta con l'espressione di *teorema dello gnomone*:

"In un parallelogramma, le aree complementari situate intorno a una diagonale sono fra loro uguali".

Per chiarire il concetto è da notare che le due aree non sono attraversate dalla diagonale interessata.

Nella figura che segue è disegnato il parallelogramma ABCD che ha i lati opposti paralleli e di uguale lunghezza:



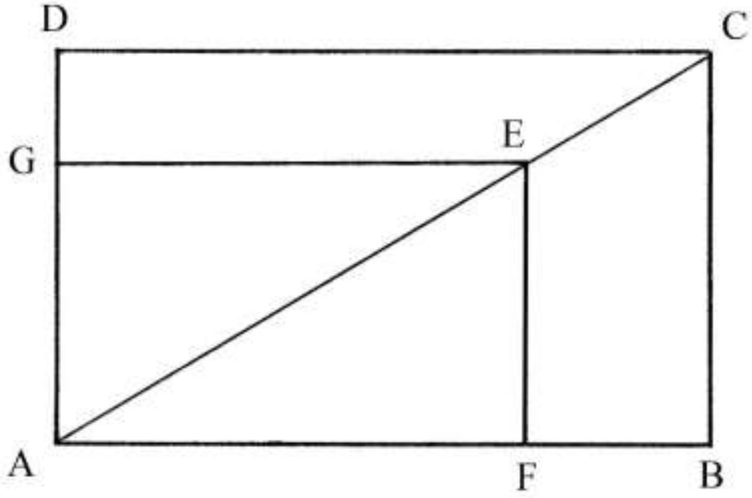
Tracciare la diagonale AC e scegliere su di essa un punto, E.

Dal punto E condurre due segmenti paralleli ai lati CB e CD: essi determinano i punti F e G.

I quadrilateri ECDG e ECBF hanno la stessa area e *non* sono attraversati dalla diagonale AC: il lato comune ai due parallelogrammi – EC – è parte di AC.

La comprensione del teorema è ancora più facile quando esso è applicato a un rettangolo.

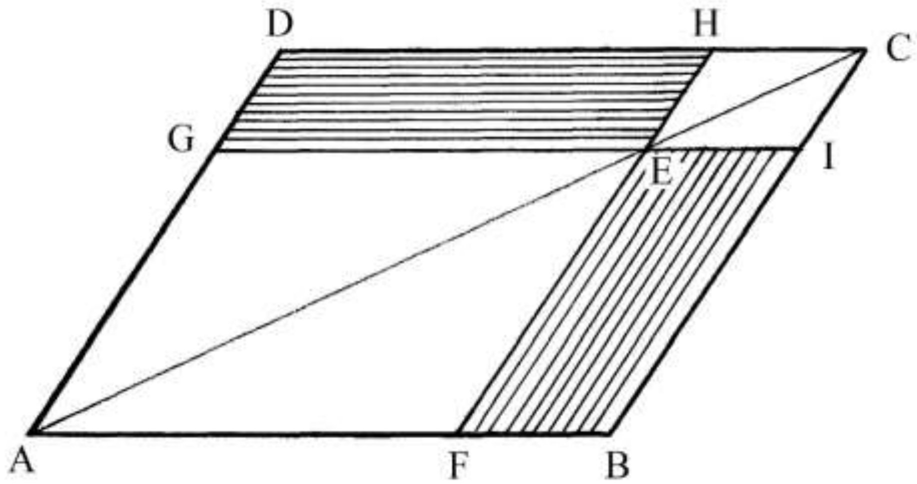
ABCD è un rettangolo. Disegnare la diagonale AC e sceglervi un punto E:



Dal punto E tracciare due segmenti paralleli ai lati AB e BC: sono individuati i punti F e G.

I trapezi rettangoli DCEG e CBFE hanno la stessa area.

Nella figura che segue, i segmenti passanti per il punto E sono stati prolungati fino a intersecare i lati del parallelogramma ADCB in due punti, H e I:



Per il *teorema dello gnomone*, i parallelogrammi non attraversati dalla diagonale AC (e cioè i parallelogrammi GDHE e FEIB, *tratteggiati* in figura) hanno uguale superficie.

<u>Gnomone</u>

La parola è di origine greca ed ha più significati. In generale significa “colui che fa conoscere”.

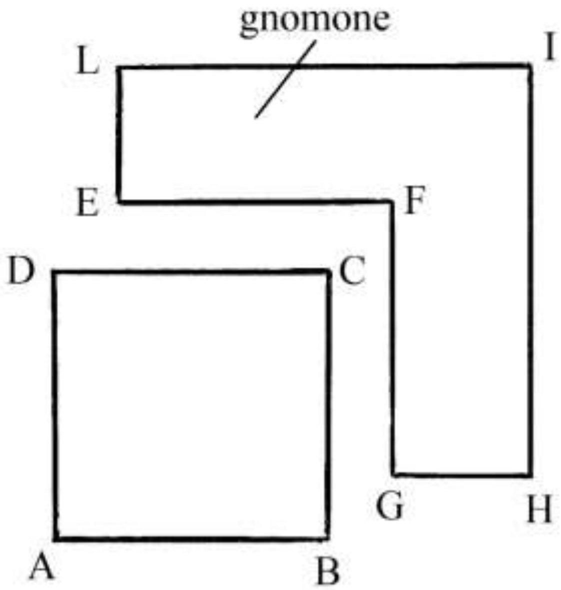
I Babilonesi misuravano lo scorrere del tempo per mezzo di un’asta (*stilo*) conficcata verticalmente nel suolo; lo stilo e l’ombra da esso proiettata sul terreno formavano un angolo retto: quindi lo gnomone era assimilato a una *squadra*.

Anche gli Egizi conoscevano questo strumento.

I matematici greci chiamavano *gnomone* una qualsiasi grandezza lineare o piana che aggiunta o sottratta a una figura geometrica ne conservava la forma iniziale.

Ecco un esempio chiarificatore.

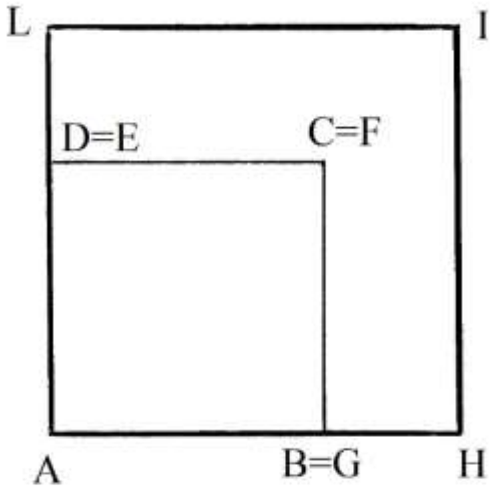
ABCD è un quadrato. A fianco è disegnato il poligono EFGHIL, formato da due braccia ad angolo retto:



EF e FG hanno la stessa lunghezza dei lati del quadrato ABCD.

LE e GH sono uguali e sono lunghi quanto (LI – AB); quindi i segmenti LI e IH sono lunghi (LE + AB).

Aggiungendo lo *gnomone* LIHGFE al quadrato ABCD si ottiene il quadrato AHIL:



Le coppie di punti D=E, C=F e B=G combaciano e così pure gli spigoli che esse definiscono.

Sottraendo lo gnomone da AHIL si riottiene il quadrato ABCD.

- -

Pacioli conclude con una considerazione: se il poligono da dividere con una linea ha forma triangolare o altra non quadrilatera regolare, esso va prima trasformato in un quadrato o in un rettangolo.

<u>Documento LI</u>

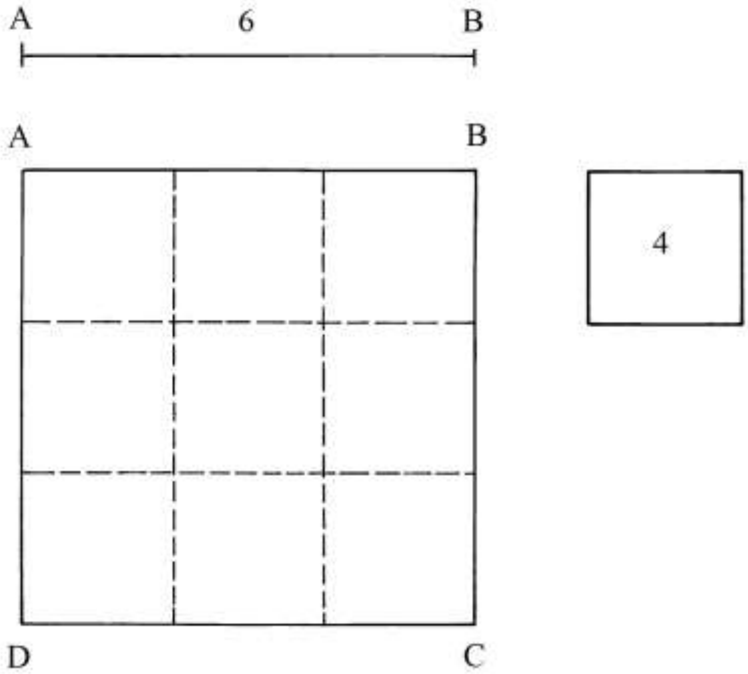
Il problema consiste nel dividere una linea per una superficie: non è presente alcuno schema.

Se la superficie non è quadrata, essa deve essere preliminarmente trasformata in questo poligono regolare.

La soluzione del problema qui presentata è puramente ipotetica e si avvale dei dati forniti da Pacioli.

Il quadrato della superficie è 4 e quello della linea vale 36.

Con l'aiuto dello schema che segue tentiamo un'interpretazione del testo:



AB è il segmento lungo 6 unità e cioè è la radice del quadrato della linea:

$AB = \sqrt{36} = 6$ unità.

ABCD è il quadrato costruito su di essa che ha area:

$A_{ABCD} = AB^2 = 6^2 = 36$ unità^2.

Sulla destra è disegnato un secondo quadrato di area 4 unità^2.

Il secondo quadrato è contenuto *n* volte in quello ABCD:

$n = \text{Area}_{ABCD}/\text{Area}_{SECONDO\ QUADRATO} = 36/4 = 9$.

Nel quadrato ABCD sono contenuti *nove* quadrati di area 4 unità^2.

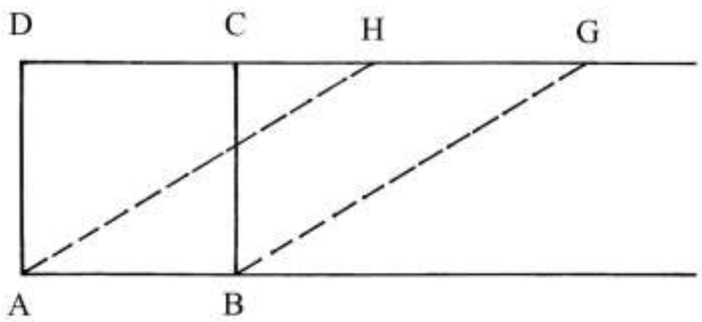
Il testo di Pacioli è piuttosto oscuro: secondo Hirth, a p. 72 della sua tesi citata in bibliografia, questo Documento proporrebbe un problema *reciproco* rispetto a quello contenuto nel Documento L.

L'ipotesi presentata con lo schema sopra inserito può essere giustificata con altre considerazioni: la soluzione di questo problema serviva disegnare una *scacchiera* per il gioco degli scacchi (argomento sul quale Pacioli aveva scritto almeno un altro trattato= o era un metodo per autoprodurre una quadrettatura su fogli di carta non rigati? Nel Medioevo e nel Rinascimento esistevano dei semplici strumenti per effettuare in proprio la rigatura della carta per potervi scrivere con precisione.

Documento LII

ABCD è un quadrato o un rettangolo.

Prolungare verso destra i lati AB e DC:



Sul prolungamento di DC fissare un punto G, esterno al quadrilatero.

Collegare G con B e da A tracciare una parallela A BG fino a fissare il punto H.

L'area di ABCD è fata da:

$A_{ABCD} = AB * AD$.

ABGH è un parallelogramma. Per costruzione, i suoi lati orizzontali hanno uguale lunghezza:

$AB = HG$.

Il segmento BC è un'altezza del parallelogramma. L'area di questo quadrilatero è:

$A_{ABGH} = AB * BC = AB * AD$.

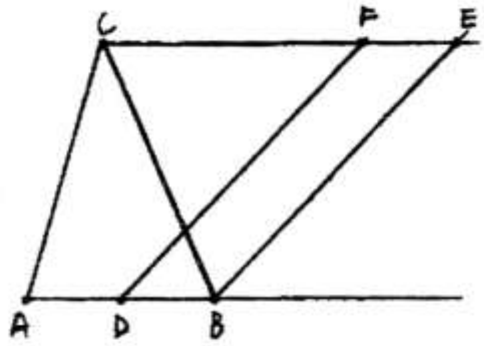
L'area di ABGH è uguale a quella di ABCD.

Il testo di Pacioli contiene un riferimento al teologo francescano scozzese Giovanni Duns Scoto (1265/1266 – 1308).

Documento LIII

Il testo propone la costruzione di un triangolo di area uguale a uno dato.

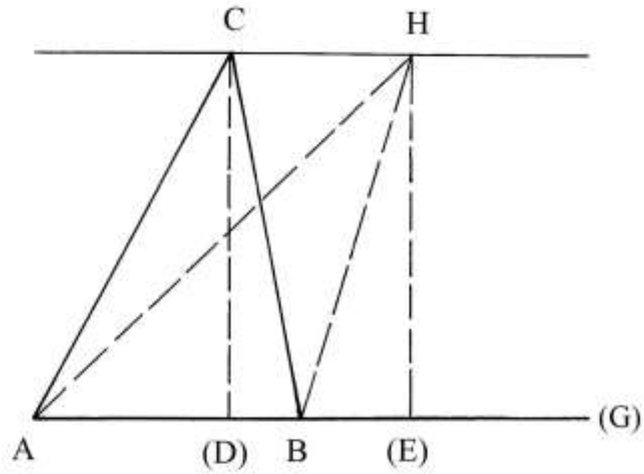
Lo schema indicato come "Doc. LIII" non corrisponde al testo contrassegnato con lo stesso numero romano: il disegno si riferisce al Documento LIIII:



Doc. LIII

Le costruzioni descritte nel testo di questo Documento sono almeno *due*: le due soluzioni che sono di seguito proposte sono delle ipotesi.

ABC è un triangolo generico:



Prolungare verso destra il lato AB fino a un punto qualsiasi, (G).

Per il vertice C condurre una retta parallela a AB(G): sulla retta fissare un punto a piacere, H.

Collegare H con A e con B.

Dai punti C e H abbassare le perpendicolari a A(G): C(D) è un'altezza del triangolo ABC e H(E) lo è del triangolo AH(E).

I triangoli ABC e AHB hanno uguali aree:

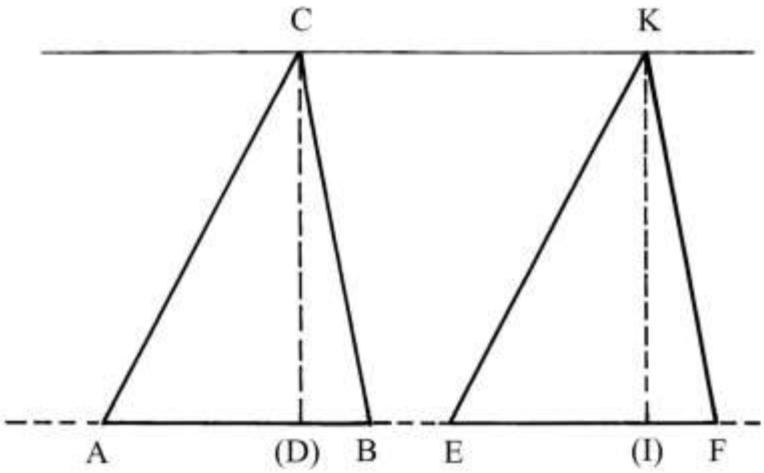
$A_{ABC} = AB * [C(D)]/2$

$A_{AHB} = AB * [H(E)]/2 = AB * [C(D)]/2.$

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Il testo si conclude con una seconda considerazione, peraltro non documentata con uno schema.

ABC e EFK sono due triangoli che hanno aree uguali:



Il secondo triangolo, EFK, non condivide la base EF con quella, AB, del primo poligono: EF ha la stessa lunghezza di AB.

C e K giacciono su una retta parallela a quella sulla quale si trovano le basi AB e EF.

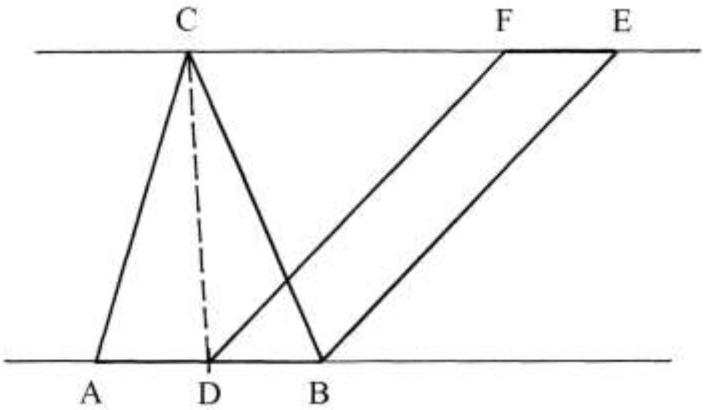
Infine, le altezze C(D) e K(I) hanno uguale lunghezza.

Documento LIIII

Come già accennato all'inizio del precedente paragrafo, lo schema "Doc. LIII" si riferisce al problema affrontato in questo Documento.

Deve essere costruito un poligono con lati equidistanti, cioè almeno un *parallelogramma* o un *trapezio,* che abbia la stessa area di un triangolo qualsiasi.

ABC è il triangolo:



Prolungare verso destra il lato AB e per il vertice C tracciare una retta parallela a quella sulla quale giace AB.

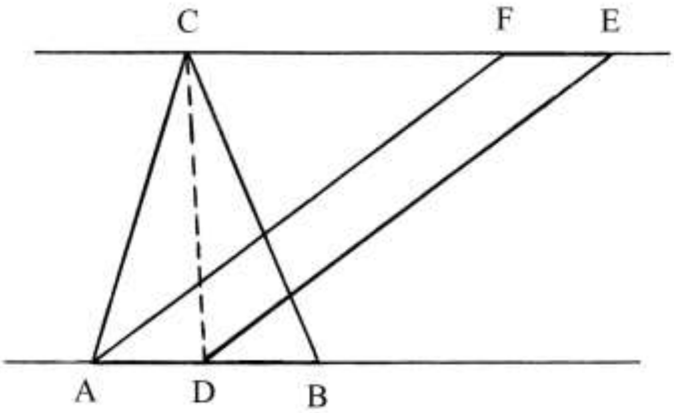
Stabilire il punto medio di AB: è D. Collegare C con D: CD è una delle tre *mediane* del triangolo. Essa lo divide in due triangoli, ACD e CBD, che hanno aree uguali a metà di quella dell'intero ABC.

Dai punti D e B disegnare due linee fra loro parallele: sono BE e DF. I punti E e F sono scelti a piacere purché EF sia lungo quanto DB.

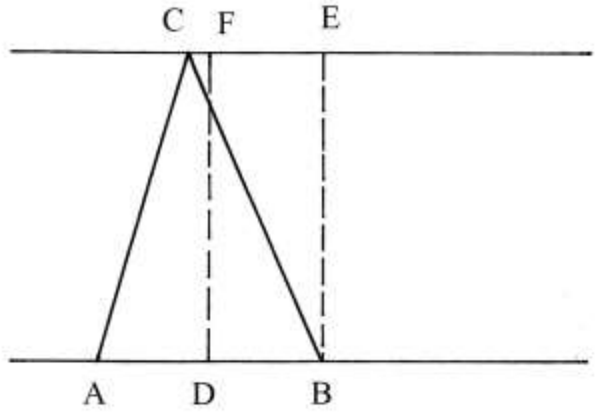
BDFE è un parallelogramma perché i suoi lati opposti sono paralleli e hanno uguali lunghezze: pure gli angoli opposti hanno uguali ampiezze.

L'area di BDFE è il doppio di quella di CBD e quindi il parallelogramma ha area uguale a quella dell'intero ABC.

Il parallelogramma può essere costruito pure sul segmento AD:

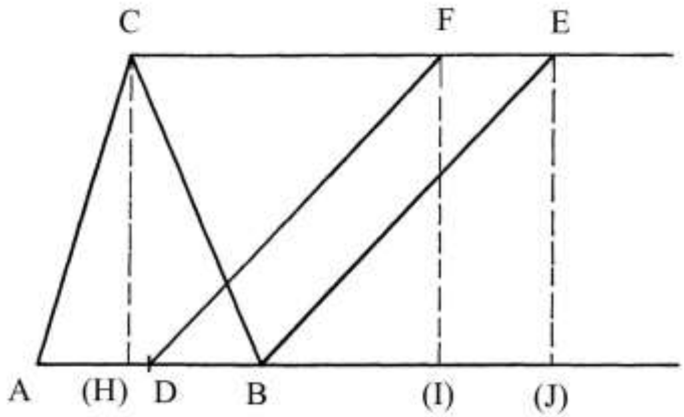


Dai punti B e D condurre le perpendicolari alla retta passante per C: sono BE e DF.



Il quadrilatero BEFD è un *rettangolo* che ha area uguale a quella dell'intero ABC.

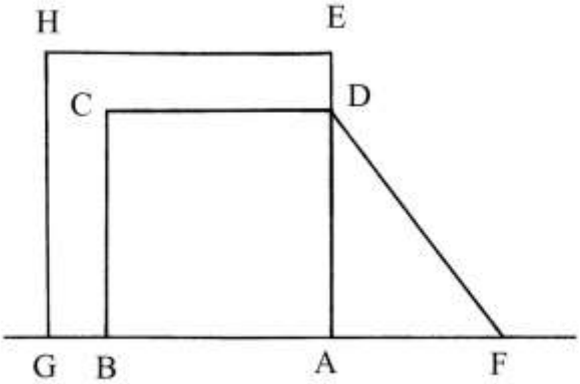
Dai punti C, F e E del penultimo schema abbassare le perpendicolari alla retta sulla quale giace AB:



Le altezze C(H), F(I) e E(J): esse hanno tutte la stessa lunghezza.

Documento LV

ABCD è un quadrato e deve essere ingrandito con l'aggiunta della superficie contenuta nel secondo quadrato indicato con "P": l'unica condizione posta è che il nuovo poligono conservi la forma quadrata.



Prolungare il lato AB verso sinistra e verso destra. Con il compasso misurare la lunghezza di un lato del quadrato “P” e riportarla da A in F.

Collegare F con D; ADF è un triangolo rettangolo: AD e AF sono due cateti, lunghi rispettivamente quanto i lati di ABCD e di “P”.

DF è l’ipotenusa del triangolo ed è la lunghezza del lato del quadrato risultante dalla somma delle aree dei due quadrati.

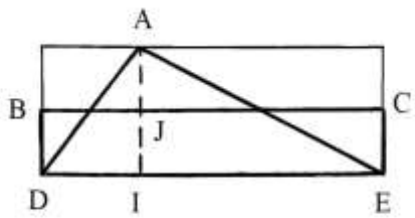
Costruire il quadrato AEHG con lati lunghi quanto DF.

Il poligono GHEDCB è uno *gnomone*.

Documento LVI

Il problema si propone di trasformare un triangolo in un quadrato di uguale area.

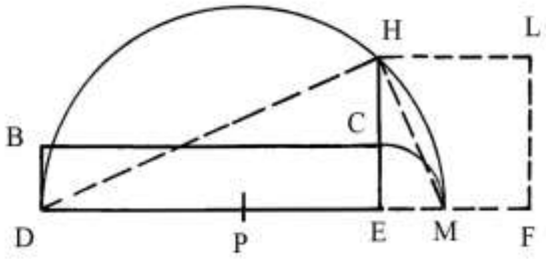
ADE è il triangolo e AI è l’altezza relativa alla base DE: fissare il suo punto medio J.

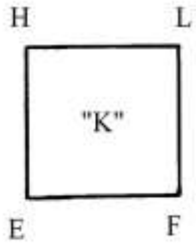


Dai vertici D e E elevare le perpendicolari a Dee per i punti A e J tracciare due parallele a DE.

DBCE è un rettangolo che ha la stessa area di ADE.

Occorre ora usare la procedura già impiegata nella soluzione del problema contenuto nel precedente Documento XLI.





Riprodurre il rettangolo DBCE e prolungare verso destra il lato DE e verso l'alto quello EC.

Fare centro in E e con raggio EC disegnare un arco da C fino a stabilire il punto M: il punto P è il medio di DM.

Fare centro in P e con raggio PD = PM tracciare una semicirconferenza che incontra in H il prolungamento di EC.

DHM è un triangolo rettangolo inscritto nel semicerchio e HE è la sua altezza rispetto all'ipotenusa DM.

HE è medio proporzionale fra le lunghezze di DE e EM:

DE : HE = HE : EM   e

DE : HE = HE : EC   da cui

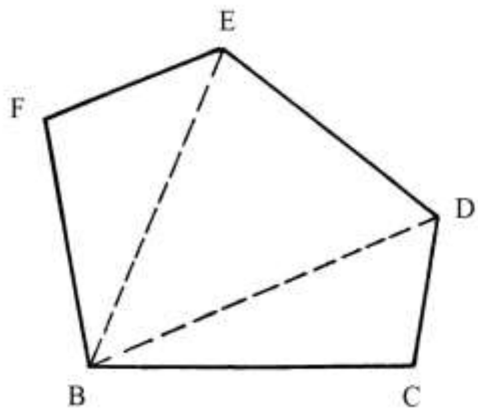
$HE^2 = DE * EC$.

Il quadrato EHLF ha la stessa area del rettangolo DBCE e, quindi, di quella del triangolo DAE.

Documento LVII

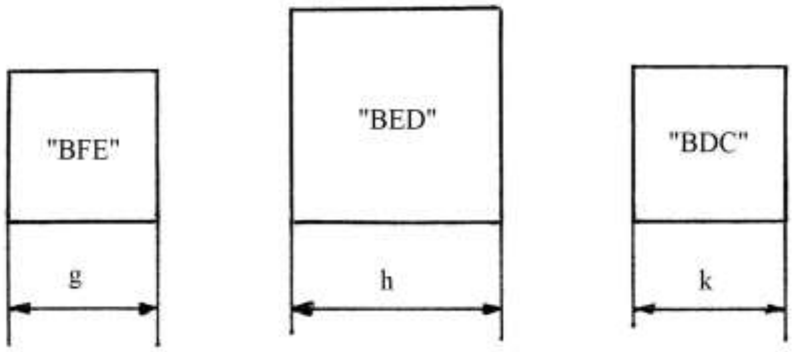
Un generico poligono deve essere trasformato in un quadrato avente la stessa area.

BCDEF è un pentagono non regolare. Le diagonali BD e BE lo dividono in *tre* triangoli.

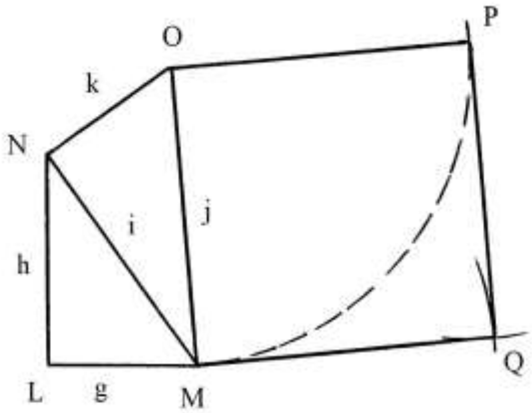


I tre triangoli sono convertiti in altrettanti quadrati i cui lati hanno le lunghezze indicate di seguito:

* BFE è equivalente a un quadrato con lati lunghi *g*;
* BED è trasformato in un quadrato con lati lunghi *h*;
* infine, BDC è equivalente a un quadrato con lati lunghi *k*.



Occorre procedere all'unione dei tre quadrati.
Costruire il triangolo rettangolo LMN: il cateto LM è lungo quanto *g* e quello LN è *h*:



L'ipotenusa MN è lunga *i*:

$$MN^2 = LM^2 + LN^2$$

$$i^2 = g^2 + h^2.$$

Il quadrato costruito sull'ipotenusa MN ha area uguale alla somma delle aree dei quadrati equivalenti ai triangoli BFE e a BED.

Sull'ipotenusa MN disegnare il triangolo rettangolo MNO che ha il cateto NO lungo quanto *k*; l'ipotenusa MO è lunga:

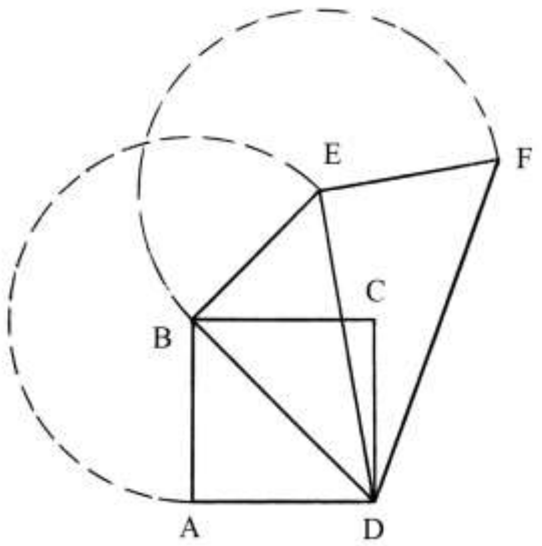
$$MO^2 = MN^2 + NO^2 = i^2 + k^2 = (g^2 + h^2) + k^2.$$

MO è un lato del quadrato MOPQ che ha area uguale alla somma di quelle dei tre quadrati equivalenti ai tre triangoli che formano il pentagono BCDEF:

$$\text{Area}_{\text{BCDEF}} = \text{Area}_{\text{MOPQ}}.$$

Documento LVIII

Il problema chiede di costruire quadrati di area multipla, intera, di uno dato.
ABCD è un quadrato e BD è una sua diagonale:



Dal vertice A condurre perpendicolare a BD. Fare centro in B e con raggio BA tracciare un arco che incontra in E la perpendicolare a BD.

Collegare E con D e dal punto E disegnare una perpendicolare a ED.

Fare centro in E e con raggio EB = BA tracciare un arco che taglia in F l'ultima perpendicolare. Collegare F con D.

Se indichiamo con ℓ la lunghezza del lato di ABCD, la sua area vale:

$A_{ABCD} = AB^2 = \ell^2$.

La diagonale BD è lunga:

$BD^2 = AD^2 + AB^2 = \ell^2 + \ell^2 = 2 * \ell^2$ e

$BD = \sqrt{2} * \ell$.

Il segmento DE è lungo:

$DE^2 = BD^2 + BE^2 = BD^2 + AB^2 = (\sqrt{2} * \ell)^2 + \ell^2 = 2 * \ell^2 + \ell^2 = 3 * \ell^2$ e

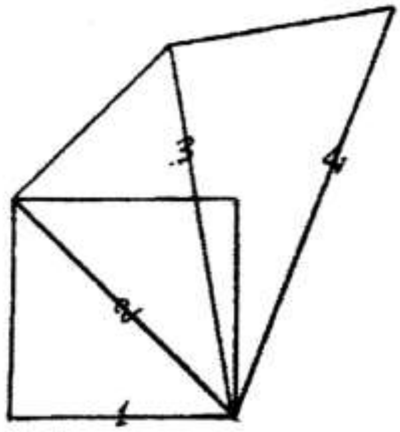
$DE = \sqrt{3} * \ell$.

Infine, DF è l'ipotenusa del triangolo rettangolo DEF ed è lunga:

$DF^2 = DE^2 + EF^2 = DE^2 + AB^2 = (\sqrt{3} * \ell)^2 + \ell^2 = 3 * \ell^2 + \ell^2 = 4 * \ell^2$ e

$DF = 2 * \ell$.

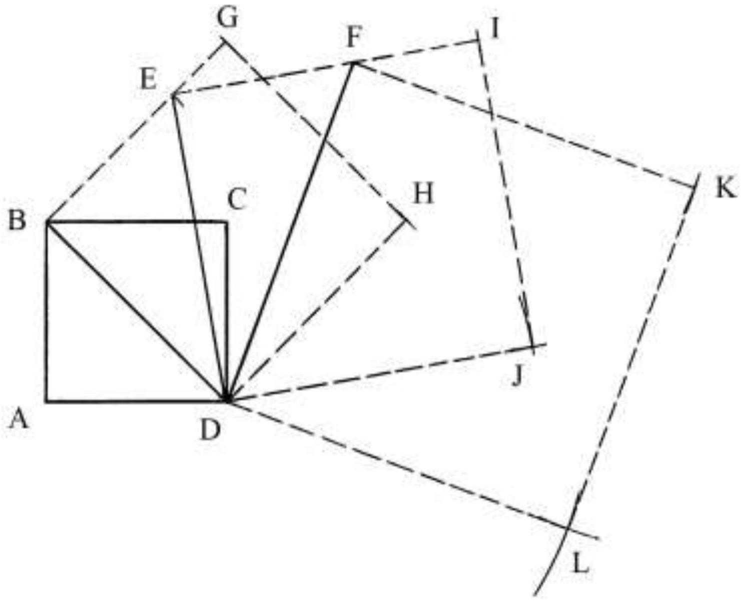
Lo schema originale di Pacioli non reca le lettere ai vertici dei poligoni ma reca le cifre 1, 2, 3 e 4 scritte su alcuni segmenti:



Doc. LVIII

Sulla diagonale BD è costruito il quadrato BGHD la cui area è:

$A_{BGHD} = BD^2 = 2 * \ell^2$.



Il quadrato DEIJ è disegnato sull'ipotenusa DE e ha area data da:

$A_{DEIJ} = DE^2 = 3 * \ell^2 = 3 * A_{ABCD}$.

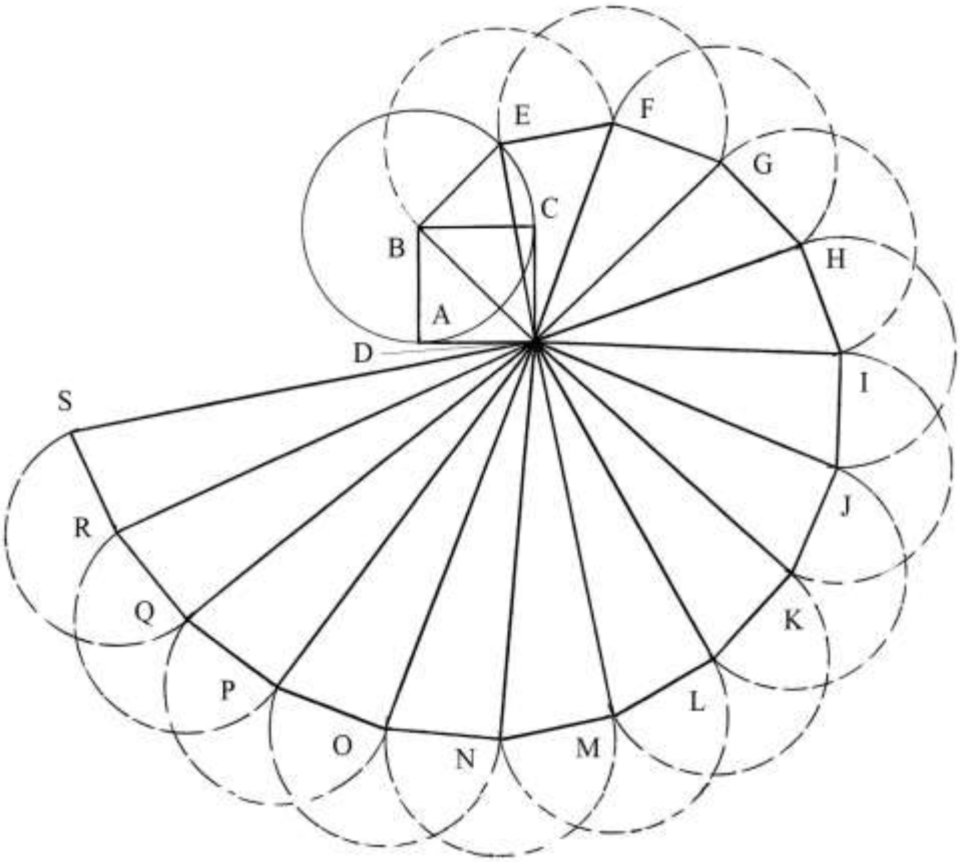
- APPROFONDIMENTO -

Pacioli non cita il nome del matematico greco Teodoro di Cirene (città della Libia orientale), vissuto nel V secolo a.C.

Egli dimostrò che le radici quadrate dei numeri interi compresi 3 e 17 (esclusi il 9 e il 16) non erano esprimili con numeri interi o con rapporti di numeri interi.

A Teodoro si deve un metodo geometrico per ricavare la radice quadrata di un numero qualsiasi: è la cosiddetta *spirale di Teodoro*. Fino ad oggi è l'unico metodo conosciuto per costruire la radice quadrata di un numero.

Lo schema che segue è basato sul quadrato ABCD già utilizzato all'inizio di questo paragrafo:



D è il centro della spirale ed è il punto nel quale convergono le ipotenuse dei triangoli rettangoli che sono disegnati in successione.

Ciascun triangolo è generato da due cateti fra loro perpendicolari, uno dei quali ha sempre lunghezza uguale a quella del lato AB e il secondo cateto è lungo quanto l'ipotenusa del precedente triangolo rettangolo.

La spirale è una linea spezzata: ABEFGHIJKLMNOPQRS. I suoi vertici si allontanano sempre più dal centro D.

La spirale mostrata sopra ruota in senso orario e se ne possono disegnare altre tre nello stesso senso, usando come centro uno degli altri tre vertici del quadrato: A, B e C. I quattro vertici poi sono utilizzabili come centro di altre quattro spirali ruotanti in senso antiorario.

Per ragioni pratiche, la spirale viene conclusa con $\sqrt{17}$: proseguendo con le radici di numeri più grandi di 17, la costruzione si sovrappone ai segmenti già disegnati.

Per semplificare i calcoli delle lunghezze delle diverse radici, fissiamo la lunghezza convenzionale dei lati di ABCD in *1* (uno).

La tabella che segue contiene le lunghezze convenzionali dei diversi segmenti che si irradiano dal centro D. La loro misura effettiva si ottiene moltiplicando la radice relativa per la vera lunghezza del lato del quadrato ABCD.

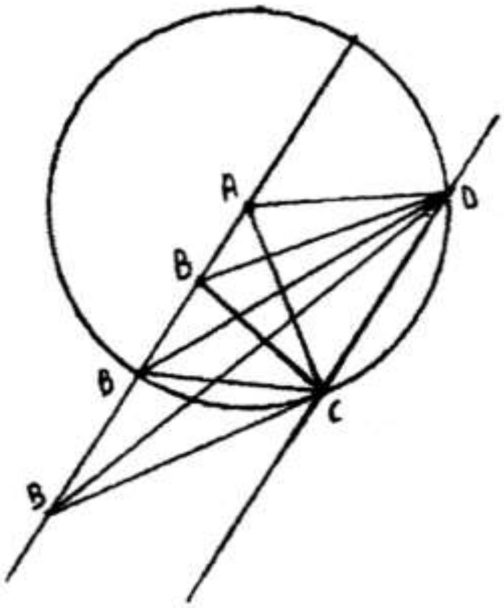
Numero d'ordine	Segmenti	Lunghezze convenzionali
1	DA	1
2	DB	$\sqrt{2}$
3	DE	$\sqrt{3}$
4	DF	$\sqrt{4} = 2$
5	DG	$\sqrt{5}$
6	DH	$\sqrt{6}$
7	DI	$\sqrt{7}$
8	DJ	$\sqrt{8}$
9	DK	$\sqrt{9} = 3$
10	DL	$\sqrt{10}$
11	DM	$\sqrt{11}$
12	DN	$\sqrt{12}$
13	DO	$\sqrt{13}$
14	DP	$\sqrt{14}$
15	DQ	$\sqrt{15}$
16	DR	$\sqrt{16}$
17	DS	$\sqrt{17}$

- -

Documento LIX

La descrizione del problema data da Pacioli presenta diverse oscurità che non sono del tutto chiarite neanche nella tesi di laurea del ricercatore portoghese Dos Santos Hirth, citata in bibliografia.

Ecco il grafico originale di Pacioli:

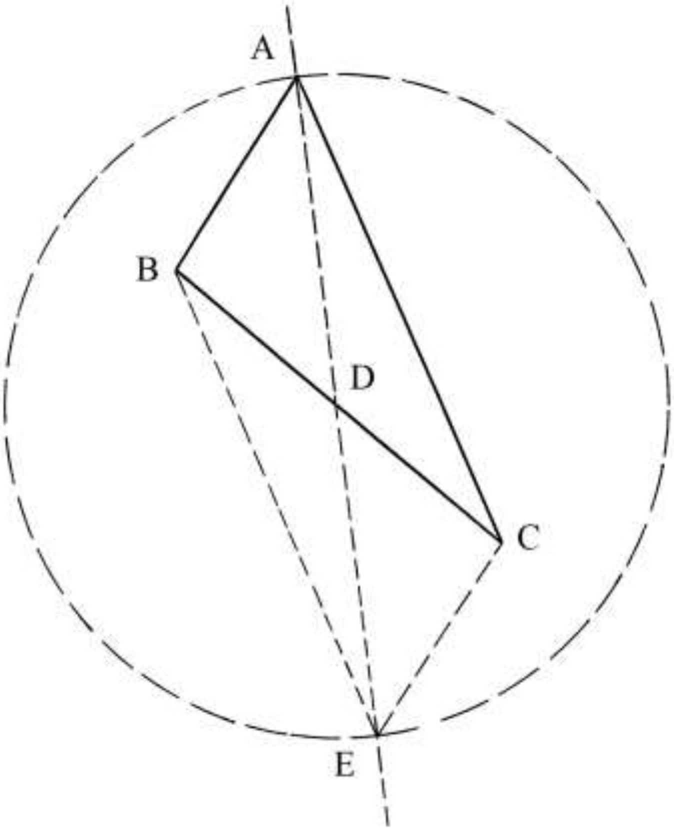


Doc. LIX

Va evidenziato un errore commesso dal disegnatore o dal copista che ha curato il manoscritto: ben *tre* vertici sono indicati con la stessa lettera “B”. Inoltre, l’originale è assai impreciso.

Qui cerchiamo di darne una possibile spiegazione, non garantendone l’assoluta aderenza al testo originale.

Lo schema che segue rispetta le proporzioni esistenti fra le dimensioni dei lati dell’originale triangolo ABC:



D è il punto medio del lato BC: Pacioli impone la condizione per la quale la lunghezza di AD deve essere maggiore di quelle di BD e DC (che sono uguali).

Per i punti A e D tracciare una retta.

Fare centro in D e con raggio DA disegnare una circonferenza che incontra la retta nel punto E.

Il triangolo BCE è simmetrico a quello ABC rispetto al lato BC; valgono le seguenti relazioni:

AB = CE
AC = BE.

Inoltre, queste coppie di lati sono fra loro parallele:

AB//CE e AC//BE.

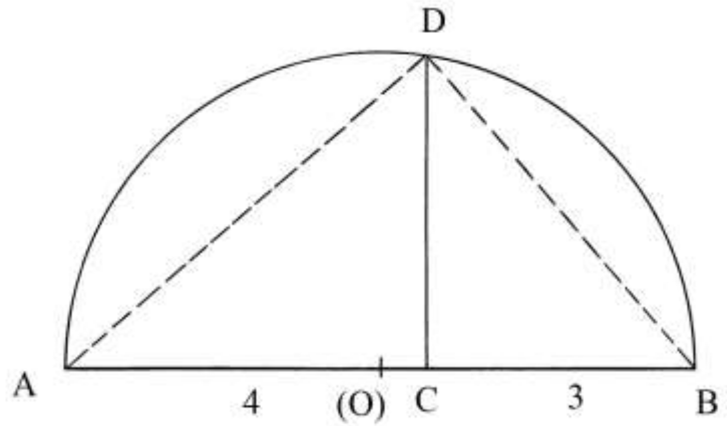
I triangoli ABE e AEC hanno aree uguali a quella di ABE.

<u>Documento LX</u>

Il problema è la costruzione per via geometrica della radice quadrata di un numero che per via aritmetica fornisce una *radice sorda* e cioè un numero irrazionale o radice di numeri che non sono quadrati perfetti.

Pacioli fa l’esempio del numero 12: esso può essere scomposto in 2 per 6 oppure in 3 per 4.

Il grafico che segue mostra l’esempio del caso 3 per 4: AB è lungo 7 unità. I due segmenti adiacenti, AC e CB, sono lunghi rispettivamente 4 e 3 unità e la loro somma è esattamente 7 unità:



Determinare il punto medio di AB: è (O). Fare centro in (O) e con raggio (O)A = (O)B disegnare una semicirconferenza. Dal punto C innalzare la perpendicolare a AB fino a incontrare la semicirconferenza nel punto D.

ADB è un triangolo rettangolo inscritto nel semicerchio. Per il noto secondo teorema di Euclide sui triangoli rettangoli, l'altezza DC è medio proporzionale fra le lunghezze di AC e di CB:

$AC : DC = DC : CB$

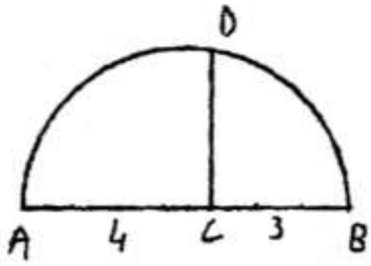
$4 : DC = DC : 3$

$DC^2 = AC * CB = 4 * 3 = 12$

$DC = \sqrt{12}$.

La costruzione serve a determinare la lunghezza di $\sqrt{12}$.

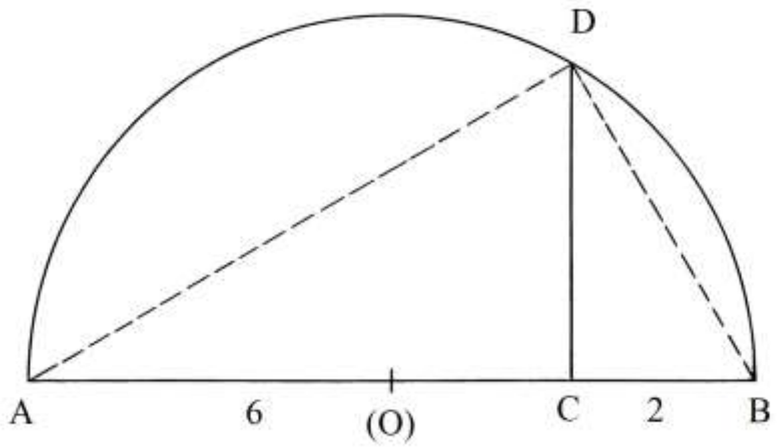
È questa l'unica soluzione nel trattato originale che sia accompagnata da un disegno:



Doc. LX

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Lo stesso risultato può essere conseguito con la soluzione che è presentata nello schema che segue:



Il numero 12 viene scomposto nei suoi sottomultipli 2 e 6.

AC è lungo 6 e CB 2 unità: il diametro AB è lungo 8 unità.

Fissare il punto medio di AB: è (O). Fare centro in (O) e con raggio (O)A = (O)B disegnare una semicirconferenza. Dal punto C condurre la perpendicolare a AB fino a intersecare la semicirconferenza in D. Anche il triangolo ADB è rettangolo.

Vale la proporzione:

AC : DC = DC : CB

$DC^2 = AC * CB = 6 * 2 = 12$

$DC = \sqrt{12}$.

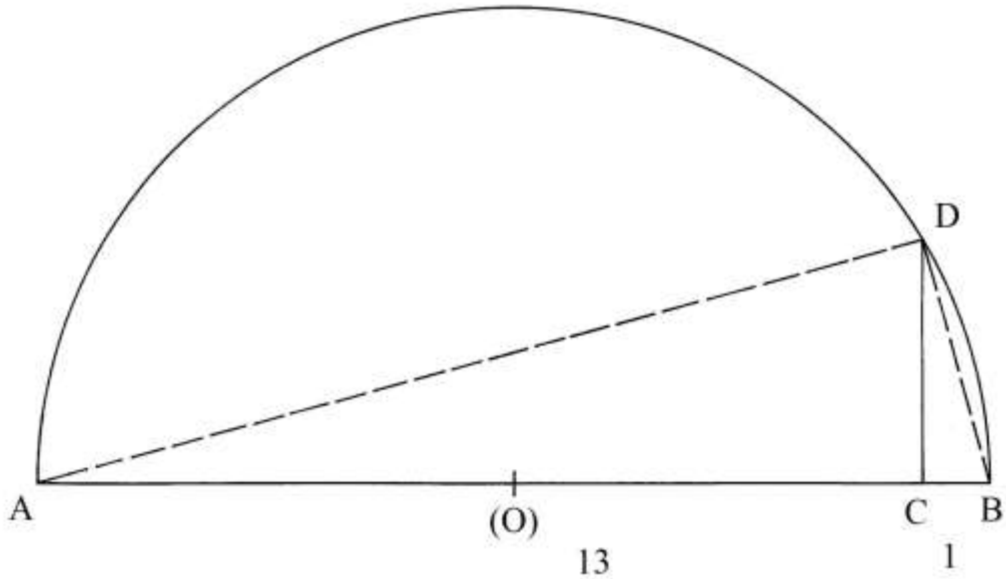
Le due soluzioni, 4 per 3 e 6 per 2, portano allo stesso risultato: le lunghezze delle due altezze DC sono uguali in entrambi i casi.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Infine, Pacioli accenna al modo di ricavare per via geometrica la radice di 13. Egli scompone questo numero nella moltiplicazione dei suoi numeri primi:

13 = 13 * 1.

Il grafico che segue applica il metodo già impiegato nei due casi precedenti:



AC è lungo 13 unità e CB 1 unità.

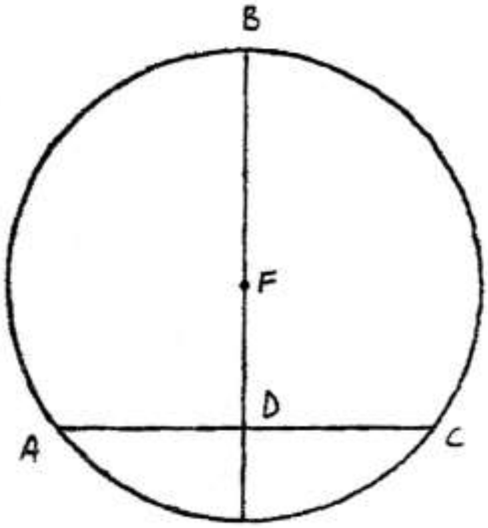
Vale la seguente proporzione:

AC : DC = DC : CB

$DC^2 = AC * CB = 13 * 1 = 13$
$DC = \sqrt{13}$.

Documento LXI

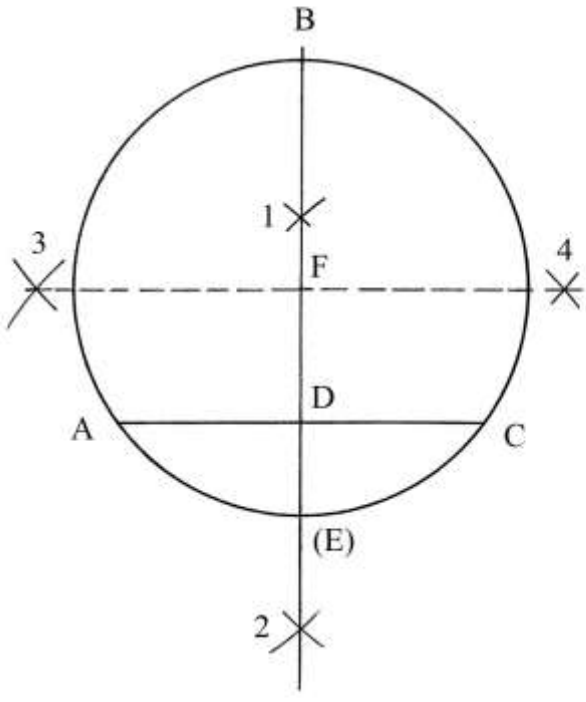
È dato un cerchio di cui si vuole determinare il centro:



Doc. LXI

Tracciare una corda: è AC.

Facendo centro in A e in C costruire l'asse di questo segmento: esso passa per i punti 1 e 2 e taglia AC nel suo punto medio D.

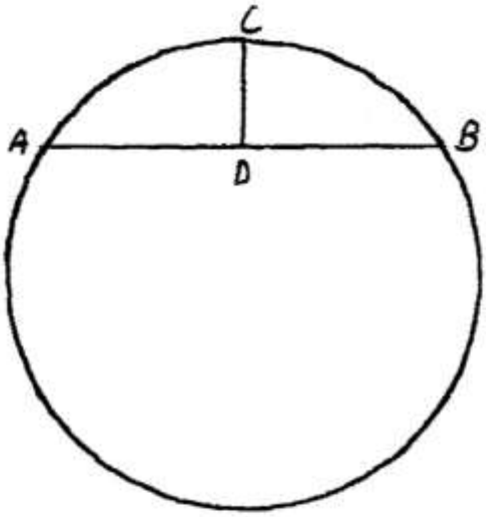


L'asse incontra la circonferenza nei punti B e (E): B(E) è un diametro.

Occorre ricavare il punto medio del diametro B(E): fare centro in questi due punti e disegnare, con la stessa apertura, quattro archi che si intersecano in 3 e in 4. Per questi punti passa l'asse di B(E) che è un secondo diametro, perpendicolare a quello B(E): il punto F è il suo medio ed è il centro del cerchio.

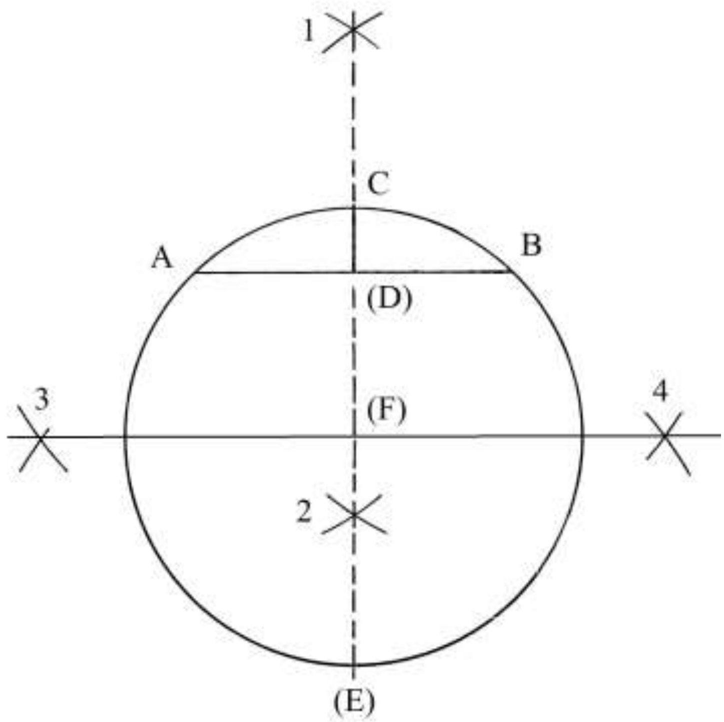
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Pacioli presenta un secondo schema che identica come "Doc. LXII":



Doc. LXII

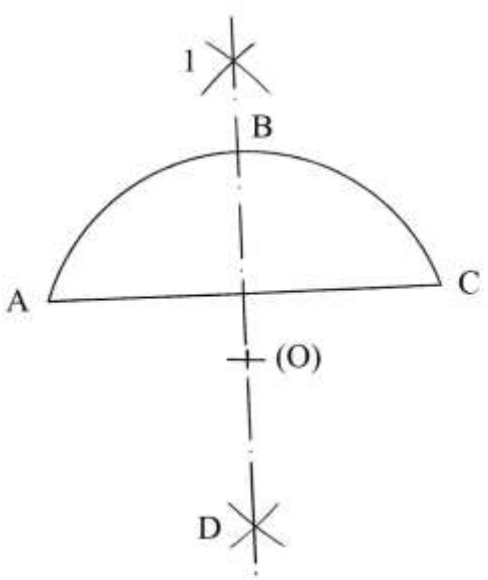
Con ogni probabilità si tratta di un errore: il grafico sembra essere una variante della costruzione indicata come "Documento LXI":



Documento LXII

Il testo non è accompagnato da alcuno schema.

È dato un arco di circonferenza AC (di centro (O)); esso deve essere diviso in due parti uguali.

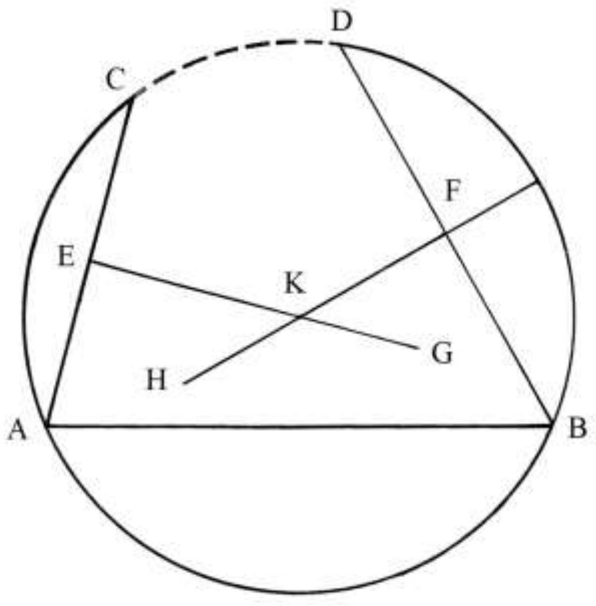


Tracciare la corda AC e costruire il suo asse che passa per i punti 1 e D.

L'arco AC è diviso in due parti uguali: gli archi AB e BC hanno uguale lunghezza.

Documento LXIII

Il problema da risolvere è: dato un arco di circonferenza passante per i punti C, A, B e D completarlo con la tracciatura dell'intera circonferenza: il centro di questa ultima è sconosciuto.

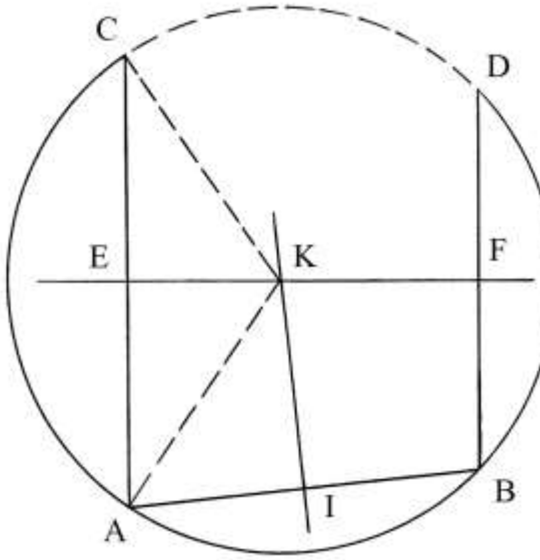


Tracciare tre corde: AC, AB e BD. Determinare gli assi di almeno due di esse: EG è l'asse della corda AC e FH è quello di BD.

I due assi si incontrano nel punto K che è il centro della circonferenza. Facendo centro in questo punto con raggio KA=KB è facile completarla con l'arco mancante CD.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

È necessario che le corde AC e BD non siano fra loro parallele, altrimenti occorre tracciare una terza corda come è il caso di quella AB:



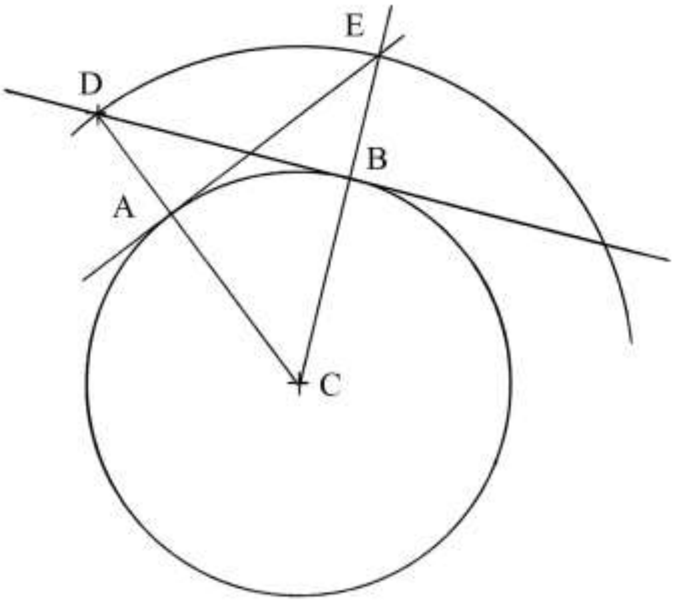
Le corde AC e BD sono parallele e i loro assi di simmetria si sovrappongono fondendosi in EF che è un segmento che fa parte di un diametro.

La corda AB non è parallela alle prime due: il suo asse, KI, incontra EF nel centro K.

Fare centro in K con raggio KA=KC per completare la circonferenza con l'arco mancante CD.

Documento LXIIII

Il testo descrive la tracciatura di una retta tangente a un cerchio da un punto ad esso esterno.



Il cerchio ha centro in C e D è il punto esterno; collegare D con C: la linea taglia in A la circonferenza.

Fare centro in C e con raggio CD disegnare un arco che è concentrico alla prima circonferenza.

Dal punto A tracciare la perpendicolare a CD: essa taglia l'arco esterno nel punto E. Collegare E con C: il segmento EC è un raggio e incontra la circonferenza nel punto B.

Per D e per B passa la tangente al cerchio.

- APPROFONDIMENTO -

L'apposizione delle lettere ai vertici di questo schema, e non solo di questo, denuncia una notevole sciatteria se non imprecisione. Pacioli vuole tracciare una retta tangente a un cerchio da un punto ad esso esterno: egli usa le lettere dell'alfabeto non rispettandone la successione. Il centro è indicato con C e il punto esterno con D: il semplice buon senso vorrebbe che quei punti, i primi due della costruzione, fossero indicati con le lettere A e B.

Pare che Pacioli anticipi i passaggi successivi indicando con A e con B due punti le cui collocazioni non sono ancora note: A è l'intersezione fra la semiretta CD e la circonferenza e la sua posizione non può essere definita prima della sua tracciatura. B non può essere inserito sullo schema prima di aver disegnato la semiretta CE.

L'impressione che se ne ricava è che questo e altri Documenti siano stati preparati con una certa superficialità e non sottoposti ad una accurata revisione.

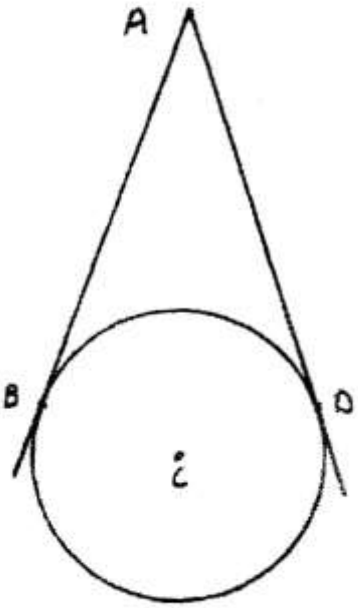
- -

Documento LXV

La costruzione presentata nel precedente Documento non è completa perché da un punto esterno è sempre possibile condurre *due* rette tangenti a un cerchio.

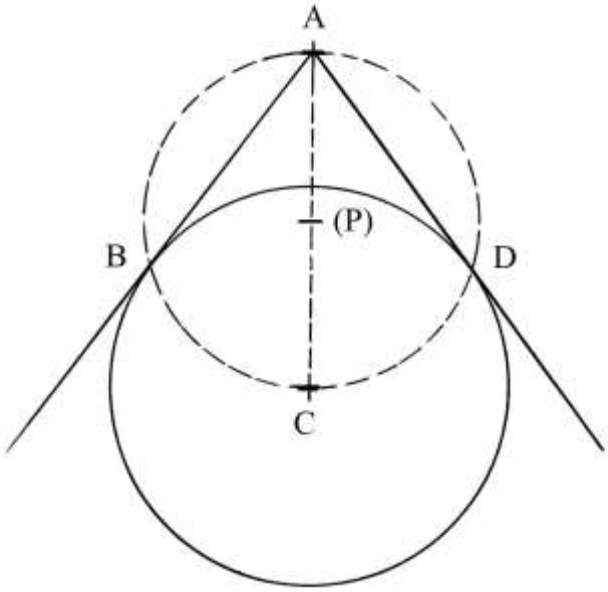
Nel caso precedente ne è stata disegnata solo una: quella passante per D e per B.

Un cerchio ha centro in C. Devono essere disegnate le due tangenti a partire dal punto A, esterno.



Doc. LXV

Di seguito è impiegata un’altra soluzione:



Collegare C con A e stabilire il punto medio di AC: è (P).

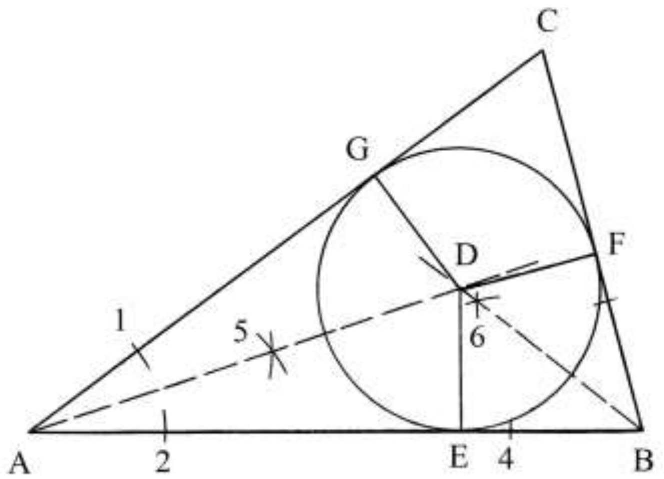
Fare centro in (P) e con raggio (P)A = (P)C tracciare una circonferenza che interseca la prima nei punti B e D: questi ultimi sono i punti di tangenza.

Disegnare le semirette uscenti da A e passanti per B e per D.

Documento LXVI

Il problema chiede di inscrivere un cerchio in un triangolo.

ABC è il triangolo:



Costruire le bisettrici di almeno due degli angoli interni: sono quelli nei vertici A e B.

Fare centro in A e in B con lo stesso raggio e tracciare quattro archi che fissano quattro punti sui lati AB e BC: 1, 2, 3 e 4.

Fare centro nelle coppie di punti 1-2 e 3-4 e disegnare altri quattro archi che si incontrano nei punti 5 e 6: tracciare le semirette A-5 e B-6 che si incontrano nel punto D, centro del cerchio inscritto.

Per D condurre le perpendicolari ai tre lati: sono DE, DF e DG.

Fare centro in D e con raggio DE = DF = DG disegnare una circonferenza che è tangente nei punti E, F e G.

- APPROFONDIMENTO -

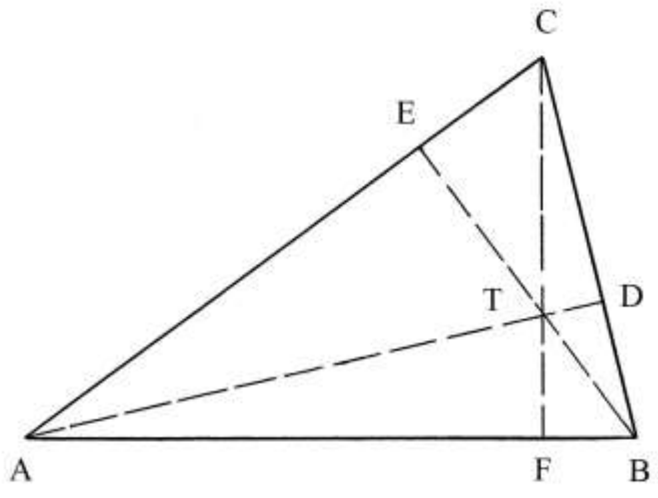
Alcuni punti notevoli di un triangolo

Le *bisettrici* dei tre angoli interni del triangolo ABC della precedente figura si intersecano in un punto, D, che è chiamato *incentro*.

Si chiama *inraggio* la distanza dell'incentro dai lati: DE = DF = DG. I tre *inraggi* sono perpendicolari ai lati del triangolo nei punti E, F e G.

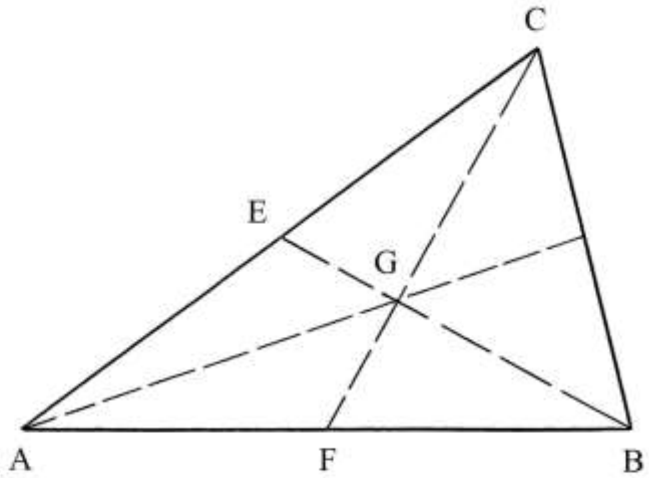
Il cerchio di centro D e di inraggio DE si chiama *incerchio*.

Le *altezze* AD, BE e CF si incontrano in un punto, O, che è detto *ortocentro*:

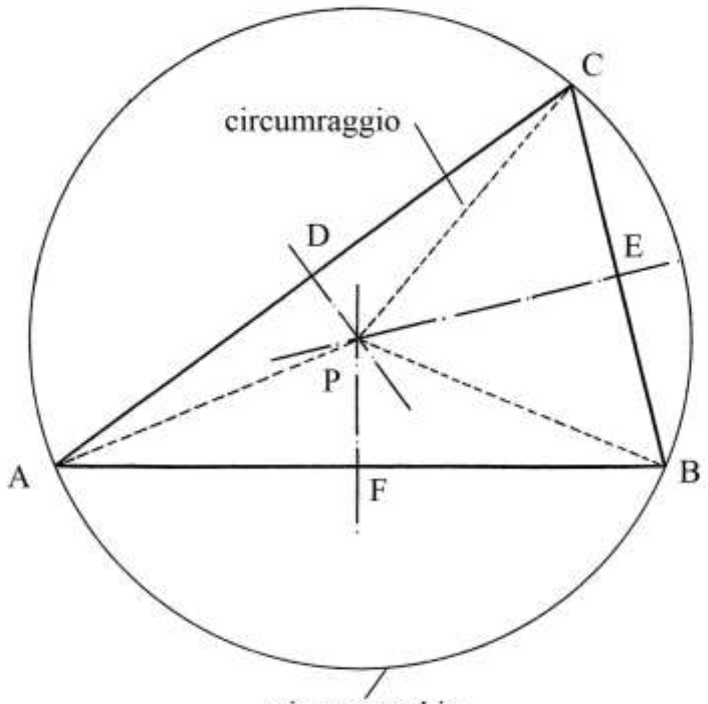


Esse sono tracciate dai vertici e raggiungono i lati opposti: le altezze sono perpendicolari ai lati che colpiscono.

Le *mediane* AD, BE e CF collegano un vertice con il punto medio del lato opposto: esse si incontrano in un punto, G, che è noto come *baricentro*:



Infine, gli *assi dei tre lati* passano per i loro punti medi D, E e F formando angoli retti con i rispettivi lati: essi si intersecano in un punto, il *circocentro*, che è il centro del cerchio *circoscritto* al triangolo, che è chiamato *circumcerchio*; il raggio PA = PB = PC è detto *circumraggio*:

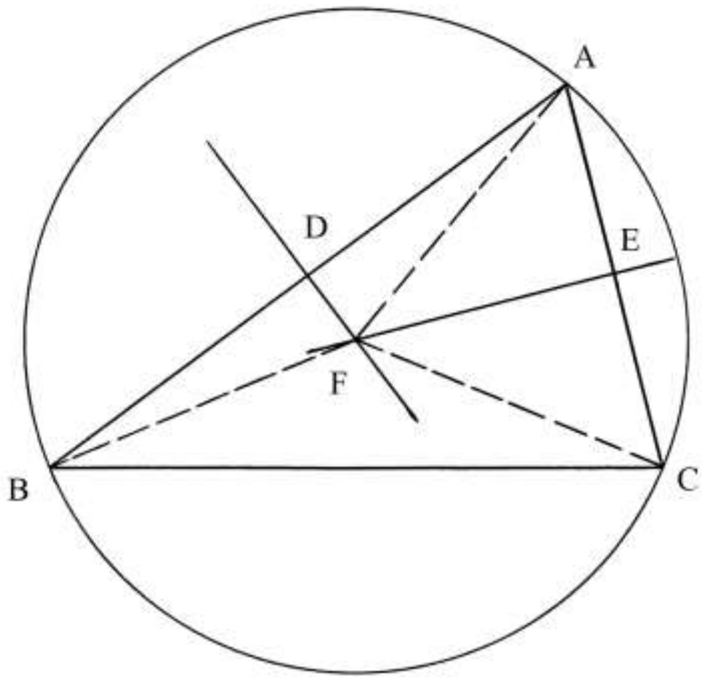


P è il *circumcentro*.

\- -

Documento LXVII

Il problema chiede di circoscrivere un cerchio a un triangolo dato.



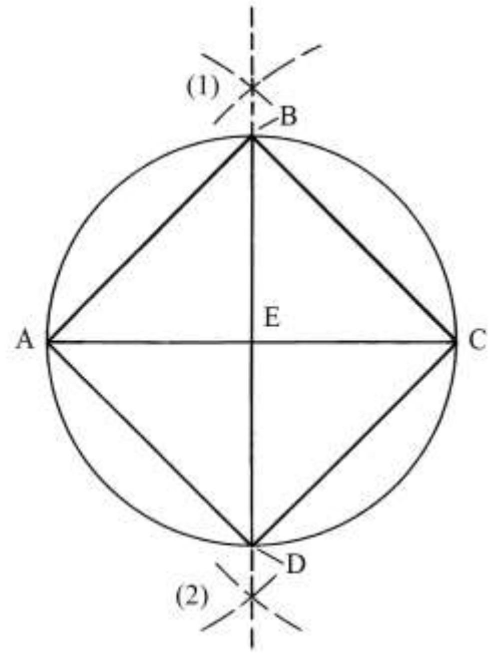
ABC è il triangolo. Occorre costruire gli *assi* di almeno due dei tre lati: sono scelti AB e AC e i loro punti medi sono rispettivamente D e E.

Gli assi dei due lati si incontrano nel punto F, circumcentro del cerchio: collegare F con i tre vertici del triangolo.

Per costruzione, le lunghezze di FA, FB e FC sono uguali: questi tre segmenti sono altrettanti raggi del cerchio circoscritto.

Documento LXVIII

Il Documento propone l'inscrizione di un quadrato in un cerchio dato.



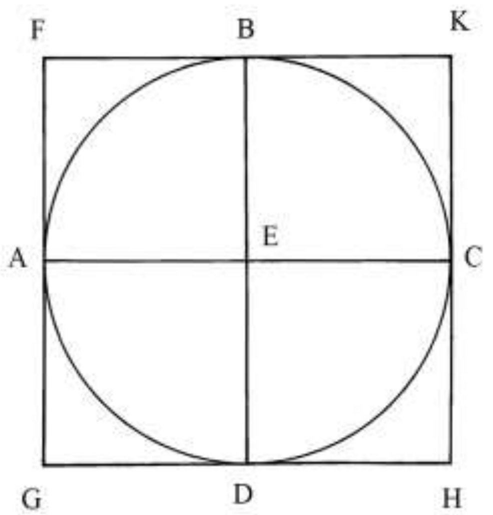
Il centro del cerchio è E e il suo diametro orizzontale è AC.

Fare centro nei punti A e A e con raggio a piacere tracciare quattro archi esterni al cerchio che si incontrano nei punti (1) e (2): per questi ultimi passa l’asse di AC che incrocia la circonferenza nei punti B e D.

ABCD è il quadrato inscritto nel cerchio.

<u>Documento LXIX</u>

Un quadrato deve essere circoscritto a un cerchio di centro E e diametro AC:

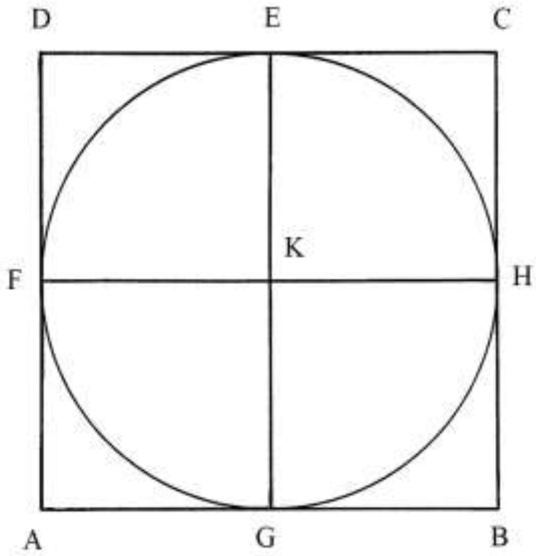


Occorre costruire l’asse del diametro AC: esso passa per i punti B e D. La circonferenza è divisa in quattro parti uguali.

Per i punti A, B, C e D tracciare le tangenti alla circonferenza, parallele ai diametri BD e AC: sono disegnati i segmenti FG, GH, HK e KF che sono i quattro lati del quadrato circoscritto al cerchio.

Documento LXX

La costruzione qui descritta è l’esatto inverso della precedente: dato il quadrato ABCD deve esservi inscritto un cerchio.



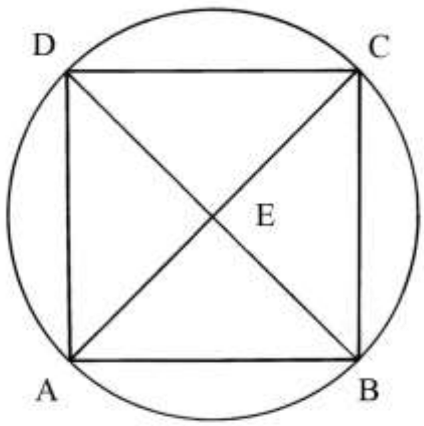
Pacioli propone di fissare i punti medi dei quattro lati del quadrato: sono E, F, G e H.

Sono poi tracciate le mediane EG e FH che si incontrano nel centro K.

Con raggio KE fare centro in K e disegnare la circonferenza inscritta nel quadrato: essa è tangente nei punti medi dei lati del poligono.

Documento LXXI

È dato il quadrato ABCD che deve essere inscritto in un cerchio:

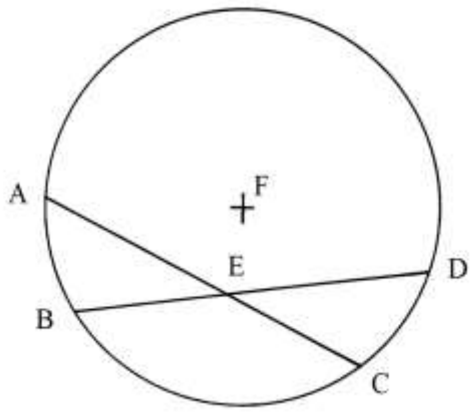


Tracciare le diagonali AC e BD: esse si incontrano nel centro E.

Con raggio EA fare centro in E e disegnare la circonferenza che passa per i quattro vertici del quadrato.

Documento LXXII

In un cerchio di centro F sono disegnate due corde: AC e BD, che si intersecano nel punto E.



Pacioli introduce l'uguaglianza:

AE * EC = BE * ED.

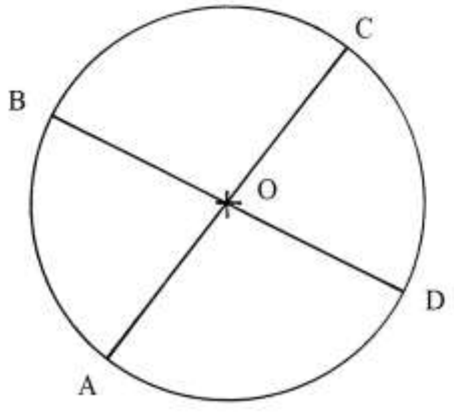
Il rettangolo che ha per dimensioni AE e EC ha la stessa superficie del rettangolo di dimensioni BE e ED.

Senza citarlo espressamente, l'Autore applica il *teorema delle corde*.

Pacioli distingue alcuni possibili casi di intersezione delle corde. Il primo è mostrato nella figura qui sopra.

Nota: negli schemi che seguono le lettere sono apposte rispettando le attuali convenzioni, rispettose dell'ordine alfabetico.

Il secondo caso è quello di due corde che passano entrambe per il centro del cerchio, O:



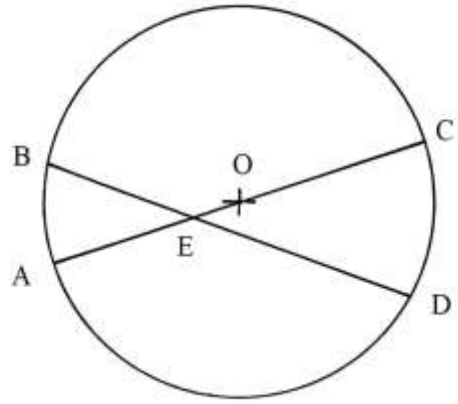
Le due corde, AC e BD, sono due diametri che si dividono reciprocamente in due parti uguali, lunghe quanto il raggio *r* del cerchio:

AO * OC = BO * OD

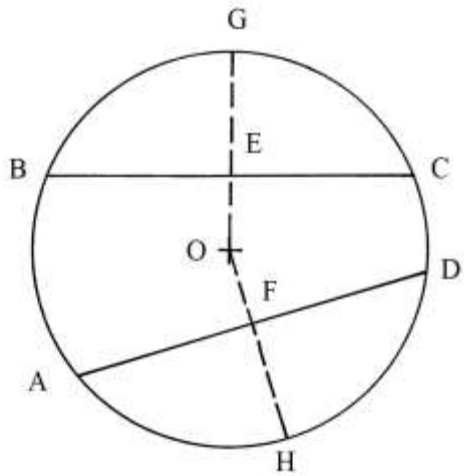
r * r = r * r

$r^2 = r^2$.

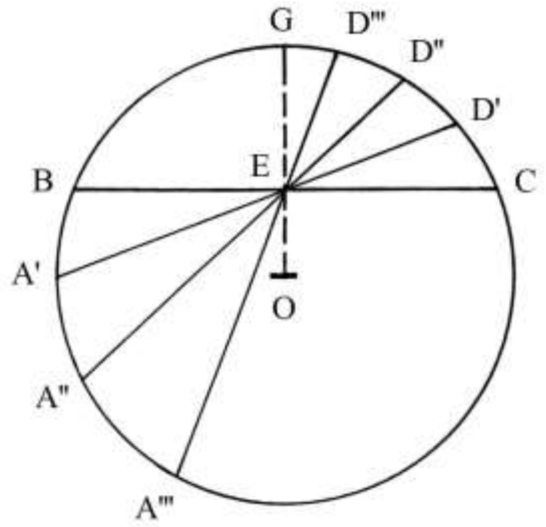
Un ulteriore caso è mostrato nella figura che segue:



La corda AC passa per il centro del cerchio ed è un suo diametro.
Le due corde si incontrano nel punto E.
Anche in questo caso vale la relazione:
AE * EC = BE * ED.
Pacioli sembra adombrare la possibilità che due corde non passanti per il centro del cerchio possano dividersi reciprocamente a metà:



Lo schema che segue conferma l’impossibilità. BC è la prima corda e E è il suo punto medio per il quale passa il raggio OG.



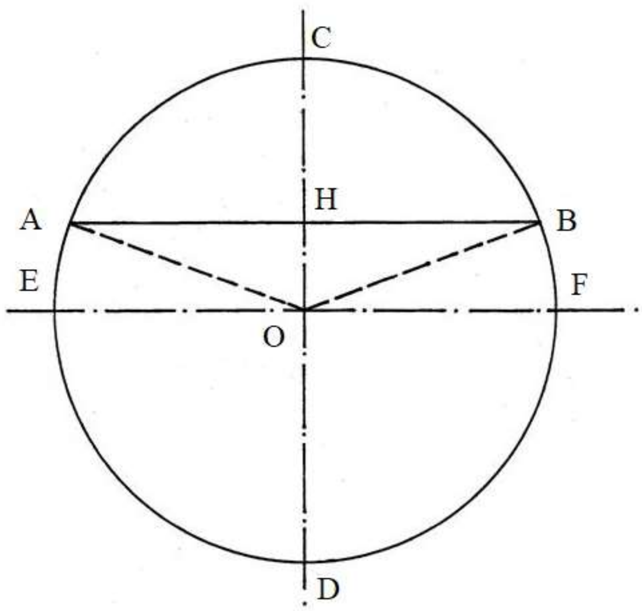
Le tre corde A’D’, A’’D’’ e A’’’D’’’ passano per il punto E: ma questo ultimo *non* le divide in parti uguali. Infatti:

* A’E > ED’;
* A’’E > ED’’;
* A’’’E > ED’’’.

\- APPROFONDIMENTO -

Il teorema delle corde

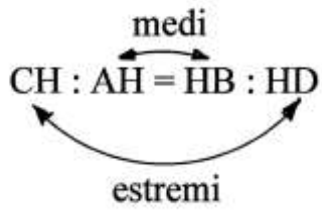
La corda AB e la freccia CH sono perpendicolari e questa ultima ha un vertice (H) nel punto medio di AB:



Inoltre, CH è parte di un diametro, CD.

Le corde AB e CD sono entrambe inscritte nello stesso cerchio e i loro vertici giacciono sulla circonferenza: esse si intersecano ad angolo retto in H tagliando in due parti uguali la corda AB. CD è l’*asse del segmento* AB.

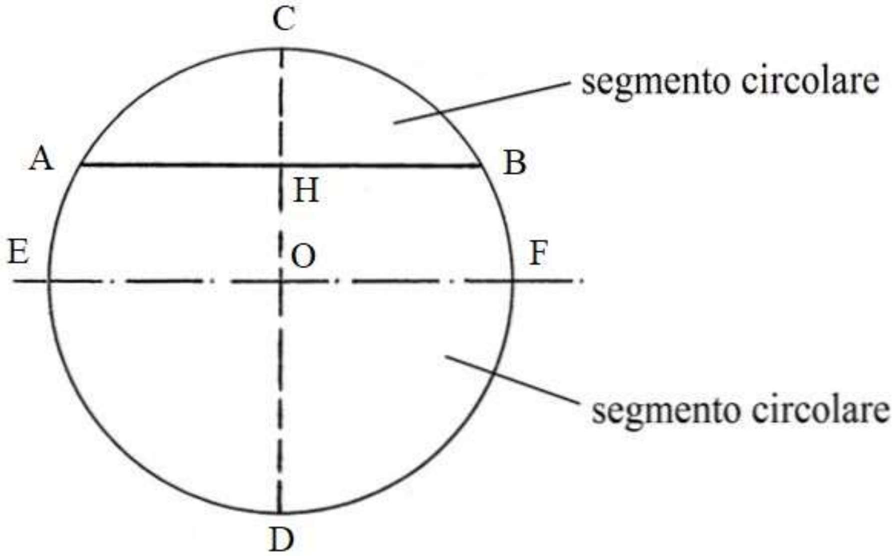
I due segmenti che formano una corda (ad esempio AH e HB) sono i *medi* e i due segmenti dell’altra corda (CH e HD) sono gli *estremi* di una proporzione:



Ne consegue:

HD = (AH * HB)/CH .

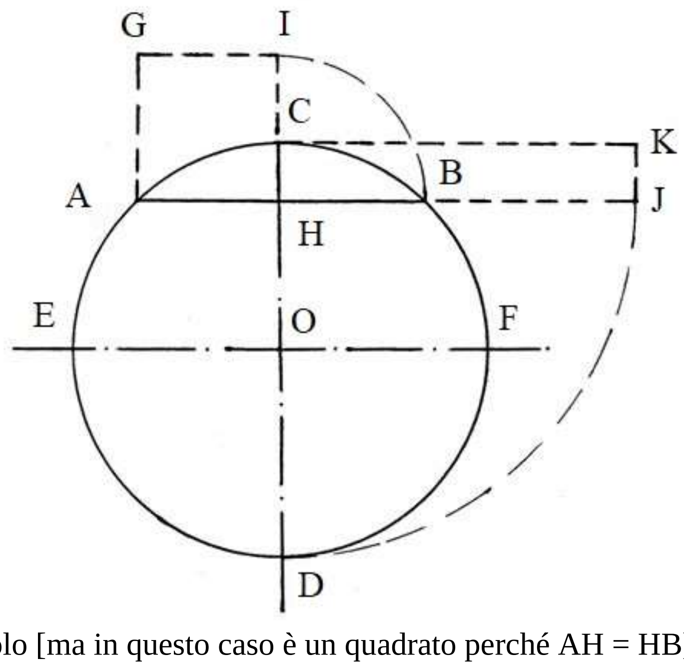
Una corda divide un cerchio in *due* segmenti circolari a una base:



Torniamo alla proporzione CH : AH = HB : HD. Da essa consegue

CH * HD = AH * HB

Costruire i due rettangoli basati sulle lunghezze dei quattro segmenti che formano le due corde:

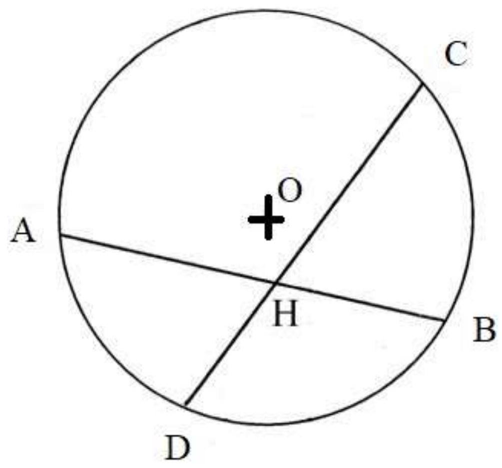


* il rettangolo [ma in questo caso è un quadrato perché AH = HB] AGIH ha dimensioni AH * HB ;
* il rettangolo HCKJ che ha dimensioni CH * HD.

I due poligoni hanno *uguale superficie*.

La figura è un caso particolare di applicazione del *teorema delle corde*.

In generale, il teorema vale per qualunque coppia di corde che si incrociano all'interno di un cerchio, senza formare angoli particolari e senza che almeno una delle due sia un diametro, come è il caso della figura che segue:

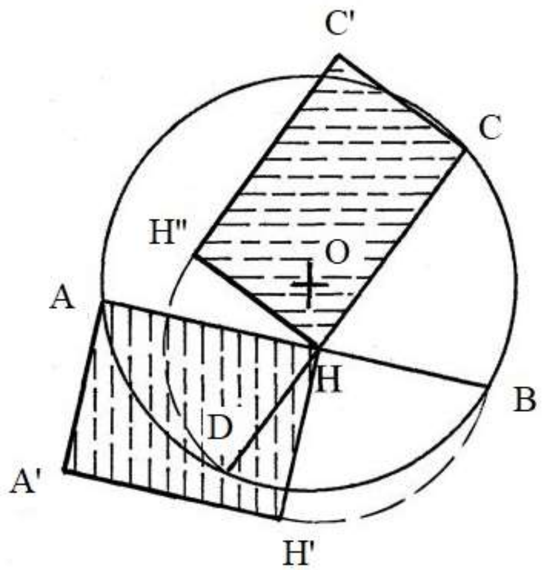


Anche in questo caso vale la relazione

AH : DH = HC : HB da cui

AH * HB = DH * HC .

Lo schema che segue mostra i due rettangoli di area uguale con lati lunghi quanto i segmenti generati sulle corde dalla loro intersezione:



I rettangoli AHH'A' e HH''C'C hanno uguale superficie.

Il teorema delle corde afferma: *nel caso di due corde generiche interne a un cerchio e intersecantesi, il rettangolo costruito sui due segmenti di una corda ha la stessa superficie del rettangolo costruito sui segmenti dell'altra corda*.

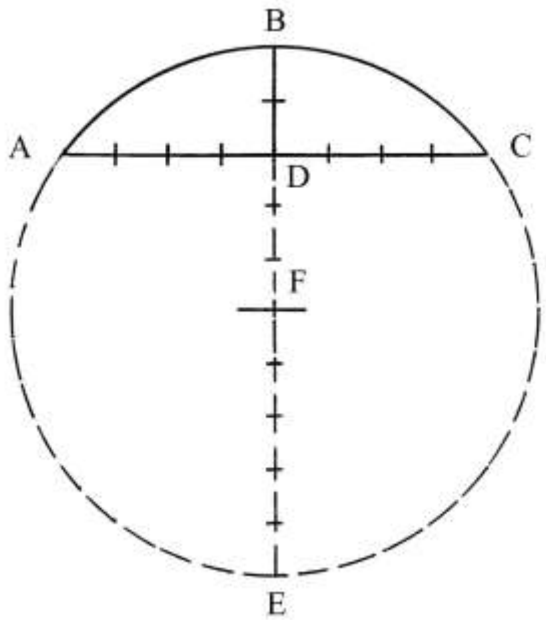
Il teorema delle corde è contenuto nella *Proposizione 35* del Libro III degli *Elementi* di Euclide.

- -

<u>Documento LXXIII</u>

Dai problemi sulle corde presentati nel precedente Documento discende la soluzione di un altro quesito.

ABC è un arco di cerchio, un *segmento circolare*:



Esso è una superficie delimitata dall'arco ABC e dalla corda AC.

Sono note le lunghezze della corda AC (8 unità) e della freccia o *saetta* BD (2 unità).

Il problema chiede di calcolare la lunghezza del diametro BE.

Prolungare verso il basso la corda BD.

Pacioli impiega una procedura che contiene i seguenti passi:

* moltiplicare la lunghezza di DA per sé stessa:

  $DA * DA = DA^2 = (AC/2)^2 = (8/2)^2 = 16$;
* dividere per la lunghezza della freccia BD: 16/2 = 8, lunghezza del segmento DE;
* sommare le lunghezze di BD e di DE: BD * DE = 2 + 8 = 10, lunghezza del diametro BE.

Il raggio del cerchio è lungo:

$r = DE/2 = 10/2 = 5$.

Fissare il punto F a distanza 5 da B e con raggio FB disegnare l'arco AEC che completa la circonferenza.

La procedura è corretta.

Numerosi Autori precedenti o contemporanei di Pacioli hanno affrontato lo stesso problema:

* l'agronomo romano Lucio Giunio Moderato Columella (4-70);
* il mercante e abacista fiorentino Paolo Gherardi (inizio XIV secolo);
* l'abacista fiorentino Paolo dell'Abbaco (o Paolo Dagomari, 1282-1374);
* il senese Tommaso della Gazzaia (fine Trecento – 1433);

* il matematico Leonardo da Cremona (attivo all'inizio del XV secolo);
* Leon Battista Alberti (1404-1472);
* Orbetano da Montepulciano (XV secolo).

Ovviamente, Pacioli, come era suo costume, non cita le sue fonti: sono note le fondate accuse di plagio che gli furono avanzate già da Giorgio Vasari (1511 – 1574).

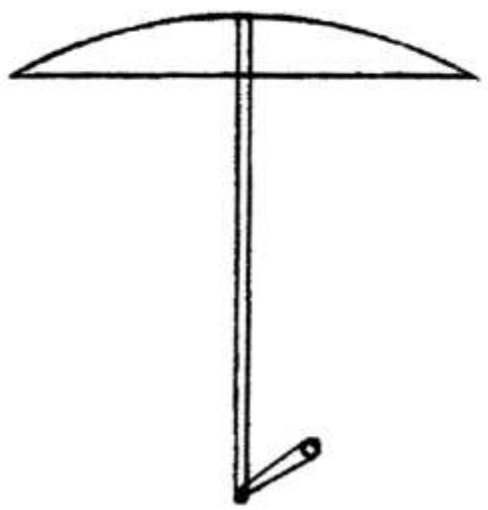
Infine, Pacioli calcola la lunghezza, *c*, della circonferenza:

c = diametro * (3 + 1/7) = 10 * (3 + 1/7) = 10 * 22/7 = 31 + 3/7.

L'Autore attribuisce a π il valore approssimato di (3 + 1/7) che risale a Archimede.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Con la stessa sigla "Doc. LXXIII" Pacioli inserisce lo schema riprodotto di seguito:



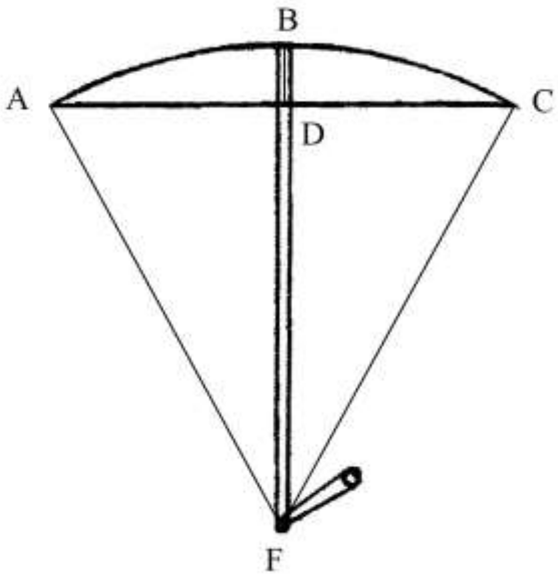
Doc. LXXIII

L'Autore descrive l'uso di una fune per misurare sul terreno la corda e la freccia di un segmento circolare o la larghezza di un fiume.

La descrizione degli usi è assai imprecisa.

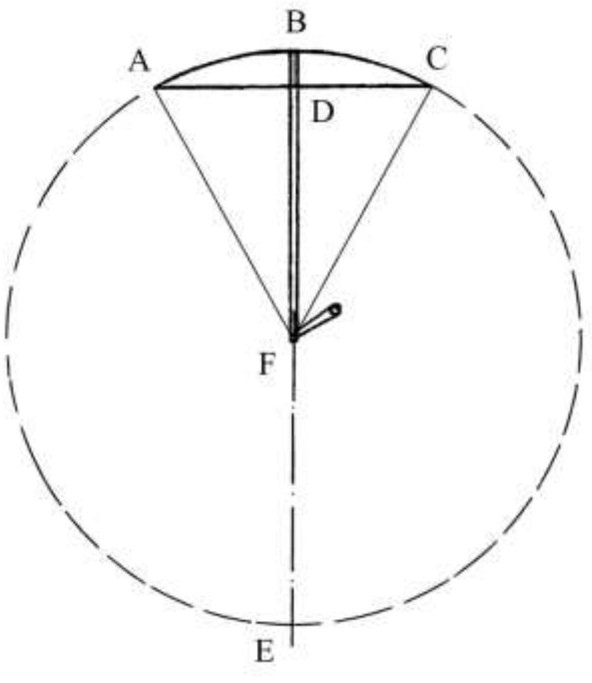
Utilizziamo le lettere già impiegate nella soluzione del primo problema di questo stesso Documento.

AC è la corda e BD è la freccia. La ricostruzione dello schema originale di Pacioli porta a concludere che un capo della fune sia posizionato nel punto F:



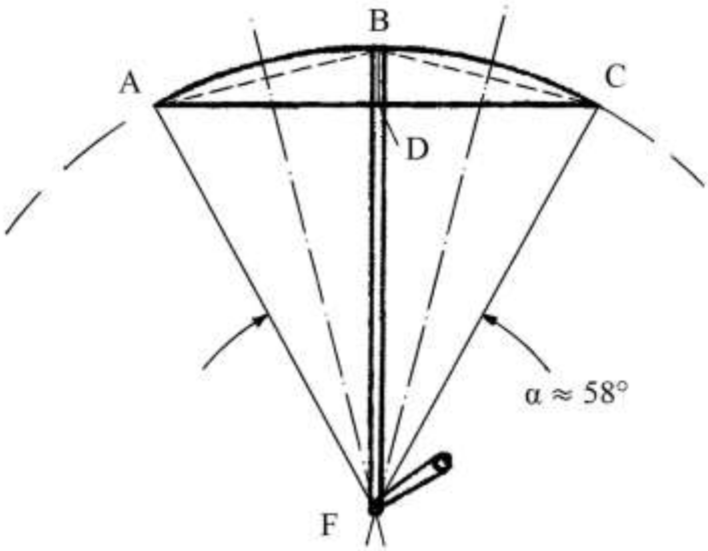
La linea curva ABC è un arco di circonferenza il cui centro è in F: nella figura sono aggiunti i raggi AF e CF, assenti nell'originale. ABCD è un segmento circolare: AC è la corda e BD è la freccia (o *saetta*).

Pacioli propone di moltiplicare la lunghezza di metà della lunghezza della corda (DA) per sé stessa e di dividere questo prodotto per la lunghezza della freccia (BD): per il teorema delle corde, il risultato non è la lunghezza di DF ma quella seconda freccia DE):



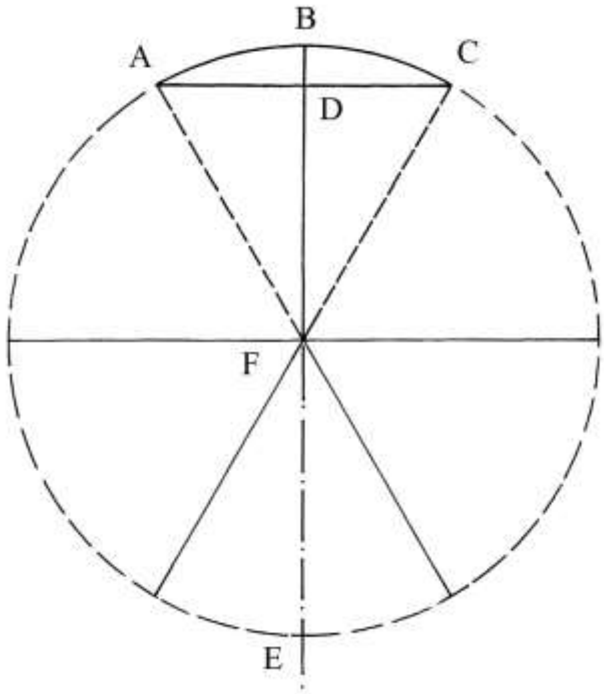
F è il centro della circonferenza di raggio FA = FB = FC = FE.

Lo schema che segue approfondisce le proprietà geometriche del disegno originale:



AB e BC sono due corde e i loro assi di simmetria si intersecano nel punto F.

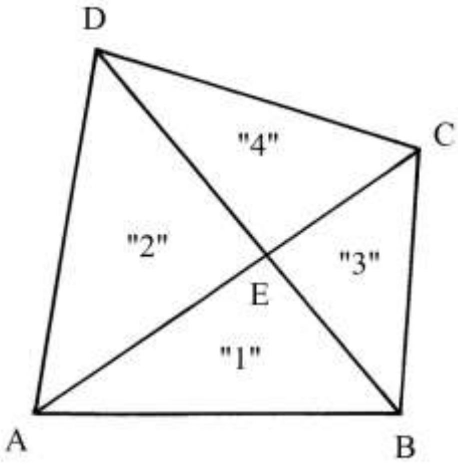
L'angolo α = AFC è ampio approssimativamente 58°: si può ipotizzare che Pacioli avesse intenzione di usare un angolo di 60° la cui costruzione è assai facile:



AC è un lato dell'esagono inscritto nel cerchio di centro F e l'angolo AFC è ampio esattamente 60°.

<u>Documento LXXIV</u>

ABCD è un quadrilatero in cui sono tracciate le diagonali AC e BD: esse lo dividono in quattro triangoli identificati con le sigle "1", "2", "3" e "4".



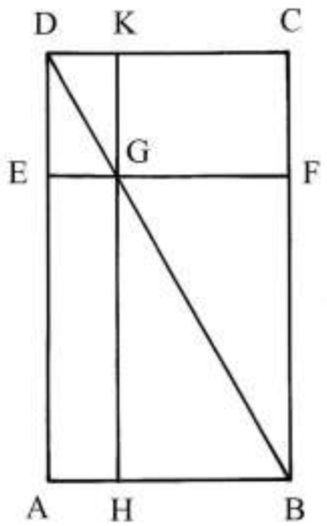
Lo schema fornisce a Pacioli l’opportunità per presentare una serie di proporzioni:

* “1” : “2” = “3” : “4”
* “2” : “1” = “4” : “3”
* “1” : “3” = “2” : “4”.

Documento LXXV

Il testo propone un metodo grafico per accrescere o diminuire le dimensioni di una figura piana mantenendo le proporzioni fra di esse.

ABCD è un rettangolo che deve essere ridotto a un altro rettangolo con le stesse proporzioni fra le dimensioni lineari:



La lunghezza del lato verticale deve essere ridotta alla dimensione del segmento AE.

Tracciare la diagonale DB. Dal punto E disegnare la parallela a AB (e a DC): EF taglia CB in F e la diagonale DB in G.

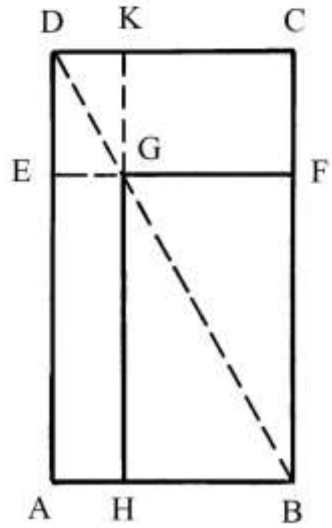
Per il punto G condurre la parallela a DA (e a CB): è il segmento HK.

BFGH è un rettangolo che conserva le proporzioni esistenti fra le lunghezze dei lati di ABCD:

AB : HB = AD : HG.

In pratica, Pacioli ha applicato all’inverso il *teorema dello gnomone* che aveva già usato nella soluzione del problema contenuto nel Documento L.

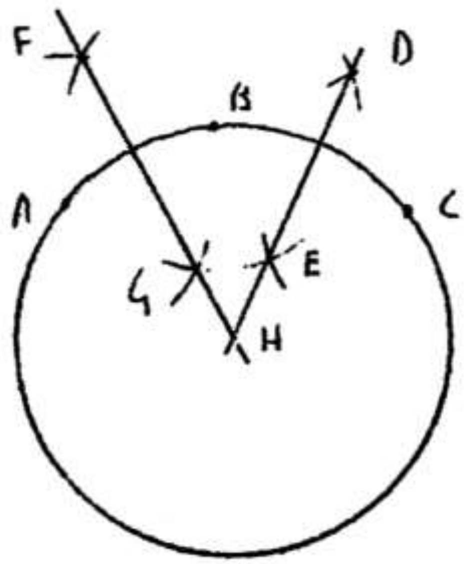
AEDKCFGH è un poligono che è uno *gnomone* sottratto da ABCD per creare il rettangolo simile BFGH:



Documento LXXVI

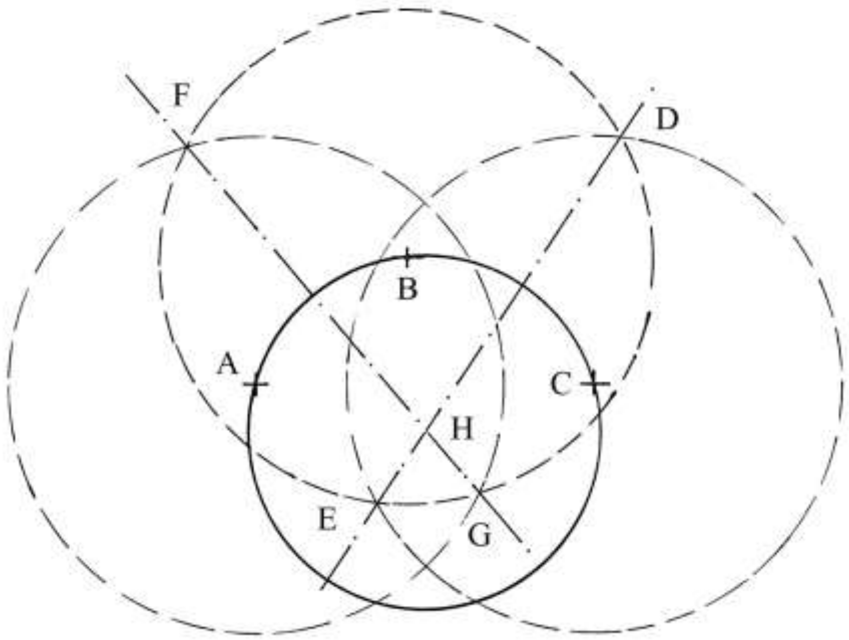
Il problema è elementare: sono dati tre punti – A, B e C – non allineati. Per tutti e tre deve passare una sola circonferenza. La soluzione consiste nella ricerca del centro di quella circonferenza.

Pacioli propone di usare un’apertura di compasso *fissa* per disegnare le prime tre circonferenze:



Doc. LXXVI

Fare centro nei punti A, B e C con un raggio abbastanza grande, per far sì che quei punti restino contenuti al loro interno e tracciare le tre circonferenze:

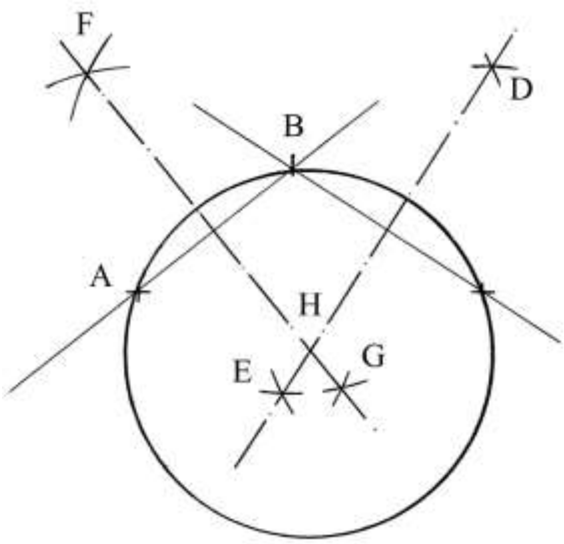


Esse si incontrano nei punti D, E, F e G: per le coppie D-E e F-G disegnare due rette che si incontrano nel punto H.

Fare centro in H e con raggio HA = HB = HC tracciare la circonferenza passante per i tre punti.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Attualmente la soluzione impiegata è più semplice e occupa uno spazio minore perché non richiede la presenza delle tre circonferenze.



A, B e C sono i tre punti non allineati.

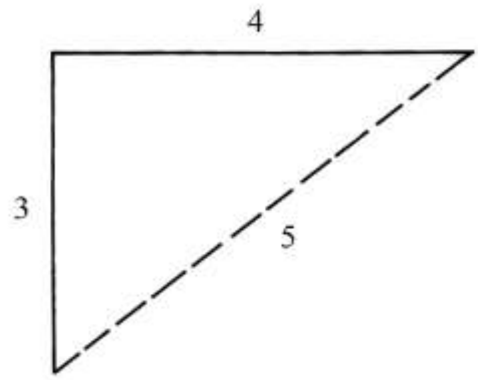
Collegare B con A e con C e costruire gli assi delle corde AB e BC: essi passano per i punti D, E, F e G.

Gli assi DE e FG si incontrano in H, centro della circonferenza passante per i tre punti dati.

Documento LXXVII

Pacioli cita inizialmente i materiali all'epoca usati per realizzare le *squadre*: ferro, rame, ottone e legno; esse recavano sempre un angolo retto.

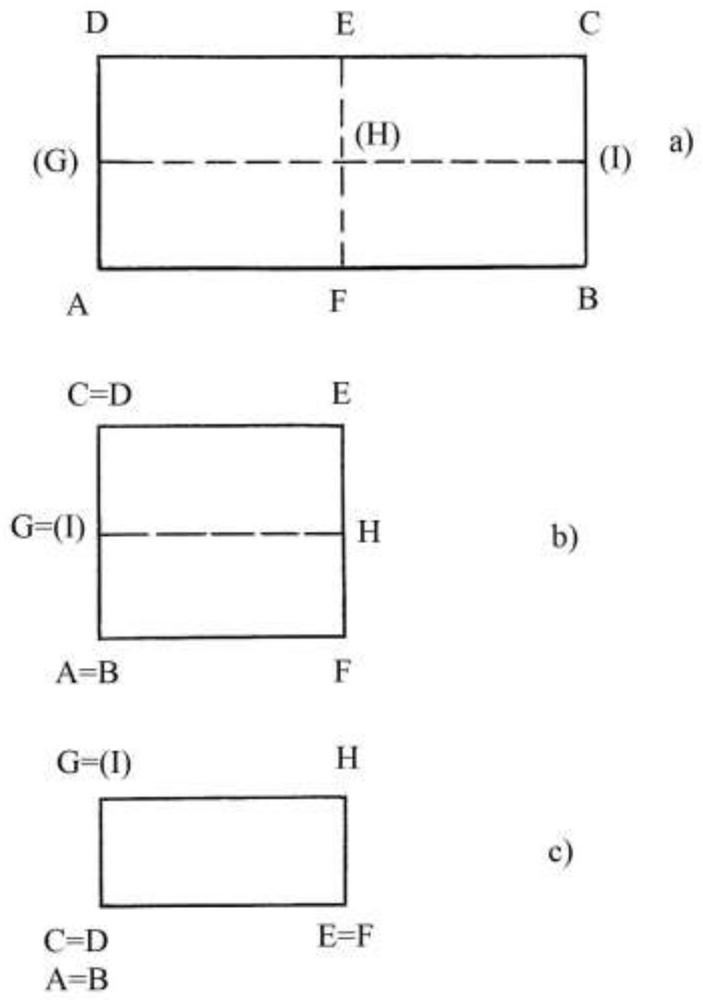
Se un braccio della squadra è lungo 3 e l'altro è 4, la distanza fra le loro estremità è 5:



Dato che Pacioli scrive di *distanza* "*…da l'una de l'altre extremità a l'altra esser aponto 5…*", si può ipotizzare che la squadra fosse priva dell'ipotenusa.

In una situazione nella quale manchino la riga e il compasso, la costruzione di un angolo retto è ricavabile con la piegatura di una carta.

ABCD è un rettangolo che viene piegato una prima volta la linea mediana verticale EF:



Le linee di piegatura sono disegnate tratteggiate anche nel disegno originale.

I punti B e C vanno a sovrapporsi rispettivamente a A e a D e quello (I) coincide con G (figura b).

Intorno a G=(I)H avviene la seconda piegatura (figura c): i punti C=D coincidono con A=B e il punto E si sovrappone a F.

Riaprendo il foglio di carta, le mediane EF e (G)(H)(I) formano nel vertice (H) *quattro* angoli retti.

Ricordiamo che i punti indicati fra parentesi tonde non sono presenti nell'originale e sono qui aggiunti per migliorare la comprensione.

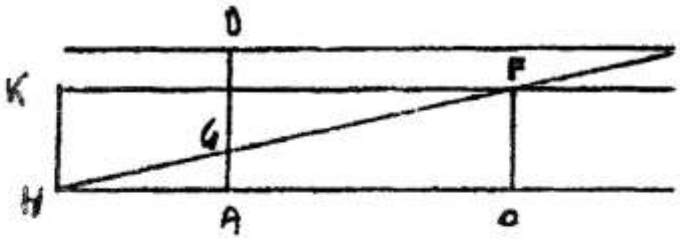
Documento LXXVIII

Il breve testo non è accompagnato da alcun disegno. Il contenuto è privo di qualsiasi valore.

Documento LXXXIX

Il problema presentato consiste nell'allungare o restringere un rettangolo dato, conservando la superficie.

Lo schema originale è impreciso e incompleto:



Doc. LXXIX

Di conseguenza, gli schemi che seguono sono una libera interpretazione del testo e le lettere apposte non corrispondono a quelle usate da Pacioli nel testo stesso, perché assenti sul suo schema.

Un tessuto è lungo 24 unità e largo 4 unità: la forma è quella di un rettangolo che deve essere trasformato in una stoffa di uguale superficie e lunghezza 32 unità.

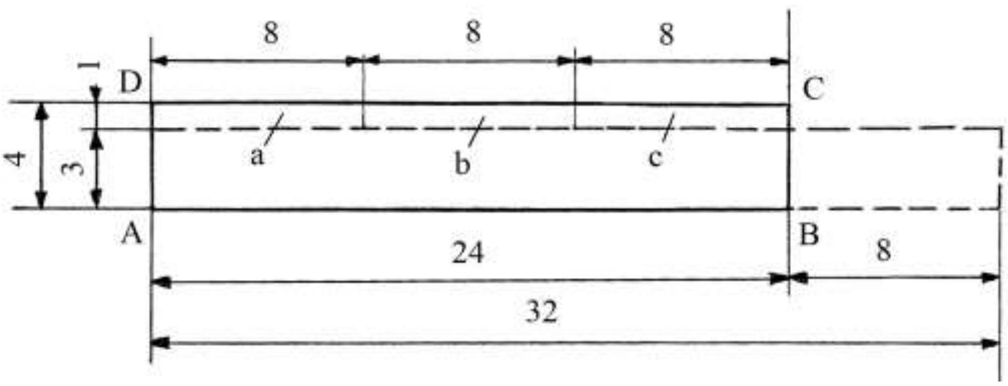
L'area del panno iniziale è:

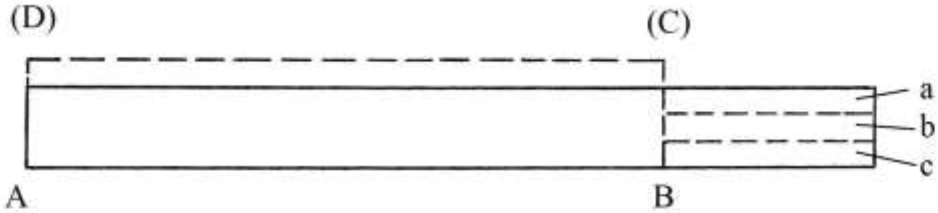
$24 * 4 = 96$ unità^2.

A parità di superficie, la larghezza del nuovo formato è:

$96/32 = 3$ unità.

I due schemi che seguono mostrano le operazioni condotte sulle stoffe:





Nella stoffa iniziale sono tagliati i tre rettangoli indicati con le lettere *a, b* e *c* che sono poi spostati per formare il nuovo rettangolo che ha dimensioni di 32 e di 3 unità.

Bibliografia

1. Agostini Amedeo, "De Viribus Quantitatis di Luca Pacioli", "Periodico di Matematiche", Vol. IV, 1924, pp. 165-192.
2. Arrighi Gino (a cura e con introduzione di), "Trattato d'Aritmetica" di Paolo dell'Abbaco, secondo la lezione del Codice Magliabechiano XI, 86 della Biblioteca Nazionale di Firenze, Pisa, Domus Galilæana, 1964, pp. 160.
3. "Gli Elementi di Euclide", a cura di Attilio Frajese e Lamberto Maccioni, Torino, U.T.E.T., 1970, pp. 1046.
4. Hirth Nunes Dos Santos Tiago Wolfram, "Luca Pacioli and his book De Viribus Quantitatis", tesi di laurea, Università di Lisbona, 2015, pp. 140 (https://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/18435/1/ulfc113829_tm_Tiago_Hirth.pdf).
5. Honsell Furio – Bagni Giorgio Tomaso, "Curiosità e divertimenti con i numeri (tratti dal *De viribus quantitatis* di Luca Pacioli)", Sansepolcro, Aboca Edizioni, 2009, pp. 239.
6. Mackinnon Nick, "The Portrait of Fra Luca Pacioli", "The Mathematical Gazette", Vol. 77, No. 479 (Jul., 1993), pp. 130-219.
7. Mattesini Enzo, "Scavi lessicali nel *De viribus quantitatis* di Luca Pacioli", in "Celebrazioni cinquecentario *De Divina Proportione* – 1509-2009. Pacioli 500 anni dopo", Sansepolcro, Centro Studi "Mario Pancrazi", 2009, pp. 139-169.
8. Pacioli Luca, "De Viribus Quantitatis", Milano, Castello Sforzesco, trascrizione di Maria Garlaschi Peirani del codice n. 250 della Biblioteca Universitaria di Bologna, prefazione e direzione di Augusto Marinoni, Milano, Castello Sforzesco, 1997, pp. XXXIII+458.
9. Pacioli Luca, "De Viribus Quantitatis", edizione a cura di Furio Honsell e di Giorgio T. Bagni, Sansepolcro, Aboca Edizioni, 2009, 3 volumi.